

**Existência de uma partição de
Markov não-estacionária do tipo
Manning para famílias Anosov
no toro**

Ricardo Ramos Silva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Albert Meads Fisher

O autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Agosto de 2017

**Existência de uma partição de
Markov não-estacionária do tipo
Manning para famílias Anosov
no toro**

Este exemplar corresponde à redação
da tese de doutorado elaborada
pelo candidato Ricardo Ramos Silva,
tal com submetida á Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Albert Meads Fisher (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Ricardo dos Santos Freire Junior - IME-USP
- Prof. Dr. Sylvain Philippe Pierre Bonnot - IME-USP
- Prof. Dr. Manuel Stadlbauer - CT-UFRJ
- Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins de Oliveira - IM - UFAL

Agradecimentos

Agradeço...

A Deus, por me dar saúde e sabedoria suficiente para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Laércio e Márcia por sempre se preocuparem com meus estudos, além do incentivo para não desistir nunca.

Às minhas irmãs Roberta e Mayara, por fazerem parte de minha vida.

À minha namorada Sabrina, pela compreensão e incentivo diário, meu grande exemplo de dedicação.

Ao meu orientador Dr. Albert M. Fisher pelo aprendizado, pela excelente orientação, pela paciência e por responder meus inúmeros emails.

À A. M. Fisher, P. Arnoux e a A. Manning pelas figuras, também pelos excelentes textos em seus trabalhos que sugeriram as principais idéias para esboçar este trabalho.

Aos meus amigos Robson e Rodrigo pelas conversas interessantes e pela ajuda.

Aos Docentes do IME pelos excelentes cursos.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para realização deste trabalho meu sincero agradecimento.

Resumo

Introduzimos a noção de uma família Anosov, uma generalização de uma aplicação Anosov de uma variedade. Isto é, uma sequência de difeomorfismos ao longo de variedades Riemannianas compactas tal que o fibrado tangente se decompõe em subespaços expansores e contratores. Desenvolvemos a teoria geral estudando sequência de aplicações a menos de isomorfismos e com respeito a uma relação de equivalência gerada por duas operações naturais: agrupamento e dispersão. Mostramos como construir uma sequência de partições de Markov que reflete a ação geométrica de uma sequência de automorfismos hiperbólicos agindo no n -toro (a família Anosov). A sequência de matrizes de transição é induzida pela sequência automorfismos no grupo de homologia u -dimensional, desde que satisfaça certas condições (aqui u denota a dimensão de expansão). Existem $\binom{n}{u}$ retângulos que são construídos por um sistema Markoviano de funções iteradas, sendo eles o produto cartesiano da projeção de uma face u -dimensional do cubo unitário no subespaço instável com a projeção da face $(n - u)$ -dimensional no subespaço estável.

Palavras-chave: Famílias Anosov; subshift não-estacionário do tipo finito; diagrama de Bratteli; sistema Markoviano de funções iteradas; métrica projetiva; partição de Markov não-estacionária.

Abstract

We introduce the notion of an Anosov family, a generalization of an Anosov map of a manifold. This is, a sequence of diffeomorphisms along compact Riemannian manifolds such that the tangent bundles split into expanding and contracting subspaces. We develop the general theory, studying sequences of maps up to a notion of isomorphism and with respect to an equivalence relation generated by two natural operations, gathering and dispersal. We show how to construct a sequence of Markov partitions that reflects the geometrical action of a sequence of hyperbolic automorphisms (the Anosov family) acting in the n -torus. The sequence of transition matrices is induced by the sequence automorphisms in the u -dimensional group of homology, provided that it satisfies certain conditions (here u denotes the expansion dimension). There are $\binom{n}{u}$ rectangles that are constructed by a Markovian system of iterated functions, being they the cartesian product of the projection of a u -dimensional face of the unit cube in the unstable subspace with the projection of the face $(n - u)$ -dimensional in the stable subspace.

Keywords: Anosov families; nonstationary subshift of finite type; Bratteli diagram; iterated function Markovian system; projective metric, nonstationary Markov partition.

Sumário

Introdução	2
1 Família Anosov	6
1.1 Aplicação de Anosov no toro quadrado	6
1.2 Família Anosov como Família de Aplicações	9
1.3 Hiperbolicidade	11
1.4 Dinâmica Simbólica das Famílias de Aplicações	17
1.4.1 Sequência de Partições	17
1.4.2 Partições de Markov	19
1.4.3 Subshift não-estacionário	23
1.4.4 Dinâmica Simbólica para as famílias Anosov	28
1.5 Espaço Shift (não-estacionário) de Vértices e de Arestas e o Diagrama de Bratteli.	30
2 IFS e a semiconjugação	38
2.1 Sistema Markoviano de funções iteradas	38
2.2 Uma semiconjugação do Espaço Shift com T^n	44
3 O Step Cycle	53
4 Uma Partição de Markov em T^n	62
4.1 A métrica projetiva no cone convexo	62
4.2 Sequência de autovetores	70
4.3 Uma partição de Markov para T^n	74

A Homologia	85
A.1 O produto fraco de grupos abelianos livres	85
A.2 Grupos de Homologia Singular	87
A.3 Operador Bordo	88
A.4 Complexos de Cadeias de grupos abelianos e Homologia	89
A.5 CW-Complexos	92
A.6 Grupo de Homologia de um CW-complexo.	94
A.7 Orientação	95
A.8 Suporte	97
A.9 Produto Cartesiano	98
A.10 Exemplo: o grupo de Homologia $H_r(\mathbb{T}^n; R)$	98
Bibliografia	101
Índice Remissivo	103

Introdução

Na dinâmica hiperbólica, partições de Markov formam um papel importante, ligando dinâmica, geometria e álgebra. Estas ideias foram introduzidas para automorfismos no toro por Roy Adler e Benjamin Weiss na década de 60 e estendido para difeomorfismo de Anosov por Yakov Sinai, Rufus Bowen e outros, durante a década de 70. Bowen provou que para dimensão maior que 2, não temos fronteira “smooth” para os elementos da partição e Tim Bedford juntamente com Shunji Ito explicitaram exemplos em \mathbb{R}^3 com fronteira fractal. Anthony Manning estendeu estas ideias para qualquer dimensão em 2002. Uma outra extensão é para o caso de dinâmica hiperbólica não-estacionária para dimensão 2, feito por Pierre Arnoux e Albert Fisher em 2005.

Este trabalho foi baseado principalmente nos artigos [1] e [10]. Quando estudamos dinâmica, usualmente consideramos as iteradas de uma única aplicação em um espaço fixo. Aqui, estamos interessados na dinâmica construída por uma sequência de aplicações, ao longo de uma sequência de espaços. Em [1], A. M. Fisher e P. Arnoux desenvolvem a teoria geral para sequência de aplicações Anosov. Em [10], A. Manning mostrou, sob certas hipóteses, a existência de uma partição de Markov para uma aplicação Anosov em \mathbb{T}^n . O que fazemos é juntar as duas ideias. Uma *partição de Markov* é uma partição de um determinado espaço em subconjuntos chamados retângulos que permitem que as órbitas do automorfismo sejam representadas por sequências de símbolos de um shift não-estacionário do tipo finito. O objetivo deste trabalho é mostrar como construir uma sequência de partições de Markov para uma sequência e aplicações Anosov em \mathbb{T}^n que expressam a forma de como os automorfismos mapeiam as classes de homologia.

Algumas das dificuldades encontradas para a generalização para uma família Anosov é que nesta não temos o teorema de Perron-Frobenius, tampouco o conceito de ergodicidade. Também há diferenças consideráveis a respeito da convergência de algumas aplicações consideradas, já que no caso de uma única aplicação Anosov, estas naturalmente são comparadas com séries geométricas convergentes.

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados gerais de aplicações e famílias Anosov, a fim de fornecer uma linguagem e contexto apropriados. Em seguida, introduzimos a dinâmica simbólica para famílias, dado uma sequência de partições. Para o caso de famílias Anosov, temos uma sequência de partições Markov e seus correspondentes espaços simbólicos dados por uma sequência não estacionária de matrizes com coeficientes não-negativos e representados geometricamente por *diagramas bi-laterais de Bratteli*. Para descrevermos um conceito geral, introduzimos a noção de *morfismo* que agrupa sequências de aplicações em categorias com respeito a certos tipos de homomorfismos. Uma *família de aplicações* é uma sequência de aplicações contínuas ao longo de uma sequência de espaços métricos compactos chamados *componentes*. Uma conjugação uniforme entre duas famílias de aplicações é dado por uma sequência equicontínua de homeomorfismos. Mostramos que conjuntos estáveis e instáveis são preservados por conjugações uniformes e, conseqüentemente, são noções bem definidas na categoria de família de aplicações. Para uma categoria de famílias de aplicações diferenciáveis, definimos os morfismos sendo conjugações limitadas (que tem limites uniformes nas derivadas). Então conjugações limitadas preservam expansão (a menos de constante). Conseqüentemente temos que Famílias Anosov e eventualmente Anosov são categorias com respeito a conjugações limitadas. Começamos fixando uma família de aplicações, esta tem (assim como para uma única aplicação) uma noção de codificação da dinâmica pelo itinerário de um ponto, mas em vez de estar sendo descrito pela órbita localizada com respeito a uma única partição, esse “nome” do ponto será agora dado por uma sequência de partições ao longo da sequência de espaços. Nós generalizamos partições de Markov de forma natural, o novo fenômeno é que, nesta configuração, o espaço simbólico está agora definido por uma sequência de matrizes de

transição com entradas não-negativas, substituindo a matriz quadrada que define um subshift de tipo finito (*stf*). Introduzimos a dinâmica shift tomando união de todos compactos definidos pelos shifts da sequência de matrizes de transição. Este espaço é agora uma família de aplicações cujas componentes são simplesmente todos os shifts e é chamado de “compactum de Markov”. Este espaço (o compactum juntamente com seus shifts), é um shift não-estacionário de tempo finito (*sntf*). Isto dá uma segunda família, a família de aplicações combinatorial.

No Capítulo 2, desenvolvemos a teoria geral de *sistema Markoviano de funções iteradas*, isto é, *IFS* para o caso de sequência. Este está associado a um *espaço shift não-estacionário*. Um *IFS Markoviano* age em $\prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}(U_t)$ onde $\mathcal{K}(U_t)$ é o produto cartesiano de conjuntos compactos não vazios de U_t . Mostramos que, sob certas hipóteses, existe um único ponto fixo que é atrator.

No Capítulo 3 descreveremos esta convergência associada a um *espaço shift não-estacionário* de \mathbb{T}^n . O toro \mathbb{T}^n é dado como o grupo quociente $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, com sua projeção natural $\pi_{\mathbb{T}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, $\pi_{\mathbb{T}}(x) := x + \mathbb{Z}^n$, ou, equivalentemente, como o espaço quociente de cubo unitário I^n (onde I denota $[0, 1]$) pela identificação usual das faces opostas. Em \mathbb{R}^n usamos a base padrão $e_j = (\delta_{ij})_{i=1}^n$ para $1 \leq j \leq n$, que é ortonormal. Uma matriz M_k , $(n \times n)$, com entradas inteiras e determinante ± 1 (de modo que sua inversa também tem entradas inteiras) induz um automorfismo $\overline{M}_k : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, onde $\overline{M}_k(x + \mathbb{Z}^n) = M_k(x) + \mathbb{Z}^n$, para cada vetor coluna v em \mathbb{R}^n . O primeiro grupo de homologia $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ pode ser identificado com \mathbb{R}^n tomando a base e_1, \dots, e_n consistindo das *classes de homologia* dos círculos em \mathbb{T}^n que são as imagens, sobre $\pi_{\mathbb{T}}$, das 1-dimensionais arestas do cubo unitário que ligam a origem aos vértices e_1, \dots, e_n em \mathbb{R}^n . Como \mathbb{T}^n é o produto destes círculos, a *fórmula de Künneth* pode ser usada para calcular o r -ésimo grupo $H_r(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$, com $0 \leq r \leq n$, que é um espaço vetorial de dimensão $\binom{n}{r}$ (veja apêndice, seção A.10). Este espaço tem uma base ortonormal dada pela classe fundamental dos toros r -dimensionais (com orientação apropriada) embutido em \mathbb{T}^n como a imagem sobre $\pi_{\mathbb{T}}$ dos subespaços r -dimensionais de \mathbb{R}^n gerado por $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}$ ou das correspondentes r -dimensionais faces do cubo unitário em \mathbb{R}^n . Indexamos esta

base com o conjunto $C(n, r) = \{Q \subset \{1, \dots, n\} : \#Q = r\}$. O automorfismo \overline{M}_k de \mathbb{T}^n induz um automorfismo \overline{M}_k^1 em $H_1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ que é representada, com respeito a base canônica $\{e_k^1, \dots, e_k^n\}$, pela própria matriz M_k . Dual ao produto “cup” de r autovetores generalizados no grupo de *cohomologia* $H^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ são os autovetores generalizados de \overline{M}_k^* em $H^r(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, assim os autovalores da matriz \overline{M}_k^r em $H_r(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ são os $\binom{n}{r}$ produtos de r dos n autovalores $\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^n$ de $\overline{M}_k^1 = M_k$ (contando com multiplicidade). Por simplicidade, denotaremos \overline{M}_k^r por M_k^r . A sequência de matrizes $(M_k^r)_{k \in \mathbb{Z}}$ funcionará com matrizes de transição para a família. Para $P = (p_1, \dots, p_r) \in C(n, r)$, definimos $\rho_P : I^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\rho_P(x_1, \dots, x_r) := (t_1, \dots, t_n)$ onde cada $t_{p_j} = x_j$ e $t_k = 0$ se $k \notin P$. Aqui $I^r := \{(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1 \text{ para } 1 \leq j \leq r\}$. Consideremos também um complexo de cadeia de cubos $\mathcal{C}_* = \bigoplus_{r=0}^n \mathcal{C}_r$, onde \mathcal{C}_r é o grupo abeliano livre gerado por $\{\rho_P + z : P \in C(n, r), z \in \mathbb{Z}^n\}$. Chamamos $\rho_P + z$ de um degrau r -cubo por ser paralelo ao r -plano coordenado e cobrir o r -toro. E definimos uma aplicação $Y : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$ como a versão “step” da família $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Para cada r , $0 \leq r \leq n$ e $i \in \mathbb{Z}$; $Y_i : \mathcal{C}_r \rightarrow \mathcal{C}_r$ será definida para cada $Y_i(\rho_P)$ por $Y_i(\rho_P + z) := Y_i(\rho_P) + M_i z$ com $z \in \mathbb{Z}^n$, estendendo-se linearmente para os geradores de \mathcal{C}_* . A esta aplicação damos o nome “step cycle”. Para certos $z \in \mathbb{Z}^n$, a aplicação Y está bem definida e $M_j^{-1} Y_j(\rho_P)$ é homólogo a ρ_P , para cada j . Para certos $z \in \mathbb{Z}^n$, a aplicação Y está bem definida e $M_j^{-1} Y_j(\rho_P)$ é homólogo a ρ_P , para cada j .

No Capítulo 4, investigamos as projeções de $M_j^{-1} Y_j \rho_P(I^r)$, nos subespaços estáveis e instáveis da família Anosov U_j e S_j , respectivamente. Com um argumento de limite sob a ação da família e da aplicação Y , conseguimos elementos para uma sequência de partições de Markov.

Capítulo 1

Família Anosov

Neste capítulo iremos definir *família Anosov* e alguns resultados gerais, será discutido também como podemos obter a dinâmica combinatória.

1.1 Aplicação de Anosov no toro quadrado

As *aplicações Anosov* também conhecidas como automorfismos hiperbólicos no toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, embora sejam induzidas por aplicações lineares no espaço Euclidiano, o que resulta numa dinâmica extremamente simples, quando aplicadas ao toro geram uma estrutura dinâmica extremamente rica.

Denotamos por $\{(\alpha, \beta)\}$ o conjunto de pontos no plano que são equivalentes a $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, isto é, se $(x, y) \in \{(\alpha, \beta)\}$ então $(x, y) \sim (\alpha, \beta)$ no sentido que $x - \alpha$ e $y - \beta$ são inteiros e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Consideremos também π como sendo a projeção natural de \mathbb{R}^2 em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, isto é,

$$\pi(x, y) = [x, y] = \pi(x + m, y + n), \text{ onde } (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Certamente sistemas dinâmicos no toro podem ser mais eficientemente descritos no plano e depois projetados no toro.

Definição 1.1. *Suponha $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} x + m \\ y + n \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, para qualquer (x, y) no plano e m, n inteiros fixos. Disto segue que $\pi \circ F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pi \circ F \begin{bmatrix} x + m \\ y + n \end{bmatrix}$*

de modo que F induz uma aplicação \widehat{F} definida pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \end{array}$$

Por exemplo, se F for uma aplicação linear cuja matriz que a representa é inteira (isto é, com entradas em \mathbb{Z}), então \widehat{F} está bem definida em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. \widehat{F} é um homomorfismo do toro. Se F^{-1} também tem matriz com entradas inteiras, então chamamos \widehat{F} de **automorfismo no toro**.

Definição 1.2. Seja $F(x) = Lx$, onde L é uma matriz (2×2) satisfazendo:

- (i) Todas entradas de L são inteiras;
- (ii) $\det L = \pm 1$;
- (iii) L é hiperbólico, isto é, $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda$ autovetor de L .

A aplicação F_L , induzida por L em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, é denominada **aplicação Anosov linear**.

F_L é claramente diferenciável, pois sua matriz Jacobiana é simplesmente a matriz L . Mais ainda, como $\det L = \pm 1$, a inversa de L é também uma matriz inteira. Então L^{-1} também induz uma aplicação Anosov que é a aplicação inversa de F_L . Disto segue que F_L é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

A Proposição a seguir mostra que F_L é dinamicamente interessante no toro.

Proposição 1.1. O conjunto dos pontos periódicos $Per(F_L)$ de F_L é denso em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Demonstração. A ideia feita em [5] é a seguinte: Seja $p \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ com coordenadas racionais. Após encontrar um denominador comum, podemos assumir que p é da forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$, onde α, β e k são inteiros. Pontos desta forma são claramente densos em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, visto que podemos tomar k arbitrariamente grande. Afirmamos que p é periódico com período menor ou igual a k^2 .

Para ver isto, notemos que existem exatamente k^2 pontos em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ da forma $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ com $0 \leq \alpha, \beta \leq k$. Como as imagens de tais pontos por F_A também podem ser escritos

desta forma, já que as entradas de L são inteiras, isto significa que F_L permuta estes pontos, logo existem inteiros i e j tais que $F_L^i(p) = F_L^j(p)$ com $|i - j| \leq k^2$. Aplicando F_L^{-i} a equação, temos que p é periódico de período menor ou igual a k^2 . \square

Como L é hiperbólica com $\det L = \pm 1$, os autovalores são, ambos, números reais e, enquanto um deles satisfaz $|\lambda_s| < 1$, temos o outro $|\lambda_u| > 1$ (note que esta última afirmação não seria verdadeira se os autovetores fossem complexos, já que teríamos um autovalor conjugado do outro, portanto teriam o mesmo valor em módulo).

Em \mathbb{T}^n a definição 1.2 continua valendo, mas agora a matriz é $(n \times n)$. Seja F uma aplicação Anosov linear, e definimos S, U espaços DF - invariantes associados ao autovalores com módulos < 1 e > 1 , respectivamente. Então existem constantes $c > 0$ e λ tais que $\|(Df^n)|_S\| \leq c\lambda^n$ e $\|(Df^{-n})|_U\| \leq c\lambda^n$, $\forall n \geq 0$. Assim, se definirmos $S_x = x + S$ e $U_x = x + U$, temos:

Definição 1.3. *Seja F um difeomorfismo Anosov de uma variedade fechada Ω . Então existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ e, em cada $x \in \Omega$, uma decomposição $T_x\Omega = S_x \oplus U_x$ tais que:*

- (i) $(D_x F)S_x = S_{F(x)}$;
- (ii) $(D_x F)U_x = U_{F(x)}$;
- (iii) $\|(D_x f^n)|_{S_x}\| \leq c\lambda^n$;
- (iv) $\|(D_x f^{-n})|_{U_x}\| \leq c\lambda^n$; $\forall n \geq 0$ e $x \in \Omega$.

Em 1966 Anosov [20] introduziu a classe de difeomorfismos que aqui denominamos, seguindo a nomenclatura de Smale, difeomorfismos de Anosov. Em seu trabalho, Anosov demonstrou que difeomorfismos de Anosov que preservam medida gerada por uma forma de volume e que são C^1 Hölder (isto é, de classe C^1 e com derivada Hölder contínua) são ergódicos.

Teorema 1.1. *Todo difeomorfismo de Anosov de um toro é topologicamente equivalente a um Anosov linear.*

Para demonstração, veja [21].

No presente trabalho, estaremos mais interessados em uma sequência de aplicações Anosov no toro, onde não temos pontos periódicos, mas também podemos definir hiperbolicidade. A seguir daremos a definição de uma *família de aplicações*.

1.2 Família Anosov como Família de Aplicações

Definição 1.4. *Seja $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de espaços métricos compactos com métricas ρ_i . Atribuímos ao espaço total a métrica $\rho(x, w) = \rho_i(x, w)$ se $x, w \in \Omega_i$, é igual a 1 se x, w estão em espaços diferentes. Assumimos que $f_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$ são funções contínuas. Definimos a aplicação total $f : \Omega \rightarrow \Omega$ na união disjunta tal que $f(x) = f_i(x)$ se $x \in \Omega_i$. A n -ésima composição $f^n = f_{i+n} \circ \dots \circ f_i$ aplica Ω_i em Ω_{i+n} , para cada i . Chamamos o par resultante (Ω, f) uma **família de aplicações**, onde $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Dizemos que (Ω, f) é **inversível** se todas as aplicações forem homeomorfismos.*

Por simplicidade, assumimos que o diâmetro de cada espaço é menor ou igual a 2, isto assegura a desigualdade triangular.

Para descrever um conceito geral, nós consideraremos sequências de aplicações como uma categoria com respeito a certos tipo de homomorfismos, esta será nossa noção de morfismo que agrupa todas as famílias de aplicações de uma categoria. Por exemplo:

Definição 1.5. *Para a categoria de **família de aplicações diferenciáveis** (famílias de aplicações - \mathcal{C}^1 ao longo de uma sequência de variedades compactas com métricas Riemannianas) definimos as conjugações limitadas como sendo os morfismos (tendo limites uniformes nas derivadas).*

Dada uma sequência de conjuntos $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para $i \in \mathbb{Z}$, a união disjunta escrita como $\Omega = \coprod \Omega_i$ é o coproduto na categoria de conjuntos, veja por exemplo [9]. Recordamos que isto é simplesmente a união indexada, isto é, um ponto em Ω é um ponto p_i em algum Ω_i . Por conveniência, ocultaremos este índice e escreveremos p para este ponto; então, qualquer $p \in \Omega$ pertence a exatamente um Ω_i . Referimo-nos aos Ω_i como **componentes** de Ω .

Observação 1.1. *Se as componentes forem espaços topológicos, atribuímos a Ω uma topologia unindo esses espaços discretamente. Com isso queremos dizer que a topologia é gerada pela união de todas as topologias, de modo particular cada Ω_i é aberto e fechado em Ω (uma componente Ω_i pode ter mais que uma componente topológica, um exemplo é dado pelo espaço shift não-estacionário, visto mais adiante).*

Um exemplo simples de família de aplicações é quando todas as aplicações e espaços são idênticos.

Definição 1.6. *Dado um homeomorfismo f_a de um espaço métrico Ω_a , definimos a **família constante** (Ω, f) associada a f_a como sendo a seguinte família de aplicações: $\Omega = \coprod \Omega_i$ onde cada $\Omega_i = \Omega_a$ (com a mesma métrica); $M_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$ é igual a f_a módulo esta identificação.*

Dizemos que a *família de aplicações* (Ω, f) é um *levantamento* do sistema dinâmico (Ω_a, f_a) . Um caso particularmente trivial é a **família identidade** (Ω, id) , isto é, a *família de aplicações constante* que é um levantamento da aplicação identidade em Ω .

Definição 1.7. *Uma (semi)conjugação uniforme entre duas famílias é uma (semi)conjugação que também é uniformemente contínua (no espaço todo) e sobrejetora; equivalentemente, a sequência $h = (h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de aplicações que faz esta conjugação é uniformemente equicontinua em Ω_i .*

Definição 1.8. *Seja Ω um espaço métrico e $f : \Omega \rightarrow \Omega$ um homeomorfismo. O conjunto estável $W^s(x)$ para $x \in \Omega$ é o conjunto $\{y \in \Omega : \text{dist}(f^n x, f^n y) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$. O conjunto instável $W^u(x)$ é o conjunto estável de f^{-1} .*

Dada uma família (Ω, f) , aplicamos a definição acima para a aplicação f e temos:

Proposição 1.2. *Conjuntos estáveis e instáveis são preservados por semiconjugação uniforme; se h é uma conjugação de (Ω, f) para (Ψ, g) , então para todo $x \in \Omega$, $h(W^s(x)) \subseteq W^s(h(x))$ e $h(W^u(x)) \subseteq W^u(h(x))$. Além disto, se h é uma conjugação uniforme então $h(W^s(x)) = W^s(h(x))$ e $h(W^u(x)) = W^u(h(x))$.*

Demonstração. Imediata da equicontinuidade. \square

Corolário 1.1. *Conjuntos estáveis e instáveis são noções bem definidas na categoria de família de aplicações.*

Observação 1.2. *Da definição anterior, o conjunto instável na k -ésima componente depende somente do passado da sequência de aplicações, isto é, depende de f_i para $i < k$, enquanto o conjunto estável depende somente do futuro $i \geq k$; ver Proposição 1.7.*

1.3 Hiperbolicidade

Agora vamos mudar para a categoria diferenciável, onde nosso primeiro interesse é uma generalização natural de difeomorfismos de Anosov.

Definição 1.9. *Uma **família Anosov** é uma família de aplicações (Ω, f) tal que:*

- (i) $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variedades Riemannianas (isto é, variedades compactas - \mathcal{C}^∞ com métrica Riemanniana) e as aplicações $f_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$ são difeomorfismos de classe \mathcal{C}^1 ;
- (ii) o fibrado tangente $T\Omega$ tem uma decomposição contínua $S \oplus U$ que é f -invariante; e
- (iii) existem constantes $\lambda > 1$ e $c > 0$ tal que para cada $n \geq 1$, para cada i , para todo $p \in \Omega_i$ tem-se:

$$\| D(f_i^{-n})(v) \| \leq c\lambda^{-n} \| v \|$$

para todo vetor $v \in U^p$, e

$$\| D(f_i^n)(v) \| \leq c\lambda^{-n} \| v \|$$

para todo $v \in S^p$.

(Aqui $S^p \oplus U^p$ é o espaço tangente em p .)

Se pudermos tomar $c = 1$ dizemos que a família é **estritamente Anosov** .

Observação 1.3. *Uma diferença interessante entre uma família de aplicações e uma única aplicação é que para uma família há sempre muitas decomposições invariantes contínuas, enquanto que por exemplo, para uma aplicação Anosov há essencialmente uma, isto por causa da densidade dos pontos periódicos como mostrado na Proposição 1.1. No entanto, para famílias de aplicações, existe uma única decomposição hiperbólica: ver Proposição 1.4 e Observação 1.6.*

Lema 1.1. *Seja M uma aplicação linear inversível entre espaços com produto interno. Sejam c_1, c_2 os raios mínimo e máximo do elipsóide que é a imagem da bola unitária, isto é $c_1 = \inf \left\{ \frac{\|Mv\|}{\|v\|} \right\}$ e $c_2 = \sup \left\{ \frac{\|Mv\|}{\|v\|} \right\}$. Então $c_2 = \|M\|$ e $c_1^{-1} = \|M^{-1}\|$.*

Definição 1.10. *A **família inversa** de uma família de aplicações inversível (Ω, f) é uma família de aplicações (Ψ, g) com $\Psi_i = \Omega_{-i}$ e $g_i = (f_{-i-1})^{-1}$.*

Observação 1.4. *Esta não é uma composição inversa já que não há noção de composição das famílias, mas sim o inverso da família que é a família composta por aplicações inversas. Há, no entanto, uma dualidade, já que a família inversa da família inversa é a família original.*

Definição 1.11. *Dada uma família (Ω_i, f_i) de difeomorfismos em variedades Riemannianas (não necessariamente compactas), suponha que exista um conjunto invariante $\Lambda = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ para a aplicação total f em $\Omega = \coprod \Omega_i$, tal que $T\Omega_\Lambda$ tem uma decomposição invariante, e tal que existam, como citado anteriormente, constantes $\lambda > 1$ e $c > 0$ para todo $p \in \Omega$. Então chamamos (Ω, f, Λ) de **família hiperbólica** .*

Observação 1.5. *Por definição, toda família Anosov é uma família hiperbólica, com $\Lambda = \Omega$ e cada Ω_i é compacto.*

Exemplo 1. Um simples exemplo é a família constante (Ω, f) definida como o levantamento de uma aplicação Anosov f_a de uma variedade Riemanniana Ω_a onde todas as variedades Ω_i e as aplicações f_i são idênticas, copias de Ω_a e f_a .

Definição 1.12. *Uma família de aplicações é **eventualmente Anosov** se existir uma decomposição f -invariante, como antes, mas agora com sequências λ_i^u, λ_i^s para todo $i \in \mathbb{Z}$ definidas por*

$$\begin{aligned}\lambda_i^u &\equiv \inf\{\|D(f_i)(v)\|/\|v\| \text{ tal que } v \in E^u\}, \\ \lambda_i^s &\equiv \sup\{\|D(f_i)(v)\|/\|v\| \text{ tal que } v \in E^s\},\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, pelo Lema 1.1:

$$1/\lambda_i^u = \|(D(f_i^{-1})^u)\|, \quad \lambda_i^s = \|D(f_i)^s\|,$$

onde $D(f_i)^u, D(f_i)^s$ denotam as aplicações lineares restritas a estes subespaços, com estas sequências satisfazendo, para algum (consequentemente, para todo) $k \in \mathbb{Z}$,

$$\prod_k^{k+n} \lambda_i^u \rightarrow +\infty \quad e \quad \prod_{k-n}^k (\lambda_i^u)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty, \quad (1.1)$$

e

$$\prod_k^{k+n} \lambda_i^s \rightarrow 0 \quad e \quad \prod_{k-n}^k (\lambda_i^s)^{-1} \rightarrow +\infty \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Esta condição diz que cada vetor em E^u será eventualmente expandido em $+\infty$ e eventualmente contraído em $-\infty$. Notemos que a família inversa de uma família eventualmente Anosov é eventualmente Anosov.

Definição 1.13. *Dada uma família de aplicações (Ω, f) , uma segunda família $(\tilde{\Omega}, \tilde{f})$ é um **agrupamento** de (Ω, f) se existir uma subsequência $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de inteiros estritamente crescente tal que $\tilde{\Omega}_i = \Omega_{n_i}$ e $\tilde{f}_i = f_{n_{i+1}-1} \circ \cdots \circ f_{n_i+1}$.*

Se a família $(\tilde{\Omega}, \tilde{f})$ é um agrupamento de (Ω, f) , dizemos que (Ω, f) é uma **dispersão** de $(\tilde{\Omega}, \tilde{f})$. Ou seja, dispersão é o processo contrário do agrupamento.

