Polinômios de Lee-Yang: caracterização e interpretação física

Stephanie Daniela Pumarino Canete

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática Aplicada
Orientador: Prof. Dr.

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, maio de 2017

Polinômios de Lee-Yang: caracterização e interpretação física

Esta é a versão original da dissertação elaborada pela
candidata Stephanie Daniela Pumarino Canete, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Agradeço à minha família e aos amigos todos que de alguma forma contribuiram com a produção deste trabalho.

Resumo

Canete, S. D. P. **Polinômios de Lee-Yang: caracterização e interpretação física**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

No presente trabalho estudamos a classe de polinômios de Lee-Yang, denotada por LY_n, que é composta por polinômios que não se anulam simultaneamente em $B(0,1)^n$ e $(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)})^n$. Obtivemos LY_n a partir de polinômios multiafins. Assim, em primeiro lugar fizemos um breve estudo sobre eles, definindo e compreendendo conceitos como a contração de Asano e raio interno associado a um polinômio multiafim. Essas ideias embasaram nossa compreensão sobre os polinômios de Lee-Yang. Utilizando o conceito de raio interno, caracterizamos os polinômios $\Psi \in LY_{n+1}$ por meio dos polinômios Φ em n variáveis tais que $\Phi(z_1, ..., z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, ..., |z_n| < 1$. O que nos permite compreender melhor os elementos de LY_n. Além disso, forneceremos uma primeira interpretação física desses polinômios utilizando-os para representar a função termodinâmica Pressão. Apresentaremos também o teorema conhecido como Teorema de Lee-Yang, que usaremos para localizar os zeros da função Pressão, permitindo-nos estudar a transição de fase no modelo de Ising ferromagnético. Utilizando a caracterização dos elementos de LY_n, apresentamos alguns novos exemplos de polinômios de Lee-yang. Por fim, verificamos que na situação física em que as funções de partição são dependentes da temperatura, aqueles que são polinômios de Lee-Yang em altas temperaturas, por conseguinte, a todas as temperaturas, são precisamente da forma considerada por Lee e Yang.

Palavras-chave: Polinômios multiafins, Polinômios de Lee-yang, Contração de Asano, Raio Interno para um polinômio multiafim, Modelos de Ising, Transição de fase.

Abstract

Canete, S. D. P. **Lee-Yang polynomials: characterization and physical interpretation**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

In the present work, we study the class of Lee-Yang polynomials, denoted by LY_n, which is comprised by those that do not vanish simultaneously in $B(0,1)^n$ and $(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)})^n$. We are to obtain LY_n by means of multiaffine polynomials, thus we firstly provide a brief study about them, defining and comprehending concepts such as the Asano contraction and the inner radius associated with a multiaffine polynomial. These ideas form the foundation to our comprehension of Lee-Yang polynomials. Applying the concept of inner radius, we characterize the polynomials $\Psi \in LY_{n+1}$ by means of the polynomials Φ in n variables such that $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$, when $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$, which enables us to understand better the elements of LY_n. Moreover, we shall provide a first physical interpretation of such polynomials, using them to represent the Pressure thermodynamic mapping. We also present the Lee-Yang Theorem, which we shall use in order to examine the zeroes of the Pressure mapping, allowing us to study the phase transition of the Ising model for ferromagnetism. We use the characterization of the elements of LY_n to explixitly present new examples of Lee-Yang polynomials. Finally, we find that in the physical situation where the partition functions are temperature dependent, those that are Lee-Yang polynomials at high temperatures, therefore at all temperatures, are precisely in the form considered by Lee and Yang.

Keywords: Multiaffine Polynomials, Lee-yang Polynomials, Asano Contraction, Inner Radius for a Multiaffine Polynomial, Ising Models, Phase Transition.

Sumário

Introdução

O principal objeto de estudo deste trabalho é uma classe LY_n de polinômios complexos em n variáveis, que chamaremos polinômios de Lee-Yang, que não se anulam simultaneamente em $B(0,1)^n$ e $(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)})^n$ e que são obtidos a partir de polinômios complexos separadamente do grau 1 em n variáveis que chamaremos de polinômios multiafins e que são da forma

$$\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X . z^X,$$

em que $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$, $z^X = \prod_{x \in X} z_x$ e $z^{\emptyset} = 1$.

Iniciaremos este trabalho recordando alguns resultados sobre álgebra, topologia dos números complexos e funções meromorfas que serão necessários para a compreensão das ideias aqui apresentadas. Recordaremos também o conceito de Esfera de Riemann no qual está baseada a prova do Teorema de Lee-Yang que apresentaremos neste texto.

No Capítulo 2, veremos definições e resultados sobre polinômios multiafins que embasarão os principais resultados sobre polinômios de Lee-Yang presentes no texto. Nesta etapa do trabalho estudaremos a contração de Asano que é uma transformação em um polinômio em n variáveis multiafim. Ela foi apresentada pela primeira vez em 1970 por *Taro Asano* para provar o *teorema de Lee- Yang.* Nossa compreensão sobre polinômios de Lee-Yang será muito baseada no conceito de *Contração de Asano* (ou contração de Asano-Ruelle). Nosso objetivo é compreender o uso desta transformação por David Ruelle para provar um teorema geral sobre localização de raízes de polinômios multiafins.

Ainda no Capítulo 2, definiremos um raio interno para um polinômio multiafim que nos auxiliará a definir rigorosamente a localização de zeros dos polinômios em questão e associaremos a cada polinômio multiafim $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$ um polinômio

$$\Phi^{\dagger}(z_1, \cdots, z_n) = \textstyle\sum_{X \subset [n]} \overline{E}_{[n] \setminus X} . z^X$$

Essas ideias também embasarão nossa compreensão dos polinômios de Lee-Yang.

No Capítulo 3, passaremos a estudar os elementos de LY_n que são polinômios Ψ tais que

$$Psi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \ \text{ quando } \ |z_1|, \cdots, |z_n| < 1 \text{ e } |z_1|, \cdots, |z_n| > 1.$$

Em janeiro de 2010 David Ruelle apresentou uma caracterização para LY_n no artigo [Rue10] no qual está baseada esta dissertação. Neste artigo, David ruelle, utilizando o conceito de raio interno, caracterizou os polinômios $\Psi \in LY_{n+1}$ em termos de polinômios Φ em n variáveis tais que $\Phi(z_1, ..., z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, ..., |z_n| < 1$. Especificamente, sendo $\mathcal{A}_{n+1}$ o conjunto dos polinômios multiafins, temos o Teorema:

Teorema 0.1. Um elemento $\Psi \in \mathcal{A}_{n+1}$ é um elemento de LY_{n+1} se, e somente se,

$$\Psi(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) = c\left(z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) + \Phi(z_1, \cdots, z_n)\right),$$

em que $|c| = 1$ e $\Phi \in \mathcal{A}_n$ é tal que $r(\Phi) \geq 1$.

Com esta caracterização veremos que os únicos polinômios multiafins que satisfazem a condição $\Phi^\dagger = \Phi$ estão na forma $c(z_{n+1}\Phi^\dagger + \Phi) \equiv \Psi_\Phi$. Ademais, se $r(\Phi) \geq 1$, então $r(\Psi_\Phi^\dagger) = r(\Psi_\Phi) = 1$. Estabeleceremos assim o conjunto

$$\mathcal{J}_{n+1} = \{\Psi_\Phi \ : \ \Phi \in \mathcal{A}_n \ \ e \ \ r(\Phi) \geq 1\}.$$

e, associando a ele seu espaço projetivo real, verificaremos a proposição seguinte.

Proposição 0.2. O conjunto $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R}$ é o fecho em $[\mathcal{H}_{n+1}]_\mathbb{R}$ de seu interior $[\mathcal{J}^\circ_{n+1}]_\mathbb{R}$.

Dessa forma a caracterização feita por David Ruelle nos auxiliará na compreensão dos polinômios de Lee-Yang e a exibição de novos exemplos de polinômios de Lee-Yang além dos apresentados na classe originalmente considerado por Lee e Yang. Por exemplo, para $U = \{j, k, l, m\} \subset [n+1]$ e $X \subset [n+1]$ escreva

$$E_{UX} = \begin{cases} b_U & se & U \cap X = \emptyset \\ \bar{b}_U & se & U \subset X \\ 1 & nos\ demais\ casos & \end{cases}$$

Então, se b_U é real $b_U \geq 2$ ou $b_U = 1$, para todo U temos que $\Psi \in \mathcal{J}_{n+1}$.

No Capítulo 4, nos dedicaremos a apresentar interpretações físicas para os polinômios de Lee-Yang. Iniciamos o capítulo vendo o Teorema de Lee-Yang e seu Corolário.

Teorema 0.3. (Teorema de Lee-Yang) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\{A_{ij}\}$ uma família de números complexos satisfazendo $|A_{ij}| \leq 1$ e $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ para todo $i, j \in [n]$. Seja $\mathcal{P}_n$ o seguinte polinômio

$$\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^s \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij}. \tag{0.4}$$

Se $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = 0$ e existe $m \in [n]$ tal que $|z_k| \leq 1$, para todo $k \in [n] \setminus \{m\}$, então $|z_m| \geq 1$.

Corolário 0.5. Se $\mathcal{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio em uma variável complexa tal que

$$p(z) = \mathcal{P}_n(z, \cdots, z)$$

para algum polinômio $\mathcal{P}_n$ da forma 0.4 satisfazendo às hipóteses do Teorema de Lee-Yang, então todos os zeros de $\mathcal{P}$ estão no círculo unitário.

Veremos, assim, que um polinômio de Lee-Yang Φ de grau n em uma variável complexa z tem todas suas raízes no círculo unitário $|z| = 1$. O próximo passo deste trabalho será relacionar os zeros de polinômios multiafins com os zeros da função de partição ao inverso da temperatura T $(T^{-1} = \beta)$

$$\mathcal{Z}_\Lambda(h) = \sum_{(\omega_i)_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda} \exp\left(-\beta H_\Lambda((\omega_i)_{i\in\Lambda})\right).$$

no Modelo de Ising, que é um modelo matemáticos de ferromagnetismo em mecânica estatística, onde Λ denota um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^d$,

$$\Omega_\Lambda = \{-1,1\}^\Lambda = \{(\sigma_i)_{i\in\Lambda} : \sigma_i \in \{-1,1\}\},$$

denota o que chamaremos de espaço de configurações no volume Λ, e dados $i, j \in \Lambda$ tais que $||i-j|| = 1$,

$$H_\Lambda((\sigma_i)_{i\in\Lambda}) = -\sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) - \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1),$$

em que J e h são constantes reais, denota a função Hamiltoniano $H_\Lambda : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$, com condições de fronteira livres, do modelo de Ising de primeiros vizinhos no volume Λ.

Para relacionar os zeros de $\mathcal{Z}_\Lambda(h)$ com os zeros de poliômios multiafins, representaremos a função partição como um polinômio de Lee-Yang em uma variável complexa. O faremos da seguinte forma: faremos $z = \exp(-2\beta h)$ e para cada $i, j \in \Lambda$ e fixado $S = S((\sigma_i)_{i\in\Lambda})$ definiremos

$$A_{ij} = \begin{cases} \exp(-2\beta J), & se\ i \in S,\ j \in (\Lambda \setminus S)\ \ e\ \ ||i-j|| = 1; \\ 1, & caso\ \ contrário. \end{cases}.$$

Relacionados os zeros poderemos verificar a ausência de transição de fase em algum $h = h_0$ no modelo de Ising ferromagnético mostrando que a Pressão a volume finito e com condições de fronteira ω, a qual é construída através de um mecanismo chamado *limite termodinâmico*, dada por

$$P^\omega_\Lambda(h) = \frac{\ln \mathcal{Z}^\omega_{\Lambda,\beta}}{|\Lambda|}.$$

é diferenciável em $h = h_0$. Isto é, iremos ligar a transição de fase à diferenciabilidade da Pressão do modelo e provar a analiticidade da Pressão para $h \neq 0$ utilizando o *Teorema de Lee-Yang.*

Em geral, o termo transição de fase é usado quando ao variarmos algum parâmetro do sistema de interesse observamos uma mudança em seu comportamento. Sob o ponto de vista matemático, neste contexto, a *transição de fase* é usada para indicar a existência de mais de uma medida de Gibbs μ_Λ, definida sobre o conjunto das partes de Ω_Λ, para o modelo de Ising ferromagnético, onde

$$\mu_\Lambda(\{(\sigma_i)_{i\in\Lambda}\}) = \frac{\exp(-\beta H_\Lambda((\sigma_i)_{i\in\Lambda}))}{\mathcal{Z}_\Lambda(h)},$$

para o modelo de Ising ferromagnético.

Concluiremos o Capítulo 4 vendo uma interpretação física dos resultados obtidos no Capítulo 3. Veremos que na situação física onde Ψ são funções partição dependentes da temperatura, aqueles que são polinômios de Lee-Yang em altas temperaturas, por conseguinte, a todas as temperaturas, são precisamente da forma considerada por Lee e Yang:

Teorema 0.6. Sejam $W_X \in \mathbb{C}$, $E^\beta_X = e^{\beta W_X}$ e $\psi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X\subset[n]} E^\beta_X z^X$. Dizemos que

$(\psi^\beta)_{\beta>0}$ é um polinômio de Lee-Yang de altas temperaturas se

1. $\psi^\beta \in LY_n$ para alguma sequência de reais $\beta's$ tendendo a zero por cima

2. $\psi^\beta \in LY_n$ para todo $\beta > 0$

3. Existe $W_{jk} \in \mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ tais que $W_{jk} = W_{kj} \geq 0$ e

$$W_X = -\sum_{j\in X}\sum_{k\notin X} W_{jk} - i\sum_{j\in X} a_j + b$$

Capítulo 1

Material Preliminar

Neste capítulo inicial definiremos e enunciaremos alguns conceitos e resultados sobre topologia geral, funções meromorfas e esfera de Riemann que serão necessários para a compreensão das ideias presentes neste trabalho. As referências utilizadas neste capítulo serão [Lim70], [Flo11], [Hal07] e [Net93].

1.1 Funções meromorfas e Esfera de Riemann

Nesta seção, vamos estudar e definir as funções meromorfas e a Esferam de Riemann. Os exemplos de funções meromorfas que mais nos interessam são as funções racionais, pois aparecem com frequência no decorrer deste trabalho. As funções racionais são quocientes de funções polinomiais e por isso estudaremos primeiros os polinômios e algumas das suas propriedades algébricas.

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto, conexo e não vazio de $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita diferenciável no ponto z_0 se existe, em $\mathbb{C}$, o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

Neste caso, chamamos o limite acima de derivada de f em z_0 e o denotamos por $f'(z_0)$. Ademais, dizemos que f é diferenciável em Ω se é diferenciável em todos os pontos deste conjunto.

Por simplicidade, definiremos a holomorfia de uma função complexa f considerando sua equivalência com a diferenciabilidade de f.

Proposição 1.2. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ com u e v funções de classe C^1 em Ω. f é diferenciável em $z_0 \in \Omega$ se, e somente se, f é holomorfa em z_0.

Para uma verificação deste fato consulte [Net93].

Uma fórmula para a derivada de f em z_0 em termos de u e v é dada por

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definição 1.3. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica em $z_0 \in \Omega$, se existe $r > 0$ e uma série de potências potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

com raio de convergência $r > 0$, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ para todo } z \in D(z_0, l) = \{w \in \mathbb{C} : d(z_0, w) \leq l\}.$$

Dizemos que f é analítica em Ω se é analítica em todos os pontos deste conjunto.

Definição 1.4. Uma função complexa f tem uma singularidade isolada em z_0 se f é analítica numa vizinhança aberta de z_0 mas não é analítica em z_0.

Definição 1.5. Suponha que a função complexa f tem uma singularidade isolada em z_0. se existir uma função analítica g definida numa vizinhança aberta V de z_0 e tal que para todo $z \in V \setminus \{z_0\}$, $g(z) = f(z)$, então z_0 é dita uma singularidade removível de f.

Definição 1.6. Dado $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, dizemos que z_0 é um polo de f se existir uma função holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ e um inteiro não negativo n tal que

$$f(z) = \tfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

Ademais, o menor número n satisfazendo a condição acima é chamada ordem do polo.

Definição 1.7. Uma função f é dita meromorfa em Ω se f é holomorfa em $\Omega \setminus S$ onde $S \subset \Omega$ é discreto e composto por pólos ou singularidades removíveis de f.

Definição 1.8. Um polinômio de grau n é uma função p que se pode escrever na forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

em que $a_j \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Uma raiz do polinômio p é um número complexo z_0 , tal que $p(z_0) = 0$.

Teorema 1.9. (Teorema fundamental da Álgebra) Dado um polinômio complexo não constante de grau $n \geq 1$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Para uma verificação deste teorema consulte [Flo11].

Agora iremos estudar as funções racionais cuja definição baseia-se nos polinômios definidos acima.

Definição 1.10. Uma função racional é o quociente de dois polinômios onde o denominador é não identicamente nulo:

$$f(z) = \tfrac{p(z)}{q(z)}$$

onde q tem grau maior ou igual a zero.

Para que f seja unicamente determinada, assumiremos que f é uma fração irredutível, isto é, p e q não contém zeros em comum.

