Operadores diferenciais globalmente hiperbólicos

Sebastián Javier Vidal

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática Aplicada**
Orientador: **Prof. Dr. Frank Michael Forger**

São Paulo, agosto de 2013

Operadores diferenciais globalmente hiperbólicos

Esta tese é a versão original do trabalho do aluno (Sebastián Javier Vidal).

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Frank Michael Forger (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr.
- Prof. Dr.
- Prof. Dr.
- Prof. Dr.

Resumo

Nesta tese, iniciamos o desenvolvimento de uma teoria de sistemas de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem, no âmbito geométrico normalmente utilizado em análise global, que se basea numa extensão da noção de um operador hiperbólico simétrico originalmente devida a Friedrichs. Essa extensão permite incluir, como exemplo paradigmático, o operador de Dirac em uma variedade lorentziana e, ao mesmo tempo, provar os resultados básicos usuais sobre existência e unicidade de soluções, assim como a boa postura, do problema de Cauchy em espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Análise global, Sistemas hiperbólicos, Operador de Dirac.

Abstract

In this thesis, we initiate the development of a theory of systems of linear partial differential equations of first order, within the geometric framework commonly employed in global analysis, which is based on an extension of the notion of a symmetric hyperbolic operator originally due to Friedrichs. This extension allows to include, as a paradigmatic example, the Dirac operator on a lorentzian manifold and, at the same time, prove the usual basic results about existence and uniqueness of solutions, as well as well-posedness, of the Cauchy problem on globally hyperbolic space-times.

Keywords: Partial differential equations, Global analysis, Hyperbolic systems, Dirac operator.

Conteúdo

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é discutir, em um contexto geométrico, o conceito de hiperbolicidade para (sistemas de) equações diferenciais parciais. Mais especificamente, consideraremos aqui equações e operadores *lineares de primeira ordem*, sendo que a extensão a sistemas de ordem superior e ao caso não-linear seria assunto de um outro trabalho, posterior.

Dentro de uma abordagem geométrica, ou ainda, do ponto de vista da análise global, equações diferenciais (lineares) são formuladas usando operadores diferenciais (lineares), que atuam nas seções de um determinado fibrado vetorial sobre uma determinada variedade base e as transformam em seções de um outro (ou até o mesmo) fibrado vetorial sobre a mesma variedade base. Essa linguagem, além de conferir um inegável grau de elegância ao assunto, garante que princípios importantes da Física como *covariância geral* (= invariância sob transformações de coordenadas locais na variedade base) e *invariância de calibre* (= invariância sob mudanças de trivializações locais dos fibrados vetoriais envolvidos) sejam automaticamente respeitados.

A mais importante área em equações diferenciais parciais que há muitos anos se encontra firmemente estabelecida nestes termos é a teoria dos operadores *elípticos*, parcialmente talvez em função da sua íntima conexão com questões de geometria e topologia, através do teorema do índice de Atiyah e Singer. A definição do conceito de um operador elíptico é conceitualmente simples e ao mesmo tempo suficientemente abrangente para viabilizar o desenvolvimento de toda uma teoria sofisticada.

Infelizmente, e talvez surpreendentemente, nada disso é verdade quando perguntamos por uma teoria de operadores *hiperbólicos* nestes moldes, começando pelo fato de que, aparentemente, não existe nem uma definição do conceito de operador hiperbólico que se comparasse em abrangência e elegância com a de um operador elíptico. O que se encontra na literatura é uma profusão de definições diferentes (ou seja, inequivalentes), entre as quais podemos citar as noções de fracamente hiperbólico, fortemente hiperbólico, estritamente hiperbólico, regularmente hiperbólico, normalmente ou pré-normalmente hiperbólico, efetivamente hiperbólico, constantemente hiperbólico, simétrico hiperbólico e simetrizável hiperbólico.[1] Mas todas elas são formuladas apenas no espaço plano $\mathbb{R}^n$ e em muitos casos não é claro como estendê-las a variedades base mais gerais, pois dependem de escolhas adicionais e um tanto artificiais, tais como (a) uma separação explícita das n variáveis independentes em uma, chamada de tempo, e as $n-1$ demais, chamadas de espaciais, o que corresponde a uma decomposição do espaço-tempo em espaço + tempo, permitindo usar técnicas de operadores de evolução, ou (b) a escolha implícita de uma base no espaço das variáveis dependentes; notamos que essas escolhas costumam ser feitas sem preocupação alguma com o que acontece quando se efetua uma mudança de coordenadas. E algumas dessas definições de hiperbolicidade ainda sofrem de um outro defeito: quando envolvem o símbolo total do operador e não apenas o seu símbolo principal, corre-se o risco de violar o princípio de estabilidade, segundo o qual pequenas perturbações de operadores hiperbólicos deveriam continuar sendo operadores hiperbólicos, o que pode levar a uma falta de causalidade. Isso ocorre no caso do conceito de hiperbolicidade em relação a uma determinada variável temporal, ou a um semi-espaço, discutido em [56], por exemplo.

Uma das consequências do trabalho aqui apresentado, e talvez a mais importante de todas, é que entre os diversos conceitos, surgiu um que se mostrou melhor – e por muito – do que os demais: o de um operador simétrico hiperbólico ou simetrizável hiperbólico (como veremos a seguir, em uma abordagem geométrica, a diferença entre as duas noções desaparece). Neste sentido, a definição de hiperbolicidade que adotaremos no presente trabalho não é completamente nova: o que é novo são a linguagem e a perspectiva em que ela é apresentada, assim como seu grau de abrangência. O desafio que se coloca consiste em provar que propriedades essenciais de equações hiperbólicas, como existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy e sua boa postura, são preservadas sob essa extensão.

De forma bastante geral, a metodologia para tratar de sistemas de equações diferenciais parciais (lineares) que adotaremos aqui é a mesma que se tornou padrão na área de análise global: consiste em representar tais sistemas em termos de operadores diferenciais (lineares)

$$P:\ \Gamma(E)\ \longrightarrow\ \Gamma(F) \tag{1}$$

onde E e F são fibrados vetoriais sobre uma mesma variedade base M,[2] digamos com projeções $\pi_E : E \longrightarrow M$ e $\pi_F : F \longrightarrow M$ e fibras típicas $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$, respectivamente, sendo que $\Gamma(V)$ denota o espaço das seções suaves de um fibrado V; também usaremos a notação $\Gamma^\infty(V)$ ou até $C^\infty(M,V)$ quando queremos especificar o grau de diferenciabilidade. Os espaços e fibrados vetoriais envolvidos podem ser reais ou complexos, e para evitar repetições cansativas, denotaremos o corpo base pertinente por $\mathbb{K}$ e diremos que, dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, uma forma $\langle\,.\,,.\,\rangle$ de grau 2 sobre V é *sesquilinear* se ela é antilinear no primeiro argumento e linear no segundo argumento quando $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e se é bilinear no sentido usual quando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. De modo semelhante, diremos que tal

[1] Uma referência boa para se ter uma ideia geral do estado da arte no final do século 20 é o artigo de Garding [22].

[2] Todas as variedades e todos os fibrados que aparecem neste trabalho serão sempre de classe C^∞, sem menção explícita.

forma é *hermiteana* se ela é hermiteana e sesquilinear quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e se é simétrica e bilinear quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sendo que, em ambos os casos, os conceitos de uma forma hermiteana não-degenerada e de uma forma hermiteana positiva definida ou semi-definida são definidos da maneira usual. Finalmente, dada uma transformação linear A em um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de uma forma hermiteana não-degenerada $\langle\,.\,,.\rangle$, definimos seu *adjunto* (em relação a esta forma) como sendo a transformação linear A^* definida por $\langle A^*u, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, e diremos que A é *hermiteana*, no caso da forma ser positiva definida, ou *pseudo-hermiteana*, no caso da forma ser apenas não-degenerada, quando vale $A^* = A$.[3] No âmbito de fibrados vetoriais V, a terminologia será completamente análoga, substituindo formas por métricas nas fibras (veja a Definição 1.1) e transformações lineares por seções do fibrado $L(V)$ (também denotado por $\mathrm{End}(V)$).

Posto isso, voltemos a considerar operadores P lineares como na equação (1): diz-se que P é um *operador diferencial* de ordem k, representando um sistema de r equações diferenciais de ordem k em n variáveis independentes e para N variáveis dependentes, onde $n = \dim M$, $N = \dim \mathbb{E}$ e $r = \dim \mathbb{F}$ se, em termos de coordenadas locais de M e trivializações locais de E e F, todas sobre um aberto U de M, digamos, vale

$$P \;=\; \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial_\alpha \qquad \text{onde} \qquad a_\alpha \in C^\infty(U, \mathrm{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}))\;. \tag{2}$$

Um conceito fundamental na teoria é o do *símbolo principal* de P, que é um homomorfismo de fibrados vetoriais

$$\sigma_P :\; \bigvee^k T^*M \;\longrightarrow\; L(E,F) \tag{3}$$

sobre M, onde $\bigvee^k T^*M$ denota a k-ésima potência simétrica do fibrado cotangente de M. Isso significa que em cada ponto x de M, $\sigma_P(x)$ é um polinômio homogêneo de grau k sobre o espaço cotangente T_x^*M a valores no espaço $L(E_x, F_x)$ das aplicações lineares da fibra E_x na fibra F_x, sendo que em termos de coordenadas locais de M e trivializações locais de E e F, todas sobre um aberto U de M, como antes, temos

$$\sigma_P(x,\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \qquad \text{para} \quad x \in U\,,\; \xi \in (\mathbb{R}^n)^*\;. \tag{4}$$

Notamos de passagem que o símbolo completo do operador P, que teria a forma local

$$\sigma(x,\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \qquad \text{para} \quad x \in U\,,\; \xi \in (\mathbb{R}^n)^*\;, \tag{5}$$

não admite uma formulação global usando apenas o fibrado cotangente T^*M: para isso, é necessário considerar o fibrado dos jatos de ordem k. Mas como neste trabalho, só usaremos o símbolo principal, não vemos necessidade de discutir essa questão em maiores detalhes.

[3] Aqui, usamos o símbolo $.^*$ de uma forma bem genérica, como também acontece na teoria das álgebras C^*, por exemplo.

Para fins do presente trabalho, imporemos duas restrições importantes sobre os operadores a serem estudados.

1. Consideraremos apenas operadores de primeira ordem ($k = 1$).
2. Consideraremos apenas operadores que levam um determinado fibrado vetorial E em si ($F = E$).

Para operadores deste tipo, usaremos, de agora em diante, a notação de Feynman, denotando um tal operador por

$$\not{D} : \ \Gamma(E) \ \longrightarrow \ \Gamma(E) \ , \tag{6}$$

ao invés de P, e seu símbolo principal por

$$\gamma : \ T^*M \ \longrightarrow \ L(E) \ , \tag{7}$$

ao invés de $\sigma_{\not{D}}$. Motivam-se essas escolhas pelo desejo de reservar o símbolo D para a derivada covariante em relação a uma conexão linear e de assemelhar nossa notação à notação padrão usada no caso do operador de Dirac. Na verdade, podemos chamar tais operadores de *operadores do tipo Dirac*, pois se escolhermos qualquer conexão linear $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M, E)$ em E, temos a decomposição

$$\not{D} \ = \ \gamma^\mu D_\mu + \rho \tag{8}$$

com $\gamma \in \Gamma(TM \otimes L(E))$ e $\rho \in \Gamma(L(E))$, onde

$$\gamma(\xi) \ = \ \xi_\mu \gamma^\mu \qquad \text{para} \quad \xi \ = \ \xi_\mu \, dx^\mu \tag{9}$$

(Para provar isso, basta observar que se γ é o símbolo principal de $\not{D}$ e D é uma conexão linear, então $\not{D} - \gamma^\mu D_\mu$ é necessariamente um operador diferencial de ordem 0.) Claramente, tal decomposição constitui um método de separar os termos de ordem 1 dos termos de ordem 0 que é melhor do que a separação sugerida pela representação (2), pois independe da esolha de coordenadas e trivializações locais: depende tão somente da escolha de uma conexão linear em E, que em muitos casos é proporcionada pelo contexto. A principal característica que distingue os operadores do tipo Dirac contemplados aqui do operador de Dirac comum é que, pelo menos "a priori", não impomos nenhuma restrição algébrica sobre γ: o operador de Dirac comum é obtido quando exigirmos que γ satisfaça a *álgebra de Clifford*

$$\gamma(\xi)\gamma(\eta) + \gamma(\eta)\gamma(\xi) \ = \ 2\, \boldsymbol{g}(\xi, \eta)\, 1_E \qquad \text{para} \quad \xi, \eta \in T^*M \tag{10}$$

em relação a alguma métrica (normalmente riemanniana ou lorentziana) $\boldsymbol{g}$ sobre M.

Dito isso, lembremos da seguinte definição, válida neste contexto geométrico geral: *$\not{D}$ é* ***elíptico*** *se $\gamma(\xi) \in GL(E)$ (ou seja, $\det \gamma(\xi) \neq 0$) para todo $\xi \in T^*M \backslash \{0\}$.*

Assim, uma pergunta que surge naturalmente e à qual responderemos neste trabalho é a seguinte: Neste mesmo contexto geométrico geral, *quando que podemos dizer que $\not{D}$ é* ***hiperbólico****, e em que sentido?*

Um dos grandes problemas com as diversas definições da noção de hiperbolicidade (para sistemas de primeira ordem) que encontramos na literatura é que nenhuma delas é colocada neste âmbito: são todas formuladas no espaço plano $\mathbb{R}^n$ e usando matrizes explícitas, ou seja, em termos de representações locais, aparentemente sem preocupação com a questão de sua dependência da escolha das coordenadas ou trivializações locais. Além disso, algumas delas são até contraditórias entre si, no sentido de que diferentes autores usam o mesmo termo para noções diferentes e diferentes termos para a mesma noção. Portanto, fez-se necessário escolher uma delas e descartar as demais. Para tanto, adotamos uma série de critérios:

(a) a possibilidade de reformular a definição de modo a se tornar independente da escolha de coordenadas e/ou trivializações locais;

(b) a exigência de que a definição envolva apenas o símbolo principal do operador, evitando assim os já mencionados problemas de falta de estabilidade sob perturbações do operador por termos de ordem inferior (ou seja, de ordem 0, no presente caso), e até de causalidade;

(c) a possibilidade de provar existência e unicidade de soluções, assim como boa postura do problema de Cauchy, e de construir funções de Green com propriedades adequadas (tais como as retardadas e avançadas);

(d) a exigência de que a definição seja suficientemente abrangente para contemplar os operadores principais da Física Matemática, sobretudo o operador de Dirac.

Felizmente, e talvez até surpreendentemente, este procedimento nos deixou com uma única opção: é a noção de um operador *simétrico hiperbólico* ou *simetrizável hiperbólico*. Para reformulá-la em termos geométricos, torna-se necessário fazer uso de uma estrutura geométrica adicional no fibrado vetorial E no qual atua o operador, a saber, uma métrica nas fibras. Isso não deve causar nenhuma surpresa: afinal, já em álgebra linear, a noção de operador simétrico faz referência a algum produto escalar. A grande diferença em relação ao caso elíptico é que, no caso mais geral aqui considerado, essa métrica nas fibras *não* é positiva definida! No caso do operador de Dirac, tal estrutura é muito bem conhecida: estamos falando do "produto escalar" entre espinores, digamos ψ_1 e ψ_2, que normalmente denotado por $\overline{\psi_1}\,\psi_2$ em qualquer livro de mecânica quântica relativística ou de teoria quântica dos campos. Ademais, com essa estrutura à disposição, a distinção entre "simétrico" e "simetrizável" normalmente feita na literatura [4,51] torna-se circunstancial, pois como veremos no Capítulo 1, é apenas uma questão das propriedades das trivializações envolvidas: quando usamos uma trivialização compatível com a métrica nas fibras, obtemos um operador simétrico, e quando não, apenas um operador simetrizável.

Um dos principais defeitos das diversas definições do conceito de hiperbolicidade que se encontram na literatura reside no fato de que, em sua grande maioria, fazem uma escolha “a priori” da variável temporal, o que colide frontalmente com os princípios da relatividade – seja a restrita, seja a geral. Neste contexto, é interessante observar que o trabalho original de Friedrichs [21] sobre sistemas simétricos hiperbólicos, onde o conceito é introduzido e os teoremas básicos de existência e unicidade de soluções são provados, *não* faz uma distinção explícita da variável tempo, pois não a usa como parâmetro, o que indica que esta teoria foi, nas suas origens, formulada geometricamente. Porém, em quase todos os trabalhos posteriores sobre o assunto, tal distinção é feita, principalmente no intuito de aplicar técnicas de equações de evolução, mas sem abordar a questão da invariância do procedimento em relação a uma mudança de tal escolha. As poucas exceções conhecidas pelo autor do presente trabalho são algumas idéias colocadas nos trabalhos de Geroch [24] e de Reula [48], assim como no primeiro volume da série de livros de Taylor [51]; porém, essa discussão é conduzida ao âmbito de variedades de Lorentz, o que não deixa de restringir sua aplicabilidade, uma vez que existem exemplos importantes de equações e sistemas hiperbólicos onde não há uma estrutura lorentziana definida a priori. Assim, podemos dizer que um aspecto importante do espírito do trabalho original de Friedrichs se perdeu na subsequente pesquisa e precisa ser recuperado!

De passagem, queremos enfatizar que a situação é bem diferente no caso de equações ou sistemas de equações *parabólicas*. Neste caso, o espaço-tempo é modelado por uma variedade da forma $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ é uma variedade n-dimensional (tipicamente munida de uma métrica riemanniana) que representa o espaço, sendo que a projeção de M sobre o fator $\mathbb{R}$ proporciona uma função tempo t que é *canônica*, representando o *tempo absoluto* de Newton, cujas superfícies de nível proporcionam uma folheação do espaço-tempo por superfícies de Cauchy $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$. Exemplos típicos e muito bem conhecidos são a equação do calor ou, mais recentemente, o fluxo de Ricci em variedades riemannianas. Ocorre que encontramos uma situação semelhante quando estudamos sistemas de equações hiperbólicas em variedades lorentzianas M que são *globalmente hiperbólicas*, pois estas também admitem uma decomposição da forma $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$. Porém, neste caso, tal decomposição está longe de ser canônica ou mesmo única, pois como nos ensina a teoria da relatividade, observadores diferentes (no sentido de cada um estar se movendo em relação ao outro) usam referenciais diferentes com funções tempo diferentes. Assim, se cada observador usar o seu *tempo próprio*, surge um problema de *covariância* (que simplesmente não existe para sistemas parabólicos): como podemos controlar o comportamento de suas soluções sob mudanças dessa escolha? Certamente, deste ponto de vista, procurar por soluções de um problema de Cauchy para equações hiperbólicas no espaço-tempo plano $\mathbb{R}^n$ que pertençam a espaços tais como $L^2([0,t], H^r(\mathbb{R}^{n-1}))$ não faz o menor sentido, exceto para $r = 0$.

A resposta a esta pergunta é clássica e bem conhecida: consiste em abrir mão de usar um tempo específico como parâmetro, ou mais geometricamente, uma decomposição específica do espaço-tempo da forma $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$, uma vez que diferentes decomposições correspondem a diferentes escolhas do isomorfismo $\cong$. Entre outras coisas, isso requer formular questões de existência e unicidade de soluções apenas no âmbito de espaços de seções de fibrados vetoriais E sobre variedades M que possam ser definidos independentemente da escolha de coordenadas e trivializações locais, o que, aliás, exclui os espaços de Sobolev H^r tradicionais, cuja definição em variedades M não compactas depende da escolha de estruturas adicionais, a saber, uma métrica nas fibras de E e uma forma de volume (ou, no caso não orientável, uma densidade) sobre M e ainda, para $r > 0$, uma conexão linear em E.

Mesmo com o critério da "possibilidade de geometrização" em mente, ainda restam algumas noções de hiperbolicidade na literatura que apresentam outros tipos de defeito. Por exemplo, existe a noção de hiperbolicidade fraca, mas esta proporciona apenas um critério necessário para a existência e unicidade de soluções, que não é suficiente. Também podemos mencionar a noção de hiperbolicidade estrita, que descartamos desde o início porque a hipótese de autovalores simples (ou seja, de multiplicidade 1) não permite incluir nem o operador de Dirac. E por final, a noção de hiperbolicidade normal também não é suficientemente abrangente porque exclui sistemas que não estão intimamente ligados com a geometria lorentziana mas que aparecem em aplicações provindas da dinâmica de fluidos ou mesmo do eletromagnetismo (neste caso, na descrição do fenômeno da birrefringência).

Queremos encerrar as considerações gerais desta introdução por alguns comentários sobre as duas restrições mencionadas acima sobre os sistemas considerados nesta tese, a saber, a restrição a sistemas de primeira ordem e a restrição a operadores que transformam seções de um determinado fibrado vetorial em seções do mesmo fibrado vetorial.

Primeiro, é claro que, pelo menos em princípio, sistemas de ordem mais alta podem sempre ser reduzidos a sistemas (maiores) de primeira ordem: este é um procedimento muito bem conhecido na teoria das equações diferenciais ordinárias. A questão é que tal redução pode ser efetuada de diferentes formas, e o comportamento do conceito de hiperbolicidade sob tal redução não é claro. O mesmo fenômeno já ocorre até com o conceito de um operador elíptico, onde o problema pode ser exibido com mais clareza ainda, devido à disponibilidade de uma definição clara e simples de elipticidade para operadores de qualquer ordem. Como exemplo elementar, considere o problema de autovalor de Laplace no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, representado pela equação escalar de segunda ordem

$$(\Delta + m^2)\,\varphi \;=\; 0\;, \tag{11}$$

e a sua redução ao seguinte sistema de $n+1$ equações de primeira ordem,

$$\nabla\varphi \,-\, A \;=\; 0 \quad , \quad \nabla\cdot A \,+\, m^2\varphi \;=\; 0\;, \tag{12}$$

que pode ser escrito na forma

$$(\gamma\cdot\nabla + \rho)\,\phi \;=\; 0\;, \tag{13}$$

para

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} \varphi \\ A \end{pmatrix}, \tag{14}$$

com matrizes $\gamma(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ e ρ definidas por

$$\gamma(\xi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \xi^T \\ -\xi & 0_n \end{pmatrix} \quad , \quad \rho \;=\; \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Então apesar do operador $\Delta + m^2$ ser elíptico, o correspondente sistema de primeira ordem não é elíptico quando $n > 1$, pois neste caso, *todas* as matrizes $\gamma(\xi)$ são singulares, pois $\gamma(\xi)$ tem como núcleo os vetores de $\mathbb{R}^{n+1}$ da forma $\binom{0}{\eta}$ onde $\eta \in \xi^\perp$. Sendo assim, concluímos que a redução de um operador elíptico pode produzir um sistema de primeira ordem que não é elíptico, e o mesmo procedimento aplicado à equação de Klein-Gordon no espaço de Minkowski mostra que a redução de um operador hiperbólico pode produzir um sistema de primeira ordem que não é hiperbólico – uma observação importante na medida em que nos coloca perante o desafio de encontrar critérios para identificar quais reduções são “boas” e quais não. Desenvolver tais critérios constitui um problema interessante que certamente requer um estudo mais detalhado, inclusive quanto à literatura já existente sobre o tema, mas que ultrapassaria os limites da presente tese.

A segunda restrição é que consideramos apenas operadores diferenciais como na equação (1) onde os fibrados vetoriais E e F envolvidos sejam iguais, como indicado na equação (6). (Na verdade, é suficiente supor que sejam isomorfos, pois nesta hipótese podemos usar qualquer isomorfismo entre eles para identificá-los, sendo que a composição de um operador diferencial (linear) com um homomorfismo de fibrados vetoriais produz outro operador diferencial (linear), da mesma ordem.) É claro que há situações mais gerais e muito importantes onde os fibrados E e F têm dimensões distintas, sendo que $\dim E$ representa o número de variáveis dependentes enquanto que $\dim F$ representa o número de equações impostas: um exemplo típico e de suma importância são as equações de Maxwell que envolvem 8 equações para 6 funções de 4 variáveis. Obviamente, um tal sistema será sobredeterminado (quando $\dim F > \dim E$) ou subdeterminado (quando $\dim F < \dim E$) – se bem que ainda existe a possibilidade dele ser sobredeterminado e subdeterminado ao mesmo tempo, mesmo quando $\dim F = \dim E$. De qualquer modo, sistemas sobredeterminados são caracterizados pela presença de *vínculos* e sistemas subdeterminados pela presença de uma liberdade de se efetuar *transformações de calibre*. Um tratamento completo do conceito de hiperbolicidade deveria abranger todas essas situações, uma vez que só assim é possível incluir todos os exemplos interessantes da Física Matemática, mas isso permanece uma meta que está claramente além do alcance do presente trabalho.

Capítulo 1

Operadores globalmente hiperbólicos

Neste capítulo vamos introduzir o conceito central deste trabalho e objeto fundamental do nosso estudo: os operadores globalmente hiperbólicos, que são definidos usando uma extensão do conceito de operadores diferenciais hiperbólicos simétricos lineares (de primeira ordem), definidos num fibrado vetorial. Esta noção de hiperbolicidade, já bem conhecida no espaço plano $\mathbb{R}^n$, será concebida usando propriedades algébricas do símbolo principal do operador, que é um homomorfismo de fibrados vetoriais representando o comportamento dos termos de primeira ordem do operador. Sendo assim, acreditamos que a extensão para operadores quase-lineares seja quase que imediata.

Começamos por uma breve discussão que serve para motivar, no contexto geométrico já descrito na introdução, a definição a ser adotada aqui. Lembremos que estamos considerando operadores diferenciais lineares $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ de primeira ordem em algum fibrado vetorial E sobre uma variedade base M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$. Uma ferramenta fundamental na teoria de tais operadores é a noção de uma *métrica nas fibras* de E, a ser introduzida formalmente na Definição 1.1, e aqui denotada por

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \longmapsto & \overline{u}\,v \end{array} , \tag{1.1}$$

sendo que utilizaremos a mesma notação para o pareamento correspondente entre seções,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (\psi,\psi') & \longmapsto & \overline{\psi}\,\psi' \end{array} . \tag{1.2}$$

Outra ferramenta fundamental são as *estimativas "a priori"*, que são estimativas, em regiões compactas K de M, digamos, da norma da solução ψ da equação $\not{D}\psi = f$ em termos da norma de f e da norma da restrição de ψ ao bordo ∂K de K, ou até apenas em alguma parte do bordo ∂K de K, em certos espaços de Sobolev. Na teoria dos operadores elípticos, a métrica nas fibras é positiva definida e serve para definir produtos escalares em espaços de seções de E em relação aos quais os operadores considerados são auto-adjuntos, de modo que se pode aplicar toda a teoria espectral, enquanto que as estimativas a priori são usadas, por exemplo, para provar teoremas de regularidade. No caso dos operadores hiperbólicos, tais estimativas costumam ser chamadas de "estimativas de energia" e são usadas, por exemplo, para provar existência e unicidade de soluções e boa postura do problema de Cauchy. Mas como veremos no Capítulo 2, essas desigualdades decorrem da existência de um campo cotangente $\tau \in \Gamma(T^*M)$ tal que o símbolo principal γ de $\not{D}$, quando avaliado sobre τ, proporciona uma nova métrica nas fibras,

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \longmapsto & \overline{u}\,\gamma(\tau)\,v \end{array} \tag{1.3}$$

que é positiva definida (note-se, de passagem, que tal campo cotangente está longe de ser único). O problema é que, geralmente, não é possível satisfazer as condições de positividade dos dois pareamentos (1.1) e (1.3) ao mesmo tempo. Este fenômeno ocorre em muitos casos de interesse, sendo que uma das equações mais importantes da Física Matemática, a saber, a equação de Dirac, não satisfaz esta hipótese.[1] Mas o problema pode ser contornado relaxando a condição de positividade do pareamento (1.1), exigindo que ele seja apenas *não-degenerado*. Por outro lado, é claro que podemos sempre introduzir também uma métrica nas fibras *auxiliar*

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \longmapsto & u^\dagger v \end{array} , \tag{1.4}$$

que é positiva definida, o que se torna necessário inclusive para definir a topologia dos espaços de Sobolev empregados na teoria, sendo que, mais uma vez, utilizaremos a mesma notação para o pareamento correspondente entre seções,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (\psi,\psi') & \longmapsto & \psi^\dagger \psi' \end{array} . \tag{1.5}$$

De modo geral, quando temos duas métricas nas fibras, uma como na equação (1.4), que é positiva definida, e outra como na equação (1.1), que é apenas não-degenerada, podemos relacioná-las por um campo de automorfismos $\theta \in \Gamma(GL(E))$, conforme

$$\overline{u}\,v \;=\; u^\dagger \theta v \qquad \text{ou} \qquad \overline{\psi}\,\psi' \;=\; \psi^\dagger \theta \psi' \tag{1.6}$$

A diferença principal entre as duas, pelo menos no caso de operadores de origem geométrica como o operador de Dirac, é que o pareamento (1.1) é canônico, sendo que o símbolo principal γ toma valores no fibrado das transformações lineares de E que são (pseudo-)hermiteanas em relação a ele, enquanto que o pareamento (1.4) não goza de tais propriedades de compatibilidade. Na verdade, poderíamos até escolher o pareamento (1.4) como sendo igual ao pareamento (1.3), mas isso não remove a ambiguidade inerente na sua escolha, pois como já foi mencionado, o campo cotangente τ empregado na definição do pareamento (1.3) está longe de ser único e uma identificação específica pode não trazer nenhuma informação adicional. De qualquer modo, veremos a seguir que o campo de

[1] Veja o Exemplo 1.5.

automorfismos θ que relaciona as duas métricas nas fibras, já no ambiente do espaço plano $\mathbb{R}^n$, proporciona uma maneira diferente de entender o conceito do *simetrizador* de um sistema hiperbólico simetrizável, exceto pelo fato – e esta é a principal novidade – que não exigimos que este seja positivo definido.

Feita essa breve motivação, procedemos a um tratamento mais formal.

1.1 Métricas tipo Dirac hiperbólicas

Começamos por introduzir uma série de definições para podermos formular o critério que permite decidir se um operador é hiperbólico simétrico. Além disso, estes conceitos são importantes para discutir as possíveis noções de causalidade associadas ao sistema, o que será feito na Seção 1.3.

Definição 1.1 *Seja E um fibrado vetorial sobre M. Dada uma aplicação suave como na equação (1.1), dizemos que ela é uma* ***métrica nas fibras em*** *E se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Ela é sesquilinear nas fibras, i.e., para todo $m \in M$, vale*

$$\begin{aligned} \overline{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}\, v &= \lambda_1^* \, \overline{u_1}\, v + \lambda_2^* \, \overline{u_2}\, v \quad \textit{para } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\,,\ u_1, u_2, v \in E_m \\ \overline{u}\,(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= \mu_1 \, \overline{u}\, v_1 + \mu_2 \, \overline{u}\, v_2 \quad \textit{para } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}\,,\ u, v_1, v_2 \in E_m \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. *Ela é pseudo-hermiteana nas fibras, i.e., para todo $m \in M$, vale*

$$\overline{u}\, v = (\overline{v}\, u)^* \quad \textit{para } u, v \in E_m\ . \tag{1.8}$$

3. *Ela é não-degenerada, i.e., para todo $m \in M$ e todo $u \in E_m$, vale*

$$\begin{aligned} \overline{u}\, v = 0 \ \ \textit{para todo } v \in E_m \implies u = 0 \\ \overline{v}\, u = 0 \ \ \textit{para todo } v \in E_m \implies u = 0 \end{aligned}\ . \tag{1.9}$$

Na literatura, adota-se frequentemente, como parte da definição do conceito de uma métrica nas fibras, a condição de que ela seja positiva definida. Enfatizamos que no presente trabalho, *não* seguiremos essa convenção.

A seguir, precisaremos do conceito de *adjunto* de uma transformação linear, tanto fibra por fibra como em nível de seções, em relação a uma métrica nas fibras. Dada uma métrica nas fibras de E como na Definição 1.1 e um ponto qualquer $m \in M$, o *adjunto* de uma transformação linear $A \in L(E_m)$ é a transformação linear $\overline{A} \in L(E_m)$ definida por

$$\overline{u}\,(\overline{A} v) = \overline{Au}\, v \quad \text{para } u, v \in E_m\ , \tag{1.10}$$

e da mesma forma, o *adjunto* de um campo de endomorfismos $A \in \Gamma(L(E))$ é o campo de endomorfismos $\overline{A} \in \Gamma(L(E))$ definido por

$$\overline{\psi}\,(\overline{A}\psi') \;=\; \overline{A\psi}\,\psi' \quad \text{para } \psi, \psi' \in \Gamma(E)\ . \tag{1.11}$$

Como já foi mencionado na introdução deste capítulo, trabalharemos frequentemente com duas métricas nas fibras ao mesmo tempo, de modo que também teremos que lidar com dois tipos de adjunto: o adjunto em relação à da equação (1.1), que denotaremos por $\overline{\,.\,}$, como antes, e o adjunto em relação à da equação (1.4), que denotaremos por $.^\dagger$, de modo que temos as seguintes equações análogas às anteriores,

$$u^\dagger A^\dagger v \;=\; (Au)^\dagger v \quad \text{para } u, v \in E_m\ , \tag{1.12}$$

e

$$\psi^\dagger A^\dagger \psi' \;=\; (A\psi)^\dagger \psi' \quad \text{para } \psi, \psi' \in \Gamma(E)\ . \tag{1.13}$$

Então é claro que o campo de automorfismos θ que relaciona as duas métricas nas fibras, conforme a equação (1.6), é simultaneamente hermiteano e pseudo-hermiteano:

$$\theta^\dagger = \theta \quad , \quad \overline{\theta} = \theta\ . \tag{1.14}$$

Além disso, temos a seguinte relação entre os dois tipos de adjunto:

$$\overline{A} \;=\; \theta^{-1} A^\dagger \theta\ . \tag{1.15}$$

O motivo deste procedimento é que cada uma dessas duas métricas nas fibras possui uma vantagem e um defeito: a da equação (1.4) é positiva definida mas não é compatível com o símbolo principal do operador considerado, enquanto que para a da equação (1.1), a situação é exatamente a oposta. Introduziremos mais um pouco de terminologia para melhor caracterizar essa situação.

Definição 1.2 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E. Uma métrica nas fibras em E como na Definição 1.1 é chamada uma **métrica tipo Dirac** em E (associada a γ)[2] se γ tomar valores nas transformações lineares pseudo-hermiteanas em relação a ela, i.e., se vale*

$$\overline{\gamma(\xi)} \;=\; \gamma(\xi) \quad \textit{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M)\ . \tag{1.16}$$

Em termos da métrica nas fibras auxiliar, essa condição de pseudo-hermiticidade se traduz na seguinte condição de hermiticidade:

$$\big(\theta\gamma(\xi)\big)^\dagger \;=\; \theta\gamma(\xi) \quad \text{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M)\ . \tag{1.17}$$

[2]Para evitar um excesso de atributos, omitimos a expressão “nas fibras”, quando não houver perigo de confusão.

Usando a identidade (1.14), também podemos escrevê-la na seguinte forma:

$$\gamma(\xi)^\dagger \;=\; \theta\,\gamma(\xi)\,\theta^{-1} \quad \text{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M)\ . \tag{1.18}$$

Segue que as matrizes $\gamma(\xi)$ e $\gamma(\xi)^\dagger$, sendo semelhantes, têm o mesmo espectro, o que significa que as raízes do símbolo principal γ vêm em pares complexos conjugados.

Quando dizemos que uma determinada métrica tipo Dirac é "associada" a um determinado símbolo principal, sugere-se que a condição (1.16) de pseudo-hermiticidade impõe uma forte correlação entre os dois – tão forte que, em muitos casos, existe apenas uma solução (a menos de um fator de proporcionalidade). Mais precisamente, temos

Proposição 1.1 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E, e suponha que γ é absolutamente irredutível (i.e., para todo ponto m de M, a imagem $\gamma_m(T_m^*M)$ em $L(E_m)$ é absolutamente irredutível).*[3] *Então se existir uma métrica tipo Dirac em E (associada a γ), ela é unicamente determinada a menos de multiplicação por uma função $\neq 0$.*

Assim, encontrar uma métrica tipo Dirac associada a um determinado símbolo principal é um problema algébrico que, normalmente, é resolvido por construção explícita: veremos exemplos mais adiante. De forma geral, a questão da sua existência é um pouco mais delicada e está relacionada com a possibilidade de encontrar um "simetrizador" para o sistema. Para o caso especial em que essa métrica nas fibras for positiva definida – o que equivale à hipótese de que o "simetrizador" seja positivo definido – existe um critério em termos da subálgebra de Jordan (na álgebra de todas as matrizes, munida do anticomutador) gerada pelo símbolo principal [44]; resta como problema ainda em aberto a tarefa de estender este resultado ao caso mais geral de uma métrica nas fibras apenas não-degenerada.