Proposição 1.3. *Uma família Anosov é **eventualmente Anosov**. Uma família eventualmente Anosov tem um agrupamento que é **estritamente Anosov**.*

Proposição 1.4. *Dada uma família eventualmente Anosov (Ω, f) , a decomposição $S \oplus U$ do fibrado tangente $T\Omega$ é única.*

Demonstração. Escolha uma componente, digamos Ω_0 . Como a decomposição é invariante, então ela é determinada pela decomposição em Ω_0 . Suponha que haja uma segunda decomposição hiperbólica $\tilde{S} \oplus \tilde{U}$; seja que \tilde{v}_0^s um vetor em \tilde{S}_p , com base em algum ponto p , tal que $\tilde{v}_0^s \notin S_p$. Agora isso pode ser expresso como uma soma na primeira decomposição, $\tilde{v}_0^s = av_0^u + bv_0^s$ com $a \neq 0$. Aplicando Df_i , esse vetor se expande até $+\infty$, uma vez que tem componente instável não nula. No entanto, da parte (iii) da *Definição 1.9*, o espaço estável é para contrair quando o tempo vai a $+\infty$, dando uma contradição. Portanto, devemos ter $a = 0$ e $\tilde{S}_p \subset S_p$. Por argumento simétrico, $S_p \subset \tilde{S}_p$. A mesma prova aplicada à família inversa mostra que $\tilde{U} = U$, e, portanto, a decomposição é única. \square

Observação 1.6. *Para uma família Anosov (em contraste com o caso de uma única aplicação) existem muitas decomposições invariantes: basta escolher uma decomposição no tempo 0 e transportá-la para frente e para trás nas outras componentes. A Proposição mostra que qualquer outra decomposição invariante não pode ser hiperbólica.*

Corolário 1.2. *Um agrupamento de uma família eventualmente Anosov é novamente eventualmente Anosov. Na classe de famílias eventualmente Anosov, agrupamentos preservam a decomposição do fibrado tangente, e também preserva os conjuntos estáveis e instáveis.*

Demonstração. Suponhamos que são dadas uma família eventualmente Anosov (Ω, f) e uma família (Ψ_n, g) que é um agrupamento ao longo das componentes $\Psi_n = \Omega_{i_n}$, por alguma subsequência estritamente crescente de inteiros $i_n: n \in \mathbb{Z}$. Esta afirmação significa que, em cada uma dessas componentes, as decomposições são as mesmas. Agora fica claro que a decomposição resultante se encaixa na definição de uma decomposição eventualmente Anosov. Assim, (Ψ_n, g) é uma família eventualmente Anosov. Pela

Proposição 1.4, esta decomposição é única, logo as decomposições são preservadas pelo agrupamento. \square

Observação 1.7. *Disto resulta que, dada uma família eventualmente Anosov (Ω, f) , se uma segunda família (Ψ, g) é uma dispersão e é eventualmente Anosov, então o conjunto estável e instável são preservados. Note que o inverso à Proposição 1.3 é falso, ou seja, existem famílias de aplicações para as quais há um agrupamento que é Anosov mas que elas mesmas não são eventualmente Anosov, como mostra a Proposição a seguir:*

Proposição 1.5. *Toda família de aplicações inversível (Ω, f) tem uma dispersão, que tem um agrupamento, que é igual à família identidade (Ω_0, id) .*

Demonstração. De fato, seja $\{h_i\}$ a família de aplicações que conjuga (Ω, f) com a família identidade, isto é, para $g_i = Id$ (a identidade), temos $g_i = h_{i+1} \circ f_i \circ h_i^{-1}$. A dispersão de (Ω, f) é a sequência de aplicações $\dots, h_0^{-1}, f_0, h_1, h_1^{-1}, f_1, h_2, h_2^{-1}, \dots$; agrupando esta sequência no formato $(h_1 \circ f_0 \circ h_0^{-1})$ temos o agrupamento que é (Ω_0, id) . \square

Vimos acima o exemplo mais simples, a família constante, onde a métrica não muda. Mas, em geral, a dinâmica de uma família de aplicações é determinada pela interação de uma sequência de aplicações, e de métricas, ambas podem ser “variáveis”. Uma família pode ser simplesmente de um ou de outro tipo, assim, no caso em que os espaços são todos isométricos, toda a dinâmica é realizada pelas aplicações, e a situação oposta, onde cada aplicação é a identidade, toda a mudança é feita pelas métricas.

Definição 1.14. *Sejam ρ_1 e ρ_2 duas métricas Riemannianas e T_p o espaço tangente da variedade Ω em p . Então ρ_1 e ρ_2 são limitadamente equivalentes se $0 < \frac{\|u\|_{\rho_2}}{\|v\|_{\rho_1}} < +\infty$, $\forall u, v \in T_p$, em cada $p \in \Omega$.*

*Dois famílias de aplicações diferenciáveis (Ω, f) e (ψ, g) , munidas das métricas ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, são **limitadamente conjugadas** se existir uma conjugação dife-*

reenciável dada por uma família $\{h_i\}$ que induz uma equivalência limitada das métricas, isto é, $0 < \frac{\|Dh_i\|_{p_2}}{\|v\|_{p_1}} < +\infty, \forall v \in T_p$.

Pelo Lema 1.1, uma conjugação h é limitada se e somente se existe $c > 0$ tal que $\|Dh_i\| < c$ e $\|D(h_i^{-1})\| < c$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Tome, por exemplo, $c = 1 + \sup\{c_1^{-1}; c_2\}$, onde $\frac{\|Dh_i\|}{\|v\|} \in [c_1, c_2]$.

Note que ter uma conjugação limitada é equivalente a ter uma conjugação diferenciável e uniformemente Lipschitz.

Proposição 1.6. *Seja (Ω, f) uma família eventualmente Anosov. Seja (Ψ, g) outra família de difeomorfismos em variedades Riemannianas (também com uma métrica Riemanniana definida), e seja $h : \Omega \rightarrow \Psi$ um difeomorfismo que conjugua f e g . Assuma que h é uma conjugação limitada. Então, (Ψ, g) é uma família eventualmente Anosov. Se (Ω, f) é uma família Anosov, então (Ψ, g) também o é.*

Demonstração. Suponha que existe uma constante $c > 0$ tal que $\|Dh_i^{-1}\|, \|Dh_i\| < c$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. A partir das decomposições $U \oplus S$ de $T\Omega$, temos uma decomposição $\tilde{U} \oplus \tilde{S}$ de $T\Psi$; que também é invariante. Sejam as sequências $\lambda_i^u, \lambda_i^s > 0$ e $\tilde{\lambda}_i^u, \tilde{\lambda}_i^s > 0$ definidas pelas famílias (Ω, f) e (Ψ, g) como na definição 1.12. Precisamos verificar a condição (1.1) para $\tilde{\lambda}_i$. Temos, pela regra da cadeia, que $\tilde{\lambda}_i^s = \|Dg^s\| \leq \|Dh\|_{f \circ h^{-1}(p)} \cdot \|Df^s\|_{h^{-1}(p)} \cdot \|Dh^{-1}\|_p \leq c^2 \lambda_i^s$. Consequentemente, para cada i , $\tilde{\lambda}_i^s \leq c^2 \lambda_i^s$ e, similarmente, $c^{-2} \lambda_i^u \leq \tilde{\lambda}_i^u$. Mas se, em vez disto, considerarmos composições parciais das aplicações, esta constante c^2 permanece a mesma. Portanto a condição (1.1) vale, logo (Ψ, g) também é eventualmente Anosov. O caso para uma família Anosov é similar.

Assim conjugações limitadas preservam limites de expansões a menos de uma constante. Consequentemente, nós temos o seguinte:

Corolário 1.3. *Famílias Anosov e eventualmente Anosov são categorias com respeito a conjugação limitada.*

Proposição 1.7. *Seja (Ω, f) uma família eventualmente Anosov. Seja $S_0 \oplus U_0$ a decomposição hiperbólica de $T\Omega_0$. Então U_0 depende somente do passado, e S_0 depende somente do futuro. Desta forma, se (Ω, \tilde{f}) é outra família eventualmente Anosov tal que $f_i = \tilde{f}_i$ para $i \leq -1$, então $U_0 = \tilde{U}_0$, e similarmente para o espaço estável para $i \geq 0$.*

Demonstração. É semelhante a prova de unicidade da decomposição, feita na Proposição 1.4 : para obter a contradição, usamos apenas o passado da sequência. \square

Observação 1.8. *Para entender melhor esta afirmação é útil pensar de duas formas complementares para definir o espaço instável de um ponto $p \in \Omega_0$. Para a primeira forma, $U_0 = \{v : \|Df_n(v)\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}$. Isto é similar a definição de conjunto estável, mas para a aplicação inversa. A segunda forma de definir espaço instável é construtiva, mas só é fácil de afirmar para alguns exemplos específicos, por exemplo, para matrizes (2×2) não negativas; aí o espaço instável é a intersecção de todas imagens do cone positivo aplicado do tempo $n < 0$ até o tempo 0 pela aplicação derivada.*

A razão desta segunda definição ser mais difícil de se afirmar no geral é que nem sempre temos uma analogia do cone positivo, que para o caso das matrizes não negativas são disjuntos de todos subespaços estáveis. Agora ambas definições concordam em dizer que o espaço instável depende apenas do passado.

1.4 Dinâmica Simbólica das Famílias de Aplicações

1.4.1 Sequência de Partições

Nas próximas seções nós desenvolvemos o maquinário da dinâmica simbólica para as famílias de aplicações. Para simplificar, vamos assumir a partir de agora que as aplicações são inversíveis, já que o que faremos pode ser generalizada para as famílias não-inversíveis. Para o caso das famílias Anosov, o resultado será uma sequência de partições de Markov, que codifica a família como uma versão não-estacionária de um

subshift do tipo finito, veja a *Proposição* 1.12. Começamos com a definição mais geral onde as partições não são necessariamente Markov.

Definição 1.15. *Uma **partição** \mathcal{Q} de um espaço métrico compacto X é uma coleção $\mathcal{Q} = \{Q_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de X tal que:*

- cada Q_i é o fecho de seu interior, e nenhuma parte de seus bordos é denso em X ;
- $\forall i, j \in I, i \neq j \implies \text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset$;
- $\bigcup Q_i = X$

Uma **partição ordenada** é uma partição com um conjunto I de índices totalmente ordenado; a menos de renomeações, sempre podemos tomar, neste caso, $\mathcal{Q} = \{Q_0 \cdots Q_l\}$.

Definimos uma partição \mathcal{R} de uma família de aplicações (Ω, f) sendo uma sequência de partições \mathcal{R}_i , no sentido dito acima, das componentes Ω_i .

Dizemos que a **partição gera** para a família de aplicações se separa pontos fora do conjunto magro constituído do pullback de todas as fronteiras das partições futuras e passadas, ou seja, se para cada $x \neq y$ no subconjunto G_δ que é o complemento do conjunto magro, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão em elementos diferentes da partição \mathcal{R}_n de Ω_n .

Definição 1.16. *A **junção** de duas partições \mathcal{R} e \mathcal{Q} de um espaço X , denotado por $\mathcal{R} \vee \mathcal{Q}$, é a partição cujos elementos consistem das intersecções de cada elemento não trivial (interior não vazio) destas partições. Se \mathcal{R} e \mathcal{Q} tem conjuntos de índices I e J , então indexamos $\mathcal{R} \vee \mathcal{Q}$ pelo subconjunto de $I \times J$ correspondendo às intersecções não triviais. Estendemos esta definição de maneira natural para um número finito de partições.*

Definição 1.17. *Seja (Ω, f) uma família de aplicações com partição \mathcal{R} , e seja $(\tilde{\Omega}, \tilde{f})$ uma segunda família que é um agrupamento de (Ω, f) ao longo da subsequência (n_i) .*

Para a família agrupada definimos uma partição $\tilde{\mathcal{R}}$ por

$$\tilde{\mathcal{R}}_i = \mathcal{R}_{n_i} \vee f_{n_i}^{-1}(\mathcal{R}_{n_i+1}) \vee \cdots \vee (f_{n_i+1-2} \circ \cdots \circ f_{n_i})^{-1}(\mathcal{R}_{n_i+1}).$$

Chamamos $\tilde{\mathcal{R}}$ de **partição agrupada**. Note que para isto tomamos as **junções** do tempo n_i até o tempo $n_{i+1} - 1$.

Definimos uma segunda partição $\hat{\mathcal{R}}$ por incluir mais um único tempo, tomando a junção de n_i até o tempo n_{i+1} . Chamamos de **partição agrupada aumentada**.

Observação 1.9. Fazendo um agrupamento trivial da família com partição \mathcal{R} , isto é, agrupamento ao longo da subsequência $n_i = i$, a partição agrupada não apresenta mudanças, então $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$, enquanto que para a partição agrupada aumentada $\hat{\mathcal{R}}_i = \mathcal{R}_i \vee f_i^{-1}(\mathcal{R}_{i+1})$.

Proposição 1.8. Se a partição \mathcal{R} gera (Ω, f) , então as partições agrupada e agrupada aumentada $\tilde{\mathcal{R}}$ e $\hat{\mathcal{R}}$ geram para a família agrupada $(\tilde{\Omega}, \tilde{f})$. Reciprocamente, se a partição agrupada ou agrupada aumentada geram para a família agrupada, então a partição original \mathcal{R} gera a primeira família (Ω, f) .

Demonstração. Imediata da definição.

Observação 1.10. Note que a partição agrupada aumentada é um pouco menos eficiente, pois há redundância: as partições até o tempo n_i estão incluídas duas vezes cada.

Dada uma família de aplicações com uma sequência de partições geradora, estendemos esta sequência para uma dispersão da família, tomando a partição trivial $\tilde{\mathcal{R}}_i = \{\tilde{\Omega}_i\}$ nas novas componentes. Claramente, esta sequência gera a família dispersa.

1.4.2 Partições de Markov

Dada uma família de aplicações (inversíveis), considerando o caso de uma única transformação de que trata Bowen ([8]), escrevemos $W_\varepsilon^s(p)$, $W_\varepsilon^u(p)$ para ε -discos nas folhas estável e instável de um ponto p ; dizemos que a família tem **coordenadas**

canônicas se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - y\| < \delta$ então $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ é constituído de um único ponto, neste caso nós escrevemos $[x, y]$ para este ponto.

A existência de coordenadas canônicas para as aplicações é provado em [8], a ideia é que existe ε suficientemente pequeno tal que $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ é um único ponto e que esta propriedade é preservada sob pequenas perturbações. E isso passa para famílias.

A condição de $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ ser unitário pode falhar para ε grande por duas razões: primeiro, uma das folhas pode curvar e intersectar a outra em um segundo ponto. Em segundo lugar, mesmo se não for curva, ela pode retornar fazendo a volta em torno da variedade. Ambas as possibilidades são eliminadas com ε suficiente pequeno.

Assim, supondo agora que as componentes de nossa família Anosov são o 2-toro plano e que as variedades estável e instável W^s , W^u são folheações lineares, um retângulo será um paralelogramo (“preenchido”) com os lados em W^s e W^u .

Nós definimos $W^s(p, R)$ como a componente conexa de $W^s(p) \cap \overset{\circ}{R}$ que contém p , e similarmente para $W^u(p, R)$. Se $W^s(x, R) \cap W^u(y, R)$ consiste de um único ponto, denotamos este ponto por $[x, y]$. Coordenadas canônicas, nesse sentido, claramente existem para x, y no interior do retângulo.

A razão pela qual os pontos de fronteira foram excluídos pode ser observado na *figura 1.1*, o maior dos dois paralelogramos dá a volta o toro e assim, tomando y em sua fronteira instável e x em seu interior, o segmento instável contendo y encontra o estável contendo x em dois pontos.

Agora voltemos à situação de Bowen, que incluímos aqui para indicar o que os dois casos têm em comum e mostrar como conjuntos hiperbólicos gerais, para famílias de aplicações, podem ser tratados. Assim, dada uma família de aplicações com coordenadas canônicas no sentido de Bowen, definimos $R \subseteq \Omega_i$ para ser um retângulo (pequeno) se:

- (i) para todo $x, y \in R$, $[x, y]$ está definido; e
- (ii) para $x, y \in R$, $[x, y] \in R$.

Para $p \in R$ definimos $W^s(p, R)$ sendo $W_\varepsilon^s(p) \cap R$ onde ε é pequeno e o diâmetro de

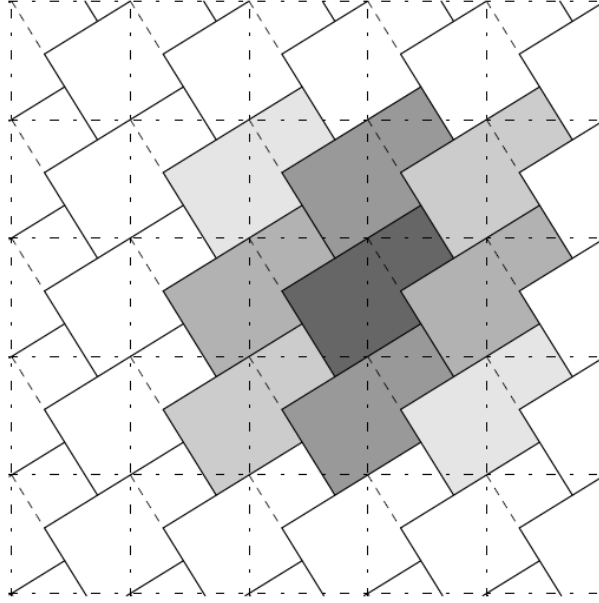


Figura 1.1: Partição de Markov geradora para a família aditiva, $\langle n \rangle = (\dots 111 \dots)$, para paridade (+). Para mais detalhes, veja [1].

R é menor que ε , similarmente para $W^u(p, R)$

Note que para tal R , dados dois pontos $x, y \in R$, então $W^s(x, R) \cap W^u(y, R)$ consiste de um único ponto $[x, y]$. Note que para retângulos menores não há a necessidade de excluir os pontos da fronteira.

Dizemos que um retângulo R é **próprio** se ele é o fecho de seu interior $\overset{\circ}{R}$

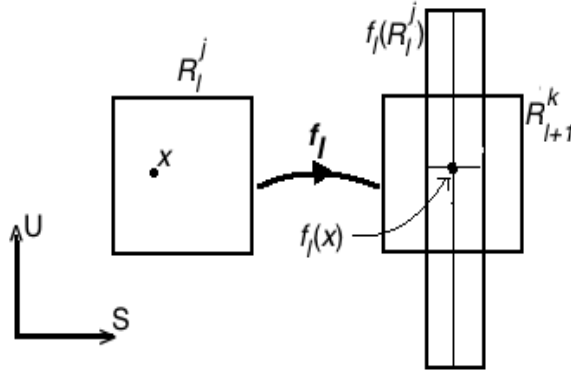
Definição 1.18. Para uma família de aplicações (Ω_l, f_l) , uma **partição de Markov** é uma sequência de partições finitas \mathcal{R}_l de Ω_l , isto é, conjuntos fechados de interiores disjuntos que cobrem Ω_l , tal que cada elementos da partição é um retângulo próprio e tal que a **condição de Markov** é satisfeita: para $R_l^j \in \mathcal{R}_l$ e $R_{l+1}^k \in \mathcal{R}_{l+1}$, tal que se $x \in R_l^j$ e $f_l(x) \in R_{l+1}^k$, então

$$f_l(W^u(x, R_l^j)) \supseteq W^u(f_l(x), R_{l+1}^k)$$

e

$$f_l(W^s(x, R_l^j)) \subseteq W^s(f_l(x), R_{l+1}^k).$$

Como mostra a figura:



Note que, da definição de retângulo próprio, as fronteiras da partição são conjuntos fechados com interior vazio, portanto, para uma partição geradora, o complemento da união de todos os pullbacks das fronteiras da partição para uma única componente é um conjunto denso G_δ . nestes pontos que a dinâmica simbólica será definida. Dizemos que um retângulo R passa completamente através de um segundo retângulo S na direção estável (respectivamente instável) se para um ponto $x \in R$, $W^s(x, R) \supseteq W^s(x, S)$, respectivamente, $W^u(x, R) \supseteq W^u(x, S)$. Então, a condição de Markov implica o seguinte fato geométrico sobre intersecções de partição:

Lema 1.2. *Uma sequência de partições de Markov \mathcal{R}_l para uma família de aplicações inversíveis (Ω, f) satisfaz a **propriedade geométrica de Markov**: a pré-imagem na componente Ω_l de cada elemento R_{l+1}^j de uma partição \mathcal{R}_{l+1} pela aplicação f_l ou não intersecta um determinado elemento de \mathcal{R}_l ou passa completamente por ele na direção estável. Da mesma forma, os elementos de \mathcal{R}_{l-1} empurrados para a frente, para Ω_l , atravessam completamente na direção instável.*

Demonstração. Para o caso do toro quadrado com paralelogramos, segue imediatamente da condição de Markov. Para o caso geral, veja a prova em [8], Lema 3.17.

□

Equivalentemente: seja $\mathcal{R}_l := \{R_l^1, \dots, R_l^m\}$ uma partição de Markov de \mathbb{T}^n onde cada $R_l^j := [X_l^j, Y_l^j] = \{[x, y] : x \in X_l^j, y \in Y_l^j\}$, $1 \leq j \leq m$, com $X_l^j, Y_l^j \subset \mathbb{R}^n$, $[x, y] \in$

$W^s(X_l) \cap W^u(Y_l)$, onde $W^s(X_l) := \{W^s(x) : x \in X_l\}$ e $W^u(Y_l) := \{W^u(y) : y \in Y_l\}$. Então \mathcal{R}_l tem a seguinte propriedade: se existe uma matriz de transição $m \times m$ A_l de inteiros não negativos onde, para cada ij , existem subconjuntos $X_l^{i,j,k} \subset X_l^i$ e $Y_l^{i,j,k} \subset Y_l^j$, $1 \leq k \leq a_{ij}$, tais que :

- os interiores são não vazios e disjuntos;
- $X_l^i = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{a_{ij}} X_l^{i,j,k}$ e $Y_l^j = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^{a_{ij}} Y_l^{i,j,k}$;
- R_l^i é a união de s -sub-retângulos $[X_l^{i,j,k}, Y_l^i]$ e R_l^j é a união de u -sub-retângulos $[X_l^j, Y_l^{i,j,k}]$ que satisfaz: $f_l[X_l^{i,j,k}, Y_l^i] + \mathbb{Z}_l^n = [X_l^j, Y_l^{i,j,k}] + \mathbb{Z}_l^n$, para $1 \leq k \leq a_{ij}$ e $1 \leq i, j \leq m$.

A nomenclatura **s -sub-retângulos** se deve ao fato de que estamos tomando $X_l^{i,j,k} \subset W^s(X_l^i)$. Analogamente para **u -sub-retângulos**.

A consequência combinatorial disto (ver *Proposição 1.12*) é que uma partição de Markov dá uma boa dinâmica simbólica para a *família Anosov*: uma família de aplicações ao longo de uma sequência de espaços métricos compactos definidos combinatorialmente, feito na seção seguinte.

1.4.3 Subshift não-estacionário

Definição 1.19. *Seja $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de conjuntos finitos não vazios, chamados **alfabetos**, cujos elementos serão chamados de **símbolos**. Definimos $\#\mathcal{A}_i = l_i$ tomando $\mathcal{A}_i = \{0, 1, \dots, l_i - 1\}$. Uma **matriz de transição** é uma matriz retangular com entradas não negativas. Dada uma sequência $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de matrizes de transição $(l_i) \times (l_{i+1})$, um **caminho permitido** é uma sequência (x_i) finita ou infinita, onde cada $x_i \in \mathcal{A}_i$ e tal que $(x_i x_{i+1})$ é permitido se a entrada $l_{i,i+1}$ de L_i for não nula. Um caminho (permitted) finito é chamado de **“palavra”**. Denotemos por (L) a sequência $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de matrizes de transição. Denotamos por $\Sigma^0 = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$ e definimos o subconjunto $\Sigma_{(L)}^0$ como sendo a coleção de caminhos bi-laterais infinitos permitidos $x = \{\dots x_{-1}.x_0x_1\dots\} \in \Sigma_{(L)}^0$. Dizemos que uma matriz L_i é **reduzida** se e somente*

se L_i não tem nenhuma linha e nenhuma coluna identicamente nula. Dizemos que a **sequência de matrizes é reduzida** se e somente se cada matriz L_i é reduzida.

Observação 1.11. Ao definir este espaço optamos pela convenção vetor linha, ou invés da convenção coluna onde teríamos matrizes $(l_{i+1}) \times (l_i)$, isto é, a transposta de L_i .

Agora introduziremos a dinâmica do “shift”.

Definição 1.20. Dado $L = (L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de matrizes, denotemos por σL para a **sequência de matrizes deslocada para a esquerda**, isto é, $(\sigma L)_i = L_{i+1}$. Defina $\sum_{(L)}^k = \sum_{(\sigma^k L)}^0$ para $k \in \mathbb{Z}$. Fixamos $\sum_{(L)} = \coprod \sum_{(L)}^k$ a união disjunta. Chamamos $\sum_{(L)}^k$ a k -ésima componente $\sum_{(L)}$ que é chamado de **espaço total**. Defina σ em $\sum_{(L)}$, o “**shift**”, para ser a aplicação dada por deslocar um caminho para a esquerda, ou seja, $\sigma(x) = (\dots x_0.x_1x_2\dots)$ onde $x = (\dots x_{-1}.x_0x_1\dots)$. Chamamos o par (\sum_L, σ) de “**subshift não-estacionário do tipo finito (sntf)**” definido por $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Enfatizamos que, ao contrário do caso *estacionário*, onde todos os \mathcal{A}_i são iguais (respectivamente Ω_i), e temos uma única matriz de transição. Para o tempo 0, σ não é uma aplicação do espaço $\sum_{(L)}^0$ nele mesmo, já que as matrizes e o número de símbolos podem mudar com o tempo. Na verdade, a imagem de um ponto $x \in \sum_{(L)}^0$ está em um espaço combinatorial diferente que é dado pela sequência de matrizes $(\sigma L) = (\dots, L_1, L_2, \dots)$, isto é o que define os espaço $\sum_{(L)}^1$. A aplicação shift $\sigma : \sum_{(L)} \rightarrow \sum_{(L)}$ no espaço total é equivalente à sequência de aplicações ao longo destas componentes,

$$\dots \sum_{(L)}^0 \xrightarrow{\sigma} \sum_{(L)}^1 \xrightarrow{\sigma} \sum_{(L)}^2 \dots$$

Então σ^k aplica a i -ésima componente na $(i+k)$ -ésima componente de $\sum_{(L)}$; assim, para $x \in \sum_{(L)}^0$ com $x = (\dots x_{-1}.x_0x_1\dots) \in \prod_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_i$, o ponto $\sigma^k x$ é o caminho bi-infinito definido por $(\sigma^k x)_i = x_{i+k}$ em $\sum_{(L)}^k$. No entanto, se (L) é uma sequência reduzida, então todo caminho finito permitido tem continuação para direita (pois as linhas são não nulas) e para esquerda (colunas não nulas).

A seguir definimos a topologia e a métrica em $\sum_{(L)}^k$:

Um **cilindro** é um conjunto da forma $[x_k \dots x_m] \equiv \{w \in \sum_{(L)}^k : w_i = x_i, k \leq i \leq m\}$ para alguma sequência finita $x_k \dots x_m$, com $k, m \in \mathbb{Z}$.

No espaço $\sum_{(L)}^k$ colocamos a topologia produto das topologias discretas sobre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i^{\mathbb{Z}}$, como os \mathcal{A}_i são finitos, então pelo teorema de Tychonoff que diz que o produto de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto, $\sum_{(L)}^k$ é compacto. Os cilindros são conjuntos fechados e abertos (**clopen**) que geram a topologia e, conseqüentemente, a σ -álgebra de Borel \mathcal{B} de $\sum_{(L)}^k$.

Para $k \leq m$, escrevemos

$$[x_k \dots x_m] = \{w \in \sum_{(L)}^k : w_k = x_k, \dots, w_m = x_m\},$$

chamando-o de **cilindro fino** de $\sum_{(L)}^k \mathcal{B}_k^m$ como a álgebra gerada pelos conjuntos dos cilindros finos \mathbb{C}_k^m , e denotemos por \mathcal{B}_k^∞ a σ -álgebra gerada por $\bigcup_{m \geq k} \mathbb{C}_k^m$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{-\infty}^\infty =$

$$\bigcup_{k \leq 0} \mathcal{B}_k^\infty.$$

Para facilitar a manipulação dos índices da próxima definição, vamos considerar que a *coordenada presente* do ponto x em $\sum_{(L)}^k$ seja x_0 , isto é, x_0 denota da 0-ésima coordenada deste ponto que está em $\sum_{(L)}^k$ e não em $\sum_{(L)}^0$; suas *coordenadas futuras* são x_i tal que $i \geq 1$, e as *passadas* para $i \leq -1$.

Proposição 1.9. *A componente $\sum_{(L)}^k$ é metrizável; uma métrica conveniente é a **métrica “word”** : denotemos por $w_k(-j, l)$ o número de “caminhos” permitidos em $\sum_{(L)}^k$ de $-j$ até l ; isto é também o número de cilindros finos em $\sum_{(L)}^k$ da forma $[x_{-j} \dots x_0 \dots x_l]$. Note que, por esta definição, $w_k(0, 0) = k_k$ (o número de símbolos no alfabeto de posição 0 em $\sum_{(L)}^k$). Dados x, y na mesma componente $\sum_{(L)}^k$, definimos $d_k(x, y) = 1$ se $x_0 \neq y_0$; caso contrário, assumindo então $x_0 = y_0$, tomamos m, n os maiores inteiros não negativos tais que $x_i = y_i$ para $-m \leq i \leq n$, e fixamos*

$$d_k(x, y) = \max\{(w_k(-m, 0))^{-1}, (w_k(0, n))^{-1}\}.$$

Observação 1.12. Para o caso *unilateral* onde temos alfabetos \mathcal{A}_i para $i \geq 0$ e, conseqüentemente, uma seqüência $(L) = (L_i)_{i \geq 0}$, definindo a componente $\Sigma_{(L)}^{0,+} \subseteq \prod_{(A)}^{0,+}$ que é o conjunto tal que se $x \in \Sigma_{(L)}^{0,+}$, então $x = (.x_0x_1\dots)$. Definimos a métrica “word” como $d(x, y) = \{(w(0, m))^{-1}\}$, onde $w(j, k)$ é o número de “caminhos” permitidos de j até k para $0 \leq j \leq k$. Esta discussão se estende a k -ésima componente via identificação, tomando um shift na seqüência de matrizes. Em particular, estendemos para o espaço total $\Sigma_{(L)}^+$ definindo em cada $\Sigma_{(L)}^{k,+}$ do mesmo modo, e declarando a distância entre dois pontos x, y sendo 1 sempre que estes estiverem em componentes diferentes. Com a topologia resultante no espaço total $\Sigma_{(L)}^+$, cada componente $\Sigma_{(L)}^{k,+}$ é um conjunto clopen (fechado e aberto), e a aplicação shift é contínua, não inversível e o número de pré-imagens por σ de um caminho $(.x_1x_2\dots)$, onde $x_1 = r$, é igual à quantidade de entradas não nulas na r -ésima coluna da matriz L_0 . Neste contexto, acrescentamos uma observação na aplicação “shift” σ . Se são dados um caminho permitido $x \in \Sigma_{(L)}^{0,+}$ e $k, m \geq 0$ com $k \leq m$, então para $[\dots x_k \dots x_m] \subseteq \Sigma_{(L)}^{k,+}$ temos:

$$\sigma^{-k}([\dots x_k \dots x_m]) = \sigma^{-k}[\dots x_k \dots x_m] \equiv [.\dots * \dots * x_k \dots x_m] \subseteq \Sigma_{(L)}^{0,+},$$

onde $*$ indica: “nenhuma restrição no símbolo”.