Proposição 1.11. Toda função racional é meromorfa em $\mathbb{C}$.

Para a verificação deste fato consulte [Flo11].

Note que polinômios são funções racionais.

Lema 1.12. Uma função racional não tem singularidade em $\mathbb{C}$ se, e somente se, é um polinômio.

Para a verificação deste fato consulte [Flo11].

A partir de agora, utilizando as funções meromorfas, vamos definir e expor ideias sobre a Esfera de Riemann que nos auxiliará, sobretudo, na verificação do Teorema de Lee-Yang.

Definição 1.13. Definimos a esfera de Riemann como o conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a topologia onde uma base para as vizinhanças de ∞ são os complementos de $\overline{D(R,0)}$.

Observação 1.14. Denotando $D(\infty, R) = \mathbb{C} \setminus \overline{D(R, \frac{1}{r})}$, observe que $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ é aberto se, e somente se, para todo ponto $z_0 \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subset \Omega$.

Definição 1.15. Dizemos que uma função f é meromorfa no infinito se a função $g(z) = f(\frac{1}{z})$ é meromorfa em $z = 0$.

Definição 1.16. Dizemos que uma função f é meromorfa na esfera de Riemann se é meromorfa em $\mathbb{C}$ e no ponto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$.

Lema 1.17. Uma função racional é meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$.

Para a verificação deste fato consulte [Net93].

Lema 1.18. A esfera de Riemann é um conjunto compacto.

Definição 1.19. Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma

$$T(z) = \tfrac{az+b}{cz+d},$$

onde $ad - bc \neq 0$.

A condição $ad - bc \neq 0$ é equivalente à condição de que pelo menos um dos polinômios $az + b$ e $cz + d$ é não constante, e que não tem nenhuma raíz em comum. Desta forma, uma transformação de Möbius é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ exceto em $z_0 = -\frac{d}{c}$. Mas definindo $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $T(\infty) = \frac{a}{c}$, onde consideramos $\frac{d}{c} = \frac{a}{c} = \infty$ quando $c = 0$, podemos extender T a uma aplicação de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$.

Proposição 1.20. Dada uma transformação de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, temos que T é contínua e bijetiva.

1.2 Noções de topologia geral

Pela necessidade de inserção de uma estrutura topológica no corpo dos números complexos, nesta seção vamos relembrar algumas definições e proposições que utilizaremos neste trabalho para estruturar mais rigorosamente as ideias contidas no texto.

Definição 1.21. Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo às seguintes condições:

1. $\emptyset$ e X estão em τ;
2. Dada uma subcoleção Y de τ, a união dos elementos de Y está em τ;
3. Dada uma subcoleção finita Z de τ, a interseção dos elementos de Z está em τ.

Definição 1.22. Chamamos de espaço topologico ao conjunto X munido de uma topologia fixada τ. Chamamos de conjunto aberto a cada subconjunto $A \subset X$ tal que $A \in \tau$.

Definição 1.23. Seja X um conjunto qualquer. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é dita uma base para uma topologia sobre X quando são satisfeitas as seguintes condições:

1. Para cada $x \in X$, existe pelo menos um conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
2. Se x pertence à interseção de dois conjuntos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ então existe um conjunto $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cup B_2$.

Definição 1.24. Um subconjunto F de um espaço topológico X é dito fechado quando $A = X \setminus F$ é aberto.

Definição 1.25. Dado um subconjunto B de um espaço topológico X, definimos o interior de B, denotado por $int(B)$, como a união de todos os conjuntos abertos contidos em B.

Definição 1.26. Dado um espaço topológico X, dizemos que $V \subset X$ é uma vizinhança de um ponto $x \in X$ quando existe um aberto A tal que $x \in A \subset X$.

Definição 1.27. Dado um espaço topológico X, dizemos que o fecho de um subconjunto $B \subset X$, denotado por $\overline{B}$, como a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm B.

Definição 1.28. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser continua quando, para cada subconjunto A aberto de Y , sua imagem inversa $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto de X.

Proposição 1.29. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. São equivalentes:

1. f é contínua;
2. Para todo conjunto fechado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ é fechado em X;
3. Para todo $B \subset X$, temos que $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$;
4. Para todo $D \subset Y$, temos que $f^{-1}(int(D)) \subset int(f^{-1}(D))$.

Para uma prova desta proposição, consulte [Lim70].

Definição 1.30. Dada uma bijeção $f : X \to Y$ entre espaços topológicos, dizemos que f é um homeomorfismo quando f e sua função inversa são contínuas. Ademais, dizemos que dois espaços topológicos são homeomorfos quando existi um homeomorfismo entre eles.

Definição 1.31. Dados dois espaços topológicos X e Y, dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é aberta quando para todo aberto $A \subset X$ ocorre que $f(A) \subset Y$ é aberto em Y. Dizemos que f é fechada quando para todo fechado $F \subset X$, $f(F) \subset Y$ é fechado.

Definição 1.32. Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita uma cobertura de X quando a união dos elementos de A é igual a X.

Definição 1.33. Um espaço topológico X é dito campacto quando toda cobertura por abertos de X admite uma subcobertura finita, isto é, contém uma subcoleção finita que também cobre X.

Proposição 1.34. Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.

Para uma verificação desta proposição, consulte [Lim70].

Proposição 1.35. A imagem de um espaço compacto por uma aplicação contínua é também um conjunto compacto.

Para uma verificação desta proposição, consulte [Lim70].

Capítulo 2

Polinômios Multiafins

A partir dos Polinômios Multiafins obteremos uma classe de polinômios que será o objeto central do estudo deste trabalho: a classe dos polinômios de Lee-Yang. Sendo assim, podemos dizer que os polinômios Multiafins são a base para a compreensão deste trabalho.

Começaremos este capítulo compreendendo o conceito de polinômio multiafim com algumas definições e resultados preliminares.

Em seguida, na Seção 2.2, estudaremos uma propriedade válida para os polinômios multiafins: a contração de Asano. Utilizaremos esta propriedade para a verificação de um dos principais resultados deste trabalho: o Teorema 3.6 que chamaremos de *caracterização de polinômios de Lee-Yang*.

Na Seção 2.3 associaremos com cada polinômio multiafim um raio interno e estudaremos algumas de suas propriedades. Este conceito de *raio interno de um polinômio multiafim* embasará nossa compreensão destes polinômios e a sua caracterização.

Por fim, concluiremos este capítulo definindo e estudando, para cada polinômio multiafim Φ, um polinômio associado $\Phi^\dagger$ que nos auxiliará, no capítulo seguinte, na caracterização dos polinômios de Lee-Yang.

Para este capítulo nossa principal referência é o artigo de David Ruelle [Rue10], mas consultamos o artigo [Ber08] para mais detalhes sobre os polinômios multiafins.

2.1 Definições e resultados preliminares

Definição 2.1. Dizemos que um polinômio $f \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ é um Polinômio Multiafim se f é separadamente de grau 1 em cada variável z_j com $j = 1, 2, \cdots, n$ e $n \geq 1$.

Denotaremos por $\mathcal{A}_n$ o conjunto dos polinômios Multiafins a coeficientes complexos e de grau n. Note que $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ e que dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, temos que Φ é da forma:

$$\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X . z^X,$$

em que $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$, $z^X = \prod_{x \in X} z_x$ e $z^\emptyset = 1$.

Definição 2.2. Sejam Φ_1 e Φ_2 em $\mathcal{A}_n$, com

$$\Phi_1(z_1, \cdots, z_n) = \textstyle\sum_{X \subset [n]} E^1_X . z^X \text{ e } \Phi_2(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E^2_X . z^X.$$

Definimos o seguinte produto

$$(\Phi_1 * \Phi_2)(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E^1_X E^2_X . z^X,$$

que é um produto em $\mathcal{A}_n$.

Note que, com respeito a este produto, $\mathcal{A}_n$ é isomorfo ao semigrupo multiplicativo das funções complexas sobre $\{X : X \subset [n]\}$. De fato, lembrando que um semigrupo G é um conjunto de elementos associados a uma operação $\lozenge$ que satisfazem as condições de fechamento e associatividade, vemos que o semigrupo multiplicativo das funções complexas sobre $\{X : X \subset [n]\}$, que denotaremos por F, é bem definido: dados $f,\ g : \{X : X \subset [n]\} \to \mathbb{C}$, temos que $(f \lozenge g)(x) = f(x).g(x)$ (em que "." denota a multiplicação usual em $\mathbb{C}$) é uma função complexa sobre $\mathbb{C}$. Ademais, dada uma função complexa h sobre $\{X : X \subset [n]\}$, $(f(x).g(x)).h(x) = f(x).(g(x).h(x))$.

Lembrando que isomorfismo é uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos que preserva a operação de ambos, vejamos que $\mathcal{A}_n$ é isomorfo ao semigrupo multiplicativo das funções complexas sobre $\{X : X \subset [n]\}$. Seja $\phi : (\mathcal{A}_n, *) \to (F, .)$ tal que

$$\phi\left((\Phi_i * \Phi_j)(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0) = \phi\left(\sum_{X \subset [n]} E^i_X E^j_X z^X\right)(X_0) = E^i_{X_0} E^j_{X_0}.$$

$$\phi\left(\Phi_k(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0) = \phi\left(\sum_{X \subset [n]} E^k_X z^X\right)(X_0) = E^k_{X_0}\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}\phi\left(\Phi_i(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0).\phi\left(\Phi_j(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0) &= E^i_{X_0}.E^j_{X_0} \\ &= \phi\left((\Phi_i * \Phi_j)(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0).\end{aligned}$$

Visto que ϕ preserva as operações, resta ver que ϕ é bijetiva: dados $\Phi_i, \Phi_j \in \mathcal{A}_n$,

$$\phi\left(\Phi_i(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0) = \phi\left(\Phi_j(z_1, \cdots, z_n)\right)(X_0) \Rightarrow E^i_{X_0} = E^j_{X_0},$$

para $X_0 \subset [n]$ qualquer. Assim, $\Phi_i(z_1, \cdots, z_n) = \Phi_j(z_1, \cdots, z_n)$ e temos provada a injetividade. Agora, dado $f \in F$, definamos $f(X) = E_X$. Donde

$$\phi\left(\sum_{X \subset [n]} f(X) z^X\right)(X) = f(X),$$

como queríamos.

Uma outra definição preliminar que fixaremos aqui é a de espaços projetivos real e complexo associados com $\mathcal{A}_n$. Estes serão denotados por

$$[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{R}} = \{[\Phi] = \{\lambda\Phi : \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}\ :\ \Phi \in \mathcal{A}_n\}, \tag{2.3}$$

$$[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}} = \{[\Phi] = \{\lambda\Phi : \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}\}\ :\ \Phi \in \mathcal{A}_n\}. \tag{2.4}$$

Assim, dados $\Phi^1, \Phi^2 \in \mathcal{A}_n$, não nulos, diremos que Φ^1 e Φ^2 são equivalentes, $\Phi^1 \sim \Phi^2$, se, e somente se, existe λ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tal que $\Phi^1 = \lambda\Phi^2$. Note que com essa construção temos definida uma relação de equivalência $\sim$. Portanto, podemos definir $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{R}}$ ou $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$ como um conjunto de classes de equivalência de polinômios.

Agora, vejamos a seguinte:

Observação 2.5. Dado um polinômio $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$ Multiafim qualquer, podemos exigir que este seja simétrico nessas n variáveis, isto é, podemos exigir que Φ seja também um polinômio que podemos permutar suas variáveis entre si sem que isso altere sua expressão.

Por exemplo, $\Phi(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n) = \Phi(z_n, z_3, z_2 \cdots, z_1)$.
Para mais detalhes sobre os polinômios simétricos, consulte [Hit] e [COS13].

Dois resultados auxiliares para este trabalho utilizando polinômios multiafins simétricos são os seguintes:

Proposição 2.6. Quando P é um polinômio complexo de ordem n, existe um único $\Phi \in \mathcal{A}_n$ simétrico nessas n variáveis tal que $P(z) = \Phi(z, \cdots, z)$.

Demonstração. Sabemos que

$$\Phi(z, \cdots, z) = \textstyle\sum_{X \subset [n]} E_X z^X, \text{ com } z^X = \prod_{p=|X|} z^p.$$

Como Φ é simétrico, podemos escrever

$$\Phi(z, \cdots, z) = E_\emptyset + \left(\tfrac{E_1}{n} z + \cdots + \tfrac{E_1}{n} z\right) + \left(\tfrac{E_{1,2}}{n} z^2 + \cdots + \tfrac{E_{1,2}}{n} z^2\right) + \cdots + E_{[n]} z^n.$$

Escrevendo $E_\emptyset = a_0$, $E_1 = a_1$, $E_{1,2} = a_2$, $E_{1,2,3} = a_3$, ..., $E_{[n]} = a_n$ e escrevendo $P(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n$, identificamos $b_i = a_i$ e temos provada a existência.

Para provar que $\Phi \in \mathcal{A}_n$ é unicamente determinada, basta observar que se $\Phi(z, \cdots, z) \equiv 0$, então $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \equiv 0$. □

Teorema 2.7. (*De Grace*) Seja P um polinômio complexo de grau n em uma variável e $\Phi \in \mathcal{A}_n$ o polinômio simétrico somente nesses n argumentos e tal que

$$\Phi(z, \cdots, z) = P(z).$$

Se as n raízes de P estão contidas numa região circular fechada K e $z_1, \cdots, z_n \notin K$, então $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$.

Para uma prova deste Teorema, consulte [Gra02].

2.2 Contração de Asano

Em análise complexa a contração de Asano é uma transformação em um polinômio multivariado Multiafim. Nosso objetivo com a compreensão desta transformação de contração é compreender seu uso por David Ruelle para provar um teorema geral sobre localização de raízes de polinômios Multiafins. O próximo Lema deste trabalho trata de uma aplicação $\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$ de $\mathcal{A}_2$ para $\mathcal{A}_1$ que chamaremos de *Contração de Asano*.

Lema 2.8. Sejam K_1 e K_2 subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$ que não contenham o zero. Se $\Phi \in \mathcal{A}_2$ e $\Phi(z_1, z_2) = A + Bz_1 + Cz_2 + Dz_1 z_2 \neq 0$ sempre que $z_1 \notin K_1$ e $z_2 \notin K_2$, então $\widetilde{\Phi}(z) \equiv A + Dz \neq 0$ sempre que $z \notin -K_1.K_2$, onde $-K_1.K_2 = \{-u.v \ : \ u \in K_1 \ e \ v \in K_2\}$. A aplicação $\Phi \mapsto \widetilde{\Phi}$ de $\mathcal{A}_2$ para $\mathcal{A}_1$ é chamada de Contração de Asano.

Demonstração. Como $0 \notin K_1$, $0 \notin K_2$ e $\Phi(z_1, z_2) \neq 0$ sempre que $z_1 \notin K_1$ e $z_2 \notin K_2$, então $\Phi(0, 0) = A \neq 0$. Caso tenhamos $D = 0$, acabou, pois neste caso $\widetilde{\Phi}(z) \equiv A \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Suponha, então, que $D \neq 0$. Observe que queremos mostrar que $-\frac{A}{D} \in -K_1.K_2$, pois $\widetilde{\Phi} \equiv A + Dz = 0$ se, e somente se, $z = -\frac{A}{D}$. Prosseguiremos dividindo esta demonstração em dois casos:

1. $AD - BC = 0$;

2. $AD - BC \neq 0$.

Suponha que $AD-BC=0$, temos

$$\begin{aligned}
A+Bz_1+Cz_2+Dz_1z_2 &= A+\frac{BC}{C}z_1+Cz_2+Dz_1z_2\\
&= Dz_1z_2+\frac{AD}{C}z_1+Cz_2+A\\
&= z_2(Dz_1+C)+A\left(1+\frac{D}{C}z_1\right)\\
&= z_2(Dz_1+C)+A\left(\frac{C}{C}+\frac{D}{C}z_1\right)\\
&= z_2(Dz_1+C)+\frac{A}{C}(C+Dz_1)\\
&= (Dz_1+C)\left(z_2+\frac{A}{C}\right)\\
&= D\left(z_1+\frac{C}{D}\left(\left(z_2+\frac{A}{C}\right).\right.\right.
\end{aligned}$$

Assim, $A+Bz_1+Cz_2+Dz_1z_2=0$ se, e somente se, $z_1=-\frac{C}{D}$ ou $z_2=-\frac{A}{C}$, pois supomos $D\neq 0$. Por hipótese segue que $-\frac{C}{D}\in K_1$ e $-\frac{A}{C}\in K_2$, pois $\Phi(z_1,z_2)\neq 0$ quando $z_1\notin K_1$ e $z_2\notin K_2$. Logo, $-\frac{C}{D}.-\frac{A}{C}=\frac{A}{D}\in K_1.K_2$. Portanto, $A+Dz=0$ se $z=-\frac{A}{D}\in K_1.K_2$, como queríamos, para este caso.