Definição 1.3 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E. Uma métrica tipo Dirac em E como na Definição 1.2 é chamada uma* ***métrica tipo Dirac hiperbólica*** *em E (associada a γ)*[2] *se satisfaz a seguinte condição de* ***positividade****: em cada ponto m de M, existe um covetor $\tau_m \in T_m^*M$ tal que*

$$\overline{u}\,\gamma(\tau_m)\,u \;>\; 0 \quad \textit{para todo } u \in E_m \backslash \{0\}\ . \tag{1.19}$$

Podemos entender essa condição como impondo duas relações de compatibilidade entre a métrica nas fibras pseudo-hermiteana e o símbolo principal γ, pois além da condição de

[3] Um conjunto de operadores lineares em um espaço vetorial é chamado de irredutível se não há subespaços invariantes não-triviais e é chamado de absolutamente irredutível se a sua comutante se reduz aos múltiplos da identidade. Em espaços vetoriais complexos, o lema de Schur afirma que estas duas propriedades são equivalentes, mas em espaços vetoriais reais, isto deixa de ser verdade. Veja, por exemplo, [54].

pseudo-hermiticidade (1.16), exige-se a possibilidade de "converter" a métrica nas fibras pseudo-hermiteana em uma métrica nas fibras hermiteana positiva definida através de um campo de automorfismos θ cujo inverso θ^{-1} pertence à imagem deste mesmo símbolo principal γ: desta forma obtemos uma métrica nas fibras auxiliar positiva definida, obtida a partir da métrica tipo Dirac por inversão da equação (1.6), i.e., pondo $u^\dagger v = \overline{u}\,\theta_m^{-1} v$ com $\theta_m^{-1} = \gamma(\tau_m)$. No entanto, podemos pensar em outras possibilidades para a métrica nas fibras auxiliar positiva definida, i.e., nada impede que se escolha um campo de automorfismos θ mais geral, sendo que, neste caso, a condição (1.19) assume a forma

$$u^\dagger\,\theta_m \gamma(\tau_m)\,u \;>\; 0 \quad \text{para todo } u \in E_m \backslash \{0\}\;. \tag{1.20}$$

Para o que segue, será conveniente considerar o conjunto de todos os covetores satisfazendo esta condição de positividade:

Definição 1.4 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E. Dada uma métrica tipo Dirac hiperbólica em E (associada a γ), introduzimos, para cada ponto m de M, o* ***cone futuro cronológico*** *(em T_m^*M), definido por*

$$I_m^{*,+} \;=\; \left\{\tau_m \in T_m^*M \mid \overline{u}\,\gamma(\tau_m)\,u > 0 \textit{ para todo } u \in E_m \backslash \{0\}\right\}\;, \tag{1.21}$$

e o ***cone futuro causal*** *(em T_m^*M), definido por*

$$J_m^{*,+} \;=\; \left\{\xi_m \in T_m^*M \mid \overline{u}\,\gamma(\xi_m)\,u \geqslant 0 \textit{ para todo } u \in E_m \backslash \{0\}\right\}\;. \tag{1.22}$$

De forma análoga, definimos o ***cone passado cronológico*** *(em T_m^*M) por $I_m^{*,-} = -I_m^{*,+}$ e o* ***cone passado causal*** *(em T_m^*M) por $J_m^{*,-} = -J_m^{*,+}$, e escrevemos $I_m^* = I_m^{*,+} \cup I_m^{*,-}$ e $J_m^* = J_m^{*,+} \cup J_m^{*,-}$.*

Usando a noção de cones duais, podemos transferir essas noções dos espaços cotangentes aos espaços tangentes:

Definição 1.5 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E. Dada uma métrica tipo Dirac hiperbólica em E (associada a γ), introduzimos, para cada ponto m de M, o* ***cone futuro cronológico*** *(agora em T_mM), definido por*

$$I_m^{+} \;=\; \left\{v_m \in T_mM \mid \langle \xi_m, v_m\rangle > 0 \textit{ para todo } \xi_m \in I_m^{*,+}\right\}\;, \tag{1.23}$$

e o ***cone futuro causal*** *(agora em T_mM), definido por*

$$J_m^{+} \;=\; \left\{v_m \in T_mM \mid \langle \xi_m, v_m\rangle \geqslant 0 \textit{ para todo } \xi_m \in J_m^{*,+}\right\}\;. \tag{1.24}$$

De forma análoga, definimos o ***cone passado cronológico*** *(agora em T_mM) por $I_m^- = -I_m^+$ e o* ***cone passado causal*** *(agora em T_mM) por $J_m^- = -J_m^+$, e escrevemos $I_m = I_m^+ \cup I_m^-$ e $J_m = J_m^+ \cup J_m^-$.*

Para justificar essa terminologia, precisamos de uma série de observações. A primeira delas é que $I_m^{*,+}$ e $J_m^{*,+}$ são cones convexos em $T_m^* M$, i.e., para quaisquer dois covetores τ_1, τ_2 em $I_m^{*,+}$ (ou $J_m^{*,+}$) e coeficientes positivos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, vale

$$\overline{u}\,\gamma\big(\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2\big)\, u = \lambda_1\, \overline{u}\,\gamma(\tau_1)\, u \,+\, \lambda_2\, \overline{u}\,\gamma(\tau_2)\, u > 0 \text{ (ou } \geqslant 0) \quad \text{para todo } u \in E_m \backslash \{0\}\,,$$

ou seja, $\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2$ pertence a $I_m^{*,+}$ (ou $J_m^{*,+}$).[4] De modo semelhante, I_m^+ e J_m^+ também são cones convexos, agora em $T_m M$. Ademais, $I_m^{*,+}$ e I_m^+ são abertos enquanto que $J_m^{*,+}$ e J_m^+ são fechados, sendo que cada cone cronológico é o interior do correspondente cone causal e cada cone causal é o fecho do correspondente cone cronológico. (Por exemplo, é óbvio que $J_m^{*,+}$ contém o fecho $\bar{I}_m^{*,+}$ de $I_m^{*,+}$, e para provar a inclusão na direção oposta, notamos que para $\tau_m \in I_m^{*,+}$ e $\xi_m \in J_m^{*,+}$, vale $\xi_m + \lambda \tau_m \in I_m^{*,+}$ para qualquer $\lambda > 0$. De modo semelhante, por continuidade e usando que $J_m^{*,+}$ é o fecho de $I_m^{*,+}$, segue que J_m^+ contém o fecho $\bar{I}_m^+$ de I_m^+, e para provar a inclusão na direção oposta, notamos que para $v_m \in I_m^+$ e $w_m \in J_m^+$, vale $w_m + \lambda v_m \in I_m^+$ para qualquer $\lambda > 0$.) Assim, seguindo os costumes da geometria lorentziana, dizemos que

- um vetor cotangente $\xi_m \in T_m^* M$ ou vetor tangente $v_m \in T_m M$ é **causal (futuro/passado)** se $\xi_m \in J_m^*(J_m^{*,+}/J_m^{*,-})$ ou $v_m \in J_m(J_m^+/J_m^-)$;
- um vetor cotangente $\xi_m \in T_m^* M$ ou vetor tangente $v_m \in T_m M$ é **tipo tempo (futuro/passado)** se $\xi_m \in I_m^*(I_m^{*,+}/I_m^{*,-})$ ou $v_m \in I_m(I_m^+/I_m^-)$;
- um vetor cotangente $\xi_m \in T_m^* M$ ou vetor tangente $v_m \in T_m M$ é **tipo luz (futuro/passado)** se for causal mas não tipo tempo (futuro/passado);
- um vetor cotangente $\xi_m \in T_m^* M$ ou vetor tangente $v_m \in T_m M$ é **tipo espaço** se não for causal.

Notamos também que a hipótese de que a referida métrica tipo Dirac seja hiperbólica significa que, em cada ponto m de M, o cone $I_m^{*,+}$ não é vazio e o cone I_m^+ não é o espaço tangente inteiro. Nesta hipótese, os cones $I_m^{*,+}$, $I_m^{*,-}$, I_m^+, I_m^- e J_m^+, J_m^- são todos *unilaterais*, i.e., vale

$$I_m^{*,+} \cap I_m^{*,-} \;=\; \emptyset\,, \tag{1.25}$$

$$I_m^+ \cap I_m^- \;=\; \emptyset\,, \tag{1.26}$$

e

$$J_m^+ \cap J_m^- \;=\; \{0\}\,, \tag{1.27}$$

ou seja: covetores e vetores tipo tempo, assim como vetores tipo luz ($\neq 0$) não podem ser simultaneamente futuros e passados. (No caso da igualdade (1.27), a prova usa o fato de

[4]Uma maneira mais elegante, se bem menos explícita, de entender este resultado é notando que $I_m^{*,+}$ e $J_m^{*,+}$ são, respectivamente, a imagem inversa do cone convexo aberto das transformações lineares positivas definidas e a imagem inversa do cone convexo fechado das transformações lineares positivas semidefinidas em E_m, em relação ao produto escalar auxiliar $(u,v) \longmapsto u^\dagger v$, sob uma aplicação linear de $T_m^* M$ em $L(E_m)$, a saber, γ_m seguida por multiplicação à esquerda pelo automorfismo θ_m.

que o interior $I_m^{*,+}$ de $J_m^{*,+}$, sendo um cone convexo aberto, sempre contém um conjunto de covetores que forma uma base de $T_m^* M$.) No entanto, no caso de covetores tipo luz, a situação pode ser um pouco mais complicada, pois os cones $J_m^{*,+}$, $J_m^{*,-}$ podem deixar de ser unilaterais, i.e., a igualdade análoga

$$J_m^{*,+} \cap J_m^{*,-} \;=\; \{0\} \tag{1.28}$$

nem sempre é verdadeira. Felizmente, este possível defeito pode ser controlado por um critério surprendentemente simples:

Proposição 1.2 *Seja $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre M, representando o símbolo principal de um operador diferencial linear de primeira ordem em E, que admite uma métrica tipo Dirac hiperbólica. Então, em cada ponto m de M, os cones causais $J_m^{*,+}$ e $J_m^{*,-}$ são unilaterais, ou seja, satisfazem a condição (1.28), se e somente se γ for injetor.*

Demonstração: Para que um covetor $\xi_m \in T_m^* M$ pertença a $J_m^{*,+} \cap J_m^{*,-}$, temos que ter $\overline{u}\,\gamma(\xi_m)\,u \geqslant 0$ e $\overline{u}\,\gamma(\xi_m)\,u \leqslant 0$, ou seja, $\overline{u}\,\gamma(\xi_m)\,u = 0$, para todo $u \in E_m$, o que implica $\overline{u}\,\gamma(\xi_m)\,v = 0$ para todo $u, v \in E_m$ por polarização e, devido à não-degenerescência da métrica nas fibras, equivale a dizer que $\gamma(\xi_m) = 0$. □

Observação 1.1 A Definição 1.3 estabelece uma condição pontual, ou seja, fibra por fibra, podendo os vetores τ_m em diferentes pontos m de M ser completamente independentes, mesmo em pontos que estejam próximos. Porém, trata-se aqui de uma condição que pode ser reformulada tanto localmente como globalmente. Primeiro, para cada ponto m_0 de M, é possível encontrar uma 1-forma *local* τ, definida em alguma vizinhança aberta U de m_0, tal que a condição (1.19) é satisfeita para todo $m \in U$. [De fato, podemos introduzir uma carta local de M em torno de m_0 para identificar U com uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{R}^n$ e os espaços cotangentes $T_m^* M$ $(m \in U)$ com o mesmo $\mathbb{R}^n$, assim como uma trivialização de E sobre U que é compatível com a métrica nas fibras da equação (1.1), no sentido de que sua forma local seja constante sobre U, e (diminuindo U se for necessário) podemos ainda escolher a métrica nas fibras da equação (1.4) de modo que sua forma local seja constante sobre U; assim, o campo de automorfismos θ também será constante sobre U. Assim, se existir um covetor $\tau_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que a transformação linear $\theta\,\gamma_{m_0}(\tau_0) \in L(\mathbb{K}^N)$ for positiva definida em relação ao produto escalar auxiliar $(u, v) \longmapsto u^\dagger v$, podemos definir $\tau \in \Gamma(U, T^*M)$ como sendo constante ($\tau_m = \tau_0$ para $m \in U$) e (diminuindo U se for necessário) concluir que a transformação linear $\theta\,\gamma_m(\tau_m) \in L(\mathbb{K}^N)$ será positiva definida em relação ao produto escalar auxiliar $(u, v) \longmapsto u^\dagger v$, para todo $m \in U$.] Segundo, podemos provar que é possível encontrar uma 1-forma *global* τ sobre M tal que a condição (1.19) é satisfeita para todo $m \in M$. [De fato, pelo argumento anterior, podemos encontrar um recobrimento aberto localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ de M e uma partição da unidade $(\chi_i)_{i \in I}$ subjacente, assim como uma família $(\tau_i)_{i \in I}$ de 1-formas $\tau_i \in \Gamma(U_i, T^*M)$ tais que a condição (1.19), com τ_m substituído por

$\tau_i(m)$, seja satisfeita para todo $m \in U_i$. Então definindo

$$\tau \;=\; \sum_{i \in I} \chi_i \tau_i \;,$$

a afirmação segue.] Notamos, de passagem, que o ponto essencial deste argumento é o mesmo da prova da existência de uma métrica riemanniana em qualquer variedade: o fato de que as matrizes positivas definidas formam um cone convexo aberto no espaço de todas as matrizes simétricas. ◇

1.2 Definição de operador hiperbólico simétrico

Agora estamos em condições de introduzir a noção de operador hiperbólico simétrico no contexto geométrico empregado neste trabalho, ou seja, no âmbito de fibrados vetoriais e variedades gerais.

Definição 1.6 *Seja $D\!\!\!/ : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$. Dizemos que $D\!\!\!/$ é um* ***operador hiperbólico simétrico*** *se E admitir uma métrica tipo Dirac hiperbólica (associada a γ).*

Desde já, notamos que essa ainda não é a definição mais geral de um operador (ou sistema) hiperbólico simétrico, pois não contempla situações importantes, tais como

- sistemas com vínculos e/ou sistemas degenerados devido à presença de simetrias de calibre (exemplo: as equações de Maxwell);
- sistemas de ordem superior (exemplo: as equações de Euler-Lagrange provindo de um princípio variacional);
- sistemas não-lineares.

Algumas considerações a respeito da primeira questão podem ser encontradas no final deste capítulo.

Observação 1.2 Conforme a Proposição 1.1, dado um operador $D\!\!\!/$ hiperbólico simétrico com símbolo principal γ, a correspondente métrica tipo Dirac hiperbólica é unicamente determinada a menos de multiplicação por uma função $\neq 0$ se γ for absolutamente irredutível. Por outro lado, se γ for redutível, pode haver várias métricas tipo Dirac e pode ocorrer que algumas delas são hiperbólicas e outras não, de modo que uma escolha "errada" de métrica nas fibras, mesmo sendo tipo Dirac, pode "esconder" o fato de que $D\!\!\!/$ é hiperbólico simétrico. Este fenômeno acontece, por exemplo, no caso do operador de Dirac na representação adjunta da álgebra de Clifford (que está longe de ser irredutível e cujo espaço de representação é a álgebra de Grassmann): neste caso, o fibrado vetorial E é o fibrado de Grassmann $\bigwedge^\bullet T^*M$, suas seções são formas diferenciais (não-homogêneneas) e o operador de Dirac $\not{D}$ é o operador $d+\delta$ onde δ é o dual de Hodge lorentziano de d [10, 19], mas a métrica nas fibras "natural" em $\bigwedge^\bullet T^*M$, induzida pela métrica lorentziana original em M, apesar de ser tipo Dirac, *não* é tipo Dirac hiperbólico, de modo que seu uso acaba camuflando o fato de que este operador é, sim, hiperbólico simétrico, no sentido da definição dada acima. $\diamond$

Observação 1.3 Um dos procedimentos padrão no estudo de equações diferenciais parciais hiperbólicas consiste em considerar, ao invés (ou talvez além) do operador original $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, operadores modificados $\not{D}_\phi : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ definidos por concatenação com algum automorfismo de fibrado vetorial $\phi : E \longrightarrow E$, ou melhor, com o "push-forward" de seções $\phi_* : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ por ele induzido. Na verdade, existem três versões diferentes de tal concatenação:

1. por "pós-composição", ou multiplicação a esquerda, conforme
$$\not{D}_\phi^L \;=\; \phi_* \circ \not{D} \;, \tag{1.29}$$

2. por "pré-composição", ou multiplicação a direita, conforme
$$\not{D}_\phi^R \;=\; \not{D} \circ \phi_*^{-1} \;, \tag{1.30}$$

3. por conjugação, conforme
$$\not{D}_\phi^A \;=\; \phi_* \circ \not{D} \circ \phi_*^{-1} \;, \tag{1.31}$$

o que implica nas seguintes relações entre os correspondentes símbolos principais:

$$\gamma_\phi^L(\xi) \;=\; \phi\,\gamma(\xi) \quad \text{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M) \;, \tag{1.32}$$

$$\gamma_\phi^R(\xi) \;=\; \gamma(\xi)\,\phi^{-1} \quad \text{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M) \;, \tag{1.33}$$

$$\gamma_\phi^A(\xi) \;=\; \phi\,\gamma(\xi)\,\phi^{-1} \quad \text{para todo } \xi \in \Gamma(T^*M) \;. \tag{1.34}$$

Note que a última delas pode ser considerada como uma versão global de uma mudança de trivialização local, pois quando E é trivial sobre M (ou quando nos restringirmos a um subconjunto aberto U de M sobre o qual E é trivial), $\phi \in C^\infty(M, GL(N,\mathbb{K}))$ (ou $\phi \in C^\infty(U, GL(N,\mathbb{K}))$) corresponde à função de transição entre duas trivializações; no entanto, os autovalores de cada $\gamma(\xi)$ e as suas multiplicidades permanecem invariantes sob tal modificação. O mesmo *não* vale para as primeiras duas modificações, que podem inclusive ser utilizadas para transformar a equação $\not{D}\psi = f$ em uma equação de evolução, pois se, em termos de coordenadas locais x^μ de M (com $x^0 = t$) e uma trivialização local de E, ambas sobre um domínio U em M, $\not{D}$ tiver a forma dada pela equação (8), basta escolher $\phi = (\gamma^0)^{-1}$ no primeiro caso e $\phi = \gamma^0$ no segundo caso para obter

$$\not{D}_\phi^L \;=\; \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma^0)^{-1}\gamma^k \, \frac{\partial}{\partial x^k} \,+\, (\gamma^0)^{-1}\rho \;, \tag{1.35}$$

$$\not{D}_\phi^R \;=\; \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^k (\gamma^0)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^k} + \left(\rho - \frac{\partial \gamma^0}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^k (\gamma^0)^{-1} \frac{\partial \gamma^0}{\partial x^k} \right) (\gamma^0)^{-1} \; . \tag{1.36}$$

Como motivo principal para efetuar tais modificações, podemos citar o fato de que muitas das questões matemáticas mais relevantes na área (referentes a existência e unicidade de soluções, boa postura do problema de Cauchy, existência e propriedades de funções de Green de diversos tipos etc.) podem ser facilmente traduzidas de qualquer um destes operadores para qualquer outro, e de modo puramente algébrico, aplicando o automorfismo ϕ. Por exemplo, dado um compacto K de M e uma subvariedade Σ_0 de codimensão 1 (sujeitos a condições adicionais a serem especificadas posteriormente), resolver o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \not{D}\psi & = & f & \text{em} \quad K \\ \psi\big|_{K_0} & = & g & \text{em} \quad K_0 = \Sigma_0 \cap K \end{array} \right. \tag{1.37}$$

para o operador $\not{D}$ é equivalente a resolver o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \not{D}_\phi^L\psi & = & \phi f & \text{em} \quad K \\ \psi\big|_{K_0} & = & \phi g & \text{em} \quad K_0 = \Sigma_0 \cap K \end{array} \right. \tag{1.38}$$

para o operador $\not{D}_\phi^L$. Sendo assim, é notável que o conceito de um operador hiperbólico simétrico conforme a definição dada acima é *invariante* sob *todos* estes tipos de modificação, desde que o automorfismo ϕ for pseudo-hermiteano, e como veremos logo adiante no contexto da discussão de exemplos, essa propriedade de invariância constitui uma das vantagens principais do conceito. Mais precisamente, verifica-se que se o operador original $\not{D}$ for hiperbólico simétrico, digamos em relação a uma certa métrica nas fibras $(u,v) \longmapsto \overline{u}\, v$, e se o automorfismo ϕ satisfizer a condição

$$\overline{\phi} = \phi \; , \tag{1.39}$$

então os operadores modificados $\not{D}_\phi^L$ e $\not{D}_\phi^R$ também serão hiperbólicos simétricos, a saber, em relação à métrica nas fibras modificada $(u,v) \longmapsto \overline{u}\, \phi^{-1} v$, como decorre do seguinte cálculo simples:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_\phi^L(\xi) u}\, \phi^{-1} v \;&=\; \overline{\phi\gamma(\xi) u}\, \phi^{-1} v \;=\; \overline{\gamma(\xi) u}\, v \;=\; \overline{u}\, \gamma(\xi) v \;=\; \overline{u}\, \phi^{-1} \gamma_\phi^L(\xi) v \; , \\ \overline{\gamma_\phi^R(\xi) u}\, \phi^{-1} v \;&=\; \overline{\gamma(\xi)\, \phi^{-1} u}\, \phi^{-1} v \;=\; \overline{\phi^{-1} u}\, \gamma(\xi) \phi^{-1} v \;=\; \overline{u}\, \phi^{-1} \gamma(\xi) \phi^{-1} v \;=\; \overline{u}\, \phi^{-1} \gamma_\phi^R(\xi) v \; , \end{aligned}$$

$$\overline{u}\, \phi^{-1} \gamma_\phi^L(\tau) u \;=\; \overline{u}\, \gamma(\tau) u \; ,$$

$$\overline{u}\, \phi^{-1} \gamma_\phi^R(\tau) u \;=\; \overline{\phi^{-1} u}\, \gamma(\tau) \phi^{-1} u \; .$$

Note que, neste processo de modificação, até a assinatura da métrica nas fibras pode ser alterada, pois não é necessário impor qualquer condição de positividade sobre ϕ para que se preserve a propriedade do operador em questão ser hiperbólico simétrico, conforme a definição dada acima: a única exigência a ser feita é a condição (1.39) de pseudo-hermiticidade. Parece que tal flexibilidade, apesar de ser de grande utilidade para o desenvolvimento da teoria, ainda não tem sido devidamente apreciada e aproveitada na literatura sobre a área. ◇

Prosseguindo, apresentamos em seguida alguns exemplos importantes de operadores hiperbólicos simétricos no sentido da definição dada acima. Para fins de simplicidade, trabalharemos em uma variedade base n-dimensional plana ($M = \mathbb{R}^n$ ou $M = \mathbb{R}^{p,q}$)[5] e com um fibrado vetorial de posto N trivial ($E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}^N$) que pode ser real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exemplo 1.1 (Sistemas hiperbólicos simétricos, parte I) Supondo que vale $\overline{u}\, v = u^\dagger v$, ou seja, $\theta = 1$, a Definição 1.6 se reduz de forma imediata à de um sistema hiperbólico simétrico na forma originalmente dada por Friedrichs [21], conforme a qual as matrizes γ^μ que aparecem na representação local (8) do operador $\not{D}$ devem ser todas simétricas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermiteanas ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e alguma combinação delas deve ser positiva definida (apenas denotamos o covetor que proporciona essa combinação por τ, ao invés de ξ^0). ◇

Apesar da natureza nitidamente geométrica dessa definição, a grande maioria dos autores de trabalhos posteriores sobre o tema optou por uma reformulação, na qual a equação em questão é colocada, desde o início, na forma de uma equação de evolução onde a variável tempo aparece como um parâmetro externo e não como uma coordenada no espaço-tempo. Isso nos leva a considerar sistemas de N equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem no espaço-tempo plano $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (ou algum aberto U nele), dados por um operador da forma

$$P \;=\; \frac{\partial}{\partial t} \,+\, \sum_{k=1}^{n-1} A^k(t,x)\, \frac{\partial}{\partial x^k} \,+\, B(t,x) \;, \tag{1.40}$$

cujo símbolo principal $\gamma : U \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow L(\mathbb{R}^N)$ é dado por

$$\gamma(t,x,\xi) \;=\; \xi_\mu A^\mu(t,x) \quad \text{para } (t,x) \in U \,,\; \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in (\mathbb{R}^n)^* \;, \tag{1.41}$$

com $A^0(t,x) = 1$ para todo $(t,x) \in U$ e $A^k, B \in C^\infty(U, L(\mathbb{R}^N))$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.[6]

Exemplo 1.2 (Sistemas hiperbólicos simétricos, parte II) Conforme a definição encontrada na literatura (veja, por exemplo, [4, 14, 51]), o sistema (1.40) é chamado de *hiperbólico simétrico* se

[5] Aqui e a seguir, usamos a notação $\mathbb{R}^{p,q}$ para indicar o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, onde $n = p+q$, munido da métrica η de assinatura (p,q), i.e., $\eta = \mathrm{diag}(+\ldots+-\ldots-)$ onde $+$ aparece p vezes e $-$ aparece q vezes.

[6] Na literatura é comum usar uma notação como (ω, ξ) com $\omega \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, onde ω representaria o dual da variável temporal e ξ o dual das variáveis espaciais, mas em nosso caso será conveniente manter a notação original para poder observar as propriedades do símbolo no contexto geométrico.

- as funções A^k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ assumem valores nas matrizes simétricas;
- as funções A^k e todas as suas derivadas parciais $\partial_\alpha A^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1,\ \alpha \in \mathbb{N}^n)$ são limitadas.

◇

Exemplo 1.3 (Sistemas hiperbólicos simetrizáveis) Conforme a definição encontrada na literatura (veja, por exemplo, [14, 31, 51]), o sistema (1.40) é chamado de *hiperbólico simetrizável* se existir uma função $S \in C^\infty(U, L(\mathbb{R}^N))$, chamada de *simetrizador*, que assume valores nas matrizes simétricas e positivas definidas, tal que

- a função S e todas as suas derivadas parciais $\partial_\alpha S$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ são limitadas, e S também é limitada por baixo, i.e., existem $c, c_\alpha, c' > 0$ tais que

$$\begin{gathered} c'\, u^\dagger u \;\leqslant\; u^\dagger\, S(t,x)\, u \;\leqslant\; c\, u^\dagger u \quad \text{e} \quad u^\dagger\, \partial_\alpha S(t,x)\, u \;\leqslant\; c_\alpha\, u^\dagger u \\ \text{para todo } u \in \mathbb{R}^N,\ (t,x) \in U \end{gathered} \tag{1.42}$$

- as funções SA^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ assumem valores nas matrizes simétricas;
- as funções SA^k e todas as suas derivadas parciais $\partial_\alpha(SA^k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n,\ \alpha \in \mathbb{N}^n)$ são limitadas.

◇

No caso do último exemplo, é conveniente também considerar o operador modificado

$$P_S \;=\; S(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; \sum_{k=1}^{n-1} S(t,x)A^k(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x^k} \;+\; S(t,x)B(t,x) \tag{1.43}$$

cujo símbolo principal $\gamma_S : U \times (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow L(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$\gamma_S(t,x,\xi) \;=\; \xi_\mu S(t,x)A^\mu(t,x) \quad \text{para } (t,x) \in U\,,\ \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in (\mathbb{R}^n)^*\,. \tag{1.44}$$

Para elucidar a relação entre essas diversas noções de hiperbolicidade, podemos em um primeiro momento desconsiderar as condições de limitação enunciadas nos últimos dois exemplos, sendo que elas sempre valem pelo menos localmente: mais precisamente, valem sobre qualquer domínio V de $\mathbb{R}^n$ cujo fecho $\bar{V}$ é compacto e contido em U. Com essa ressalva, observa-se então que a condição de ser hiperbólico simétrico conforme o Exemplo 1.2 é um caso especial da condição de ser hiperbólico simétrico no sentido do Exemplo 1.1, pois as duas definições são equivalentes quando se trata de uma equação de evolução (i.e., com $A^0 \equiv 1$). No entanto, no caso de uma equação mais geral, tal equivalência já não vale mais, sendo que a condição de ser hiperbólico simetrizável serve exatamente para corrigir este defeito. De fato, com a mesma ressalva que antes, verifica-se de maneira elementar que o operador P da equação (1.40) é hiperbólico simetrizável no sentido do Exemplo 1.3 se e somente se o operador P_S da equação (1.43) é hiperbólico simétrico no sentido do Exemplo 1.1.

Ocorre que o ponto de vista geométrico adotado no presente trabalho serve para superar a confusão e esclarecer a situação, reduzindo todas essas versões de hiperbolicidade a um único conceito simples, pois *todos os operadores apresentados nos exemplos acima são hiperbólicos simétricos no sentido da Definição 1.6 em relação a uma métrica nas fibras adequadamente escolhida*, sujeita à condição de que ela seja positiva definida. Reciprocamente, um operador que é hiperbólico simétrico no sentido da Definição 1.6 em relação a uma métrica nas fibras que é positiva definida, quando escrito em uma trivialização ortonormal de E, ou seja, uma trivialização de E em que a referida métrica nas fibras se torna independente do ponto base e se reduz ao produto escalar padrão em $\mathbb{K}^N$, é simétrico hiperbólico no sentido do Exemplo 1.1. Em particular, a diferença entre hiperbólico simétrico e hiperbólico simetrizável torna-se totalmente circunstancial, pois conforme foi constatado na Observação 1.3, o conceito de hiperbolicidade simétrica no sentido da Definição 1.6 é invariante em relação à transição entre os operadores P da equação (1.40) e P_S da equação (1.43): a única necessidade que se coloca é acompanhar a transição entre os operadores por uma transição correspondente entre as pertinentes métricas nas fibras, e é precisamente essa transição que é efetuado pelo simetrizador S, sendo que ele deve ser positivo definido para garantir que se uma das duas métricas nas fibras for positiva definida, então a outra também será.

Observação 1.4 Gostaríamos de mencionar aqui que já se encontram na literatura outras extensões do conceito de um sistema hiperbólico simetrizável, baseadas em modificações das condições a serem satisfeitas pelo simetrizador. Por exemplo, no contexto dos exemplos acima, ou seja para operadores da forma (1.40) no espaço-tempo plano $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ (ou algum aberto U nele), há estudos [4,35,47] onde se exige a existência de um simetrizador S que pode depender não apenas das variáveis t de tempo e x de espaço, mas também das direções cotangentes (ω, ξ) (mais precisamente, das direções cotangentes "nas direções espaciais" ξ), de modo que S não é mais uma função $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^N)$ e sim uma função $S : \mathbb{R}^n \times ((\mathbb{R}^{n-1})^* \backslash \{0\}) \longrightarrow L(\mathbb{R}^N)$, sujeita a certas condições adicionais que não discutiremos aqui. No entanto, não é claro o que significa essa generalização em um âmbito geométrico, pois claramente a restrição a uma dependência apenas das direções cotangentes "nas direções espaciais" não pode ser mantida, pois não é covariante. Mas se admitirmos uma dependência de todas as direções cotangentes (sujeita a certas condições adicionais que também devem ser reformuladas em termos geométricos), tal simetrizador representaria uma métrica nas fibras não no fibrado vetorial E sobre M original e sim no seu "pull-back" $\pi^*_{T^*M\backslash\{0\}}E$ pela projeção do fibrado cotangente (menos a seção zero), $\pi_{T^*M\backslash\{0\}} : T^*M \setminus \{0\} \longrightarrow M$. No entanto, um estudo mais aprofundado deste tipo de estrutura foge do escopo do presente trabalho. ◇

Posto isso, resta saber o que acontece quando se consideram operadores hiperbólicos simétricos no sentido da Definição 1.6 em relação a uma métrica nas fibras que *não* é positiva definida. Essa pergunta vai na mesma direção que alguns estudos que já existem na literatura sobre sistemas hiperbólicos simetrizáveis onde se abre mão da condição de que o simetrizador seja positivo definido. Para mostrar que tal modificação constitui uma generalização substancial da situação usual, consideremos primeiro um exemplo elementar mas um tanto artificial:

Exemplo 1.4 No espaço-tempo plano $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (ou algum aberto U nele), considere o operador

$$D\!\!\!/ \;=\; A\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1} A\,\frac{\partial}{\partial x^k}\;, \tag{1.45}$$

onde A é qualquer matriz invertível e diagonalizável com pelo menos um autovalor positivo e um autovalor negativo; então o símbolo principal é

$$\gamma(\xi) \;=\; \xi_\mu \gamma^\mu \;=\; (\xi_0 + \ldots + \xi_{n-1})\,A\;. \tag{1.46}$$

Este operador não é hiperbólico simétrico no sentido do Exemplo 1.1, pois a matriz A, tendo autovalores positivos e negativos, não pode ser positiva definida em relação a nenhum produto escalar em $\mathbb{R}^N$, e portanto o mesmo vale para a matriz $\gamma(\xi)$, seja qual for o covetor $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$. No entanto, $D\!\!\!/$ é hiperbólico simetrizável em um sentido mais amplo do que no Exemplo 1.3, a saber, se permitirmos que o simetrizador A^{-1} não seja positivo definido.

Outro exemplo, menos artificial, onde a introdução de uma métrica nas fibras que não seja positiva definida torna-se indispensável é a equação de Dirac.

Exemplo 1.5 (Operador de Dirac hiperbólico, parte I) Um exemplo clássico de um sistema que deveria satisfazer a definição de hiperbolicidade é a equação de Dirac no espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ ou, mais geralmente, $\mathbb{R}^{1,n-1}$ (veja, por exemplo, [9,17]).[5,7] Neste contexto, os campos espinoriais sobre os quais atua o operador de Dirac são funções ψ sobre $\mathbb{R}^{1,n-1}$ a valores no espaço de espinores de Dirac $\mathbb{S}$, que é um espaço vetorial complexo de dimensão $N = 2^{n/2}$ se n for par e de dimensão $N = 2^{(n-1)/2}$ se n for ímpar (veja, por exemplo, [26,36]), e o operador de Dirac é dado por[8]

$$D\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu + im1_{\mathbb{S}} \tag{1.47}$$

onde m é uma constante positiva (interpretada em mecânica quântica relativística, em unidades adequadas, como a massa da partícula em questão) e as matrizes $\gamma^\mu \in L(\mathbb{S})$ satisfazem as regras canônicas de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \;\equiv\; \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \;=\; 2\eta^{\mu\nu}\,1_{\mathbb{S}}\;, \tag{1.48}$$

[7] A convenção de sinal para a métrica no espaço de Minkowski e, mais geralmente, em variedades lorentzianas empregada nesta tese coincide com a convenção amplamente adotada em física de altas energias $(+-\ldots-)$, que é a oposta da convenção geralmente utilizada em relatividade geral $(-+\ldots+)$, pois é bem mais simples de se usar em todos os cálculos envolvendo espinores; veja, por exemplo, o comentário em [55, p. 342]. Uma outra convenção da geometria lorentziana que seguiremos (e que pode ser aplicada com qualquer uma destas duas convenções de sinal) é que índices referentes a coordenadas ou vetores ou tensores, aqui denotados por $\mu, \nu, \ldots$, percorrem os valores $0, 1, \ldots, n-1$.

[8] A nossa convenção para o operador de Dirac difere da de [9,17] por um fator global i.

o que significa, mais explicitamente, que vale $(\gamma^0)^2 = 1_{\mathbb{S}}$, $(\gamma^k)^2 = -1_{\mathbb{S}}$ e $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$, para $k = 1, \ldots, n-1$. Além disso, pode-se mostrar que é sempre possível escolher essas matrizes de modo que a primeira seja hermiteana e as demais sejam anti-hermiteanas ($(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$), em relação a algum produto escalar positivo definido em $\mathbb{S}$, denotado aqui por $(u, v) \longmapsto u^\dagger v$.[9] Assim, a matriz $\theta = \gamma^0$ serve como um "simetrizador" para $D\!\!\!\!/$, pois a matriz $(\gamma^0)^2 = 1_{\mathbb{S}}$ é hermiteana e positiva definida e as matrizes $\gamma^0\gamma^k$ são hermiteanas,

$$(\gamma^0\gamma^k)^\dagger \;=\; (\gamma^k)^\dagger(\gamma^0)^\dagger \;=\; -\,\gamma^k\gamma^0 \;=\; \gamma^0\gamma^k \quad \text{para } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \;,$$

o que implica

$$(\gamma^0\gamma(\xi))^\dagger \;=\; \gamma^0\gamma(\xi) \quad \text{para } \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \;. \tag{1.49}$$

Portanto, o operador de Dirac $D\!\!\!\!/$ é hiperbólico simétrico no sentido da Definição 1.6, com métrica tipo Dirac hiperbólica definida por

$$\overline{u}\,v \;=\; u^\dagger\gamma^0 v \quad \text{para } u, v \in \mathbb{S} \;, \tag{1.50}$$

sendo que a condição de pseudo-hermiticidade (1.16) segue da equação (1.15), com $\theta = \gamma^0$, e da equação (1.49),

$$\overline{\gamma(\xi)} \;=\; (\gamma^0)^{-1}\gamma(\xi)^\dagger\gamma^0 \;=\; (\gamma^0)^{-1}\gamma^0\gamma(\xi) \;=\; \gamma(\xi) \quad \text{para } \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \;,$$

enquanto que a condição de positividade (1.19) ou (1.20) é óbvia:

$$\overline{u}\,\gamma^0 u \;=\; u^\dagger(\gamma^0)^2 u \;=\; u^\dagger u \;>\; 0 \quad \text{para } u \in \mathbb{S}\setminus\{0\} \;. \tag{1.51}$$

Cabe notar, porém, que o operador de Dirac $D\!\!\!\!/$ não é hiperbólico simétrico no sentido do Exemplo 1.1, pois as matrizes $\gamma(\xi)$, com $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, são todas pseudo-hermiteanas mas não são todas hermiteanas, sendo que nenhuma delas é positiva definida, e muito menos é hiperbólico simétrico no sentido do Exemplo 1.2, pois nem é da forma exigida na equação (1.40). Também não é hiperbólico simétrizável no sentido do Exemplo 1.3, pois o "simetrizador" γ^0 não é positivo definido. Por outro lado, os operadores de Dirac modificados $D\!\!\!\!/^L_{\gamma^0}$ ou $D\!\!\!\!/^R_{\gamma^0}$, definidos conforme especificado na Observação 1.3, ou seja,

$$D\!\!\!\!/^L_{\gamma^0} \;=\; \partial_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^0\gamma^k\,\partial_k + m\gamma^0 \quad , \quad D\!\!\!\!/^R_{\gamma^0} \;=\; \partial_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma^k\gamma^0\,\partial_k + m\gamma^0 \;,$$

são hiperbólicos simétricos no sentido do Exemplo 1.1 e até no sentido do Exemplo 1.2.