Um **cilindro genérico** é a coleção de cilindros finos, por exemplo, $[\dots 312 * 0] = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_3} [\dots 312j0]$ é um cilindro genérico formado pela união de membros de \mathbb{C}_0^4 .

Lema 1.3. Dada uma seqüência de alfabetos (\mathcal{A}_i) e uma seqüência de matrizes (L_i) com matrizes $(l_{i+1} \times l_i)$ com entradas 0–1. Se $\Sigma_{(L)}^0$ é não vazia, então existe uma única seqüência de alfabetos $(\hat{\mathcal{A}}_i)$ com $\hat{\mathcal{A}}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ e uma seqüência reduzida (\hat{L}_i) de matrizes não negativas $(\hat{l}_i \times \hat{l}_{i+1})$ tal que $\Sigma_{(\hat{L})}^0 = \Sigma_{(L)}^0$.

Demonstração. As operações de redução no estágio k , dadas por remover as linhas e as colunas identicamente nulas de L_k e as letras correspondentes em (\mathcal{A}_k) e (\mathcal{A}_{k+1}) podem ser vistas como operadores, agindo em um espaço compacto, que são não-crescentes para uma ordem parcial natural vinda da inclusão, com a seqüência reduzida sendo o limite. Nomeamos cada entrada da matriz de transição e definimos o conjunto

X formado pela união de todas as letras, isto é, todos os elementos dos alfabetos e todos os elementos (entradas) da matriz. Seja o espaço produto $\{0, 1\}^X$; remover ou manter um símbolo ou um elemento da matriz será codificado por esses novos símbolos (0, 1, respectivamente). Definimos um operador \mathcal{R}_k neste espaço correspondendo a remover todas as linhas identicamente nulas de L_k , as letras correspondentes de (\mathcal{A}_k) e as colunas correspondentes de L_{k-1} . Similarmente, escrevemos \mathcal{C}_k para o operador dado pela remoção de todas as colunas nulas de L_k , as letras correspondentes de (\mathcal{A}_{k+1}) e as linhas correspondentes de L_{k+1} . Dada uma lista finita $L_{-m}, L_{-m+1}, \dots, L_m$; $m \in \mathbb{N}$, aplicamos sucessivamente estes operadores $\mathcal{R}_m, \mathcal{R}_{m-1}, \dots, \mathcal{R}_{-m}$, em seguida aplicamos $\mathcal{C}_{-m}, \mathcal{C}_{-m+1}, \dots, \mathcal{C}_m$. Isto produz uma nova sequência bi-infinita $((\widehat{\mathcal{A}}), (\widehat{L}))_m$ que está reduzida nos tempos $-m, -m+1, \dots, m$ e que tem os mesmos caminhos bi-infinitos permitidos. Continuando, este processo converge por compacidade. Ou, por outro ponto de vista, as possibilidades em qualquer segmento de tempo finito são finitas, enquanto as operações forem consistentes, isto é, enquanto forem não-crescentes na ordem parcial quando $m \rightarrow \infty$. E por suposição, $\sum_{(L)}^0$ é não vazio, $(\widehat{\mathcal{A}}_i)$ é um alfabeto não vazio no limite, então as matrizes \widehat{L}_i existem (são pelo menos (1×1)). \square

Lema 1.4. *Para a sequência reduzida (L_i) , para cada k , a aplicação $\sigma : \sum_{(L)}^k \longrightarrow \sum_{(L)}^{k+1}$ é sobrejetora.*

Demonstração. Isto é consequência do Lema anterior. \square

Proposição 1.10. *O $\text{sntf}(\sum_{(L)}, \sigma)$ é uma família de aplicações.*

Demonstração. Imediato da *definição* 1.4: a métrica e a topologia são compatíveis; cada componente $\sum_{(L)}^k$ é um espaço métrico compacto; na verdade, cilindros são “clopen” (abertos e fechados), e se uma infinidade de alfabetos tem pelo menos dois símbolos, então $(\sum_{(L)}, \sigma)$ é topologicamente um conjunto de Cantor, e a aplicação σ é uma sequência de homeomorfismos de uma componente para a próxima.

Proposição 1.11. *Se duas seqüências de matrizes de entradas 0–1 L, L' que definem as famílias de aplicações $\Sigma_{(L)}$ e $\Sigma_{(L')}$ são reduzidas, então estas famílias de aplicações são as mesmas se e somente se as seqüências L, L' são iguais.*

Demonstração. Direto do Lema 1.3 ou; conhecer a seqüência da matrizes é equivalente a conhecer os caminhos permitidos. O fato de ser reduzida implica (na verdade é equivalente a) que a seqüência de dígitos de qualquer caminho finito permitido pode ser seguida infinitamente em ambas as direções. Por compacidade, existe um ponto em $\Sigma_{(L)}^0$, que tem o nome deste caminho. Assim, conhecer o espaço, ou seja, conhecer os caminhos infinitos permitidos, é equivalente a conhecer as seqüências de matrizes. \square

Observação 1.13. *Exemplos simples mostram que a redução é necessária, as seqüências constantes $L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $L'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L''_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ definem o mesmo **sntf** com um único ponto em $\Sigma_{(L)} = \Sigma_{(L')} = \Sigma_{(L'')}$, o caminho $(\dots 000\dots)$; pode-se ver que uma seqüência de matrizes não reduzida pode ser simplificada eliminando-se, em cada alfabeto, os símbolos que não pertencem a nenhum caminho bi-infinito permitido, produzindo assim uma seqüência reduzida canônica de matrizes com o mesmo **sntf**.*

A principal diferença entre um *sntf* e uma família de aplicações em geral é que para um *sntf*, cada componente carrega toda a informação da dinâmica, simplesmente aplicando o “shift”, todas as outras componentes são reconstruídas.

1.4.4 Dinâmica Simbólica para as famílias Anosov

Aqui veremos que o *sntf* dá a representação simbólica de uma família Anosov, esta representação é fornecida por uma seqüência de partições de Markov.

Lema 1.5. *Dada uma família inversível de aplicações (Ω, f) , assumamos a existência de uma seqüência de partições de Markov \mathcal{R}_k . Se uma seqüência finita de elementos destas partições $R_j, R_{j+1}, \dots, R_{j+m}$ com $R_i \in \mathcal{R}_i$ tem, dois a dois, intersecção não vazia pelo pullback, isto é, se $R_i \cap f_i^{-1}R_{i+1} \neq \emptyset, \forall i = j, \dots, j+m-1$, então a intersecção simultânea dos pullbacks para uma única componente é não vazia, isto é:*

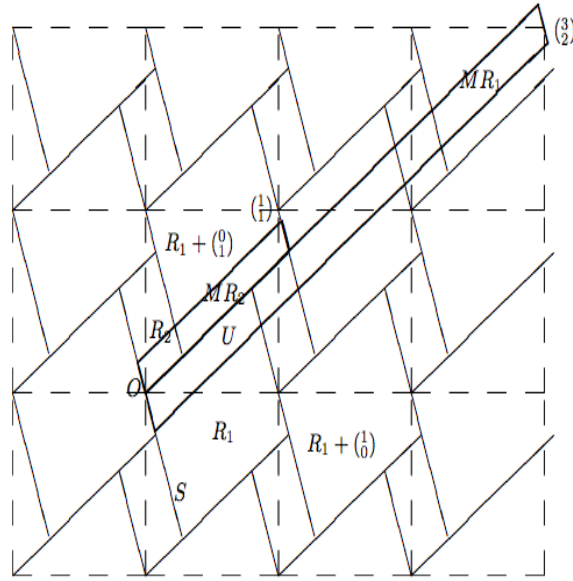


Figura 1.2: Imagem dos retângulos grandes R_1 e R_2 , no tempo i e as intersecções no tempo $i + 1$, aplicada por: $L_i = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Figura extraída de [10]

$$R_j \cap f_j^{-1} R_{j+1} \cap \cdots \cap f_{j+m-1}^{-m} R_{j+m} \neq \emptyset$$

Demonstração. É imediato da propriedade geométrica de Markov (Lema 1.2). \square

Dada uma família inversível de aplicações e a partição de Markov geradora, seja l_k denotando o número de elementos de \mathcal{R}_k . Ordenamos cada partição, e definimos a ij -ésima entrada de uma matriz L_k ($l_k \times l_{k+1}$) sendo 1 exatamente quando $f_k^{-1}(R_{k+1}^j)$ encontra R_k^i uma vez, onde R_l^m denota o m -ésimo elemento de \mathcal{R}_l . Temos o seguinte.

Proposição 1.12. *Seja \mathcal{R}_i uma partição de Markov. A aplicação $\pi_k : \sum_{(L)}^k \longrightarrow \Omega_k$ definida por $x \mapsto \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f_{(k,i)}^{-1} R_i^{x_i}$, onde $k < i$ e $f_{(k,i)}^{-1} = f_k^{-1} \circ f_{k+1}^{-1} \circ \cdots \circ f_i^{-1}$ é sobrejetora e injetora (exceto no conjunto dos pullbacks das fronteiras). Por consequência, temos uma semiconjugação topológica da família de aplicações $(\sum_{(L)}, \sigma)$ para (Ω, f) .*

Demonstração. A observação fundamental é que se um caminho finito é permitido em nosso $sntf$, os sucessivos retângulos correspondentes tem, dois-a-dois, intersecção não vazia pelo pullback, portanto, pelo Lema 1.5, existe um ponto no espaço que tem esse

nome finito. Por compacidade dos retângulos e das componentes Ω_k , isso se estende para os caminhos infinitos permitidos. Então cada $\sum_{(L)}^k$ se corresponde naturalmente a Ω_k via aplicação projeção π_k sendo esta assim sobrejetora. Também, π_k é injetora, já que uma partição de Markov separa pontos (exceto nas fronteiras de cada elemento da partição), isto é, é geradora. A união disjunta $\sum_{(L)}$ projeta-se a Ω via π , definida por ser igual a π_k em cada componente $\sum_{(L)}^k$. A aplicação shift σ aplica $\sum_{(L)}^k$ a $\sum_{(L)}^{k+1}$, logo isto projeta-se para $f_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_{k+1}$, e a aplicação total σ em $\sum_{(L)}$ projeta-se para a aplicação total f em Ω , e o diagrama da Figura 1.3 comuta. π é sobrejetora. \square

$$\begin{array}{ccccc}
 \sum_{(L)}^{-1} & \xrightarrow{\sigma} & \sum_{(L)}^0 & \xrightarrow{\sigma} & \sum_{(L)}^1 \\
 \cdots \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \cdots \\
 \Omega_{-1} & \xrightarrow{f_{-1}} & \Omega_0 & \xrightarrow{f_0} & \Omega_1
 \end{array}$$

Figura 1.3: Dinâmica Simbólica para uma família de aplicações.

Observação 1.14. *Como vimos na seção 1.3, é desejável para as famílias de aplicações terem uma semi-conjugação que não é apenas topológica, mas uniforme; para a aplicação de codificação π , exemplos uniformes e não uniformes ocorrem. Destacamos que, às vezes, é útil considerar a aplicação total como uma única aplicação e não como uma sequência, a partir desse ponto de vista, por exemplo, a partição de Markov para a família Anosov é uma partição de Markov no sentido usual para a aplicação total, mas com uma quantidade enumerável de elementos.*

1.5 Espaço Shift (não-estacionário) de Vértices e de Arestas e o Diagrama de Bratteli.

Definiremos o Espaço de Arestas onde consideramos o número de arestas que fazem a transição de um vértice para o outro, sendo este sempre ≥ 0 . Para o caso familiar *estacionário* consulte ([11], pag. 43). O caso estacionário será de grande ajuda para representar as transições com ilustrações, através de um grafos, a diferença sendo que aqui precisaremos de um gráfico infinito.

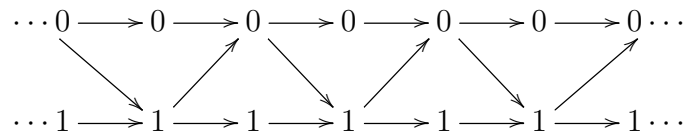


Figura 1.4: O diagrama de Bratteli de arestas simples.

Definição 1.21. Um **diagrama de Bratteli** é um grafo direcionado definido por uma sequência de conjuntos finitos de vértices \mathcal{V}_i e conjuntos de arestas \mathcal{E}_i indexados por $i \in \mathbb{Z}$. Cada aresta $e_i \in \mathcal{E}_i$ tem uma origem $e^- \in \mathcal{V}_i$ e uma imagem $e^+ \in \mathcal{V}_{i+1}$ e é representado como uma seta com a cauda na origem e cabeça na imagem.

Definição 1.22. Dizemos que o diagrama é **não degenerado** se cada vértice tem pelo menos uma “seta” saindo dele e uma entrando.

Definição 1.23. Identificamos o conjunto de vértices \mathcal{V}_i com um alfabeto ordenado $\mathcal{A}_i = \{0, \dots, l_i - 1\}$; o diagrama de Bratteli resultante é o **diagrama de rotulação arestas**. Associamos ao diagrama uma sequência de matrizes $(L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ($l_i \times l_{i+1}$) com entradas inteiras não negativas fixando a m -ésima entrada de L_i sendo igual a k se e somente se existem k arestas conectando o vértice m de \mathcal{V}_i ao vértice l de \mathcal{V}_{i+1} (e sendo 0 se não existem nenhuma aresta). Dizemos que o diagrama é de **arestas simples** se e somente se existe, no máximo, uma aresta para cada “origem” e para cada “imagem”, ou equivalentemente, se e somente se as matrizes de transição L_i tem entradas 0 e 1. Também identificamos o conjunto de arestas \mathcal{E}_i com um alfabeto ordenado \mathcal{A}_i . Isto dá um **diagrama de rotulação vértices**.

Proposição 1.13. Em cada caso acima, o diagrama determina e é determinado pela sequência de matrizes (L_i) , que tem entradas inteiras não negativas para a rotulação aresta e que sempre tem entradas 0 – 1 para a rotulação vértice.

Definição 1.24. Dado um diagrama de Bratteli com rótulos vértice, isto é, onde as arestas são os alfabetos, chamamos o sntf definido pela sequência (L_i) 0 – 1 de **espaço shift de vértices** do diagrama. Se é um diagrama de rotulação de arestas (ou arestas

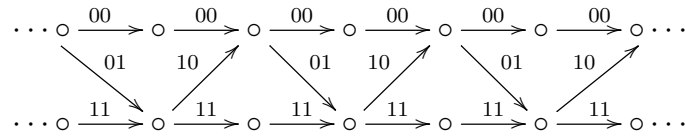


Figura 1.5: O mesmo diagrama com rotulação aditiva

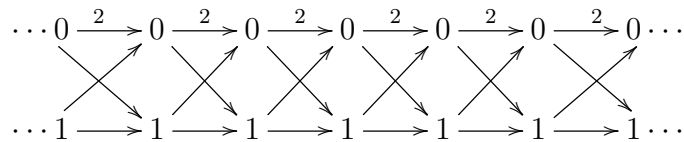


Figura 1.6: Diagrama telescópico correspondendo ao agrupamento ao longo dos tempos pares da figura 1.4, com número de vértices indicado quando é maior que 1.

simples), com os conjunto de vértices sendo os alfabetos, chamamos o *shift* resultante de **espaço shift de arestas** do diagrama.

Proposição 1.14. *Dois diagramas de Bratteli de arestas simples não-degenerados determinam o mesmo espaço shift de arestas se, e somente se, eles são iguais; o mesmo vale para diagramas de arestas simples e para o espaço shift de vértices.*

Demonstração. A prova é semelhante a da Proposição 1.11. □

Observação 1.15. *Dado um diagrama de arestas simples, existe uma escolha natural para nomear estas arestas: se uma aresta e conecta os símbolos $e^- = i$ e $e^+ = j$, então esta aresta é nomeada ij ; podemos ordenar este diagrama. Isto está ilustrado nas Figuras 1.4 e 1.5, onde estamos exemplificando um diagrama de arestas simples correspondendo a sequência*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ par}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para } i \text{ impar},$$

e os vértices são listados em ordem crescente de cima para baixo. Este tipo de rotulação de arestas é chamada de **rotulação aditiva** e o diagrama de Bratteli relacionado é chamado de **diagrama aditivo**.

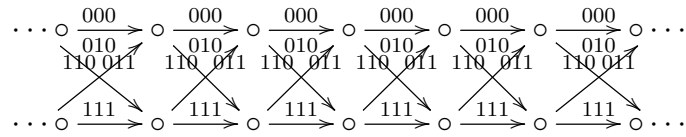


Figura 1.7: O mesmo diagrama com rotulação aditiva

Definição 1.25. *Dada uma sequência crescente $\dots n_{-1} < n_0 < n_1 \dots$ de \mathbb{Z} , o diagrama de Bratteli **telescopado** é o diagrama definido pela sequência de matrizes dada pelas composições parciais da sequência original; reciprocamente, o diagrama **microscopado** é dado pela fatoração da sequência.*

Proposição 1.15. *Dada uma partição de Markov geradora \mathcal{R} da família de aplicações (Ω, f) , as operações de agrupamento e dispersão via inserção de aplicações identidade corresponde, respectivamente, a telescopar e microscopar o diagrama aditivo de Bratteli. Isto é, o *sntf* para o agrupamento trivial aumentado da partição \mathcal{R} , que é a partição $\tilde{\mathcal{R}}$ definida por $\tilde{\mathcal{R}}_i = \mathcal{R}_i \vee f_i^{-1}\mathcal{R}_{i+1}$, é igual ao *sntf* para a rotulação aditiva do diagrama de Bratteli associado a \mathcal{R} ; e telescopando este diagrama ao longo de uma subsequência crescente n_i resulta em um diagrama de rotulação aditiva cujo *sntf* é idêntico ao da partição agrupada aumentada tomada ao longo desta subsequência.*

Demonstração. A prova é imediata da definição; ver *Observação 1.9*. □

Então, o diagrama de *arestas simples* telescopado dá um diagrama de *arestas múltiplas*, assim o número de arestas que ligam dois vértices corresponde ao número de caminhos possíveis (entre estes dois vértices) para o diagrama inicial (antes de telescopar).

Exemplo 1. Tomemos o caso estacionário. Em [6], Adler prova um teorema que inclui o seguinte: para qualquer automorfismo hiperbólico A (2×2) no toro com entradas não negativas e que preserva orientação existe uma partição de Markov que é codificada como um *espaço shift de vértices* usando exatamente a mesma matriz.

Manning provou, independentemente, um resultado similar. Ver [10].

Consideremos a aplicação dada pela matriz

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

existe uma partição geradora do toro com $2+1+1+1$ elementos, que é codificada como um *espaço shift de vértices*, tal que exista (na convenção vetor linha) 2 arestas indo de 0 para ele mesmo, 1 arestas indo de 0 para 1 e assim por diante; isto é, o automorfismo no toro é codificado como um *stf* usando as arestas como símbolos, onde um símbolo pode suceder o outro exatamente quando a aresta correspondente pode seguir da outra no gráfico. Então o *stf* definido pelo *espaço shift de vértices* é dado pela matriz $0-1$ (5×5). Para escrevê-la, precisamos escolher uma ordem para as arestas. Fazemos a rotulação aditiva como na figura 1.7 ordenando como (110, 111, 000, 010, 011); isto corresponde a ordem geométrica da esquerda para direita nos elementos da partição, quando a direção instável é horizontal, ver também ([7], p.84). A matriz de transição (com convenção linha) é então:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui estamos sugerindo uma rotulação para estas arestas, esta rotulação é feita observando a sequência de vértices permitidos (veja figura 1.7). Isto dá uma rotulação natural nas arestas após agrupamento.

A utilidade de apresentar um espaço shift de vértices determinado pela matriz F (2×2) é que esta forma é muito mais concisa. A descoberta de Adler e Manning foi que quando a partição de Markov é escolhida com cuidado, esta forma revela tudo sobre a dinâmica, visto que a aplicação tem exatamente a mesma matriz.

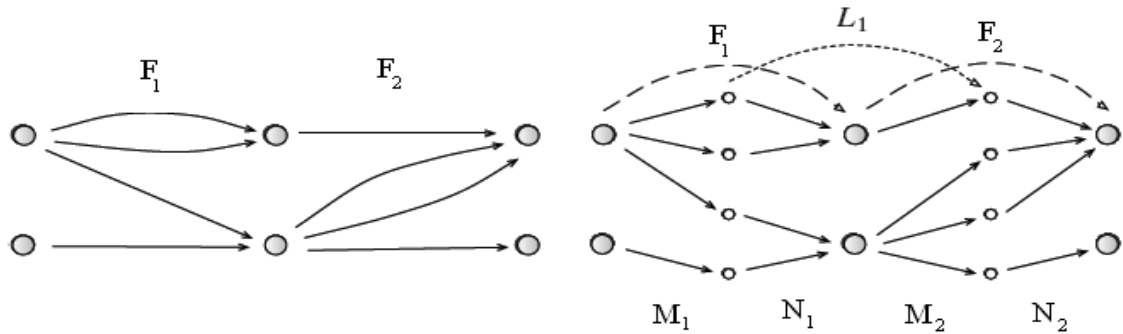


Figura 1.8: Separação de símbolos: $M_k N_k = F_k$ e $N_k M_{k+1} = L_k$. Figura exposta em [3]

Na prova de Adler, a partição geradora é produzida da seguinte maneira: ele começa com uma partição \mathcal{R} não geradora consistindo de dois paralelogramos; estes definem um gráfico de arestas simples (isto é, no máximo uma aresta sai de cada vértice) onde há dois vértices correspondendo a um *stf* de dois símbolos rotulados de 0 e 1; a partição geradora consiste das componentes conexas da junção de \mathcal{R} com $f^{-1}(\mathcal{R})$; com isto, o gráfico de arestas é dado pela substituição de cada aresta pelo número de componentes.

Assim, para a matriz

$$F = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

existem q componentes conexas em $f^{-1}(R_1) \cap (R_0)$ e assim por diante.

Para o caso *não-estacionário* podemos fazer o mesmo, obtendo separação de símbolos como exposto em [3].

Aqui obteve-se fatoração das matrizes F_k , encontrando uma sequência de matrizes $0-1$ ($M_0, N_0, M_1, N_1, \dots$) tais que

$$M_k N_k = F_k.$$

Pode haver muitas maneiras de se fazer isto. Uma fatoração canônica é dada pelo processo de “separação de símbolos”: coloque o conjunto de arestas \mathcal{E}_k como um novo alfabeto entre \mathcal{A}_k e \mathcal{A}_{k+1} de modo a ter alfabetos $(\mathcal{A}_0, \mathcal{E}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{E}_1, \dots)$ e conecte $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_k$ a $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_k$ com uma aresta se, e só se, a aresta \mathbf{e} estiver saindo de \mathbf{a} no diagrama original, indicando por uma matriz M_k $0-1$, e depois criando uma aresta de \mathbf{e} para

$\mathbf{b} \in \mathcal{A}_{k+1}$ se, e só se, essa aresta termina no símbolo \mathbf{b} , indicando por uma matriz N_k $0 - 1$. Assim, por definição, $M_k N_k = F_k$ como declaramos.

De fato, existe uma relação entre os dois métodos, pois:

$$N_k M_{k+1} = L_k.$$

Assim, as sequências de matrizes $(F_i)_{i \geq 0}$ e $(L_i)_{i \geq 0}$ são agrupamentos da sequência $(M_i, N_i)_{i \geq 0}$, uma ao longo dos tempos pares e a outra ao longo dos tempos ímpares, cada uma dá um telescópio do diagrama todo. Ver figura 1.8.

Definição 1.26. Dizemos que uma sequência $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ não negativa é **primitiva** se para todo $k \geq 0$, existe $n > k$ tal que $L^{(k,n)} \equiv L_k L_{k+1} \dots L_{n-1}$ tem todas entradas não nulas. Dizemos que a sequência de alfabetos $(\mathcal{A}_i)_{i \geq 0}$ é não trivial se $\limsup_{i \rightarrow +\infty} l_i \geq 2$.

Lema 1.6. Seja uma sequência reduzida $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes inteiras não negativas $(l_i \times l_{i+1})$, com $(P_i)_{i \geq 0}$ um agrupamento de $(L_i)_{i \geq 0}$, então:

- (i) $(L_i)_{i \geq 0}$ é primitiva se, e só se, $(P_i)_{i \geq 0}$ o é.
- (ii) Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é reduzida, então $(P_i)_{i \geq 0}$ também é, mas não vale a recíproca.

Demonstração. (i) Dado uma sequência (n_i) com $0 = n_0 < n_1 < \dots$ que acompanha a realização do agrupamento; isto é, $P_i = L_{n_i} L_{n_i+1} \dots L_{n_{i+1}-1}$. Os produtos parciais de P_i é uma subsequência de produtos parciais de L_i , então primitividade de (L_i) implica a de (P_i) . Reciprocamente, se (P_i) é primitiva, então a partir de $k = n_i$, existe $n > k$ tal que o produto $P_k P_{k+1} \dots P_{n-1}$ tem todas entradas não nulas. Assim, o produto $L_{n_i} L_{n_i+1} \dots L_j$ tem entradas não nulas para algum $j < n$; o mesmo se aplica a partir de qualquer $n_{i-1} < k < n_i$.

(ii) Se $(\widehat{L}_i)_{i \geq 0}$ é uma sequência reduzida determinada por $(L_i)_{i \geq 0}$, então seu agrupamento ao longo da subsequência dá a sequência reduzida $(\widehat{P}_i)_{i \geq 0}$ para $(P_i)_{i \geq 0}$. Assim, ser reduzida passa para o agrupamento. Que a recíproca é falsa é mostrado por um simples exemplo de duas matrizes (3×3) , com todas entradas positivas exceto para a

1.5 Espaço Shift (não-estacionário) de Vértices e de Arestas e o Diagrama de Bratteli.37

última linha da primeira matriz e a última coluna da segunda que são identicamente nulas; o produto é estritamente positivo. \square

Capítulo 2

IFS e a semiconjugação

Neste Capítulo iremos generalizar o conceito de *Sistema de funções iteradas* (IFS) para uma sequência de conjuntos de funções. Em seguida, pensaremos nestas funções como uma sequência de automorfismos hiperbólicos e aplicaremos este conceito afim de mostrar uma semiconjugação do *Espaço Shift* (associado) com o toro \mathbb{T}^n .

2.1 Sistema Markoviano de funções iteradas

Sejam $\Omega_i = (\mathcal{K}_i, \rho_i)$ uma sequência de espaços métricos compactos. Tomaremos, por convenção, a ação de aplicações para a esquerda ao longo de $\Omega = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Omega_i$, isto é, as aplicações nesta sequência agem de \mathcal{K}_{i+1} para \mathcal{K}_i .

Sejam $f_i : X \rightarrow Y$ com $X \subset \Omega_{i+1}$ e $c_i := \text{Lip}\{f_i\}$ a **constante de Lipschitz**, isto é, $c_i := \inf\{c\}$ tal que:

$$\rho_i(f_i(x), f_i(w)) \leq c_i \rho_{i+1}(x, w),$$

$\forall x, w \in X$.

Definição 2.1. *Seja G_i um subconjunto compacto de Ω_i . Uma aplicação $S_i : G_{i+1} \rightarrow G_i$ é chamada de **contração** de G_i se c_i é tal que $0 \leq c_i < 1$ com $x, y \in G_{i+1}$. Assim, S_i é contínua.*

Considere um conjunto de símbolos \mathcal{E}_i onde $l_i = \#\mathcal{E}_i$.

Definição 2.2. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, tomemos uma família finita de aplicações $\mathcal{S}_i = \{S_1, S_2, \dots, S_{l_i}\}$, com $l_i \geq 2$, tal que $S_j : \mathcal{K}_{i+1} \rightarrow \mathcal{K}_i$, $\forall 1 \leq j \leq l_i$ onde \mathcal{K}_i é a classe de todos os conjuntos compactos de Ω_i . E definimos a aplicação

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} S_j.$$

Então chamamos a sequência $(\dots, E_0, E_1, E_2, \dots)$ de **sistema Markoviano de funções iteradas**, ou simplesmente **IFS Markoviano**.

Definição 2.3. Sejam \mathcal{K}_i a classe de todos os subconjuntos compactos não vazios de Ω_i e A_δ uma δ -vizinhança de $A \subset \Omega_i$, isto é, $A_\delta = \{x \in \Omega_i : \rho_i(x, a) \leq \delta, \forall a \in A\}$. Definimos a **distância de Hausdorff** d_i entre dois conjuntos $A, B \in \mathcal{K}$ como sendo o menor δ tal que $A_\delta \supset B$ e vice-versa:

$$d_i(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ e } B \subset A_\delta\}.$$

Uma simples verificação mostra que:

- (i) $d_i(A, B) \geq 0$, a igualdade acontece quando $A = B$;

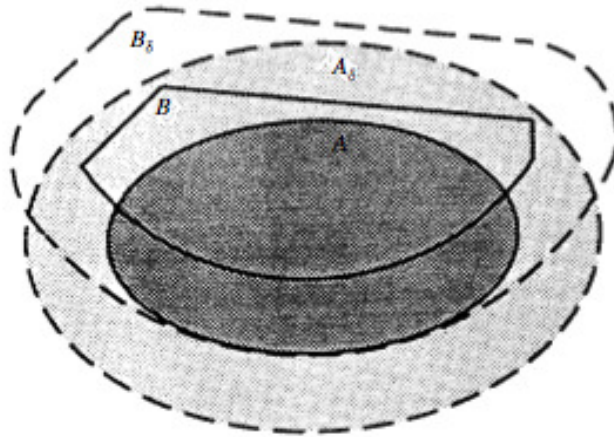


Figura 2.1: A distância Hausdorff entre os conjuntos A e B é no máximo $\delta > 0$ de modo que a δ -vizinhança A_δ de A contém B , e a δ -vizinhança B_δ de B contém A . Figura exposta em [17].

$$(ii) \quad d_i(A, B) = d_i(B, A);$$

$$(iii) \quad d_i(A, B) \leq d_i(A, C) + d_i(C, B); \forall A, B, C \subset \mathcal{K}.$$

Seja $\vec{K}_i = \prod_{j=1}^{l_i} K_i^j$ onde $K_i^j \subset \mathcal{K}_i$ um **vetor de subconjuntos compactos não vazios**.