Agora resta considerar o caso em que $AD-BC\neq 0$ e $D\neq 0$. Neste caso podemos determinar a seguinte aplicação definida na esfera de Riemann:

$$\phi(z)=-\tfrac{A+Bz}{C+Dz}.$$

Considere também a aplicação $\psi(z)=\frac{A}{Dz}$ definida na Esfera de Riemann. Se escrevermos $\omega=\phi\psi^{-1}$ e $z_2=\omega(z_1)$, obtemos que

$$AB+ADz_1+ADz_2+CDz_1z_2=0.$$

De fato, note que $\psi^{-1}(z)=\psi(z)$, pois $\psi(\psi(z))=\frac{A}{D\left(\frac{A}{Dz}\right)}=z$, ou seja, $\psi\circ\psi=Id$, onde Id denota a aplicação identidade. Assim,

$$z_2=\omega(z_1)=\phi(\psi^{-1}(z_1))=\phi\left(\tfrac{A}{Dz_1}\right)=-\frac{A+B\left(\frac{A}{Dz_1}\right)}{C+D\left(\frac{A}{Dz_1}\right)}=-\tfrac{ADz_1+BA}{CDz_1+AD}.$$

Então, $CDz_1z_2+ADz_2=-(ADz_1+AB)$ se, e somente se, $AB+ADz_1+ADz_2+CDz_1z_2=0$. Portanto $\omega=\omega^{-1}$.

Como K_2 é um conjunto próprio fechado, $\omega(K_2)$ não pode ser interior a K_2. Caso contrário, $\omega^2(K_2)=\omega\circ\omega(K_2)=\omega\circ\omega^{-1}(K_2)=K_2$ seria interior a K_2. Logo,

$$[\omega(K_2)]\cap\left[\overline{\mathbb{C}\setminus K_2}\right]\neq\emptyset. \tag{2.9}$$

Ademais, $\mathbb{C}\setminus K_2\subset\phi(K_1)$. De fato, dado $z_2\notin K_2$, como $z_2=\omega(z_1)=\phi(\psi^{-1}(z_1))$ e $\psi^{-1}(z_1)\in K_1$ quando $z_1\in K_1$, então $z_2\in\phi(K_1)$. Note que $\psi^{-1}(z_1)$ realmente pertence a K_1, pois caso contrário, isto é, $z_1\in K_1$ *e* $\psi^{-1}(z_1)\notin K_1$, teríamos $\psi\circ\psi(z_1)=z_1\notin K_1$, que é um absurdo. Como $\phi(K_1)$ é fechado, pois K_1 é fechado e ϕ é Möbius, então

$$\left[\overline{\mathbb{C}\setminus K_2}\right]\subset\phi(K_1). \tag{2.10}$$

Logo, das equações 2.9 e 2.10 acima, $\phi(K_1)\cap\omega(K_2)\neq\emptyset$. Ou seja, $\phi\psi^{-1}(K_2)\cap\phi(K_1)\neq\emptyset$ e, aplicando $\psi\phi^{-1}$ em ambos os lados dessa última igualdade, obtemos que $K_2\cap\psi(K_1)\neq\emptyset$. Isto é, existe $z\in\mathbb{C}$ tal que $\frac{A}{Dz}\in K_1$ e $z\in K_2$. Donde, $\frac{A}{D}\in K_1.K_2$ e, portanto, $-\frac{A}{D}\in -K_1.K_2$, como queríamos. □

Lema 2.11. Sejam K_{ij}, com $i \in \{1,2\}$ *e* $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, subconjuntos fechados de $\mathbb{C}$ que não contém o zero. Se $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{A}_n$ e $\Phi_i(z_1,\cdots,z_n) \neq 0$ sempre que $z_1 \notin K_{i1},\cdots,z_n \notin K_{in}$ $(i=1,2)$, então $\Phi_1 * \Phi_2(z_1,\cdots,z_n) \neq 0$ sempre que $z_1 \notin -K_{11}.K_{21},\cdots,z_n \notin -K_{1n}.K_{2n}$.

Demonstração. Dados $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{A}_n$, temos, por hipótese, que dados $z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in}$ com $(i = 1,2)$ tais que $z_{1j} \notin K_{1j}$ e $z_{2j} \notin K_{2j}$ para todo $j = 1,2,\cdots,n$, $\Phi_1(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n}) \neq 0$ e $\Phi_2(z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n}) \neq 0$. Logo, o elemento definido pelo produto usual em $\mathbb{C}$,

$$\Phi_1(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n}) \times \Phi_2(z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n}) = \widetilde{\Phi}(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n})$$

é diferente de zero quando $z_{ij} \notin K_{ij}$ para todo $i = 1,2$ e $j = 1,2,\cdots,n$. Note que $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{A}_{2n}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n}) \times \Phi_2(z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n}) &= \left[\sum_{X\subset[n]} E_X \prod_{j\in X} z_{1j}\right]\left[\sum_{Y\subset[n]} E_Y \prod_{j\in Y} z_{2j}\right] \\
&= \sum_{Y\subset[n]} \left[\left(\sum_{X\subset[n]} E_X \prod_{j\in X} z_{1j}\right) E_Y \prod_{j\in Y} z_{2j}\right] \\
&= \sum_{\tilde{X}\subset[2n]} \tilde{E}_{\tilde{X}} z^{\tilde{X}} \\
&\in \mathcal{A}_{2n}.
\end{aligned}$$

Agora, façamos em $\widetilde{\Phi}$ sucessivas contrações de Asano da seguinte forma:

$$(z_{1k}, z_{2k}) \mapsto z_k \text{ para } k = 1,2,\cdots,n.$$

Note que no k-ésimo elemento teremos um elemento de $\mathcal{A}_{2n-k}$. Agora, afirmamos que, pelo Lema anterior, Lema 2.8, os elementos de $\mathcal{A}_{2n-k}$ são diferentes de zero quando

$$z_1 \notin -K_{11}.K_{21},\cdots,z_k \notin -K_{1k}.K_{2k},\cdots,z_{1(k+1)} \notin -K_{1(k+1)}.K_{2(k+1)}, z_{2(k+1)} \notin K_{2(k+1)},\cdots,z_{1n} \notin K_{1n} \text{ e } z_{2n} \notin K_{2n}.$$

Esta afirmação segue de uma indução em k e da aplicação do Lema 2.8 anterior. De fato, sabemos que

$$\Phi_1(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n}) \times \Phi_2(z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n}) = \widetilde{\Phi}(z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n}) \neq 0$$

quando $z_{ij} \notin K_{ij}$ $(i=1,2)$ $(j=1,2,...,n)$. Pelo Lema 2.8 anterior, a aplicação

$$\widetilde{\Phi}(z_1,z_{12},\cdots,z_{1n},z_{22},\cdots,z_{2n}) \in \mathcal{A}_{2n-1}$$

obtida pela contração de Asano $(z_{11},z_{21}) \mapsto z_1$ é diferente de zero quando $z_1 \notin -K_{11}.K_{21}$ e $z_{ij} \notin K_{ij}$ $(i=1,2)$ $(j=1,2,...,n)$. Portanto a afirmação acima é válida para $k=1$. Suponha, então, a afirmação válida para k qualquer em $[n]$. Ou seja, os elementos de $\mathcal{A}_{2n-k}$ são diferentes de zero quando $z_1 \notin -K_{11}.K_{21},\cdots,z_k \notin -K_{1k}.K_{2k}$ e $z_{ij} \notin K_{ij}$ $(i=1,2)$ $(j=k+1,\cdots,n)$. Mais uma vez, pelo Lema 2.8 anterior, a afirmação é válida para $k-1$. Portanto a afirmação é válida para $k \in [n]$ qualquer. Fazendo $k=n$, concluímos a prova. □

2.3 Raio interno de um polinômio Multiafim

Nesta seção definiremos um raio interno associado com um polinômio Multiafim Φ e veremos algumas de suas propriedades. Este conceito de raio interno embasará a caracterização dos polinômios de Lee-Yang que é um dos principais objetivos deste trabalho.

Definição 2.12. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, definimos seu raio interno, denotado por $r(\Phi)$, por $r(\Phi) = \infty$ se Φ é constante e por

$$r(\Phi) = \sup\{r \geq 0 \ : \ \Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \ \ se \ \ |z_1|, \cdots, |z_n| < r\},$$

caso contrário.

Lema 2.13. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, existe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(\varepsilon) = 0$ e $|\varepsilon_j| \leq r(\Phi)$ para todo $j \in [n]$.

Demonstração. Seja $\mathbb{K} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_1|, \cdots, |z_n| \leq r(\Phi)\}$ que é um conjunto compacto em $\mathbb{C}^n$. Como $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma aplicação contínua, temos que $\Phi^{-1}(\{0\})$ é fechado em $\mathbb{C}^n$.

Denotemos $B = \Phi^{-1}(\{0\})$. Queremos verificar que existe $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{K}$ tal que $\Phi(\varepsilon) = 0$. Suponha, por absurdo, que $\Phi(\varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{K}$, ou seja, $\mathbb{K} \cap B = \emptyset$. Como $\mathbb{K}$ é compacto, B é fechado e $\mathbb{K} \cap B = \emptyset$, então

$$d = d(\mathbb{K}, B) = \inf\{d(z, w) : z \in \mathbb{K} \ e \ w \in B\} > 0,$$

em que $d(z, w)$ denota a distância em $\mathbb{C}$ entre z e w.

Agora, definamos o seguinte conjunto

$$\mathbb{K}_{\frac{d}{2}} = \left\{z \in \mathbb{C}^n \ : \ d(z, \mathbb{K}) < \tfrac{d}{2}\right\},$$

em que $d(z, \mathbb{K}) = \inf\{d(z, w) \ : \ w \in \mathbb{K}\}$. Assim, $\mathbb{K}_{\frac{d}{2}} \cap B = \emptyset$, ou seja, $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ para todo $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{K}_{\frac{d}{2}}$ e $|z_j| < r(\Phi) + \frac{d}{2}$ para todo $j \in [n]$, contradizendo a definição de $r(\Phi)$. Portanto existe $\varepsilon \in \mathbb{K}$ tal que $\Phi(\varepsilon) = 0$. □

Observação 2.14. Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{K}$ com $\Phi(\varepsilon) = 0$ e $|\varepsilon_k| < r(\Phi)$ para algum $k \in [n]$, podemos reindexar os $\varepsilon_{j's}$ para que tenhamos $|\varepsilon_1|, \cdots, |\varepsilon_k| < r(\Phi)$ e $|\varepsilon_{k+1}|, \cdots, |\varepsilon_n| = r(\Phi)$, com $k < n$.

Afirmamos que se $k \geq 1$, a aplicação $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z_1, \cdots, z_k) = \Phi(z_1, \cdots, z_k, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n)$$

deve ser identicamente nula. Em outras palavras :

Lema 2.15. Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(\varepsilon) = 0$ e $|\varepsilon_j| \leq r(\Phi)$ para todo $j \in [n]$, então Φ permanece nula se variarmos apenas as entradas de ε que são estritamente menores que $r(\Phi)$.

Demonstração. Pelos Lema 2.13 e Observação 2.14 anteriores, podemos considerar $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in B = \Phi^{-1}(\{0\})$ tal que $|\varepsilon_1|, \cdots, |\varepsilon_k| < r(\Phi)$ e $|\varepsilon_{k+1}|, \cdots, |\varepsilon_n| = r(\Phi)$, com $k < n$. Queremos mostrar que, para todo $(z_1, \cdots, z_k) \in \mathbb{C}^k$, $(z_1, \cdots, z_k, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n) \in B$. Suponha por absurdo que existe $(z_1, \cdots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ tal que $(z_1, \cdots, z_k, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n) \notin B$. Então, para qualquer pequena escolha $(\varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n) \to (\eta_{k+1}, \cdots, \eta_n)$, podemos encontrar $(\eta_1, \cdots, \eta_k)$ próximo de $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ tal que $\Phi(\eta_1, \cdots, \eta_n) = 0$.

Em particular, podemos considerar $|\eta_1|, \cdots, |\eta_n| < r(\Phi)$, contradizendo a definição de raio interno para $\Phi \in \mathcal{A}_n$. □

Observação 2.16. Uma consequência do argumento acima é que existe $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = 0$ e $|\zeta_1|, \cdots, |\zeta_n| = r(\Phi)$.

Agora, note que a função *Raio interno* $r(\cdot)$ é bem definida sobre as classes de $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$ que foram definidas na Equação 2.4. De fato, dados Φ_1 e Φ_2 pertencentes a uma mesma classe $[\Phi]$ de $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$, existe $\lambda \neq 0$ em $\mathbb{C}$ tal que $\Phi_1 = \lambda\Phi_2$. Como, para $\lambda \neq 0$,

$$\Phi_2(z_1, \cdots, z_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda\Phi_2(z_1, \cdots, z_n) = 0 \Leftrightarrow \Phi_1(z_1, \cdots, z_n) = 0,$$

segue que $r(\Phi_1) = r(\Phi_2)$.

Proposição 2.17. É contínua a aplicação $g : [\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}} \to [0, \infty)$ definida por $g([\Phi]) = r(\Phi)$.

Demonstração. Sejam $\Phi \in \mathcal{A}_n$ não nulo e $z = (z_1, \cdots, z_n)$ tais que $\Phi(z) = 0$ com $|z_j| \leq r(\Phi) < \infty$ para todo $j \in [n]$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{A}_n$ próximo de Φ o suficiente para que tenhamos $\widetilde{\Phi}(\widetilde{z}_1, \cdots, \widetilde{z}_n) = 0$ para algum $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1, \cdots, \widetilde{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $|z - \widetilde{z}|_\infty = \sup_{1\leq j\leq n} |z_j - \widetilde{z}_j| < \varepsilon$. Como $|z_j - \widetilde{z}_j| < \varepsilon$ para todo $j \in [n]$, pela desigualdade triangular contrária, temos que, para cada $j \in [n]$, $|z_j - \widetilde{z}_j| \geq |z_j| - |\widetilde{z}_j|$. Logo, para cada $j \in [n]$,

$$\varepsilon \geq |z_j| - |\widetilde{z}_j| \Rightarrow |\widetilde{z}_j| \leq \varepsilon + |z_j| \Rightarrow |\widetilde{z}_j| \leq \varepsilon + r(\Phi).$$

Portanto $r(\widetilde{\Phi}) \leq \varepsilon + r(\Phi)$.

Agora, vejamos que também ocorre $r(\widetilde{\Phi}) \geq r(\Phi) - \varepsilon$. Por compacidade, podemos encontrar $a > 0$ tal que $|\Phi(z_1, \cdots, z_n)| \geq 2a$ se $|z_j| < r(\Phi) - \varepsilon$ para todo $j \in [n]$. Isto é, se $|z_j| \in B(0, r(\Phi) - \varepsilon) \equiv B$ para todo j. Portanto, para $\widetilde{\Phi}$ suficientemente próximo de Φ, temos $|\widetilde{\Phi}(z_1, \cdots, z_n)| \geq a$ se $|z_j| < r(\Phi) - \varepsilon$ para todo $j \in [n]$. Basta considerar $|\Phi - \widetilde{\Phi}| \leq a$ em B. De fato, se $|\Phi(z) - \widetilde{\Phi}(z)| \leq a$ para cada $z = (z_1, \cdots, z_n) \in B^n$, então

$$a \geq |\Phi(z) - \widetilde{\Phi}(z)| \geq |\Phi(z)| - |\widetilde{\Phi}(z)| \geq 2a - |\widetilde{\Phi}(z)| \Rightarrow |\widetilde{\Phi}(z)| \geq a\ .$$

Donde $r(\widetilde{\Phi}) \geq r(\Phi) - \varepsilon$. Pois, supondo que $r(\widetilde{\Phi}) < r(\Phi) - \varepsilon$, temos que existe $z \in B$, tal que $\widetilde{\Phi}(z) = 0$ e, como $\widetilde{\Phi}$ é próximo de Φ, existe $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1, \cdots, \widetilde{z}_n) \in B^n$ próximo de z tal que $\Phi(\widetilde{z}) = 0$, ou seja, $\Phi(\widetilde{z}) = 0$ e $|\widetilde{z}_j| < r(\Phi)$ para todo $j \in [n]$,que é uma contradição. Portanto, para $r(\Phi) < \infty$, temos que

$$\begin{aligned} r(\Phi) - \varepsilon \leq r(\widetilde{\Phi}) < \varepsilon + r(\Phi) \quad &\Rightarrow \quad r(\Phi) - \varepsilon - r(\Phi) \leq r(\widetilde{\Phi}) - r(\Phi) < \varepsilon + r(\Phi) - r(\Phi) \\ &\Rightarrow \quad -\varepsilon \leq r(\widetilde{\Phi}) - r(\Phi) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |r(\widetilde{\Phi}) - r(\Phi)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, note que $r(\Phi) = \infty$ somente quando $[\Phi] = [1]$, que é a classe das aplicações constantes não nulas. Logo é imediato ver que r é contínua em $[1]$. Ou seja, dados $\Phi, \widetilde{\Phi} \in [\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$, não ambos numa mesma classe de $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$, suficientemente próximos, temos que $|r(\widetilde{\Phi}) - r(\Phi)| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Lembrando que a função $r(\cdot)$ é bem definida sobre as classes de $[\mathcal{A}_n]_{\mathbb{C}}$, concluímos esta prova. □

Proposição 2.18. Sejam $\Phi_1,\ \Phi_2 \in \mathcal{A}_n$. Então $r(\Phi_1 * \Phi_2) \geq r(\Phi_1).r(\Phi_2)$, onde $*$ denota o produto em $\mathcal{A}_n$ determinado pela *Definição* 2.2.