Percebe-se, assim, uma grande confusão terminológica, que acreditamos poderá ser superada pela definição de operador hiperbólico simétrico proposta neste trabalho. ◇

A equação de Dirac pode ser generalizada para espaços-tempos curvos, i.e., variedades lorentzianas, para obter os chamados operadores "clássicos" de Dirac ("classical Dirac operators"), os operadores "torcidos" de Dirac ("twisted Dirac operators") e, mais geralmente, os operadores "tipo Dirac" ("Dirac type operators"); veja, por exemplo, [2, 3, 52]. Este tema será discutido no Capítulo 3.

[9] O argumento para provar essa afirmação será apresentado na demonstração da Proposição 3.2.

Concluímos com uma série de exemplos que, quando formulados de maneira plenamente covariante, não se enquadram na definição de hiperbolicidade adotada no presente trabalho, mas que deveriam ser incluídos no ambiente mais amplo dos *sistemas hiperbólicos com vínculos* – um conceito para o qual não existe ainda nenhuma definição geral. Estes exemplos são: (a) sistemas de primeira ordem obtidos da equação de ondas por redução e (b) as equações de Maxwell. Em ambos os casos, continuaremos trabalhando no espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ ou, mais geralmente, $\mathbb{R}^{1,n-1}$, munido da métrica plana denotada por η,[4] sendo que a generalização para espaços-tempos curvos, i.e., variedades lorentzianas, com métrica $\boldsymbol{g}$, não apresenta nenhuma dificuldade.

Exemplo 1.6 (Reduções da equação de onda, parte I) No espaço de Minkowski $M = \mathbb{R}^{1,n-1}$, considere a equação de onda

$$\Box\varphi + D_1\varphi = f \,, \tag{1.52}$$

para um campo escalar real $\varphi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, onde $\Box$ denota o operador de onda

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \,, \tag{1.53}$$

e D_1 é um operador diferencial linear de primeira ordem

$$D_1 = a^\mu\partial_\mu + b \,, \tag{1.54}$$

com coeficientes $a^\mu, b \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, enquanto que $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ representa a fonte.[10] Enfatizamos que esta equação deve ser hiperbólica seja qual for a definição de hiperbolicidade, mas como ela é de segunda ordem, ela foge do âmbito da Definição 1.6; logo, precisamos efetuar alguma redução a um sistema de primeira ordem. Para tanto, existem vários procedimentos, entre os quais queremos mencionar dois. Ambos estão baseados na ideia de introduzir, além do campo escalar φ (uma 0-forma), a sua derivada $d\varphi$ (uma 1-forma), combinando os dois em um campo $\psi \in C^\infty(M,\mathbb{R}^{n+1})$, sendo que o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ que aparece aqui deve ser realmente visto como a soma direta de $\mathbb{R}$ com $(\mathbb{R}^n)^*$, conforme

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha_0 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{1.55}$$

- **Redução hiperbólica** [31]: Defina

$$\gamma^0 = 1_{n+1} \,, \tag{1.56}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \gamma^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

[10] Obviamente, podemos substituir as condições de que f e φ sejam de classe C^∞ por outras, mais brandas.

e

$$\rho \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a^0 & a^1 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} , \tag{1.58}$$

de modo que a equação $\big(\gamma^\mu \partial_\mu + \rho\big)\,\psi = j$, com

$$j \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

assume a forma do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi - \alpha_0 \;&=\; 0 \\ \partial_0 \alpha_0 - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha} + a^\mu \alpha_\mu + b\,\varphi \;&=\; f \quad . \\ \partial_0 \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\nabla} \alpha_0 \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Observamos que este sistema é equivalente à equação original (1.52) (após inserção das abreviações (1.53) e (1.54)), mas apenas mediante imposição de um *vínculo*, a saber,

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\nabla} \varphi \; . \tag{1.60}$$

Note que este vínculo é *compatível* com o sistema (1.59), no sentido de que a primeira e terceira equação deste sistema garantem que ele é preservado sob a evolução temporal: se vale pare $t = 0$, digamos, então vale para todo t. Agora, verifica-se facilmente que o sistema (1.59) em conjunto com o vínculo (1.60) é equivalente à equação original (1.52) (após inserção das abreviações (1.53) e (1.54)). Além disso, usando o produto escalar positivo definido canônico sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\overline{\psi}\,\psi' \;=\; \varphi\,\varphi' + \alpha_0 \alpha_0' + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}' \; , \tag{1.61}$$

observamos que as matrizes $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{n-1}$ são todas simétricas e a matriz γ^0 é positiva definida, o que significa que o sistema (1.59) é hiperbólico simétrico. Mas é claro que essa redução hiperbólica não é covariante, já que ela depende da escolha particular de uma variável temporal.

- **Redução covariante (Petiau-Duffin-Kemmer, spin 0)** [16, 32, 45, 56]: Defina

$$\gamma(\xi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \xi^\sharp \\ \xi & 0_n \end{pmatrix} \quad , \quad \rho \;=\; \begin{pmatrix} b & a^\sharp \\ 0 & -1_n \end{pmatrix} . \tag{1.62}$$

onde $\xi^\sharp \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor dado por $(\xi^\sharp)^\mu = \eta^{\mu\nu} \xi_\mu$, de modo que a equação $\big(\gamma^\mu \partial_\mu + \rho\big)\,\psi = j$, com

$$j \;=\; \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

assume a forma do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \alpha_\mu + a^\mu \alpha_\mu + b\,\varphi \;&=\; f \\ \partial_\mu \varphi - \alpha_\mu \;&=\; 0 \end{aligned} \quad . \tag{1.63}$$

Obviamente, este sistema é equivalente à equação original (1.52) (após inserção das abreviações (1.53) e (1.54)). Note também que temos sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ um produto escalar natural, porém não positivo definido, dado por

$$\overline{\psi}\,\psi' \;=\; \varphi\,\varphi' + \eta^{\mu\nu}\alpha_\mu \alpha'_\nu \;, \tag{1.64}$$

sendo que, para todo $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, a matriz $\gamma(\xi)$ é pseudo-simétrica em relação a este produto escalar. Porém, o critério de positividade formulado na Definição 1.3 não está satisfeito, pois qualquer uma das matrizes $\gamma(\xi)$ é singular, com núcleo $(n-1)$-dimensional dado por [11]

$$\ker \gamma(\xi) \;=\; \{0\} \oplus \langle \xi \rangle^\perp \;, \tag{1.65}$$

e mesmo se $\tau \in (\mathbb{R}^n)^*$ for um vetor tipo tempo, a forma bilinear simétrica $(\psi,\psi') \longmapsto \overline{\psi}\,\gamma(\tau)\,\psi'$ não é positiva nem no subespaço bidimensional

$$\ker \gamma(\tau)^\perp \;=\; \mathbb{R} \oplus \langle \tau \rangle \;. \tag{1.66}$$

Assim, essa redução covariante não é hiperbólica. ◇

Exemplo 1.7 (Equações de Maxwell) No espaço de Minkowski $M = \mathbb{R}^{1,3}$, considere as equações de Maxwell, que determinam o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o campo magnético $\boldsymbol{B}$ gerados por uma distribuição de cargas e correntes descrita por uma densidade de carga ρ e uma densidade de corrente $\boldsymbol{J}$, no sistema de unidades de Gauss: [12]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} \;&=\; 4\pi\rho \quad , & \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \;&=\; 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \;&=\; 0 \quad , & \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \;&=\; -4\pi\boldsymbol{J} \end{aligned} \tag{1.67}$$

As equações homogêneas são resolvidas pela introdução de um potencial escalar ϕ e um potencial vetorial $\boldsymbol{A}$, tais que

$$\boldsymbol{E} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \;. \tag{1.68}$$

Na formulação relativística, as componentes dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são reorganizadas como componentes de uma 2-forma F, enquanto que o potencial escalar ϕ e as componentes do

[11] Denotamos por $\langle\xi\rangle$ o subespaço unidimensional gerado pelo vetor ξ.

[12] O fator c representa a velocidade da luz e pode ser absorvido definindo $x^0 = ct$, o que implica $\partial_0 \equiv \partial/\partial x^0 = (1/c)\,\partial/\partial t$.

potencial vetorial $\boldsymbol{A}$, assim como a densidade de carga ρ e as componentes da densidade de corrente $\boldsymbol{J}$, são reorganizadas como componentes de 1-formas A e J, conforme

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{E} = (-F^{01}, -F^{02}, -F^{03}) = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) \ , \\
\boldsymbol{B} = (-F^{23}, -F^{31}, -F^{12}) = (-F_{23}, -F_{31}, -F_{12}) \ , \\
\phi = A^0 = A_0 \quad , \quad \boldsymbol{A} = (A^1, A^2, A^3) = (-A_1, -A_2, -A_3) \ , \\
c\rho = J^0 = J_0 \quad , \quad \boldsymbol{J} = (J^1, J^2, J^3) = (-J_1, -J_2, -J_3) \ ,
\end{gathered} \tag{1.69}$$

e então as equações de Maxwell assumem a forma

$$\begin{aligned}
\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} &= 0 \ , \\
\partial^\mu F_{\mu\nu} &= 4\pi \, J^\nu \ ,
\end{aligned} \tag{1.70}$$

ou seja,

$$\begin{gathered}
dF = 0 \ , \\
\delta F = 4\pi \, J \ ,
\end{gathered} \tag{1.71}$$

enquanto que as equações que expressam os campos em termos dos potenciais são

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ , \tag{1.72}$$

ou seja,

$$F = dA \ . \tag{1.73}$$

- **Inserção hiperbólica**: Combinando $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ em um campo $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^6)$ e inserindo a fonte $\boldsymbol{J}$ em um campo $j \in C^\infty(M, \mathbb{R}^6)$, conforme

$$\psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \quad , \quad j = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{J} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.74}$$

definimos

$$\gamma^0 = 1_6 \ , \tag{1.75}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ -\tau_1 & 0 \end{pmatrix} , \ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ -\tau_2 & 0 \end{pmatrix} , \ \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 \\ -\tau_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.76}$$

onde os τ_j $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ são as matrizes (3×3) antissimétricas que geram o grupo de rotações em $\mathbb{R}^3$, definidas por $(\tau_j)_{kl} = \epsilon_{jkl}$, ou seja,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \ \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.77}$$

e $\rho = 0$, de modo que a equação $\left(\gamma^\mu \partial_\mu + \rho\right) \psi = 4\pi j$ corresponde ao sistema das equações de evolução dentro das equações de Maxwell:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -4\pi \boldsymbol{J} \ . \tag{1.78}$$

Claramente, as outras duas equações de Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; 4\pi\rho \quad , \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; 0 \; , \tag{1.79}$$

constituem *vínculos* que são *compatíveis* com o sistema (1.78), no sentido de que este garante que eles são preservados sob a evolução temporal: se valem pare $t = 0$, digamos, então valem para todo t. Além disso, usando o produto escalar positivo definido canônico sobre $\mathbb{R}^6$ dado por

$$\overline{\psi}\,\psi' \;=\; \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}' \; , \tag{1.80}$$

observamos que as matrizes $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ são todas simétricas e a matriz γ^0 é positiva definida, o que significa que o sistema (1.78) é hiperbólico simétrico. Mas é claro que esse sistema hiperbólico por si não é covariante, pois é necessário misturar os vínculos com as equações de evolução para reestabelecer a covariância.

- **Inserção covariante (Petiau-Duffin-Kemmer, spin 1)** [16, 32, 45, 56]: Combinando A e F em um campo $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{10})$ e inserindo a fonte J em um campo $j \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{10})$, sendo que o espaço $\mathbb{R}^{10}$ que aparece aqui deve ser realmente visto como a soma direta de $(\mathbb{R}^4)^*$ com $\bigwedge^2 (\mathbb{R}^4)^*$, conforme

$$\psi \;=\; \begin{pmatrix} A \\ F \end{pmatrix} \quad , \quad j \;=\; \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{1.81}$$

definimos

$$\gamma(\xi) \;=\; \begin{pmatrix} 0_4 & i_2(\xi) \\ \mu_1(\xi) & 0_6 \end{pmatrix} \quad , \quad \rho \;=\; \begin{pmatrix} m^2\, 1_4 & 0 \\ 0 & -1_6 \end{pmatrix} . \tag{1.82}$$

onde $\mu_1(\xi)$ denota o operador de multiplicação exterior com ξ, aplicado a 1-formas, e $i_2(\xi)$ denota o operador de contração com o vetor $\xi^\sharp \in \mathbb{R}^4$ dado por $(\xi^\sharp)^\mu = \eta^{\mu\nu}\xi_\mu$, como antes, aplicado a 2-formas, de modo que a equação $\big(\gamma^\mu\partial_\mu + \rho\big)\,\psi \;=\; 4\pi j$ corresponde às equações de Proca

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \;&=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu \;&=\; 4\pi\, J^\nu \end{aligned} \quad , \tag{1.83}$$

ou seja,

$$\begin{gathered} F = dA \\ \delta F + m^2 A = 4\pi\, J \end{gathered} \quad . \tag{1.84}$$

que se reduzem às equações de Maxwell se $m = 0$. Note também que temos sobre $\mathbb{R}^{10}$ um produto escalar natural, porém não positivo definido, dado por

$$\overline{\psi}\,\psi' \;=\; \eta^{\mu\nu} A_\mu A'_\nu \;+\; \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} F_{\mu\nu} F'_{\kappa\lambda} \; , \tag{1.85}$$

sendo que, para todo $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, a matriz $\gamma(\xi)$ é pseudo-simétrica em relação a este produto escalar. Porém, o critério de positividade formulado na Definição 1.3

não está satisfeito, pois qualquer uma das matrizes $\gamma(\xi)$ é singular, com núcleo 4-dimensional dado por [9]

$$\ker \gamma(\xi) \;=\; \langle \xi \rangle \oplus \bigwedge^2 \langle \xi \rangle^\perp \;, \tag{1.86}$$

e mesmo se $\tau \in (\mathbb{R}^n)^*$ for um vetor tipo tempo, a forma bilinear simétrica $(\psi, \psi') \longmapsto \overline{\psi}\,\gamma(\tau)\,\psi'$ não é positiva nem no subespaço 6-dimensional

$$\ker \gamma(\tau)^\perp \;=\; \langle \tau \rangle^\perp \oplus \big(\langle \tau \rangle \wedge \langle \tau \rangle^\perp \big) \;. \tag{1.87}$$

Assim, essa redução covariante não é hiperbólica. ◇

Generalizações da "redução hiperbólica não-covariante" apresentada nestes últimos dois exemplos têm sido amplamente discutidas na literatura, sendo que todas elas se enquadram no âmbito geométrico de sistemas de equações diferenciais parciais em variedades lorentzianas globalmente hiperbólicas M, onde podemos escolher alguma função temporal global $t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cujos superfícies de nível $\Sigma_c = t^{-1}(c)$ $(c \in \mathbb{R})$ são superfícies de Cauchy: é esta a formalização matemática da ideia dos físicos da "decomposição do espaço-tempo em espaço + tempo" ("space + time split" ou "3 + 1 split"). Tal redução funciona bem inclusive para equações quase-lineares, entre elas algumas das mais importantes da Física Matemática como as equações de Yang-Mills e de Einstein, e ela pode ser construída de tal forma que a necessidade de fazer alguma escolha específica da função temporal, em conjunto com a folheação do espaço-tempo por ela gerada, seja a única e exclusiva fonte da quebra de covariância, i.e., de tal forma que a invariância sob qualquer simetria que preserva as folhas da referida folheação – o que inclui transformações de calibre, por exemplo – seja preservada (veja, por exemplo, [1, 20]). Como, em relatividade restrita, a transição entre escolhas diferentes de função temporal corresponde a uma transformação de Lorentz entre diferentes referenciais inerciais, diremos, por abuso de linguagem, que tal método de redução não é "covariante de Lorentz".

Sendo assim, resta a pergunta se não é possível encontrar um método de redução hiperbólica que seja também covariante de Lorentz, i.e., manifestamente independente da escolha de uma função temporal. Isso requer, quase como pré-requisito, a extensão do conceito de hiperbolicidade a sistemas com vínculos.

Nesta tese, apresentamos uma proposta concreta de como definir, de forma manifestamente covariante, o conceito de hiperbolicidade para sistemas sem vínculos. Ocorre que as condições de pseudo-hermiticidade e de positividade que ocupam a posição central nesta abordagem sugerem uma extensão quase que imediata para sistemas com vínculos, mas como mostram os exemplos acima, essa extensão infelizmente não funciona, de modo que, pelo menos por enquanto, o problema continua em aberto.

No entanto, é interessante notar que as duas reduções covariantes apresentadas no Exemplo 1.6 e no Exemplo 1.7 acima, apesar de por si só não serem hiperbólicas, podem ser consideradas como subsistemas de um sistema maior que, por sua vez, proporciona uma redução hiperbólica covariante da equação de onda: é a equação de Dirac discutida no Exemplo 1.5! No caso da equação de onda, ou mais geralmente, da equação de Klein-Gordon,

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi \;=\; 0 \;, \tag{1.88}$$

a ideia é aplicar o procedimento originalmente proposto por Dirac para reduzi-la à equação de Dirac,

$$\left(\gamma^\mu \partial_\mu + im1_N\right)\psi \;=\; 0 \;, \tag{1.89}$$

usando a fatorização do operador de Klein-Gordon no produto de dois operadores de Dirac (com termos de massa),

$$\left(\Box + m^2\right)1_N \;=\; \left(\gamma^\mu \partial_\mu + im1_N\right)\left(\gamma^\mu \partial_\mu - im1_N\right) \;, \tag{1.90}$$

que decorre da álgebra de Clifford,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \;=\; 2\,\eta^{\mu\nu}\,1_N \;. \tag{1.91}$$

Essa redução tem várias grandes vantagens: ela é hiperbólica, é covariante e não contém vínculos. O problema é que o número N de componentes do campo ψ que aparece na equação de Dirac é muito grande: na representação fundamental da álgebra de Clifford, temos $N = 2^{n/2}$ se N for par e $N = 2^{n-1/2}$ se N for ímpar, enquanto que na representação adjunta da álgebra de Clifford (cujo espaço de representação é a álgebra de Grassmann), vale $N = 2^n$: é este o caso que interessa aqui porque então os campos ψ são simplesmente formas diferenciais (não-homogêneneas), e o operador de Dirac $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$ é o operador $d + \delta$ onde δ é o dual de Hodge lorentziano de d [10,19], pois $(d+\delta)^2 = \Box$. Então ambos os sistemas de Petiau-Duffin-Kemmer aparecem como subsistemas do sistema de Dirac obtidos por truncamento: no caso do spin 0, mantemos apenas as componentes de ψ de grau 0 (φ) e 1 (α), enquanto que no caso de spin 1, mantemos apenas as componentes de ψ de grau 1 (A) e 2 (F), exigindo que todas as demais sejam iguais a zero: é esta a origem dos vínculos que encontramos nestes sistemas. Também vimos que se abrirmos mão da covariância, podemos separar estes vínculos das demais equações e colocar estas na forma de um sistema de equações de evolução que é hiperbólico simétrico no sentido tradicional. Resta então a questão se ainda existe outra forma de “redução hiperbólica covariante”, baseada em alguma modificação adequada da ideia de Dirac de fatorizar um operador diferencial de segunda ordem no produto de dois operadores diferenciais de primeira ordem, e que permita usar um número menor de componentes. Uma aplicação importante seriam as equações de Einstein (linearizadas), as quais não se enquadram no âmbito do complexo de Dirac acima mencionado por usar campos de tensores de segundo grau que são simétricos, em vez de antissimétricos.

Observamos também algo que deveria ser óbvio mas mesmo assim necessita de prova: as definições de operador elíptico e de operador hiperbólico simétrico no sentido da Definição 1.6 são mutuamente exclusivas:

Proposição 1.3 *Seja* $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ *um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial* E *sobre uma variedade* M*, com símbolo principal* $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$*. Então se o operador* $\not{D}$ *é elíptico, ele não pode ser hiperbólico simétrico, e se o operador* $\not{D}$ *é hiperbólico simétrico, ele não pode ser elíptico.*

Demonstração: Obviamente, as duas afirmações feitas na proposição são equivalentes, de modo que basta provar a segunda. Suponha então que $\not{D}$ é hiperbólico simétrico. Fixando um ponto m de M qualquer, considere o cone futuro cronológico $I_m^{*,+}$ e o cone futuro causal $J_m^{*,+}$, sendo que o primeiro não é vazio por hipótese e, conforme já foi notado, o segundo é o fecho do primeiro. Nestas hipóteses, um simples argumento de conexidade prova que $I_m^{*,+} \neq J_m^{*,+} \backslash \{0\}$. De fato, se estes dois conjuntos fossem iguais, então $I_m^{*,+}$ seria ao mesmo tempo aberto e fechado em $T_m^* M \backslash \{0\}$; como não é vazio, teria que ser igual a $T_m^* M \backslash \{0\}$, pois $T_m^* M \backslash \{0\}$ é conexo. (Usamos aqui que $n > 1$.) Mas isso é impossível, pois $\tau_m \in I_m^{*,+}$ e portanto $-\tau_m \notin I_m^{*,+}$. Portanto, concluímos que $J_m^{*,+} \backslash (I_m^{*,+} \cup \{0\})$ não pode ser vazio, e para $\xi_m \in J_m^{*,+} \backslash (I_m^{*,+} \cup \{0\})$, temos que a matriz $\gamma(\xi_m)$ é positiva semi-definida mas não é positiva definida, o que implica $\det \gamma(\xi_m) = 0$ com $\xi_m \neq 0$, ou seja, $\not{D}$ não pode ser elíptico. $\square$

Observação 1.5 Por fim, queremos elucidar a relação entre os conceitos de hiperbolicidade simétrica no sentido da Definição 1.6 e de hiperbolicidade fraca que, mais uma vez, se refere a sistemas de equações diferenciais parciais no espaço-tempo plano $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (ou algum aberto U nele), dados por um operador da forma (1.40): diz-se que tal sistema é *fracamente hiperbólico* se as raízes das matrizes A^k são todas reais. Como é bem conhecido [37, 41], esta condição é necessária para que o problema de Cauchy seja bem posto, mas ela está longe de ser suficente. Verifica-se então que, dado um operador $\not{D}$ que é hiperbólico simétrico no sentido da Definição 1.6, os operadores modificados $\not{D}_\phi^L$, com $\phi = \gamma(\tau)^{-1}$, e $\not{D}_\phi^R$, com $\phi = \gamma(\tau)$, também são hiperbólicos simétricos (veja a Observação 1.3) e portanto são fracamente hiperbólicos, pois são da forma (1.40) (veja as equações (1.35) e (1.36)) com matrizes A^k que são hermiteanas e logo têm raízes reais. No entanto, é conveniente enfatizar que isso *não* significa que as matrizes γ^μ que aparecem na representação local (8) do operador original $\not{D}$ tenham raízes reais: como já foi mencionado, a pseudo-hermiticidade destas matrizes implica apenas que essas raízes devem vir em pares complexos conjugados, e o operador de Dirac apresenta um exemplo paradigmático onde estas raízes são ± 1 em alguns casos e são $\pm i$ nos demais casos. $\diamond$

1.3 Estrutura causal

Como já foi visto no final da Seção 1.1, qualquer operador diferencial de primeira ordem que é hiperbólico simétrico em relação a uma métrica tipo Dirac hiperbólica induz uma "estrutura de cones" no fibrado tangente e também no fibrado cotangente da variedade base M – uma noção que podemos formalizar da seguinte forma:

Definição 1.7 *Dado um espaço vetorial V de dimensão finita, dizemos que um cone C em V é **próprio** se for convexo, fechado, unilateral e com interior não vazio; denotamos por $\mathrm{CP}(V)$ o conjunto de todos os cones próprios em V.*[13] *De modo semelhante, dado um fibrado vetorial V sobre uma variedade M, uma **estrutura de cones** em V é uma família $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ de cones próprios $C_m \in \mathrm{CP}(V_m)$ tal que, em torno de cada ponto m_0 de M, existem uma vizinhança aberta U de m_0 e uma trivialização local $V|_U \xrightarrow{\cong} U \times V_0$ de V que, para todo $m \in U$, mapea C_m no mesmo cone próprio fixo $C_0 \in \mathrm{CP}(V_0)$. Frequentemente, uma estrutura de cones no fibrado tangente TM de uma variedade M também será chamada de **estrutura causal** em M.*

Podemos dizer que conforme esta definição, uma estrutura de cones deve ser "localmente trivial" ou "localmente constante" (e portanto será de classe C^r se o próprio fibrado vetorial for de classe C^r): é uma condição padrão em geometria diferencial que, no entanto, é bem mais restritiva do que o conceito adotado em [18], onde se exige apenas um certo tipo de continuidade.

Uma observação inicial sobre estruturas de cones é que existe a noção de estrutura de cones dual, cuja construção é puramente algébrica.

Lema 1.1 *Dado um espaço vetorial V de dimensão finita, com espaço dual V^*, associa-se a cada subconjunto C de V o subconjunto C^* de V^* definido por*

$$C^* \;=\; \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle \geqslant 0 \;\; \text{para todo } v \in C\} \; . \tag{1.92}$$

*Então C^* é um cone convexo fechado em V^*, chamado o **cone dual** de C, e se C for um cone próprio, C^* também o será:*

$$C \in \mathrm{CP}(V) \quad \Longrightarrow \quad C^* \in \mathrm{CP}(V^*) \; . \tag{1.93}$$

Além disso, neste caso, o interior de C^* é dado por

$$(C^*)^\circ \;=\; \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle > 0 \;\; \text{para todo } v \in C \setminus \{0\}\} \; , \tag{1.94}$$

e vale $C^{**} = C$.

Para afirmações mais detalhadas, veja [12, Exercício 2.31, p. 64].

Definição 1.8 *Toda estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ em um fibrado vetorial V sobre uma variedade M induz uma estrutura de cones $\mathcal{C}^* = (C_m^*)_{m \in M}$ no fibrado dual V^* de V, chamada a **estrutura de cones dual**.*

[13] Seguimos aqui a terminologia de [12], mas o conceito utilizado em [18] é o mesmo, apesar de que a condição de unilateralidade é formulada de forma um pouco diferente: exige-se que um cone C próprio (chamado em [18] de cone completo) não deva conter nenhuma linha afim completa. Obviamente, essa condição implica unilateralidade. Reciprocamente, suponha que $L = \{v_0 + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ seja uma linha afim contida em C. Então dado qualquer $\lambda > 0$, $L_\lambda = \{\lambda v_0 + \beta v \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ também é uma linha afim contida em C (basta tomar $\beta = \alpha\lambda$, já que C é um cone), e tomando o limite $\lambda \to 0$, segue que L_0 é uma linha passando pela origem contida em C, já que C é fechado, o que contradiz a unilateralidade de C.

Por outro lado, podemos comparar diferentes estruturas de cones no mesmo fibrado vetorial, através da seguinte relação de ordem (parcial):

Definição 1.9 *Dadas duas estruturas de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m\in M}$ e $\mathcal{C}' = (C'_m)_{m\in M}$ em um fibrado vetorial V sobre uma variedade M, dizemos que $\mathcal{C}$ é mais **ampla** que $\mathcal{C}'$, e escrevemos $\mathcal{C} \succ \mathcal{C}'$ ou $\mathcal{C}' \prec \mathcal{C}$, se para todo ponto m de M, o cone C'_m, apos remoção do seu vértice na origem de V_m, é contido no interior do cone C_m:*

$$\mathcal{C}' \prec \mathcal{C} \iff C'_m \setminus \{0\} \subset C^\circ_m \text{ para todo } m \in M \ . \tag{1.95}$$

Passamos a apresentar alguns exemplos de estruturas de cones, sendo que o último é de importância central neste trabalho.

Exemplo 1.8 Dado um fibrado vetorial V sobre uma variedade M, munido de uma métrica nas fibras positiva definida, os endomorfismos positivos definidos em V proporcionam uma estrutura de cones no fibrado vetorial $L(V)$. (Note que qualquer trivialização local de V que é ortonormal em relação à referida métrica nas fibras induz uma trivialização local de $L(V)$ em que essa estrutura de cones se torna localmente constante.) ◇

Exemplo 1.9 Dada uma variedade lorentziana orientada no tempo M, os vetores tangentes causais futuros (ou passados) proporcionam uma estrutura de cones no fibrado tangente TM e os vetores cotangentes causais futuros (ou passados) proporcionam uma estrutura de cones no fibrado cotangente T^*M. (Note que essa estrutura de cones é localmente constante em qualquer referencial local ortonormal de M.) ◇

Exemplo 1.10 Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M que é hiperbólico simétrico em relação a uma métrica tipo Dirac hiperbólica e com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ que é injetor. Então os vetores tangentes causais futuros (ou passados) proporcionam uma estrutura de cones no fibrado tangente TM e os vetores cotangentes causais futuros (ou passados) proporcionam uma estrutura de cones no fibrado cotangente T^*M. (Note que essas estruturas de cones são localmente constantes em relação a cartas locais de M e trivializações locais de E construídas conforme explicado na Observação 1.1.) ◇

Notamos que, neste último exemplo, a condição de que γ seja injetor é essencial, pois caso contrário, os $J^{*,+}_m$ deixam de ser unilaterais (veja a Proposição 1.2) e os J^+_m deixam de ter interior não-vazio (pois segue da equação (1.24) que $J^{*,+}_m$ contém uma reta inteira se e somente se J^+_m é contido em um hiperplano). Um caso extremo de contra-exemplo, com γ possuindo um núcleo de codimensão 1, já foi apresentado no Exemplo 1.4: claramente, naquele caso, é impossível encontrar um critério para decidir qual seria a variável a ser chamada de tempo e quais seriam as variáveis espaciais.

Observação 1.6 Uma das dificuldades principais para mostrar que um determinado operador é hiperbólico simétrico reside na tarefa de construir uma métrica tipo Dirac hiperbólica associada ao seu símbolo principal.[14] Um método natural para abordar esse problema é em dois passos: no primeiro, a construção é feita localmente, usando coordenadas e trivializações locais, enquanto que o segundo consiste de "amalgamar" as diversas métricas tipo Dirac hiperbólicas locais assim obtidas, através de uma partição da unidade. Porém, é bem conhecido que esse procedimento de "colagem" funciona bem apenas para estruturas com a propriedade de que o conjunto de todas as estruturas do tipo em questão em um espaço vetorial fixo forma um cone convexo: um exemplo típico são formas sesquilineares hermiteanas positivas definidas e um contra-exemplo são formas sesquilineares hermiteanas não-degeneradas que não são positivas definidas.[15] De modo semelhante, nem sempre podemos construir uma métrica tipo Dirac global por amalgamação de métricas tipo Dirac locais, uma vez que, frequentemente, tais métricas não são positivas definidas. Felizmente, a condição adicional de hiperbolicidade cura mais esse defeito:

Proposição 1.4 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$, e seja $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ uma estrutura causal em M. Suponha que M admite um recobrimento aberto $(U_i)_{i \in I}$ tal que para todo $i \in I$, o operador $\not{D}_{U_i} : \Gamma(U_i, E) \longrightarrow \Gamma(U_i, E)$ é hiperbólico simétrico de modo que para todo ponto m de U_i, o seu cone futuro cronológico contém o cone dual C_m^*. Então $\not{D}$ é hiperbólico simétrico de modo que para todo ponto m de M, o seu cone futuro cronológico $I_m^{*,+}$ contém o cone dual C_m^*.*

Demonstração: Passando a um refinamento adequado se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que o recobrimento aberto $(U_i)_{i \in I}$ de M já é localmente finito e introduzir uma partição da unidade subjacente $(\chi_i)_{i \in I}$. Então denotando a métrica tipo Dirac hiperbólica para $\not{D}_{U_i}$ por $(u, v) \longmapsto (\overline{u}\, v)_i$, definimos

$$\overline{u}\, v \; = \; \sum_{i \in I} \chi_i \, (\overline{u}\, v)_i \; ,$$

e assim obtemos uma métrica tipo Dirac hiperbólica para $\not{D}$, pois por hipótese temos que se $m \in M$, $\tau \in C_m^*$ e $u \in E_m \setminus \{0\}$, vale $(\overline{u}\, \gamma(\tau)\, u)_i > 0$ para todo $i \in I$ tal que $m \in U_i$, o que implica $\overline{u}\, \gamma(\tau)\, u > 0$. □

Com o conceito geral de uma estrutura de cones à disposição e os exemplos dados acima em mente, a estratégia geral será seguir os procedimentos da geometria lorentziana para "integrar" uma tal estrutura de cones "infinitesimal" (no fibrado tangente TM) para

[14] Note que na Observação 1.1, abordamos apenas a questão como passar da condição pontual formulada na Definição 1.3 para uma condição local e em seguida para uma condição global, mas supondo que uma métrica tipo Dirac seja dada, ou já tenha sido construída.

[15] Uma consequência imediata e bem conhecida desta observação é que toda variedade admite uma métrica riemanniana mas nem sempre admite uma métrica lorentziana.

uma estrutura causal "global" (na própria variedade M), criando toda uma hierarquia de noções tais como espaços-tempos *causais*, *fortemente causais*, *estavelmente causais* etc. [30, 43], e com o conceito de um espaço-tempo *globalmente hiperbólico* reinando no topo da "escada causal"; veja as notas de Minguzzi e Sánchez [40] para maiores detalhes. Essa jornada, que no âmbito da Relatividade Geral levou 50 anos a ser completada, é imensamente facilitada e abreviada pela existência do recente trabalho de Fathi e Siconolfi [18], que até trata de uma noção de estrutura de cones mais geral do que seria necessário aqui. Sendo assim, podemos nos restringir a apresentar algumas das definições mais importantes e citar os resultados principais.

Quanto à natureza das curvas a serem empregadas, seguiremos o que já se tornou costume nesta área e admitiremos não apenas curvas suaves ou suaves por partes mas, mais geralmente, *curvas lipschitzianas*, pois essas apresentam um melhor comportamento em relação a certos tipos de limite que aparecem em algumas das demonstrações.

> Brevemente, lembramos que uma curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, é chamada lipschitziana se existe uma constante $C > 0$, chamada de constante de Lipschitz, tal que $|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leqslant C\,|t_2 - t_1|$, para $t_1, t_2 \in [a,b]$. De modo semelhante, uma curva $\alpha : (a,b) \longrightarrow U$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, é chamada lipschitziana se a sua restrição a qualquer subintervalo compacto de (a,b) for lipschitziana. Como essa condição é invariante sob difeomorfismos de classe C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$ e também sob decomposição do intervalo de definição em um número finito de subintervalos, assim como sob o processo inverso de tomar uma união finita de subintervalos de definição, a noção se estende naturalmente a variedades: uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$, onde I é um intervalo (compacto ou aberto) e M é uma variedade, é chamada lipschitziana se para cada carta (U,φ) de M e cada subintervalo compacto $[c,d]$ de I com $\alpha([c,d]) \subset U$, a curva $\varphi \circ \alpha|_{[c,d]} : [c,d] \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ for lipschitziana. Obviamente, curvas lipschitzianas são contínuas e curvas de classe C^1 por partes são lipschitzianas; além disso, é conhecido que curvas lipschitzianas são diferenciáveis em quase todo ponto do seu intervalo de definição.

Deste modo, podemos introduzir a seguinte terminologia:

Definição 1.10 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m\in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M e uma curva lipschitziana $\alpha : I \longrightarrow M$ em M, dizemos que α é* ***causal*** *(para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**causal**, se $\dot\alpha(t) \in C_{\alpha(t)}$ para quase todo $t \in I$, e que α é **tipo tempo** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**temporal**, se $\dot\alpha(t) \in C^\circ_{\alpha(t)}$ para quase todo $t \in I$, onde C°_m denota o interior de C_m.*

Note que aqui é desnecessário distinguir entre curvas $\mathcal{C}$-causais ou $\mathcal{C}$-temporais futuras e passadas, uma vez que a unilateralidade dos cones C_m já induz uma direcão temporal preferida que, por convenção, imaginamos ser ao futuro.