Uma seqüência de vetores $\vec{K} = (\dots, \vec{K}_0, \vec{K}_1, \dots) \subset \Omega$ é dito atrator do *IFS Markoviano* se, para toda seqüência de vetores $\vec{G} = (\dots, \vec{G}_0, \vec{G}_1, \dots) \subset \Omega$,

$$E_{(i,n)}(\vec{G}_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \vec{K}_i, \forall i \in \mathbb{Z}$$

no sentido que $d_i(E_{(i,n)}(\vec{G}_{n+1}), K_i) \rightarrow 0$ onde d_i é a distância Hausdorff e

$$E_{(i,n)} = E_i \circ E_{i+1} \circ \dots \circ E_n = \bigcup_{\mathcal{I}_{n-i}} S_{e_i} \circ \dots \circ S_{e_n}$$

com \mathcal{I}_{n-i} sendo todas as $(n-i)$ seqüências (e_i, \dots, e_n) onde $n \geq i$, $e_j \in \mathcal{E}_j$, para todo $i \leq j \leq n$.

À seqüência $(\dots, \vec{K}_0, \vec{K}_1, \dots)$ damos o nome de **seqüência fractile**. e cada \vec{K}_i é chamado de **fractile**.

Lema 2.1. *Considere $\mathcal{S}_i = \{S_1, S_2, \dots, S_{l_i}\}$ uma família finita de contrações em \mathcal{K} e:*

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} S_i.$$

Então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$d_i(E_i(A), E_i(B)) \leq k \cdot d_{i+1}(A, B),$$

$\forall A, B \in \mathcal{K}$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{K}$, então:

$$d_i(E_i(A), E_i(B)) = d_i\left(\bigcup_{j=1}^{l_i} S_j(A), \bigcup_{j=1}^{l_i} S_j(B)\right) \leq \max_{1 \leq j \leq l_i} d_{i+1}(S_j(A), S_j(B)).$$

Se a δ -vizinhança $(S_j(A))_\delta \subset S_j(B)$, $\forall 1 \leq j \leq l_i$, então:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{l_i} S_j(A)\right)_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{l_i} S_j(B), \text{ e vice-versa.}$$

Seja $c_j := \inf\{c\}$ tal que:

$$d_i(S_j(x), S_j(y)) \leq c \cdot d_{i+1}(x, w),$$

$\forall x \in A, y \in B$, para cada $1 \leq j \leq l_i$.

$$\text{Assim: } d_i(E_i(A), E_i(B)) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq l_i} c_j\right) d_{i+1}(A, B). \quad \square$$

Definição 2.4. Considere $(\dots, E_0, E_1, E_2, \dots)$ um IFS Markoviano aplicado em $\vec{G} \subset \Omega$ uma seqüência de vetores de subconjuntos compactos não vazios, onde:

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} S_i$$

e considere

$$E_{(i,n)} = E_i \circ E_{i+1} \circ \dots \circ E_n = \bigcup_{\mathcal{I}_{n-i}} S_{e_i} \circ \dots \circ S_{e_n},$$

onde \mathcal{I}_{n-i} , $n \geq i$, é o conjunto de todas as $(n-i)$ seqüências (e_i, \dots, e_n) com cada $e_j \in \mathcal{E}_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Se cada S_{e_j} é uma contração, $d_j(S_{e_j}(x), S_{e_j}(y)) \leq c_{e_j} \cdot d_j(x, y)$, com $0 \leq c_{e_j} < 1$, $\forall x, y \in \Omega_{j+1}$, temos pelo Lema 2.1

$$d_j(E_j(A), E_j(B)) \leq \left(\max_{e_j \in \mathcal{E}_j} c_{e_j}\right) d_{j+1}(A, B),$$

com $A, B \in \mathcal{K}_{j+1}$. Agora tomemos \mathcal{S}_j sendo uma família de contrações, para cada $i \leq j \leq n$ e $E_{(i,n)} = \bigcup_{\mathcal{I}_{n-i}} S_{e_i} \circ \dots \circ S_{e_n}$. Temos que, $\forall S_{(i,n)} \in E_{(i,n)}$,

$$d_i(S_{(i,n)}(A), S_{(i,n)}(B)) \leq c_{(i,n)} \cdot d_i(A, B), \tag{2.1}$$

onde $c_{(i,n)} = \prod_{m=i}^n \bar{c}_{e_m}$ com $\bar{c}_{e_m} = \left(\max_{e_j \in \mathcal{E}_j} c_{e_j} \right)$ e $A, B \in \mathcal{K}_{n+1}$.

Neste caso $E_{(i,n)}$ é chamado de **contração** e $c_{(i,n)}$ é a **constante de contração** para a aplicação $E_{(i,n)}$, $i \leq n$

Definição 2.5. Definimos a aplicação $E : \prod \Omega_i \rightarrow \prod \Omega_i$ por:

$$E(x_0, x_1 \dots) = (E_1(x_1), E_2(x_2), \dots).$$

Definição 2.6. Um ponto $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{i=0}^{+\infty} \Omega_i$ é dito um ponto fixo sequencial para a sequência **IFS** se $E_{i+1}(x_{i+1}) = x_i, \forall i \geq 0$.

Proposição 2.1. Um ponto $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \prod_{i=0}^{+\infty} \Omega_i$ é um ponto fixo para E se, e somente se, é um ponto fixo sequencial.

Demonstração. \underline{x} é fixo $\Leftrightarrow E(x_0, x_1 \dots) = (E_1(x_1), E_2(x_2), \dots) = (x_0, x_1 \dots) \Leftrightarrow E_{i+1}(x_{i+1}) = x_i.$ □

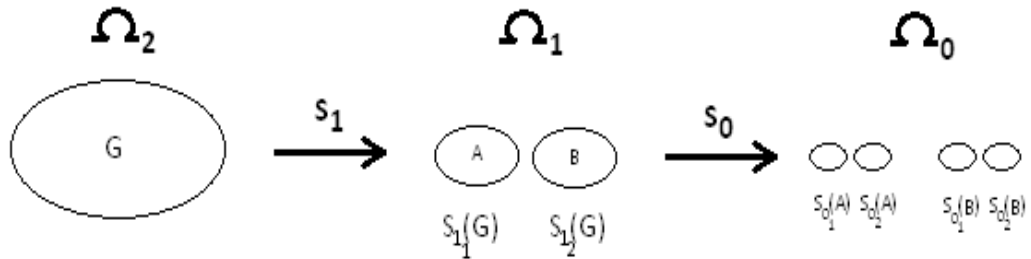


Figura 2.2: Construção do vetor (atrator) \bar{K}_0 para um exemplo de contrações $\mathcal{S}_i = \{S_{e_1}, S_{e_2}\}$ com $\{e_1, e_2\} \subset \mathcal{E}_i, 1 \leq i \leq 0$. A ultima figura da direita é $S_{(0,1)}(G) = S_0 \circ S_1(G) \subset \Omega_0$ com $G \subset \Omega_2$.

Proposição 2.2. *Se (\mathcal{K}_i, ρ_i) é um espaço métrico completo e:*

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_i 2^{-i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{k_i}$$

onde $k_i = \text{diam}(\mathcal{K}_i)$. Então $(\prod \mathcal{K}_i, \rho)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. \bar{x}^j é uma sequência de Cauchy para ρ se, e somente se, para cada i , x_i^j é uma sequência de Cauchy para ρ_i . \square

Teorema 2.1. *Seja $c_{(0,n)}$ a constante de contração como em (2.1) e $k_n = \text{diam}(\Omega_n)$. Se $c_{(0,n)}k_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, então $\vec{K} = (\vec{K}_0, \vec{K}_1, \dots) \in \prod_{i=0}^{+\infty} \mathcal{K}_i$ é um ponto fixo para a contração E , onde cada $\vec{K}_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{(i,n)}(\vec{G}_{n+1})$ com \vec{G}_{n+1} sendo a $n+1$ -ésima componente de $\vec{G} \in \Omega$,*

Demonstração. O diâmetro com respeito a ρ_0 de $E_0 \circ \dots \circ E_n(\Omega_{n+1})$ é menor ou igual à $c_{(0,n)} \cdot \text{diam}(\Omega_{n+1}) \rightarrow 0$, por hipótese.

Além disso, $E_0 \circ E_1(\Omega_2) \subseteq E_0(\Omega_1)$ já que $E_1(\Omega_2) \subseteq \Omega_1$. Logo temos uma sequência de conjuntos encaixantes dado por $E_{(0,n)}(\Omega_{n+1})$, para cada n .

Como $c_{(0,n)} \cdot \text{diam}(\Omega_{n+1}) \rightarrow 0$ e $(\prod \Omega_i, \rho)$ é um espaço métrico completo, temos que existe um único $K_0 = \bigcap_{n \geq 0} E_{(0,n)}(\Omega_{n+1})$ e $K_1 = \bigcap_{n \geq 1} E_{(1,n)}(\Omega_{n+1})$ com $E_0(K_1) = K_0$. De maneira geral:

$$\vec{K}_i = \bigcap_{n=i}^{+\infty} E_{(i,n)} \tag{2.2}$$

é fixo para E_{i-1} . E assim $\vec{K} = (\vec{K}_0, \vec{K}_1, \dots) \in \prod_{i=0}^{+\infty} \mathcal{K}_i$ é um ponto fixo para a aplicação E .

O ponto fixo é único já que $(\vec{K}_0, \vec{K}_1, \dots)$ é atrator. \square

Existem dois problemas principais que surgem quando trabalhamos com *IFS Markoviano*. O primeiro é a “codificação” de um dado conjunto atrator de alguma desta

sequência, e o segundo é a “decodificação” da sequência por desconectar este atrator. Em geral, não é possível encontrar um *IFS Markoviano* com um dado conjunto como atrator, mas podemos, normalmente, encontrá-la com um atrator próximo do requerido, para isso recomendamos a leitura em [[17], seção 9.5].

A contração E_i introduzida na Definição 2.4 é a chave para calcular o atrator do *IFS Markoviano*; de fato, a composta $E_{(i,n)}$ converge para um atrator \vec{K} para qualquer sequência inicial de vetores \vec{G} , no sentido que $d_i(E_{(i,n)}, K_i) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$, isto segue de (2.1). Assim $E_{(i,n)}(\vec{G})$ dá uma boa aproximação (decrecente, a medida que n aumenta) para \vec{K} . Se \vec{K}_i é um fractile, esta aproximação é chamada de **pré-fractile** de K_i .

Se $E_{(i,n)}(\vec{G}_{n+1})$ está contido em \vec{K}_i , ou seja, existe $(e_i, \dots, e_n) \in \mathcal{I}_{n-i}$ tal que $(S_{e_i} \circ \dots \circ S_{e_n})(y) = x \in \vec{K}_i; \forall y \in \vec{G}_{n+1}$, então segue de (2.2) que existe uma (não necessariamente única) sequência em \mathcal{I}_{n-i} para cada $x \in \vec{K}_i$ tal que $x \in S_{(i,n)}(\vec{G}) \subset E_{(i,n)}(\vec{G}_{n+1})$. Esta sequência dá uma codificação natural para x :

$$x = x_{e_i, \dots, e_n, \dots} = \bigcap_n^{+\infty} S_{e_i} \circ \dots \circ S_{e_n} \circ \dots (\vec{G}_{n+1}), \quad n \geq i$$

então $\vec{K}_i = \bigcup \{x_{e_i, \dots, e_n, \dots}\}$ e esta codificação independe de \vec{G} .

Note que, tomando a intersecção infinita, quase todo x tem uma única codificação, já que uma contração S é quase injetora.

2.2 Uma semiconjugação do Espaço Shift com \mathbb{T}^n

Seja (\mathbb{T}^n, f) uma *família eventualmente Anosov* (Definição 1.12). Pelo Teorema (1.1), associamos uma sequência $(\overline{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de aplicações lineares em $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ e uma família Anosov linear $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ topologicamente conjugada a (\mathbb{T}^n, f) . Considere também uma família (\mathbb{R}^n, M) sendo o levantamento de $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ a cada tempo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, existe uma sequência invariante (U_k, S_k) tais que $T_p(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n = S_k \oplus U_k$, para cada tempo k e cada $p \in \mathbb{T}^n$. Isto é equivalente ao *teorema da variedade estável* para sequências de aplicações, ou seja, para famílias Anosov. Para mais detalhes deste

teorema, veja [22].

Reservamos as notações s e u para denotar as dimensões de S_k e U_k , respectivamente, que permanecem constantes $\forall k$. Seja $\mathcal{B}_k = \{v_k^1, \dots, v_k^s, v_k^{s+1}, \dots, v_k^n\}$ uma base de autovetores de \mathbb{R}^n com $\mathcal{B}_k^S = \{v_k^1, \dots, v_k^s\}$ base de S_k e $\mathcal{B}_k^U = \{v_k^{s+1}, \dots, v_k^n\}$ base de U_k onde λ_k^j é autovalor de v_k^j . Assim $|\lambda_k^j| < 1$ para $1 \leq j \leq s$ enquanto $|\lambda_k^j| > 1$ para $s < j \leq n$. Escrevemos π_{S_k}, π_{U_k} para as projeções auto-coordenadas $\mathbb{R}^n = S_k \oplus U_k \rightarrow S_k, U_k$ nos fatores, como mostra a figura 2.3.

Para $0 \leq r \leq n$, seja:

$$C(n, r) := \{Q = (q_1, \dots, q_r) : 1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_r \leq n\}$$

ordenado lexicograficamente (considere $C(n, 0) = \emptyset$). Para $P \in C(n, r)$ seja $\mathbb{R}^P := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0 \text{ se } j \notin P\}$. Note que $\#C(n, r) = \binom{n}{r}$. Usamos I para o intervalo $[0, 1]$ e P^c para o complemento de P , isto é, $P^c = C(n, r) \setminus P$. Então

$$I^P = \{x = (x_1, \dots, x_n) : j \in P \Rightarrow 0 \leq x_j \leq 1; j \notin P \Rightarrow x_j = 0\}.$$

Abordaremos a partição de Markov via semi-conjugação. Seja $(L) = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a sequência reduzida de $\binom{n}{r} \times \binom{n}{r}$ matrizes de transição associada a *família eventualmente Anosov* e sendo aplicadas, digamos, em vetores coluna. Isto é, $M_i v_{i+1} = v_i$ para cada tempo i ,

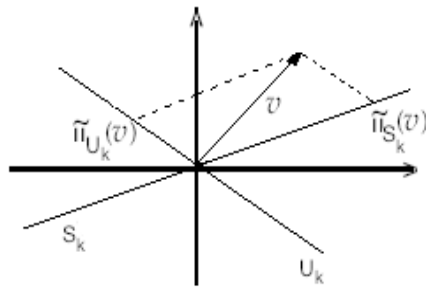


Figura 2.3: A decomposição (S_k, U_k) , no tempo k , de \mathbb{R}^2 . Aqui ilustramos $\pi_{S_k}(v), \pi_{U_k}(v)$ com $v \in \mathbb{R}^2$.

sendo M_i uma aplicação linear (matriz) e v_i um vetor (matriz) coluna. Assumiremos, à partir de agora, que (L) tem entradas não negativas e é primitiva. Denotamos por $\Gamma_{(L)}$ o grafo de $\binom{n}{r}$ vértices e a_{ij}^k arestas do vértice i para o vértice j , com $1 \leq i, j \leq \binom{n}{r}$. Um ponto em $\sum_{(L)}$ é um caminho de arestas em $\Gamma_{(L)}$ e $\sigma_{(L)}$ “desloca” o caminho para a esquerda. O itinerário de um ponto $x + \mathbb{Z}^n$ é o caminho que segue pela aresta e , a partir do vértice $i \in C(n, r)$, no tempo k , para o vértice $j \in C(n, r)$ no tempo $k+1$. Assim, se rotularmos dois vértices por P no tempo k e Q no tempo $k+1$, ambos pertencentes à $C(n, r)$, o grafo $\Gamma_{(L)}$ terá a_{PQ}^k arestas do vértice P para o vértice Q denotadas por (P, Q, j) , $1 \leq j \leq a_{PQ}^k$. Um ponto $w \in \sum_{(L)}$ será indexado por \mathbb{Z} com $w_k = (P_k, Q_{k+1}, j_k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Suponha agora que o rótulo $z_{P,Q,j} \in \mathbb{Z}^n$ tenha sido escolhido convenientemente para cada aresta em $\Gamma_{(L)}$. Definimos uma aplicação $\alpha_k : \sum_{(L)}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ por:

$$\alpha_i(w) := \pi_{U_i} z_{w_i} + \sum_{t=i}^{+\infty} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}} - \sum_{t=-\infty}^{i-1} M_{(i-1,t)} \pi_{S_t} z_{w_t}; \quad (2.3)$$

onde M_i^{-1} denota a aplicação inversa de M_i ; e, com $\beta \in \{-1, +1\}$ fixo:

$$M_{(i,k)}^\beta := M_i^\beta M_{i+1}^\beta \dots M_{k-1}^\beta M_k^\beta; \text{ se } i \leq k; \text{ e}$$

$$M_{(i,k)}^\beta := M_i^\beta M_{i-1}^\beta \dots M_{k+1}^\beta M_k^\beta; \text{ se } i \geq k.$$

Definição 2.7. Dizemos que uma família eventualmente Anosov (\mathbb{R}^n, M) é **finita** se o número de aplicações M_i é finito.

Proposição 2.3. Sejam $w \in \sum_{(L)}$ indexado por \mathbb{Z} com $w_t = (P_t, Q_{t+1}, j_t)$ com $t \in \mathbb{Z}$, (\mathbb{R}^n, M) uma família eventualmente Anosov finita e α_i associado a um conjunto $Z = \{z_{w_t}\}_{t \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^n$ como em (2.3). Se Z tem um número finito de elementos, então α_i converge.

Demonstração. Como o conjunto Z é finito, existe $z \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\|z_{w_t}\| \leq \|z\|$, $\forall z_{w_t} \in Z$ e, como (\mathbb{R}^n, M) é uma família eventualmente Anosov, segue de (1.1) que

existe $\lambda < 1$ e uma sequência (n_k) tal que

$$\prod_{t=n_k}^{n_{k+1}-1} \bar{\lambda}_t < \lambda,$$

onde $\bar{\lambda}_t = \left(\max_{s < j \leq n} |\lambda_t^j| \right)$. Assim

$$\sum_{t=n_k}^{n_{k+1}-1} \|M_{(n_k,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}}\| \leq \lambda \|z\|.$$

E então

$$\sum_{t=n_k}^{+\infty} \|M_{(n_k,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{t=n_k}^{n_{k+1}-1} \|M_{(n_k,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \|z\|$$

que converge absolutamente já que $\lambda < 1$.

Analogamente $\sum_{t=-\infty}^{i-1} M_{(i-1,t)} \pi_{S_t} z_{w_t}$ converge. Logo α_i converge. \square

Vamos definir duas *sequências IFS Markovianas* associadas e mostrar que se α_i converge (i fixo) então estas sequências convergem. Assim, se $w \in \sum_{(L)}$, temos $\alpha(w)$ um único ponto em \mathbb{R}^n e α contínua. No Capítulo 4 mostramos uma semi-conjugação do espaço shift com o toro \mathbb{T}^n dada pela aplicação $\bar{\alpha}_i$, sujeito a uma cuidadosa escolha dos elementos $z \in \mathbb{Z}^n$.

Definimos $\bar{\alpha}_i : \sum_{(L)}^i \rightarrow \mathbb{T}^n$ dado por $\bar{\alpha}_i := \pi_{\mathbb{T}} \circ \alpha_i$.

Lema 2.2. $\bar{\alpha}_i = \bar{M}_i^{-1} \circ \bar{\alpha}_{i+1} \circ \sigma(w)$, onde $\bar{M}_i^{-1} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.

Demonstração. Seja $w \in \sum_{(L)}^i$, então: $M_i^{-1} \circ \alpha_{i+1} \circ \sigma(w) =$

$$\begin{aligned} &= M_i^{-1} \left(\pi_{U_{i+1}} z_{w_{i+1}} + \sum_{t=i+1}^{+\infty} M_{(i+1,t)}^{-1} \pi_{U_{t+1}} z_{w_{t+1}} - \sum_{t=-\infty}^i M_{(i,t)} \pi_{S_t} z_{w_t} \right) = \\ &= M_i^{-1} \pi_{U_{i+1}} z_{w_{i+1}} + \sum_{t=i+1}^{+\infty} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}} - \sum_{t=-\infty}^{i-1} M_{(i-1,t)} \pi_{S_t} z_{w_t} - \pi_{S_i} z_{w_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t=i}^{+\infty} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}} - \sum_{t=-\infty}^{i-1} M_{(i-1,t)} \pi_{S_t} z_{w_t} - \pi_{S_i} z_{w_i} = \alpha_i(w) - \pi_{U_i} z_{w_i} - \pi_{S_i} z_{w_i} = \\
 &= \alpha_i(w) - z_{w_i}.
 \end{aligned}$$

Como $z_{w_i} \in \mathbb{Z}^n$ temos $\overline{M}_i^{-1} \circ \overline{\alpha}_{i+1} \circ \sigma(w) = \overline{\alpha}_i$

□

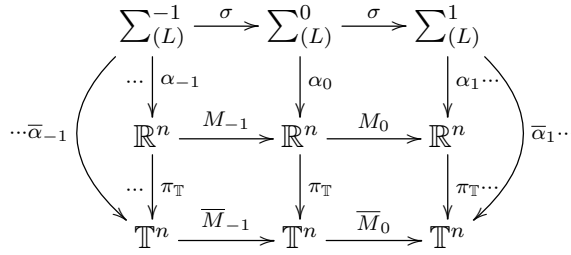


Figura 2.4: A semi-conjugação $\overline{\alpha}$.

Observação 2.1. *Agora vamos descrever uma sequência de retângulos (próprios) em \mathbb{R}^n que mostraremos (no Capítulo 4), após projeção em \mathbb{T}^n , estar em uma sequência de partições de Markov de \mathbb{T}^n para a família eventualmente Anosov (\mathbb{R}^n, M) .*

Fixemos $P \in C(n, u)$ e definimos:

$$K_i^P := \{\pi_{U_i} \alpha_i(w) : P \text{ é o vértice inicial de } w_i\}$$

$$L_i^P := \{\pi_{S_i} \alpha_i(w) : P \text{ é o vértice inicial de } w_i\}$$

Assim $\alpha_i\{w \in \sum_{(L)}^i : P \text{ é o vértice inicial de } w_i\} = [K_i^P, L_i^P] \subset \mathbb{R}^n$ é a imagem do i -cilindro sobre α_i

Definição 2.8. *Sejam $\mathcal{K}(U_t)$ e $\mathcal{K}(S_t)$ subespaços compactos não vazios de U_t e S_t com a métrica Hausdorff, e sejam:*

$$\mathcal{K}_u(U_t) := \prod_{P \in C(n,u)} \mathcal{K}(U_t) ; \mathcal{K}_u(S_t) := \prod_{P \in C(n,u)} \mathcal{K}(S_t)$$

com a métrica dada pela maior distância entre os fatores. definimos duas aplicações E e F em $\prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_u(U_t)$ e $\prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_u(S_t)$, respectivamente, dadas pelas sequências de

contrações $(\dots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \dots)$ e $(\dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots)$ onde, para cada $i \in \mathbb{Z}$, temos $E_i : \mathcal{K}_u(U_{i+1}) \rightarrow \mathcal{K}_u(U_i)$ e $F_i : \mathcal{K}_u(S_i) \rightarrow \mathcal{K}_u(S_{i+1})$, dados pelas seguintes uniões:

$$(E_i(\vec{G}_{i+1}))_P := \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^i} \left(M_i^{-1}(G_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right), \quad (2.4)$$

onde P é o vértice inicial de w_i e $\vec{G} = (\dots, \vec{G}_{i-1}, \vec{G}_i, \vec{G}_{i+1}, \dots) \subset \prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_u(U_t)$ é fixo com cada $\vec{G}_i = (G_i^P)_{P \in C(n,u)}$; e:

$$(F_i(\vec{G}_i))_Q := \bigcup_{P \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^i} \left(M_i(G_i^P) - M_i \pi_{S_i} z_{P,Q,j}^i \right). \quad (2.5)$$

Agora tomemos, para cada $P \in C(n, u)$ e $k > i$, a seguinte composição:

$$\begin{aligned} (E_{(i,k)}(\vec{G}_{k+1}))_P &:= ((E_i \circ E_{i+1} \circ \dots \circ E_{k-1} \circ E_k)(\vec{G}_{k+1}))_P = \\ &= \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(M_{(i,k)}^{-1}(G_{k+1}^Q) + \sum_{t=i}^{k-1} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{t+1}} z_{w_{t+1}} + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $s_{P,Q}$ é o número de caminhos permitidos de P (vértice inicial de w_i) para Q (vértice final de w_k). Isto corresponde a entrada PQ da matriz $L_{(k,i)}^T := L_k^T L_{k-1}^T \dots L_i^T$ com o expoente T denotando a transposta de L . Convencionamos $E_{(i,i)}(\vec{G}_{i+1}) := E_i(\vec{G}_{i+1})$.

Teorema 2.2. *Sejam $\alpha = (\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)$, onde cada α_i é como em (2.3), e $E = (\dots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \dots)$ agindo em $\vec{G} = (\dots, \vec{G}_{i-1}, \vec{G}_i, \vec{G}_{i+1}, \dots) \subset \prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_u(U_t)$ com cada $\text{diam}(\vec{G}_i) < l \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, onde cada E_i é como em (2.4). Se α converge, isto é, cada α_i converge, então a aplicação E tem um único ponto fixo que é atrator.*

Demonstração. Basta notar que cada $(E_{(i,k)}(\vec{G}_{k+1}))_P$, dado em (2.6), converge quando $k \rightarrow +\infty$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, cada $P \in C(n, u)$ e $\vec{G}_{k+1} \subset \mathcal{K}_u(U_t)$, com

$\text{diam}(\vec{G}_{k+1}) < l$. Como

$$(E_{(i,k)}(\vec{G}_{k+1}))_P := \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(M_{(i,k)}^{-1}(G_{k+1}^Q) + \sum_{t=i}^{k-1} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{t+1}} z_{w_{t+1}} + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right)$$

temos que a somatória (central) converge, já que

$$\alpha_i = \pi_{U_i} z_{w_i} + \sum_{t=i}^{+\infty} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{(t+1)}} z_{w_{t+1}} - \sum_{t=-\infty}^{i-1} M_{(i-1,t)}^{-1} \pi_{S_t} z_{w_t}$$

converge por hipótese, e E age em U .

Agora $M_{(i,k)}^{-1}(G_{k+1}^Q)$ converge, quando $k \rightarrow +\infty$, $\forall Q \in C(n,u)$: como M_i é hiperbólico, logo $M_i^{-1}|_{U_{i+1}}$ é uma contração $\forall i$. Então $M_{(i,k)}^{-1}|_{U_{k+1}}$ é uma contração. Tomemos $c_{(i,k)} = \|M_{(i,k)}^{-1}|_{U_{k+1}}\|$ sendo a *constante de contração* de $M_{(i,k)}^{-1}|_{U_{k+1}}$. Temos que $c_{(i,k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Assim existe um k suficientemente grande tal que $\|M_{(i,k)}^{-1}(G_{k+1}^Q)\| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, já que $\text{diam}(G_{k+1}^Q) < \text{diam}(\vec{G}_{k+1}) < l$. Note que podemos pensar na imagem de $E_{(i,k)}$ sendo aplicado em $\vec{G}_{k+1} = (G_{k+1}^P)_{P \in C(n,u)} \subset \mathcal{K}_u(U_k)$, para k grande, como um *pré-fractile* para $(K_i^P)_{P \in C(n,u)}$. \square

Concluimos assim que, se α converge, $(\dots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \dots)$ é um *IFS Markoviano* onde $(\dots, \vec{K}_{i-1}, \vec{K}_i, \vec{K}_{i+1}, \dots)$ é o único ponto atrator, com $\vec{K}_i = (K_i^P)_{P \in C(n,u)} \subset \mathcal{K}_u(U_i)$ e $(K_i^P)_{P \in C(n,u)} = \bigcap_{k=i}^{+\infty} E_{(i,k)}(\vec{G}_{k+1})$, isto é, para cada $i \in \mathbb{Z}$:

$$E_{(i,k)}(\vec{G}_{k+1}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (K_i^P)_{P \in C(n,u)} \quad (2.7)$$

Assim, pelo Teorema 2.1, $(\dots, \vec{K}_{i-1}, \vec{K}_i, \vec{K}_{i+1}, \dots)$ é um ponto fixo para o *IFS Markoviano* pois, se K_{i+1} é o limite de $E_{(i+1,k)}(\vec{G}_{k+1})$, quando $k \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} M_i \left((E_i(\vec{K}_{i+1}))_P \right) &= \\ &= M_i \left(\bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^i} \left(M_i^{-1}(K_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right) \right) = \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^i} \left(K_{i+1}^Q + M_i \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right) = \end{aligned}$$

$$= M_i K_i^P \quad \therefore (E_i(\vec{K}_{i+1}))_P = \vec{K}_i^P$$

Ou ainda, $\forall k \geq i$:

$$M_{(k,i)}(K_i^P) = \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(K_{i+1}^Q + \sum_{t=i}^k M_{(k,t)} \pi_{U_t} z_{P,Q,j}^t \right) = M_{(k,i)}((E_{(i,k)}(\vec{K}_{k+1}))_P) \quad (2.8)$$

Vejam também a seguinte composição:

$$\begin{aligned} (F_{(i-1,k)}(\vec{G}_k))_Q &:= ((F_{i-1} \circ F_{i-2} \circ \dots \circ F_{k+1} \circ F_k)(\vec{G}_k))_Q = \\ &= \bigcup_{P \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(M_{(i-1,k)}(G_k^P) - \sum_{t=k}^{-1} M_{(i-1,t)} \pi_{S_t} z_{P,Q,j}^t \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$\forall k \leq i-1$, onde $s_{P,Q}$ é o número de caminhos permitidos de P (vértice inicial de w_k) para Q (vértice final de w_i). Assim, com a convergência de α_i , temos:

$$F_{(i-1,k)}(\vec{G}_k) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} \pi_{S_i} \alpha_i(w) = (L_i^P)_{P \in C(n,u)} = \bigcap_{k=i-1}^{-\infty} F_{(i-1,k)}(\vec{G}_k) \quad (2.10)$$

com $\vec{G}_k = (G_k^P)_{P \in C(n,u)} \subset \mathcal{K}_u(S_k)$. Isto é, as intersecções dos *pré-fractiles* de $F_{(i-1,k)}$ aplicada em $\vec{G}_k = (G_k^P)_{P \in C(n,u)} \subset \mathcal{K}_u(S_k)$ com $k \rightarrow +\infty$

Note também que, se $\vec{L}_{i-1} = (L_{i-1})_{Q \in C(n,u)} \subset \mathcal{K}_u(S_{i-1})$ é o limite de $F_{(i-2,k)}$ quando $k \rightarrow -\infty$:

$$M_{i-1}^{-1}((F_{i-1}(\vec{L}_{i-1}))_Q) = \bigcup_{P \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^{i-1}} \left(L_i^P - \pi_{S_{i-1}} z_{P,Q,j}^{i-1} \right) = M_{i-1}^{-1}(L_i^Q). \quad (2.11)$$

E ,

$$M_{(k,i-1)}^{-1}((F_{(i-1,k)}(\vec{L}_k))_Q) = \bigcup_{P \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(L_i^P - \sum_{t=k}^{i-2} M_{(k,t)}^{-1} \pi_{S_{t+1}} z_{w_{t+1}} - \pi_{S_k} z_{P,Q,j}^k \right) =$$

$= M_{(k,i-1)}^{-1}(L_i^Q); \forall k \leq i-1$, e L_k o limite de $F_{(k-1,t)}$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Assim, $(\dots, \vec{L}_{i-1}, \vec{L}_i, \vec{L}_{i+1}, \dots)$ é ponto fixo para F .