Demonstração. No Lema 2.11, considere $K_{ij} = \{z \ : \ |z| \geq r(\Phi_i)\}$, onde $r(\Phi_i) = \sup\{r \geq 0 : \Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \ \ se \ \ |z_1|, \cdots, |z_n| < 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\Phi_1(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \text{ sempre que } z_1 \notin K_{11}, \cdots, z_n \notin K_{1n}, \\ &\Phi_2(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \text{ sempre que } z_1 \notin K_{21}, \cdots, z_n \notin K_{2n}. \end{aligned}$$

Ou seja, $r(\Phi_1) \leq \inf\{|z| : z \in K_{1j},\ j \in [n]\}$, em que $|.|$ denota a norma usual em $\mathbb{C}$, pois $\Phi_1(z_1, \cdots, z_n) = 0$ para algum $(z_1, \cdots, z_n)$ tal que $z_j \in K_{1j}$ para algum $j \in [n]$.

Analogamente, $r(\Phi_2) \leq \inf\{|z| : z \in K_{2j},\ j \in [n]\}$. Logo,

$$r(\Phi_1).r(\Phi_2) \leq \inf\{|z| : z \in K_{1j},\ j \in [n]\}. \inf\{|z| : z \in K_{2j},\ j \in [n]\}.$$

Ainda pelo Lema supracitado, temos que $\Phi_1 * \Phi_2(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ sempre que $z_1 \notin -K_{11}.K_{21}$, $\cdots$,$z_n \notin -K_{1n}.K_{2n}$. Donde

$$r(\Phi_1 * \Phi_2) \leq \inf\{|z| : z \in -K_{1j}.K_{2j},\ j \in [n]\},$$

em que $-K_{1j}.K_{2j} = \{-u.v : u \in K_{1j}\ \ e\ \ v \in K_{2j}\}$, para todo $j \in [n]$. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi_1 * \Phi_2 &\geq \inf\{|z| : z \in K_{1j}.K_{2j},\ j \in [n]\} \\ &\geq \inf\{|z| : z \in K_{1j},\ j \in [n]\}. \inf\{|z| : z \in K_{2j},\ j \in [n]\} \\ &\geq r(\phi_1).r(\Phi_2) \end{aligned}$$

□

Proposição 2.19. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, $r(\Phi) > 0$ se, e somente se, $E_\emptyset \neq 0$. Em particular, $r(\Phi) > 0$ quando Φ é $*$-invertível.

Demonstração. Como $\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X z^X$, em que $z^X = \prod_{x \in X} z_x$, é fácil ver que $\Phi(0, \cdots, 0) \neq 0$ se, e somente se, $E_\emptyset \neq 0$. Ademais, por definição, $r(\Phi) > 0$ se, e somente se, $\Phi(0, \cdots, 0) \neq 0$. Portanto $r(\Phi) > 0$ se, e somente se, $E_\emptyset \neq 0$. □

Proposição 2.20. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, se $r(\Phi) \geq 1$, então $|E_X| \leq |E_\emptyset|$ para todo X.

Demonstração. Seja $E = \max_{X \subset [n]} |E_X|$. Defina $\widetilde{\Phi} = \frac{\Phi}{E}$, isto é, $\widetilde{\Phi}(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} \left(\frac{E_X}{E}\right) z^X$. Sejam $r = r(\Phi) \geq 1$, por hipótese, e $\widetilde{r} = r(\widetilde{\Phi})$. Ou seja, $\sum_{X \subset [n]} E_X z^X = 0$ para algum $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $|z_j| \geq 1$ para todo $j \in [n]$. Queremos mostrar agora, que nessas condições, $\widetilde{r} \geq 1$.

Seja

$$\widetilde{\Phi}^{*n}(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} \left(\frac{E_X}{E}\right)^n z^X.$$

Então $\left(\frac{E_X}{E}\right)^n$ tem um limite sobre uma subsequência conveniente quando $n \to \infty$. De fato, se $E_X = a + bi$, com $|E_X| = a^2 + b^2 \geq 1$ para todo X, então

$$\left|\frac{E_X}{E}\right| = \frac{|E_X|}{|E|} \leq 1 \text{ e } \left|\frac{E_X}{E}\right|^n \to 1.$$

Se $E_X = a + bi$, com $|E_X| \leq 1$ para todo X, então $\left|\frac{E_X}{E}\right| = \frac{|E_X|}{E} \geq 1$.

Ao longo dessa subsequência, $\widetilde{\Phi}^{*n} \to \Phi_0 \in \mathcal{A}_n$, com $\Phi_0 \neq 0$. A saber,

$$\Phi_0(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} \left[\lim_{n \to \infty} \left(\frac{E_X}{E}\right)^n\right] z^X.$$

Pela proposição 2.18, como $r(\widetilde{\Phi}) \geq 1$, temos que

$$r(\widetilde{\Phi}^{*n}) = r(\widetilde{\Phi} * \cdots * \widetilde{\Phi}) \geq r(\widetilde{\Phi}). \cdots .r(\widetilde{\Phi}) \geq 1.$$

Assim, $r(\Phi_0) \geq 1$, pela 2.17 que nos diz que é contínua a aplicação $[\Phi] \mapsto r([\Phi])$. Ademais, como vimos na 2.19 que $r(\Phi) > 0$ se, e somente se, $E_\emptyset \neq 0$, segue que $\Phi_0(0, \cdots, 0) \neq 0$. Como $\Phi_0(0, \cdots, 0) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{E_\emptyset}{E}\right)^n$, não podemos ter $\left|\frac{E_\emptyset}{E}\right| < 1$. Logo $\frac{|E_\emptyset|}{E} = 1$ e, portanto, $|E_X| \leq |E| = |E_\emptyset|$. □

Proposição 2.21. Dado $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e escrevendo $(\Phi \circ \lambda)(z_1, \cdots, z_n) = \Phi(\lambda z_1, \cdots, \lambda z_n)$, temos que $r(\Phi \circ \lambda) = |\lambda|^{-1} r(\Phi)$.

Demonstração. Note que $r(\Phi \circ \lambda) = \sup\{r > 0 \ : \ \Phi(\lambda z_1, \cdots, \lambda z_n) \neq 0 \ \ se \ \ |\lambda z_1|, \cdots, |\lambda z_n| < r\}$. Ademais, $|\lambda z_j| = |\lambda|.|z_j| < r$ se, e somente se, $|z_j| < \frac{r}{|\lambda|}$ para todo $j \in [n]$. Portanto $r(\Phi \circ \lambda) = \sup\left\{\frac{r}{|\lambda|} > 0 \ : \ \Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \ \ se \ \ |z_1|, \cdots, |z_n| < \frac{r}{|\lambda|}\right\}$. Ou seja, $r(\Phi \circ \lambda) = |\lambda|^{-1} r(\Phi)$. $\square$

2.4 O polinômio $\Phi^\dagger$

Nesta seção definiremos um polinômio que também fundamentará a Caracterização dos Polinômios de Lee-Yang que faremos no capítulo seguinte deste trabalho.

Definição 2.22. A cada $\Phi \in \mathcal{A}_n$ associamos o seguinte polinômio:

$$\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) = \textstyle\sum_{X \subset [n]} \overline{E}_{[n]\setminus X}.z^X$$

Lema 2.23. Seja $\Phi \in \mathcal{A}_n$. Então $\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) = z_1 \cdots z_n \overline{\Phi(\overline{z_1}^{-1}, \cdots, \overline{z_n}^{-1})}$.

Demonstração. Lembrando que para um número complexo z, $z.\overline{z} = |z|^2$, donde $\overline{z}^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2}$, segue que

$$\overline{\Phi(\overline{z_1}^{-1}, \cdots, \overline{z_n}^{-1})} = \textstyle\sum_{X \subset [n]} \overline{E_X.(\overline{z}^{-1})^X} = \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X.\left(\dfrac{z}{|z|^2}\right)^X} = \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X}.\left(\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\right)^X.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdots z_n \overline{\Phi(\overline{z_1}^{-1}, \cdots, \overline{z_n}^{-1})} &= z_1 \cdots z_n \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X}.\left[\prod_{x \in X} \left(\frac{\overline{z_x}}{|z_x|^2}\right)\right] \\
&= \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X}.z_1 \cdots z_n \left[\prod_{x \in X} \left(\frac{\overline{z_x}}{|z_x|^2}\right)\right] \\
&= \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X}.z^{[n]\setminus X} \left[\prod_{x \in X} \left(\frac{z_x}{|z_x|^2}\right).\overline{z_x}\right] \\
&= \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X}.z^{[n]\setminus X} \left(\prod_{x \in X} \overline{z_x}^{-1}\overline{z_x}\right) \\
&= \sum_{X \subset [n]} \overline{E_X} \left(\prod_{x \in [n]\setminus X} z_x\right) \\
&= \sum_{X \subset [n]} \overline{E_{[n]\setminus X}} z^X \\
&= \Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_2),
\end{aligned}$$

em que $z^{[n]\setminus X} = \prod_{x \in [n]\setminus X} z_x$. $\square$

Exemplo 2.24. Para $n = 3$, $[3] = \{1, 2, 3\}$, temos que

$$\begin{aligned}\Phi(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{X\subset[3]} E_X z^X\\ &= E_{\emptyset}1+E_{\{1\}}z_1+E_{\{2\}}z_2+E_{\{3\}}z_3+E_{\{1,2\}}z_1z_2+E_{\{1,3\}}z_1z_3+E_{\{2,3\}}z_2z_3+E_{[3]}z_1z_2z_3,\end{aligned}$$

e temos que

- $\overline{E}_{[3]\setminus\emptyset}=\overline{E}_{[3]}=\overline{E}_{[3]}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{1\}}=\overline{E}_{\{2,3\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{2\}}=\overline{E}_{\{1,3\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{3\}}=\overline{E}_{\{1,2\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{1,2\}}=\overline{E}_{\{3\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{1,3\}}=\overline{E}_{\{2\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus\{2,3\}}=\overline{E}_{\{1\}}$,
- $\overline{E}_{[3]\setminus[3]}=\overline{E}_{\emptyset}$.

Donde

$$\Phi^{\dagger}(z_1,z_2,z_3)=\overline{E}_{[3]}1+\overline{E}_{\{2,3\}}z_1+\overline{E}_{\{1,3\}}z_2+\overline{E}_{\{1,2\}}z_3+\overline{E}_{\{3\}}z_1z_2+\overline{E}_{\{2\}}z_1z_3+\overline{E}_{\{1\}}z_2z_3+\overline{E}_{\emptyset}z_1z_2z_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}z_1z_2z_3\overline{\Phi(\overline{z_1}^{-1},\overline{z_2}^{-1},\overline{z_3}^{-1})} &= \overline{E}_{\emptyset}z_1z_2z_3+\overline{E}_{\{1\}}z_2z_3+\overline{E}_{\{2\}}z_1z_3+\overline{E}_{\{3\}}z_1z_2\\ &\quad +\overline{E}_{\{1,2\}}z_3+\overline{E}_{\{1,3\}}z_2+\overline{E}_{\{2,3\}}z_1+\overline{E}_{[3]}\\ &= \Phi^{\dagger}(z_1,z_2,z_3).\end{aligned}$$

Observação 2.25. Dados $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ tais que $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=1$, tem-se que $|\Phi^{\dagger}(z_1,\cdots,z_n)|=|\Phi(z_1,\cdots,z_n)|$. De fato, como $|z_j|=1$, então $z_j^{-1}=\overline{z}_j$ para todo j em $\{1,2,\cdots,n\}$, pois $z_j^{-1}=\frac{\overline{z}_j}{|z_j|^2}$ para todo j. Donde $\overline{z}_j^{-1}=z_j$ e $\Phi(\overline{z}_1^{-1},\cdots,\overline{z}_n^{-1})=\Phi(z_1,\cdots,z_n)$. Logo, pelo Lema 2.23, segue que

$$|\Phi^{\dagger}(z_1,\cdots,z_n)|=|z_1\cdots z_n\Phi(\overline{z}_1^{-1},\cdots,\overline{z}_n^{-1})|=|\Phi(z_1,\cdots,z_n)|.$$

Observação 2.26. Dados Φ_1 e Φ_2 em $\mathcal{A}_n$, com $\Phi_1(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{X\subset[n]}E^1_Xz^X$ e $\Phi_2(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{X\subset[n]}E^2_Xz^X$, temos que $(\Phi_1*\Phi_2)^{\dagger}=\Phi_1^{\dagger}*\Phi_2^{\dagger}$. De fato,

$$\begin{aligned}\Phi_1^{\dagger}(z_1,\cdots,z_n)*\Phi_2^{\dagger}(z_1,\cdots,z_n) &= \sum_{X\subset[n]}\overline{E}^1_{[n]\setminus X}.\overline{E}^2_{[n]\setminus X}.z^X\\ &= \sum_{X\subset[n]}\overline{E^1_{[n]\setminus X}.E^2_{[n]\setminus X}}.z^X\\ &= [(\Phi_1*\Phi_2)(z_1,\cdots,z_n)]^{\dagger}.\end{aligned}$$

Proposição 2.27. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, temos que $r(\Phi^\dagger) \leq r^{-1}(\Phi)$.

Demonstração. Para $r(\Phi^\dagger) = 0$, a desigualdade é satisfeita, pois $0 \leq r^{-1}(\Phi)$ para todo $\Phi \in \mathcal{A}_n$. Para $r(\Phi) = 0$, temos que $r(\Phi) = 0 \leq r^{-1}(\Phi^\dagger)$, que equivale à desigualdade pretendida. Suponhamos então que $r(\Phi^\dagger)$ e $r(\Phi)$ são ambos não nulos e Φ não constante. Sabemos que existe $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = 0$ e $|\zeta_1|, \cdots, |\zeta_n| = r(\Phi) > 0$, pela observação 2.16. Pelo lema 2.23, $\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) = z_1. \cdots .z_n\overline{\Phi(\overline{z}_1^{-1}, \cdots, \overline{z}_n^{-1})}$. Logo,

$$\Phi^\dagger(\overline{\zeta}_1^{-1}, \cdots, \overline{\zeta}_n^{-1}) = \overline{\zeta}_1^{-1}. \cdots .\overline{\zeta}_n^{-1}\overline{\Phi}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = 0 \ .$$

Ademais, $\left|\overline{\zeta}_j^{-1}\right| = \left|\frac{\zeta_j}{|\zeta_j|^2}\right| = \left|\frac{1}{|\zeta_j|}\right|$. Donde $\left|\overline{\zeta}_j^{-1}\right| = \frac{1}{r(\Phi)}$ para todo $j \in [n]$. Ou seja, $r(\Phi^\dagger) \leq r^{-1}(\Phi)$, como queríamos. □

Capítulo 3

Caracterização de polinômios Lee-Yang

Neste capítulo definiremos e veremos que todos aqueles polinômios de grau n que dizemos ser de Lee-Yang, que denotaremos por LY_n, podem ser escritos em função de Polinômios Multiafins que não se anulam em pontos cujas entradas tem módulo menor que um e veremos que esse procedimento nos permite exibir novos exemplos de polinômios de Lee-Yang. Assim, na Seção 3.1, caracterizaremos os Polinômios de de Lee-Yang e na Seção 3.2, utilizando esta caracterização, exibiremos polinômios de Lee-Yang diferentes dos polinômios originalmente considerados por Lee e Yang. O faremos utilizando o conceito de *Raio interno de um polinômio Multiafim* apresentado no Capítulo 2.

Ademais, na Seção 3.3, consideraremos um subconjunto, $\mathcal{J}_n$, de LY_n formados por polinômios Φ tais que $\Phi^\dagger = \Phi$. Faremos um breve estudo de $\mathcal{J}_n$ reescrevendo-o utilizando a Caracterização de polinômios Lee-Yang, feita na Seção 3.1 deste capítulo.

Para este capítulo também nos baseamos principalmente no artigo de david Ruelle [Rue10] e utilizamos as referências [Ati94], [Lim70] e [Lim04] para compreender as ideias contidas no arigo principal. Além de outros artigos devidamente citados pelo texto que foram utilizados para justificar rigorosamente algumas das ideias pontuais contidas no texto.

Definição 3.1. Classe de Polinômios Lee-Yang:

$$LY_n = \{\psi \in \mathcal{A}_n \quad : \quad r(\psi) \geq 1 \quad e \quad r(\psi^\dagger) \geq 1\}.$$

Ou seja, LY_n consiste de polinômios $\psi \in \mathcal{A}_n$ tais que $\psi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$ e $|z_1|, \cdots, |z_n| > 1$.

Observação 3.2. Dado $\psi \in LY_n$, tem-se que $r(\psi) = r(\psi^\dagger) = 1$. De fato, como $\psi \in LY_n$, então $r(\psi^\dagger) \geq 1$. Pela Proposição 2.27, $r(\psi^\dagger) \leq r(\psi)^{-1}$. Ademais, $r(\psi)^{-1} \leq 1$, pois $r(\psi) \geq 1$. Logo $r(\psi^\dagger) \leq 1$ e, portanto, $r(\psi^\dagger) = 1$.