Definição 1.11 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M e uma curva $\mathcal{C}$-causal $\alpha : (a,b) \longrightarrow M$ em M, dizemos que α é* ***inestendível ao futuro*** *se não existir o limite $\lim_{t \nearrow b} \alpha(t)$,* ***inestendível ao passado*** *se não existir o limite $\lim_{t \searrow a} \alpha(t)$ e simplesmente* ***inestendível*** *se for inestendível tanto ao futuro como ao passado.*

Definição 1.12 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M e dados dois pontos $p, q \in M$, dizemos que uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$* ***liga*** *ou* ***conecta*** *p a q se existirem $a, b \in I$ tais que $a \leqslant b$ e $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, e escrevemos $p \ll q$ se existir uma curva $\mathcal{C}$-temporal ligando p a q, e $p \leqslant q$ se existir uma curva $\mathcal{C}$-causal ligando p a q. Então o* ***futuro $\mathcal{C}$-cronológico*** *de um ponto m de M e, mais geralmente, de um subconjunto A de M é o subconjunto de M definido por*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{+}(m) \;=\; \{m' \in M \mid m \ll m'\} \quad , \quad \mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{+}(A) \;=\; \bigcup_{m \in A} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{+}(m) \ , \tag{1.96}$$

e o ***futuro $\mathcal{C}$-causal*** *de um ponto m de M e, mais geralmente, de um subconjunto A de M é o subconjunto de M definido por*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{+}(m) \;=\; \{m' \in M \mid m \leqslant m'\} \quad , \quad \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{+}(A) \;=\; \bigcup_{m \in A} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{+}(m) \ . \tag{1.97}$$

De forma análoga, definimos o ***passado $\mathcal{C}$-cronológico***

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{-}(m) \;=\; \{m' \in M \mid m' \ll m\} \quad , \quad \mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{-}(A) \;=\; \bigcup_{m \in A} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}^{-}(m) \ , \tag{1.98}$$

e o ***passado $\mathcal{C}$-causal***

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{-}(m) \;=\; \{m' \in M \mid m' \leqslant m\} \quad , \quad \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{-}(A) \;=\; \bigcup_{m \in A} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{-}(m) \ . \tag{1.99}$$

Geometricamente, podemos imaginar o futuro e o passado (cronológico ou causal) de um subconjunto A de M como um "cone deformado" que "se abre" a partir de A, mas também podemos definir um conceito que, no mesmo sentido intuitivo, representa um "cone deformado" que "se fecha" a partir de A:

Definição 1.13 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M e um subconjunto fechado A de M, o* ***domínio de dependência (futuro)*** *de A é o subconjunto $D_{\mathcal{C}}^{+}(A)$ de M definido por*

$$D_{\mathcal{C}}^{+}(A) \;=\; \Big\{m \in M \;\Big|\; \begin{array}{c}\text{toda curva } \mathcal{C}\text{-temporal inestendível ao passado} \\ \text{passando por } m \text{ intersecta } A\end{array}\Big\} \ . \tag{1.100}$$

De forma análoga, o ***domínio de dependência (passado)*** *de A é o subconjunto $D_{\mathcal{C}}^{-}(A)$ de M definido por*

$$D_{\mathcal{C}}^{-}(A) \;=\; \Big\{m \in M \;\Big|\; \begin{array}{c}\text{toda curva } \mathcal{C}\text{-temporal inestendível ao futuro} \\ \text{passando por } m \text{ intersecta } A\end{array}\Big\} \ , \tag{1.101}$$

Finalmente, o ***domínio de dependência*** *de A é a união $D_{\mathcal{C}}(A) = D_{\mathcal{C}}^{+}(A) \cup D_{\mathcal{C}}^{-}(A)$.*

Observamos que poderíamos ter formulado a mesma definição substituindo curvas $\mathcal{C}$-temporais por curvas $\mathcal{C}$-causais, como é feito, por exemplo, em [30]. No entanto, pode ser provado que se definirmos

$$\tilde{D}^{+}_{\mathcal{C}}(A) \;=\; \left\{ m \in M \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{toda curva } \mathcal{C}\text{-causal inestendível ao passado}\\ \text{passando por } m \text{ intersecta } A\end{array} \right\}, \tag{1.102}$$

e

$$\tilde{D}^{-}_{\mathcal{C}}(A) \;=\; \left\{ m \in M \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{toda curva } \mathcal{C}\text{-causal inestendível ao futuro}\\ \text{passando por } m \text{ intersecta } A\end{array} \right\}, \tag{1.103}$$

então $D^{\pm}_{\mathcal{C}}(A)$ é melhor comportado do que $\tilde{D}^{\pm}_{\mathcal{C}}(A)$, pois $D^{\pm}_{\mathcal{C}}(A)$ é sempre fechado e, de fato, é exatamente o fecho de $\tilde{D}^{\pm}_{\mathcal{C}}(A)$: a demonstração desta afirmação no âmbito da geometria lorentziana, encontrada em [30, Prop. 6.5.1, p. 202], pode ser generalizada para estruturas causais mais gerais, no sentido da Definição 1.7, de maneira imediata.

Posto isso, podemos introduzir algumas propriedades importantes de estruturas causais em variedades que, de forma óbvia, generalizam as correspondentes noções da geometria lorentziana.

Definição 1.14 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M, dizemos que M é*

- ***cronológica** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**cronológica**, se M não contém curvas $\mathcal{C}$-temporais fechadas;*

- ***causal** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**causal**, se M não contém curvas $\mathcal{C}$-causais fechadas;*

- ***estavelmente causal** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou **estavelmente** $\mathcal{C}$-**causal**, se existir uma estrutura de cones $\mathcal{C}' = (C'_m)_{m \in M}$ em TM mais ampla (i.e., tal que $\mathcal{C}' \succ \mathcal{C}$) e tal que M não contém curvas $\mathcal{C}'$-causais fechadas;*

- ***globalmente hiperbólica** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se é estavelmente $\mathcal{C}$-causal e se, para quaisquer dois pontos p e q de M, o **diamante causal***

$$\mathcal{J}^{+}(p) \cap \mathcal{J}^{-}(q) \;=\; \left\{ m \in M \mid p \leqslant m \leqslant q \right\} \tag{1.104}$$

  é um compacto (possivelmente vazío).

Ressaltamos que essa definição de hiperbolicidade global é equivalente à definição adotada em [18]; veja [18, Prop. 4.3 & Lemma 4.4].

Para esclarecer a relação entre hiperbolicidade global e o conceito de superfície de Cauchy, precisamos de mais algumas definições.

Definição 1.15 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M, com estrutura de cones dual $\mathcal{C}^* = (C_m^*)_{m \in M}$ no seu fibrado cotangente T^*M, dizemos que uma hipersuperfície (i.e., uma subvariedade de codimensão 1) Σ de M é **tipo espaço** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se seu campo conormal ν for $\mathcal{C}^*$-temporal, i.e., se $\pm\nu_m \in (C_m^*)^\circ$ para todo $m \in \Sigma$, e que é **fracamente tipo espaço** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se seu campo conormal ν for $\mathcal{C}^*$-causal, i.e., se $\pm\nu_m \in C_m^*$ para todo $m \in \Sigma$.*

Notemos que o campo conormal de uma hipersuperfície não é unico (isso só seria o caso se fixarmos uma normalização em relação a alguma métrica e, ainda, uma orientação). Aqui, estamos na situação mais geral onde o campo conormal $\nu \in \Gamma(T^*M|_\Sigma)$ é determinado a menos de multiplicação por uma função $h \in C^\infty(\Sigma)$, $h \neq 0$, pela condição de que

$$\ker \nu_m \;=\; T_m\Sigma \quad \text{para todo } m \in \Sigma\ . \tag{1.105}$$

No entanto, as condições formuladas na Definição 1.15 são invariantes sob multiplicação de tal ν por tal h. Em particular, usando o Lema 1.1, vemos que Σ será tipo espaço se e somente se nenhum vetor tangente a Σ ($\neq 0$) for $\mathcal{C}$-causal,

$$\Sigma \text{ é tipo espaço} \quad\Longleftrightarrow\quad C_m \cap T_m\Sigma \;=\; \{0\} \quad \text{para todo } m \in \Sigma\ , \tag{1.106}$$

enquanto que Σ será fracamente tipo espaço se e somente se nenhum vetor tangente a Σ for $\mathcal{C}$-temporal,

$$\Sigma \text{ é fracamente tipo espaço} \quad\Longleftrightarrow\quad C_m^\circ \cap T_m\Sigma \;=\; \emptyset \quad \text{para todo } m \in \Sigma\ . \tag{1.107}$$

Definição 1.16 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m \in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M, dizemos que um subconjunto A de M é*

- ***acronal** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**acronal**, se qualquer curva $\mathcal{C}$-temporal em M intersectar A no máximo uma vez;*
- ***acausal** (para ou em relação a $\mathcal{C}$), ou $\mathcal{C}$-**acausal**, se qualquer curva $\mathcal{C}$-causal em M intersectar A no máximo uma vez;*
- *uma **superfície fracamente de Cauchy** se A for $\mathcal{C}$-acronal e $D_{\mathcal{C}}(A) = M$;*
- *uma **superfície de Cauchy** se A for $\mathcal{C}$-acausal e $D_{\mathcal{C}}(A) = M$.*

Notamos que, nesta definição, seguimos a clássica convenção de [30], segundo a qual uma superfície de Cauchy é acausal (e portanto necessariamente tipo espaço), enquanto que em muitos outros trabalhos, supõe-se apenas que ela seja acronal (e portanto necessariamente fracamente tipo espaço). Assim, no âmbito da geometria lorentziana, as superfícies de Cauchy de [40] correspondem, na terminologia aqui adotada, às superfícies fracamente de Cauchy, enquanto que o que nos chamamos de superfícies de Cauchy corresponde às superfícies de Cauchy tipo espaço de [40] – um termo que, de um ponto de vista ingênuo, parece ser um pleonasmo que gostaríamos de evitar.

O último conceito que desempenha um papel importante na teoria das estruturas causais é o de uma função temporal:

Definição 1.17 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m\in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M, com estrutura de cones dual $\mathcal{C}^* = (C_m^*)_{m\in M}$ no seu fibrado cotangente T^*M, dizemos que uma função $t : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função tipo tempo** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se t for estritamente crescente sobre qualquer curva $\mathcal{C}$-causal não constante em M, e que t é uma **função temporal** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se for de classe C^∞ e tal que*

$$dt_m \in (C_m^*)^\circ \quad \textit{para todo } m \in M \ . \tag{1.108}$$

*Finalmente, dizemos que uma função tipo tempo ou temporal é uma **função de Cauchy** (para ou em relação a $\mathcal{C}$) se sua restrição a qualquer curva $\mathcal{C}$-causal inestendível em M já tiver a mesma imagem (em $\mathbb{R}$) que a função completa sobre M.*

As propriedades principais de uma variedade globalmente hiperbólica em relação a uma determinada estrutura causal estão resumidas no seguinte teorema, cuja demonstração no âmbito da geometria lorentziana se basea em resultados de Geroch [23] e de Bernal e Sánchez [6–8] (veja também [40]), enquanto que o resultado correspondente para estruturas de cones gerais (e de fato ainda mais gerais do que as consideradas aqui) foi obtido por Fathi e Siconolfi [18].

Teorema 1.1 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m\in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M n-dimensional conexa, temos que M é globalmente hiperbólica se e somente se M contém uma superfície de Cauchy. Neste caso, existem uma variedade Σ $(n-1)$-dimensional conexa e uma função temporal de Cauchy t que proporcionam um difeomorfismo $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ tal que todas suas superfícies de nível $\Sigma_c = t^{-1}(c) \cong \{c\} \times \Sigma$ são superfícies de Cauchy.*

1.4 Definição de operador globalmente hiperbólico

Finalmente, podemos formular a definição do conceito que constitui o título desta tese.

Definição 1.18 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M conexa, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ injetor. Dizemos que $\not{D}$ é um **operador globalmente hiperbólico** se $\not{D}$ for hiperbólico simétrico e se M for globalmente hiperbólica em relação à estrutura causal induzida por γ.*

Localmente, ou seja, quando restrito a uma vizinhança aberta adequada de cada ponto da variedade base, um operador hiperbólico simétrico é sempre globalmente hiperbólico:

Proposição 1.5 *Seja $D\!\!\!/ : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M que é hiperbólico simétrico em relação a uma métrica tipo Dirac hiperbólica e com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ que é injetor. Então a estrutura causal associada ao operador é localmente globalmente hiperbólica.*

Demonstração: Usando a estrutura causal induzida por $D\!\!\!/$ conforme definida no Exemplo 1.10, queremos provar que em torno de cada ponto m_0 da variedade M existe uma vizinhança aberta U tal que $D\!\!\!/_U : \Gamma(E|_U) \longrightarrow \Gamma(E|_U)$ é globalmente hiperbólico. Suponha que $\tau_{m_0} \in I^{*,+}_{m_0}$ e escolha um cone próprio C_{m_0} em $T_{m_0}M$, com cone dual $C^*_{m_0}$ em $T^*_{m_0}M$, tal que $\tau_{m_0} \in (C^*_{m_0})^\circ \subset C^*_{m_0} \setminus \{0\} \subset I^{*,+}_{m_0}$ e portanto $J^+_{m_0} \setminus \{0\} \subset (C_{m_0})^\circ$. Fixando uma carta local de M e uma trivialização local de E, ambas em torno de m_0 e com domínio comum V, digamos, podemos introduzir (a) uma 1-forma τ sobre V cujo valor em m_0 é τ_{m_0} e que em relação à referida carta é constante, com valor igual a algum $\tau_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$, digamos, de modo que vale $d\tau = 0$, e (b) uma estrutura causal $\mathcal{C}_V = (C_m)_{m \in V}$ em V cujo valor em m_0 é C_{m_0} e que em relação à referida carta é constante, com valor igual a algum cone próprio fixo C_0 em $\mathbb{R}^n$, digamos, de modo que como estruturas de cones, $\mathcal{C}_V$ é mais ampla do que $J^+|_V$ enquanto que $J^{*,+}|_V$ é mais ampla do que $\mathcal{C}^*_V$. Então passando a uma vizinhança aberta menor U de m_0 se necessário, podemos supor que existe uma função t sobre U tal que $\tau = dt$ sobre U e $\tau(m) \in (C^*_m)^\circ \subset C^*_m \setminus \{0\} \subset I^{*,+}_m$ para todo $m \in U$, e aplicando uma transformação linear de coordenadas, podemos supor ainda que a função t é a primeira coordenada e, nesta nova carta, o domínio U corresponde ao produto cartesiano de algum intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$ com uma bola em torno da origem em $\mathbb{R}^{n-1}$. Com estas escolhas, o critério do Teorema 1.1 mostra que U é globalmente hiperbólica em relação à estrutura causal induzida por $D\!\!\!/_U$. $\square$

É de se esperar que os operadores globalmente hiperbólicos constituem a classe de operadores diferenciais lineares de primeira ordem para a qual será possível provar todos os teoremas importantes da teoria das equações diferenciais parciais hiperbólicas, tais como sobre a existência e unicidade de soluções do problema inicial, ou problema de Cauchy, assim como sua boa postura, ou sobre existência de funções de Green de vários tipos, entre eles a retardada, a avançada e a causal.

A grande vantagem da abordagem aqui proposta é que ela permite tratar de operadores que não são associados a nenhuma métrica lorentziana na variedade base. Mas é claro que existem, e são de grande importância, situações onde há uma métrica lorentziana subjacente, sendo que o operador de Dirac proporciona o exemplo mais importante para tal tipo de situação. Neste caso, como veremos na Proposição 3.3, as estruturas causais definidas pelo operador e pela métrica do espaço-tempo coincidem. No entanto, o exemplo do operador de Dirac tende a camuflar o fato de que, em princípio, os dois tipos de estrutura causal podem ser distintas e que o operador gera a sua própria estrutura causal, mesmo na ausência de uma métrica lorentziana.

Sendo assim, propomos que os operadores globalmente hiperbólicos, no âmbito de sistemas de primeira ordem considerado aqui, constituem o análogo de certas classes importantes de operadores diferenciais lineares de segunda ordem, tais como os operadores normalmente hiperbólicos [3, 57] e os pre-normalmente hiperbólicos [42] em variedades lorentzianas globalmente hiperbólicas, para as quais também existem teoremas globais sobre existência e unicidade de soluções e boa postura do problema de Cauchy.

No próximo capítulo, apresentaremos como um primeiro passo nessa direção um teorema de existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy dentro de um certo tipo de região que chamamos de "cone truncado". Aqui, queremos apresentar brevemente este tipo de subconjunto.

Definição 1.19 *Dada uma estrutura de cones $\mathcal{C} = (C_m)_{m\in M}$ no fibrado tangente TM de uma variedade M, com estrutura de cones dual $\mathcal{C}^* = (C_m^*)_{m\in M}$ no seu fibrado cotangente T^*M, e dado um compacto K de M que é igual ao fecho do seu interior, dizemos que K é um* ***cone truncado*** *se existirem subvariedades de codimensão 1 tipo espaço Σ_0 e Σ_1 e uma subvariedade de codimensão 1 fracamente tipo espaço L tais que $\partial K = K_0 \cup K_1 \cup L$, onde*

- $K_0 = K \cap \Sigma_0$ *é uma subvariedade com bordo ∂K_0;*
- $K_1 = K \cap \Sigma_1$ *é uma subvariedade com bordo ∂K_1;*
- $K_L = K \cap L$ *é uma subvariedade com bordo ∂K_L;*

com $\partial K_L = \partial K_0 \,\dot\cup\, \partial K_1$, $K_0 \cap L = \partial K_0 = K_L \cap \Sigma_0$ e $K_1 \cap L = \partial K_1 = K_L \cap \Sigma_1$ (veja a Figura 1.1). No caso especial em que podemos dispensar as subvariedades L e K_L (i.e., o "manto" do cone) e escrever o bordo de K diretamente na forma $\partial K = K_0 \cup K_1$, dizemos que K é um compacto ***tipo lente****.*

A ideia por trás deste conjunto de condições é que, tipicamente, Σ_0 e Σ_1 serão superfícies de Cauchy, sendo a primeira a "superfície inicial" e a segunda a "superfície final", e que o comportamento de uma solução da equação diferencial associada ao operador em questão em um compacto K_1 de Σ_1 será completamente determinado a partir dos dados iniciais em um compacto correspondente K_0 de Σ_0, pois nenhuma informação que provém de fora de K_0 pode atravessar o manto K_L da região K.

Observação 1.7 Uma das dificuldades técnicas a serem superadas para aplicar teoremas padrão de geometria diferencial a regiões tais como estes cones truncados consiste no fato de que um cone truncado não é uma variedade, e nem uma variedade com bordo, no sentido usual; é uma "variedade com cantos". Tradicionalmente, esta generalização do conceito de variedade com bordo tem sido pouco estudada, com a notável exceção do tratamento que pode ser encontrado em [38, pp. 363-370], onde se prova que o teorema de Stokes permanece válido neste contexto. Contudo, no caso de um cone truncado K, a situação é um pouco mais simples pois o bordo ∂K, apesar de não ser uma variedade sem bordo, pode ser escrito como a união de um número finito (de fato, três, no máximo) subvariedades com bordo, de codimensão 1, tal que a união de todos os bordos destas subvariedades se decompõe naturalmente em um número finito (de fato, duas, no máximo) subvariedades sem bordo, de codimensão 2.

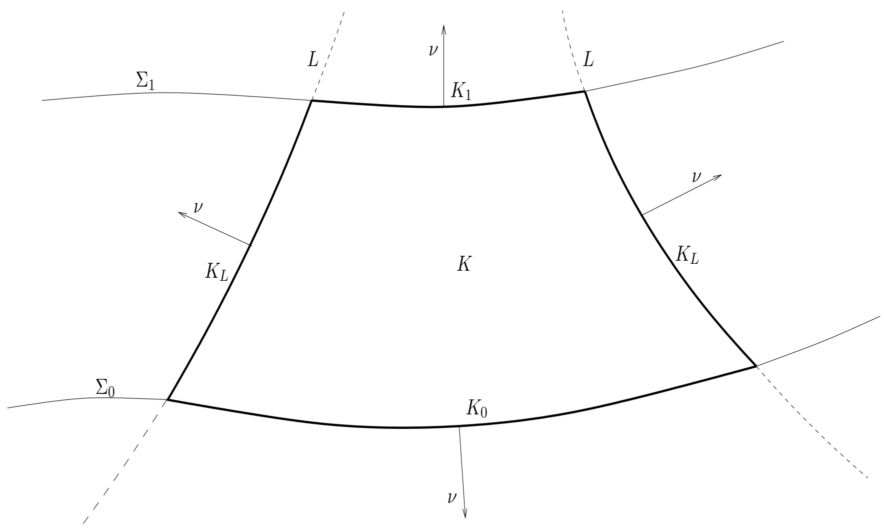

Figura 1.1: Cone truncado

Isto implica, por exemplo, que o "campo conormal exterior" de um cone truncado K, e que aparece no teorema de Stokes, tem as seguintes propriedades:

- é bem definido sobre o interior $K_0^\circ = K_0 \setminus \partial K_0$ de K_0 em Σ_0, e ali é um campo $\mathcal{C}$-cronológico passado,

$$-\nu_m \in (C_m^*)^\circ \quad \text{para } m \in K_0 \setminus \partial K_0 \; ; \tag{1.109}$$

- é bem definido sobre o interior $K_1^\circ = K_1 \setminus \partial K_1$ de K_1 em Σ_1, e ali é um campo $\mathcal{C}$-cronológico futuro,

$$\nu_m \in (C_m^*)^\circ \quad \text{para } m \in K_1 \setminus \partial K_1 \; ; \tag{1.110}$$

- é bem definido sobre o interior $K_L^\circ = K_L \setminus \partial K_L$ de K_L em L, e ali é um campo $\mathcal{C}$-causal futuro,

$$\nu_m \in C_m^* \quad \text{para } m \in K_L \setminus \partial K_L \; ; \tag{1.111}$$

- e possui uma ambiguidade inerente sobre os bordos compartilhados ∂K_0 (onde pode ser o campo conormal a Σ_0, ν_0, que é $\mathcal{C}$-cronológico passado, ou o campo conormal a L, ν_L, que é $\mathcal{C}$-causal futuro) e ∂K_1 (onde pode ser o campo conormal a Σ_1, ν_1, que é $\mathcal{C}$-cronológico futuro, ou o campo conormal a L, ν_L, que é $\mathcal{C}$-causal futuro).

Felizmente, a ambiguidade apontada no último item permanece inócua pois ∂K_0 e ∂K_1 são de medida zero em K_0 e em K_1. $\diamond$

1.5 Considerações adicionais

Os operadores hiperbólicos simétricos considerados nesta tese são realmente operadores hiperbólicos simétricos *regulares* ou *não degenerados*: usar esta expressão deixaria mais claro que aqui estamos trabalhando apenas com sistemas sem indeterminações de qualquer tipo, excluindo sistemas subdeterminados e/ou sobredeterminados. Um próximo passo no desenvolvimento do formalismo seria estender essa definição de hiperbolicidade ao caso de sistemas com vínculos e/ou liberdade de calibre. Isso requer um estudo detalhado das condições que, em tais sistemas, são necessárias para poder formular e resolver o problema de valor inicial. Trata-se de uma questão de interesse central, pois vários dos operadores hiperbólicos mais importantes da Física Matemática apresentam vínculos de algum tipo e/ou invariância de calibre, por exemplo as equações de Maxwell, Yang-Mills e Einstein, ou as equações de De Donder-Weyl da teoria clássica dos campos.

Dada a relevância de tais sistemas, seria interessante fazer um estudo relacionando nossa definição de hiperbolicidade com a teoria já existente de sistemas involutivos [13,46,49]. Lembramos aqui que esta teoria é desenvolvida em nível formal, sem preocupação com questões de análise, focando apenas as estruturas algébricas e/ou geométricas envolvidas. A título de exemplo, podemos citar o teorema de Cartan-Kähler, que estabelece condições de integrabilidade para sistemas involutivos e pode ser entendido como uma extensão do teorema de Cauchy-Kovalevskaya a sistemas degenerados. A questão de como relacionar hiperbolicidade com involutividade também já foi abordada [49, 58], mas usando uma definição de hiperbolicidade que não é covariante, pois depende de uma decomposição preferida do espaço-tempo, o que leva a decompor o operador em questão em duas partes bem diferentes: uma delas é um operador diferencial hiperbólico não degenerado na forma de um operador de evolução, enquanto que a outra é um operador diferencial (tipicamente elíptico) agindo somente nas variáveis espaciais. Porém, acreditamos que estas tentativas ainda são incompletas, sendo que a teoria dos sistemas involutivos é covariante e portanto deveria ser combinada com um conceito de hiperbolicidade também covariante.

Capítulo 2

O problema de valor inicial

Neste capítulo, formulamos o problema de valor inicial para um operador hiperbólico simétrico conforme definido no primeiro capítulo e provamos o teorema básico de existência e unicidade de soluções (versão local). Para isto é necessário introduzir vários conceitos técnicos, entre eles (a) o do adjunto formal de um operador diferencial em um fibrado vetorial em relação a uma determinada métrica nas fibras e, ainda, uma densidade na variedade base, e (b) uma versão local dos já mencionados espaços de Sobolev. Essas ferramentas nos permitirão demonstrar as estimativas "a priori" [1] para um operador hiperbólico simétrico, no sentido da Definição 1.6, de maneira manifestamente covariante, ou seja, sem fazer uso de uma cisão do espaço-tempo em espaço+tempo, a qual envolve a escolha de uma coordenada tempo como parâmetro distinguido para poder aplicar as técnicas da teoria de operadores de evolução. Como de costume, tais estimativas permitem provar um teorema de existência e unicidade para o problema de valor inicial.

Para poder simplificar nossa apresentação vamos supor no que segue que a variedade base M é *orientável* e, de fato, *orientada*, i.e., que uma orientação particular tem sido escolhida. Neste caso, para fins de integração, podemos substituir densidades por formas de volume. Isto não acarreta quase nenhuma perda de generalidade, pois sempre podemos voltar a incluir o caso não orientável reformulando nossos resultados simplesmente efetuando a substituição inversa, ou então usando o "recobrimento de orientação" de M, que é uma variedade $\tilde{M}$ orientável em conjunto com uma aplicação $\tilde{M} \longrightarrow M$ (que é um recobrimento duplo) construídas a partir de M de forma canônica, sendo que a variedade $\tilde{M}$ é a união disjunta de duas cópias de M se M já for orientável e é conexa se não (veja [27]).

Definição 2.1 *Dado um fibrado vetorial E sobre M definimos o seu* ***dual*** *E^* como sendo o fibrado vetorial cuja fibra E_m^* em cada ponto m de M é o espaço vetorial dual de E_m, e o seu* ***dual torcido*** *como sendo o fibrado vetorial obtido como o produto tensorial*

[1] Tais estimativas são amplamente conhecidas como "estimativas de energia", o que constitui uma terminologia um tanto infeliz, já que na maioria dos casos a quantidade pertinente, além de poder deixar de ser conservada, não tem a interpretação física da energia do sistema.

do seu dual com o fibrado em linhas das formas de volume sobre M:

$$E^{\circledast} = E^* \otimes \bigwedge^n T^*M \ . \tag{2.1}$$

Observação 2.1 Em muitas ocasiões, é conveniente identificar os fibrados vetoriais E, E^* e $E^{\circledast}$, mas é importante notar que tais identificações dependem da escolha de estruturas adicionais. Por exemplo, mediante a escolha de uma forma de volume $\omega \in \Omega^n(M)$, podemos estabelecer um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\cong} & E^{\circledast} \\ u^* & \longmapsto & u^* \otimes \omega \end{array} \ . \tag{2.2}$$

De modo semelhante, mediante a escolha de uma métrica nas fibras de E, $(u,v) \mapsto u^\dagger v$ ou $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$, podemos estabelecer um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & E^* \\ u & \longmapsto & u^\dagger \text{ ou } \overline{u} \end{array} \ , \tag{2.3}$$

que, no entanto, é *antilinear*. Por composição, podemos estabelecer um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & E^{\circledast} \\ u & \longmapsto & u^\dagger \otimes \omega \text{ ou } \overline{u} \otimes \omega \end{array} \ , \tag{2.4}$$

que, novamente, é *antilinear*, e que depende da escolha de uma métrica nas fibras de E, $(u,v) \mapsto u^\dagger v$ ou $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$, e de uma forma de volume $\omega \in \Omega^n(M)$. Finalmente, notamos os seguintes *pareamentos bilineares* induzidos: em nível de fibrados vetoriais sobre M,

$$\begin{array}{ccc} E^* \times_M E & \longrightarrow & M \times \mathbb{K} \\ (u^*, u') & \longmapsto & \langle u^*, u' \rangle \end{array} \ , \tag{2.5}$$

e

$$\begin{array}{ccc} E^{\circledast} \times_M E & \longrightarrow & \bigwedge^n T^*M \otimes \mathbb{K} \\ (u^{\circledast}, u') & \longmapsto & \langle u^{\circledast}, u' \rangle \end{array} \ , \tag{2.6}$$

enquanto que em nível de seções,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^*) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{K}) \\ (\psi^*, \psi') & \longmapsto & \langle\!\langle\, \psi^* \,, \psi' \,\rangle\!\rangle \end{array} \ , \tag{2.7}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^{\circledast}) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Omega^n(M, \mathbb{K}) \\ (\psi^{\circledast}, \psi') & \longmapsto & \langle\!\langle\, \psi^{\circledast} \,, \psi' \,\rangle\!\rangle \end{array} \ , \tag{2.8}$$

onde

$$\langle\!\langle\, \psi^* \,, \psi' \,\rangle\!\rangle(m) \ = \ \langle \psi^*(m), \psi'(m) \rangle \ , \tag{2.9}$$

e

$$\langle\!\langle\, \psi^{\circledast} , \psi' \,\rangle\!\rangle(m) \;=\; \langle \psi^{\circledast}(m), \psi'(m) \rangle \;, \tag{2.10}$$

e, após integração,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^{\circledast}) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi^{\circledast}, \psi') & \longmapsto & \langle\, \psi^{\circledast} , \psi' \,\rangle \end{array} \;, \tag{2.11}$$

onde

$$\langle\, \psi^{\circledast} , \psi' \,\rangle \;=\; \int_M \langle\!\langle\, \psi^{\circledast} , \psi' \,\rangle\!\rangle \;. \tag{2.12}$$

2.1 O adjunto formal

Para poder obter as estimativas "a priori" para um operador hiperbólico simétrico precisamos de seu *adjunto formal*, conceito a ser introduzido nesta seção. Aqui, este adjunto se refere a uma métrica nas fibras bem especial, a saber, a métrica tipo Dirac hiperbólica associada a tal operador.[2] Para construir este tipo de adjunto de forma geométrica é conveniente usar uma conexão linear que seja *compatível* com a métrica nas fibras, no seguinte sentido.

Definição 2.2 *Dado um fibrado vetorial E sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$ dizemos que uma conexão linear $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ é* ***compatível*** *com ela se satifaz*

$$\overline{D\psi}\, \psi' + \overline{\psi}\, D\psi' = d(\overline{\psi}\, \psi') \quad \textit{para} \quad \psi, \psi' \in \Gamma(E) \tag{2.13}$$

ou equivalentemente

$$\overline{D_X\psi}\, \psi' + \overline{\psi}\, D_X\psi' = L_X(\overline{\psi}\, \psi') \quad \textit{para} \quad \psi, \psi' \in \Gamma(E)\,,\; X \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.14}$$

Para construir uma tal conexão precisamos da noção de conexão dual, conceito que é independente da escolha de uma métrica nas fibras.

Definição 2.3 *Dado um fibrado vetorial E sobre M munido de uma conexão linear $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$, definimos a conexão linear* ***dual*** *como a única conexão linear*

$$D^* : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E^*) \tag{2.15}$$

no fibrado vetorial dual E^* tal que

$$\begin{array}{c} \langle\!\langle\, D^*\psi^* , \psi' \,\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\, \psi^* , D\psi' \,\rangle\!\rangle \;=\; d\, \langle\!\langle\, \psi^* , \psi' \,\rangle\!\rangle \\ \textit{para} \quad \psi^* \in \Gamma(E^*)\,,\; \psi' \in \Gamma(E) \end{array} \;, \tag{2.16}$$

[2]Nesta seção, para evitar repetições, usaremos a métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$ para fórmular as definições, mas queremos lembrar que o mesmo procedimento funciona para qualquer outra métrica nas fibras, positiva definida ou não, inclusive a métrica nas fibras auxiliar $(u,v) \mapsto u^\dagger v$.

ou equivalentemente

$$\begin{array}{c} \langle\!\langle\, D_X^* \psi^* \,, \psi' \,\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\, \psi^* \,, D_X \psi' \,\rangle\!\rangle \;=\; L_X \langle\!\langle\, \psi^* \,, \psi' \,\rangle\!\rangle \\ \textit{para} \quad \psi^* \in \Gamma(E^*) \,,\, \psi' \in \Gamma(E) \,,\, X \in \mathfrak{X}(M) \end{array} \quad , \tag{2.17}$$

onde L_X denota a derivada de Lie ao longo do campo X e $\langle\!\langle\, .\,,. \,\rangle\!\rangle$ o pareamento (2.7).

Lembramos aqui que a existência e unicidade da conexão dual é um resultado bem conhecido da teoria de conexões lineares (veja, por exemplo, [28]). Combinando essa construção com o isomorfismo (2.3), obtemos a conexão linear **adjunta** em relação à métrica nas fibras $(u, v) \mapsto \overline{u}\, v$, que é denotada por

$$\overline{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \tag{2.18}$$

e definida por

$$\overline{D\psi}\, \psi' + \overline{\psi}\, \overline{D}\, \psi' = d(\overline{\psi}\, \psi') \quad \text{para} \quad \psi, \psi' \in \Gamma(E) \ , \tag{2.19}$$

ou equivalentemente

$$\overline{D_X\psi}\, \psi' + \overline{\psi}\, \overline{D}_X \psi' = L_X(\overline{\psi}\, \psi') \quad \text{para} \quad \psi, \psi' \in \Gamma(E) \,,\, X \in \mathfrak{X}(M) \ . \tag{2.20}$$

Então dada uma conexão linear $D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ qualquer, definimos uma nova conexão linear $D' : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ por

$$D'\psi = \frac{1}{2}(D\psi + \overline{D}\, \psi) \quad \text{para} \quad \psi \in \Gamma(E) \ ,$$

ou equivalentemente

$$D'_X\psi = \frac{1}{2}(D_X\psi + \overline{D}_X\psi) \quad \text{para} \quad \psi \in \Gamma(E) \,,\, X \in \mathfrak{X}(M) \ ,$$

que obviamente é compatível com a métrica nas fibras. Assim, concluímos:

Lema 2.1 *Dado um fibrado vetorial E sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u, v) \mapsto \overline{u}\, v$, sempre existe uma conexão linear compatível com ela.*

Um procedimento semelhante pode ser utilizado para definir o adjunto formal de um operador diferencial de primeira ordem no fibrado vetorial E mesmo; porém, o resultado depende não apenas da escolha de uma métrica nas fibras mas também da escolha de uma forma de volume. Para tanto, precisamos da noção da divergência de um campo vetorial (em relação a uma forma de volume):

Definição 2.4 *Dada uma forma de volume $\omega \in \Omega^n(M)$, definimos a **divergência** de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ em relação a ω como a função $\mathrm{div}_\omega X \in C^\infty(M)$ satisfazendo*

$$(\mathrm{div}_\omega X)\, \omega = d(i_X\omega) \ , \tag{2.21}$$

onde $i_X\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ denota a contração da forma de volume ω com o campo X.

Em coordenadas locais x^μ, podemos escrever $X = X^\mu \partial_\mu$ e $\omega = f\, d^n x$ com $f \neq 0$; então

$$\mathrm{div}_\omega X = f^{-1}\, \partial_\mu (f X^\mu)\ . \tag{2.22}$$

Proposição 2.1 *Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$, e seja ω uma forma de volume sobre M. Dado um operador diferencial linear de primeira ordem $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, existe um único operador diferencial linear de primeira ordem $\overline{\not{D}}_\omega : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, chamado o **adjunto formal** de $\not{D}$, tal que*

$$\overline{\not{D}\psi}\, \psi' - \overline{\psi}\, \overline{\not{D}}_\omega \psi' = \mathrm{div}_\omega (\overline{\psi}\, \overline{\gamma} \psi') \qquad \textit{para} \ \ \psi, \psi' \in \Gamma(E)\ , \tag{2.23}$$

onde $\overline{\psi}\, \overline{\gamma} \psi'$ denota o campo vetorial sobre M dado por

$$\xi(\overline{\psi}\, \overline{\gamma} \psi') = \overline{\psi}\, \overline{\gamma(\xi)}\, \psi' \quad \textit{para} \ \ \xi \in \Omega^1(M)\ . \tag{2.24}$$

Em coordenadas locais x^μ e usando uma conexão linear D em E compatível com a métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$, podemos escrever

$$\not{D}\psi = \gamma^\mu D_\mu \psi + \rho\, \psi\ , \tag{2.25}$$

e então vale

$$\overline{\not{D}}_\omega \psi = -\overline{\gamma^\mu}\, D_\mu \psi + \big(\overline{\rho}\, - f^{-1} D_\mu (f \overline{\gamma^\mu}\,)\big)\, \psi\ , \tag{2.26}$$

onde $\omega = f\, d^n x$ com $f \neq 0$ e usamos o mesmo símbolo D também para a conexão linear induzida em $L(E)$.

Demonstração: Todas as afirmações da proposição decorrem do seguinte cálculo, onde combinamos as equações (2.22) com $X = \overline{\psi}\, \overline{\gamma}\, \psi'$, (2.14) com $X = \partial_\mu$, (1.11) e (2.25) para mostrar que a expressão (2.26) implica a propriedade (2.23):

$$\begin{aligned}
f^{-1} \partial_\mu \big(f \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi'\big) \ &= \ (f^{-1} \partial_\mu f)\, \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi' \ + \ \partial_\mu \big(\overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi'\big) \\
&= \ (f^{-1} \partial_\mu f)\, \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi' \ + \ \overline{D_\mu \psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi' \ + \ \overline{\psi}\, D_\mu (\overline{\gamma^\mu}\, \psi') \\
&= \ (f^{-1} \partial_\mu f)\, \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi' \ + \ \overline{\gamma^\mu D_\mu \psi}\, \psi' \ + \ \overline{\psi}\, (D_\mu \overline{\gamma^\mu}\,) \psi' \ + \ \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, D_\mu \psi' \\
&= \ (f^{-1} \partial_\mu f)\, \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, \psi' \ + \ \overline{\not{D}\psi}\, \psi' \ + \ \overline{\psi}\, \overline{\gamma^\mu}\, D_\mu \psi' \ - \ \big(\overline{\psi}\, \overline{\rho}\, \psi' \ - \ \overline{\psi}\, (D_\mu \overline{\gamma^\mu}\,) \psi'\big) \\
&= \ \overline{\not{D}\psi}\, \psi' \ - \ \overline{\psi}\, \big(-\overline{\gamma^\mu}\, D_\mu + \overline{\rho}\, - f^{-1} D_\mu (f \overline{\gamma^\mu}\,)\big) \psi'\ .
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.1 *Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$. Dado um operador diferencial linear de primeira ordem $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, e seja $\overline{\not{D}}_\omega : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ seu adjunto formal (em relação a qualquer forma de volume ω). Então os símbolos principais γ de $\not{D}$ e $\overline{\gamma}$ de $\overline{\not{D}}_\omega$ são relacionados por*

$$\overline{\gamma}(\xi) = -\gamma(\xi)\ . \tag{2.27}$$

Portanto, em cada ponto de M, o cone futuro (passado) cronológico/causal para $\overline{\not{D}}_\omega$ é igual ao cone passado (futuro) cronológico/causal para $\not{D}$. Além disso, a soma $\not{D} + \overline{\not{D}}_\omega$ é um operador diferencial de ordem zero, ou seja, existe $B \in \Gamma(L(E))$ tal que

$$\overline{\not{D}}_\omega \psi = -\not{D}\psi + B\psi \quad para \quad \psi \in \Gamma(E) \ . \tag{2.28}$$

2.2 Espaços de Sobolev locais

Nesta seção apresentamos uma breve introdução aos espaços de Sobolev de funções e, mais geralmente, de seções de fibrados vetoriais E em variedades diferenciáveis M. Ao contrario do que acontece em variedades compactas assim como no espaço plano, a definição destes espaços em variedades não compactas depende de escolhas adicionais, tais como a de uma medida na variedade base, que representaremos por uma forma de volume, e de uma métrica nas fibras. Para se chegar a um conceito que seja independente de tais escolhas, é preciso passar a uma versão local onde a norma global é substituida por uma família de seminormas indexadas pelos compactos K de M. Assim chegamos aos espaços de Sobolev locais, que serão denotados por $H^r_{loc}(M, E)$ ou simplesmente por $H^r_{loc}(E)$, onde $r \in \mathbb{R}$. No entanto, seguiremos aqui uma abordagem mais geral que permite tratar de uma grande classe de espaços de funções/distribuições e que pode ser encontrada no livro [50], no caso de funções/distribuições escalares, e nas notas [15, 53], no caso de seções de fibrados vetoriais.