Observação 2.2. Os conjuntos $\text{int}K_i^P$ e $\text{int}L_i^P$ são não vazios, $\forall P \in C(n, u)$, já que a sequência de matrizes de transição (L) foi considerada primitiva.

Proposição 2.4. Seja $P \in C(n, u)$, então o retângulo $R_i^P := [K_i^P, L_i^P]$ é próprio.

Demonstração. Definimos $*$: $\mathcal{K}(U_i) \rightarrow \mathcal{K}(U_i)$ a operação de tomar o fecho do interior. Seja K_{i+1} o limite de $E_{(i+1,k)}(G)$ quando $k \rightarrow +\infty$, então $K_{i+1}^* = \overline{\text{int}K_{i+1}} \subseteq K_{i+1}$, coordenada a coordenada. Sabemos que:

$$K_i^P = (E_i(\vec{K}_{i+1}))_P = \bigcup_{Q \in C(n, u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}^i} \left(M_i^{-1}(K_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right).$$

Para cada dupla (Q, j) fixa, definimos $H_i(K_{i+1}^Q) = M_i^{-1}(K_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i$. Como $M_i^{-1} |_{U_{i+1}}$ é homeomorfismo, H_i também o é. Assim, como $H_i(K_{i+1}^Q) \subseteq K_i^P$ então $H_i(\text{int}K_{i+1}^Q) \subseteq \text{int}K_i^P$. Logo: $H_i((K_{i+1}^Q)^*) = H(\overline{\text{int}K_{i+1}^Q}) \subseteq \overline{H(\text{int}K_{i+1}^Q)} \subseteq \overline{\text{int}K_i^P} = (K_i^P)^* \subseteq K_i^P$.

Assim $(E_i(K_{i+1}^*))_P \subseteq (K_i^P)^* \subseteq K_i^P$. Daí, pode-se concluir que $(E_{(i,k)}(K_{i+1}^*))_P \subseteq (K_i^P)^* \subseteq K_i^P$ onde $K_{k+1}^* \subset \mathcal{K}_u(U_{k+1})$, $\forall k \geq i$, e $E_{(i,k)}$ é como em (2.6).

Mas $(E_{(i,k)}(K_{k+1}^*))_P \rightarrow K_i^P$ quando $k \rightarrow +\infty$, logo $(K_i^P)^* = K_i^P$ e assim K_i^P é um retângulo próprio. Analogamente, $\overline{\text{int}L_i^P} = L_i^P$.

□

Capítulo 3

O Step Cycle

Agora vamos discutir as escolhas para $z_{P,Q,k}$ a fim de encontrar um “*step cycle*” a seguir definido (Definição (3.1)), que será homólogo à imagem de M_0 de um *sub-toro* \mathbb{T}^P .

A base padrão de $H_r(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ consiste das classes fundamentais de homologia (com orientação apropriada) do r -toro que é coberto pelas coordenadas planas r -dimensionais. Estas coordenadas planas, digamos \mathbb{R}^Q , correspondem aos elementos Q de $C(n, r)$.

Vamos usar a sequência $((M_i^r)^T)_{i \in \mathbb{Z}}$ onde T indica a transposta da matriz M_i^r induzida no grupo de homologia como a sequência de matrizes de transição para a *partição de Markov* cujos retângulos são os r -toro. O P -ésimo retângulo, no tempo i , tem transição para os retângulos que correspondem aos r -toro na P -ésima coluna de M_i^r e assim, na P -ésima linha de $(M_i^r)^T$. A soma destes r -toro dão um ciclo em \mathbb{T}^n homólogo à $\overline{M}_i \mathbb{T}^P$. Chamamos a soma dos cubos singulares paralelos aos planos coordenados de “Step Cycle”.

Podemos fazer o levantamento de $\overline{M}_i \mathbb{T}^P$ para \mathbb{R}^n obtendo um ciclo módulo a ação de $M_i \mathbb{Z}^P$, então podemos levantar a soma dos cubos singulares em \mathbb{R}^n que é também um ciclo módulo $M_i \mathbb{Z}^P$ cuja projeção em \mathbb{T}^n é homólogo a este levantamento, já que representa o mesmo levantamento de $H_r(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$. Este levantamento facilita as discussões sobre transições de um retângulo para outro já que, em \mathbb{R}^n , podemos escrever os levantamentos de \mathbb{Z}^n baseado em translações convenientes de cada cubo singular.

Para $P = (p_1, \dots, p_r) \in C(n, r)$, definimos $\rho_P : I^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\rho_P(x_1, \dots, x_r) :=$

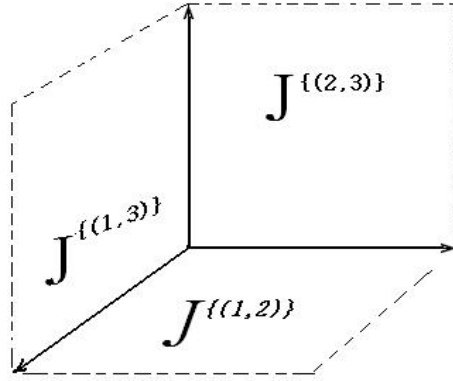


Figura 3.1: $J^P \in \mathbb{R}^3$ com $P \in C(3,2)$. Por exemplo, se $P = (1,3)$, então $\rho_P(x_1, x_2) = J^{\{(1,3)\}} = (x_1, 0, x_2)$, com $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

(t_1, \dots, t_n) onde cada $t_{P_j} = x_j$ e $t_k = 0$ se $k \notin P$. Aqui

$$I^r := \{(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1 \text{ para } 1 \leq j \leq r\};$$

e denotamos por J^P a imagem de $\rho_P(I^r)$. Veja figura 3.1.

Definimos também $P^c \in C(n, n-r)$, o complementar de P , por $P^c := (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-r})$ onde $P \cup P^c = \{p_1, \dots, p_r\} \cup \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-r}\} = \{1, \dots, n\}$. Tomamos, por exemplo, o caso conhecido [1] para $n = 2$. Os retângulos $[J^P, -J^{P^c}]$, com $P \in C(2, 1)$, dão uma partição de \mathbb{T}^2 , no tempo 0 como na figura 3.2.

Consideremos um complexo de cadeia de cubos $\mathcal{C}_* = \bigoplus_{r=0}^n \mathcal{C}_r$, onde \mathcal{C}_r é o grupo abeliano livre gerado por $\{\rho_P + z : P \in C(n, r), z \in \mathbb{Z}^n\}$. Chamamos $\rho_P + z$ de um degrau r -cubo por ser paralelo ao r -plano coordenado e cobrir o r -toro.

Definição 3.1. *Definimos uma aplicação $Y : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$ como a versão “step” da família $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Para cada r , $0 \leq r \leq n$ e $i \in \mathbb{Z}$; $Y_i : \mathcal{C}_r \rightarrow \mathcal{C}_r$ será definida para cada $Y_i(\rho_P)$ por $Y_i(\rho_P + z) := Y_i(\rho_P) + M_i z$ com $z \in \mathbb{Z}^n$, estendendo-se linearmente para os geradores de \mathcal{C}_* . Assim $M_i^{-1} Y_i$ comuta com a ação de \mathbb{Z}^n por translações (em \mathcal{C}_*).*

Agora fixemos uma sequência $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde cada $\epsilon_i \in -\overset{\circ}{I}^n$, com $\|\epsilon_i\|$ pequeno, está no conjunto de medida total cujo complemento é a união enumerável de subespaços afins $M_i \mathbb{R}^P + \mathbb{R}^{P'} + z$, $P \in C(n, r)$, $P' \in C(n, r')$ com $r + r' < n$, $z \in \mathbb{Z}^n$ e $i \in \mathbb{Z}$.

Definimos uma sequência $(N_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ com $N_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $N_i x := M_i x + \epsilon_i$. E definimos:

$$Y_i(\rho_P) = \sum_{Q \in C(n,r)} \sum_{j=1}^{|a_{P,Q}^i|} \text{sign}(a_{P,Q}^i)(\rho_Q + M_i z_{P,Q,j}^i), \quad (3.1)$$

onde cada $z_{P,Q,j}^i$ é escolhido para que $N_i J^P \cap (-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i) \neq \emptyset$, $\forall i$, $a_{P,Q}^i$ denota a entrada na linha P e coluna Q da matriz transposta $(M_i^T)^T$. O sinal negativo em $-(\rho_Q + z_{P,Q,j}^i)$ tem significado da inversa da adição no grupo abeliano gerado pelos r -cubos, enquanto $-J^{Q^c}$ significa $\{-\rho_{Q^c}(y) : y \in I^{n-r}\}$. Conseqüentemente, $\pi_{\mathbb{T}} Y_i(\rho_P)$ representa, em $H_r(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$, a mesma classe de homologia que $M_i \pi_{\mathbb{T}}(\rho_P)$, dado pela coluna P de M_i^T . A intuição é que $\{z_{P,Q,j}^i\}$ é escolhido de modo que $M_i^{-1} Y_i(\rho_P)$ seja homólogo a ρ_P .

Proposição 3.1. *Para cada $i \in \mathbb{Z}$, os pontos de intersecção de $N_i J^P$ com $(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$ não podem pertencer a fronteira de $N_i J^P$ ou de $(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$.*

Demonstração. Sejam $P \in C(n,r)$ e $Q^c \in C(n,n-r)$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $N_i J^P \cap \partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i) \neq \emptyset$. Note que a dimensão de $\partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$ é $r' < n-r$ que implica $r+r' < n$. Então, para algum $x \in J^P$

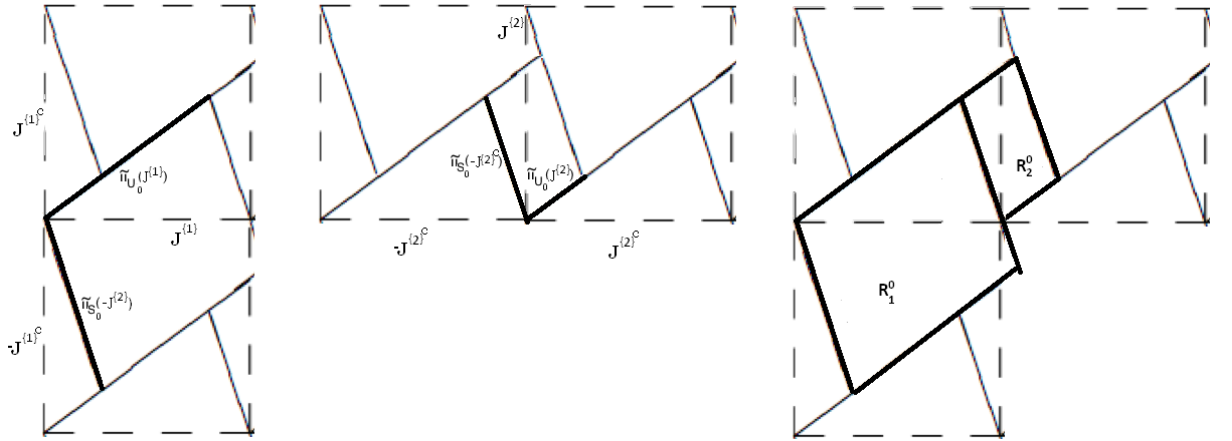


Figura 3.2: Aqui $P = \{1; 2\} \in C(2,1)$. Para a figura da esquerda, $P = 1$ e tempo 0, obtemos a caixa $R_0^1 = [\pi_{U_0} J^1; \pi_{S_0} (-J^{1^c})]$. Figura central temos $P = 2$, tempo 0, obtendo a caixa $R_0^2 = [\pi_{U_0} J^2; \pi_{S_0} (-J^{2^c})]$. Finalmente, na figura da direita, a partição $\mathcal{R}_0 = \{R_1^0, R_2^0\}$.

temos $N_i x \in \partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$. Assim $M_i x + \epsilon_i \in \partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$ e então $\epsilon_i \in \partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i) - M_i x \subset M_i J^P + \partial(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$, o que é absurdo, já que, por definição, ϵ_i pertence ao complemento de conjuntos desta forma. Logo tal intersecção é impossível. \square

A Proposição mostra que Y_i está bem definida no sentido que não há ambiguidade nas escolhas de $z_{P,Q,j}^i$. Observe a figura 3.3.

Observação 3.1. No caso $r = 0$, temos $P = \emptyset$, J^P é a origem, C^0 é gerado por \mathbb{Z}^n e $Y_i(\rho_\emptyset) = \rho_\emptyset$, já que $\epsilon_i \in -\overset{\circ}{I}^n$. Deste modo, Y_i age como M_i no conjunto \mathbb{Z}^n .

Observe também que, o número de elementos em $A = N_i J^P \cap (-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$ e em $B = \overline{M_i} \mathbb{T}^P \cap \mathbb{T}^{Q^c}$ é $|a_{P,Q,j}^i|$, já que $\{[\mathbb{T}^{Q^c}] : Q \in C(n, r)\}$ é uma base para $H_{n-r}(\mathbb{T}^n)$ dual a base $\{[\mathbb{T}^Q] : Q \in C(n, r)\}$ de $H_r(\mathbb{T}^n)$. Assim, temos a projeção $\pi_{\mathbb{T}}|_A: \mathbb{R}^n \rightarrow B$ bijetora.

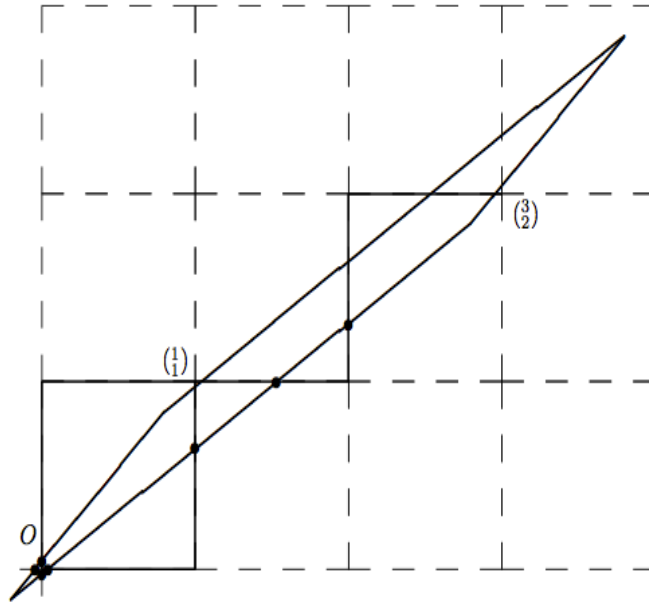


Figura 3.3: Cadeias de degraus para $M_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Aqui $P \in C(2, 1) = \{1, 2\}$. Então as cadeias são dadas pelas somas $\rho_1 + (\rho_2 + \binom{1}{0}) + (\rho_1 + \binom{1}{1}) + (\rho_2 + \binom{2}{1}) + (\rho_1 + \binom{2}{2})$ e $\rho_2 + (\rho_1 + \binom{0}{1})$. Estas cadeias em \mathbb{R}^2 são homólogas (após projeção em \mathbb{T}^2) às imagens das duas 1-cadeias ρ_1, ρ_2 , sob a aplicação M_0 . Aqui $\epsilon = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.16 \end{pmatrix}$. Figura extraída de [10]

Finalmente, definimos:

$$\begin{aligned} Y_{(i,k)}(\rho_P) &:= (Y_k \circ Y_{k-1} \circ \cdots \circ Y_{i+1} \circ Y_i)(\rho_P) = \\ &= \sum_{Q \in C(n,r)} \sum_{j=1}^{|s_{P,Q}|} \text{sign}(s_{P,Q}^i) \left(\rho_Q + \sum_{t=i}^k M_{(k,t)} z_{P,Q,j}^t \right); \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $i \leq k$ e $s_{P,Q}$ é o número correspondente a entrada na linha P e coluna Q da matriz produto $(M_i^r)^T \cdot (M_{i+1}^r)^T \cdots (M_k^r)^T$.

A aplicação Y está bem definida e $M_{(k,i)}^{-1} Y_{(i,k)}(\rho_P)$ é homólogo a ρ_P , já que $M_j^{-1} Y_j(\rho_P)$ é homólogo a ρ_P , para cada $i \leq j \leq k$.

Teorema 3.1. *Se o conjunto $Z = \{z_{P,Q,j}^k \in \mathbb{Z}^n : k \in \mathbb{Z}\}$ formado por elementos como descritos anteriormente estiver associado a uma família eventualmente Anosov finita, então a aplicação α_i como em (2.3) converge.*

Demonstração. Como a família é finita, o conjunto Z tem um número finito de elementos. Assim a convergência de α_i está dada pela Proposição 2.3. \square

Observação 3.2. *Estaremos interessados no caso $r = u$, onde u é a dimensão da variedade instável que permanece constante em cada tempo i . Também, devemos resaltar que, se $x \in N_i J^P \cap (-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)$ e $y = x - M_i z_{P,Q,j}^i$, então:*

$$\begin{aligned} y &\in (N_i J^P \cap (-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)) - M_i z_{P,Q,j}^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_i^{-1}(y) \in (J^P \cap N_i^{-1}(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i)) - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_i^{-1}(y) \in (J^P - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i) \cap (N_i^{-1}(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i) - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_i^{-1}(y) \in (-(-J^{P^c}) - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i) \cap N_i^{-1}(-J^{Q^c} + M_i z_{P,Q,j}^i - M_i z_{P,Q,j}^i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow N_i^{-1}(y) \in (-(-J^{P^c}) - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i) \cap N_i^{-1}(-J^{Q^c}) = \\ &= N_i^{-1}(-J^{Q^c}) \cap (-(-J^{P^c}) - N_i^{-1} M_i z_{P,Q,j}^i) \end{aligned}$$

Desta forma, a escolha de $z_{P,Q,j}^i$ é sugerida não só para a ação de N_i no u -cubo J^P , mas também para a ação de N_i^{-1} no dual s -cubo $-J^{Q^c}$. De fato, se M_i for substituído

por M_i^{-1} , então o subespaço U_i e a aplicação E_i em (2.4) serão substituídos pelo subespaço S_i e pela aplicação F_i em (2.5). Também, temos $((M_i^u)^T)^{-1} = M_i^s$ (s é a dimensão de S_i). Note que $\binom{n}{u} = \binom{n}{n-u} = \binom{n}{s}$.

Neste caso, também substituímos Y_i dado em (3.1) por

$$X_i(\rho_Q) = \sum_{P \in C(n,u)} \sum_{j=1}^{|a_{P,Q}^{i-1}|} \text{sign}(a_{P,Q}^{i-1})(\rho_P - z_{P,Q,j}^{i-1})$$

onde $a_{P,Q}^{i-1}$ é a entrada na linha P e coluna Q de $(M_{i-1}^s)^{-1} = (M_{i-1}^u)^T$. E definimos:

$$\begin{aligned} X_{(i,k)}(\rho_Q) &:= (X_{k+1} \circ X_{k+2} \circ \cdots \circ X_{i-1} \circ X_i)(\rho_Q) = \\ &= \sum_{P \in C(n,u)} \sum_{j=1}^{|s_{P,Q}|} \text{sign}(s_{P,Q})(\rho_P - \sum_{t=k}^{i-1} M_{(k,t)}^{-1} z_{w_{t+1}}^{t+1} - z_{P,Q,j}^k), \end{aligned}$$

para $k \leq i-1$, onde $s_{P,Q}$ é a entrada na linha P e coluna Q da matriz produto $(M_k^u)^T (M_{k+1}^u)^T \cdots (M_{i-2}^u)^T (M_{i-1}^u)^T$.

Definição 3.2. A aplicação bordo $\partial : \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$, aplicada em cada cubo, se escreve:

$$\partial \rho_P := \sum_{k=1}^r (-1)^k (\rho_{P \setminus p_k} - (\rho_{P \setminus p_k} + e_{p_k})),$$

onde, a cada termo desta soma damos o nome de **contribuição**.

Lema 3.1. A aplicação Y_i (3.1) comuta com o operador bordo $\partial : \mathcal{C}_* \longrightarrow \mathcal{C}_*$.

Demonstração. É suficiente fixar r e $P \in C(n, r)$ e mostrar que $Y_i(\partial \rho_P) = \partial(Y_i \rho_P)$. Em ambos lados da igualdade temos combinações finitas do tipo $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} k_z (\rho_Q + M_i z)$, com $k_z \in \mathbb{Z}$ e $Q \in c(n, r-1)$. Cada contribuição $\rho_Q + M_i z$ de $Y_i(\partial \rho_P)$ vem da N_i -imagem de uma face de ρ_P que encontra $(-J^{Q^c} + M_i z)$, e cada $\rho_Q + M_i z$ de $\partial(Y_i \rho_P)$ surge de $N_i J^P$ encontrando um $(n-r)$ -cubo que é a face de $(-J^{Q^c} + M_i z)$, pois $Q \in C(n, r-1)$ implica $Q^c \in C(n, n - (r-1)) = C(n, n - r + 1)$, logo cada face de $(-J^{Q^c} + M_i z)$ é um $((n-r+1) - 1)$ -cubo, isto é, $(n-r)$ -cubo.

Assim, fixamos $Q \in C(n, r-1)$, $z \in \mathbb{Z}^n$, e consideramos $N_i J^P \cap (-J^{Q^c} + M_i z)$. Então esta intersecção ou é:

- (1) vazia; ou
- (2) uma linha juntando os pontos de intersecção x e x' de $N_i I^P$ com duas faces $(n-r)$ -dimensionais $-J^{Q^c \setminus k} + M_i z - \delta e_k$ e $-J^{Q^c \setminus k'} + M_i z - \delta' e_{k'}$ de $-J^{Q^c} + M_i z$, onde $k, k' \notin Q$ não são necessariamente distintos, e δ, δ' podem ser 0 ou 1; ou
- (3) uma linha juntando o ponto x que é a intersecção de $N_i J^P$ com uma face $-J^{Q^c \setminus k} + M_i z - \delta e_k$ de $-J^{Q^c} + M_i z$ com o ponto x' sendo a intersecção de $-J^{Q^c} + M_i z$ com uma face de $N_i(J^{P \setminus k'} + \delta' e_{k'})$ de $N_i J^P$; ou ainda
- (4) uma linha juntando os pontos de intersecção x e x' de $(-J^{Q^c} + M_i z)$ com duas faces $(r-1)$ -dimensionais $N_i(J^{P \setminus k} + \delta e_k)$ e $N_i(J^{P \setminus k'} + \delta' e_{k'})$ de $N_i J^P$.

No caso 2, $\partial Y_i(\rho_P)$ contém uma contribuição $\rho_Q + M_i z$ em $\partial(\rho_{Q \cup k} + M_i z - \delta e_k)$ com sinal $(-1)^{\#\{j:q_j < k\} + \delta + 1}$ e uma em $\partial(\rho_{Q \cup k'} + M_i z - \delta' e_{k'})$ com sinal $(-1)^{\#\{j:q_j < k'\} + \delta' + 1}$. Aqui $Q \cup k$ denota a r -tupla com k inserido (em ordem crescente) e $P \setminus k'$ denota a $(r-1)$ -tupla com k' deletado. Seja $\text{sign}(M_i^r(Q \cup k, P))$ denotando a entrada na linha $Q \cup k$ e coluna P da matriz (M_i^u) . Agora, $\text{sign}(M_i^r(Q \cup k, P))$ é ± 1 , concordando quando $\pi_{Q \cup k} M_i : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^{Q \cup k}$ respeita ou inverte orientação. Também,

$$(-1)^{\#\{j:q_j < k\}} \text{sign}(M_i^r(Q \cup k, P)) = \pm 1,$$

concordando quando $\pi_{Q \cup k} M_i$ respeita ou inverte orientação quando, para $\mathbb{R}^{Q \cup k}$, está dada a orientação (k, q_1, \dots, q_{r-1}) ; denotemos isto por $\mathbb{R}^{k * Q}$ ($\mathbb{R}^{Q \cup k}$ com a orientação). Para mostrar que duas contribuições de $\rho_Q + M_i z$ de $\partial Y_i(\rho_P)$ se cancelam, basta mostrar que $\pi_{k * Q} M_i : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^{k * Q}$ e $\pi_{k' * Q} M_i$ concordam em preservar a orientação ou não, na medida em que $\delta - \delta'$ é ímpar ou par. Isto é equivalente a perguntar se $\pi_{k * Q}$ e $\pi_{k' * Q}$ concordam ou não em preservar orientação quando aplicada em $M_i \mathbb{R}^P$, ou, na verdade, em $\pi_{(k, k') * Q} M_i \mathbb{R}^P = [x' - x] \oplus \mathbb{R}^Q$. E isto é equivalente a π_k e $\pi_{k'}$ concordarem

ou não quando aplicado de $[x' - x]$ para $\mathbb{R}^{\{k\}}$ ou $\mathbb{R}^{\{k'\}}$. Como $\delta - 1 < x'_k - x_k < \delta$ e $-\delta' < x'_{k'} - x_{k'} < 1 - \delta'$, temos que π_k e $\pi_{k'}$ preservam orientação quando $\delta = 1$ e $\delta' = 0$, e ambas invertem orientação quando $\delta = 0$ e $\delta' = 1$; de fato elas concordam precisamente quando $\delta - \delta'$ é ímpar, como requerido.

No caso 3, o ponto x contribui em um $sign(M_i^r(Q \cup k, P)).(\rho_{Q \cup k} + M_i z - \delta e_k)$ de $Y_i(\rho_P)$, enquanto x' contribui em um $sign(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k')).(\rho_Q + M_i z)$ de $Y_i(\rho_{P \setminus k'} + \delta' e_{k'})$. Então, se $k' = p_j$ e $q_{j-1} < k < q_j$, existe uma contribuição $(\rho_Q + M_i z)$ de x' em $Y_i(\partial \rho_P)$ com coeficiente $(-1)^{j'+\delta'} sign(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k'))$ e uma contribuição $(\rho_Q + M_i z)$ de x em $\partial(Y_i \rho_P)$ com coeficiente $(-1)^{j+\delta} sign(M_i^r(Q \cup k, P))$. Note que $x'_k - x_k$ é positivo se $\delta = 1$ e negativo se $\delta = 0$, que $(M_i^{-1}x')_{k'} - (M_i^{-1}x)_{k'}$ é positivo se $\delta' = 1$ e negativo se $\delta' = 0$, e que $\pi_Q x = \pi_Q x' = \pi_Q z$. Então $\pi_{Q \cup k} M_i : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^{Q \cup k}$ respeita ou inverte a orientação a medida em que $(-1)^{\delta'+\delta+j+j'-2} sign(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k'))$ é positivo ou negativo, onde o fator $(-1)^{\delta'+\delta}$ vem da aplicação $\pi_k M_i : [M_i^{-1}(x' - x)] \rightarrow \mathbb{R}^{\{k\}}$ e os fatores $(-1)^{j-1}$ e $(-1)^{j'-1}$ relatam, respectivamente, $\mathbb{R}^{Q \cup k}$ para \mathbb{R}^{k*Q} e \mathbb{R}^P para $\mathbb{R}^{k'*(P \setminus k')}$. Consequentemente, as contribuições $\rho_Q + M_i z$ de $Y_i(\partial \rho_P)$ e de $\partial(Y_i \rho_P)$ concordam.

Para o caso 4, mostraremos que as duas contribuições $\rho_Q + M_i z$ de $Y_i(\rho_{P \setminus k} + \delta e_k)$ e de $Y_i(\rho_{P \setminus k'} + \delta' e_{k'})$ se cancelam, assim como as contribuições de $Y_i(\partial \rho_P)$. Suponha primeiro que $k < k'$. Seja W o complemento ortogonal de $[M_i^{-1}x' - M_i^{-1}x]$ em $\mathbb{R}^{(k,k')}$. Agora, $sign(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k))$ e $sign(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k'))$ expressam, respectivamente, se $\pi_Q M_i : \mathbb{R}^{P \setminus k} \rightarrow \mathbb{R}^Q$ e $\pi_Q M_i : \mathbb{R}^{P \setminus k'} \rightarrow \mathbb{R}^Q$ respeitam ou invertem orientação. Estas aplicações são composições:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{P \setminus k} &\rightarrow \mathbb{R}^{k'*(P \setminus k \setminus k')} \rightarrow W \oplus \mathbb{R}^{P \setminus k \setminus k'} \rightarrow \mathbb{R}^Q, \\ \mathbb{R}^{P \setminus k'} &\rightarrow \mathbb{R}^{k*(P \setminus k \setminus k')} \rightarrow W \oplus \mathbb{R}^{P \setminus k \setminus k'} \rightarrow \mathbb{R}^Q. \end{aligned}$$

Aqui, a primeira aplicação é a identidade e muda a orientação por $(-1)^{j'-2}$ na primeira linha, e por $(-1)^{j-1}$ na segunda linha. A terceira aplicação é $\pi_Q M_i$, em ambas linhas. A segunda aplicação é a projeção ortonormal do primeiro fator para W mantendo o

segundo fator (isto é, aplicação identidade para o segundo fator). Mas as projeções no primeiro fator, $\mathbb{R}^{\{k'\}} \rightarrow W$ e $\mathbb{R}^{\{k\}} \rightarrow W$, concordam em inverter ou não a orientação se $\delta = \delta'$, e discordam se $\delta \neq \delta'$. Então

$$(-1)^{j'+\delta'-2} \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k)) = (-1)^{j+\delta-1} \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k')) \implies$$

$$\text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k)) = (-1)^{j-j'+1+\delta-\delta'} \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k')). \quad (3.3)$$

Mas a somatória relevante em $\partial\rho_P$ é:

$$(-1)^{j+\delta}(\rho_{P \setminus k} + \delta e_k) + (-1)^{j'+\delta'}(\rho_{P \setminus k'} + \delta' e_{k'}),$$

logo $Y_i(\partial\rho_P)$ contém contribuições $\rho_Q + M_i z$ com coeficiente

$$(-1)^{j+\delta} \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k)) + (-1)^{j'+\delta'} \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k')) \quad (3.4)$$

que é zero (por 3.3). O caso $k > k'$ é similar. Se $k = k'$, então $j = j'$, $\delta \neq \delta'$ e $\text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k)) = \text{sign}(M_i^{r-1}(Q, P \setminus k'))$, assim o coeficiente dado em (3.4) é nulo.

Logo, as contribuições $\rho_Q + M_i z$ se cancelam em $\partial Y_i(\rho_P)$ no caso 2; se cancelam em $Y_i(\partial\rho_P)$ no caso 4; enquanto, no caso 3, as contribuições são as mesmas em ambos lados, o que prova $Y_i(\partial\rho_P) = \partial(Y_i\rho_P)$. \square

Corolário 3.1. *A aplicação Y (3.2) comuta com o operador bordo $\partial : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$.*

Demonstração. Basta aplicar em cada tempo i , visto que Y é composta destes Y_i . \square

Capítulo 4

Uma Partição de Markov em T^n

Nesta seção investigaremos as medidas (de Lebesgue) dos retângulos K_P e L_P construídos no Capítulo 2 usando os $z_{P,Q,j}^i$ do Capítulo 3 e provaremos que eles formam uma partição de Markov a cada tempo i .