Agora, note que $r(\psi) \leq r(\psi^\dagger)^{-1}$. Assim, como acima, concluímos que $r(\psi) = 1$.

Definição 3.3. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$, definimos

$$\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) = z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) + \Phi(z_1, \cdots, z_n) \tag{3.4}$$

que é um polinômio em $\mathcal{A}_{n+1}$.

Proposição 3.5. Dado $\Psi_\Phi \in \mathcal{A}_{n+1}$, temos que $\Psi_\Phi^\dagger = \Psi_\Phi$ e $\Psi_{\Phi_1 * \Phi_2} = \Psi_{\Phi_1} * \Psi_{\Phi_2}$, com $\Phi_1,\ \Phi_2 \in \mathcal{A}_n$.

3.1 Caracterização de LY_n

Agora, usando a propriedade de raio interno de um polinômio Multiafim, caracterizaremos um elemento $\psi \in LY_{n+1}$ em termos de polinômios Φ em n variáveis e tal que $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$.

Teorema 3.6. (Caracterização de LY_{n+1}) Um elemento $\Psi \in \mathcal{A}_{n+1}$ é um elemento de LY_{n+1} se, e somente se, $\Psi = c\Psi_\Phi$, onde $|c| = 1$ e $\Phi \in \mathcal{A}_n$ é tal que $r(\Phi) \geq 1$.

Na Subseção 3.1.1 apresentaremos uma verificação deste teorema.

Definição 3.7. Dizemos que um polinômio complexo P de grau n pertence a $\mathcal{U}_n$ se todas as suas n raízes α_i tem norma igual a um, $|\alpha_i| = 1$.

Como visto na Proposição 2.6, quando P é um polinômio complexo de grau n, existe um único $\Psi \in \mathcal{A}_n$ simétrico nessas n variáveis tal que $P(z) = \Psi(z, \cdots, z)$.

Pelo Teorema 2.7 de Grace, vemos que afirmar que $P \in \mathcal{U}_n$ é equivalente a afirmar que $P(z) = \Psi(z, \cdots, z) \in LY_n$. De fato, como as n raízes de P estão no círculo unitário (que é uma região circular fechada), pelo *Teorema de Grace*, $\Psi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ e $|z_i| \neq 1$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Ou seja, $\Psi \in LY_n$ conforme Definição 3.1.

Proposição 3.8. Um polinômio complexo P de grau n pertence a $\mathcal{U}_{n+1}$ se, e somente se,

$$P(z) = c(zQ^\dagger(z) + Q(z)), \text{ onde } c \neq 0,\ Q(z) = \sum_{l=0}^{n} C_l z^l$$

tem todas as suas raízes β_i no conjunto $\{z : \ |z| \geq 1\}$ e $Q^\dagger(z) = \sum_{l=0}^{n} \overline{C}_{n-l} z^l$.

Demonstração. Se $P \in \mathcal{U}_{n+1}$, então $P(z) = \Psi(z, \cdots, z)$ para algum $\Psi \in \mathcal{A}_{n+1}$ simétrico nessas $n+1$ variáveis e todas as $n+1$ raízes de P tem norma igual a um. Pelo visto acima, $\Psi \in LY_{n+1}$. Ou seja, pelo *Teorema* 3.6, $P(z) = \Psi(z, \cdots, z) = c\Psi_Q$, onde $|c| = 1$ e $Q \in \mathcal{A}_n$ é tal que $r(Q) \geq 1$. Ou seja,

$$P(z) = c\left(zQ^\dagger(z) + Q(z)\right), \text{ com } c \neq 0,\ Q \in \mathcal{A}_n \text{ e } r(Q) \geq 1.$$

Como vale a recíproca do *Teorema* 3.6, segue que $P \in \mathcal{U}_{n+1}$ se, e somente se,

$$P(z) = c(zQ^\dagger(z) + Q(z)), \text{ onde } c \neq 0 \text{ e } Q \in \mathcal{A}_n \text{ com } r(Q) \geq 1.$$

□

Observação 3.9. Seja $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação linear fracional da esfera de Riemann, isto é, $ad - bc \neq 0$. Dado $\Phi \in \mathcal{A}_n$ podemos definir $\Phi^\phi \in \mathcal{A}_n$ trocando z_i por $\frac{az_i+b}{cz_i+d}$ na expressão $\Phi(z_1, \cdots, z_n)$. Essa mudança nos fornece uma nova versão do teorema de Grace onde o círculo unitário é trocado pelos eixos real ou imaginário.

Exemplo 3.10. Para $n = 2$, dado $\Phi(z_1, z_2) \in \mathcal{A}_2$, temos que

$$\Phi(z_1, z_2) = E_\emptyset + E_{\{1\}} z_1 + E_{\{2\}} z_2 + E_{\{1,2\}} z_1 z_2.$$

Trocando z_i por $\frac{az_i+b}{cz_i+d}$ com $i = 1, 2$, teremos que

$$\Phi^\phi(z_1, z_2) = E_\emptyset + E_{\{1\}} \left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}\right) + E_{\{2\}} \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right) + E_{\{1,2\}} \left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}\right) \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d}\right).$$

3.1.1 Prova do Teorema 3.6 *Caracterização dos polinômios Lee-Yang*

Dado $\Psi \in LY_{n+1}$, por definição, temos que $r(\Psi) \geq 1$ e $r(\Psi^\dagger) \geq 1$. Considere o seguinte conjunto

$$\mathbb{T}^n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \ : \ |\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n| = 1\}.$$

Dado $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$, as funções

$$f : z \mapsto \Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) \tag{3.11}$$

e

$$g : z \mapsto \Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) \tag{3.12}$$

são ambas afim sobre $\mathbb{C}$, pois como Ψ e $\Psi^\dagger$ são Multiafins, então

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \text{ e } g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2) \text{ para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ademais

Proposição 3.13. Se f definida em 3.11 é constante então é identicamente nula.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f \equiv k$, com k uma constante não nula. Assim, $f(1) = \Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 1) \neq 0$. Pelo Lema 2.23 sabemos que

$$\Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) = \alpha_1. \cdots .\alpha_n.z \ \overline{\Psi(\overline{\alpha_1^{-1}}, \cdots, \overline{\alpha_n^{-1}}, \overline{z^{-1}})}.$$

Mas $\overline{\alpha_j^{-1}} = \alpha_j$ para todo $j = 1, \cdots, n$, pois $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$ e $\overline{\alpha_j^{-1}} = \frac{\alpha_j}{|\alpha_j|^2}$. Logo

$$\Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) = \alpha_1. \cdots .\alpha_n.z \ \overline{\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{z^{-1}})}.$$

Como $f \equiv k \neq 0$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) \\ &= \alpha_1. \cdots .\alpha_n.z\overline{\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{z^{-1}})} \\ &= \alpha_1. \cdots .\alpha_n.z\overline{f(\overline{z^{-1}})} \\ &= \alpha_1. \cdots .\alpha_n.\overline{k}.z. \end{aligned}$$

Como z é qualquer e $k, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \neq 0$ segue que g não é constante e que $g(0) = 0$. Ou seja, por uma pequena mudança de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0)$ obtemos $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1})$ tal que $\Psi^\dagger(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0$ e $|z_1|, \cdots, |z_{n+1}| < 1$. Absurdo, pois $r(\Psi^\dagger) \geq 1$. □

Proposição 3.14. Se g definida em 3.12 é constante, então é identicamente nula.

Demonstração. Suponha que $g \equiv \widetilde{k}$, com $\widetilde{k} \neq 0$ constante. Analogamente ao feito na Proposição 3.13 acima, podemos ver que

$$g(z) = \alpha_1. \cdots .\alpha_n.z \ \overline{\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{z^{-1}})}.$$

Então $\overline{\widetilde{k}} = \overline{\alpha_1. \cdots .\alpha_n.z} \ \Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{z^{-1}})$, donde

$$\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{z^{-1}}) = M\overline{z^{-1}}, \text{ com } M = \overline{\left(\frac{\widetilde{k}}{\alpha_1. \cdots .\alpha_n}\right)} \neq 0.$$

Como z é qualquer, f é não constante e $f(0) = 0$. Logo, para uma pequena mudança de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0)$ obtemos $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1})$ tal que

$$\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0 \text{ e } |z_1|, \cdots, |z_{n+1}| < 1.$$

Absurdo, pois $r(\Psi) \geq 1$. □

Suponha, então, que f é não constante e que $f(\beta) = 0$ para algum $\beta \in \mathbb{C}$. Então g será não constante, por definição, e $g(\overline{\beta^{-1}}) = 0$:

$$\begin{aligned} g(\overline{\beta^{-1}}) &= \Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \overline{\beta^{-1}}) \\ &= \alpha_1. \cdots .\alpha_n.\overline{\beta^{-1}}.\ \overline{\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)} \\ &= \alpha_1. \cdots .\alpha_n.\overline{\beta^{-1}}.\ \overline{f(\beta)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ademais, $|\beta| \geq 1$. Pois se $|\beta| < 1$, para uma mudança pequena de $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)$, obtemos $(z_1, \cdots, z_{n+1})$ tal que $\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0$ e $|z_j| < 1$ para todo $j = 1, \cdots, n+1$, o que contradiz o fato de que $r(\Psi) \geq 1$.

Analogamente, vemos que $|\beta| \leq 1$. Basta lembrar que $r(\Psi) \leq 1$. Portanto, as funções f e g definidas em 3.11 e 3.12 respectivamente, são ambas identicamente nulas ou são ambas não constantes e se anulam em $z = \beta$ com $|\beta| = 1$. Neste último caso, existe $c = c(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0$ tal que $g(z) = cf(z)$, pois

?

Ou seja,

$$\Psi^\dagger(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) = c\Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, z) \tag{3.15}$$

com $c = c(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0$.

Para o próximo passo desta demonstração precisaremos do seguinte Teorema cuja demonstração omitiremos por utilizar argumentos que saem do contexto deste trabalho.

Teorema 3.16. Toda aplicação d-linear é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados.

Para uma verificação deste resultado consulte [Ber08].

Sendo $\Psi \in LY_{n+1}$ que estamos considerando não identicamente nula, pelo Teorema 3.16, Ψ é contínua sobre $\mathbb{T}^{n+1}$. Logo, denotando por $viz(z)$ a vizinhança de um $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ qualquer, temos que existem $\beta \in \mathbb{T}^{n+1}$, tal que $\Psi(\beta), \Psi^\dagger(\beta) \neq 0$, e $viz(\beta)$ em $\mathbb{T}^{n+1}$ tal que Ψ e $\Psi^\dagger$ não se anulam em nenhum ponto de $viz(z)$. De fato, suponha, por absurdo, que dado $\beta \in \mathbb{T}^{n+1}$ tal que $\Psi(\beta) \neq 0$ ocorre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $z \in B(\beta, \varepsilon)$ com $\Psi(z) = 0$, onde $B(\beta, \varepsilon)$ denota uma bola aberta de centro β e raio ε. Defina $(\varepsilon_n)_n$ uma sequência decrescente de números reais e escolha, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in B(\beta, \varepsilon_n)$ tal que $\Psi(z_n) = 0$. Fazendo ε_n tender a zero ($\varepsilon_n \to 0$) teremos que $z_n \to \beta$ e $\Psi(z_n) = 0$ e $\Psi(\beta) \neq 0$. Absurdo.

De maneira similar provamos que existe $\beta \in \mathbb{T}_{n+1}$ e $viz(\beta)$ em $\mathbb{T}_{n+1}$ tal que $\Psi^\dagger$ não se anula em $viz(\beta)$. Portanto existe um conjunto aberto não vazio $\mathcal{O} \equiv viz(\beta) \subset \mathbb{T}^{n+1}$ tal que Ψ e $\Psi^\dagger$ não se anulam em $\mathcal{O}$. E da Equação 3.15 temos que

$$\Psi^\dagger(\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}) = c\ (\beta_1, \cdots, \beta_{n+1})\ \Psi(\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}), \text{ para todo } (\beta_1, \cdots, \beta_{n+1}) \in \mathcal{O}.$$

Ou seja, $\Psi^\dagger = c\Psi$ em $\mathcal{O}$ com c independente da coordenada β_{n+1}.

Observação 3.17. De maneira similar, podemos mostrar que c independe das coordenadas $\beta_1, \cdots, \beta_n$.

Pela Observação 3.17 vemos que c é constante em $\mathcal{O}$. Por analiticidade, $\Psi^\dagger = c\Psi$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$.

Agora verificaremos que na comprovada equação $\Psi^\dagger = c\Psi$, temos que $|c| = 1$. Como

$$\Psi^\dagger(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \textstyle\sum_{X \subset [n+1]} \overline{E_{[n+1]\setminus X}}.z^X \text{ e } \Psi^{\dagger\dagger}(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \textstyle\sum_{X \subset [n+1]} E_X.z^X,$$

sendo $\Psi^\dagger = c\Psi$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, segue que

$$\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = (c\Psi)^\dagger(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X\subset[n+1]} \overline{c}\overline{E_{[n+1]\setminus X}}.z^X.$$

Logo, $\Psi = \overline{c}\Psi^\dagger$ e, portanto, $\Psi = \overline{c}c\Psi$. Ou seja, $|c| = 1$, como queríamos.

Agora verificaremos que se $\Psi \in LY_{n+1}$, então $\Psi = k\Psi_\Phi$ com $|k| = 1$ e $\Phi \in \mathcal{A}_n$. Escolha k tal que $k^{-2} = c$. Então $|k| = 1$.

Definição 3.18. $\Psi_k = k^{-1}\Psi \in \mathcal{A}_{n+1}$.

Então

$$\begin{aligned}
\Psi_k^\dagger &= (k^{-1}.\Psi)^\dagger \\
&= \left(k^{-1} \sum_{X\subset[n+1]} E_X z^X\right)^\dagger \\
&= \overline{k^{-1}} \sum_{X\subset[n+1]} \overline{E_{[n+1]\setminus X}}. \; .z^X \\
&= \frac{k}{|k|^2} \sum_{X\subset[n+1]} \overline{E_{[n+1]\setminus X}}. \; z^X \\
&= k\Psi^\dagger.
\end{aligned}$$

E como $\Psi^\dagger = c\Psi$ e definimos $k^{-2} = c$, temos que

$$\Psi_k^\dagger = k\Psi^\dagger = kc\Psi = kk^{-2}\Psi = k^{-1}\Psi = \Psi_k.$$

Por outro lado, usando a Definição 3.18,

$$\begin{aligned}
\Psi_k(z_1, \cdots, z_{n+1}) &= k^{-1}\left(\sum_{X\subset[n+1]} E_x z^X\right) \\
&= k^{-1}\left(\sum_{X\subset[n]} E_x z^X + z_{n+1}\sum_{X\subset[n]} F_x z^X\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Psi_k^\dagger(z_1, \cdots, z_{n+1}) &= k^{-1}\left(\sum_{X\subset[n+1]} \overline{E}_{[n+1]\setminus X} z^X\right) \\
&= k^{-1}\left(\sum_{X\subset[n]} \overline{E}_{[n]\setminus X} z^X + z_{n+1}\sum_{X\subset[n]} \overline{E}_{[n]\setminus X} z^X\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Psi_k^\dagger = \Psi_k$ é equivalente a $F_X = \overline{E}_{[n]\setminus X}$. Assim,

$$\Psi_k(z_1, \cdots, z_{n+1}) = k^{-1}\left(\sum_{X\subset[n]} E_X z^X + z_{n+1}\sum_{X\subset[n]} \overline{E}_{[n]\setminus X} z^X\right).$$

Escrevendo $\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X\subset[n]} E_X z^X \in \mathcal{A}_n$, segue que

$$\Psi_k(z_1, \cdots, z_{n+1}) = k^{-1}\Big(\Phi(z_1, \cdots, z_n) + z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)\Big) = k^{-1}\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_{n+1}).$$

Portanto, se $\Psi \in LY_{n+1}$, então $\Psi = k\Psi_\Phi$ com $|k| = 1$ e $\Phi \in \mathcal{A}_n$, como queríamos.

Para concluir essa parte da prova, verificaremos agora que $r(\Phi) \geq 1$. Como

$$\Psi(z_1, \cdots, z_n, 0) = k(\Phi(z_1, \cdots, z_n) + 0.\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)),$$

então

$$\Phi(z_1, \cdots, z_n) = k^{-1}\ \Psi(z_1, \cdots, z_n, 0).$$

E como $\Psi(z_1, \cdots, z_n, 0) \neq 0$ quando $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$, temos que $r(\Phi) \geq 1$. Isso conclui essa parte da prova.

Agora provemos que se $\Psi = c\Psi_\Phi$ com $\Phi \in \mathcal{A}_n$ e $r(\Phi) \geq 1$ e $|c| = 1$, então $\Psi \in LY_{n+1}$.

Pela proposição 3.5 sabemos que $\Psi_\Phi^\dagger = \Psi_\Phi$ e, portanto, basta mostrar que $r(\Psi_\Phi) \geq 1$ para provar que $c\Psi_\Phi \in LY_{n+1}$. Ou seja, queremos mostrar que

$$\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_{n+1}) \neq 0 \text{ se } |z_1|, \cdots, |z_{n+1}| < 1.$$

Suponha que $r(\Phi) \geq 1$. Assim,

$$\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_n, 0) = \Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0 \text{ se } |z_1|, \cdots, |z_n| < 1.$$

Ademais, se $z_{n+1} \neq 0$ e $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$,

$$\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow z_{n+1}^{-1} = \tfrac{-\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)}.$$

Neste caso, precisamos mostrar que $\left|\frac{\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)}\right| \leq 1$.