Começando no espaço plano $\mathbb{R}^n$, vamos seguir a notação de Schwartz e denotar o espaço das funções teste por $\mathcal{D}$ e o espaço das distribuições por $\mathcal{D}'$ (uma notação alternativa para $\mathcal{D}$ seria $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$). Consideramos $\mathcal{D}$ como subespaço de $\mathcal{D}'$ pela inclusão linear contínua natural $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'$, e para cada função "corte" $\chi \in \mathcal{D}$, introduzimos o operador de multiplicação por χ,

$$\begin{array}{rccc} m_\chi : & \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathcal{D}' \\ & \psi & \longmapsto & \chi\psi \end{array} \ , \tag{2.29}$$

o que confere a $\mathcal{D}'$ a estrutura de módulo sobre a álgebra $\mathcal{D}$. Então a primeira noção fundamental de [15, 53] é a seguinte:

Definição 2.5 *Um **espaço funcional** sobre $\mathbb{R}^n$ é um espaço localmente convexo $\mathcal{F}$, em conjunto com inclusões lineares contínuas naturais $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{D}'$, tal que para toda função teste $\chi \in \mathcal{D}$, a multiplicação por χ induz uma aplicação linear contínua $m_\chi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. Dizemos, ainda, que $\mathcal{F}$ é um **espaço funcional normal** sobre $\mathbb{R}^n$ se $\mathcal{D}$ for denso em $\mathcal{F}$.*

Observação 2.2 Subentende-se, nesta definição, que a composição das duas inclusões na sequência $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{D}'$ é a inclusão padrão de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$; portanto, $\mathcal{F}$ será sempre denso em $\mathcal{D}'$, uma vez que $\mathcal{D}$ já é, mas é perfeitamente possível que $\mathcal{D}$ não seja denso em $\mathcal{F}$; um exemplo seria o espaço das funções contínuas limitadas sobre $\mathbb{R}^n$ (com sua topologia natural induzida pela norma do supremo).

Essencialmente, essa definição diz que um espaço funcional é um $\mathcal{D}$-submódulo do $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{D}'$. Sendo assim, podemos restringir tal $\mathcal{F}$ a compactos assim como a abertos de $\mathbb{R}^n$ e ainda introduzir uma "versão compactamente suportada" e uma "versão local":

Definição 2.6 *Dado um espaço funcional $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^n$, introduzimos os seguintes espaços localmente convexos:*

- *para cada compacto K de $\mathbb{R}^n$, o espaço*
$$\mathcal{F}_K \;=\; \{\, \psi \in \mathcal{F} \mid \operatorname{supp}\psi \subset K \,\} \;, \tag{2.30}$$
munido da topologia de subespaço;

- *o espaço*
$$\mathcal{F}_c \;=\; \bigcup_{K \text{ compacto}} \mathcal{F}_K \;, \tag{2.31}$$
munido da topologia do limite indutivo dos subespaços $\mathcal{F}_K$;

- *para cada aberto U de $\mathbb{R}^n$, o espaço*
$$\mathcal{F}_{loc}(U) \;=\; \{\, \psi \in \mathcal{D}' \mid \chi\psi \in \mathcal{F} \text{ para } \chi \in \mathcal{D}(U) \,\} \;, \tag{2.32}$$
munido da seguinte topologia: se $(s_i)_{i\in I}$ é uma família de seminormas induzindo a topologia de $\mathcal{F}$, então $(s_{i,\chi})_{i\in I,\chi\in\mathcal{D}(U)}$ é uma família de seminormas induzindo a topologia de $\mathcal{F}_{loc}(U)$, onde
$$s_{i,\chi}(\psi) = s_i(\chi\psi) \quad \text{para} \;\; \psi \in \mathcal{F}_{loc}(U) \;. \tag{2.33}$$

*Dizemos que $\mathcal{F}$ é **local** se $\mathcal{F}_{loc} \equiv \mathcal{F}_{loc}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}$, como espaços vetoriais topológicos; neste caso, escrevemos simplesmente $\mathcal{F}(U)$ ao invés de $\mathcal{F}_{loc}(U)$, para cada aberto U de $\mathbb{R}^n$.*

Para completar o programa de estender a definição de certos tipos de espaços funcionais do $\mathbb{R}^n$ para variedades, precisamos de mais uma propriedade essencial, além da localidade: a de invariância em relação a difeomorfismos atuando sobre o domínio. Dado abertos U e V de $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, o "pull-back" de funções teste por ϕ e o "push-forward" de funções teste por ϕ^{-1}, definidos pelas fórmulas
$$\phi^*(\varphi) \;=\; \varphi \circ \phi \quad \text{para} \;\; \varphi \in \mathcal{D}(V) \;, \tag{2.34}$$
e
$$\phi_*(\varphi) \;=\; \varphi \circ \phi^{-1} \quad \text{para} \;\; \varphi \in \mathcal{D}(U) \;, \tag{2.35}$$
proporcionam isomorfismos topológicos lineares mutuamente inversos
$$\phi^* : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{D}(U) \;, \tag{2.36}$$
e
$$\phi_* : \mathcal{D}(U) \longrightarrow \mathcal{D}(V) \;. \tag{2.37}$$

Por dualidade, estes se estendem a isomorfismos topológicos lineares mutuamente inversos em nível de distribuições,

$$\phi^* : \mathcal{D}'(V) \longrightarrow \mathcal{D}'(U) \ , \tag{2.38}$$

e

$$\phi_* : \mathcal{D}'(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(V) \ , \tag{2.39}$$

de modo que, com as inclusões naturais $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$ e $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(U) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] \arrow[d] & \mathcal{D}(V) \arrow[l, bend left, "\phi^*"] \arrow[d] \\
\mathcal{D}'(U) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] & \mathcal{D}'(V) \arrow[l, bend left, "\phi^*"]
\end{tikzcd} \ . \tag{2.40}$$

Explicitamente,

$$\langle \, \phi_*(\psi) \, , \varphi \, \rangle \ = \ \langle \, \psi \, , |\det \phi'| \ \phi^*(\varphi) \, \rangle \qquad \text{para} \ \ \psi \in \mathcal{D}'(U) \ , \ \varphi \in \mathcal{D}(V) \ . \tag{2.41}$$

Definição 2.7 *Dado um espaço funcional $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^n$, dizemos que $\mathcal{F}$ é* ***invariante*** *se para todo difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, o automorfismo topológico linear induzido $\phi_* : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ proporcionar, por restrição, um automorfismo topológico linear de $\mathcal{F}$.*

Ocorre que se $\mathcal{F}$ for local e invariante, então pode-se provar que, dado abertos U e V de $\mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, o isomorfismo topológico linear induzido $\phi_* : \mathcal{D}'(U) \longrightarrow \mathcal{D}'(V)$ proporcionará, por restrição, um isomorfismo topológico linear $\phi_* : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ [53, Cor. 3.6.4, p. 48]. Assim, obtemos o seguinte refinamento do diagrama comutativo (2.40):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(U) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] \arrow[d] & \mathcal{D}(V) \arrow[l, bend left, "\phi^*"] \arrow[d] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] \arrow[d] & \mathcal{F}(V) \arrow[l, bend left, "\phi^*"] \arrow[d] \\
\mathcal{D}'(U) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] & \mathcal{D}'(V) \arrow[l, bend left, "\phi^*"]
\end{tikzcd} \ . \tag{2.42}$$

Passando à parte global da construção, consideramos agora, para qualquer variedade orientável n-dimensional M, os espaços $\mathcal{D}(M)$ das funções teste (funções de classe C^∞ a suporte compacto) e $\mathcal{D}(\bigwedge^n T^*M)$ das formas de volume teste (formas de volume de classe C^∞ a suporte compacto) sobre M, com os seus correspondentes duais, que são o espaço

$$\mathcal{D}'(M) \;=\; \mathcal{D}(\textstyle\bigwedge^n T^*M)'$$

das funções generalizadas (ou distribuições) e o espaço

$$\mathcal{D}'(\textstyle\bigwedge^n T^*M) \;=\; \mathcal{D}(M)'$$

das formas de volume generalizadas sobre M: note que surge aqui uma troca entre o fibrado em linhas trivial sobre M e o fibrado das formas de volume de M, que é necessária para que possa haver uma inclusão natural $\mathcal{D}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M)$ definida da maneira usual, ou seja, por

$$\langle\, \psi \,, \omega \,\rangle \;=\; \int_M \psi\, \omega \quad \text{para} \;\; \omega \in \mathcal{D}(\textstyle\bigwedge^n T^*M) \;. \tag{2.43}$$

Mais geralmente, dado um fibrado vetorial E sobre M, temos o espaço $\mathcal{D}(M,E)$ das seções teste (seções de classe C^∞ a suporte compacto) de E e o espaço $\mathcal{D}'(M,E)$ das seções generalizadas de E, que é definido como o dual do espaço das seções teste do dual torcido $E^\circledast$ de E,

$$\mathcal{D}'(M,E) \;=\; \mathcal{D}(M,E^\circledast)'$$

para que haja uma inclusão linear contínua natural $\mathcal{D}(M,E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M,E)$ definida em termos do pareamento (2.8), conforme

$$\langle\, \psi \,, \psi'^{\circledast} \,\rangle \;=\; \int_M \langle\!\langle\, \psi'^{\circledast} \,, \psi \,\rangle\!\rangle \quad \text{para} \;\; \psi'^{\circledast} \in \mathcal{D}(M,E^\circledast) \;, \tag{2.44}$$

e para cada função "corte" $\chi \in \mathcal{D}$, como antes, introduzimos o operador de multiplicação por χ,

$$\begin{array}{rccc} m_\chi : & \mathcal{D}'(M,E) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(M,E) \\ & \psi & \longmapsto & \chi\psi \end{array} \;, \tag{2.45}$$

o que confere a $\mathcal{D}'(M,E)$ a estrutura de módulo sobre a álgebra $\mathcal{D}(M)$.

Logo, segue que se $\mathcal{F}$ for um espaço funcional local invariante sobre $\mathbb{R}^n$, então para qualquer variedade n-dimensional M e qualquer fibrado vetorial E sobre M, podemos definir o *espaço das seções generalizadas de E de tipo $\mathcal{F}$*, denotado no que segue por $\mathcal{F}(M,E)$, que é um espaço funcional local invariante para E:

Definição 2.8 *Dado um fibrado vetorial E sobre M, um* ***espaço funcional*** *para E é um espaço localmente convexo $\mathcal{F}$, em conjunto com inclusões lineares contínuas naturais $\mathcal{D}(M,E) \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{D}'(M,E)$, tal que para toda função teste $\chi \in \mathcal{D}(M)$, a multiplicação por χ induz uma aplicação linear contínua $m_\chi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$. Dizemos, ainda, que $\mathcal{F}$ é um* ***espaço funcional normal*** *para E se $\mathcal{D}(M,E)$ for denso em $\mathcal{F}$. Além disso, definimos,* *para cada compacto K de M e cada aberto U de M, os espaços $\mathcal{F}_K$, $\mathcal{F}_c$ e $\mathcal{F}_{loc}(U)$ da mesma forma que na Definição 2.6, e dizemos que $\mathcal{F}$ é **local** se $\mathcal{F}_{loc} \equiv \mathcal{F}_{loc}(M) = \mathcal{F}$ (em que caso escrevemos simplesmente $\mathcal{F}(U)$ ao invés de $\mathcal{F}_{loc}(U)$) e que $\mathcal{F}$ é **invariante** se o "push-forward" e o "pull-back" de seções generalizadas de E com automorfismos de E (que podem induzir difeomorfismos naõ-triviais da variedade base M) proporcionar automorfismos topológicos lineares de $\mathcal{F}$.*

Com essa terminologia a nossa disposição, podemos formular o teorema básico enunciado em [15, 53] da seguinte forma: Todo espaço funcional local invariante $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{R}^n$ induz, para todo fibrado vetorial E sobre qualquer variedade M de dimensão n, um espaço funcional local invariante para E, que será denotado por $\mathcal{F}(M, E)$, e essa construção é "natural" no sentido de apresentar um comportamento funtorial em relação à escolha de M e E, no espírito da teoria de operações naturais em geometria diferencial [34]; para maiores detalhes, veja [15, Cap. 4.6]. Mas a ideia por trás da demonstração deste teorema é muito simples: se U é qualquer aberto de M que é domínio de uma carta $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e se $\Phi : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{K}^N$ é uma trivialização de E sobre U, combinamos as duas em uma carta de fibrado vetorial $x \bowtie \Phi : E|_U \longrightarrow x(U) \times \mathbb{K}^N$ definida como a composição $x \bowtie \Phi = (x \times 1_{\mathbb{K}^N}) \circ \Phi$ e usamos o "push-forward" por esta,

$$(x \bowtie \Phi)_* : \mathcal{D}'(U, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(x(U))^N$$

para definir [53, Def. 3.7.1, p. 48]

$$\mathcal{F}(M, E) \;=\; \left\{ \psi \in \mathcal{D}'(M, E) \;\middle|\; \begin{array}{c} (x \bowtie \Phi)_*(\psi|_U) \in \mathcal{F}(x(U))^N \\ \text{para toda carta de fibrado vetorial} \\ (U, x \bowtie \Phi) \text{ de } E \end{array} \right\} .$$

Assim, obtém-se um subespaço $\mathcal{F}(M, E)$ de $\mathcal{D}'(M, E)$ que se torna um espaço funcional para E mediante introdução de uma topologia de espaço localmente convexo definida como sendo a única tal que, para qualquer recobrimento localmente finito $(U_i)_{i \in I}$ de M por domínios de cartas de fibrado vetorial $(U_i, x_i \bowtie \Phi_i)$ de E, a aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M, E) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(x_i(U_i))^{\times N} \\ \psi & \longmapsto & \big((x_i \bowtie \Phi_i)_*(\psi|_{U_i}) \big)_{i \in I} \end{array}$$

seja um mergulho contínuo linear. Prova-se que é suficiente exigir essa condição para apenas um recobrimento e um sistema de cartas de fibrado vetorial deste tipo, pois então vale para qualquer outro. Além disso, prova-se que $\mathcal{F}(M, E)$ é um espaço funcional local invariante para E e "natural" no sentido mencionado acima [53, Thm 3.7.4, p. 49].

Toda essa teoria geral *não* se aplica aos espaços de Sobolev "globais" $H^r(\mathbb{R}^n)$, que não são nem locais nem invariantes; portanto, não existe a noção de espaços de Sobolev "globais" $H^r(M)$ em variedades M, exceto quando M for compacta ou então quando se fixam estruturas adicionais, tais como uma métrica nas fibras de E (positiva definida, neste caso), uma forma de volume em M e ainda, no caso em que r for um inteiro positivo, uma conexão linear em E. Por outro lado, prova-se [53, Cap. 3.8] que os espaços de Sobolev "locais"

$$H^r_{loc}(\mathbb{R}^n) \;=\; \big\{\, \psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \chi\psi \in H^r(\mathbb{R}^n) \text{ para } \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \,\big\}$$

são espaços funcionais locais invariantes e normais, de modo que a construção descrita acima permite definir, para um fibrado vetorial E qualquer sobre uma variedade M qualquer,[3] e inclusive para qualquer valor real de r, os *espaços de Sobolev locais* $H^r_{loc}(M,E)$ de seções de E, assim como, para cada aberto U e cada aberto K de M, os espaços $H^r_{loc}(U,E)$ e $H^r_K(M,E)$ e, finalmente, os *espaços de Sobolev de suporte compacto* $H^r_c(M,E)$. Há então uma série de propriedades clássicas que se estendem a este contexto geral, entre eles os seguintes:

- Os $H^r_{loc}(M,E)$ são espaços de Fréchet que contêm o espaço $\mathcal{D}(M,E)$ de seções teste como subespaço denso, e os espaços $H^r_K(M,E)$ são espaços de Hilbert.

- Todo operador diferencial P de ordem k em E admite, para todo r, uma única extensão a um operador linear contínuo

$$P : H^r_{loc}(M,E) \longrightarrow H^{r-k}_{loc}(M,E) \; . \tag{2.46}$$

- Vale o *lema de Sobolev*:

$$H^r_{loc}(M,E) \subset C^s(M,E) \quad \text{para } r > n/2 + s \; , \tag{2.47}$$

  o que implica que $\bigcap_r H^r_{loc}(M,E) = C^\infty(M,E) \equiv \Gamma(E)$.

- Vale o *lema de Rellich*: para todo compacto K de M, a inclusão

$$H^r_K(M,E) \hookrightarrow H^s_K(M,E) \quad \text{para } r > s \; , \tag{2.48}$$

  é um operador compacto.

2.3 Pareamentos perfeitos e fórmulas de adjunção

Para obter as fórmulas de adjunção das quais precisaremos a seguir, suponha como antes que E seja um fibrado vetorial sobre uma variedade base M, e considere o seguinte pareamento natural entre seções de E e seções do seu dual torcido $E^{\circledast}$, ambas de classe C^∞ e uma delas a suporte compacto – a de $E^{\circledast}$, digamos:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c(E^{\circledast}) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi^{\circledast}, \psi) & \longmapsto & \langle\, \psi^{\circledast} \,, \psi \,\rangle_M \;=\; \displaystyle\int_M \langle\!\langle\, \psi^{\circledast} \,, \psi \,\rangle\!\rangle \end{array} \tag{2.49}$$

[3] Aqui estamos supondo que M seja orientável, mas é possível se livrar desta hipótese também usando densidades no lugar de formas de volume.

A seguir, queremos estender este pareamento aos espaços de Sobolev e através dessa extensão estabeler uma relação de dualidade entre os espaços locais $H^{\bullet}_{loc}$ e os espaços compactamente suportados $H^{\bullet}_c$. Para tanto, note primeiro que essa extensão é imediata quando $r = 0$, ou seja, para seções quadraticamente integráveis:

$$\begin{array}{ccc} H^0_c(M, E^{\circledast}) \times H^0_{loc}(M, E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi^{\circledast}, \psi) & \longmapsto & \langle\, \psi^{\circledast} \,, \psi \,\rangle_M \;=\; \displaystyle\int_M \langle\!\langle\, \psi^{\circledast} \,, \psi \,\rangle\!\rangle \end{array} \tag{2.50}$$

Observação 2.3 Mediante escolha de uma métrica nas fibras em E positiva definida, $(u, v) \longmapsto u^{\dagger}v$, ou mesmo de uma métrica nas fibras em E apenas não-degenerada, $(u, v) \longmapsto \overline{u}\, v$, e de uma forma de volume ω sobre M, o pareamento (2.50) pode ser convertido em um pareamento entre seções do mesmo fibrado vetorial E,

$$\begin{array}{ccc} H^0_c(M, E) \times H^0_{loc}(M, E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi, \psi') & \longmapsto & \langle\, \psi \,, \psi' \,\rangle_2 \end{array} \tag{2.51}$$

onde temos a opção de escolher

$$\begin{array}{c} \langle\, \psi \,, \psi' \,\rangle_2 \;=\; \langle\, \psi^{\dagger} \otimes \omega \,, \psi' \,\rangle_M \;=\; \displaystyle\int_M \psi^{\dagger}\psi' \,\omega \\ \text{para} \;\; \psi \in H^0_c(M, E) \,,\; \psi' \in H^0_{loc}(M, E) \end{array} , \tag{2.52}$$

ou

$$\begin{array}{c} \langle\, \psi \,, \psi' \,\rangle_2 \;=\; \langle\, \overline{\psi} \otimes \omega \,, \psi' \,\rangle_M \;=\; \displaystyle\int_M \overline{\psi}\, \psi' \,\omega \\ \text{para} \;\; \psi \in H^0_c(M, E) \,,\; \psi' \in H^0_{loc}(M, E) \end{array} . \tag{2.53}$$

Com a primeira destas escolhas, e se M for compacto, chegamos ao método padrão de construir o produto escalar no espaço de Hilbert das seções quadraticamente integráveis $L^2(E)$. ◇

Para prosseguir, precisamos introduzir a noção de pareamento perfeito – um termo adequado para formular teoremas de reflexividade tais como o teorema de representação de Riesz:

Definição 2.9 *Dados dois espaços localmente convexos V e W, dizemos que uma aplicação bilinear contínua*

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle\, v \,, w \,\rangle \end{array} \tag{2.54}$$

*é um **pareamento perfeito** se as aplicações lineares induzidas $V \longrightarrow W'$ e $W \longrightarrow V'$ são isomorfismos lineares contínuos.*[4]

[4] Implicitamente, essa definição pressupõe que os duais V' de V e W' de W ja vêm munidos de uma determinada topologia localmente convexa.

Nestes termos, a acima mencionada relação de dualidade entre os espaços locais $H^\bullet_{loc}$ e os espaços compactamente suportados $H^\bullet_c$ é a seguinte [50, 53]:

Proposição 2.2 *Para todo $r \in \mathbb{R}$, o pareamento (2.49) admite uma única extensão para uma aplicação bilinear contínua*

$$\begin{array}{ccc} H_c^{-r}(M, E^{\circledast}) \times H^r_{loc}(M,E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi^{\circledast}, \psi) & \longmapsto & \langle\, \psi^{\circledast}\,, \psi \,\rangle_M \end{array} , \tag{2.55}$$

que proporciona um pareamento perfeito entre os espaços $H_c^{-r}(M, E^{\circledast})$ e $H^r_{loc}(M,E)$.

A seguir, essa proposição também será aplicada a certas subvariedades de M: mais exatamente, dada qualquer hipersuperfície (subvariedade fechada de codimensão 1) Σ de M, obtemos, para todo $r \in \mathbb{R}$, um pareamento perfeito

$$\begin{array}{ccc} H_c^{-r}(\Sigma, E^{\circledast}) \times H^r_{loc}(\Sigma,E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi^{\circledast}_\Sigma, \psi_\Sigma) & \longmapsto & \langle\, \psi^{\circledast}_\Sigma\,, \psi_\Sigma \,\rangle_\Sigma \end{array} . \tag{2.56}$$

Outro fato que precisaremos usar é o “teorema do traço”, que especifica o grau de perda de derivadas que ocorre sob restrição de distribuições em espaços de Sobolev (locais) a subvariedades: aqui, será suficiente considerar apenas o caso de hipersuperfícies, que é tratado em [11, Cor. 11.8, p. 73].

Proposição 2.3 *Para todo $r \in \mathbb{R}$ com $r > 0$ e toda hipersuperfície (subvariedade fechada de codimensão 1) Σ de M, a aplicação de restrição $\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E|_\Sigma)$ estende a uma aplicação linear contínua*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{R}_\Sigma : & H^{r+1/2}_{loc}(M,E) & \longrightarrow & H^r_{loc}(\Sigma,E) \\ & \psi & \longmapsto & \psi|_\Sigma \end{array} \tag{2.57}$$

que ainda leva $H_c^{r+1/2}(M,E)$ em $H^r_c(\Sigma,E)$ e cada $H_K^{r+1/2}(M,E)$ em $H^r_{K\cap\Sigma}(\Sigma,E)$, e que continuaremos chamando de restrição a Σ.

Notamos de passagem que este resultado impõe uma restrição muito forte quando quisermos trabalhar com seções generalizadas do espaço-tempo. O motivo essencial disto é o fato, bem conhecido, de que nem sempre é possível restringir distribuições em variedades para subvariedades; sendo assim, não é claro como estender as estimativas envolvendo condições iniciais sem conhecer o comportamento das seções em relação à restrição, neste caso para uma subvariedade de codimensão 1. Isto, claro, esta relacionado com o fato de tal seção generalizada ser solução do operador hiperbólico, o que imediatamente sugere o uso do conjunto frente de onda para estudar o problema. Esta questão esta fora do alcance do presente trabalho e fica como um dos assuntos futuros de pesquisa.

Para poder usar técnicas de dualidade, vamos integrar o resultado da Proposição 2.1, depois aplicamos o teorema de Stokes, e ainda estendemos o resultado obtido para certos espaços de Sobolev. Mais formalmente, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4 *Sejam E um fibrado vetorial sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\,v$, e ω uma forma de volume sobre M. Dados um operador diferencial linear de primeira ordem $D\!\!\!/ : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ com adjunto formal $\overline{D\!\!\!/}_\omega : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ e um cone truncado K em M, temos a seguinte fórmula de adjunção:*

$$\int_K \overline{D\!\!\!/\psi}\,\psi'\,\omega = \int_K \overline{\psi}\,\overline{D\!\!\!/}_\omega\psi'\,\omega + \int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \quad \textit{para} \;\; \psi,\psi' \in \Gamma(E) \tag{2.58}$$

onde ν é o campo conormal exterior à ∂K[5] *e $dS_{\omega,\nu}$ denota a medida induzida por ω e ν na subvariedade com cantos ∂K.*
Aliás, dado $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, os operadores $D\!\!\!/$, $\overline{D\!\!\!/}_\omega : H^{r+1}_{loc}(M,E) \longrightarrow H^r_{loc}(M,E)$ satisfazem a extensão desta fórmula para o pareamento perfeito, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle\, \overline{D\!\!\!/\psi} \otimes \omega_K\,, \psi'\,\rangle_M \;\; = \;\; & \langle\, \overline{\psi} \otimes \omega_K\,, \overline{D\!\!\!/}_\omega\psi'\,\rangle_M + \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_L + \\ & \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_1} + \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_0} \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde ψ, $\psi' \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ e definimos $\omega_K = \chi_K\omega$; aqui χ_K denota a função característica do compacto K.

Observação 2.4 Notemos que, em geral, não sabemos se a fórmula (2.59) faz sentido para índices arbitrários $l \in \mathbb{R}$. Isto é conseqüência de que a restrição $\mathrm{R}_{\Sigma_0} : H^{l+1}_K(M,E) \longrightarrow H^{l+1/2}_{\Sigma_0}(\Sigma_0,E)$ está bem definida e é continua no caso $l + 1/2 > 0$, mas não sabemos o que acontece no caso geral. O mesmo comentário vale para as restrições R_{Σ_1} e R_L.

Demonstração: Sejam ψ, $\psi' \in \Gamma(E)$. Primeiro integramos a equação da Proposição 2.1 multiplicada pela forma de volume ω:

$$\int_K \overline{D\!\!\!/\psi}\,\psi'\,\omega = \int_K \overline{\psi}\,\overline{D\!\!\!/}_\omega\psi'\,\omega + \int_K \mathrm{div}_\omega(\overline{\psi}\,\gamma\psi')\,\omega\;. \tag{2.60}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathrm{div}_\omega(\overline{\psi}\,\gamma\psi')\,\omega = d(i_{\overline{\psi}\,\gamma\psi'}\omega)\;, \tag{2.61}$$

assim, usando o teorema de Stokes na variedade compacta com cantos K [38], obtemos

$$\int_K \mathrm{div}_\omega(\overline{\psi}\,\gamma\psi')\,\omega = \int_K d(i_{\overline{\psi}\,\gamma\psi'}\omega) = \int_{\partial K} i_{\overline{\psi}\,\gamma\psi'}\omega\;. \tag{2.62}$$

Agora usamos o seguinte fato: dadas uma forma de volume ω, uma subvariedade Σ de codimensão 1 e um campo conormal a ela ν, obtemos uma $(n-1)$-forma, denotada por $dS_{\omega,\nu}$ satisfazendo

$$i_X\omega|_\Sigma = X(\nu)\,dS_{\omega,\nu} \quad \text{para todo} \;\; X \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.63}$$

[5] Veja a Observação 1.7.

Usando isto no campo $\overline{\psi}\,\gamma\psi'$ obtemos

$$i_{\overline{\psi}\,\gamma\psi'}\omega|_\Sigma = \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu}\ , \tag{2.64}$$

onde Σ pode ser qualquer uma das subvariedades Σ_0, Σ_1 ou L. Logo

$$\int_K \mathrm{div}_\omega(\overline{\psi}\,\gamma\psi')\,\omega = \int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu}\ . \tag{2.65}$$

Portanto

$$\int_K \overline{\not{D}\psi}\,\psi'\,\omega = \int_K \overline{\psi}\,\overline{\not{D}}_\omega\psi'\,\omega + \int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu}\ . \tag{2.66}$$

Provaremos agora a extensão da fórmula (2.58) para o caso dos espaços de Sobolev locais. Sejam $r \geqslant 0$ e ψ, $\psi' \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$; notemos que neste caso,

$$\overline{\not{D}\psi'}\,\otimes\omega_K = \chi_K\,\overline{\not{D}\psi'}\,\otimes\omega \in H^{-r}_K(M,E^{\circledast})\ , \tag{2.67}$$

pois $\overline{\not{D}\psi'}\,\otimes\omega \in H^r_{loc}(M,E^{\circledast}) \subset H^{-r}_{loc}(M,E^{\circledast})$. Portanto, o pareameto da equação (2.55) se pode escrever como integral, i.e.,

$$\langle\,\overline{\not{D}\psi}\,\otimes\omega_K\,,\psi'\,\rangle_M = \int_M \overline{\not{D}\psi}\,\psi'\,\omega_K = \int_K \overline{\not{D}\psi}\,\psi'\,\omega \tag{2.68}$$

Analogamente obtemos,

$$\langle\,\overline{\psi}\,\otimes\omega_K\,,\overline{\not{D}}_\omega\psi'\,\rangle_M = \int_M \overline{\psi}\,\overline{\not{D}}_\omega\psi'\,\omega_K = \int_K \overline{\psi}\,\overline{\not{D}}_\omega\psi'\,\omega \tag{2.69}$$

O mesmo tipo de fórmula vale para os pareamentos nas subvariedades Σ_0 e Σ_1:

$$\langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_0} = \int_{\Sigma_0} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} = \int_{K_0} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \tag{2.70}$$

onde usamos que $\Sigma_0 \cap \partial K = K_0$. Da mesma forma,

$$\langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} = \int_{K_1} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \tag{2.71}$$

pois $\Sigma_1 \cap \partial K = K_1$. Também vale:

$$\langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_L = \int_L \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} = \int_{K_L} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \tag{2.72}$$

pois $L \cap \partial K = K_L$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \;=\;& \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_L + \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_1} + \\ & \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_0}\end{aligned} \tag{2.73}$$

Como conclusão disto obtemos

$$\begin{aligned}\langle\,\overline{\not{D}\psi}\,\otimes\omega_K\,,\psi'\,\rangle_M \;=\;& \langle\,\overline{\psi}\,\otimes\omega_K\,,\overline{\not{D}}_\omega\psi'\,\rangle_M + \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_L + \\ & \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_1} + \langle\,\overline{\psi}\,\otimes dS_{\omega,\nu}\,,\gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_0}\end{aligned} \tag{2.74}$$

$\square$

Corolário 2.2 *Sejam E um fibrado vetorial sobre M munido de uma métrica nas fibras $(u,v) \mapsto \overline{u}\, v$, ω uma forma de volume sobre M, $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem e K um cone truncado em M. Então, se $\not{D}$ for hiperbólico simétrico vale*

$$\int_K 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi\,\omega = \int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} + \int_K \overline{B\psi}\,\psi\,\omega \quad \textit{para} \quad \psi \in \Gamma(E) \tag{2.75}$$

onde $B \in \Gamma(L(E))$ é dada pelo Corolário 2.1.

Demonstração: Para provar a equação (2.75) simplesmente usamos a fórmula (2.58). Explicitamente, se $\psi,\ \psi' \in H^r_K(E)$ e usamos a seção $B \in \Gamma(L(E))$ dada pelo Corolário 2.1:

$$\overline{\psi}\,\overline{\not{D}}_\omega\psi' = \overline{\psi}\,(-\not{D}\psi + B\psi') = -(\overline{\not{D}\psi}\,\psi')^* + \overline{\psi}\,B\psi' \tag{2.76}$$

onde $*$ denota a conjugação complexa. Logo, se $\psi' = \psi$, obtemos

$$\int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} = \int_K 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\not{D}\psi}\,\psi\,\omega - \int_K \overline{\psi}\,B\psi\,\omega \tag{2.77}$$

que é a fórmula desejada. □

Observação 2.5 Note que se tomamos conjugação complexa na equação (2.58) obtemos

$$\int_K \overline{\psi}\,\not{D}\psi'\,\omega = \int_K \overline{\overline{\not{D}}_\omega\psi}\,\psi'\,\omega + \int_{\partial K} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} \quad \text{para} \quad \psi,\psi' \in \Gamma(E) \tag{2.78}$$

onde usamos a pseudo-hermiticidade de γ. Desta forma deduzimos também,

$$\begin{aligned} \langle\, \overline{\psi} \otimes \omega_K\,, \not{D}\psi'\,\rangle_M \;&=\; \langle\, \overline{\overline{\not{D}}_\omega\psi} \otimes \omega_K\,, \psi'\,\rangle_M + \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_L + \\ &\quad\; \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_1} + \langle\, \overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\,, \gamma(\nu)\psi'\,\rangle_{\Sigma_0} \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde $\psi,\ \psi' \in H^{r+1}_{loc}(M,E),\ r \geqslant 0$.

2.4 Estimativas a priori

Nesta seção provaremos estimativas "a priori" em certos espaços de Sobolev sobre um cone truncado K de M. Começamos com o caso básico, no espaço $H^0_{loc}(M,E)$, onde as estimativas misturam seminormas do espaço M com normas de Sobolev em compactos contidos no bordo de K. Gostariamos estender este resultado inicial para os espaços $H^r_{loc}(M,E)$, para um índice arbitrário $r \in \mathbb{R}$, mas neste caso não é possível controlar o termos do bordo: o uso de operadores pseudodiferenciais transforma o suporte das seções de forma que não sabemos nada da geometria do novos suportes, o que impede usar o resultado básico já obtido em $H^0_{loc}(M,E)$. Por causa disto, para índices gerais $r \in \mathbb{R}$, somente podemos provar estimativas para seções com suporte compacto contido em K, ou seja, nos espaços $H^r_K(M,E)$.

2.4.1 Estimativas básicas

Antes de provar estimativas integrais neste caso precisamos de alguns resultados técnicos envolvendo funções auxiliares.

Lema 2.2 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem. Dada uma função $t \in C^\infty(M)$ temos que:*

$$\not{D}(t\psi) = \gamma(dt)\psi + t\not{D}\psi \quad para \quad \psi \in \Gamma(E)\ . \tag{2.80}$$

Demonstração: Primeiro se prova localmente e depois se estende usando partições da unidade. Sejam $\psi \in \Gamma(E)$, (x, U, Φ) uma trivialização local de E e $D : \Gamma(E) \to \Omega^1(M, E)$ uma conexão linear, então podemos escrever $\not{D}\psi = \gamma^\mu D_\mu \psi + \rho\psi$, Segue que

$$\not{D}(t\psi) = \gamma^\mu D_\mu(t\psi) + \rho(t\psi) = (\partial_\mu t)\gamma^\mu\psi + t\gamma^\mu D_\mu\psi + t\rho\psi = \gamma(dt)\psi + t\not{D}\psi\ , \tag{2.81}$$

onde usamos que $\gamma(dt) = \gamma((\partial_\mu t)\gamma^\mu) = (\partial_\mu t)\gamma^\mu$.

Para globalizar este resultado usamos uma partição da unidade $\sum_j \chi_j = 1$ associada às trivializações locais $((x_j, U_j, \Phi_j))_j$, onde $(U_j)_j$ cobre M. Segue que:

$$\begin{aligned} &\not{D}(t\psi) = \textstyle\sum_j \not{D}(t\chi_j\psi) = \sum_j \gamma(dt)(\chi_j\psi) + \sum_j t\not{D}(\chi_j\psi) = \\ &\gamma(dt)(\textstyle\sum_j \chi_j\psi) + t\not{D}(\sum_j \chi_j\psi) = \gamma(dt)\psi + t\not{D}\psi\ , \end{aligned} \tag{2.82}$$

para toda $\psi \in \Gamma(E)$. □

Lema 2.3 *Sejam E um fibrado vetorial sobre M, ω uma forma de volume sobre M, $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial hiperbólico simétrico e K um cone truncado em M. Dada $t \in C^\infty(M)$ temos*

$$\begin{aligned} \int_{K_L} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} + \int_{K_1} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} + \int_{K_0} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,dS_{\omega,\nu} = \\ \int_K t\,(\overline{\not{D}\psi}\,\psi' + \overline{\psi}\,\not{D}\psi')\,\omega - \int_K t\,\overline{\psi}\,B\psi'\,\omega + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(dt)\psi'\,\omega\ , \end{aligned} \tag{2.83}$$

onde ψ, $\psi' \in \Gamma(E)$.

Por outro lado, se K for um compacto qualquer, podemos obter uma fórmula similar para seções de suporte contido em K, ou seja:

$$\int_K t\,(\overline{\not{D}\psi}\,\psi' + \overline{\psi}\,\not{D}\psi')\,\omega = \int_K t\,\overline{\psi}\,B\psi'\,\omega - \int_K \overline{\psi}\,\gamma(dt)\psi'\,\omega\ , \tag{2.84}$$

para ψ, $\psi' \in \Gamma_K(E)$.