4.1 A métrica projetiva no cone convexo

Começamos com o conceito abstrato de cone positivo para depois definir ordem parcial em um espaço vetorial, generalizando o ordem parcial em \mathbb{R}^n associado ao cone positivo padrão $C^+ = \mathbb{R}^{n+} = \{v : v_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Definição 4.1. *Seja V um espaço vetorial. Um conjunto C é um **cone** se C é não vazio e $\delta C \subseteq C, \forall \delta \in \mathbb{R}_+$. Um cone é **convexo** se $C + C \subseteq C$, equivalentemente, se é um cone e é um conjunto convexo. C é **positivo** se $C \cap -C = \{0\}$ e, neste caso, denotaremos por C^+ .*

Dado um cone convexo positivo $C^+ \subseteq V$, um vetor $x \in V$ é positivo se $x \in C^+$. Para $x, y \in V$ definimos $x \leq y$ se $(y - x)$ é positivo, ou seja, se $y \in x + C^+$.

*Dados V, W espaços vetoriais e $C^+ \subseteq V$ e $D^+ \subseteq W$ cones convexos positivos, uma transformação linear $f : V \rightarrow W$ é **positiva** se $f(C^+) \subseteq D^+$.*

Proposição 4.1. *Dado um cone convexo positivo $C^+ \subseteq V$:*

- (a) \leq define uma ordem parcial em V ;

(b) Uma transformação linear é positiva se, e somente se, ela preserva a ordem parcial, isto é, $x \leq_C y \Rightarrow f(x) \leq_D f(y)$.

Demonstração. Para verificar a afirmação (a):

(i) (Reflexiva) $x \leq x$, pois $x - x = 0 \in C^+$;

(ii) (Simétrica) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow y = x$, pois se $x - y \geq 0$ e $y - x \geq 0$ temos $y - x = 0 \Rightarrow y = x$;

(iii) (Transitiva) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$, pois C^+ é convexo ($x + y \leq y + z \Rightarrow x \leq z$).

(b) é imediato. □

A ordem é usada então para definir métrica (a métrica de Hilbert):

$$x \leq \lambda y \iff \lambda^{-1}x \leq y; \forall \lambda \in]0, +\infty[\quad (4.1)$$

Dado um cone convexo positivo e vetores $x, y \in C^+$, definimos:

$$\delta_0 = \delta(x, y) = \sup\{\delta \in \mathbb{R} : \delta y \leq x\},$$

este conjunto é não vazio já que $0 \in C^+$, e então $\delta_0 \in [0, +\infty]$;

Convencionando $0^{-1} = +\infty$, $+\infty^{-1} = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$, definimos:

$$\beta_0 = \beta(x, y) = \delta(y, x)^{-1},$$

ou equivalentemente, por (4.1), $\beta_0 = \inf\{\beta \geq 0 : x \leq \beta y\}$.

Lema 4.1. *Seja C^+ um cone positivo, convexo e fechado em um espaço real de Banach. Então $\beta_0 = 0$ se, e somente se, $x = 0$; e $\delta_0 = +\infty$ se, e somente se, $y = 0$.*

Demonstração. Se $\beta_0 = 0$, então $x \leq \frac{1}{n}y$, para todo $n \geq 1$. Então $\frac{1}{n}y - x \in C^+$. Como C^+ é fechado, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n}y - x) = -x \in C^+$. Mas aí $x, -x \in C^+$ o que resulta em

$x = 0$, pois C^+ é positivo. Se $\delta_0 = +\infty$ então $nx \leq x$ para todo $n \geq 1$, e então $y \leq \frac{1}{n}x$. Assim $y = 0$. \square

Observação 4.1. Note que $\delta_0 \leq \beta_0$, assim, para $x, y \in C^+ \setminus \{0\}$, decorre do Lema anterior que: $\beta_0 > 0$ e $\delta_0 < +\infty$. Então, tomando por convenção, para $c > 0$, $\frac{c}{+\infty} = 0$ e $\frac{c}{0} = +\infty$, temos $\frac{\beta_0}{\delta_0} \in [1, +\infty]$.

Definimos, para $x, y \in C^+ \setminus \{0\}$:

$$d_C(x, y) = \log \left(\frac{\beta_0}{\delta_0} \right) \in [0, +\infty].$$

Lema 4.2. Seja C^+ o cone positivo, convexo e fechado em um espaço real de Banach. Então, para $x, y \in C^+ \setminus \{0\}$, o $\sup\{\delta : \delta y \leq x\}$ é atingido, isto é, $\delta_0 y \leq x$. Similarmente, $x \leq \beta_0 y$.

Demonstração. Seja δ_n crescendo para δ_0 , então $x - \delta_n y \in C^+$, já que $\delta_0 y - \delta_n y \geq 0 \implies x - \delta_n y \geq 0$. Como $\delta_0 < +\infty$, temos $\lim \delta_n y = \delta_0 y$ e como C^+ é fechado, $\lim(x - \delta_n y) \in C^+$, concluindo que $\delta_0 y \leq x$. A prova para β_0 é similar. \square

Como $0.x \leq y$, adotamos a convenção $x \leq +\infty.y, \forall x \in C^+, y \in C^+ \setminus \{0\}$.

Lema 4.3. Dados $x, y, z \in C^+ \setminus \{0\}$:

(i) Para cada $\lambda \in]0, +\infty[$, $d_C(x, y) = d_C(\lambda x, y)$;

(ii) $d_C(x, y) = d_C(y, x)$;

(iii) $d_C(x, z) \leq d_C(x, y) + d_C(y, z)$;

(iv) $d_C(x, y) = 0$ se, e somente se, existe $\lambda \in]0, +\infty[$ tal que $y = \lambda x$.

Demonstração. Para (i), $d_C(x, y) = d_C(\lambda x, y)$ já que δ_0 e β_0 multiplicados pela mesma constante;

Para (ii), como $\beta_0 = \delta(y, x)^{-1}$ temos $\delta(y, x) = \beta(x, y)^{-1}$ e $\beta(y, x) = \delta(x, y)^{-1}$, então:

$$d_C(y, x) = \log \left(\frac{\beta(y, x)}{\delta(y, x)} \right) = \log \left(\frac{\delta(x, y)^{-1}}{\beta(x, y)^{-1}} \right) = \log \left(\frac{\beta(x, y)}{\delta(x, y)} \right) = d_C(x, y);$$

Para a desigualdade triangular (iii) consideramos $x, y, z \in C^+$, vamos escrever δ_1 para $\delta(x, y)$, δ_2 para $\delta(y, z)$ e δ_3 para $\delta(x, z)$, similarmente para β . Temos:

$$\delta_1 y \leq x \leq \beta_1 y$$

e

$$\delta_2 z \leq y \leq \beta_2 z.$$

Assim

$$\delta_1 \delta_2 z \leq \delta_1 y \leq x \leq \beta_1 y \leq \beta_1 \beta_2 z.$$

Disto resulta $\delta_3 \geq \delta_1 \delta_2$ e $\beta_3 \leq \beta_1 \beta_2$ e assim

$$d_C(x, z) = \log \left(\frac{\beta_3}{\delta_3} \right) \leq \log \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\delta_1 \delta_2} \right) = d_C(x, y) + d_C(y, z).$$

Para (iv), se $x, y \in C^+ \setminus \{0\}$ com $d_C(x, y) = 0$ então $\frac{\beta_0}{\delta_0} = 1$, e assim $\beta_0, \delta_0 \in]0, +\infty[$. Pelo Lema 4.2, $\delta_0 y \leq x \leq \delta_0 y$. Então $x - \delta_0 y \in C^+$ e $\delta_0 y - x \in C^+$, mas C^+ é positivo, e assim $x = \delta_0 y$, com $\delta_0 \in]0, +\infty[$, como afirmado. \square

Proposição 4.2. Para C^+ um cone positivo convexo fechado em um espaço real de Banach V , d_C é uma métrica, chamada **métrica projetiva**, no espaço projetivo de segmentos (abertos) à partir da origem que estão em C^+ .

Demonstração. Decorre do Lema anterior.

Lema 4.4. Dados $x, y \in C^+ \setminus \{0\}$ e $p, q \geq 0$ com $z = px + qy$, então $d_C(x, z) + d_C(z, y) = d_C(x, y)$.

Demonstração. É suficiente provar para $p+q = 1$. Temos δ_0, β_0 tais que $\delta_0 y \leq x \leq \beta_0 y$ e $\beta_0^{-1} x \leq y \leq \delta_0^{-1} x$ onde $\delta_0 = \delta(x, y)$, $\beta_0 = \beta(x, y)$. Isto mostra que, de fato,

$$\frac{\beta(x, z)}{\delta(x, z)} \cdot \frac{\beta(z, y)}{\delta(z, y)} = \frac{\beta(x, y)}{\delta(x, y)}.$$

como afirmado. □

Lema 4.5. *Seja $C^+ \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone positivo convexo fechado e seja d_C denotando a métrica projetiva em $C^+ \setminus \{0\}$. Considere $a_1 \dots a_k \in C^+ \setminus \{0\}$; escreva D para o cone convexo gerado por $\{a_1, \dots, a_k\}$. Então o diâmetro d_C de D é:*

$$\text{diam}_C(D) = \max_{i,j} \{d_C(a_i, a_j)\}.$$

Demonstração. Assuma $v, w, z \in C^+ \setminus \{0\}$ tal que $d_C(z, v) = d_C(z, w) = A$, com $A \in [0, +\infty]$, e $x = pv + qw$ com $p, q \geq 0$ e $p+q = 1$. Então $d_C(z, x) \leq A$. A explicação para isto é que, do Lema 4.2, $0 \leq \delta_i \leq \beta_i \leq +\infty$ satisfazendo $\delta_1 z \leq v$, $v \leq \beta_1 z$, $\delta_2 z \leq w$ e $w \leq \beta_2 z$ onde estes são os supremos e ínfimos dos tais números possíveis. Então, definindo $\delta = p\delta_1 + q\delta_2$, temos:

$$\delta z = p\delta_1 z + q\delta_2 z \leq pv + qw = x.$$

Similarmente, para $\beta = p\beta_1 + q\beta_2$, temos:

$$\beta z = p\beta_1 z + q\beta_2 z \geq pv + qw = x.$$

E então,

$$d_C(z, x) \leq \log \left(\frac{\beta}{\delta} \right) = \log \left(\frac{p\beta_1 + q\beta_2}{p\delta_1 + q\delta_2} \right).$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\delta_1\delta_2$ e fixando $\tilde{p} = (p/\delta_2)/(p/\delta_2 + q/\delta_1)$ e $\tilde{q} = (q/\delta_1)/(p/\delta_2 + q/\delta_1)$, temos:

$$\log\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \log\left(\tilde{p}\frac{\beta_1}{\delta_1} + \tilde{q}\frac{\beta_2}{\delta_2}\right).$$

Assim, se $\frac{\beta_1}{\delta_1} = \frac{\beta_2}{\delta_2}$, que é o caso quando ambas distâncias são iguais a A , temos também $\log(\frac{\beta}{\delta}) = A$. Isto mostra que $d_C(z, x) \leq \log(\frac{\beta}{\delta}) = A$, o que prova a afirmação. \square

Teorema 4.1. *Seja V, W espaços reais de Banach e $C \subseteq V$, $D \subseteq W$ cones convexos fechados com d_C, d_D suas métricas projetivas. Seja $L : V \rightarrow W$ uma transformação linear positiva. Então:*

- (a) L é uma **contração fraca** de C para D , isto é, $d_D(L(v), L(w)) \leq d_C(v, w)$;
- (b) Se L for inversível, então L é uma isometria;
- (c) Se $C \subseteq D$, então $d_C(v, w) \leq d_D(v, w)$;
- (d) (Birkhoff) Escrevemos $\Theta(L)$ para o D -diâmetro de $L(C)$. Então, se $\Theta(L) \leq +\infty$, L é um **contração estrita** com coeficiente

$$\sup_{v, w \in C} \frac{d_D(L(v), L(w))}{d_C(v, w)} = \tanh\left(\frac{\Theta}{4}\right).$$

Demonstração. (a) e (b) seguem imediatamente da Definição; (c) é um Corolário usando a aplicação identidade. Para (d), sugerimos a leitura de [18], aqui

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

. Chamamos $\Theta(L)$ de **abertura do operador** (L), e $\tanh\left(\frac{\Theta}{4}\right)$ de **coeficiente de contração** do operador linear. \square

Corolário 4.1. *Seja $(V_i)_{i \geq 0}$ um espaço real de Banach com cones convexos fechados $C_i \subseteq V_i$, e seja $L_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ uma transformação linear positiva. Escrevemos Θ_i para o C_{i+1} -diâmetro de $L_i(C_i)$, e definimos $\delta_i = \tanh(\Theta_i/4)$. Então o coeficiente de contração da composição $L_m \circ \dots \circ L_0$ é limitado por $\delta_m \dots \delta_0$*

Demonstração. Decorre imediatamente de (d) anterior. \square

Proposição 4.3. *Para $v, w \in C^+ \setminus \{0\}$, considerando $\frac{0}{0} = 1$, então*

$$d_C(v, w) = \log \max_{i,j} \frac{v_i w_j}{w_i v_j}.$$

Demonstração. Para provar a afirmação, vamos excluir os casos em que v_i, w_i ou v_j, w_j são nulos. Temos: $\delta_0 = \max\{\delta : \delta v \leq w\} = \max\{\delta : \delta v_i \leq w_i, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Para $v_i = w_i = 0$, $\sup\{\delta : \delta 0 \leq 0\} = +\infty$ e então, já que $v, w \neq 0$, temos $\delta_0 = \max\{\delta : \delta v_i \leq w_i, \text{ com } v_i \text{ e } w_i \text{ não simultaneamente nulos}\} = \min\{v_i/w_i : v_i \text{ e } w_i \text{ não simultaneamente nulos}\}$;

E similarmente, já que $\inf\{\beta : 0 \leq \beta 0\} = -\infty$, temos $\beta_0 = \max\{v_i/w_i : v_i \text{ e } w_i \text{ não simultaneamente nulos}\}$. Mas, da observação 4.1, $\delta_0 < +\infty$ e $\beta_0 > 0$, assim:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{\delta_0} &= \max_{i,j} \left\{ \frac{v_i/w_i}{v_j/w_j} : v_i, w_i \text{ ou } v_j, w_j \text{ não simultaneamente nulos} \right\} = \\ &= \max_{i,j} \left\{ \frac{v_i w_j}{w_i v_j} : v_i, w_i \text{ ou } v_j, w_j \text{ não simultaneamente nulos} \right\} = \\ &= \max_{i,j} \left\{ \frac{v_i w_j}{w_i v_j} : i, j = 0, \dots, n \right\} \quad \text{onde a última igualdade usamos } \frac{0}{0} = 1 \text{ e o fato } \frac{\beta_0}{\delta_0} \geq 1. \end{aligned}$$

\square

Corolário 4.2. *Seja $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ com $z_i \neq 0, \forall i$, e seja \mathcal{D} a matriz diagonal onde $d_{ii} = z_i$. Então $\mathcal{D} : C^+ \rightarrow C^+$ é uma isometria na métrica projetiva d_C em C^+ .*

Proposição 4.4. *Sejam $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m, C^+ = \mathbb{R}^{n+}$ e $D^+ = \mathbb{R}^{m+}$. Seja L uma matriz $(m \times n)$ não negativa e não identicamente nula. Denotamos por d_C, d_D as*

métricas nestes cones. Então a abertura do operador L , isto é, o d_D -diâmetro de $L(C)$ é:

$$\Theta(L) = \max_{i,j,k,l} \frac{L_{ik}L_{jl}}{L_{jk}L_{il}}.$$

Demonstração. Consideremos e_i vetores da base canônica de \mathbb{R}^n . Como e_i gera C^+ , então $\{L(e_i) \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$ gera $L(C)$. Pelo Lema 4.5, o diâmetro da imagem deste cone é $\max\{d_D(L(e_k), L(e_l)) : L(e_i) \neq 0\}$.

Nós sabemos da Proposição 4.3 que, para todo $v, w \in C^+ \setminus \{0\}$,

$$d_C(v, w) = \log \max_{i,j} \frac{v_i w_j}{w_i v_j}.$$

Consequentemente, para qualquer $v, w \in C^+$ com $L(v), L(w) \neq 0$,

$$d_D(Lv, Lw) = \log \max_{i,j} \frac{L(v)_i L(w)_j}{L(w)_i L(v)_j}.$$

Como $L(e_k)_i = L_{ik}$, substituindo $v = e_k$ e $w = e_l$, temos:

$$d_D(L(e_k), L(e_l)) = \log \max_{i,j} \frac{L_{ik}L_{jl}}{L_{jk}L_{il}}.$$

Então o diâmetro de $L(C)$ é:

$$\max_{k,l} d_D(L(e_k), L(e_l)) = \max_{k,l} \log \max_{i,j} \frac{L_{ik}L_{jl}}{L_{jk}L_{il}} = \max_{i,j,k,l} \frac{L_{ik}L_{jl}}{L_{jk}L_{il}}.$$

□

Corolário 4.3. *Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $C^+ = \mathbb{R}^{n+}$ e $D^+ = \mathbb{R}^{m+}$. Seja L uma matriz $(m \times n)$ não negativa e não identicamente nula. Então a abertura do operador L é igual ao da sua transposta, isto é:*

$$\Theta(L) = \Theta(L^T);$$

isto é, o diâmetro projetivo de $L^T(D)$ em C^+ é igual ao diâmetro projetivo de $L(C)$ em D^+ . Consequentemente, os coeficientes de contração de L e L^T são iguais.

4.2 Sequência de autovetores

Uma sequência (L_i) de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ reais não negativas agem para a esquerda ao longo dos espaços de vetor coluna C_i e para a direita ao longo dos espaços de vetor linha C_i^T , como mostrado no diagrama a seguir, onde as direções das setas foram escolhidas de forma que a composição das aplicações seja dado pelo produto das matrizes, sem inverter ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} C_0^T & \xrightarrow{L_0} & C_1^T & \xrightarrow{L_1} & C_2^T & \xrightarrow{L_2} & C_3^T \cdots \\ C_0 & \xleftarrow{L_0} & C_1 & \xleftarrow{L_1} & C_2 & \xleftarrow{L_2} & C_3 \cdots \end{array}$$

Assim, por exemplo, $v_0^t L_0 L_1 L_2 \in C_3^T$ e $L_0 L_1 L_2 v_3 \in C_0$.

Definição 4.2. Para uma sequência (L_i) de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$ reais não negativas, se temos uma sequência v_i de vetores coluna não nulos e números λ_i não nulos satisfazendo

$$L_i v_{i+1} = \lambda_i v_i$$

ou vetores linha satisfazendo

$$v_i^t L_i = \lambda_i v_{i+1}^t$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$, chamamos isto de **sequência de autovetores** coluna (respectivamente linha) com autovalores λ_i .

Definição 4.3. Denotemos os vetores linha e coluna estritamente positivos de \mathbb{R}^m por $\overset{\circ}{C}^{T+}$ e $\overset{\circ}{C}^+$. Para dimensão ≥ 2 estes são o interior dos cones positivos C^{T+} e C^+ ; para dimensão 1 temos $\overset{\circ}{C}^+ = (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) = C^+$.

Temos então:

Lema 4.6. *Uma matriz real $M(m \times n)$ não tem nenhuma linha identicamente nula se, e somente se, ela aplica $\overset{\circ}{C}^+(\mathbb{R}^n)$ em $\overset{\circ}{C}^+(\mathbb{R}^m)$; e não tem nenhuma coluna identicamente nula se, e somente se, ela aplica $\overset{\circ}{C}^{T+}(\mathbb{R}^m)$ em $\overset{\circ}{C}^{T+}(\mathbb{R}^n)$.*

Denotemos por $\widehat{\Omega}_L$ para a coleção de todas as sequências (\widehat{w}) de autovetores coluna estritamente positivos com autovalores 1 (normalizados), e $\widehat{\Omega}_L^t$ para os autovetores linha, então:

$$\widehat{\Omega}_L = \{(\widehat{w}) = (\widehat{w}_0 \widehat{w}_1 \dots) \text{ com } \widehat{w}_i = L_i \widehat{w}_{i+1}, \text{ tal que } \forall i, \widehat{w}_i \in \overset{\circ}{C}_i^+\}$$

$$\text{e } \widehat{\Omega}_L^t = \{(\widehat{v}^t) = (\widehat{v}_0^t \widehat{v}_1^t \dots) \text{ com } \widehat{v}_i^t L_i = \widehat{v}_{i+1}^t, \text{ e } \widehat{v}_i^t \in \overset{\circ}{C}_i^{T+}\}.$$

Lema 4.7. *Seja $(L_i)_{i \geq 0}$ uma sequência primitiva e reduzida de matrizes $(l_i \times l_{i+1})$. Então os conjuntos $\widehat{\Omega}_L$ e $\widehat{\Omega}_L^t$ são não vazios. Uma sequência em $\widehat{\Omega}_L^t$ é, a menos de multiplicação por constantes positivas, determinada pela escolha do primeiro elemento estritamente positivo \widehat{v}_0^t .*

Demonstração. Para vetores linha, nós simplesmente começamos com algum $\widehat{v}_0^t \in \overset{\circ}{C}_0^{T+}$ e aplicamos as matrizes L_i (reduzidas e primitivas); pelo Lema 4.6, as imagens são todas estritamente positivas também.

Para vetores coluna, há duas razões pela qual não podemos aplicar o argumento anterior: as matrizes L_i^{-1} podem não ser positivas, e podem não ser inversíveis. Então procedemos da seguinte maneira: Para $k, n \geq 0$, denotamos

$$C_{(k,n)}^+ = L_k L_{k+1} \dots L_{n-1} C_n^+ = L^{(k,n)} C_n^+.$$

Estes são encaixantes:

$$C_k^+ \supseteq C_{(k,k+1)}^+ \supseteq \dots$$

Temos o gráfico:

$$C_{(k,n)}^+ \xleftarrow{L_k} \dots \xleftarrow{L_{n-1}} C_n^+.$$

A intersecção $C_{(0,+\infty)}^+$ dos cones fechados encaixantes é não vazia, por compacidade; e pela primitividade, todos seus elementos não nulos são estritamente positivos. Note que para cada k , $L_k C_{(k+1,+\infty)}^+ = C_{(k,+\infty)}^+$.

Começamos com algum \widehat{w}_0 não nulo (consequentemente estritamente positivo) em $C_{(0,+\infty)}^+$; procedendo indutivamente, dado $\widehat{w}_k \in C_{(k,+\infty)}^+$ escolhemos $\widehat{w}_{k+1} \in C_{(k+1,+\infty)}^+$ (novamente estritamente positivo) tal que $L_k \widehat{w}_{k+1} = \widehat{w}_k$. Isto produz toda a coleção $\widehat{\Omega}_L$. \square

Definição 4.4. *Uma sequência (L_i) é “**focussing**” se, para cada $i \in \mathbb{Z}$ e qualquer $\epsilon > 0$, existe $m > i$, suficientemente grande, tal que o diâmetro projetivo de $C_i^{T+} L_i \dots L_m$ no cone C_{m+1}^{T+} é menor que ϵ .*

Denotemos por $\widehat{\Omega}_L^\Delta = \{(\widehat{w}) \in \widehat{\Omega}_L : \widehat{w}_0 \in \Delta_0\}$ a sequência de autovetores coluna com autovalores 1 onde $\|\widehat{w}_0\| = 1$ e $\widehat{\Omega}_L = \{(\widehat{w}) = (\widehat{w}_0 \widehat{w}_1 \dots) : \widehat{w}_i \in C_i \text{ com } \widehat{w}_i = L_i \widehat{w}_{i+1}\}$.

Então, $(\widehat{w}) \mapsto (\widehat{w})/\|\widehat{w}_0\|$ define uma projeção de $\widehat{\Omega}_L$ para $\widehat{\Omega}_L^\Delta$, normalizando a sequência de forma que seu primeiro elemento esteja em Δ_0 .

Definição 4.5. *Uma sequência (L_i) de matrizes inteiras não negativas tem a **condição autovetor de Perron-Frobenius** se existir uma única sequência normalizada de autovetores coluna estritamente positivos, isto é, se $\widehat{\Omega}_L^\Delta$ é unitário.*

Lema 4.8. (i) $\sum_{(L)}^{0,+} \setminus \{0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow C_{(0,+\infty)} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} L_0 L_1 \dots L_n C_{n+1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \widehat{\Omega}_L \neq \emptyset$.

(ii) *Todas as sequências em $\widehat{\Omega}_L^\Delta$ pode ser construída indutivamente da seguinte forma:*

(1) *Escolha \widehat{w}_0 em $\Delta_0 \cap C_{(0,+\infty)}$.*

(2) *Escolha $w_{i+1} \in C_{(i+1,+\infty)}$ para ser a pré-imagem de w_i .*

(iii) *Se $(L_i)_{i \geq 0}$ é reduzida e primitiva, então $\widehat{\Omega}_L^\Delta$ é não vazio.*

Demonstração. (i) O número de strings que começam com o símbolo i no tempo 0 e terminam com j no tempo n é igual a $\mathbf{e}_i^t L_0 \dots L_n \mathbf{e}_j$ onde \mathbf{e}_i é um vetor da base canônica e \mathbf{e}_i^t a sua transposta, assim a coleção de strings permitidos de comprimento n é não vazio se, e somente se, $L_0 L_1 \dots L_n$ tem alguma entrada não nula, se e somente se,

$L_0L_1 \dots L_n C_{n+1}$ contem algum vetor não nulo. Agora, a primeira declaração vale se, e somente se, (usando a compacidade) existe uma sequência infinita de cilindros finos encaixantes. A segunda declaração vale se, e somente se, $C_{(0,n)} \setminus \{0\} \neq \emptyset$; novamente usamos compacidade, da intersecção do cone $C_{(0,n)}$ com a esfera unitária fechada.

A prova de (ii) é clara.

A prova de (iii) é similar ao que foi feito no Lema 4.7. \square

Note que, no caso particular onde as matrizes são invertíveis, a sequência no item (ii) do Lema é determinada pela escolha de seu primeiro elemento \widehat{w}_0 .

Definição 4.6. *A sequência de matrizes (L_i) é **geometricamente Perron-Frobenius** se, para cada $k \in \mathbb{Z}$, e para qualquer $\epsilon > 0$, temos que existe $m > k$ suficientemente grande, tal que o diâmetro projetivo de $L_k \dots L_m C_{m+1}^+$ no cone C_m^+ é menor que ϵ .*

Lema 4.9. *Uma sequência (L_i) de matrizes reais $(l_i \times l_{i+1})$ não negativas é geometricamente Perron-Frobenius se, e somente se, é “focussing”.*

Demonstração. Decorre diretamente do Corolário 4.3. \square

Lema 4.10. *Para uma sequência primitiva $(L_i)_{i \geq 0}$ de matrizes reais $(l_i \times l_{i+1})$ as condições autovetor Perron-Frobenius e geométrica Perron-Frobenius são equivalentes.*

Proposição 4.5. *Seja $(w_i)_i$ a única sequência de autovetores linha normalizados positivos com autovetores $(\mu_i)_i$ para a família primitiva (L_i) . Se $(y_i) \geq 0$, com $y_i \neq 0$, $\forall i$, é outra sequência de vetores tal que $\mu_i y_i \leq y_i L_i$, então y_i é múltiplo de w_i .*

Demonstração. Como (L_i) é “focussing”, então, pelo Lema 4.9 (L_i) tem a condição Perron-Frobenius, isto é, existe uma única sequência de autovetores coluna $(v_i) \geq 0$ e uma sequência $(\eta_i)_i$ tal que $L_i v_i = \eta_i v_i$, para cada i . Assim $w_i L_i v_i = \eta_i w_i v_i$; e como $w_i L_i v_i = \mu_i w_i v_i$ temos $\eta_i = \mu_i$, pois $w_i v_i > 0$.

Agora $y_i L_i \geq \mu_i y_i \implies (y_i L_i - \mu_i y_i) \geq 0$, por hipótese. Mas $y_i L_i v_i = y_i \eta_i v_i = \mu_i y_i v_i \implies (y_i L_i - \mu_i y_i) v_i = 0$. E como $v_i > 0$ temos $(y_i L_i - \mu_i y_i) = 0$ e assim $y_i L_i = \mu_i y_i$, para cada i .

Como $(w_i)_i$ é a única sequência de autovetores de (L_i) , a menos de normalização, logo $y_i = k_i \cdot w_i$, para cada i . \square

Corolário 4.4. *Se a família (L_i) é “focussing” com uma sequência de autovetores $(w_i)_i$ com autovalores $(\mu_i)_i$ e existe uma sequência de vetores $(y_i) \geq 0$, com $y_i \neq 0, \forall i$, tal que $\mu_i y_i \leq y_i L_i$, para cada i . Então $\mu_i y_i = y_i L_i$.*

Demonstração. Pela Proposição anterior, $y_i = k_i w_i$ para cada i . Mas $\mu_i w_i = w_i L_i \implies k_i \mu_i w_i = k_i w_i L_i \implies \mu_i y_i = y_i L_i$. \square

4.3 Uma partição de Markov para \mathbb{T}^n

Como no Capítulo 2; Seja (\mathbb{T}^n, f) uma família eventualmente Anosov (Definição 1.12). Pelo Teorema (1.1), associamos uma sequência $(\overline{M}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de aplicações lineares em $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ e uma família Anosov linear $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ topologicamente conjugada a (\mathbb{T}^n, f) . Considere também uma família (\mathbb{R}^n, M) sendo o levantamento de $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ a cada tempo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, existe uma sequência invariante (U_k, S_k) tais que $T_p(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n = S_k \oplus U_k$, para cada tempo k e cada $p \in \mathbb{T}^n$. Isto é equivalente ao teorema da variedade estável para famílias Anosov (veja [22]). Reservamos as notações s e u para denotar as dimensões de S_k e U_k , respectivamente, que permanecem constantes $\forall k$.

Seja $\mathcal{B}_k = \{v_k^1, \dots, v_k^s, v_k^{s+1}, \dots, v_k^u\}$ uma base de autovetores de \mathbb{R}^n com $\mathcal{B}_k^S = \{v_k^1, \dots, v_k^s\}$ base de S_k e $\mathcal{B}_k^U = \{v_k^{s+1}, \dots, v_k^u\}$ base de U_k onde λ_k^j é autovalor de v_k^j . Assim $|\lambda_k^j| < 1$ para $1 \leq j \leq s$ enquanto $|\lambda_k^j| > 1$ para $s < j \leq u$.

Escrevemos π_{S_k}, π_{U_k} para as projeções autocoordenadas $\mathbb{R}^n = S_k \oplus U_k \longrightarrow S_k, U_k$ nos fatores.

Definição 4.7. *Seja $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a sequência de ângulos entre S_k e U_k . Dizemos que uma família eventualmente Anosov tem **decomposição regular** se $\liminf \theta_k = l$ com $l > 0$.*

Lema 4.11. *Seja $P = (p_1, \dots, p_u) \in C(n, u)$ e $\rho_P : I^u \longrightarrow \mathbb{R}^n$ onde $\rho_P(x_1, \dots, x_u) := (t_1, \dots, t_n)$ onde cada $t_{P_j} = x_j$ e $t_k = 0$ se $k \notin P$ e J^P a imagem de $\rho_P(I^u)$. Se uma*

família eventualmente Anosov tem decomposição regular, então $\nu_u(\pi_{U_i} J^P)$ é limitado, onde ν_u é a medida de Lebesgue u -dimensional, para cada tempo $i \in \mathbb{Z}$. Analogamente, $\nu_s(-\pi_{S_i} J^{Q^c}) = \nu_s(\pi_{S_i} J^{Q^c})$ é limitado, onde ν_s é a medida de Lebesgue s -dimensional.