Dado $\lambda < 1$ real, escrevendo

$$(\Phi \circ \lambda)(z_1, \cdots, z_n) = \Phi(\lambda z_1, \cdots, \lambda z_n)$$

temos que $\Phi \circ \lambda \to \Phi$ e $(\Phi \circ \lambda)^\dagger \to \Phi^\dagger$ quando $\lambda \to 1$. Portanto

$$\left|\tfrac{\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)}\right| = \lim_{\lambda \to 1}\left|\tfrac{(\Phi\circ\lambda)^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi\circ\lambda(z_1, \cdots, z_n)}\right|,$$

em que, pelo princípio do máximo,

$$\left|\tfrac{(\Phi\circ\lambda)^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi\circ\lambda(z_1, \cdots, z_n)}\right| \leq \max_{|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_n| = 1}\left|\tfrac{(\Phi\circ\lambda)^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi\circ\lambda(z_1, \cdots, z_n)}\right| = 1,$$

como queríamos.

3.2 Novos exemplos de polinômios de Lee-Yang

Concluiremos estes texto apresentando novos exemplos de polinômios de Lee-Yang. A seguir, estudaremos

$$\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X \subset [n+1]}\left(\prod_U E_{UX}\right) z^X$$

para várias escolhas de U e E_{UX}.

1. Para $U = \{j, k\} \subset [n+1]$, com $j < k$, escreva

$$E_{UX} = \begin{cases} a_u & se \quad j \in X, k \notin X \\ \overline{a}_u & se \quad j \notin X, k \in X \\ b_u & se \quad j, k \notin X \\ \overline{b}_u & se \quad j, k \in X \end{cases}$$

Exemplo 3.19. Para $n = 2$ temos que $[n+1] = \{1, 2, 3\}$ e escrevamos $U_{jk} = \{j, k\}$ onde $U_{jk} \subset [3]$ e $j < k$. Ademais, escreva $X_0 = \{\emptyset\}$, $X_m = \{m\}$, $X_{pq} = \{p, q\}$ e $X_{123} = \{1, 2, 3\}$ onde $m, p, q \in [3]$ e $p < q$. Assim, temos que

- $E_{U_{12}X_0} = b_U$
- $E_{U_{12}X_1} = a_U$
- $E_{U_{12}X_2} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{12}X_3} = b_U$
- $E_{U_{12}X_{12}} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{12}X_{13}} = a_U$
- $E_{U_{12}X_{23}} = \overline{a}_U$
- $E_{U_{12}X_{123}} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{13}X_0} = b_U$
- $E_{U_{13}X_1} = a_U$
- $E_{U_{13}X_2} = b_U$
- $E_{U_{13}X_3} = \overline{a}_U$
- $E_{U_{13}X_{12}} = a_U$
- $E_{U_{13}X_{13}} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{13}X_{23}} = \overline{a}_U$
- $E_{U_{13}X_{123}} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{23}X_0} = b_U$
- $E_{U_{23}X_1} = b_U$
- $E_{U_{23}X_2} = a_U$
- $E_{U_{23}X_3} = \overline{a}_U$
- $E_{U_{23}X_{12}} = a_U$
- $E_{U_{23}X_{13}} = \overline{a}_U$
- $E_{U_{23}X_{23}} = \overline{b}_U$
- $E_{U_{23}X_{123}} = \overline{b}_U$

$$
\begin{aligned}
\Psi(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{X\subset[3]}\left(\prod_U E_{UX}\right)z^X\\
&= \left(\prod_U E_{UX_0}\right).1+\left(\prod_U E_{UX_1}\right).z_1+\left(\prod_U E_{UX_2}\right).z_2\\
&\quad+\left(\prod_U E_{UX_3}\right).z_3+\left(\prod_U E_{UX_{12}}\right).z_1.z_2+\left(\prod_U E_{UX_{13}}\right).z_1.z_3\\
&\quad+\left(\prod_U E_{UX_{23}}\right).z_2.z_3+\left(\prod_U E_{UX_{123}}\right).z_1.z_2.z_3\\
&= (E_{U_{12}X_0}.E_{U_{13}X_0}).E_{U_{23}X_0}.1+\cdots\\
&\quad+(E_{U_{12}X_{123}}.E_{U_{13}X_{123}}).E_{U_{23}X_{123}}.z_1.z_2.z_3\\
&= b_Ub_Ub_U+a_Ua_Ub_Uz_1+\overline{a}_Ub_Ua_Uz_2+b_U\overline{a}_U\overline{a}_Uz_3\\
&\quad+\overline{b}_Ua_Ua_Uz_1z_2+a_U\overline{b}_U\overline{a}_Uz_1z_3+\overline{a}_U\overline{a}_U\overline{b}_Uz_2z_3+\overline{b}_U\overline{b}_U\overline{b}_Uz_1z_2z_3\\
&= b_U^3+a_U^2b_Uz_1+\overline{a}_Ub_Ua_Uz_2+b_U\overline{a}_U^2z_3\\
&\quad+\overline{b}_Ua_U^2z_1z_2+a_U\overline{b}_U\overline{a}_Uz_1z_3+\overline{a}_U^2\overline{b}_Uz_2z_3+\overline{b}_U^3z_1z_2z_3
\end{aligned}
$$

Observe que se os complexos a_U e b_U satisfazem $\left|\frac{a_U}{b_U}\right|\leq 1$ para todo U, temos que $\Psi\in\mathcal{J}_{n+1}$. De fato, pela observação 4.47, é suficiente considerar o caso de um U tal que $E_{UX}\neq 1$. De fato, conforme observação 4.48, um elemento $\Psi\in\mathcal{H}_{n+1}$ pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
\Psi(z_1,\cdots,z_{n+1}) &= A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n\\
&\quad B^\dagger(z_1,\cdots,z_{n-1})z_{n+1}+A^\dagger(z_1,\cdots,z_{n-1})z_nz_{n+1}
\end{aligned}
$$

em que $A,B\in\mathcal{A}_{n-1}$ e

$$A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n=\Phi(z_1,\cdots,z_n)$$

com $A(z_1,\cdots,z_{n-1})\neq 0$ para $|z_1|,\cdots,|z_{n-1}|\leq 1$ e

$$|B(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})|<|A(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})|$$

para $|\alpha_1|=\cdots=|\alpha_{n-1}|=1$. Note que $\Psi(z_1,\cdots,z_{n+1})=\Phi(z_1,\cdots,z_n)+\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n)z_{n+1}$. Sendo assim, podemos considerar $n=1$, $U=[n+1]=\{1,2\}$. Então $\Psi=\Psi_\Phi$ com $\Phi(z_1)=b_U+a_Uz_1$. Daí, sendo $\left|\frac{a_U}{b_U}\right|\leq 1$ temos que $r(\Phi)\geq 1$ e $\Psi\in\mathcal{J}_{n+1}$.

Observação 3.20. No Teorema 4.1 de Lee-Yang visto no início deste capítulo, tomamos $b_U=1$ e a_U real.

2. Para $U=\{j,k,l\}\subset[n+1]$, escreva

$$E_{UX}=\begin{cases} b_u & se \quad U\cap X=\emptyset\\ \overline{b}_u & se \quad U\subset X\\ 1 & nos\ demais\ casos\end{cases}$$

Então, se b_U é real maior ou igual a 1 para todo U, temos que $\Psi\in\mathcal{J}_{n+1}$. Basta considerar um caso em que U é tal que $E_{UX}\neq 1$. Podemos então considerar $n=2$, $U=[n+1]=\{1,2,3\}$. Assim, com as notações usadas acima,

$$
\begin{aligned}
\Psi(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{X\subset[n+1]}\left(\prod_U E_{UX}\right) z^X \\
&= (E_{UX_0})\,1 + (E_{UX_1})\,z_1 + (E_{UX_2})\,z_2 \\
&\quad + (E_{UX_3})\,z_3 + (E_{UX_{12}})\,z_1z_2 + (E_{UX_{13}})\,z_1z_3 \\
&\quad + (E_{UX_{23}})\,z_2z_3 + (E_{UX_{123}})\,z_1z_2z_3 \\
&= b_U + z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + \bar{b}_U z_1z_2z_3 \\
&= (b_U + z_1 + z_2 + z_1z_2) + z_3(1 + z_1 + z_2 + \bar{b}_U z_1z_2) \\
&= \Psi_\Phi(z_1,z_2,z_3)
\end{aligned}
$$

com $\Phi(z_1,z_2) = b_U + z_1 + z_2 + z_1z_2 = (1+z_1)(1+z_2) - (1-b_U)$.
O conjunto $\{(1+z_1)(1+z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ é limitado pelo cardióide

$$\Gamma = \{\rho e^{i\theta} : \rho = 2(1+cos(\theta)) : \theta \in [-\pi,\pi]\}$$

e não contém $1-b_U$ que é real menor ou igual a zero por hipótese. Portanto $r(\Phi) \geq 1$ como queríamos.

Observação 3.21. Esta última situação descrita, com $E_{UX} = E^{(2)}_{UX}$ real, é contida na situação (1) descrita anteriormente onde consideramos $U = \{j,k\} \subset [n+1]$ com $j < k$, com $E_{UX} = E^{(1)}_{UX}$. Considere no primeiro caso descrito $b_{U_{12}} = b_{U_{13}} = b_{U_{23}} = b$. Assim, considerando $b_{U_{123}} = b^2$ no último caso descrito, temos que

$$b^{(2)}_{U_{123}X} = b^{-1} b^{(1)}_{U_{123}X}$$

porque ambos os lados são iguais a b^2 se $|X| = 0$ ou 3, e 1 se $|X| = 1$ ou 2. Portanto $\Psi^{(2)} = constante\ \Psi^{(1)}$. Essa equivalência falha se b não for real.

Observação 3.22. Se considerarmos $U = [n+1] = \{1,2,3\}$ na situação (2) e trocarmos o real b_U por $b(\beta) = e^{\beta W}$ com $Re(W) > 0$ e $Im(W) \neq 0$, o conjunto $\{b(\beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$ é um espiral logarítmica e $\{1-b(\beta) : \beta > 0\}$ intersecta a região $\{(1-z_1)(1-z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ dentro do cardióide Γ em uma sequência de intervalos. O ponto $1 - b(\beta)$ está dentro (respect. fora) do cardióide para β suficientemente pequeno (respect. grande). Portanto, existem sucessivos intervalos de $\{\beta : \beta > 0\}$ tal que $\Psi \notin \mathcal{J}_3$ e $\Psi \in \mathcal{J}_3$.

3. Para $U = \{j,k,l,m\} \subset [n+1]$ e $X \subset [n+1]$ escreva

$$E_{UX} = \begin{cases} b_U & se \quad U \cap X = \emptyset \\ \bar{b}_U & se \quad U \subset X \\ 1 & nos\ demais\ casos \end{cases}$$

Então, se b_U é real $b_U \geq 2$ ou $b_U = 1$, para todo U temos que $\Psi \in \mathcal{J}_{n+1}$. É suficiente considerar o caso de um U tal que $E_{UX} \neq 1$ e podemos considerar $n = 3$, $U = [n+1] = \{1,2,3,4\}$. Então $\Psi = \Psi_\Phi$ com

$$\Phi(z_1,z_2,z_3) = (1+z_1)(1+z_2)(1+z_3) - (1-b_U)$$

Vejamos que $\{(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1\}$ intersecta o intervalo real $(-\infty, 0])$ em $(-1,0)$, de modo que para o real $b_U \geq 2$ ou $b_U = 1$ temos que $r(\Phi) \geq 1$.

3.3 O conjunto das classes de Lee-Yang e seu interior

Nesta seção definiremos e estudaremos um subconjunto ($\mathcal{J}_n$) de LY_n que consiste de polinômios Ψ tais que $r(\Psi) = 1$ e $\Psi^\dagger = \Psi$. Veremos que os únicos polinômios Ψ que satisfazem à condição $\Psi^\dagger = \Psi$ estão na forma Ψ_Φ e, considerando $r(\Phi) \geq 1$, $r(\Psi_\Phi) = 1$.

Definição 3.23. $\mathcal{H}_n = \{\Phi \in \mathcal{A}_n \ : \ \Phi^\dagger = \Phi\}$.

Escrevendo $\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X.z^X$, temos que $\mathcal{H}_n$ consiste dos polinômios Multiafins Φ tais que $E_X = \overline{E}_{[n]\setminus X}$.

Definição 3.24. $\mathcal{J}_n = LY_n \cap \mathcal{H}_n$.

Note que, por definição, $\Psi \in \mathcal{J}_n$ se $r(\Psi) = 1$ e $\Psi = \Psi^\dagger$. Relembrando que

$$\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) = z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) + \Phi(z_1, \cdots, z_n), \text{ com } \Phi \in \mathcal{A}_n,$$

vejamos a seguinte.

Proposição 3.25. Considerando os conjuntos $\mathcal{H}_n$ e $\mathcal{J}_n$ definidos acima, afirmamos que

1. $\mathcal{H}_{n+1} = \{\Psi_\Phi \ : \ \Phi \in \mathcal{A}_n\}$;
2. $\mathcal{J}_{n+1} = \{\Psi_\Phi \ : \ \Phi \in \mathcal{A}_n \ \ e \ \ r(\Phi) \geq 1\}$.

Ou seja, os únicos polinômios Multiafins Φ que satisfazem a condição $\Phi^\dagger = \Phi$ estão na forma Ψ_Φ. Ademais, se $r(\Phi) \geq 1$, então $r(\Psi_\Phi^\dagger) = r(\Psi_\Phi) = 1$.

Demonstração. Por definição, dado $Q \in \mathcal{H}_{n+1}$, temos que $Q \in \mathcal{A}_{n+1}$ e $Q^\dagger = Q$. Logo,

$$\begin{aligned} Q(z_1, \cdots, z_{n+1}) &= \sum_{X \subset [n+1]} E_X z^X \\ &= \sum_{X \subset [n]} E_X z^X z_{n+1} + \sum_{X \subset [n]} E_X z^X \\ &= \sum_{X \subset [n]} \overline{E}_{[n]\setminus X} z^X z_{n+1} + \sum_{X \subset [n]} E_X z^X \\ &= z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n) + \Phi(z_1, \cdots, z_n). \end{aligned}$$

Ou seja, se $Q \in \mathcal{H}_{n+1}$ então $Q = \Psi_\Phi$ com $\Phi \in \mathcal{A}_n$, isto é, $\mathcal{H}_{n+1} \subset \{\Psi_\Phi \ : \ \Phi \in \mathcal{A}_n\}$. Ademais, pela Proposição 3.5 que mostra que $\Psi_\Phi = \Psi_\Phi^\dagger$, vemos finalmente que $\mathcal{H}_{n+1} = \{\Psi_\Phi \ : \ \Phi \in \mathcal{A}_n\}$.

Agora verifiquemos a igualdade d item 2. Dado $Q \in \mathcal{J}_{n+1}$, pelo *Teorema* 3.6,

$$Q = c\Psi_\Phi = c\left[z_{n+1}.\Phi^\dagger + \Phi\right],$$

onde $|c| = 1$, $\Phi \in \mathcal{A}_n$ e $r(\Phi) \geq 1$. Fazendo fazendo $z_{n+1} = 0$ temos que $c\Phi$ é unicamente determinado. Ademais, sendo $\Phi \neq 0$, $c\Psi_\Phi \in \mathcal{H}_{n+1}$ se, e somente se, $c \in \mathbb{R}$. Pois neste caso temos que $c\Psi_\Phi = (c\Psi_\Phi)^\dagger$, isto é, $\bar{c} = c$. Basta observar que, escrevendo $\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X.z^X$, decorre que

$$\begin{aligned}
(c\Psi_\Phi)^\dagger(z_1,\cdots,z_{n+1}) &= \left(c.z_{n+1}.\sum_{X\subset[n]}\overline{E}_{[n]\setminus X}.z^X \quad + c.\sum_{X\subset[n]}E_X.z^X\right)^\dagger \\
&= \left(\sum_{X\subset[n]}c.z_{n+1}.\overline{E}_{[n]\setminus X}.z^X \quad + \sum_{X\subset[n]}c.E_X.z^X\right)^\dagger \\
&= \sum_{X\subset[n]}\overline{c}.E^X.z^X.z_{n+1} + \sum_{X\subset[n]}\overline{c}.\overline{E}_{[n]\setminus X}.z^X \\
&= \overline{c}\left[z_{n+1}.\Phi(z_1,\cdots,z_n) + \Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n)\right],
\end{aligned}$$

e que

$$c\Psi_\Phi(z_1,\cdots,z_{n+1}) = c\left[z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n) + \Phi(z_1,\cdots,z_n)\right].$$

Assim, os elementos de $LY_{n+1}\cap\mathcal{H}_{n+1}$ são da forma $\pm\Psi_\Phi$, pois $c\in\mathbb{R}$ e $|c|=1$. Ademais, $\pm\Psi_\Phi = \Psi_{\pm\Phi}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\pm\Psi_\Phi(z_1,\cdots,z_{n+1}) &= \pm\Big(z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n) + \Phi(z_1,\cdots,z_n)\Big) \\
&= z_{n+1}\Big(\pm\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n)\Big) \pm (\Phi(z_1,\cdots,z_n)) \\
&= \pm\Psi_{\pm\Phi}
\end{aligned}$$

com $r(\pm\Phi) = r(\Phi) \geq 1$, como queríamos. $\square$

Nosso próximo e último resultado deste capítulo procura estudar o espaço projetivo real associado ao conjunto $\mathcal{J}_{n+1}$. Por isso, antes do enunciado estabeleceremos as definições e conceitos mais importantes que serão utilizados no enunciado e na verificação deste resultado.

$$\mathcal{J}^\circ_{n+1} = \{\Psi\in\mathcal{H}_{n+1} \ : \ \Psi(z_1,\cdots,z_{n+1})\neq 0 \ \ se \ \ |z_1|,\cdots,|z_n|\leq 1 \ \ e \ \ |z_{n+1}|<1\}.$$

Do visto nas anotações sobre conjuntos algébricos no Apêndice A deste texto, sabemos que $\Phi\in\mathcal{A}_n$, isto é,

$$\begin{aligned}
\Phi:\mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\
(z_1,\cdots,z_n) &\mapsto \Phi(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{X\subset[n]}E_X.z^X,
\end{aligned}$$

temos que o lugar dos zeros de Φ é o conjunto

$$Z(\Phi) = \{p\in\mathbb{C}^n \ : \ \Phi(p)=0\}\subset\mathcal{A}_n.$$

Se $T=\{\Phi_1,\cdots,\Phi_r\}$, escrevemos $Z(\Phi_1,\cdots,\Phi_r)$ em vez de $Z(\{\Phi_1,\cdots,\Phi_r\})$.