Demonstração: Sejam ψ, $\psi' \in \Gamma(E)$. Aplicando o Proposição 2.1 para as seções ψ e $t\psi'$ obtemos:

$$\overline{\not{D}\psi}\,(t\psi') = \overline{\psi}\,(\overline{\not{D}}\,(t\psi')) + \mathrm{div}_\omega(t\,\overline{\psi}\,\gamma\psi')\ . \tag{2.85}$$

Por outra parte, do Corolário 2.1 sabemos que existe $B \in \Gamma(L(E))$ tal que:

$$\overline{\not{D}}\,(t\psi') = -\not{D}(t\psi') + B(t\psi')\ . \tag{2.86}$$

Isto junto com o Lema 2.2 implica

$$\overline{\not{D}\psi}\,(t\psi') = \overline{\psi}\,(-\gamma(dt)\psi' - t\not{D}\psi' + tB\psi') + \mathrm{div}_\omega(t\,\overline{\psi}\,\gamma\psi')\ , \tag{2.87}$$

do qual segue, após integração:

$$\int_K t\,(\overline{\not{D}\psi}\,\psi' + \overline{\psi}\,\not{D}\psi')\,\omega + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(dt)\psi'\,\omega = \int_K t\,\overline{\psi}\,B\psi'\,\omega + \int_{\partial K} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\,\omega\ . \tag{2.88}$$

Portanto,

$$\begin{gathered}\int_K t\,(\overline{\not{D}\psi}\,\psi' + \overline{\psi}\,\not{D}\psi')\,\omega + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(dt)\psi'\,\omega - \int_K t\,\overline{\psi}\,B\psi\,\omega = \\ \int_{K_L} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi' + \int_{K_1} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi' + \int_{K_0} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi'\ .\end{gathered} \tag{2.89}$$

Finalmente, dado um compacto qualquer K, a prova da fórmula da fórmula correspondente é igual que antes, mas sem os termos de bordo, pois $\operatorname{supp}\psi \subset K$. □

Observação 2.6 No caso em que $\psi' = \psi \in \Gamma(E)$ aplicamos o Lema anterior para obter

$$\begin{gathered}\int_K 2t\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi\,\omega + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(dt)\psi\,\omega - \int_K t\,\overline{\psi}\,B\psi\,\omega = \\ \int_{K_L} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_\omega + \int_{K_1} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_\omega + \int_{K_0} t\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_\omega\ .\end{gathered} \tag{2.90}$$

◇

Antes de continuar vamos definir uma seminorma em $H^0_{loc}(M,E)$, que é útil tanto para simplificar as provas quanto para entender as diferenças respeito do caso euclideano (diferenças que geram varios dos problemas para fazer uma formulação covariante da teoria).

Definição 2.10 *Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma métrica tipo Dirac hiperbólica $(u,v) \longmapsto \overline{u}\,v$. Então, dados um compacto K de M, uma forma de volume ω em M e um campo cotangente τ tal que $\tau_m \in I^{*,+}_m$ para todo $m \in K$, introduzimos a seguinte seminorma em $H^0_{loc}(M,E)$:*

$$p_{\omega,K,\tau}(\psi) = \int_K \overline{\psi}\,\gamma(\tau)\psi\,\omega \quad \textit{para} \ \ \psi \in H^0_{loc}(M,E) \tag{2.91}$$

Note que se $\psi \in H^0_K(M,E)$, i.e., se ψ tem suporte compacto contido em K, obtemos uma das possíveis normas no espaço de Hilbert $H^0_K(M,E)$, ou seja que existem constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tais que:

$$\alpha_1 \, \|\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant \alpha_2 \, \|\psi\|^2_{H^0_K} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^0_K(M,E) \tag{2.92}$$

Gostariamos poder definir seminormas análogas em $H^r_c(E)$, para um índice arbitrário $r \in \mathbb{R}$, mas temos o problema de que as normas $\| \,.\, \|_{H^r_K}$, onde K é compacto, não podem ser definidas diretamente usando integrais sobre M.

Lema 2.4 *Sejam E um fibrado vetorial sobre M, ω uma forma de volume sobre M, $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial hiperbólico simétrico e K um cone truncado em M. Dado $r \geqslant 0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que:*

$$\int_K |\operatorname{Re} \overline{\psi} \, \not{D}\psi| \, \omega \leqslant C_1 \left(p_{\omega,K,\tau}(\psi) + p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi) \right) \quad \textit{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.93}$$

Também, dado $r \geqslant 0$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que:

$$\int_K |\overline{\psi} \, B\psi| \, \omega \leqslant C_2 \, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \quad \textit{para} \;\; \psi \in H^r_{loc}(M,E) \tag{2.94}$$

onde $B \in \Gamma(L(E))$ é dado pelo Corolário 2.1.

Demonstração: Seja $\psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ e denotemos por $u^\dagger v = \overline{u}\, \gamma(\tau) v$ para simplificar a notação. Neste caso sabemos que $\overline{u}\, v = u^\dagger \theta v$ com $\theta = \gamma(\tau)^{-1}$, logo

$$\int_K |\operatorname{Re} \overline{\psi} \, \not{D}\psi| \, \omega \leqslant \int_K |\overline{\psi} \, \not{D}\psi| \, \omega = \int_K |(\theta\psi)^\dagger \not{D}\psi| \, \omega \leqslant \left(\int_K |(\theta\psi)^\dagger \theta\psi| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K |(\not{D}\psi)^\dagger \not{D}\psi| \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.95}$$

Além disso, como K é compacto e $\theta \in \Gamma(GL(E))$, existe $C_\theta > 0$ tal que:

$$\int_K |(\theta\psi)^\dagger \theta\psi| \, \omega \leqslant C_\theta \int_K |\psi^\dagger \psi| \, \omega = C_\theta \, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \tag{2.96}$$

Segue que:

$$\int_K |\operatorname{Re} \overline{\psi} \, \not{D}\psi| \, \omega \leqslant \sqrt{C_\theta} \, p_{\omega,K,\tau}(\psi)^{1/2} \, p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi)^{1/2} \leqslant C_1 \left(p_{\omega,K,\tau}(\psi) + p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi) \right) \tag{2.97}$$

onde usamos que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ para a, $b \in \mathbb{R}$.
Para a outra equação temos, da mesma forma:

$$\int_K |\overline{\psi} \, B\psi| \, \omega \leqslant \int_K |(\theta\psi)^\dagger B\psi| \, \omega \leqslant \left(\int_K |(\theta\psi)^\dagger \theta\psi| \, \omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K |(B\psi)^\dagger B\psi| \, \omega \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.98}$$

Aliás, como K é compacto e $B \in \Gamma(L(E))$, existe $C_B > 0$ tal que:

$$\int_K |(B\psi)^\dagger B\psi|\,\omega \leqslant C_B \int_K |\psi^\dagger\psi|\,\omega = C_B\, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \tag{2.99}$$

Portanto,

$$\int_K |\overline{\psi}\, B\psi|\,\omega \leqslant C_2\, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \tag{2.100}$$

□

Usando estos resultados podemos provar as estimativas "a priori", que são análogas às clássicas "estimativas de energia" do espaço-tempo plano. Note que agora começamos com a hipótese de hiperbolicidade global, para não ter problemas com a causalidade.

Proposição 2.5 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um cone truncado e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existem constantes C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ tais que*[6]

$$\begin{gathered} C_1\, \|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} + C_2\, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \;\leqslant\; C_3\, p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi) + C_4\, \|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} \\ \textit{para } \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)\ . \end{gathered} \tag{2.101}$$

Mais ainda, existe uma constante $\delta > 0$ tal que dado qualquer $\lambda > 0$ podemos escolher as constantes C_2, $C_3 > 0$ de forma que $\delta + \lambda C_3 < C_2$.

Demonstração: Como M é globalmente hiperbólica sabemos que existe uma função temporal de Cauchy $t \in C^\infty(M)$, e como K é compacto existem a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a_1 < -t(m) < a_2 \qquad \text{para } \ m \in K \tag{2.102}$$

Suponha que temos dadas constantes $k_1 > 0$, $k_2 \in \mathbb{R}$ e definamos a função $s \in C^\infty(M)$ por

$$s = -k_1 t + k_2 \tag{2.103}$$

Assim, para cada $m \in M$, obtemos que $-ds_m \in I^{*,+}_m$, pois $-ds_m = k_1 dt_m$, $k_1 > 0$ e o conjunto $I^{*,+}_m$ é um cone convexo. Disto segue que a aplicação,

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \longmapsto & \overline{u}\,\gamma(-ds)v \end{array} \tag{2.104}$$

define uma métrica nas fibras definida positiva. Agora definimos $\tau = -ds$, ou seja que $p_{\omega,K,\tau}$ fornece uma seminorma em $H^0_{loc}(M,E)$. Logo,

$$p_{\omega,K,\tau}(\psi) = \int_K \overline{\psi}\,\gamma(-ds)\psi\,\omega \quad \text{para } \ \psi \in H^{k+1}_{loc}(M,E) \tag{2.105}$$

[6] Aqui e a seguir, escrevemos ψ no lugar de $\mathrm{R}_{\Sigma_0}\psi$, $\mathrm{R}_{\Sigma_1}\psi$ e $\mathrm{R}_L\psi$, para simplificar a notação.

Agora aplicamos a Observação 2.6 na funçâo $s \in C^\infty(M)$:

$$\begin{gathered}\int_{K_L} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} + \int_{K_1} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} + \int_{K_0} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} = \\ \int_K 2s\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi\,\omega - \int_K s\,\overline{\psi}\,B\psi\,\omega + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(ds)\psi\,\omega\end{gathered} \tag{2.106}$$

ou ainda

$$\begin{gathered}\int_{K_L} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} + \int_{K_1} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} + \int_K \overline{\psi}\,\gamma(-ds)\psi\,\omega = \\ \int_K 2s\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi\,\omega - \int_K s\,\overline{\psi}\,B\psi\,\omega + \int_{K_0} s\,\overline{\psi}\,\gamma(-\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu}\end{gathered} \tag{2.107}$$

para toda $\psi \in H^{r+1}_{loc}(E)$. Nosso objetivo é procurar condições nas constantes $k_1 > 0$ e $k_2 \in \mathbb{R}$ para poder limitar cada um dos termos desta equação, de forma que seja possível obter a desigualdade (2.101). A primeira condição nas constantes é que deve valer:

$$0 < k_1 a_1 + k_2 \tag{2.108}$$

Neste caso, pela definição de s, como $k_1 > 0$, sabemos que vale a seguinte estimativa:

$$0 < k_1 a_1 + k_2 < s(m) < k_1 a_2 + k_2 \quad \text{para} \;\; m \in K \tag{2.109}$$

Em particular, também vale que $|s| < k_1 a_2 + k_2$ em K. Por outra parte, dado um inteiro $k \geqslant 0$, pelo Lema 2.4 existem β_1 e $\beta_2 > 0$ tais que:

$$\int_K |\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi|\,\omega \leqslant \beta_1\,\left(p_{\omega,K,\tau}(\psi) + p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi)\right) \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.110}$$

$$\int_K |\overline{\psi}\,B\psi|\,\omega \leqslant \beta_2\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.111}$$

Portanto, usando as equações (2.109) e (2.110) obtemos:

$$\begin{gathered}\int_K 2s\,\mathrm{Re}\,\overline{\psi}\,\not{D}\psi\,\omega \leqslant 2\beta_1\,(k_1a_2 + k_2)\left(p_{\omega,K,\tau}(\psi) + p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi)\right) \\ \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)\end{gathered} \tag{2.112}$$

E usando a equação (2.111) obtemos:

$$-\int_K s\,\overline{\psi}\,B\psi\,\omega \leqslant \beta_2(k_1a_2 + k_2)\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.113}$$

Lembremos também que K_0 e K_1 são tipo espaço, logo, existem β_3, $\beta_4 > 0$ tais que:

$$\beta_3\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} \leqslant \int_{K_1} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\,dS_{\omega,\nu} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.114}$$

$$\int_{K_0} \overline{\psi}\,\gamma(-\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} \leqslant \beta_4 \,\|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.115}$$

Da primeira equação segue que:

$$\begin{gathered}\beta_3(k_1a_1+k_2)\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} \leqslant \int_{K_L} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} + \int_{K_1} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} \\ \text{para } \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)\end{gathered} \tag{2.116}$$

onde usamos que K_L é fracamente tipo espaço, ou seja que $(u,v) \longrightarrow \overline{u}\,\gamma(\nu)v$ é semi-definida positiva em K_L, i.e.:

$$0 \leqslant (k_1a_1+k_2) \int_{K_L} \overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} \leqslant \int_{K_L} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} \tag{2.117}$$

Da segunda equação segue que:

$$\int_{K_0} s\,\overline{\psi}\,\gamma(\nu)\psi\, dS_{\omega,\nu} \leqslant \beta_4(k_1a_2+k_2)\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.118}$$

Finalmente, usando as equações (2.105), (2.107), (2.112), (2.113), (2.116) e (2.118), obtemos para cada $\psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$,

$$\begin{gathered}\beta_3(k_1a_1+k_2)\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} + p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant 2\beta_1(k_1a_2+k_2)\,[p_{\omega,K,\tau}(\psi) + p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi)] + \\ \beta_2(k_1a_2+k_2)\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) + \beta_4(k_1a_2+k_2)\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_0}}\end{gathered} \tag{2.119}$$

ou seja:

$$C_1\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} + C_2\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant C_3\,p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi) + C_4\,\|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} \tag{2.120}$$

onde definimos

$$C_1 = \beta_3(k_1a_1+k_2)\;,\;\; C_2 = 1-(2\beta_1+\beta_2)(k_1a_2+k_2) \tag{2.121}$$

$$C_3 = 2\beta_1(k_1a_2+k_2)\;,\;\; C_4 = \beta_4(k_1a_2+k_2) \tag{2.122}$$

Vejamos que é possível escolher as constantes $k_1 > 0$, $k_2 \in \mathbb{R}$ de forma que as C_i são todas positivas. Como $a_2 - a_1 > 0$ e $\frac{1}{2\beta_1+\beta_2} > 0$ podemos escolher $k_1 > 0$ de forma que:

$$0 < k_1 < \frac{1}{a_2-a_1}\left(\frac{1}{2\beta_1+\beta_2}\right) \tag{2.123}$$

Logo,

$$k_1(a_2-a_1) < \frac{1}{2\beta_1+\beta_2} \tag{2.124}$$

ou seja,

$$-\,k_1a_1 < \frac{1}{2\beta_1+\beta_2} - k_1a_2 \tag{2.125}$$

Portanto, podemos escolher $k_2 \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$-k_1 a_1 < k_2 < \frac{1}{2\beta_1 + \beta_2} - k_1 a_2 \tag{2.126}$$

Isto implica que:

$$0 < k_1 a_1 + k_2 < k_1 a_2 + k_2 \quad (\text{ou seja } \ C_1, C_3 \ \text{ e } \ C_4 > 0) \tag{2.127}$$

e também que:

$$(2\beta_1 + \beta_2)\, k_2 < 1 - k_1 a_2 \,(2\beta_1 + \beta_2) \quad (\text{ou seja } \ C_2 > 0) \tag{2.128}$$

Assim C_1, C_2, C_3 e C_4 são todas positivas.

Falta provar que existe uma constante $\delta > 0$ tal que dado qualquer $\lambda > 0$ podemos escolher as constantes C_2, $C_3 > 0$ de forma que $\delta + \lambda C_3 < C_2$. Isto se consegue fazendo uma escolha uma pouco diferente das constantes $k_1 > 0$, $k_2 \in \mathbb{R}$. Podemos escolher um δ positivo de forma que:

$$0 < \delta < 1 \tag{2.129}$$

Agora, seja $\lambda > 0$; como $a_2 - a_1 > 0$ e $2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda > 0$ podemos escolher $k_1 > 0$ tal que:

$$0 < k_1 < \frac{1 - \delta}{(2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda)(a_2 - a_1)} \tag{2.130}$$

Logo,

$$k_1(a_2 - a_1) < \frac{1 - \delta}{2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda} \tag{2.131}$$

ou seja,

$$-k_1 a_1 < \frac{1 - \delta}{2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda} - k_1 a_2 \tag{2.132}$$

Portanto podemos escolher $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$-k_1 a_1 < k_2 < \frac{1 - \delta}{2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda} - k_1 a_2 \tag{2.133}$$

Segue que,

$$\delta < 1 - (k_1 a_2 + k_2)(2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda) \tag{2.134}$$

Aliás, usando as mesmas definições para as constantes C_i, sabemos que:

$$\begin{aligned} C_2 - C_3\lambda &= 1 - (2\beta_1 + \beta_2)(k_1 a_2 + k_2) - 2\beta_1(k_1 a_2 + k_2)\lambda = \\ &= 1 - (k_1 a_2 + k_2)(2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1\lambda) > \delta > 0 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Portanto, $C_2 - C_3\lambda > \delta$ como queriamos. Falta ver que, para as novas escolhas de $k_1 > 0$ e $k_2 \in \mathbb{R}$, as constantes C_i são todas positivas . A equação (2.133) implica que:

$$0 < k_1 a_1 + k_2 < k_1 a_2 + k_2 \quad (\text{ou seja } \ C_1, C_3 \ \text{ e } \ C_4 > 0) \tag{2.136}$$

Finalmente, $C_3 > 0$ implica que:

$$0 < \delta + C_3\lambda < C_2 \tag{2.137}$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Notemos que a prova desta desigualdade não usa o tempo como parâmetro, nem o Lema de Gronwall, como *quase todas* as provas das estimativas de energia para sistemas hiperbólicos. A grande exceção é a prova original de Friedrichs [21], na qual baseamos nossa versão geométrica.

Como conseqüência da Proposição 2.5 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.3 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um cone truncado e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existem constantes C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$, tais que*

$$C_1 \|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} + C_2\, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant C_3\, p_{\omega,K,\tau}(\overline{\not{D}}_\omega \psi) + C_4 \|\psi\|^2_{H^0_{K_1}} \qquad \textit{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E) \tag{2.138}$$

Mais ainda, existe uma constante $\delta > 0$ tal que dado qualquer $\lambda > 0$ podemos escolher as constantes C_2, $C_3 > 0$ de forma que $\delta + \lambda C_3 < C_2$.

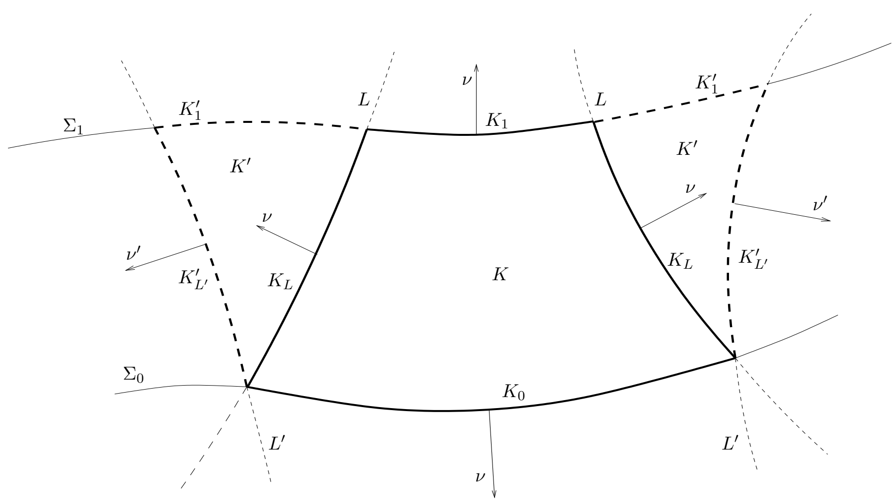

Figura 2.1: Cones truncados para $\overline{\not{D}}_\omega$

Demonstração: Note que o cone truncado K usado aqui ainda é o cone truncado associado a $\not{D}$, inclusive agora que estamos trabalhando com o operador $\overline{\not{D}}_\omega$ com a "direção do tempo" invertida (lembrar que $\overline{\gamma} = -\gamma$). A princípio poderiamos pensar que é necessário mudar o compacto K_1 usar um compacto K_1' diferente de K_1, com $K_1 \subset K_1'$, de forma que teriamos um cone truncado K' com K_1' como superfície inicial e K_0 como superfície final, de modo que $K \subset K'$ (veja a Figura 2.1). Porém, esta abordagem ingenua tem o problema de que o campo conormal ν' é semi-positivo definido para $\overline{\gamma} = -\gamma$, i.e. é semi-negativo definido para γ em $K'_{L'} = K' \cap L'$ (Figura 2.1).[7] A solução correta é pensar num "domínio de influência" ao invés de um domínio de dependência. Assim, devemos manter a escolha do compacto K_1 para o operador $\overline{\not{D}}_\omega$ de forma que ainda vamos ter que L é fracamente tipo espaço para γ. Como conseqüência disto a demonstração funciona da mesma forma que no caso anterior. $\square$

Corolário 2.4 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um compacto qualquer e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existem C_1, $C_2 > 0$ tais que*

$$C_1 \|\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant C_2 \|\not{D}\psi\|^2_{H^0_K} \quad \textit{para} \quad \psi \in H^{r+1}_K(M, E) \tag{2.139}$$

Mais ainda, existe uma constante $\delta > 0$ tal que dado qualquer $\lambda > 0$ podemos escolher as constantes C_1, $C_2 > 0$ de forma que $\delta + \lambda C_2 < C_1$. Por outro lado, existem C_3, $C_4 > 0$ tais que

$$C_3 \|\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant C_4 \|\overline{\not{D}}_\omega\psi\|^2_{H^0_K} \quad \textit{para} \quad \psi \in H^{r+1}_K(M, E) \tag{2.140}$$

Além disso, existe uma constante $\delta > 0$ tal que dado qualquer $\lambda > 0$ podemos escolher as constantes $C_3, C_4 > 0$ de forma que $\delta + \lambda C_4 < C_3$.

Demonstração: Para fazer a prova fazemos a mesmas contas da Proposição 2.5, mas usando o Lema 2.3 no caso de seções de suporte compacto. Como $\psi \in H^{r+1}_K(M, E)$ temos que $p_{\omega,K,\tau}(\psi) = \|\psi\|^2_{H^0_K}$ para alguma forma de volume $\omega \in \Omega^n(M)$, assim, vamos obter a desigualdade sem os termos de bordo, ou seja, existem C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \|\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant C_2 \|\not{D}\psi\|^2_{H^0_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^{r+1}_K(M, E) \tag{2.141}$$

onde, igual que antes, dada qualquer constante $\lambda > 0$, podemos escolher C_1, $C_2 > 0$ de forma que existe $\delta > 0$ tal que $\delta + \lambda C_2 < C_1$. A prova para o operador $\overline{\not{D}}_\omega$ é análoga ao Corolário 2.3. $\square$

2.4.2 Estimativas para índice real

As estimativas para as normas $H^r_K(E)$, $r \in \mathbb{R}$, são feitas em subvariedades compactas arbitrárias. Na verdade trabalhamos em subvariedades com cantos, onde é possível aplicar o Teorema de Stokes. Antes de provar estas estimativas, precisamos lembrar como fazer para relacionar as possíveis normas do espaço $H^r_K(M, E)$ com $r \in \mathbb{R}$, com as normas do espaço $H^0_K(M, E)$.[8]

[7] Lembrar que a causalidade do espaço tempo é dada pelo operador $\not{D}$, mesmo quando quisermos estimativas para o operador $\overline{\not{D}}$.

[8] Para maiores detalhes sobre as normas dos espaços $H^r_K(M, E)$ veja [50, 53].

Sabemos que o espaço $H^r_K(M,E)$ possui uma estrutura de espaço de Hilbert, onde uma das possíveis normas, denotada por $\|.\|_{H^r_K}$, é definida usando partições da unidade em K e "pull-back" das normas associada às cartas em $\mathbb{R}^n$. Se pode provar que a topologia induzida por estas normas é independente das escolhas arbitrárias das cartas e da partição da unidade em K. Além disso, também é possível mostrar que as seminormas dadas por:

$$\|\psi\|_{\Lambda^r,K'} = \|\Lambda^r\psi|_{K'}\|_{H^0_{K'}} \tag{2.142}$$

definem uma topologia equivalente em $H^r_K(M,E)$, onde K' é um conjunto compacto de M e Λ^r é um operador pseudodiferencial de ordem r. Analogamente, se pode provar que as seminormas dadas por:

$$\|\psi\|_{\Lambda^r} = \|\Lambda^r\psi\|_{H^0_{K'}} \tag{2.143}$$

definem uma topologia equivalente em $H^r_K(M,E)$, onde Λ^r é um operador pseudodiferencial *propriamente suportado* de ordem r e o conjunto K' é um compacto tal que

$$\operatorname{supp}\Lambda^r\psi \,\subset\, K' \quad \text{para} \;\; \psi \in H^r_K(M,E) \tag{2.144}$$

De fato, um tal compacto K' pode ser construido da seguinte forma: sabemos que vale

$$\operatorname{supp}\Lambda^r\psi \subset (\operatorname{supp}K_{\Lambda^r})\circ(\operatorname{supp}\psi) \quad \text{para} \;\; \psi \in \mathcal{E}'(M,E) \tag{2.145}$$

onde K_{Λ^r} denota o kernel do operador linear contínuo $\Lambda^r : \mathcal{E}'(M,E) \longrightarrow \mathcal{E}'(M,E)$. Por outra parte, sabemos que

$$(\operatorname{supp}K_{\Lambda^r})\circ(\operatorname{supp}\psi) = \pi_1(\operatorname{supp}K_{\Lambda^r} \cap \pi_2^{-1}(\operatorname{supp}\psi)) \tag{2.146}$$

onde $\pi_1,\ \pi_2 : M \times M \longrightarrow M$ são as projeções canônicas. Assim, lembrando que Λ^r é propriamente suportado se $\pi_1|_{\operatorname{supp}K_{\Lambda^r}}$ e $\pi_2|_{\operatorname{supp}K_{\Lambda^r}}$ são aplicações proprias, segue que $\pi_1\circ\pi_2^{-1}|_{\operatorname{supp}K_{\Lambda^r}}(K)$ é compacto, logo $\operatorname{supp}\psi \subset K$ implica que

$$\operatorname{supp}\Lambda^r\psi \subset \pi_1\circ\pi_2^{-1}|_{\operatorname{supp}K_{\Lambda^r}}(K) \quad \text{para} \;\; \psi \in H^r_K(M,E) \tag{2.147}$$

ou seja que podemos tomar $K' = \pi_1\circ\pi_2^{-1}|_{\operatorname{supp}K_{\Lambda^r}}(K)$.

Explicitamente, a equivalência das topologias se descreve da seguinte forma: dada uma norma $\|.\|_{H^r_K}$, existem um inteiro postivo l, constantes $a_j > 0$, operadores pseudodiferenciais propriamente suportados Λ^r_j de ordem r, para $j = 1,\ldots,l$ e compactos K_j, tais que:

$$\|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant \sum_{j=1}^{l} a_j\,\|\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^r_K(M,E) \tag{2.148}$$

onde

$$\operatorname{supp}\Lambda^r_j\psi \,\subset\, K_j \quad \text{para} \;\; \psi \in H^r_K(M,E)\,,\; j = 1,\ldots,l \tag{2.149}$$

Recíprocamente, dados um operador pseudodiferencial Λ^r de ordem r e um compacto K' de M, existe uma constante $a > 0$ tal que:

$$\|\Lambda^r\psi\|^2_{H^0_{K'}} \leqslant a\,\|\psi\|^2_{H^r_K} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^r_K(M,E) \tag{2.150}$$

Agora estamos em condições de provar as estimativas para $H^r_K(M,E)$.

Proposição 2.6 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um compacto qualquer e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant C_1 \|\not{D}\psi\|^2_{H^r_K} \quad para \ \ \psi \in H^{r+1}_K(M,E) \tag{2.151}$$

Demonstração: Seja $\psi \in H^{r+1}_K(M,E)$. Sabemos que existem um inteiro postivo l, constantes $a_j > 0$, compactos K_j e operadores pseudodiferenciais propriamente suportados Λ^r_j de ordem r, para $j = 1, \ldots, l$, tais que vale desigualdade (2.148). Por outra parte, usando o Corolário 2.4 nos compactos K_j sabemos que existem α_j, $\beta_j > 0$ tais que

$$\alpha_j \|\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \leqslant \beta_j \|\not{D}\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \tag{2.152}$$

onde, dada qualquer constante $\lambda_j > 0$, podemos escolher α_j, $\beta_j > 0$ de forma que existe $\delta_j > 0$ tal que $\delta_j + \lambda_j\beta_j < \alpha_j$. Aliás, como $[\not{D}, \Lambda^r_j] = \not{D}\Lambda^r_j - \Lambda^r_j\not{D}$, existem compactos $K_{j,1}$ e $K_{j,2}$ e constantes ω_j, $\rho_j > 0$, tais que

$$\|\not{D}\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \leqslant 2\|[\not{D}, \Lambda^r_j]\psi\|^2_{H^0_{K_{j,1}}} + 2\|\Lambda^r_j\not{D}\psi\|^2_{H^0_{K_{j,2}}} \leqslant 2\omega_j\|\psi\|^2_{H^r_K} + 2\rho_j\|\not{D}\psi\|^2_{H^r_K} \tag{2.153}$$

onde usamos que as aplicações $[\not{D}, \Lambda^r_j]$ e $\Lambda^r_j\not{D}$ são operadores pseudodiferencias propriamente suportados e que $\operatorname{supp}\psi \subset K$. Então, dado $\lambda_j = 2l\omega_j a_j > 0$ sabemos que existe $\delta_j > 0$ tal que

$$\delta_j + 2l\omega_j a_j\beta_j < \alpha_j \tag{2.154}$$

ou seja,

$$2\omega_j a_j \beta_j < \frac{1}{l}(\alpha_j - \delta_j) \tag{2.155}$$

Logo, usando as equações (2.148), (2.152) e (2.153) obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2_{H^r_K} &\leqslant \textstyle\sum_{j=1}^l a_j \|\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \\ &\leqslant \textstyle\sum_{j=1}^l \left(\frac{a_j\beta_j}{\alpha_j}\right) \|\not{D}\Lambda^r_j\psi\|^2_{H^0_{K_j}} \\ &\leqslant \textstyle\sum_{j=1}^l \left(\frac{2\omega_j a_j\beta_j}{\alpha_j}\right) \|\psi\|^2_{H^r_{K_j}} + \sum_{j=1}^l \left(\frac{2\rho_j a_j\beta_j}{\alpha_j}\right) \|\not{D}\psi\|^2_{H^r_{K_j}} \end{aligned} \tag{2.156}$$

para toda $\psi \in H^r_K(M,E)$. Segue que

$$c_1 \|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant c_2 \|\not{D}\psi\|^2_{H^r_{K_j}} \tag{2.157}$$

onde definimos $c_1 = 1 - \sum_{j=1}^l (\frac{2\omega_j a_j\beta_j}{\alpha_j})$ e $c_2 = \sum_{j=1}^l (\frac{2\rho_j a_j\beta_j}{\alpha_j})$. É claro que $c_2 > 0$. Vejamos que $c_1 > 0$. Usando a equação (2.155) obtemos

$$\sum_{j=1}^l \frac{2\omega_j a_j\beta_j}{\alpha_j} < \sum_{j=1}^l \frac{1}{l}\left(\frac{\alpha_j - \delta_j}{\alpha_j}\right) = \sum_{j=1}^l \frac{1}{l} - \frac{\delta_j}{l\alpha_j} = 1 - \sum_{j=1}^l \frac{\delta_j}{l\alpha_j} < 1 \tag{2.158}$$

pois $\sum_{j=1}^{l} \frac{\delta_j}{l\alpha_j} > 0$. Portanto obtemos

$$\|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant C_1 \|\not{D}\psi\|^2_{H^r_{K_j}} \tag{2.159}$$

com $C_1 > 0$, o que finaliza a demonstração. □

Observação 2.7 Note que a técnica usada na prova anterior precisa da hiperbolicidade nos compactos K_j, para usar as estimativas a priori para seções de suporte compacto. Portanto, não é suficente que o operador seja hiperbólico somente no compacto K (ou numa vizinhança aberta dele), pois como os operadores Λ^r_j são pseudodiferenciais, $\Lambda^r_j\psi$ não tem seu suporte contido em K senão num compacto K_j que pode ser maior. Porém, como não sabemos nada da geometria dos K_j, não podemos supor que sejam cones truncados, pelo qual não é possível estender os argumentos anteriores para generalizar as estimativas, quando as seções não tem suporte compacto, ou seja, já não temos estimativas com termos de bordo como na Proposição 2.5.

As estimativas "a priori" do caso de suporte compacto valem também para o operador globalmente hiperbólico $\overline{\not{D}}_\omega$.

Corolário 2.5 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um compacto qualquer e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant C_1 \|\overline{\not{D}}_\omega\psi\|^2_{H^r_K} \quad \textit{para} \quad \psi \in H^{r+1}_K(M,E) \tag{2.160}$$

Demonstração: Basta usar que $\overline{\not{D}}_\omega$ é simétrico hiperbólico. □

2.5 O problema de valor inicial.

Lembramos aqui de alguns aspectos técnicos necessários para abordar o problema de valor incial. Dada uma seção $\psi \in H^r_{loc}(M,E)$ e uma densidade $\omega \in \Omega^n(M)$, podemos obter uma seção decomponível $\overline{\psi} \otimes \omega \in H^r_{loc}(M,E^{\circledast})$. Neste caso, se $\operatorname{supp}\psi \subset K$, podemos estimar a norma em $H^0_K(M,E^{\circledast})$ usando a norma em $H^0_K(M,E)$, pois de todas as normas equivalentes em $H^0_K(M,E^{\circledast})$ podemos escolher a seguinte

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega\|^2_{H^0_K} = \int_K \overline{\psi}\,\gamma(\tau)\psi\,\omega \quad \text{para} \quad \psi \in H^0_K(M,E) \tag{2.161}$$

onde denotamos a norma em $H^0_K(M,E^{\circledast})$ pelo mesmo símbolo $\|.\|_{H^0_K}$, para não sobrecarregar a notação. Portanto, como as todas normas correspondentes às formas de volume $\omega \in \Omega^n(M)$ são equivalentes, existem constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tais que

$$\alpha_1 \|\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant \|\overline{\psi} \otimes \omega\|^2_{H^0_K} \leqslant \alpha_2 \|\psi\|^2_{H^0_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^0_K(M,E) \tag{2.162}$$

Esta equivalência de normas permite estender este resultado para obter uma relação entre as topologias para um índice real $r \in \mathbb{R}$, i.e., existem constantes α_3, $\alpha_4 > 0$ tais que

$$\alpha_3 \|\psi\|^2_{H^r_K} \leqslant \|\overline{\psi} \otimes \omega\|^2_{H^r_K} \leqslant \alpha_4 \|\psi\|^2_{H^r_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^r_K(M,E) \tag{2.163}$$

Agora consideremos $\omega \in \Omega^n(M)$ e definamos $\omega_K = \chi_K \omega$, onde χ_K é a função característica do compacto K. Aqui, podemos considerar $\psi \in H^r_{loc}(M,E)$ tal que $\operatorname{supp}\psi$ não esteja necessariamente contido em K, porém, ainda $\overline{\psi} \otimes \omega_K \in H^r_K(M,E)$. Logo, é possível estabelecer uma relação entre as normas, usando o seguinte

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^0_K} = \int_K \overline{\psi}\, \gamma(\tau) \psi\, \omega_K = \int_K \overline{\psi}\, \gamma(\tau) \psi\, \omega \quad \text{para} \quad \psi \in H^0_{loc}(M,E) \tag{2.164}$$

Aliás, como ∂K é um conjunto de medida nula para qualquer densidade $\omega \in \Omega^n(M)$, sabemos que dado qualquer real $r \in \mathbb{R}$, vale que $\psi_K = \chi_K \psi \in H^r_K(M,E)$ se $\psi \in H^r_{loc}(M,E)$, ou seja que existem constantes β_1, $\beta_2 > 0$ tais que

$$\beta_1 \|\psi_K\|^2_{H^0_K} \leqslant \int_K \overline{\psi}\, \gamma(\tau) \psi\, \omega \leqslant \beta_2 \|\psi_K\|^2_{H^0_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^0_{loc}(M,E) \tag{2.165}$$

Portanto

$$\beta_1 \|\psi_K\|^2_{H^0_K} \leqslant \|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^0_K} \leqslant \beta_2 \|\psi_K\|^2_{H^0_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^0_{loc}(M,E) \tag{2.166}$$

Logo, esta equivalência permite estender as estimativas, para obter uma relação entre as normas para um índice real $r \in \mathbb{R}$, i.e., existem constantes β_3, $\beta_4 > 0$ tais que

$$\beta_3 \|\psi_K\|^2_{H^r_K} \leqslant \|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \leqslant \beta_4 \|\psi_K\|^2_{H^r_K} \quad \text{para} \quad \psi \in H^k_{loc}(M,E) \tag{2.167}$$

Com esta Observação é possível provar o seguinte resultado, que em certo sentido é uma versão do Corolário 2.5 para o espaço $H^r_K(M, E^{\circledast})$.

Lema 2.5 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um cone truncado e ω uma forma de volume em M. Dado $r \geqslant 0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \leqslant C_1 \|\overline{(\overline{\not{D}}_\omega \psi)} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \quad \textit{para} \quad \psi \in H^r_{loc}(M,E) \tag{2.168}$$

onde $\omega_K = \chi_K \omega$.