Demonstração. Sabemos que $\nu_u(J^P) = \nu_u(I^u) = \|e_i^{p_1}\| \dots \|e_i^{p_u}\| = 1$. Seja β_i^j o ângulo entre $e_i^{p_j}$ e U_i . Então, pela lei dos senos, um primeiro caso seria

$$\frac{\sin \theta_i}{\|e_{p_j}\|} = \frac{\sin \beta_i^j}{\|\pi_{U_i} e_i^{p_j}\|} \leq \frac{1}{\|\pi_{U_i} e_i^{p_j}\|} \implies \|\pi_{U_i} e_i^{p_j}\| \leq \frac{1}{\sin \theta_i} \leq \frac{1}{\sin l} < \infty.$$

Assim $\nu_u(\pi_{U_i} J^P) = \prod_{j=1}^u \|\pi_{U_i} e_i^{p_j}\| \leq \frac{1}{\sin^u l} < \infty$.

Usando procedimentos análogos concluímos a afirmação. Analogamente

$$\nu_s(\pi_{S_i} J^{Q^c}) \leq \frac{1}{\sin^s l} < \infty. \quad \square$$

Iremos, à princípio, focar no subespaço U_k para argumentos gerais; para S_k teremos argumentos similares. Fixemos uma base de autovetores $\mathcal{B}_k^U = \{v_k^1, \dots, v_k^u\}$ para U_k com respectivos autovalores $\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^u$. A matriz diagonal que representa a aplicação $M_k|_{U_k}$, isto é, M_k restrita ao subespaço U_k tem determinante sendo o produto $\lambda_k^1 \dots \lambda_k^u$. Considere agora ν_u a medida de Lebesgue u -dimensional. O conjunto $\pi_{U_k} J^P \subset U_k$ é Lebesgue mensurável, com $P \in C(n, u)$. Além disso¹:

$$\nu_u(M_k \pi_{U_k} J^P) = \nu_u(M_k|_{U_k} \pi_{U_k} J^P) = |\lambda_k^1 \dots \lambda_k^u| \cdot \nu_u(\pi_{U_k} J^P).$$

Observação 4.2. Seja M_k^u a matriz induzida no grupo de homologia $H_u(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$. Então, como dito no Capítulo 3, a matriz $(M_k^u)^T$ representa a matriz de transição do P -ésimo retângulo, no tempo k , para os retângulos que correspondem aos u -toro na P -

¹Em [19], página 45, Teorema 3.35 : Seja M uma aplicação linear de \mathbb{R}^n , e seja E mensurável. Então $\nu(ME) = \eta \cdot \nu(E)$, onde η é o valor absoluto do determinante de M e ν é a medida de Lebesgue.

ésima linha de $(M_k^u)^T$. Note que uma seqüência de autovetores linha $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ para a seqüência $(M_k^u)_{k \in \mathbb{Z}}$ que tenha uma seqüência de autovalores $\mu_k = \lambda_k^1 \dots \lambda_k^u$, deve ser uma **seqüência de autovetores dominantes** no sentido de, se γ_k é uma seqüência de autovalores para outra seqüência de autovetores da família, então $|\gamma_k| < |\mu_k|$, para cada k . Isto é justificado pelo fato de μ_k ser produto de todos os autovalores que têm módulo maiores que 1. À seqüência μ_i damos o nome de **seqüência de autovalores dominantes**.

Lema 4.12. *Seja (M_i^u) uma seqüência bi-infinita “focussing” de matrizes de transição para a seqüência de alfabetos $\mathcal{A}_i = \{P : P \in C(n, u)\}$ e seja $K_i^P := \{\pi_{U_i} \alpha_i(w) : P \text{ é o vértice inicial de } w_i\}$ para α_i como em (2.3) associado a uma família eventualmente Anosov com decomposição regular. Então, se α_i converge, $\nu_u(K_i^P) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$, onde ν_u é a medida de Lebesgue u -dimensional, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Analogamente, $\nu_s(L_i^Q) = \nu_s(-\pi_{S_i} J^{Q^c}) = \nu_s(\pi_{S_i} J^{Q^c})$ para $L_i^Q := \{\pi_{S_i} \alpha_i(w) : Q \text{ é o vértice inicial de } w_i\}$, onde ν_s é a medida de Lebesgue s -dimensional.*

Demonstração. Seja $\{z_{P,Q,j}^i : P, Q \in C(n, u); 1 \leq j \leq a_{P,Q}^i\} \subset \mathbb{Z}^n$, com $a_{P,Q}^i$ sendo, no tempo i , a entrada na linha P e coluna Q da matriz $(M_i^u)^T$. Note que $a_{P,Q}^i \geq 0$, já que (M_i^u) é primitiva. Considere, como em (3.2):

$$Y_i \rho_P(I^u) = \sum_{Q \in C(n, u)} \sum_{j=1}^{a_{P,Q}^i} (J^Q + M_i z_{P,Q,j}^i); \quad e$$

$$Y_{(i,k)} \rho_P(I^u) := (Y_k \circ Y_{k-1} \circ \dots \circ Y_i) \rho_P(I^u) = \sum_{Q \in C(n, u)} \sum_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(J^Q + \sum_{t=i}^k M_{(k,t)} z_{P,Q,j}^t \right)$$

onde $s_{P,Q}$ é o número correspondente a entrada na linha P e coluna Q da matriz produto $(M_i^u)^T (M_{i+1}^u)^T \dots (M_k^u)^T$. Note que:

$$M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_P(I^u) = \sum_{Q \in C(n, u)} \sum_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(M_{(i,k)}^{-1} (J^Q) + \sum_{t=i}^{k-1} M_{(i,t)}^{-1} z_{w_{t+1}} + z_{P,Q,j}^i \right).$$

Assim, para $k \geq i$, temos do Corolário 3.1:

$$\begin{aligned} \partial \pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_P &= \pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \partial \rho_P = \\ &= \sum_{t=1}^u (-1)^t \left(\pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_{P \setminus p_t} - (\pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_{P \setminus p_t} + \pi_{U_i} e_{p_t}) \right), \end{aligned}$$

de modo que $\pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_P$ tem bordo nulo quando projetado no toro $U_i / (\pi_{U_i} \mathbb{Z}^P)$; já que $\pi_{U_i} e_{p_t} \in \pi_{U_i} \mathbb{Z}^P$, assim como também $\pi_{U_i} \rho_P$. Ambos ciclos representam a classe fundamental de homologia deste toro. Então, cada uma destas aplicações, que vão de I^u para U_i , têm projeção para $\pi_{U_i} \mathbb{Z}^P$ sendo sobrejetora. Logo, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, o suporte (veja A.8) $\mathbb{K}_P^{(i,k)} \subset U_i$ de $\pi_{U_i} M_{(i,k)}^{-1} Y_{(i,k)} \rho_P(I^u)$ tem medida:

$$\nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) \geq \nu_u(U_i / (\pi_{U_i} \mathbb{Z}^P)) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P) \quad (4.2)$$

Agora, seja $\{v_i^1, \dots, v_i^u\}$ uma base de autovetores para U_i associados aos autovalores $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^u$, respectivamente. Cada autovalor tem módulo maior que 1.

Tomemos $\mu_i = |\prod_{j=1}^u \lambda_i^j|$ e definimos $\mu_{(i,k)} := \mu_i \cdot \mu_{i+1} \dots \mu_k$. Como sugerido em (2.6):

$$\mathbb{K}_P^{(i,i)} = \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{a_{P,Q}} \left(M_i^{-1} (\pi_{U_{k+1}} J^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right),$$

e, para $k > i$;

$$\mathbb{K}_P^{(i,k)} = \bigcup_{Q \in C(n,u)} \bigcup_{j=1}^{s_{P,Q}} \left(M_{(i,k)}^{-1} (\pi_{U_{k+1}} J^Q) + \sum_{t=i}^{k-1} M_{(i,t)}^{-1} \pi_{U_{t+1}} z_{w_{t+1}} + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i \right).$$

Pela subaditividade de ν_u , temos:

$$\nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) \leq \frac{1}{\mu_{(i,k)}} \sum_{Q \in C(n,u)} s_{P,Q} \cdot \nu_u(\pi_{U_{k+1}} J^Q), \quad \forall k \geq i.$$

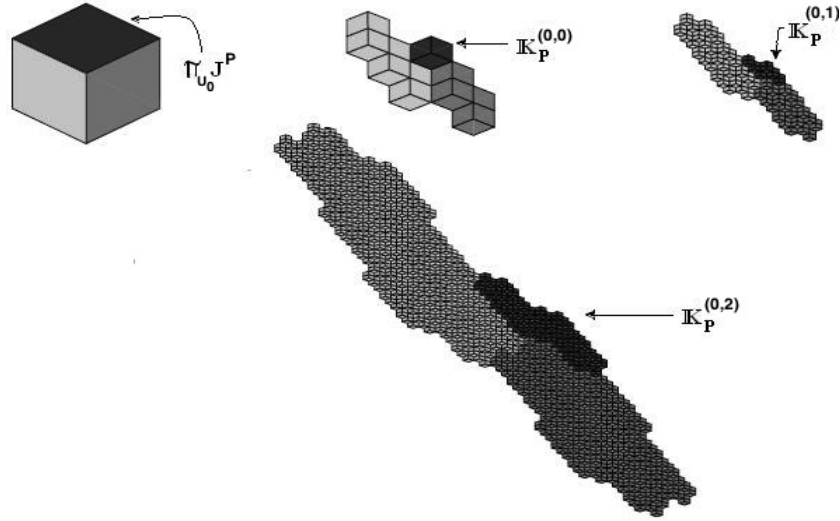


Figura 4.1: Na métrica Hausdorff, K_P é o limite (quando $k \rightarrow +\infty$) da P -ésima coordenada em $E_{(0,k)}(\pi_{U_{k+1}} J)$ onde $\pi_{U_{k+1}} J := (\pi_{U_{k+1}} J^P)_{P \in C(n,u)}$. Assim, a aplicação E pode ser modelado pelo step cycle Y , isto é, $\mathbb{K}_P^{(0,k)} = \pi_{U_0} M_{(0,k)}^{-1} Y_{(0,k)} \rho_P(I^u)$. Aqui foi considerada a substituição Rauzy com $n = 3$, $u = 2$ e $P = (1, 2)$ como em [13].

Por (4.2) temos:

$$\nu_u(\pi_{U_i} J^P) \leq \frac{1}{\mu_{(i,k)}} \sum_{Q \in C(n,u)} s_{P,Q} \nu_u(\pi_{U_{k+1}} J^Q) \quad (4.3)$$

E, pelo Corolário 4.4 temos a igualdade em (4.3). Veja figura 4.1. Disto, segue que $\nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$, para cada $k \geq i$, e que

$$\mu_{(i,k)} \nu_u(\pi_{U_i} J^P) = \sum_{Q \in C(n,u)} s_{P,Q} \nu_u(\pi_{U_{k+1}} J^Q),$$

o que mostra que $(\nu_u(\pi_{U_t} J)) := (\nu_u(\pi_{U_t} J^P))_{P \in C(n,u)}$ é uma sequência de autovetores (à esquerda) dominantes, com autovalores μ_t (veja observação 4.2). O Lema 4.11 garante a convergência em (2.7), isto é, $K_i^P = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{K}_P^k$. Então, para k suficientemente grande, qualquer vizinhança de K_i^P contém $\mathbb{K}_P^{(i,k)}$. Logo $\nu_u(K_i^P) \geq \nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$.

Agora, para a desigualdade contrária, o conjunto $M_{(k+1,i)} \partial \mathbb{K}_P^{(i,k+1)}$ é uma união de certas faces $(u-1)$ -dimensionais dos n -cubos $(I^n + z, z \in \mathbb{Z}^n)$ que encontram N_k no suporte de $Y_{(i,k)}(\partial \rho_P)$ projetadas em U_{k+1} , e o número destes n -cubos é, no máximo,

o dobro da soma de todas as entradas de $M_{(k+1,i)}^{u-1}$ (tomamos o dobro para incluir os n -cubos que têm faces em comum, na verdade precisaríamos apenas que este número fosse (no máximo) um múltiplo da soma das entradas de $M_{(k+1,i)}^{u-1}$). Como, pela observação 4.2, μ_i é autovalor dominante de M_i^u , temos que $\mu_{(i,k+1)}$ é autovalor dominante de $M_{(k+1,i)}^u$, assim $\frac{\|M_{(k+1,i)}^u \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} \leq \mu_{(i,k+1)}$, $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^{(n)}$. E, pela equivalência entre as normas, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que o dobro da soma das entradas de $M_{(k+1,i)}^{u-1}$ seja, no máximo, $c \cdot \frac{\mu_{(i,k+1)}}{|\lambda_{(i,k+1)}^j|}$ onde $\lambda_{(i,k+1)}^j = \prod_{t=i}^{k+1} \lambda_t^j$, $1 \leq j \leq u$. Assim $\partial \mathbb{K}_P^{(i,k+1)}$ está numa vizinhança de $\partial \mathbb{K}_P^k$ de ν_u -volume, no máximo,

$$c \cdot \frac{1}{\mu_{(i,k+1)}} \cdot \frac{\mu_{(i,k+1)}}{|\lambda_{(i,k+1)}^j|} \cdot \nu_u(\pi_{U_{k+2}} I^n) = c \cdot \frac{1}{|\lambda_{(i,k+1)}^j|} \cdot \nu_u(\pi_{U_{k+2}} I^n).$$

Para qualquer $k' > k$, segue que $\mathbb{K}_P^{k'}$ está numa vizinhança de \mathbb{K}_P^k de ν_u -volume $\nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) + \sum_{t=k}^{k'} c \cdot \frac{1}{|\lambda_{(i,t)}^j|} \cdot \nu_u(\pi_{U_{t+1}} I^n)$ assim $\nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k)}) \leq \nu_u(\mathbb{K}_P^{(i,k')}) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$. Como k é arbitrário, segue que $\nu_u(K_i^P) \leq \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$.

Para o caso de ν_s em $(L_i^Q)_{Q \in C(n,u)} = \lim_{k \rightarrow -\infty} F_{(i-1,k)}(\pi_{S_k}(-J^{Q^c})_{Q \in C(n,u)})$ é similar. \square

Lema 4.13. *Seja (M_i^u) uma sequência “focussing” de matrizes de transição associada a uma família com decomposição regular. Então:*

$$\sum_{P \in C(n,u)} \nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}] = 1.$$

Demonstração. Seja e_i^1, \dots, e_i^n os vetores coluna, no tempo i , que denotam a base canônica de \mathbb{R}^n . Como $\mathbb{R}^n = S_i \oplus U_i$, temos $e_i^j = \pi_{S_i} e^j + \pi_{U_i} e^j$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Também definimos $\pi_{V(P,j)} = \pi_{U_i}$ se $j \in P$ e $\pi_{V(P,j)} = \pi_{S_i}$ se $j \notin P$. Então:

$$\pm \nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}] = \det(\pi_{V(P,1)} e_i^1, \dots, \pi_{V(P,n)} e_i^n). \quad (4.4)$$

Mostremos que esse determinante é positivo, isto é, que vale o sinal $+$ para cada P na igualdade. Este sinal permanece constante ao longo de um caminho contínuo

de subespaços U_i^t e S_i^t , $0 \leq t \leq 1$, que satisfazem $\mathbb{R}^n = U_i^t \oplus S_i^t$, $\forall t \in [0, 1]$; ao menos que, para algum t , ambos lados deem zero, e isto acontece precisamente quando $\dim(U_i^t \cap \mathbb{R}^{P^c}) > 0$ ou $\dim(S_i^t \cap \mathbb{R}^P) > 0$.

Mas, como a sequência (M^u) é primitiva, cada $\nu_u(\pi_{U_i} J^P)$ é não nulo e assim $U_i \cap \mathbb{R}^{P^c} = \{0\}$, $\forall P \in C(n, u)$. Logo $\dim(U_i \cap \mathbb{R}^{P^c}) = 0$. Analogamente, $\dim(S_i \cap \mathbb{R}^P) = 0$.

Assim existem aplicações lineares $\beta_U : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^{P^c}$ e $\beta_S : \mathbb{R}^{P^c} \rightarrow \mathbb{R}^P$ com os gráficos sendo U e S . Sejam U_i^t e S_i^t os gráficos das aplicações lineares $t \cdot \beta_U$ e $t \cdot \beta_S$.

Então $U_i^0 = \mathbb{R}^P$ e $S_i^0 = \mathbb{R}^{P^c}$ e, para $t = 0$, a equação (4.4) fica com sinal + em ambos lados, já que $\pi_{\mathbb{R}^P} e_i^j = e_i^j$, se $j \in P$, $\pi_{\mathbb{R}^{P^c}} e_i^j = e_i^j$, se $j \notin P$, e $\{e_i^1, \dots, e_i^n\}$ é uma base positiva. Por fim:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in C(n, u)} \nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}] &= \sum_{P \in C(n, u)} \det(\pi_{V(P,1)} e_i^1, \dots, \pi_{V(P,n)} e_i^n) = \\ &= \det(\pi_{S_i} e_i^1 + \pi_{U_i} e_i^1, \dots, \pi_{S_i} e_i^n + \pi_{U_i} e_i^n) = \det(e_i^1, \dots, e_i^n) = 1 \end{aligned}$$

□

Corolário 4.5. *Seja (M_i^u) uma sequência “focussing” de matrizes de transição associada a uma família com decomposição regular. Então:*

$$\sum_{P \in C(n, u)} \nu_n[K_i^P, L_i^P] = 1.$$

Demonstração. Para qualquer $B \subset U_i$ e $C \subset S_i$, temos que a razão $\frac{\nu_n[B, C]}{\nu_u(B) \cdot \nu_s(C)}$ é constante. Então

$$\frac{\nu_n[K_i^P, L_i^P]}{\nu_u(K_i^P) \cdot \nu_s(L_i^P)} = \frac{\nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}]}{\nu_u(\pi_{U_i} J^P) \cdot \nu_s(\pi_{S_i} J^{P^c})}.$$

Como, pelo Lema 4.12, $\nu_u(K_i^P) = \nu_u(\pi_{U_i} J^P)$ e $\nu_s(L_i^P) = \nu_s(\pi_{S_i} J^{P^c})$, assim temos $\nu_n[K_i^P, L_i^P] = \nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}]$, $\forall P \in C(n, u)$. E, pelo Lema 4.13,

$$\sum_{P \in C(n, u)} \nu_n[K_i^P, L_i^P] = \sum_{P \in C(n, u)} \nu_n[\pi_{U_i} J^P, \pi_{S_i} J^{P^c}] = 1.$$

□

Definição 4.8. Seja $d = (d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de métricas em $\Omega = \prod \Omega_i$. Uma família de aplicações (Ω, d, f) é **topologicamente mixing** se, para todo $\epsilon > 0$ e todo $i \in \mathbb{Z}$, existe K tal que

$$A \cap f_i^{-1} \circ f_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{i+k-1}^{-1}(B) \neq \emptyset,$$

para todo $k > K$ e quaisquer bolas $A \subset \Omega_i$ e $B \subset \Omega_{i+k}$ de raios $> \epsilon$.

Definição 4.9. Seja $(\nu_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ uma sequência invariante de medidas de probabilidade para as aplicações f_i . Então (Ω, d, f, ν) é **mixing não-estacionário** se, para todo $\epsilon > 0$ e todo $i \in \mathbb{Z}$, existe K tal que

$$\nu_i(A \cap f_i^{-1} \circ f_{i+1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{i+k-1}^{-1}(B)) = e^{\pm \epsilon} \nu_i(A) \nu_{i+k}(B),$$

para todo $k > K$ e quaisquer bolas $A \subset \Omega_i$ e $B \subset \Omega_{i+k}$ de raios $> \epsilon$, onde $x = e^{\pm \epsilon} y$ significa $e^{-\epsilon} y \leq x \leq e^{+\epsilon} y$.

Note que *mixing topológico* é preservado por conjugação uniforme entre famílias de aplicações, isto é, uma sequência uniformemente equicontínua. Enquanto *mixing não-estacionário* é preservado por conjugação uniforme que preserva a sequência de medidas invariantes.

Conjectura 4.1. Uma família Anosov é um *mixing não-estacionário*.

Demonstração. Para discussões relacionadas, veja [3].

Lema 4.14. Sejam $A_1, \dots, A_r \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos Lebesgue mensuráveis tais que

$$\sum_{i=1}^r \nu_n(A_i) > 0.$$

Então $\exists j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\nu_n(\pi_{\mathbb{T}} A_j) > 0$.

Demonstração. Lembremos que $\nu_n(B) := \nu_n(\pi_{\mathbb{T}}^{-1}B)$, para B no conjuntos dos mensuráveis de \mathbb{T}^n .

Note que,

$$x \in A_j \Rightarrow \pi_{\mathbb{T}}(x) \in \pi_{\mathbb{T}}(A_j) \Rightarrow x \in \pi_{\mathbb{T}}^{-1}\pi_{\mathbb{T}}(A_j),$$

logo

$$A_j \subseteq \pi_{\mathbb{T}}^{-1}\pi_{\mathbb{T}}(A_j), \quad \forall i,$$

e assim:

$$\nu_n(\pi_{\mathbb{T}}^{-1}\pi_{\mathbb{T}}A_j) \geq \nu_n(A_j).$$

Como $\nu_n(\pi_{\mathbb{T}}A_j) = \nu_n(\pi_{\mathbb{T}}^{-1}\pi_{\mathbb{T}}A_j)$. Então temos

$$\sum_{i=1}^r \nu_n(\pi_{\mathbb{T}}A_i) = \sum_{i=1}^r \nu_n(\pi_{\mathbb{T}}^{-1}\pi_{\mathbb{T}}A_i) \geq \sum_{i=1}^r \nu_n(A_i) > 0.$$

Logo $\exists j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\nu_n(\pi_{\mathbb{T}}A_j) > 0$. □

A seguir, concluiremos nosso resultado principal: que existe uma sequência de partições de Markov para a família Anosov (\mathbb{T}^n, f) . Como antes, (\mathbb{R}^n, M) é a família linear associada. Cada aplicação M_i define um automorfismo $\overline{M}_i : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, onde $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e $\overline{M}_i(x + \mathbb{Z}^n) = M_i x + \mathbb{Z}^n$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Então temos:

Teorema 4.2. *Sejam $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ uma família linear eventualmente Anosov com decomposição regular e dimensão expansora u , (M_i^u) uma sequência de matrizes “focussing”, onde cada M_i^u é a matriz induzida por \overline{M}_i em $H_u(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, e α_i dado em (2.3) convergente. Então $\mathcal{R}_i := \{\pi_{\mathbb{T}}R_i^P : P \in C(n, u)\}$ é uma sequência de partições de Markov para a $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ com a sequência $((M_i^u)^T)$ sendo a sequência de matrizes de transição e cada $R_i^P = [K_i^P, L_i^P]$.*

Demonstração. Vamos provar que:

- (a) cada R_i^P é próprio;
- (b) A sequência (\mathcal{R}_i) tem a propriedade de Markov definida na seção 1.4.2 ;

(c) cada \mathcal{R}_i cobre \mathbb{T}^n ; e

(d) para i fixo, os retângulos R_i^P têm, dois a dois, interiores disjuntos.

O item (a) foi mostrado no final do Capítulo 2, na Proposição 2.4.

Para mostrar (b); tomemos E_i e F_i como em (2.4) e (2.5) e consideramos $K_{i+1}^Q = \lim_{k \rightarrow +\infty} (E_{(i+1,k)}(K_{k+1}))_Q$. Então, em \mathbb{R}^n , $R_i^P = [K_i^P, L_i^P]$ é a união de s -retângulos:

$$[E_i(K_{i+1}^Q), L_i^P] = [M_i^{-1}(K_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i, L_i^P],$$

onde $Q \in C(n, u)$, $1 \leq j \leq a_{P,Q}$, com $a_{P,Q}$ sendo a entrada na linha P e coluna Q de $(M_i^u)^T$. Agora:

$$\begin{aligned} M_i[M_i^{-1}(K_{i+1}^Q) + \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i, L_i^P] &= [K_{i+1}^Q + M_i \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i, M_i L_i^P] = \\ &= [K_{i+1}^Q + M_i \pi_{U_i} z_{P,Q,j}^i, M_i L_i^P - M_i \pi_{S_i} z_{P,Q,j}^i + M_i \pi_{S_i} z_{P,Q,j}^i] = \\ &= [K_{i+1}^Q, M_i L_i^P - M_i \pi_{S_i} z_{P,Q,j}^i] + M_i z_{P,Q,j}^i = [K_{i+1}^Q, F_i(L_i^P)] + M_i z_{P,Q,j}^i, \end{aligned}$$

ou seja, \overline{M}_i leva cada s -sub-retângulo, no tempo i , para um u -sub-retângulo no tempo $i + 1$. Logo \mathcal{R}_i satisfaz a propriedade de Markov com matriz de transição $(M_i^u)^T$.

Para (c); vamos supor que $\nu_n(\mathcal{R}_i) \neq 1$. Então a medida do conjunto complementar $\nu_n(\mathcal{R}_i^c) > 0$. Pelo *Teorema de densidade de Lebesgue*², dado $\lambda > 0$, existem $x \in \mathbb{T}^n$ e $\epsilon_i > 0$ tal que

$$\frac{\nu_n(B_\delta(x) \cap \mathcal{R}_i^c)}{\nu_n(B_\delta(x))} > 1 - \lambda$$

para todo $0 < \delta < \epsilon_i$. Agora, como \mathcal{R}_i tem interior não vazio (pelo Lema 4.14), para

²**Definição:** Dado um subconjunto mensurável A de \mathbb{R}^n , dizemos que um ponto $x \in A$ é um ponto de densidade de A se este conjunto preenche a maior parte de qualquer vizinhança pequena de x , isto é,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\nu_n(B_\delta(x) \cap A)}{\nu_n(B_\delta(x))} = 1.$$

²**Teorema (de densidade de Lebesgue):** Seja A um subconjunto mensurável de \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue $\nu_n(A) > 0$. Então ν_n -quase todo ponto $x \in A$ é ponto de densidade de A .

cada tempo $k > i$ existem $a > 0$ e $w_k \in \mathbb{T}^n$ onde $B_a(w_k) \subseteq \mathcal{R}_k = \overline{M}_{(k,i)}(\mathcal{R}_i)$. Como a sequência (\overline{M}) é um mixing não-estacionário temos que, sendo a uniforme no tempo, tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_i, a\}$ e k suficientemente grande,

$$\nu_n(B_\epsilon(x) \cap \overline{M}_{(i,k)}^{-1}(B_a(w_m))) \approx \nu_n(B_\epsilon(x)) \cdot \nu_n(B_a(w_m)).$$

Por outro lado, $\overline{M}_{(i,k)}^{-1}(B_a(w_m)) \subseteq \mathcal{R}_i$ (pois, pelo item anterior, é invariante), então:

$$\nu_n(B_\epsilon(x) \cap \overline{M}_{(i,k)}^{-1}(B_a(w_m))) \leq \nu_n(B_\epsilon(x) \cap \mathcal{R}_i) < \lambda \cdot \nu_n(B_\epsilon(x)),$$

para algum λ pequeno. E tomando $\lambda \ll \nu_n(B_a(w_m))$ temos uma contradição. Assim $\nu_n(\mathcal{R}_i) = 1$. E como é uma união de fechados, isto dá \mathbb{T}^n .

E (d) sai pelo Corolário 4.5, cada par destes retângulos em \mathbb{T}^n tem como intersecção um conjunto de medida 0. Em particular, os interiores destes retângulos são, dois a dois, disjuntos. \square

Corolário 4.6. *Sejam $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$ uma família eventualmente Anosov finita com decomposição regular e dimensão expansora u , (M_i^u) uma sequência de matrizes “focussing”, onde cada M_i^u é a matriz induzida por \overline{M}_i em $H_u(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Então existe uma sequência de partições de Markov para um agrupamento de $(\mathbb{T}^n, \overline{M})$.*

Demonstração. Segue imediatamente dos Teoremas 3.1 e 4.2. A família agrupada $(\mathbb{T}^n, \overline{N})$ com $(N_k) = (M_{(n_k, n_{k+1}-1)})_{k \in \mathbb{Z}}$ está descrita na Proposição 2.3. \square

Apêndice A

Homologia

Neste apêndice descreveremos uma noção básica de grupos de Homologia e alguns tópicos que achamos pertinente ao trabalho desenvolvido. Porém não iremos adotar aqui o comprometimento com a construção gradual da teoria, que é rica e interessante, com o pretexto de sermos um tanto breves, podendo assim haver alguns quesitos não comentados. Para um texto mais completo sugerimos [16] ou [23].

A motivação para definir grupos de homologia é baseada no fato de que espaços topológicos são distinguidos pelos “buracos” n -dimensionais que possuem. Um grupo de homologia $H_n(X)$, com X sendo um espaço topológico, nos dá informações sobre o número e o tipo de “buracos” n -dimensionais de X .

A.1 O produto fraco de grupos abelianos livres

Seja A um conjunto tal que, para todo $\lambda \in A$, existe um grupo abeliano G_λ . Definimos um grupo abeliano $G = \sum_{\lambda \in A} G_\lambda$ formado por funções

$$f : A \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in A} G_\lambda$$

tal que $f(\lambda) \in G_\lambda$, $\forall \lambda \in A$ e $f(\lambda) = 0$ exceto para um número finito de elementos $\lambda \in A$. A operação em G é definida por

$$(f + g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda).$$

Para cada $\lambda \in A$, considerando $g_\lambda = f(\lambda) \in G_\lambda$, escrevemos $f = (g_\lambda)_{\lambda \in A}$ e chamamos g_λ as componentes de f . O grupo $G = \sum_{\lambda \in A} G_\lambda$ é chamado **produto fraco**.

Se G é um grupo abeliano e $\{G_\lambda\}_{\lambda \in A}$ é uma família de subgrupos de G tal que cada elemento g tem uma representação $g = \sum_{\lambda \in A} g_\lambda$, com $g_\lambda \in G_\lambda$ e $g_\lambda = 0$ para quase todos λ , então G é isomorfo a $\sum_{\lambda \in A} G_\lambda$.

Definição A.1. *Seja R um anel. Um grupo G é chamado de **grupo abeliano livre** se existir um subconjunto $A \subseteq G$ tal que cada elemento g de G tem uma única representação*

$$g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x,$$

onde $n_x \in R$ é diferente de zero apenas em um número finito de $x \in A$. O conjunto A é uma base para G .

Observação A.1. *Se G é abeliano livre com base A e H é grupo abeliano, então toda função $f : A \rightarrow H$ pode ser unicamente estendida para um homomorfismo $\bar{f} : G \rightarrow H$. De fato, para cada $g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$, definimos*

$$\bar{f}(g) = \sum_{x \in A} n_x f(x).$$

Assim \bar{f} é homomorfismo e $\bar{f}|_A = f$.