Para $T\subset\mathcal{A}_n$, $X\subset\mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico afim se

$$X = Z(T) = \{p\in\mathbb{C}^n \ : \ \Phi(p)=0 \ \ \forall \ \ \Phi\in T\}.$$

Sabemos que dado $\Psi_\Phi\in\mathcal{J}_{n+1}$, $\Psi_\Phi(z_1,\cdots,z_n)\neq 0$ sempre que $|z_j|\neq 1$. Assim, todo subconjunto da forma

$$X = \{(z_1,\cdots,z_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1} \ : \ |z_1|,\cdots,|z_n|\leq 1 \ \ e \ \ |z_{n+1}|<1\}$$

em $\mathbb{C}^n$ é um subconjunto aberto segundo a *Topologia de Zariski* vista no Apêndice A deste trabalho.

Ademais, vimos também que para cada polinômio multiafim Φ, dado $X \subset \mathbb{C}^n$, temos que a coleção dos conjuntos $X_\Phi = X \setminus Z(\Phi)$ é uma base de abertos da topologia de zariski em X. Portanto, dado o espaço real projetivo associado com $\mathcal{J}_{n+1}$, denotado por $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R}$, temos que seu interior é dado por

$$[\mathcal{J}^\circ_{n+1}]_\mathbb{R} = \{[\Psi_\Phi] \ : \ r([\Phi]) > 1\}.$$

Proposição 3.26. O conjunto $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R}$ é o fecho em $[\mathcal{H}_{n+1}]_\mathbb{R}$ de seu interior $[\mathcal{J}^\circ_{n+1}]_\mathbb{R}$. Simbolicamente,

$$[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R} = \overline{[\mathcal{J}^\circ_{n+1}]_\mathbb{R}} \subset [\mathcal{H}_{n+1}]_\mathbb{R}.$$

Demonstração. A classe $[\Psi_\Phi]$ é da forma $\{\Psi_{\tilde{\Phi}} \ : \ \tilde{\Phi} \in [\Phi]\}$. Assim a aplicação $[\Phi] \mapsto [\Psi_\Phi]$ é um homeomorfismo de $[\mathcal{A}_n]_\mathbb{R}$ em $[\mathcal{H}_{n+1}]_\mathbb{R}$.

O conjunto $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R} = \{[\Psi_\Phi] \ : \ r([\Phi]) \geq 1\}$ é homeomorfo ao conjunto $\{[\Phi] \ : \ r([\Phi]) \geq 1\}$ por causa do homeomorfismo $[\Phi] \mapsto [\Psi_\Phi]$ visto acima. Ademais, temos que o conjunto $\{[\Phi] : r([\Phi]) \geq 1\} \subset [\mathcal{A}_n]_\mathbb{R}$ é fechado, pois

$$r(\cdot) : [\mathcal{A}_n]_\mathbb{C} \quad \to \quad [0, \infty]$$

que leva $[\Phi]$ em $r([\Phi])$ é uma aplicação contínua, pela proposição 2.17, e, assim,

$$\{[\Phi] \ : \ r([\Phi]) \geq 1\} = r^{-1}([1, \infty])$$

em que $[1, \infty]$ é fechado em $\mathbb{R}$. Logo, $\{[\Phi] \ : \ r([\Phi]) \geq 1\}$ é compacto.

De forma similar, o conjunto $\{[\Psi_\Phi] \ : \ r([\Phi]) > 1\}$ é homeomorfo ao conjunto $\{[\Phi] \ : \ r([\Phi]) > 1\}$ que é aberto pela continuidade de $r(\cdot)$.

O mapa $\lambda \mapsto [\Phi \circ \lambda]$ é contínuo perto de $\lambda = 1$.

Assim, se $r([\Phi]) = 1$, temos que $r([\Phi \circ \lambda]) = |\lambda|^{-1}$ pelo visto na Proposição 2.21. Ademais, $|\lambda|^{-1}$ pode ser maior ou menor que 1 para $[\Phi \circ \lambda]$ próximo de $[\Phi]$.

Isso mostra que $\{[\Psi_\Phi] \ : \ r([\Phi]) > 1\}$ é o interior de $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R}$ e $[\mathcal{J}_{n+1}]_\mathbb{R}$ é o fecho de seu interior.

Resta mostrar que $\Psi_\Phi \in \mathcal{J}^\circ_{n+1}$ se, e somente se, $r(\Phi) > 1$. De fato,

$$\Psi_\Phi \in \mathcal{J}^\circ_{n+1} \Rightarrow r(\Phi) > 1, \text{ pois } \Phi(z_1, \cdots, z_n) = \Psi(z_1, \cdots, z_n, 0).$$

Inversamente, se $r(\Phi) > 1$ e $\Psi_\Phi(z_1, \cdots, z_n, z) = 0$ com $|z_1|, \cdots, |z_n| \leq 1$, devemos ter $z \neq 0$ e

$$z^{-1} = -\tfrac{\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)}$$

em que

$$\left| -\tfrac{\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)} \right| \leq \max_{|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_n| = 1} \left| \tfrac{\Phi^\dagger(z_1, \cdots, z_n)}{\Phi(z_1, \cdots, z_n)} \right| = 1.$$

Portanto $|z| \geq 1$, isto é, $\Psi_\Phi \in \mathcal{J}^\circ_{n+1}$. $\square$

Capítulo 4

Interpretação física

Neste capítulo final, nosso primeiro passo, será verificar e estudar uma aplicação física para o Teorema de Lee-Yang. Nesta aplicação utilizaremos os polinômios de Lee-Yang para descrever a função termodinâmica *Pressão* e apresentaremos, assim, uma primeira e clássica interpretação física para os polinômios em questão. Em seguida, utilizando os resultados do Capítulo 3, veremos as interpretações físicas que decorrem desses resultados.

Começaremos este capítulo estudando, na Seção 4.1, o Teorema de Lee-Yang e o modelo de Ising ferromagnético. Utilizando este resultado sobre os zeros dos polinômios de Lee-Yang, verificaremos a ausência de *transição de fase* no modelo de Ising ferromagnético. Vale dizer que, em geral, o termo "*transição de fase*"é usado quando ao variarmos algum parâmetro do sistema de interesse observamos uma mudança em seu comportamento. Sob o ponto de vista matemático, neste contexto, a *transição de fase* é usada para indicar a existência de mais de uma medida de Gibbs para o modelo de Ising ferromagnético. Na Seção 4.1, para estudarmos a ausência de *transição de fase* no modelo de Ising ferromagnético, estudaremos a analiticidade de uma função termodinâmica chamada pressão a qual é construída através de um mecanismo chamado *limite termodinâmico*. Iremos ligar a transição de fase à diferenciabilidade da Pressão do modelo e provar a analiticidade da Pressão para $h \neq 0$. Para tanto, usaremos o *Teorema de Lee-Yang.*

Concluiremos este texto estudando a interpretação física para os polinômios de Lee-Yang utilizando os resultados do capítulo 3. Considerando a classe de polinômios Lee-Yang LY_n e usando o conceito de raio interno, vimos no Teorema 3.6, para os polinômios $\Psi \in LY_{n+1}$, uma caracterização em termos de polinômios Φ em n variáveis tais que $\Phi(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ quando $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$. Na Seção 3.2 do capítulo anterior vimos que esta caracterização de polinômios de Lee-Yang permite-nos apresentar alguns novos exemplos. Na situação física onde Ψ são funções partição dependentes da temperatura, vê-se que aqueles que são polinômios de Lee-Yang em altas temperaturas, por conseguinte, a todas as temperaturas, são precisamente da forma considerada por Lee e Yang.

4.1 Teorema de Lee-Yang e o modelo de Ising

Iniciamos esta seção apresentando o teorema conhecido como *Teorema de Lee-Yang* que afirma que um polinômio de Lee-Yang Φ de grau n em uma variável complexa z tem todas suas raízes no círculo unitário $|z| = 1$. Na Subseção 4.1.1 apresentaremos a verificação para este teorema. Nosso interesse na apresentação deste resultado sobre localização de zeros reside no fato de eles serem utilizados neste texto para o estudo de *transição de fase* no modelo de Ising ferromagnético.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, desde o Capítulo 2 escrevemos que $[n] = \{1, \cdots, n\}$. Neste capítulo denotaremos por $\mathcal{P}([n])$ o conjunto das parte de $[n]$. Dados $S \subset [n]$ e uma coleção de números complexos $\{A_{ij}\}$ com $i \in S$ e $j \in [n] \setminus S$, definimos de maneira canônica o produtório $\prod_{i\in S} \prod_{j\in[n]\setminus S} A_{ij}$. Caso S ou $[n] \setminus S$ sejam vazios, convencionamos que esse produtório é igual a um. Se $S = \{i_1, \cdots, i_S\} \subset [n]$ é um subconjunto não vazio e $z_{i_1}, \cdots, z_{i_S} \in \mathbb{C}$, também como vinhamos usando, $z^S = z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_S}$. Para o caso $S = \emptyset$, colocamos $z^S = 1$. Assim, com essas notações, denotaremos um polinômio Multiafim por

$$\Phi(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^s \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij},$$

Estabelecidas essas notações, enunciemos o:

Teorema 4.1. (Teorema de Lee-Yang) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\{A_{ij}\}$ uma família de números complexos satisfazendo $|A_{ij}| \leq 1$ e $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ para todo $i, j \in [n]$. Seja $\mathcal{P}_n$ o seguinte polinômio

$$\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^s \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij}. \tag{4.2}$$

Se $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = 0$ e existe $m \in [n]$ tal que $|z_k| \leq 1$, para todo $k \in [n] \setminus \{m\}$, então $|z_m| \geq 1$.

Na Seção 4.1.1 apresentaremos uma prova para este Teorema 4.1 de Lee-Yang. Antes verificaremos o corolário que afirma que um polinômio de Lee-Yang $\mathcal{P}_n$ de grau n em uma variável complexa z tem todas suas raízes no círculo unitário $|z| = 1$.

Corolário 4.3. Se $\mathcal{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio em uma variável complexa tal que

$$p(z) = \mathcal{P}_n(z, \cdots, z)$$

para algum polinômio $\mathcal{P}_n$ da forma 4.2 satisfazendo às hipóteses do Teorema de Lee-Yang, então todos os zeros de $\mathcal{P}$ estão no círculo unitário.

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da definição de $\mathcal{P}_n$, equação 4.2, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(z^{-1}) &= \mathcal{P}_n(z_1^{-1}, \cdots, z_n^{-1}) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} (z^{-1})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} (z^{-1})^{[n]} \ (z)^{[n]} \ (z^{-1})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^{-n} \ z^n \ (z^{-1})^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij} \\
&= z^{-n} \sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^{[n] \setminus S} \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij}.
\end{aligned}$$

Mas note que somar sobre $S \in \mathcal{P}([n])$ é equivalente a somar sobre $S' = [n] \setminus S \in \mathcal{P}([n])$. Agora, como $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$, temos que

$$\mathcal{P}(z^{-1}) = z^{-n} \sum_{S' \in \mathcal{P}([n])} z^{S'} \prod_{j \in S'} \prod_{i \in S} \overline{A}_{ji} = z^{-n} \overline{\mathcal{P}_n(\overline{z}, \cdots, \overline{z})} = z^{-n} \overline{\mathcal{P}(\overline{z})}.$$

Se $|\overline{z}| \geq 1$ e $\mathcal{P}(\overline{z}) = 0$, então pelo Teorema de Lee-Yang temos que $|\overline{z}| \leq 1$. Logo $|\overline{z}| = 1$. Por outro lado, se $|\overline{z}| \leq 1$ e $\mathcal{P}(\overline{z}) = 0$, então $\mathcal{P}(z^{-1}) = z^{-n}\overline{\mathcal{P}(\overline{z})} = 0$. Pela definição de $\mathcal{P}$ temos que $\mathcal{P}(z^{-1}) = \mathcal{P}_n(z^{-1}, \cdots, z^{-1})$. Aplicando novamente o Teorema de Lee-Yang, concluímos $|z^{-1}| = 1$.

Como $|z^{-1}| = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, segue que $|\overline{z}| = 1$. Portanto, qualquer raiz da equação $\mathcal{P}(z) = 0$ satisfaz $|\overline{z}| = 1$. □

Visto o teorema de Lee-Yang e seu corolário, iniciemos o estudo da transição de fase no modelo de Ising. O faremos seguindo de perto as referências [BAJ99], [Lim], [Lim04], [Min00], [Sim14], [Rue99] e [RAS15].

Seja d um número natural e considere $\mathbb{Z}^d = \{(p_1, \cdots, p_d) : p_j \in \mathbb{Z} \ para \ todo \ j \in [d]\}$ como espaço métrico. A distância entre dois pontos p e q de $\mathbb{Z}^d$ é dada por

$$||p-q|| = \sum_{j=1}^{d} |p_j - q_j|.$$

Seja n um número inteiro e $\Lambda = [-n,n] \times \cdots \times [-n,n] \cap \mathbb{Z}^d$ um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^d$. Utilizaremos este subconjunto para representar a estrutura de átomos do nosso sistema magnético. Chamaremos Λ de rede e a posição de cada átomo na rede fica determinada pelo vetor $i = (i_1, \cdots, i_d)$, que chamaremos de sítio i. Ademais, denotaremos por $|\Lambda|$ o número de sítios em Λ. A cada sítio i da rede, associaremos uma variável aleatória σ_i que poderá assumir os valores mais ou menos um. Caracterizaremos uma interação entre *spins* dessa rede associando ao par $\sigma_i\sigma_j$ uma constante.

Definição 4.4. Diremos ser a fronteira externa de Λ, que denotaremos por $\partial\Lambda$, o conjunto dos pontos $i \notin \Lambda$ cuja distância a Λ é igual a 1.

Estabelecendo uma configuração de spins $\{\omega\} = \{\omega_i\}_{i\in\partial\Lambda}$ na fronteira $\partial\Lambda$, impomos o que chamaremos de condições de fronteira. Neste caso, os spins de $\{\omega\}$ interagem com os spins da rede. Um exemplo é dado quando impomos o que chamamos de condições de contorno positivas que são obtidas fixando-se $\omega_i = 1$ para todo $i \in \partial\Lambda$. Outro exemplo é dado pela imposição $\omega_i = -1$ para todo $i \in \partial\Lambda$, onde estabelecemos o que chamaremos de condições de contorno negativas.

Definição 4.5. Para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito definimos o espaço

$$\Omega_\Lambda = \{-1,1\}^\Lambda = \{(\sigma_i)_{i\in\Lambda} : \sigma_i \in \{-1,1\}\},$$

que chamaremos de espaço de configurações no volume Λ.

Definição 4.6. Sejam $i,j \in \Lambda$ tais que $||i-j|| = 1$. Definimos a função Hamiltoniano $H_\Lambda : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$, com condições de fronteira livres, do modelo de Ising de primeiros vizinhos no volume Λ como

$$H_\Lambda((\sigma_i)_{i\in\Lambda}) = -\sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) - \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1),$$

em que J e h são constantes reais.