Demonstração: Seja $\psi \in H^r_{loc}(M,E)$. Da equação (2.167) sabemos que existe $\beta_4 > 0$ tal que

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \leqslant \beta_4 \|\psi_K\|^2_{H^r_K} \tag{2.169}$$

Pelo Corolário 2.5 sabemos que existe $c_1 > 0$ tal que:

$$\|\psi_K\|^2_{H^r_K} \leqslant c_1 \|\overline{\not{D}}_\omega \psi_K\|^2_{H^r_K} \tag{2.170}$$

Mas, como ∂K tem medida nula para $\omega \in \Omega^n(M)$, temos que,

$$\|\overline{\not{D}}_\omega \psi_K\|^2_{H^r_K} = \|\chi_K(\overline{\not{D}}_\omega \psi)\|^2_{H^r_K} = \|(\overline{\not{D}}_\omega \psi)_K\|^2_{H^r_K} \tag{2.171}$$

Portanto,

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \leqslant \beta_4 \, c_1 \, \|(\overline{\not{D}}_\omega \psi)_K\|^2_{H^r_K} \tag{2.172}$$

Usando isto junto com a equação (2.167), desta vez para $\overline{\not{D}}_\omega \psi$, obtemos uma constante $\beta_3 > 0$ tal que

$$\|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \leqslant \beta_3^{-1} \beta_4 c_1 \, \|\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^r_K} \tag{2.173}$$

□

Lema 2.6 *Sejam $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade conexa M, K um cone truncado e ω uma forma de volume em M. Dado $l > 0$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\overline{\psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\|^2_{H^l_{K_0}} \leqslant C_1 \, \|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^{l+1/2}_K} \tag{2.174}$$

onde $\psi \in H^{l+1/2}_{loc}(M, E)$ e $\omega_K = \chi_K \omega$.

Demonstração: Da mesma forma que antes, no compacto K_0 contido na subvariedade Σ_0 existem constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tais que

$$\alpha_1 \, \|\chi\|^2_{H^l_{K_0}} \leqslant \|\overline{\chi} \otimes dS_{\omega,\nu}\|^2_{H^l_{\Sigma_0}} \leqslant \alpha_2 \, \|\chi\|^2_{H^l_{K_0}} \quad \text{para} \;\; \chi \in H^l_{K_0}(\Sigma_0, E) \tag{2.175}$$

Alén disso, como $l > 0$, o operador $\mathrm{R}_{\Sigma_0} : H^{l+1/2}_{loc}(M, E) \longrightarrow H^l_{loc}(\Sigma_0, E)$ é contínuo, ou seja, existe $\alpha_3 > 0$ tal que:

$$\|\overline{\mathrm{R}_0 \psi} \otimes dS_{\omega,\nu}\|^2_{H^l_{K_0}} \leqslant \alpha_2 \, \|\mathrm{R}_0 \psi\|^2_{H^l_{K_0}} \leqslant \alpha_2 \alpha_3 \, \|\psi\|^2_{H^{l+1/2}_K} \tag{2.176}$$

para toda $\psi \in H^{l+1/2}_{loc}(M, E)$. Agora usamos a equação (2.163) para encontrar $\alpha_4 > 0$ tal que

$$\|\psi\|^2_{H^{l+1/2}_K} \leqslant \alpha_4 \, \|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^{l+1/2}_K} \tag{2.177}$$

para toda $\psi \in H^{l+1/2}_{loc}(M, E)$. Portanto,

$$\|\overline{\mathrm{R}_{\Sigma_0} \psi} \otimes dS_\omega\|^2_{H^l_{K_0}} \leqslant \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \, \|\overline{\psi} \otimes \omega_K\|^2_{H^{l+1/2}_K} \tag{2.178}$$

para toda $\psi \in H^{l+1/2}_{loc}(M, E)$, que é o resultado desejado. □

Finalmente, estamos em condições de provar o Teorema principal deste trabalho.

Teorema 2.1 *Sejam* $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ *um operador globalmente hiperbólico em um fibrado vetorial* E *sobre uma variedade conexa* M*,* K *um cone truncado e* ω *uma forma de volume em* M*. Dados* $r \geqslant 0$ *e seções* $f \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$ *e* $g \in H^{r+1/2}_{loc}(\Sigma_0, E)$*, existe uma seção* $\psi \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$ *que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \not{D}\psi = f & em \;\; K \\ \psi|_{K_0} = g & em \;\; K_0 \end{cases} \tag{2.179}$$

Aliás, esta solução é única no seguinte sentido: se ψ_1 *e* $\psi_2 \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$ *são soluções, então* $\psi_1 = \psi_2$ *em* K*.*

Demonstração: Primeiro provaremos a existência. Para isto precisamos introduzir o seguinte espaço,

$$\mathcal{H} = \{\psi' \in \Gamma_c(E) \mid \psi'|_{K_L} = \psi'|_{K_1} = 0\} \tag{2.180}$$

De novo, usamos $\omega_K = \chi_K \omega$, onde $\omega \in \Omega^n(M)$ é uma forma de volume qualquer. Com isso podemos definir o seguinte espaço:

$$\mathcal{H}_1 = \{\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \mid \psi' \in \mathcal{H}\} \tag{2.181}$$

Notemos de passagem que valem as inclusões

$$\mathcal{H}_1 \subset H^0_K(E^{\circledast}) \subset H^{-l}_K(E^{\circledast}) \subset H^{-l}_c(E^{\circledast}) \quad \text{para} \;\; l \geqslant 0 \tag{2.182}$$

Queremos definir uma forma linear

$$\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{K} \tag{2.183}$$

dada por

$$\mathcal{F}(\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K) = \langle\, \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,, f \,\rangle_M + \langle\, \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\tau) g \,\rangle_{\Sigma_0} \tag{2.184}$$

onde usamos que $\psi' \in \mathcal{H} \subset \Gamma_c(E)$; em particular isto implica que $\overline{\psi'} \otimes \omega_K \in H^0_K(M, E^{\circledast}) \subset H^{-r-1}_c(M, E^{\circledast})$ e que $\overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \in H^0_K(\Sigma_0, E^{\circledast} \subset H^{-r-1/2}_c(\Sigma_0, E^{\circledast})$.

Vejamos que a aplicação da equação (2.183) está bem definida. Seja $\psi' \in \mathcal{H}$, logo $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \in \mathcal{H}_1$, e a condição $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K = 0$ implica que $\chi_K \overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} = 0$, ou seja que $\chi_K \overline{\not{D}}_\omega \psi' = 0$, i.e., $\overline{\not{D}}_\omega \psi' = 0$ em K. Aliás, pelo Corolário 2.3, como $\psi' \in \mathcal{H} \subset \Gamma_c(E)$ sabemos que existem constantes C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ tais que

$$0 \leqslant C_1 \, \|\psi'\|^2_{H^0_{K_0}} + C_2 \, p_{\omega,K}(\psi') \leqslant C_3 \, p_{\omega,K}(\overline{\not{D}}_\omega \psi') + C_4 \, \|\psi'\|^2_{H^0_{K_1}} = 0 \tag{2.185}$$

onde usamos que $\psi'|_{K_1} = 0$ e que $\overline{\not{D}}_\omega \psi' = 0$ em K. Logo $C_1 \|\psi'\|^2_{H^0_{K_0}} + C_2 p_{\omega,K}(\psi') = 0$. Em particular vale que $p_{\omega,K}(\psi') = 0$, ou seja, $\psi' = 0$ em K. Portanto (2.183) está bem definida.

Agora gostariamos estender a aplicação (2.183) para o espaço $H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast})$ usando o Teorema de Hahn-Banach. Para isto, vejamos primeiro que $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua com a topologia de $H_K^{-r-1}(M, E^{\circledast})$, para poder estender para uma aplicação linear contínua $\mathcal{F} : H_K^{-r-1}(M, E^{\circledast}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Seja $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \in \mathcal{H}_1$, como os pareamentos $\langle\, .\,,\, .\,\rangle_M$ e $\langle\, .\,,\, .\,\rangle_{\Sigma_0}$ são continuos, existem constantes C_f, $C_g > 0$ tais que:

$$|\mathcal{F}(\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K)| \leqslant C_f \, \|\overline{\psi'} \otimes \omega_K\|_{H_K^{-r-1}} + C_g \, \|\overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu}\|_{H_{K_0}^{-r-1/2}} \tag{2.186}$$

para toda seção $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \in \mathcal{H}_1$. Aliás, pelos Lemas 2.5 e 2.6 existem constantes α_1, $\alpha_2 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}(\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K)| \leqslant \alpha_1 C_f \, \|\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K\|_{H_K^{-r-1}} + \alpha_2 C_g \, \|\overline{\psi'} \otimes \omega_K\|_{H_K^{-r-1}} \tag{2.187}$$

Usando de novo o Lema 2.5, obtemos

$$|\mathcal{F}(\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K)| \leqslant C_1 \, \|\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K\|_{H_K^{-r-1}} \tag{2.188}$$

para toda $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \in \mathcal{H}_1$, onde $C_1 = C_1(f, g)$. Isto quer dizer que $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua e pode ser estendida para $\mathcal{F} : H_K^{-r-1}(M, E^{\circledast}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Logo, pela definição da topologia do limite indutivo segue que esta aplicação é contínua na topologia de $H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast})$. Portanto, podemos usar o Teorema de Hahn-Banach para estender a aplicação original (2.183) para uma aplicação linear contínua

$$\mathcal{F} : H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast}) \longrightarrow \mathbb{K} \tag{2.189}$$

Agora usamos que o pareamento $\langle\, .\,,\, .\,\rangle_M : H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast}) \times H_{loc}^{r+1}(M, E) \longrightarrow \mathbb{K}$ é perfeito, logo, existe uma seção $\psi \in H_{loc}^{r+1}(M, E)$ (solução!) tal que

$$\mathcal{F}(\alpha) = \langle\, \alpha \,,\, \psi \,\rangle_M \quad \text{para} \quad \alpha \in H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast}) \tag{2.190}$$

Em particular, se $\psi' \in \mathcal{H}$, ou seja, se $\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \in \mathcal{H}_1 \subset H_c^{-r-1}(M, E^{\circledast})$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K) &= \langle\, \overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \,,\, \psi \,\rangle_M \\ &= \langle\, \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,,\, f \,\rangle_M + \langle\, \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,,\, \gamma(\tau) g \,\rangle_{\Sigma_0} \end{aligned} \tag{2.191}$$

para toda $\psi' \in \mathcal{H}$. Notemos de passagem que nesta equação, os pareamentos se podem escrever como integrais pois $\psi \in H_{loc}^{r+1}(M, E)$, $k \geqslant 0$ e $\mathcal{H}_1 \subset H_K^0(M, E^{\circledast})$. Por outra parte, como $r \geqslant 0$, sabemos da Proposição 2.4 que vale[9]

$$\begin{aligned} \langle\, \overline{\overline{\not{D}}_\omega \psi'} \otimes \omega_K \,,\, \psi \,\rangle_M &= \langle\, \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,,\, \not{D} \psi \,\rangle_M + \langle\, \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,,\, \gamma(\tau) \psi \,\rangle_{\Sigma_0} - \\ &\quad \langle\, \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,,\, \gamma(\tau) \psi \,\rangle_{\Sigma_1} - \langle\, \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,,\, \gamma(\nu) \psi \,\rangle_L \end{aligned} \tag{2.192}$$

[9] Esta parte da argumentação falha no caso de querer estender o resultado deste teorema para $r \in \mathbb{R}$.

para toda $\psi' \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$. Portanto, como $\mathcal{H} \subset H^{r+1}_{loc}(M,E)$, podemos usar as equações (2.191) e (2.192) para obter

$$\begin{aligned} \langle \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,, \not{D}\psi - f \rangle_M &= \langle \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\nu)\psi \rangle_L + \langle \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\tau)\psi \rangle_{\Sigma_1} - \\ & \quad \langle \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\tau)(\psi - g) \rangle_{\Sigma_0} \end{aligned} \tag{2.193}$$

para toda $\psi' \in \mathcal{H}$. E como $\psi'|_L = \psi'|_{\Sigma_T} = 0$ para toda $\psi' \in \mathcal{H}$, segue que

$$\langle \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,, \not{D}\psi - f \rangle_M = \langle \overline{\psi'} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\tau)(g - \psi) \rangle_{\Sigma_0} \tag{2.194}$$

para toda $\psi' \in \mathcal{H}$.

Agora fixemos uma seção $\chi \in \Gamma_K(E) \subset \mathcal{H}$, temos que $\overline{\chi} \otimes \omega_K = \in \mathcal{H}_1 \subset \Gamma_K(E^{\circledast})$ e, em particular vale $\mathrm{R}_{\Sigma_0}\chi = 0$, i.e., $\overline{\chi} \otimes dS_{\omega,\nu} = 0$ em Σ_0. Assim, da equação (2.194) segue que

$$\langle \overline{\chi} \otimes \omega_K \,, \not{D}\psi - f \rangle_M = 0 \quad \text{para} \quad \chi \in \Gamma_K(E) \tag{2.195}$$

Aliás, como $\Gamma_K(E)$ é denso em $H^{-r-1}_K(M,E)$ e a inclusão $H^{-r-1}_K(M,E) \hookrightarrow H^{-r-1}_c(M,E)$ é contínua, podemos usar a continuidade do pareamento perfeito para obter

$$\langle \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,, \not{D}\psi - f \rangle_M = 0 \quad \text{para} \quad \psi' \in H^{-r-1}_K(M,E) \tag{2.196}$$

Por outra parte, dada $\alpha \in H^{-r-1}_c(M,E^{\circledast})$ temos que $\chi_K\alpha \in H^{-r-1}_K(M,E^{\circledast})$, em particular podemos expressar $\chi_K\alpha$ como soma finita de seções decomponíveis, i.e., existem um inteiro positivo l e seções $\psi_i \in H^{-r-1}_K(M,E)$, $i = 1,\dots,l$ tais que

$$\chi_K\alpha = \sum_{i=1}^{l} \overline{\psi_i} \otimes \omega_K \tag{2.197}$$

Assim, usando as equações (2.196) e (2.197) obtemos

$$\langle \chi_K\alpha \,, \not{D}\psi - f \rangle_M = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \in H^{-r-1}_c(M,E^{\circledast}) \tag{2.198}$$

ou seja,

$$\langle \alpha \,, \chi_K(\not{D}\psi - f) \rangle_M = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \in H^{-r-1}_c(M,E^{\circledast}) \tag{2.199}$$

Como o pareamento é perfeito, obtemos $\chi_K(\not{D}\psi - f) = 0 \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$. Portanto,

$$\not{D}\psi = f \quad \text{em} \quad K \tag{2.200}$$

Vejamos agora que a solução $\psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ satisfaz a condição inicial. Sabemos que $\chi_K(\not{D}\psi - f) = 0$, o que implica que

$$\langle \overline{\psi'} \otimes \omega_K \,, \not{D}\psi - f \rangle_M = \langle \overline{\psi'} \otimes \omega \,, \chi_K(\not{D}\psi - f) \rangle_M = 0 \tag{2.201}$$

para toda $\psi' \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$. Portanto, como $\mathcal{H} \subset H^{r+1}_{loc}(M,E)$, podemos usar a equação (2.194) para obter

$$\langle \overline{\psi'} \otimes dS_\omega \,, \gamma(\tau)(g - \psi) \rangle_{\Sigma_0} = 0 \quad \text{para} \quad \psi' \in \mathcal{H} \tag{2.202}$$

Por outra parte, sabemos que dada $\psi_0 \in \Gamma(\Sigma_0, E)$ sempre podemos encontrar uma seqüência $(\psi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} \subset \Gamma_c(E)$ tal que $\mathrm{R}_{\Sigma_0}\psi_i \to \psi_0$ em $H^{r+1}_{loc}(\Sigma_0, E)$. Usando isto segue que $\overline{\mathrm{R}_{\Sigma_0}\psi_i} \otimes dS_{\omega,\nu} \longrightarrow \overline{\psi_0} \otimes dS_{\omega,\nu}$ em $H^{r+1}_{loc}(\Sigma_0, E^{\circledast})$, e como o pareamento $\langle\, . \,, . \,\rangle_{\Sigma_0}$ é contínuo, obtemos

$$\langle\, \overline{\psi_0} \otimes dS_{\omega,\nu} \,, \gamma(\tau)(g-\psi)\,\rangle_{\Sigma_0} = 0 \quad \text{para} \;\; \psi_0 \in \Gamma(\Sigma_0, E) \tag{2.203}$$

onde usamos que

$$\langle\, \overline{\psi_i} \otimes dS_{\omega} \,, \gamma(\tau)(g-\psi)\,\rangle_{\Sigma_0} = 0 \quad \text{para} \;\; \psi_i \in \mathcal{H} \;,\; i \in \mathbb{N} \tag{2.204}$$

Portanto obtemos que $\gamma(\tau)(g-\psi) = 0 \in H^{r+1/2}_{K_0}(\Sigma_0, E)$.[10] Logo, como $\gamma(\tau)$ é não degenerada segue que

$$\psi|_{\Sigma_0} = \mathrm{R}_{\Sigma_0}\psi = g \quad \text{em} \;\; K_0 \tag{2.205}$$

o que mostra que $\psi \in H^{r+1}_K(M, E)$ é solução do problema de valor inicial(2.179).

Falta provar a unicidade. Sejam $\psi_1,\ \psi_2 \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$ duas soluções do problema de valor inicial (2.179). Sabemos da Proposição 2.5 que existem constantes positivas satisfazendo a desigualdade (2.101). Aliás, como $0 \leqslant \|\psi\|^2_{H^0_{\Sigma_1}}$ podemos obter C_1, C_2, $C_3 > 0$ tais que

$$C_1\, p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant C_2\, p_{\omega,K,\tau}(\not{D}\psi) + C_3\, \|\psi\|^2_{H^0_{K_0}} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M, E) \tag{2.206}$$

ou seja

$$C_1\, \|\chi_K\psi\|^2_{H^0_K} \leqslant C_2\, \|\chi_K\not{D}\psi\|^2_{H^0_K} + C_3\, \|\psi\|^2_{H^0_{\Sigma_0}} \quad \text{para} \;\; \psi \in H^{r+1}_{loc}(M, E) \tag{2.207}$$

onde usamos que $p_{\omega,K,\tau}(\psi) = \|\chi_K\psi\|^2_{H^0_K}$. Em particular podemos aplicar a equação (2.207) para a seção $\psi_1 - \psi_2 \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$, do qual segue que

$$C_1\, \|\chi_K(\psi_1-\psi_2)\|^2_{H^0_K} \leqslant C_2\, \|\chi_K\not{D}(\psi_1-\psi_2)\|^2_{H^0_K} + C_3\, \|\psi_1-\psi_2\|^2_{H^0_{K_0}} = 0 \tag{2.208}$$

pois sabemos que $\not{D}(\psi_1 - \psi_2) = f - f = 0$ em K e também que $\psi_1 - \psi_2 = g - g = 0$ em K_0. Segue que $\chi_K(\psi_1 - \psi_2) = 0$, i.e., $\psi_1 = \psi_2$ em K, o que mostra a unicidade. □

Observação 2.8 Fazemos aqui um comentário sobre *boa postura* para o problema de valor inicial enunciado no Teorema 2.1. Para provar a boa postura deste problema precisamos da existência e unicidade das soluções, assim como a dependência contínua das mesmas respeito das condições iniciais. No Teorema 2.1 já provamos tanto a existência quanto a unicidade, mas falta analisar que acontece quando fazemos pequenas mudanças nas funções $f \in H^{r+1}_{loc}(M, E)$ e $g \in H^{r+1/2}_{K_0}(\Sigma_0, E)$.

O problema é que para estudar esta questão, em geral, são usadas estimativas "a priori", o qual não é possível em nosso caso, pois somente temos estimativas adequadas

[10] Lembrar que $\psi \in H^r_K(E)$ e que em K_0 estamos escrevendo ψ no lugar de $\mathrm{R}_{\Sigma_0}\psi \in H^{r+1/2}_{K_0}(\Sigma_0, E)$.

nos espaços $H^r_{loc}(E)$ para $r \geqslant 0$ (estamos nos referindo à Proposição 2.5). Quando o índice do espaço de Sobolev for negativo, as estimativas obtidas somente consideram o caso de seções com suporte contido no compacto K (Proposição 2.6). Portanto, o melhor que podemos obter é boa postura nos espaços de Sobolev para índice $r \in \mathbb{R}$ com $r \geqslant 0$, o que, usando o Lema de Sobolev também implica boa postura tanto nas classes C^s quanto na classe C^∞.

Explícitamente, dadas $f \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ e $g \in H^{r+1/2}_{loc}(\Sigma_0,E)$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \not{D}\psi = f & \text{em} \quad K \\ \psi|_{K_0} = g & \text{em} \quad K_0 \end{cases} \tag{2.209}$$

é bem posto nas topologias de $H^r_{loc}(M,E)$ e $H^r_{loc}(\Sigma_0,E)$. De fato, seja $\psi \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ a única solução dada pelo Teorema 2.1. Então, pela Proposição 2.5 sabemos que existem constantes C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ tais que

$$C_1\,\|\psi\|^2_{H^r_{K_1}} + C_2\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant C_3\,p_{\omega,K,\tau}(f) + C_4\,\|g\|^2_{H^r_{K_0}} \tag{2.210}$$

Em particular valem

$$C_1\,\|\psi\|^2_{H^r_{K_1}} \leqslant C_3\,p_{\omega,K,\tau}(f) + C_4\,\|g\|^2_{H^r_{K_0}} \tag{2.211}$$

e

$$C_2\,p_{\omega,K,\tau}(\psi) \leqslant C_3\,p_{\omega,K,\tau}(f) + C_4\,\|g\|^2_{H^r_{K_0}} \tag{2.212}$$

o que mostra que pequenas mudanças nas condições iniciais geram pequenas mudanças nas soluções, tanto dentro do compacto K quanto no "estado final", i.e., em K_1. $\diamond$

A pergunta que surge naturalmente depois de pensar um pouco sobre a prova do Teorema 2.1, é sobre a possibilidade de fazer uma versão para distribuições quaisquer, ou seja, para condições iniciais com índice $r \in \mathbb{R}$ arbitrário, $f \in H^{r+1}_{loc}(M,E)$ e $g \in H^{r+1/2}_{loc}(\Sigma_0,E)$. A resposta não parece ser simples no caso de um problema de condições iniciais, por causa das dificuldades para trabalhar com os suportes de operadores pseudodiferenciais. Mas, no caso de soluções locais para um operador globalmente hiperbólico $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$, seria possível aplicar argumentos de existência e unicidade usando as estimativas "a priori" para seções de suporte compacto; em particular, gostariamos poder provar a existência de operadores de Green. Isto permanece como parte das opções de pesquisa a serem desenvolvidas num trabalho posterior.

Capítulo 3

Operadores de Dirac hiperbólicos e G-estruturas

Como foi visto nos capítulos anteriores, a definição do conceito de um operador simétrico hiperbólico é formulada exclusivamente em função das propriedades algébricas de seu símbolo principal. Portanto, podemos perguntar quais seriam as consequências quando impomos condições adicionais "naturais" sobre este. No presente capítulo, estudaremos duas situações desta natureza (que podem ocorrer independentemente uma da outra, ou também simultaneamente). A primeira resulta da exigência de que o símbolo principal satisfaça relações algébricas adicionais: o exemplo mais importante são as relações da álgebra de Clifford, o que nos leva aos operadores de Dirac hiperbólicos. A segunda aparece quando o fibrado vetorial E em que atua o operador decorre de uma G-estrutura, podendo ser escrito como fibrado vetorial associado a um fibrado principal P e uma representação do grupo estrutural G de P na fibra típica $\mathbb{E}$ de E, de modo que o símbolo principal do operador em questão também decorre de um único símbolo principal "algébrico" definido nesta fibra típica $\mathbb{E}$.

3.1 Operadores de Dirac hiperbólicos

No Exemplo 1.5, já foi apresentado o operador de Dirac hiperbólico no espaço-tempo de Minkowski. A seguir, estenderemos a sua construção para proporcionar toda uma classe de operadores de Dirac atuando em certos fibrados vetoriais sobre variedades pseudo-riemannianas, de assinatura arbitrária, e mostraremos que estes operadores não apenas (a) são elípticos se e somente se a variedade subjacente for riemanniana mas também (b) são hiperbólicos simétricos se e somente se a variedade subjacente for lorentziana.

Definição 3.1 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador diferencial linear de primeira ordem em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$. Dizemos que $\not{D}$ é um **operador de Dirac** em E se, para todo* *covetor $\xi \in T^*M$, $\gamma(\xi)^2$ é um múltiplo da identidade, de modo que vale a relação*

$$\gamma(\xi)^2 \;=\; 2\,q(\xi)\,1_E \qquad \textit{para}\ \xi \in T^*M\ . \tag{3.1}$$

Obviamente, a equação (3.1) define, em cada ponto m de M, uma forma quadrática q_m e, por polarização, uma forma bilinear simétrica $\boldsymbol{g}_m$ sobre o espaço cotangente T_m^*M, proporcionando um campo tensorial $\boldsymbol{g}$ de tipo $(2,0)$ sobre M, conforme

$$2\,\boldsymbol{g}(\xi,\eta) \;=\; q(\xi+\eta) - q(\xi) - q(\eta) \qquad \text{para}\ \xi,\eta \in T^*M\ , \tag{3.2}$$

de modo que a equação (3.1) pode ser reescrita na seguinte forma equivalente:

$$\gamma(\xi)\gamma(\eta) + \gamma(\eta)\gamma(\xi) \;=\; 2\,\boldsymbol{g}(\xi,\eta)\,1_E \qquad \text{para} \quad \xi,\eta \in T^*M\ . \tag{3.3}$$

Diremos então que o operador de Dirac $\not{D}$, assim como o seu símbolo principal γ, é **não-degenerado** se, em cada ponto m de M, a forma bilinear simétrica $\boldsymbol{g}_m$ for não-degenerada: neste caso, por dualização, obtemos um campo tensorial de tipo $(0,2)$ sobre M, também denotado por $\boldsymbol{g}$: assim, operadores de Dirac não-degenerados são naturalmente associados a variedades pseudo-riemannianas. Observamos, também, que neste caso, γ é necessariamente injetor (pois $\gamma(\xi) = 0$ implica $\boldsymbol{g}(\xi,\eta) = 0$ para todo η), o que, no caso do operador ser hiperbólico simétrico (veja a Proposição 3.2 logo abaixo) exclui as patologias na estrutura causal apontadas no comentário após o Exemplo 1.10.

O exemplo mais estudado em Matemática é o caso riemanniano, devido à importância fundamental do operador de Dirac elíptico como exemplo paradigmático para o teorema do índice de Atiyah e Singer, uma vez que três dos quatro complexos elípticos clássicos são construídos acerca dele [5, 25, 36].

Proposição 3.1 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador de Dirac em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ e campo tensorial associado $\boldsymbol{g}$. Então $\not{D}$ é elíptico se e somente se $\boldsymbol{g}$ for uma métrica riemanniana. Nestas condições, dizemos que $\not{D}$ é um **operador de Dirac elíptico**.*

Demonstração: Trivial, pois a equação (3.3) implica que, para $\xi \in T^*M$,

$$\det\gamma(\xi) = 0 \iff \det\gamma(\xi)^2 = 0 \iff \boldsymbol{g}(\xi,\xi) = 0\ .$$

$\square$

Observamos que, neste caso elíptico, também temos sempre uma métrica tipo Dirac em E, que neste caso é positiva definida, construída em dois passos. Primeiro, considere qualquer aberto U de M tal que o fibrado tangente TM e, portanto, também o fibrado cotangente T^*M, assim como o fibrado vetorial E, são triviais sobre U, e escolhe um referencial ortonormal de M sobre U, i.e., um conjunto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de campos vetoriais sobre U e o conjunto $\{e^1,\ldots,e^n\}$ de 1-formas duais sobre U, assim como uma trivialização de E sobre U que permite identificar $E|_U$ com $U \times \mathbb{E}$, onde $\mathbb{E}$ denota a fibra típica de E, e considerar os $\gamma^j = \gamma(e^j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ e os seus produtos como transformações lineares, pertencentes a $L(\mathbb{E})$. Então segue das relações de Clifford (3.3) que o conjunto

$$\Gamma \;=\; \left\{ \pm 1, \pm i1, \pm\gamma^{j_1} \ldots \gamma^{j_k}, \pm i\gamma^{j_1} \ldots \gamma^{j_k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\,,\, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n \right\}$$

fecha sob multiplicação e sob o inverso, ou seja: Γ é um grupo finito, contendo $4{\cdot}2^n = 2^{n+2}$ elementos. Portanto, podemos aplicar o "truque unitário de Weyl" para construir, a partir de um produto escalar positivo definido qualquer $\langle\,.\,,.\rangle_0$ em $\mathbb{E}$, uma métrica nas fibras em E sobre U, denotada por $(u,v) \longmapsto u^\dagger v$ por também ser positiva definida, pondo

$$u^\dagger v \;=\; 2^{-n-2} \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle \gamma u, \gamma v\rangle_0 \ ,$$

de modo que todos os elementos de Γ são unitários em relação a ela, e usando novamente as relações de Clifford (3.3), concluímos que os geradores γ^j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ também são hermiteanos em relação a ela. Segundo, aplica-se o método usual de "colagem" mediante uma partição da unidade para obter uma métrica tipo Dirac positiva definida global.

Notamos, de passagem, que a primeira parte deste argumento (a parte local) funciona da mesma forma no caso pseudo-riemanniano, exceto que agora, além dos geradores γ^j cujo quadrado é $+1$ e que são hermiteanos, há também geradores γ^j cujo quadrado é -1 e que são anti-hermiteanos (para lidar com estes, basta trocar, no argumento anterior, $\pm\gamma^j$ com $\pm i\gamma^j$). Portanto, neste caso, é preciso passar a uma nova métrica nas fibras em E sobre U, denotada por $(u,v) \longmapsto \overline{u}\,v$, para tornar todos os geradores γ^j pelo menos pseudo-hermiteanos. Ocorre que, dependendo da assinatura da métrica, isso é possível na maioria dos casos, mas não em todos. Mais precisamente, se $\boldsymbol{g}$ tiver assinatura (p,q), de modo que $\boldsymbol{g}^{jj} = +1$ para $1 \leqslant j \leqslant p$ e $\boldsymbol{g}^{jj} = -1$ para $p+1 \leqslant j \leqslant p+q = n$, então

- se p for ímpar, podemos escolher θ na equação (1.6) conforme $\theta = i^{p(p-1)/2}\gamma^1 \ldots \gamma^p$, ou seja
$$\overline{u}\,v \;=\; i^{p(p-1)/2}\, u^\dagger\gamma^1 \ldots \gamma^p v \ , \tag{3.4}$$
- se p for par e q (ou equivalentemente, n) também for par, podemos escolher θ na equação (1.6) conforme $\theta = i^{q(q+1)/2}\gamma^{p+1} \ldots \gamma^n$, ou seja
$$\overline{u}\,v \;=\; i^{q(q+1)/2}\, u^\dagger\gamma^{p+1} \ldots \gamma^n v \ , \tag{3.5}$$
- se p for par e q (ou equivalentemente, n) for ímpar, então (pelo menos no caso da representação da álgebra de Clifford ser irredutível), não há solução, pois neste caso θ teria que comutar com $\gamma^1, \ldots, \gamma^p$ e anticomutar com $\gamma^{p+1}, \ldots, \gamma^n$, de modo que teria que anticomutar com o produto completo $\gamma^1 \ldots \gamma^n$, e isso é impossível pois em dimensão ímpar, este produto pertence ao centro da álgebra de Clifford.[1]

[1] É dessa observação que surge o principal motivo por trás da afirmação de que, no caso de uma métrica lorentziana, a convenção $(+-\ldots-)$ é melhor do que a convenção $(-+\ldots+)$: isso se torna relevante quando temos que lidar com espinores, como já foi observado em [55, p. 342].

Contudo, é importante ressaltar que a segunda parte do argumento (a parte global) deixa de funcionar no caso pseudo-riemanniano geral, pois métricas indefinidas não podem ser "coladas" usando partições da unidade, uma vez que, ao contrário de propriedade de positividade definida, a propriedade de não-degenerescência não é preservada sob formação de combinações lineares convexas. Portanto, a observação de que no caso lorentziano, este problema pode ser superado fazendo uso da Proposição 1.4 está longe de ser trivial.

Do ponto de vista da Física Matemática, o caso hiperbólico é, no mínimo, tão interessante quanto o caso elíptico. É aqui que encontramos um dos motivos principais da definição de um operador hiperbólico simétrico adotada neste trabalho, pois é com ela que vale o seguinte análogo à proposição anterior.

Proposição 3.2 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador de Dirac em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ e campo tensorial associado $\boldsymbol{g}$. Então $\not{D}$ é hiperbólico simétrico, com símbolo principal injetor, se e somente se $\boldsymbol{g}$ for uma métrica lorentziana (de assinatura $(1, n-1)$) e, ainda, M for orientável no tempo (em relação a $\boldsymbol{g}$). Nestas condições, dizemos que $\not{D}$ é um **operador de Dirac hiperbólico**.*

Demonstração: Supondo primeiro que $\not{D}$ é um operador de Dirac cujo campo tensorial associado $\boldsymbol{g}$ é uma métrica lorentziana (o que implica, como foi mencionado acima, que γ deve ser injetor) e tal que M é orientável no tempo (em relação a $\boldsymbol{g}$), queremos provar que $\not{D}$ é hiperbólico simétrico: para tanto, é preciso construir uma métrica tipo Dirac hiperbólica associada a γ. Localmente, essa construção funciona da mesma maneira que antes: em cada aberto U de M tal que todos os fibrados vetoriais envolvidos sejam triviais sobre U, (a) escolhemos um referencial ortonormal e orientado no tempo de M sobre U, i.e., um conjunto $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ de campos vetoriais sobre U e o conjunto $\{e^0, e^1, \ldots, e^{n-1}\}$ de 1-formas duais sobre U de modo que e_0 e e^0 são tipo tempo futuro, (b) introduzimos uma métrica nas fibras auxiliar em $E|_U$, $(u, v) \longmapsto u^\dagger v$, positiva definida, em relação a qual as transformações lineares $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}$ são todas unitárias e (c) definimos uma nova métrica nas fibras em $E|_U$, $(u, v) \longmapsto \overline{u}\, v$, não-degenerada, em relação a qual as transformações lineares $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}$ são todas pseudo-hermiteanas, pondo

$$\overline{u}\, v \;=\; u^\dagger \gamma^0 v \;, \tag{3.6}$$

de modo que

$$\overline{u}\, \gamma^0 v \;=\; u^\dagger v \;. \tag{3.7}$$

Assim, fica óbvio que $(u, v) \longmapsto \overline{u}\, v$ é uma métrica tipo Dirac hiperbólica em $E|_U$ associada a γ e portanto o operador $\not{D}_U : \Gamma(U, E) \longrightarrow \Gamma(U, E)$ é hiperbolico simétrico. Além disso, podemos provar que todo covetor futuro cronológico $\tau \in T^*M|_U$ em relação à métrica $\boldsymbol{g}$ e à orientação no tempo dada também é um covetor futuro cronológico em relação à qualquer métrica tipo Dirac hiperbólica assim construída, e portanto podemos lançar mão de partições da unidade para colar essas métricas tipo Dirac hiperbólicas locais e assim obter uma que é global, conforme explicado na Proposição 1.4. De fato, suponha que $\tau \in T^*M|_U$ seja um covetor futuro cronológico em relação à métrica $\boldsymbol{g}$ e à orientação no tempo dada; então na expansão $\tau = \tau_\mu e^\mu$ de τ em termos do referencial $\{e^0, e^1, \ldots, e^{n-1}\}$, temos $\tau_0 = \boldsymbol{g}(\tau, e^0) > 0$ e

$$\tau_0^2 \;\geqslant\; \boldsymbol{g}(\tau,\tau) \;>\; 0 \;.$$

Precisamos provar que nestas condições, a transformação linear (ou matriz) $\gamma^0\,\gamma(\tau)$, além de ser hermiteana, é positiva definida. Para tanto, denote por P a reflexão espacial que deixa e^0 invariante mas leva e^j em $-\,e^j$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$; então vale

$$\begin{aligned}
\gamma(\tau)^\dagger \;&=\; \tau_0(\gamma^0)^\dagger + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(\gamma^k)^\dagger \;=\; \tau_0\gamma^0 - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k\gamma^k \;=\; \gamma(P\tau) \;, \\
\gamma^0\,\gamma(\tau) \;&=\; \tau_0(\gamma^0)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k\gamma^0\gamma^k \;=\; \tau_0(\gamma^0)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k\gamma^k\gamma^0 \;=\; \gamma(P\tau)\,\gamma^0 \;,
\end{aligned}$$

e portanto temos que

$$\big(\gamma^0\,\gamma(\tau)\big)^\dagger \;=\; \gamma(\tau)^\dagger(\gamma^0)^\dagger \;=\; \gamma(P\tau)\,\gamma^0 \;=\; \gamma^0\,\gamma(\tau) \;,$$

e

$$2\tau_0\,\gamma^0\,\gamma(\tau) - \big(\gamma^0\,\gamma(\tau)\big)^2 = \gamma^0\,\gamma(\tau)\,\big(2\boldsymbol{g}(\tau,e^0)\,1 - \gamma^0\,\gamma(\tau)\big) \;=\; \gamma^0\,\gamma(\tau)\,\gamma(\tau)\,\gamma^0 \;=\; \boldsymbol{g}(\tau,\tau)\,1 \;.$$

A última equação significa que $\gamma^0\,\gamma(\tau)$ tem polinômio mínimo $\lambda^2 - 2\tau_0\lambda + \boldsymbol{g}(\tau,\tau)$, e este tem duas raízes reais positivas, $\lambda_\pm = \tau_0 \pm \sqrt{\tau_0^2 - \boldsymbol{g}(\tau,\tau)}$, que são os autovalores de $\gamma^0\,\gamma(\tau)$.