Definição A.2. *Um **grupo abeliano graduado** G é uma coleção de grupos abelianos $\{G_n\}$ indexados por inteiros ou pelos naturais e com operação componente a componente.*

Definição A.3. *Um subgrupo $H \subseteq G$ de um grupo graduado, é um grupo graduado $\{H_i\}$ onde H_i é um subgrupo de G_i . O grupo quociente G/H é o grupo graduado $\{G_i/H_i\}$.*

A.2 Grupos de Homologia Singular

Para definir os grupos de homologia singular, usamos aplicações contínuas cuja imagem está em X , onde X sendo um espaço topológico, definidas em um subespaço de \mathbb{R}^n que será denotado por σ_n , que é homeomorfo a I^n , onde $I = [0, 1]$. As aplicações $\rho : \sigma_n \rightarrow X$ são chamadas de n -simplexos singulares.

Começemos por definir os elementos simpliciais σ_n :

Definição A.4. Um p -**simplexo** em \mathbb{R}^n é o fecho convexo de $p+1$ pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ de \mathbb{R}^n , de modo que $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_p - x_0$ formam um conjunto linearmente independente. Os pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ são chamados de vértices do p -simplexo.

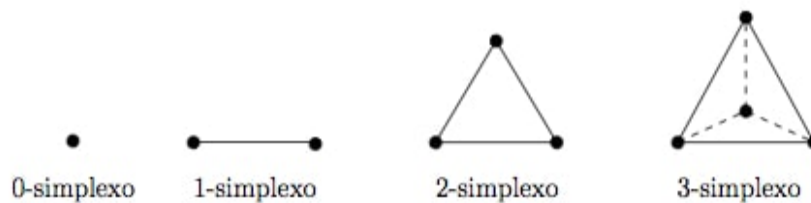


Figura A.1: Exemplos de simplexos em \mathbb{R}^3

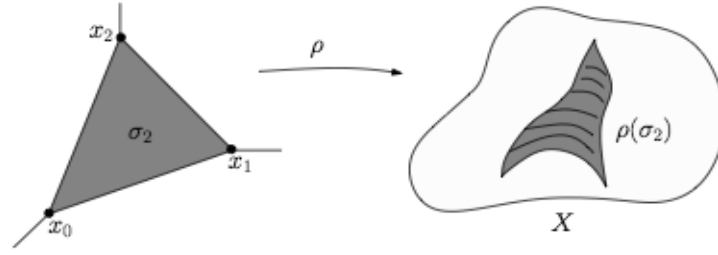
Um n -**simplexo padrão** em \mathbb{R}^{n+1} são simplexos cujos vértices são os pontos: $x_0 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, x_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ e é denotado por σ_n . Podemos escrever:

$$\sigma_n = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \forall i, \text{ e } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Estendemos o conceito de simplexo para um espaços topológicos arbitrário X .

Definição A.5. Um n -**simplexo** no espaço topológico X é uma função contínua da forma $\rho : \sigma_n \rightarrow X$, onde σ_n é o n -simplexo padrão em \mathbb{R}^n .

Como σ_0 é um ponto e σ_1 é um intervalo, um 0-simplexo em X pode ser identificado com um ponto em X e um 1-simplexo com um caminho em X .

Figura A.2: Representação de 2-simplexo em X

Definição A.6. *Sejam R um anel e X um espaço topológico. Para cada $n \geq 0$, defina $C_n(X)$ como o grupo abeliano livre cuja base consiste de todos os n -simplexos de X . Cada elemento de $C_n(X)$ é chamado de n -cadeia de X e tem a forma*

$$\sum_{\rho} n_{\rho} \rho,$$

onde $n_{\rho} \in R$ são quase todos nulos e cada ρ é um n -simplexo singular de X ou n -cubo singular.

Dado um espaço topológico X , a coleção de grupos abelianos $C_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um exemplo de grupo graduado.

A.3 Operador Bordo

Definição A.7. *Seja $\rho : I^n \rightarrow X$ um n -cubo singular em X . Para $i = 1, 2, \dots, n$ definimos os $(n-1)$ -cubos singulares:*

$$\rho_{\setminus i}, \bar{\rho}_{\setminus i} : I^{n-1} \rightarrow X$$

pelas formulas:

$$\rho_{\setminus i}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \text{ e}$$

$$\bar{\rho}_{\setminus i}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

$\rho_{\setminus i}$ é chamada de i -face da frente, e $\bar{\rho}_{\setminus i}$ de i -face de trás de ρ

Definição A.8. Para um n -cubo ρ , $n > 0$,

$$\partial_n(\rho) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\rho_{\setminus i} - \bar{\rho}_{\setminus i}).$$

Teorema A.1. A composição $\partial_{n-1} \circ \partial_n$:

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X)$$

é a aplicação nula.

Demonstração. Sugerimos [16].

Definição A.9. Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -**ciclo** se $\partial_n c = 0$, ou seja, se $c \in \text{Ker } \partial_n$ onde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$. O conjunto de todos n -ciclos de X é denotado por $Z_n(X)$. Todas as 0-cadeias são 0-ciclos, por convenção.

Definição A.10. Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -**bordo** se existe $d \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1} d = c$, ou seja, se $c \in \text{Im } \partial_{n+1}$, onde $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n(X)$. O conjunto de todos os n -bordos de X é denotado por $B_n(X)$.

Como ∂ um homomorfismo, $\text{ker } \partial_n = Z_n(X)$ e $\text{Im } \partial_{n+1} = B_n(X)$ são subgrupos abelianos de $C_n(X)$. O teorema A.1 implica que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$. Assim, definiremos o grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$, este grupo é o n -ésimo **grupo de homologia** de X .

A.4 Complexos de Cadeias de grupos abelianos e Homologia

Definição A.11. Para cada $n \geq 0$, o n -ésimo **grupo de homologia singular** de espaço topológico X é o grupo abeliano

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}}.$$

Se $c \in Z_n(X)$ então o conjunto $[c] = c + B_n(X)$ é a **classe de homologia** de c . Note que, se $[c] = [d]$ então $c - d \in B_n(X)$, isto é, a diferença entre os n -ciclos c e d

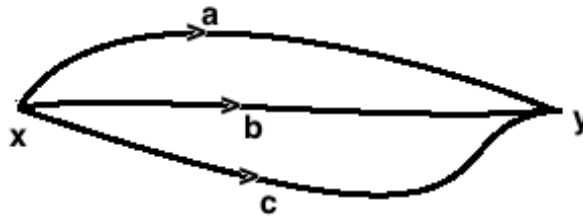


Figura A.3: X composto de três 1-cadeia e duas 0-cadeia.

forma um bordo de uma $(n + 1)$ -cadeia de X . Neste caso, c e d são ditos **homólogos**.

Assim, a existência de elementos não nulos num grupo de homologia de X detectam a existência de ciclos que não são bordos.

Exemplo 1: Seja X o espaço formado de três caminhos a , b e c ligando os vértices x e y , como mostra a figura A.4. Podemos obter caminhos em X fazendo a justaposição de a , b e c e com os caminhos inversos $-a$, $-b$ e $-c$. Um caminho (1-simplexo singular) que sai de um vértice e volta ao mesmo vértice é chamado de 1-ciclo, neste exemplo temos seis deles: $z_1 = b - a$, $z_2 = c - b$, $z_3 = c - a$ juntamente com $-z_1$, $-z_2$ e $-z_3$. Todo 1-ciclo, que não é bordo de um 2-simplexo, não é homotopicamente nulo em $H_1(X)$, isto é, fornece um elemento não nulo no grupo de homologia $H_1(X)$. Isto significa que o 1-ciclo circunda um “buraco” de dimensão 1 do espaço. Como $z_3 = z_1 + z_2$, temos que $Z_1(X)$ tem dois geradores z_1 e z_2 , isto é, $Z_1(X)$ é isomorfo à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Definição A.12. Um **complexo de cadeia** é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tal que a composição $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, para todo n . Equivalentemente, um complexo de cadeia é um grupo graduado $\mathcal{C} = \{C_n\}$ juntamente com um homomorfismo $\partial : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\partial \circ \partial = 0$.

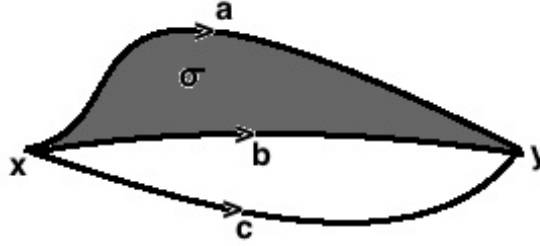


Figura A.4: Complexo de cadeia que tem um simplexo singular 2-dimensional em $C_2(\mathcal{C})$. Assim $B_1(\mathcal{C}) = \partial C_2(\mathcal{C}) = b - a$. Então $H_1(\mathcal{C})$ é gerado por $[b - a]$ logo isomorfo a \mathbb{Z} .

Se $\mathcal{C}_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é tal que $C_n(X) = 0$, para todo $n < 0$. Então $(\mathcal{C}_*(X), \partial)$ é um complexo de cadeia.

Fixemos as notações $Z_*(\mathcal{C})$ e $B_*(\mathcal{C})$ para representarem, respectivamente, os grupos graduados $\{Z_n(\mathcal{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{B_n(\mathcal{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Definição A.13. *O n -ésimo grupo de homologia singular do complexo de cadeia é o grupo*

$$H_n(\mathcal{C}) = \frac{Z_n(\mathcal{C})}{B_n(\mathcal{C})}.$$

O grupo graduado $H_*(\mathcal{C}) = \{H_n(\mathcal{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a **homologia do complexo de cadeia** (\mathcal{C}, ∂) .

Observação A.2. *Note que o n -ésimo grupo de homologia $H_n(X)$ do espaço topológico X , definida anteriormente, é exatamente o n -ésimo grupo de homologia do complexo de cadeia $(\mathcal{C}_*(X), \partial)$.*

Definição A.14. *Sejam A um subespaço de X e $i : A \rightarrow X$ uma inclusão. É sabido que o homomorfismo $i_{\#} : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ é um monomorfismo, conseqüentemente $C_n(A)$ é um subgrupo de $C_n(X)$. Este subgrupo é gerado por todos cubos singulares não degenerados em A . Usamos a notação $C_n(X, A)$ para o grupo quociente $C_n(X)/C_n(A)$. Isto é chamado de **grupo de cadeias n -dimensionais do par (X, A) .***

O operador $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ tem a propriedade que $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$. Consequentemente, induz um homomorfismo do grupo quociente:

$$\partial_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$$

que usualmente denotamos por ∂_n , ou simplesmente ∂ .

Definição A.15. *Em analogia a definição A.11, definimos o grupo de ciclos n -dimensionais de (X, A) , para $n > 0$, por:*

$$Z_n(X, A) = \text{Ker} \partial_n = \{u \in C_n(X, A) / \partial(u) = 0\}$$

e, para $n \geq 0$, o grupo de bordos n -dimensionais por

$$B_n(X, A) = \text{Im} \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X, A)).$$

Como $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, então $B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$ e assim definimos

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A) / B_n(X, A),$$

o grupo de homologia relativa.

No caso $n = 0$, definimos $Z_0(X, A) = C_0(X, A)$ e $H_0(X, A) = C_0(X, A) / B_0(X, A)$. Intuitivamente, $H_n(X, A)$ é definido da mesma forma que $H_n(X)$, exceto que este negligencia elementos no subespaço A . Por exemplo, seja $u \in C_n(X)$, então a classe de u em $C_n(X, A)$ é um ciclo *mod* A se, e somente se, $\partial(u) \in C_{n-1}(A)$, isto é, $\partial(u)$ é uma cadeia no subespaço de A .

A.5 CW-Complexos

Para $n \geq 1$ sejam:

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq 1\} \text{ (a bola fechada } n\text{-dimensional);}$$

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| < 1\} \text{ (a bola aberta } n\text{-dimensional);}$$

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| = 1\}$ (a bola esfera $(n - 1)$ -dimensional).

A esfera S^{n-1} é chamada de bordo de E^n . Note que U^n é homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Sejam X^* um espaço Hausdorff e X um subespaço de X^* tal que $X^* - X$ é união disjunta de subconjuntos abertos e_λ^n , $\lambda \in \Lambda$ um índice; cada e_λ^n é assumido para ser homeomorfo a U^n e é chamado de n -célula aberta, ou simplesmente **n -célula**. Finalmente, assumimos que cada n -célula e_λ^n está associada a X por meio de uma aplicação denominada **aplicação característica**. Isto significa que para cada índice $\lambda \in \Lambda$ existe uma aplicação contínua $f_\lambda : E^n \rightarrow \bar{e}_\lambda^n$ tal que f_λ aplica U^n homeomorficamente a e_λ^n e $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X$.

Se existe somente um número finito de n -células, então não precisamos impor nenhuma outra condição. Porém, se o número de n -células for infinito, devemos acrescentar as seguintes condições, em ordem, para evitar várias situações patológicas: Assumimos que $A \subset X^*$ é fechado se, e somente se, $A \cap X$ e $f_\lambda^{-1}(A)$ são fechados, $\forall \lambda \in \Lambda$. Esta última condição é muitas vezes expressa por dizer que X^* tem a *topologia fraca* determinada pelas aplicações f_λ e a inclusão $i : X \rightarrow X^*$. Note que esta condição é automaticamente satisfeita caso o número de células seja finito, já que a união finita de conjuntos fechados é um fechado em qualquer espaço topológico e um subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado. Intuitivamente, podemos pensar em X^* obtido a partir de X por “colagem” de n -células e_λ^n . A aplicação característica f_λ descreve precisamente como as células e_λ^n é colada em X .

Teorema A.2. *Seja X^* o espaço obtido por anexar uma coleção de n -células $\{e_\lambda^n / \lambda \in \Lambda, n \geq 1\}$ em X tal que as hipóteses anteriores valem. Então $H_q(X^*, X) = 0, \forall q \neq n$. Para cada índice $\lambda \in \Lambda$, a aplicação característica f_λ induz um monomorfismo de grupos de homologia relativa $f_{\lambda*} : H_n(E^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X^*, X)$ onde $H_n(X^*, X)$ é a soma direta dos subgrupos imagem. Então, $H_n(X^*, X)$ é um grupo abeliano livre com base tendo correspondência 1 a 1 com o conjunto de células $\{e_\lambda^n / \lambda \in \Lambda\}$*

Demonstração. Veja [16], pág. 227.

Definição A.16. *Uma estrutura de CW-complexo está prescrita em um espaço X (que*

é assumido Hausdorff) por uma ascendente sequência de subespaços fechados

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisfaz:

- (i) X tem a topologia discreta;
- (ii) para $n > 0$, X^n é obtido por X^{n-1} por “juntar” uma coleção de n -células tal que as condições anteriormente explanadas valem;
- (iii) X é a união dos subespaços X^i , para $i \geq 0$; e
- (iv) o espaço X e os subespaços X^q têm a **topologia fraca**: um subconjunto A é fechado se, e somente se, $A \cap \bar{e}^n$ é fechado para todas n -células, $n = 0, 1, 2, \dots$

Observação A.3. O subconjunto X^n é chamado de n -esqueleto. Se $X = X^n$ para algum inteiro n , n é chamado de dimensão do CW-complexo (finito). Os pontos de X^0 são chamados de vértices ou 0-células

A.6 Grupo de Homologia de um CW-complexo.

Seja $K = \{K^n/n = 0, 1, 2, \dots\}$ denotando uma estrutura de CW-complexo no espaço topológico X (cada K^n é um subconjunto fechado de X). Definimos $K^n = \emptyset$ se $n < 0$. Pelo teorema A.2

$$H_q(K^n, K^{n-1}) = 0$$

para $q \neq n$ e $H_n(K^n, K^{n-1})$ é um grupo abeliano livre com base em correspondência 1 a 1 com n -células de K .

Lema A.1. $H_q(K^n) = 0, \forall q > n$.

Demonstração. Por indução. Para $n = 0$ é trivial, já que K^0 é um espaço discreto, por hipótese. O passo indutivo é provado por usar a sequência de homologia do par (K^n, K^{n-1}) . □

Agora definimos:

$$C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1}), \text{ e}$$

$$d_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$$

que está definido para ser a composição de homomorfismos

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2});$$

onde ∂_* é o operador bordo do par (K^n, K^{n-1}) e j_{n-1} é o homomorfismo induzido pela aplicação inclusão. Note que $d_{n-1}d_n = 0$. E denotamos por:

$$Z_n(K) = \text{Ker } d_n,$$

$$B_n(K) = \text{Im } d_{n+1},$$

$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K).$$

Definição A.17. Um CW-complexo é **regular** se para todo e^n , $n > 0$, existe uma aplicação característica $f : E^n \longrightarrow \bar{e}^n$ que é um homeomorfismo.

Definição A.18. Podemos definir um complexo de cadeia de CW-complexos análogo ao anteriormente. Aqui $K = \{K_n, \partial_n\}$ é uma sequência de grupos abelianos K_n com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e uma sequência de homomorfismos $\partial_n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ tal que $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, $\forall n$. Definimos $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$, $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$, então $B_n(K) \subset Z_n(K) \subset K_n$ e podemos definir $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ o **n -ésimo grupo de homologia de K** .

A.7 Orientação

Seja $K = \{K^n\}$ um CW-complexo no espaço X . Para cada n -célula e_λ^n existe uma aplicação característica

$$f_\lambda : (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (K^n, K^{n-1}),$$

de acordo com o Teorema A.2, o homomorfismo induzido no grupo de homologia relativa n -dimensional é um monomorfismo, e $H_n(K^n, K^{n-1})$ é a soma direta dos subgrupos

imagem. A aplicação característica f_λ correspondente à célula e_λ^n não é única, e é concebível que esta decomposição da soma direta do grupo $H_n(K^n, K^{n-1})$ depende das escolhas das aplicações características. É importante ressaltar que este não é o caso; a decomposição da soma direta de $H_n(K^n, K^{n-1})$ é *canônica*, e independe das escolhas das aplicações características. Para qualquer n -célula e_λ^n , $n > 0$, seja

$$\tilde{e}_\lambda^n = \bar{e}_\lambda^n - e_\lambda^n,$$

o bordo de e_λ^n . Podemos fatorar a função característica através do par $(\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n)$ como:

$$\begin{array}{ccc} (E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{g_\lambda} & (\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n) \\ & \searrow f_\lambda & \downarrow l_\lambda \\ & & (K^n, K^{n-1}) \end{array}$$

Aqui l_λ é a aplicação inclusão. Passando para homologia, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{g_{\lambda*}} & H_n(\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n) \\ & \searrow f_{\lambda*} & \downarrow l_{\lambda*} \\ & & H_n(K^n, K^{n-1}) \end{array}$$

E podemos aplicar o Teorema A.2 com (X^*, X) para concluir que $g_{\lambda*}$ é um isomorfismo. Consequentemente,

$$\text{Im } f_{\lambda*} = \text{Im } l_{\lambda*}$$

e assim, $\text{Im } f_{\lambda*}$ independe da escolha de f_λ . Também temos que $l_{\lambda*}$ é um monomorfismo e que $H_n(K^n, K^{n-1})$ é a soma direta de das imagens para todo $\lambda \in \Lambda$.

Como $H_n(\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n)$ é um grupo cíclico infinito para $n > 0$, existem dois modos de escolher um gerador e as escolhas são “opostas” entre si. Chamamos um gerador do grupo $H_n(\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n)$ de uma **orientação** da célula e_λ^n .

Suponha que tenhamos escolhido uma orientação $a_\lambda^n \in H_n(\bar{e}_\lambda^n, \tilde{e}_\lambda^n)$ para cada n -célula

e_λ^n ; seja

$$b_\lambda^n = l_{\lambda*}(a_\lambda^n) \in C_n(K).$$

Então o conjunto $\{b_\lambda^n\}$ é uma base para o grupo de cadeia $C_n(K)$.

A.8 Suporte

Seja $K + \{K^n\}$ sendo um CW -complexo do espaço X , e seja $u \in C_n(K, G)$; então u tem uma única expressão da forma

$$u = \sum_i g_i e_i^n,$$

onde $g_i \in G$ e e_i^n são n -células orientadas de K . É natural associar com a cadeia u o subconjunto

$$|u| = \bigcup_i \bar{e}_i^n,$$

onde a união é dada por todas células e_i^n tal que o coeficiente correspondente $g_i \neq 0$. Se $u = 0$, definimos $|u| = \emptyset$. O conjunto $|u|$ é chamado de **suporte** de u e tem as seguintes propriedades:

- (a) u é um subconjunto compacto de X ;
- (b) $|u| = \emptyset$ se, e somente se, $u = 0$;
- (c) $|u \pm v| \subset |u| \cup |v|$; e
- (d) $|d_n u| \subset |u|$.

Observação A.4. *Existe também um modo natural de definir o suporte de cadeia singular u em um espaço topológico X arbitrário. Seja $u \in C_n(X, G)$, se $u = 0$, definimos $|u| = \emptyset$; se $u \neq 0$, então u tem uma única expressão como uma combinação linear finita de n -cubos singulares não degenerados com coeficientes não nulos,*

$$u = \sum_i g_i \rho_i; \quad g_i \in G,$$

e naturalmente definimos

$$|u| = \bigcup_i \rho_i(I^n).$$

A.9 Produto Cartesiano

Se X e Y são complexos celulares, então $X \times Y$ tem a estrutura de um complexo celular com células sendo o produto $e_\alpha^m \times e_\beta^n$ onde e_α^m varia sobre as células de X e e_β^n sobre as células de Y . Por exemplo, a estrutura celular do toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ é obtido a partir da estrutura celular padrão em S^1 . Para CW -complexos em geral, existe uma pequena complicação: a topologia em $X \times Y$ como um complexo celular às vezes é mais fina do que a topologia do produto, isto é, com mais conjuntos abertos do que a topologia do produto, embora as duas topologias coincidam se X ou Y tiverem somente um número finito de células, ou se ambos tiverem células enumeráveis. Entretanto, na prática, esta questão sutil de topologia raramente causa problemas.

A.10 Exemplo: o grupo de Homologia $H_r(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$

Iremos adotar aqui argumentos relacionados a homologia celular, ou seja, sobre a teoria anteriormente explanada sobre os CW -complexos. Daí vamos sugerir os cálculos de $H_r(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ com $r \leq n$. Aqui \mathbb{T}^n é o toro de dimensão n , a homologia será calculada sobre o corpo dos reais \mathbb{R} .

Considere o toro como um espaço quociente de um retângulo, como usualmente. Nós podemos expressar \mathbb{T}^2 como um CW -complexo possuindo um único aberto 2-célula (a imagem sobre π do interior do retângulo) juntamente com dois abertos 1-célula (a imagem sobre π do interior do retângulo) juntamente com dois abertos 1-célula (a imagem de duas arestas abertas) e um 0-célula (a imagem dos vértices).

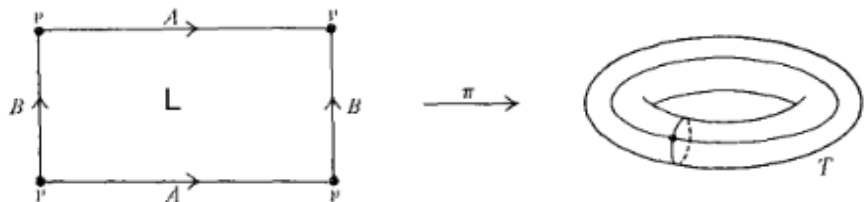


Figura A.5: CW -complexo do toro \mathbb{T}^2 .

Calculemos $H_*(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$. Baseado na figura A.5, temos o diagrama:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} 2 - \text{celula} \xrightarrow{\partial_2} 1 - \text{celula} \xrightarrow{\partial_1} 0 - \text{celula} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde os conjuntos 0-células = $\langle p \rangle$, 1-células = $\langle A, B \rangle$, 2-células = $\langle L \rangle$, 0-células = \emptyset

Assim, $\ker \partial_0 = \langle p \rangle$, $\text{Im} \partial_1 = \{0\}$ pois $\partial_1(\alpha A + \beta B) = \alpha \partial_1(A) + \beta \partial_1(B) = \alpha(p - p) + \beta(p - p) = 0$. Logo

$$H_0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) = \frac{\ker \partial_0}{\text{Im} \partial_1} = \langle p \rangle = \mathbb{R}.$$

Também temos, $\ker \partial_1 = \alpha A + \beta B = \langle A, B \rangle$, $\text{Im} \partial_2 = \partial_2(L) = A + B - A - B = 0$. Logo

$$H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) = \frac{\ker \partial_1}{\text{Im} \partial_2} = \langle A, B \rangle = \mathbb{R}^2.$$

E, como $\partial_3(0) = 0$, temos

$$H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) = \frac{\ker \partial_2}{\text{Im} \partial_3} = \langle L \rangle = \mathbb{R}.$$

Observação A.5. Em geral, já que $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, podemos fazer estes cálculos usando a **fórmula de Künneth**: Sejam X e Y dois CW-complexos, então

$$H_n(X \times Y, \mathbb{R}) = \bigoplus_{r+s=n} H_r(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H_s(Y, \mathbb{R}),$$

onde \otimes é o produto tensorial sobre \mathbb{R} .

Referências Bibliográficas

- [1] Arnoux, P. and Fisher, A. M.; Anosov families, renormalization and nonstationary subshifts, *Erg. Th Dyn. Syst.* **25**, 2005, 661-709.
- [2] Adler, R. L. and Weiss, B.; Similarity of automorphisms of the torus, *Mem. Amer. Math. Soc.* **98**, 1970, 1-43.
- [3] Fisher, A. M.; Nonstationary mixing and the unique ergodicity of Adic transformations, *stochastics and Dynamics*, **Vol 9, No.3**, 2009, 335-391.
- [4] Bezuglyi S.; Kwiatkowski J.; Medynets K. and Solomyak B.; Invariant measures on stationary Bratteli diagrams, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, **30**, 2010, 973-1007.
- [5] Devaney, Robert L.; An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, *Addison-Wesley Publishing company*, 1985
- [6] Adler, R. L.; Symbolic dynamics and Markov partitions, *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, **35**, 1998
- [7] Katok, A. and Hasselblatt B.; Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Cambridge University Press*, 1996
- [8] Bowen, R.; *Equilibrium states and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Mathematics, 470), Springer, Berlin, 1975.
- [9] T. W. Hungerford. *Algebra*. Holt, Rinehardt and Winston, New York, 1974.
- [10] A. Manning. A Markov partition that reflects the geometry of a hyperbolic toral automorphism. *Trans. Amer. Math. Soc.* **354,7**, 2002, 2849-2863.

-
- [11] Lind, D.; Marcus B., *Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge Univ. Press, 1995
- [12] Walters, P., An introduction to Ergodic Theory, New York, *Springer-Verlag*, 1982.
- [13] P Arnoux, A. Ito, Pisot Substitutions and Rauzy Fractals, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **8**, 2001 , 181-207.
- [14] T. Bedford, Generating Special Markov Partitions for hyperbolic toral automorphisms using factals, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, **6**, 1986 , 325-333.
- [15] R. Bowen, Markov Partitions are not Smooth, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **71**, 1978, 130-132.
- [16] Massey, W. S.; A Basic Course Algebraic Topology, *Springer-Verlag*, 1991.
- [17] Falconer, K.; Factal Geometry, 2nd, *Wiley*, 2003.
- [18] Birkhoff, G.; Lattice Theory, *AMS coloa. Publ.*, **vol.XXV,3th edition**, 1967, Chapter XVI.
- [19] Wheeden, R. L.; Zygmund, A.; Measure and Integral, *Marcel Dekker, Inc*, 1977.
- [20] Anosov, D. R.; Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Inst. Steklov.*, **90**, 1967 , 1-235.
- [21] Manning, A. There are no new Anosov diffeomorphisms on tori. *Amer. J. of Math.* **96**,1974, 422-429.
- [22] Acevedo, J. J. M.; Local stable and unstable manifolds for Anosov families, *arXiv preprint arxiv:1709.00636*, 2017.
- [23] VICK, J.W. Homology theory An Introduction to algebraic topology. *2. ed. New York: Springer-Verlag*, 1994.
- [24] Oliveira, K.; Viana, M.; Fundamentos da teoria ergódica, *SBM*, 2014.
- [25] Mañé, R.; Introdução à teoria ergódica, *IMPA*, 1983.

Índice Remissivo

- p -simplexo padrão, 87
- abertura do operador, 67
- agrupamento, 13
- alfabetos, 23
- aplicação Anosov linear, 7
- aplicação característica, 93
- aplicação shift, 24
- automorfismo no toro, 7
- autovetores dominantes, 76

- bordo, n -bordo, 89

- célula, 93
- cadeia, n -cadeia, 88
- caminho permitido, 23
- ciclos homólogos, 90
- ciclos, n -ciclo, 89
- cilindro, 25
- cilindro fino, 25
- cilindro genérico, 26
- classe de homologia, 89
- coeficiente de contração do operador, 67
- complexo de cadeia, 90
- componente do espaço total, 9

- condição autovetor de Perron-Frobenius, 72
- condição de Markov, 21
- cone, 62
- cone convexo, 62
- cone positivo, 62
- conjugação limitada, 15
- conjunto clopen, 25
- constante de Lipschitz, 38
- contração, 38
- contração fraca, 67
- contribuição, 58
- coordenadas canônicas, 20
- cubo singular, 88
- CW-complexo regular, 95

- decomposição regular, 74
- diagrama aditivo, 32
- diagrama de arestas simples, 31
- diagrama de Bratteli, 31
- diagrama de rotulação arestas, 31
- diagrama de rotulação vértices, 31
- diagrama microscopado, 33
- diagrama não degenerado, 31

- diagrama telescopado, 33
 dispersão, 13
 distância Hausdorff, 39
 espaço shift de arestas, 32
 espaço shift de vértices, 31
 espaço total, 24
 fórmula de künneth, 99
 família Anosov, 11
 família Anosov finita, 46
 família constante, 10
 família de aplicações, 9
 família de aplicações inversível, 9
 família estritamente Anosov, 12
 família eventualmente Anosov, 13
 família hiperbólica, 12
 família identidade, 10
 família inversa, 12
 focussing, sequência, 72
 fractile, 40
 grupo abeliano graduado, 86
 grupo abeliano livre, 86
 grupo de cadeias do par (X,A) , 91
 grupo de homologia, 89
 grupo de homologia orientado, 96
 grupo de homologia relativa, 92
 grupo de homologia singular, 89
 homologia singular do complexo de cadeia, 91
 IFS Markoviano, 39
 junção, 18
 métrica projetiva, 65
 métrica word, 25
 matriz de transição, 23
 matriz reduzida, 23
 mixing não-estacionário, 81
 partição, 18
 partição agrupada, 19
 partição agrupada aumentada, 19
 partição de Markov, 21
 partição geradora, 18
 partição ordenada, 18
 ponto de densidade, 83
 ponto fixo sequencial do IFS Markoviano, 42
 pré-fractile, 44
 produto fraco, 86
 propriedade geométrica de Markov, 22
 retângulo próprio, 21
 rotulação aditiva, 32
 s-sub-retângulos, 23
 símbolo, 23
 semi-conjugação uniforme, 10
 sequência de autovalores dominantes, 76

- sequência de autovetores, 70
- sequência fractile, 40
- sequência geometricamente Perron-Frobenius,
73
- sequência primitiva, 36
- sequência reduzida, 24
- simplexo, p-simplexo, 87
- sntf, 24
- subshift estacionário, 24
- subshift não-estacionário do tipo finito, 24
- subshift não-estacionário unilateral, 26
- suporte, 97
- topologia fraca, 94
- topologicamente mixing, 81
- transformação linear positiva, 62
- u-sub-retângulos, 23