Passando à afirmação recíproca, supondo agora que $\not{D}$ é um operador de Dirac e, ao mesmo tempo, um operador hiperbólico simétrico, com símbolo principal injetor, queremos provar que o campo tensorial associado $\boldsymbol{g}$ é uma métrica lorentziana. Por hipótese, e conforme explicado na Observação 1.1, sabemos que existem uma métrica tipo Dirac hiperbólica em E, $(u,v) \longmapsto \overline{u}\,v$, e uma 1-forma $\tau \in \Omega^1(M)$ sobre M, tal que a métrica nas fibras auxiliar em E, $(u,v) \longmapsto u^\dagger v$, definida por

$$u^\dagger v \;=\; \overline{u}\,\gamma(\tau)\,v \;,$$

é positiva definida; usando estes fatos, vamos mostrar que, em qualquer ponto de M (que será suprimido, para simplificar a notação), (a) $\boldsymbol{g}$ é não-degenerada, (b) vale $\boldsymbol{g}(\tau,\tau) > 0$ e (c) $\boldsymbol{g}(\tau,\xi) = 0$ implica $\boldsymbol{g}(\xi,\xi) < 0$ se $\xi \neq 0$: isso significa que o complemento ortogonal ao espaço unidimensional gerado por τ (onde $\boldsymbol{g}$ é positiva definida) é um subespaço onde $\boldsymbol{g}$ é negativa definida, mostrando que a assinatura de $\boldsymbol{g}$ é $(+-\ldots-)$, ou seja, que $\boldsymbol{g}$ é uma métrica lorentziana.[2]

[2]O autor agradece a P.L. Ribeiro por discussões sobre esta demonstração, que o levaram a formular o argumento exposto a seguir.

(a) Suponha que exista um covetor $\xi \in T^*M$ tal que $\boldsymbol{g}(\xi,\eta) = 0$ para todo $\eta \in T^*M$; em particular, $\boldsymbol{g}(\xi,\tau) = 0$ e $\boldsymbol{g}(\xi,\xi) = 0$, de modo que $\gamma(\xi)$ anticomuta com $\gamma(\tau)$ e vale $\gamma(\xi)^2 = 0$. Logo, para todo $u \in E$,

$$\big(\gamma(\xi)u\big)^\dagger\,\gamma(\xi)u \;=\; \overline{\gamma(\xi)u}\,\gamma(\tau)\,\gamma(\xi)u \;=\; -\,\overline{u}\,\gamma(\xi)^2\gamma(\tau)u \;=\; 0\;,$$

e portanto vale $\gamma(\xi) = 0$. Como γ é injetor, segue que $\xi = 0$.
(b) Basta observar que $\gamma(\tau)$, além de pseudo-hermiteana, também é hermiteana, pois para todo $u, v \in E$, vale

$$\big(\gamma(\tau)u\big)^\dagger\,v \;=\; \overline{\gamma(\tau)u}\,\gamma(\tau)v \;=\; \overline{u}\,\gamma(\tau)^2\,v \;=\; u^\dagger\gamma(\tau)\,v\;,$$

e portanto $\boldsymbol{g}(\tau,\tau)\,1 = \gamma(\tau)^2 = \gamma(\tau)^\dagger\gamma(\tau)$ é positiva definida.
(c) Para qualquer covetor $\xi \in T^*M$ ortogonal a τ, $\gamma(\xi)$ anticomuta com $\gamma(\tau)$; logo, para todo $u \in E$,

$$\begin{aligned}\big(\gamma(\xi)u\big)^\dagger\gamma(\xi)u \;&=\; \overline{\gamma(\xi)u}\,\gamma(\tau)\,\gamma(\xi)u \;=\; \overline{u}\,\gamma(\xi)\,\gamma(\tau)\,\gamma(\xi)u \;=\; -\,\overline{u}\,\gamma(\tau)\,\gamma(\xi)^2u\\ &=\; -\;\boldsymbol{g}(\xi,\xi)\,\overline{u}\,\gamma(\tau)\,u \;=\; -\;\boldsymbol{g}(\xi,\xi)\,u^\dagger u\;.\end{aligned}$$

Como γ é injetor, segue que se $\xi \neq 0$, $\gamma(\xi) \neq 0$ e portanto existe $u \in E$ tal que esta expressão é estritamente positiva; logo, $\boldsymbol{g}(\xi,\xi) < 0$. □

O conceito de causalidade associado a um operador de Dirac hiperbólico é bem definido, graças ao seguinte fato.

Proposição 3.3 *Seja $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ um operador de Dirac hiperbólico em um fibrado vetorial E sobre uma variedade M, com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ e métrica lorentziana associada $\boldsymbol{g}$. Então os cones cronológicos $I_m^\pm$ e causais $J_m^\pm$ definidos pelo símbolo principal γ coincidem com os respectivos cones cronológicos e causais definidos pela métrica lorentziana $\boldsymbol{g}$ (mediante a escolha de uma orientação temporal).*

Esclarecemos que uma orientação temporal é escolhida uma vez que fixarmos a métrica tipo Dirac hiperbólica associada ao símbolo principal do operador e a 1-forma $\tau \in \Omega^1(M)$, como na Definição 1.6 e a Observação 1.1.

Demonstração: Como sempre, denotaremos a métrica tipo Dirac hiperbólica em E associada a γ por $(u,v) \longmapsto \overline{u}\,v$ e escolhemos uma 1-forma $\tau \in \Omega^1(M)$ tal que a métrica nas fibras auxiliar em E, $(u,v) \longmapsto u^\dagger v$, dada por $u^\dagger v = \overline{u}\,\gamma(\tau)\,v$, seja positiva definida (veja a Observação 1.1). Então como já foi visto na segunda parte da demonstração da Proposição 3.2, $\gamma(\tau)$, além de pseudo-hermiteana, também é hermiteana, e $\boldsymbol{g}(\tau,\tau) > 0$; portanto, podemos supor sem perda de generalidade que τ seja normalizada de modo que $\boldsymbol{g}(\tau,\tau) = 1$; assim, teremos também $\overline{u}\,v = u^\dagger\gamma(\tau)\,v$. Uma vez que os cones causais são obtidos como os fechos dos correspondentes cones cronológicos, precisamos então verificar a seguinte afirmação: em qualquer ponto de M (que mais uma vez será suprimido, para simplificar a notação) e para qualquer covetor $\xi \in T^*M$, vale

$$\boldsymbol{g}(\tau,\xi) > 0 \;\text{ e }\; \boldsymbol{g}(\xi,\xi) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \overline{u}\,\gamma(\xi)\,u > 0 \;\text{ para todo } u \in E\setminus\{0\}\;,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{g}(\tau,\xi) > 0 \ \text{ e } \ \boldsymbol{g}(\xi,\xi) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\tau)\gamma(\xi) > 0 \ .$$

Para tanto, decompomos ξ em sua componente paralela a τ e sua componente ortogonal a τ: definindo $\xi^\perp = \xi - \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,\tau$, temos

$$\xi \ = \ \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,\tau + \xi^\perp \quad \text{com} \quad \boldsymbol{g}(\tau,\xi^\perp) \ = \ 0 \ .$$

Novamente, como já foi visto na segunda parte da demonstração da Proposição 3.2, isso implica que $\boldsymbol{g}(\xi^\perp,\xi^\perp) \leqslant 0$ (e $= 0$ somente se $\xi^\perp = 0$), de modo que

$$\boldsymbol{g}(\tau,\xi)^2 - \boldsymbol{g}(\xi,\xi) \ = \ -\,\boldsymbol{g}(\xi^\perp,\xi^\perp) \ \geqslant \ 0$$

Também implica que $\gamma(\xi^\perp)$ anticomuta com $\gamma(\tau)$ e portanto, além de pseudo-hermiteana, é anti-hermiteana, pois para todo $u,v \in E$, vale

$$\big(\gamma(\xi^\perp)u\big)^\dagger\, v \ = \ \overline{\gamma(\xi^\perp)u}\,\gamma(\tau)v \ = \ \overline{u}\,\gamma(\xi^\perp)\gamma(\tau)\,v \ = \ -\,\overline{u}\,\gamma(\tau)\gamma(\xi^\perp)\,v \ = \ -\,u^\dagger\,\gamma(\xi^\perp)\,v \ ,$$

e portanto $\gamma(\tau)\gamma(\xi)$ é hermiteana, pois

$$\gamma(\tau)\gamma(\xi) \ = \ \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 + \gamma(\tau)\gamma(\xi^\perp) \ = \ \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 - \gamma(\xi^\perp)\gamma(\tau) \ ,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\big(\gamma(\tau)\gamma(\xi)\big)^\dagger \ &= \ \big(\boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 \ + \ \gamma(\tau)\gamma(\xi^\perp)\big)^\dagger \ = \ \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 \ + \ \gamma(\xi^\perp)^\dagger\,\gamma(\tau)^\dagger \\ &= \ \boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 \ - \ \gamma(\xi^\perp)\gamma(\tau) \ = \ \gamma(\tau)\gamma(\xi) \ .\end{aligned}$$

Agora prosseguimos assim como na primeira parte da demonstração da Proposição 3.2, calculando

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,\gamma(\tau)\gamma(\xi) \ - \ \big(\gamma(\tau)\gamma(\xi)\big)^2 \ &= \ \gamma(\tau)\gamma(\xi)\,\big(2\boldsymbol{g}(\tau,\xi)\,1 - \gamma(\tau)\gamma(\xi)\big) \\ &= \ \gamma(\tau)\gamma(\xi)\gamma(\xi)\gamma(\tau) \ = \ \boldsymbol{g}(\xi,\xi)\,1 \ ,\end{aligned}$$

o que significa que $\gamma(\tau)\gamma(\xi)$ tem polinômio mínimo $\lambda^2 - 2\boldsymbol{g}(\tau,\xi)\lambda + \boldsymbol{g}(\xi,\xi)$, e este tem duas raízes reais, $\lambda_\pm = \boldsymbol{g}(\tau,\xi) \pm \sqrt{\boldsymbol{g}(\tau,\xi)^2 - \boldsymbol{g}(\xi,\xi)}$, que são os autovalores de $\gamma(\tau)\gamma(\xi)$. Obviamente, ambas serão positivas se e somente se $\boldsymbol{g}(\tau,\xi) > 0$ e $\boldsymbol{g}(\xi,\xi) > 0$. □

Por fim, é interessante mencionar que o quadrado $\not{D}^2$ de um operador de Dirac hiperbólico $\not{D}$ é um operador diferencial de segunda ordem *normalmente hiperbólico* [2, 3, 57],[3] pois o seu símbolo principal $\sigma_{\not{D}^2} : \bigvee^2 T^*M \longrightarrow L(E)$ tem a forma

$$\sigma_{\not{D}^2}(\xi \vee \eta) \ = \ \boldsymbol{g}(\xi,\eta)\,1_E \quad \text{para } \xi,\eta \in T^*M \ , \tag{3.8}$$

onde $\vee$ denota o produto simétrico.

[3] Os operadores normalmente hiperbólicos também costumam ser chamados de *operadores tipo onda* ou simplesmente *operadores de onda*.

3.2 G-estruturas

Nesta seção vamos usar um tipo de estrutura que permite captar os aspectos essenciais desta abordagem algébrica: definiremos operadores hiperbólicos associados a G-estruturas, onde G é o objeto matemático usado para codificar as simetrias do problema, ou seja que G é um grupo de Lie.

Suponha que temos dado um grupo de Lie G. A noção de G-estrutura que utilizaremos neste trabalho é ligeiramente mais geral do que a usual (para esta, veja, por exemplo, [33], e para a versão mais geral [29]).

Definição 3.2 *Sejam M uma variedade de dimensão n e E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{E}$, munida de uma representação*

$$\Sigma : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \tag{3.9}$$

*de um grupo de Lie G, onde $GL(\mathbb{E})$ denota o grupo geral linear de $\mathbb{E}$. Uma G - **estrutura em** E é um G-fibrado principal P sobre M junto com um homomorfismo estrito*

$$f : P \longrightarrow \mathrm{Fr}(E) \tag{3.10}$$

de fibrados principais sobre M, onde $\mathrm{Fr}(E)$ denota o $GL(\mathbb{E})$-fibrado principal dos referenciais lineares (ou "linear frame bundle") de E. Quando substituírmos E pelo fibrado tangente TM de M, escrevemos a representação pertinente de G na forma

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \tag{3.11}$$

*e falamos de uma G - **estrutura em** M, ao invés de uma G-estrutura em TM.*

Esta definição implica que, em particular, f deve ser Σ-equivariante, ou seja, vale

$$f(p \cdot g) \; = \; f(p) \cdot \Sigma(g) \qquad \text{para} \;\; g \in G \, , \, p \in P \; . \tag{3.12}$$

A generalização em relação ao conceito usual de G-estrutura reside no fato de que *não* suporemos que esta representação deve ser fiel, ou seja, G não precisa ser subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$. Na verdade, essa exigência diz apenas que E é um fibrado associado:

$$E \; \cong \; P \times_G \mathbb{E} \; , \tag{3.13}$$

em relação à representação Σ. Explicitamente, o isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{ccc} P \times_G \mathbb{E} & \longrightarrow & E \\ {[p, v]} & \longmapsto & f(p)(v) \end{array} \tag{3.14}$$

Outros fibrados vetoriais que são "descendentes" de E também podem ser escritos como fibrados associados; por exemplo, para o fibrado dual E^*, temos

$$E^* \; \cong \; P \times_G \mathbb{E}^* \; , \tag{3.15}$$

em relação à representação contragrediente Σ^* ($\Sigma^*(g)$ é a transposta inversa de $\Sigma(g)$).

Exemplo 3.1 (Estruturas espinoriais, parte I) Neste exemplo, estaremos interessados em G-estruturas que são compatíveis com certas estruturas adicionais nas fibras do fibrado vetorial sob consideração – principalmente, com uma métrica nas fibras. Por exemplo, suponha que E seja um fibrado vetorial complexo sobre M munido de uma métrica pseudo-hermiteana de assinatura (p,q) nas fibras, como na definição de operador hiperbólico simétrico. Então a G-estrutura será **compatível** com essa métrica se e somente se a representação (3.9) tomar valores no subgrupo pseudo-unitário $\mathrm{U}(p,q)$ de $GL(\mathbb{E})$:[4]

$$\Sigma : G \longrightarrow \mathrm{U}(p,q) \tag{3.16}$$

De modo semelhante, suponha que a variedade M venha munida de uma métrica pseudo-riemanniana $\boldsymbol{g}$ de asinatura (r,s). Então a G-estrutura será **compatível** com essa métrica se e somente se a representação (3.11) tomar valores no subgrupo pseudo-ortogonal $\mathrm{O}(r,s)$ de $GL(n,\mathbb{R})$:

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{O}(r,s) \tag{3.17}$$

Para garantir que a G-estrutura também seja compatível com uma orientação de M, precisamos substituir a equação (3.17) por

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{SO}(r,s) \tag{3.18}$$

Finalmente, no caso lorentziano ($r = 1$ ou $s = 1$), procuraremos garantir que a G-estrutura também seja compatível com uma orientação e uma orientação temporal de M, o que requer substituir a equação (3.17) por

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{SO}_0(r,s) \tag{3.19}$$

onde, de modo geral, $\mathrm{SO}_0(r,s)$ denota a componente conexa da identidade de $\mathrm{O}(r,s)$ e de $\mathrm{SO}(r,s)$.[5]
Como exemplo clássico de uma G-estrutura em que G não é subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$, podemos citar as estruturas spin em variedades pseudo-riemannianas e suas extensões. O grupo $\mathrm{Spin}(r,s)$, que pode ser construído explicitamente usando técnicas de álgebras de Clifford [36], é o recobrimento duplo do grupo pseudo-ortogonal, ou mais exatamente, da sua componente conexa da identidade $\mathrm{SO}_0(r,s)$, sendo que

$$\Lambda : \mathrm{Spin}(r,s) \longrightarrow \mathrm{SO}_0(r,s) \tag{3.20}$$

é exatamente o homomorfismo de recobrimento. A correspondente G-estrutura se chama uma estrutura spin [39] e o correspondente G-fibrado principal se chama o fibrado dos referenciais spin, denotado por $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(r,s))$, que através do homomorfismo f se torna um recobrimento duplo, fibra por fibra, do fibrado dos referenciais ortonormais orientados

[4] Obviamente se o fibrado vetorial E for real devemos trocar $\mathrm{U}(p,q)$ por $\mathrm{O}(p,q)$.

[5] No caso lorentziano ($r = 1$ ou $s = 1$), $\mathrm{O}(r,s)$ tem quatro componentes conexas e $\mathrm{SO}(r,s)$ tem duas, enquanto que para $r \neq 1$ e $s \neq 1$, $\mathrm{O}(r,s)$ tem duas componentes conexas e $\mathrm{SO}(r,s)$ é conexo.

(e, no caso lorentziano, orientados no tempo), denotado por $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(r,s))$. O fibrado vetorial associado a esta representação é o fibrado tangente de M:

$$TM \;=\; \mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(r,s)) \times_{\mathrm{Spin}(r,s)} \mathbb{R}^n \;=\; \mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(r,s)) \times_{\mathrm{SO}_0(r,s)} \mathbb{R}^n \;. \tag{3.21}$$

Há duas representações importantes do grupo $\mathrm{Spin}(r,s)$ que se estendem a representações da álgebra de Clifford $\mathrm{Cliff}(r,s)$ sobre $\mathbb{R}^{r,s}$ (este símbolo denota o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, onde $n = r + s$, munido da forma bilinear não-degenerada $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$, com r vezes 1 e s vezes -1, que chamaremos de produto escalar padrão sobre $\mathbb{R}^{r,s}$ e denotaremos por η), sendo que $\mathrm{Spin}(r,s)$ é um certo subgrupo do grupo dos elementos inversíveis de $\mathrm{Cliff}(r,s)$. A primeira delas é uma representação

$$\Sigma_f : \mathrm{Spin}(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{U}(\mathbb{S}) \tag{3.22}$$

de $\mathrm{Spin}(r,s)$, que é pseudo-unitária em relação a um certo produto escalar não-degenerado, porém em geral não positivo definido, sobre $\mathbb{S}$, obtida por restrição da representação fundamental

$$\Sigma_f : \mathrm{Cliff}(r,s) \;\longrightarrow\; L(\mathbb{S}) \tag{3.23}$$

de $\mathrm{Cliff}(r,s)$, onde $\mathbb{S}$ denota o espaço de espinores de Dirac, que tem dimensão $N = 2^{n/2}$ se n for par e dimensão $N = 2^{(n-1)/2}$ se n for impar: neste caso, o fibrado associado pertinente é o fibrado de espinores de Dirac sobre M:

$$SM \;=\; \mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(r,s)) \times_{\mathrm{Spin}(r,s)} \mathbb{S} \;. \tag{3.24}$$

A segunda é uma representação

$$\Sigma_a : \mathrm{Spin}(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{O}(\textstyle\bigwedge(\mathbb{R}^n)^*) \tag{3.25}$$

de $\mathrm{Spin}(r,s)$, que é pseudo-ortogonal em relação ao produto escalar natural não-degenerado, porém em geral não positivo definido, sobre $\bigwedge(\mathbb{R}^n)^*$ induzido pelo produto escalar η sobre $\mathbb{R}^n$, obtida por restrição da representação adjunta

$$\Sigma_a : \mathrm{Cliff}(r,s) \;\longrightarrow\; L(\textstyle\bigwedge(\mathbb{R}^n)^*) \tag{3.26}$$

de $\mathrm{Cliff}(r,s)$, onde $\bigwedge(\mathbb{R}^n)^*$ denota a álgebra de Grassmann sobre $(\mathbb{R}^n)^*$, que tem dimensão 2^n: neste caso, o fibrado associado pertinente é o fibrado de formas diferenciais sobre M:[6]

$$\textstyle\bigwedge T^*M \;=\; \mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}(r,s)) \times_{\mathrm{Spin}(r,s)} \bigwedge(\mathbb{R}^n)^* \;. \tag{3.27}$$

◇

[6]É para obter formas diferenciais e não campos multivetoriais que aqui, usamos a álgebra de Grassmann sobre o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2 (Estruturas espinoriais, parte II) O exemplo anterior ainda pode ser generalizado para incluir estruturas espinoriais estendidas, nas quais o grupo $\mathrm{Spin}(r,s)$ é substituído pelo grupo

$$\mathrm{Spin}^H(r,s) \;=\; \mathrm{Spin}(r,s) \times_{\mathbb{Z}_2} H \;, \tag{3.28}$$

onde H é um grupo de Lie compacto cujo centro $Z(H)$ contém um subgrupo $\mathbb{Z}_2$: esse grupo H acomoda as simetrias internas em teorias de calibre. O exemplo mais conhecido são as estruturas spin^c, com $H = \mathrm{U}(1)$, que servem para descrever o acoplamento de campos espinoriais de Dirac ao campo eletromagnético, levando a um sistema de equações diferenciais parciais denominado de equações de Maxwell-Dirac. Mais geralmente, podemos usar qualquer grupo de Lie compacto H para incluir o acoplamento de campos espinoriais de Dirac a campos de Yang-Mills, levando a um sistema de equações diferenciais parciais denominado de equações de Yang-Mills-Dirac. Em particular, no modelo padrão, temos $H = \mathrm{U}(2) \times \mathrm{SU}(3)$, onde $\mathrm{U}(2)$ se refere ao setor das interações eletrofracas (eletromagnéticas + fracas) e $\mathrm{SU}(3)$ se refere ao setor das interações fortes: essa parte da teoria também é chamada de "cromodinâmica". De modo geral, o recobrimento duplo (3.20) induz de maneira natural um homomorfismo

$$\Lambda^H : \mathrm{Spin}^H(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{SO}_0(r,s) \tag{3.29}$$

definido por

$$\Lambda^H(\pm(a,h)) \;=\; \Lambda(a) \qquad \text{para} \;\; a \in \mathrm{Spin}(r,s)\,,\, h \in H \;, \tag{3.30}$$

e com núcleo H, i.e., temos a seguinte sequência exata de grupos:

$$\{1\} \;\longrightarrow\; H \;\longrightarrow\; \mathrm{Spin}^H(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{SO}_0(r,s) \;\longrightarrow\; \{1\} \tag{3.31}$$

Então o método óbvio de construir uma $\mathrm{Spin}^H(r,s)$-estrutura $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}^H(r,s))$ sobre M consiste em escolher uma $\mathrm{Spin}(r,s)$-estrutura $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(r,s))$ em conjunto com um H-fibrado principal Q sobre M e definir $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}^H(r,s))$ como sendo o quociente do produto em fibras $\mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}(r,s)) \times_M Q$ pela ação de $\mathbb{Z}_2$, mas este procedimento não abrange o caso mais geral: há situações em que existe uma $\mathrm{Spin}^H(r,s)$-estrutura mas não existe nenhuma $\mathrm{Spin}(r,s)$-estrutura. De qualquer forma, o fibrado vetorial associado à representação Λ^H continua sendo o fibrado tangente de M:

$$TM \;=\; \mathrm{Fr}(M,\mathrm{Spin}^H(r,s)) \times_{\mathrm{Spin}^H(r,s)} \mathbb{R}^n \;. \tag{3.32}$$

Por outro lado, tomando produtos tensoriais, podemos, a partir da representação Σ_f ou Σ_a e de uma representação unitária

$$\pi : H \;\longrightarrow\; \mathrm{U}(\mathbb{V}) \tag{3.33}$$

sobre algum espaço vetorial complexo $\mathbb{V}$ de dimensão finita, munido de um produto escalar positivo definido, construir representações

$$\Sigma_f^H : \mathrm{Spin}^H(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{U}(\mathbb{S} \otimes \mathbb{V}) \tag{3.34}$$

de $\mathrm{Spin}(r,s)$ sobre $\mathbb{E} = \mathbb{S} \otimes \mathbb{V}$ e

$$\Sigma_a^H : \mathrm{Spin}^H(r,s) \;\longrightarrow\; \mathrm{U}(\textstyle\bigwedge(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{V}) \tag{3.35}$$

de $\mathrm{Spin}(r,s)$ sobre $\mathbb{E} = \bigwedge(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{V}$, desde que $\pi(-1) = -1$ no primeiro caso e $\pi(-1) = 1$ no segundo caso, e formar o fibrado associado pertinente:

$$E \;=\; \mathrm{Fr}(M, \mathrm{Spin}^H(r,s)) \times_{\mathrm{Spin}^H(r,s)} \mathbb{E}\;. \tag{3.36}$$

Na situação em que a $\mathrm{Spin}^H(r,s)$-estrutura é derivada de uma $\mathrm{Spin}(r,s)$-estrutura e de um H-fibrado principal Q sobre M, conforme mencionado acima, podemos considerar o fibrado associado

$$V \;=\; Q \times_H \mathbb{V} \tag{3.37}$$

e obtemos E como produto tensorial de fibrados vetoriais, i.e.,

$$E \;=\; SM \otimes V \tag{3.38}$$

no primeiro caso, e

$$E \;=\; \textstyle\bigwedge T^*M \otimes V \tag{3.39}$$

no segundo caso. Portanto, podemos interpretar seções de E como campos de espinores de Dirac, no primeiro caso, e formas diferenciais, no segundo caso, com coeficientes no fibrado vetorial auxiliar V, no qual agem as simetrias internas da teoria (inclusive transformações de calibre à la Maxwell / Yang-Mills). $\diamond$

3.3 Sistemas hiperbólicos com simetrias

Retornando à questão de como usar métodos geométricos para construir importantes exemplos de operadores hiperbólicos simétricos da Física Matemática, combinamos agora os conceitos expostos nas seções anteriores. Suponha então que M seja uma variedade munida de uma métrica pseudo-riemanniana $\boldsymbol{g}$ de assinatura (r,s), orientada e, no caso lorentziano, também orientada no tempo, sendo que todas essas estruturas podem ser caracterizadas pela escolha do fibrado $\mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(r,s))$ dos referenciais ortonormais e apropriadamente orientados, como redução de grupo estrutural do fibrado $\mathrm{Fr}(M)$ de todos os referenciais lineares de M. Suponha também que tenhamos escolhido uma G-estrutura compatível $f : P \longrightarrow \mathrm{Fr}(M, \mathrm{SO}_0(r,s))$ em M (onde, tipicamente, G é o grupo $\mathrm{Spin}(r,s)$ ou uma das suas extensões $\mathrm{Spin}^H(r,s)$) e que o fibrado vetorial E seja um fibrado associado a P: $E = P \times_G \mathbb{E}$ (em relação à representação Σ); então tanto o fibrado dos endomorfismos de E como o fibrado tangente TM e o fibrado cotangente T^*M de M também são fibrados associados a P: $\mathrm{L}(E) = P \times_G \mathrm{L}(\mathbb{E})$ (em relação à representação induzida $\mathrm{Ad}(\Sigma)$ por conjugação), $TM = P \times_G \mathbb{R}^n$ (em relação à representação Λ) e $T^*M = P \times_G \mathbb{R}^n$ (em relação à representação contragrediente Λ^*).

Notando que isso permite identificar o tensor métrico $\boldsymbol{g}$ sobre M como sendo associado ao produto escalar padrão η sobre $\mathbb{R}^{r,s}$, o qual é G-invariante, i.e.,

$$\eta(\Lambda(g)x, \Lambda(g)y) \;=\; \eta(x,y) \qquad \text{para} \;\; g \in G\,,\; x,y \in \mathbb{R}^{r,s}\;, \tag{3.40}$$

no sentido de que

$$\boldsymbol{g}([p,x],[p,y]) \;=\; \eta(x,y) \qquad \text{para} \;\; p \in P\,,\; x,y \in \mathbb{R}^{r,s}\;, \tag{3.41}$$

é natural exigir que, de forma análoga, a métrica nas fibras $(u,v) \longmapsto \overline{u}\,v$ seja associada a um produto escalar fixo na fibra típica $\mathbb{E}$ de E, ou seja, uma forma sesquilinear hermiteana não-degenerada, porém em geral não positiva definida,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \overline{u}\,v \end{array} \tag{3.42}$$

a qual é G-invariante, i.e.,

$$\overline{\Sigma(g)u}\,\Sigma(g)v \;=\; \overline{u}\,v \quad \text{para} \;\; g \in G\,,\; u,v \in \mathbb{E}\;, \tag{3.43}$$

no sentido de que

$$\overline{[p,u]}\,[p,v] \;=\; \overline{u}\,v \quad \text{para} \;\; p \in P\,,\; u,v \in \mathbb{E}\;. \tag{3.44}$$

Nesta situação, voltando a considerar um operador diferencial $\not{D} : \Gamma(M,E) \longrightarrow \Gamma(M,E)$ de primeira ordem com símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$, é natural exigir que este também seja induzido por uma aplicação linear fixa

$$\gamma : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow L(\mathbb{E}) \tag{3.45}$$

que chamaremos o **símbolo principal algébrico** de $\not{D}$, o qual é G-equivariante, i.e.,

$$\gamma\big(\Lambda(g)\xi\big) \;=\; \Sigma(g)\,\gamma(\xi)\,\Sigma(g)^{-1} \quad \text{para} \;\; g \in G\,,\; \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \tag{3.46}$$

no sentido de que

$$\gamma([p,\xi])\,[p,u] \;=\; [p,\gamma(\xi)u] \quad \text{para} \;\; p \in P\,,\; \xi \in (\mathbb{R}^n)^*\,,\; u \in \mathbb{E}\;. \tag{3.47}$$

Assim, podemos também converter as duas condições restantes sobre o símbolo principal usual em condições puramente algébricas sobre o símbolo principal algébrico: este deve tomar valores nos endomorfismos pseudo-hermiteanos de $\mathbb{E}$,

$$\overline{\gamma(\xi)u}\,v \;=\; \overline{u}\,\gamma(\xi)v \quad \text{para} \;\; \xi \in (\mathbb{R}^n)^*\,,\; u,v \in \mathbb{E}\;, \tag{3.48}$$

e, no caso lorentziano ($r = 1$ ou $s = 1$), deve satisfazer a condição de positividade: existe um covetor fixo $\tau \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que a aplicação sesquilinear

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \longmapsto & \overline{u}\,\gamma(\tau)v \end{array} \tag{3.49}$$

seja positiva definida.

Notamos que, devido à linearidade e G-equivariância de γ, junto com o fato de que Λ mapea G sobre $\mathrm{SO}_0(r,s)$, basta exigir que essa condição seja satisfeita para um único vetor tipo tempo futuro, pois então será automaticamente satisfeita para todos. Também observamos que esta hipótese já garante que $\not{D}$ é um operador diferencial hiperbólico simétrico.

Definição 3.3 *Seja (M,g) uma variedade lorentziana globalmente hiperbólica, e suponha que M possui uma G-estrutura compatível $f : P \to \mathrm{Fr}(M,\mathrm{SO}_0(r,s))$ (onde $r=1$ ou $s=1$). Dado um operador diferencial $\not{D} : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ de primeira ordem em um fibrado vetorial E associado a P, cujo símbolo principal $\gamma : T^*M \longrightarrow L(E)$ pode ser derivada de um símbolo principal algébrico com as propriedades enunciadas acima, dizemos que $\not{D}$ é um operador diferencial globalmente hiperbólico **natural**.*

Bibliografia

[1] A. Abrahams, A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat & J.W. York Jr., *Einstein and Yang-Mills Theories in Hyperbolic Form without Gauge Fixing*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3377-3381. 22

[2] C. Bär & N. Ginoux, *Classical and quantum fields on Lorentzian manifolds*, in: Global Differential Geometry, Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 359-400. 16, 79

[3] C. Bär & N. Ginoux & F.Pfäffle, *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*, ESI Lectures in Mathematics and Physics Series, European Mathematical Society Publishing House, 2007. 16, 34, 79

[4] S. Benzoni-Gavage, & D. Serre, *Multi-dimensional Hyperbolic Partial Differential Equations: First-order Systems and Applications*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 2006. xiii, 12, 14

[5] N. Berline & E. Getzler & M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions Series, Springer London, 1992. 74

[6] A. Bernal & M. Sánchez, *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*, Communications in Mathematical Physics, **257** (2005) 43-50. 32

[7] A. Bernal & M. Sánchez, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, Commun. Math. Phys. **243** (2003) 461-470. 32

[8] A. Bernal & M. Sánchez, *Further results on the smoothability of Cauchy hypersurfaces and Cauchy time functions*, Lett. Math. Phys. **77** (2006) 183-197. 32

[9] J. Bjorken & S. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill, 1964. 15

[10] D. Bleecker, *Gauge theory and variational principles*, Addison-Wesley, Reading 1981. 10, 23

[11] B. Booß-Bavnbek & K. Wojciechowski, *Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators*, Birkhäuser, Boston 1993. 49

[12] S. Boyd & L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 2004. 25

[13] R. Bryant & S. Chern & R. Gardner & H. Goldschmidt & P. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer, London 2011. 36

[14] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol 2*, Interscience, New York 1962. 12, 13

[15] M. de Reus, *An introduction to functional spaces*, 2011, http://igitur-archive.library.uu.nl/student-theses/2011-0914-201115/ReusMarcelMA2011.pdf 42, 46

[16] R. Duffin, *On the characteristic matrices of covariant systems*, Physical Review, **54(12)** (1938) 1114. 18, 21

[17] F. Dyson, *Advanced quantum mechanics*, World Scientific Publishing Company, 2007. 15

[18] A. Fathi & A. Siconolfi, *On smooth time functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **152(2)** (2012) 303-339. 25, 28, 30, 32

[19] H. Flanders, *Differential forms with applications to the physical sciences*, Dover Publications, 2012 10, 23

[20] H. Friedrich, *Hyperbolic Reductions for Einstein's Equations*, Class. Quant. Grav. **13** (1996) 1451-1469. 22

[21] K. Friedrichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Communications on pure and applied Mathematics, **7(2)** (1954) 345-392. xiv, 12, 60

[22] L. Garding, *Hyperbolic equations in the twentieth century*, Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siecle (Nice, 1996), **3** (1998) 37-68. x

[23] R. Geroch, *Domain of dependence*, Journal of Mathematical Physics, **11** (1970) 437-509. 32

[24] R. Geroch, *Partial Differential Equations of Physics*, General Relativity, Aberdeen, Scotland (1996) 19-60. xiv

[25] P. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Theorem*, Publish or Perish washington, 1984. 74

[26] R. Goodman & N. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Graduate Texts in Mathematics, No. 255, Springer-Verlag New York, 2009. 15

[27] W. Greub & S. Halperin & R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology* Vol. 1: *De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles*, Academic Press, 1972. 37

[28] W. Greub & S. Halperin & R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol. 2: *Lie Groups, Principal Bundles, and Characteristic Classes*, Academic Press, 1972. 40

[29] W. Greub & S. Halperin, *An Intrinsic Definition of the Dirac Operator*, Collectanea Mathematica, **26(1)** (1975) 19-38. 80

[30] S. Hawking & G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1973. 28, 30, 31

[31] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences vol.1, Springer, 1982. 13, 17

[32] N. Kemmer, *The particle aspect of meson theory*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, **173(952)** (1939) 91-116 18, 21

[33] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, Volume I*, Wiley-Interscience, 1996. 80

[34] I. Kolár, P.W. Michor, J. Slovak, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin 1993. 46

[35] H. Kreiss & J. Lorenz, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations, Vol. 136*, Academic Press,1989 14

[36] H. Lawson & M. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series, University Press, 1989. 15, 74, 81

[37] P. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Mathematical Journal, Duke University Press, **24** (1957) 627-646. 24

[38] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003. 34, 50

[39] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, L'Enseign. Math. **9** (1963) 198-203. 81

[40] E. Minguzzi & M. Sánchez,*The causal hierarchy of spacetimes*, Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys, 2008, pp. 299-358. 28, 31, 32

[41] S. Mizohata, *Some remarks on the Cauchy problem*, Kyoto Journal of Mathematics, Kyoto University, **1** (1961) 109-127. 24

[42] R. Mühlhoff, *Cauchy problem and Green's functions for first order differential operators and algebraic quantization*, Journal of Mathematical Physics, **52** (2011) 022303 34

[43] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, 103, Elsevier Science, 1983. 28

[44] E. Panov, *On symmetrizability of hyperbolic matrix spaces*, St. Petersburg Mathematical Journal, **20** (2009) 465-471. 5

[45] G. Petiau, *Contribution à la théorie des équations d'ondes corpusculaires*, Académie royale de Belgique, 1936 18, 21

[46] J. Pommaret, *Systems of Partial Differential equations and Lie Pseudogroup*, Vol. 14, Routledge, 1978. 36

[47] J. Rauch, *Precise finite speed and uniqueness in the Cauchy problem for symmetrizable hyperbolic systems*, **363(3)** (2011) 1161-1182. 14

[48] O. Reula, *Strongly hyperbolic systems in general relativity*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, World Scientific, **1** (2004) 251-269. xiv

[49] W. Seiler, *Involution: The Formal Theory of Differential Equations and Its Applications in Computer Algebra*, Algorithms and Computation in Mathematics, 24, Springer Berlin Heidelberg, 2010. 36

[50] M. Šubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer Series in Soviet Mathematics Series, Springer-Verlag GmbH, 2001. 42, 49, 61

[51] M. Taylor, *Partial Differential Equations: Basic Theory*, Applied mathematical sciences, Springer, 1996. xiii, xiv, 12, 13

[52] A. Trautman, *Connections and the Dirac operator on spinor bundles*, Journal of Geometry and Physics, **58** (2008) 238-252. 16

[53] E. van den Ban & M. Crainic, *Analysis on Manifolds*, Lecture notes for the 2009/2010 Master Class, http://www.math.uu.nl/people/ban/anman2009/anman2009.html. 42, 44, 46, 47, 49, 61

[54] B. van der Waerden, *Algebra, Volume II*, Based in Part on Lectures by E. Artin and E. Noether, Springer, 2003 5

[55] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 2010. 15, 75

[56] A. Wightman, *Relativistic wave equations as singular hyperbolic systems*, Partial differential equations (D. Spencer, ed.) Symp. Pure Math., **23** (1973) 441-477. x, 18, 21

[57] S. Waldmann, *Geometric wave equations*, arXiv preprint arXiv:1208.4706, 2012. 34, 79

[58] D. Yang, *Involutive Hyperbolic Differential Systems*, Memoirs of the American Mathematical Society Series, American Mathematical Society, 1987. 36