Definição 4.7. Seja μ_Λ a seguinte medida de probabilidade definida sobre o conjunto das partes de Ω_Λ tal que cada configuração $(\sigma_i)_{i\in\Lambda}$ tem probabilidade

$$\mu_\Lambda(\{(\sigma_i)_{i\in\Lambda}\}) = \frac{\exp(-\beta H_\Lambda((\sigma_i)_{i\in\Lambda}))}{\mathcal{Z}_\Lambda(h)},$$

tal que $\mathcal{Z}_\Lambda(h)$ é uma constante de normalização escolhida de forma que μ_Λ seja uma medida de probabilidade. $\mathcal{Z}_\Lambda(h)$ é chamada de função partição ao inverso da temperatura T ($T^{-1} = \beta$) e pode ser expressa como

$$\mathcal{Z}_\Lambda(h) = \sum_{(\omega_i)_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda} \exp\left(-\beta H_\Lambda((\omega_i)_{i\in\Lambda})\right).$$

A rigor a função partição também depende do parâmetro J, mas omitimos essa dependência na notação porque estamos mais interessados na dependência dessa função apenas com respeito ao parâmetro h.

Definição 4.8. Uma sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ é chamada de absorvente se para todo subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \subset \Lambda_n$ para todo $n \geq n_0$.

Dizemos que uma sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$ converge para $\mathbb{Z}^d$, notação $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, se $\cup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n = \mathbb{Z}^d$. Note que toda sequência absorvente converge para $\mathbb{Z}^d$.

Sejam $\sigma, \mu \in \Omega_\Lambda$ duas configurações arbitrárias. Usaremos a notação de concatenação $\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c}$, onde $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$, para denotar a configuração $\eta \in \Omega_\Lambda$ definida por $\eta_i = \sigma_i$ se $i \in \Lambda$ e $\eta_i = \omega_i$ se $i \in \Lambda^c$.

Definição 4.9. Definimos a medida de Gibbs do modelo de Ising a volume finito Λ_n com condições de fronteira $\omega \in \Omega_\Lambda$ ao inverso da temperatura $\beta > 0$, como a medida de probabilidade $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} : \mathcal{P}(\Omega_\Lambda) \to [0,1]$ que associa a cada configuração $\sigma \in \Omega_\Lambda$ a seguinte probabilidade

$$\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}(\{\sigma\}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta H^{\omega}_{\Lambda_n}\left(\sigma_{\Lambda_n}\omega_{\Lambda_n^c}\right)}}{\mathcal{Z}^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}}, & se \quad \sigma_{\Lambda_n^c} = \omega_{\Lambda_n^c} \\ 0, & caso \quad contrário \end{cases},$$

em que o fator de normalização $\mathcal{Z}^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$ que é chamado de função de partição a volume Λ_n com condição de fronteira ω ao inverso da temperatura β é dado por

$$\mathcal{Z}^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} = \sum_{\eta \in \Omega_\Lambda:\ \eta_{\Lambda_n^c} = \omega_{\Lambda_n^c}} e^{-\beta H^{\omega}_{\Lambda_n}\left(\eta_{\Lambda_n}\omega_{\Lambda_n^c}\right)},$$

tal que

$$H^{\omega}_{\Lambda_n}((\sigma_i)_{i\in\Lambda_n}) = -\sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) - \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1) - \sum_{||i-j||=1,\ \ i\in\Lambda,\ j\in\partial\Lambda} J\sigma_i\omega_j.$$

Denotaremos por $\mu^{+}_{\Lambda_n,\beta}$ e $\mu^{-}_{\Lambda_n,\beta}$ as medidas de Gibbs a volume Λ_n com condições de fronteira positivas e negativas, respectivamente.

Definição 4.10. Fixado $\beta > 0$, definimos o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising ao inverso da temperatura β como o fecho da envoltória convexa em $\mathcal{M}_1(\Omega_\Lambda)$ do conjunto

$$G = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega_\Lambda) : \ \ \exists \ \ (\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \ absorvente, \ \ \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d \ \ e \ \ \omega_n \in \Omega_\Lambda \ \ tal \ \ que \ \ \mu^{\omega_n}_{\Lambda_n,\beta} \to \mu\}.$$

Dessa forma, o conjunto das medidas de Gibbs ao inverso da temperatura β é o conjunto das medidas de probabilidade em $\mathcal{M}_1(\Omega_\Lambda)$ que estão no fecho da envoltória convexa do conjunto de todos os limites fracos de medidas de Gibbs a volume finito com condições de fronteira arbitrárias. Denotaremos, aqui, tal conjunto por $\mathcal{G}_\beta(h)$.

Teorema 4.11. Os limites fracos

$$\mu^{+}_{\beta} = \lim_{\Lambda_n\uparrow\mathbb{Z}^d} \mu^{+}_{\Lambda_n,\beta} \text{ e } \mu^{-}_{\beta} = \lim_{\Lambda_n\uparrow\mathbb{Z}^d} \mu^{-}_{\Lambda_n,\beta}$$

existem no espaço de todas as medidas de probabilidade, $\mathcal{M}_1(\Omega_\Lambda)$, para todo $d \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $J > 0$ e $\beta > 0$.

Para um prova deste Teorema, veja [Geo11].

Teorema 4.12. Fixados $d \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $J > 0$ e $\beta > 0$, temos que

$$\mu^{-}_{\beta} \leq \mu \leq \mu^{+}_{\beta},$$

para toda medida de Gibbs μ.

Para um prova deste Teorema, veja [Geo11].

Agora estudaremos a possível mudança de $\mathcal{G}_\beta(h)$ quando variamos o parâmetro β. Ou seja, estudaremos a *Transição de fase*. Sob o ponto de vista matemático,

Definição 4.13. Diremos que o modelo de Ising ferromagnético apresenta transição de fase quando existe $\beta > 0$ tal que $|\mathcal{G}_\beta(h)| > 1$.

Definição 4.14. A função energia livre a volume finito e com condições de fronteira ω é dada por

$$f_\Lambda^\omega(h) = -\frac{1}{\beta}\frac{\ln \mathcal{Z}_{\Lambda,\beta}^\omega}{|\Lambda|}.$$

Definição 4.15. A pressão a volume finito e com condições de fronteira ω é dada por

$$P_\Lambda^\omega(h) = \frac{\ln \mathcal{Z}_{\Lambda,\beta}^\omega}{|\Lambda|}$$

O problema matemático associado com a transição de fase só se manifesta no limite termodinâmico, isto é, no limite em que o tamanho do sistema, $|\Lambda|$, tende a infinito. Mais adiante mostraremos que o limite termodinâmico para a Pressão do modelo de Ising com condições de contorno ω existe e é igual ao limite obtido com condições de contorno livres. Provaremos este resultado como uma consequência da primeira desigualdade de Griffiths (Teorema 4.18).

Definição 4.16. O valor esperado de uma função $\varphi(\{\sigma\})$ das configurações $\{\sigma\}$ a volume finito Λ e condições de contorno ω é definido por

$$\langle\varphi(\{\sigma\})\rangle_\Lambda^\omega = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda^\omega}\sum_\sigma \varphi(\{\sigma\})\exp(-\beta H_\Lambda^\omega),$$

em que usamos $\sum_\sigma$ para denotar $\sum_{\{\sigma_i\}_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda}$.

Na definição de valor esperado de uma função $\varphi(\{\sigma\})$, se $\varphi(\{\sigma\}) = \prod_{k=1}^n \sigma_{i_k}$ então o valor esperado $\langle\prod_{k=1}^n \sigma_{i_k}\rangle_\Lambda$ é denominado de *função correlação* dos n spins $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \cdots, \sigma_{i_n}$. Agora vamos provar que a *função correlação* dos n spins é não negativa se o modelo em estudo for ferromagnético. Trata-se da *Primeira desigualdade de Griffiths.*

Definição 4.17. Sejam Λ um subconjunto finito qualquer de $\mathbb{Z}^d$, $A \subset \Lambda$ e $n_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \in A$. Então definimos

$$\sigma^A = \prod_{i\in A}\sigma_i^{n_i}.$$

Teorema 4.18. (Primeira desigualdade de Griffiths) Considere o modelo de Ising ferromagnético d-dimensional. Então, para qualquer subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, temos que:

$$\left\langle\sigma^A\right\rangle_\Lambda \geq 0$$

para qualquer $A \subset \Lambda$ e para qualquer $\beta \geq 0$.

Demonstração. A seguir, apresentaremos a prova para condições de contorno livres.

Como a função partição é uma soma de parcelas positivas, isto é, como $\mathcal{Z}_\Lambda > 0$, basta mostrar que:

$$\textstyle\sum_\sigma \sigma^A \exp(-\beta H_\Lambda) \geq 0.$$

Para tanto, vamos concentrar nossa atenção no seguinte fator:

$$\exp(-\beta H_\Lambda) = \prod_{i\in\Lambda} e^{\beta h\sigma_i}\prod_{(ij)} e^{\beta J\sigma_i\sigma_j}.$$

Expandindo $e^{\beta J\sigma_i\sigma_j}$ em série de Taylor obtemos:

$$e^{\beta J\sigma_i\sigma_j} = 1 + \frac{(\beta J\sigma_i\sigma_j)}{1!} + \frac{(\beta J\sigma_i\sigma_j)^2}{2!} + \frac{(\beta J\sigma_i\sigma_j)^3}{3!} + \cdots.$$

Mas, como $\sigma_i = +1$ ou $\sigma_i = -1$ para todo $i \in \Lambda$, segue-se que:

$$(\beta J \sigma_i \sigma_j)^k = \begin{cases} (\beta J)^k, & se\ k\ \ for\ \ par \\ (\beta J)^k \sigma_i \sigma_j, & se\ \ k\ \ for\ \ \acute{\imath}mpar. \end{cases}.$$

Logo, agrupando os termos de expoentes pares separadamente dos de expoentes ímpares podemos deduzir que:

$$e^{\beta J \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta J)[1 + \tanh(\beta J)\sigma_i \sigma_j].$$

Logo,

$$\exp(-\beta H_\Lambda) = \left[\prod_{(ij)} \cosh(\beta J)[1 + \tanh(\beta J)\sigma_i \sigma_j]\right] \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i},$$

em que o produtório entre colchetes deve ser desenvolvido entre pares de primeiros vizinhos (ij). Deste modo obtemos que:

$$\sum_\sigma \sigma^A \exp(-\beta H_\Lambda) = \sum_\sigma \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i} \prod_{(ij)} \cosh(\beta J)[\sigma^A + \tanh(\beta J)\sigma_i \sigma_j \sigma^A].$$

Desenvolvendo inicialmente os produtórios da expressão acima obtemos uma soma $\sum_m c_m P_m$, na qual cada termo é constituído de um produto envolvendo variáveis de *spin*

$$P_m = \sigma_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots \sigma_{i_m}^{n_{i_m}} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i}$$

e de um prefator da forma c_m envolvendo produtos de funções hiperbólicas, ora $\cosh(\beta J)$, ora $\cosh(\beta J)\tanh(\beta J)$. Logo:

$$\sum_\sigma \sigma^A \exp(-\beta H_\Lambda) = \sum_\sigma \sum_m c_m P_m = \sum_m c_m \sum_\sigma P_m.$$

Observemos agora que cada $c_m \geq 0$, pois $\cosh(\beta J) > 0$ e $\tanh(\beta J) \geq 0$ para $J > 0$. Por outro lado, caso todos os expoentes n_i definidos em P_m sejam pares temos que $P_m = \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i}$ e por conseguinte a soma das configurações é positiva, pois

$$\sum_\sigma \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i} > 0.$$

Além disso, a ocorrência de pelo menos um expoente n_j ímpar em P_m nos fornece $P_m = \sigma_j^{n_j} \prod_{i \in \Lambda} e^{\beta h \sigma_i}$ e por conseguinte a soma das configurações é positiva, pois para h não negativo temos

$$\textstyle\sum_{\sigma_j = +1} \sigma_j e^{\beta h \sigma_j} = 2\sinh(\beta h) > 0.$$

Utilizando tais argumentos, podemos concluir que:

$$\textstyle\sum_\sigma \sigma^A e^{-\beta H_\Lambda} \geq 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 4.19. Sob as hipóteses do teorema anterior, $\mathcal{Z}_\Lambda(\beta, J, h)$ é uma função crescente com respeito a β, J e h.

Demonstração. Basta observar que a derivada parcial de $\mathcal{Z}_\Lambda$ com respeito a qualquer uma de suas variáveis será sempre um múltiplo positivo do valor esperado de um produto de variáveis de spin, este por sua vez também positivo pela primeira desigualdade de Griffiths (Teorema 4.18). $\square$

Agora, vejamos que o limite termodinâmico para a Pressão do modelo de Ising com condições de contorno ω existe.

Observação 4.20. Para uma sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos que $|\Lambda_n|$ tende a infinito quando n tende a infinito. Pois, neste caso, $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.

A sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $\Lambda_n = [-n,n]\times\cdots\times[-n,n]\cap\mathbb{Z}^d$, para cada $n\in\mathbb{N}$, é uma sequência crescente, absorvente e tal que $\lim_{n\to\infty}\frac{|\partial\Lambda_n|}{|\Lambda_n|}=0$. Diremos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, nossa rede $\Lambda_n = [-n,n]\times\cdots\times[-n,n]\cap\mathbb{Z}^d$ é um hipercubo em $\mathbb{Z}^d$.

Lema 4.21. Se $J>0$, $h\in\mathbb{R}$ e $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de hipercubos em $\mathbb{Z}^d$, então existe o seguinte limite

$$P(h) = \lim_{n\to\infty} P^{\omega}_{\Lambda_n}.$$

Demonstração. Se Λ é um subconjunto finito qualquer da rede $\mathbb{Z}^d$, então podemos escrever

$$\exp(-\beta H^{\omega}_{\Lambda}) = \left[\prod_{i\in\Lambda} e^{h\sigma_i} \prod_{j\in\Lambda:\ ||j-i||=1} e^{\beta J\sigma_i\sigma_j}\right] \prod_{(ij)\quad i\in\Lambda,\ j\in\Lambda^c} e^{\beta J\sigma_i\omega_j}.$$

Inicialmente, notemos que $\sigma_i\sigma_j \le 1$ para cada par de sítios da rede e que para interações ferromagnéticas uniformemente limitadas

$$\exp(\beta J\sigma_i\sigma_j) \le \exp(\beta J).$$

Observemos agora que, para cada sítio $i\in\Lambda$, existem, no máximo $2d$ (d a dimensão espacial da rede) sítios j com os quais o sítio fixado i interage. Logo, para cada sítio $i\in\Lambda$ fixado, o produtório envolvendo os sítios vizinhos j possui no máximo $2d$ fatores. Assim,

$$\textstyle\prod_{j:\ ||j-i||=1} e^{\beta J\sigma_i\sigma_j} \le \exp(\beta J)\cdots\exp(\beta J) = \exp(2d\beta J).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\exp(-\beta H^{\omega}_{\Lambda}) &\le \left[\prod_{i\in\Lambda} e^{h}\exp(2d\beta J)\right]\left[\prod_{(ij)\quad i\in\Lambda,\ j\in\Lambda^c} e^{\beta J}\right]\\ &\le [\exp(2d\beta J+h)]^{|\Lambda|}[\exp(\beta J)]^{\partial\Lambda}.\end{aligned}$$

Usamos esta última desigualdade para obter uma cota superior, exponencial na área superficial e no volume da rede Λ, para a função partição:

$$\mathcal{Z}_\Lambda \le [2\exp(2d\beta J+h)]^{|\Lambda|}[\exp(\beta J)]^{|\partial\Lambda|}.$$

Segue desta última desigualdade que

$$P^{\omega}_{\Lambda}(h) \le \ln(2d\beta J+h) + \ln(2) + \beta J\tfrac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|}.$$

Agora, considerando $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nossa sequência de hipercubos em $\mathbb{Z}^d$, vejamos que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$P_{\Lambda_n}(h) \leq P_{\Lambda_{n+1}}(h).$$

Vamos assumir que a dimensão espacial do modelo de Ising é $d = 2$. Isto facilitará a exposição, embora os mesmos argumentos sejam válidos para qualquer dimensão. Como

$$\Lambda_{n+1} \equiv [-(n+1), n+1] \times [-(n+1), n+1] \cap \mathbb{Z}^2,$$

podemos reescrevê-la como a união de quatro volumes disjuntos $\Lambda_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, que são translações rígidas de Λ_n:

$$\Lambda_{n+1} = \cup_{k=1}^{4} \Lambda_n^{(k)} \Rightarrow |\Lambda_{n+1}| = |\Lambda_n^{(1)}| + |\Lambda_n^{(2)}| + |\Lambda_n^{(3)}| + |\Lambda_n^{(4)}| = 4|\Lambda_n|.$$

Vamos agora redefinir o Hamiltoniano para a rede Λ_{n+1}, introduzindo um parâmetro a capaz de incorporar (ou ignorar) as interações entre os spins situados nas fronteiras das regiões $\Lambda_n^{(k)}$:

$$\widetilde{H}(a) = H_{\Lambda_n^{(1)}} + H_{\Lambda_n^{(2)}} + H_{\Lambda_n^{(3)}} + H_{\Lambda_n^{(4)}} - a \sum_{(ij)} J\sigma_i\sigma_j,$$

em que a última soma é realizada sobre pares de sítios vizinhos i, j localizados em volumes $\Lambda_n^{(k)}$ diferentes. Observe que atribuir o valor $a = 1$ ao parâmetro significa incorporar todas as interações entre os spins das fronteiras dos volumes elementares $\Lambda_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, de modo que $\widetilde{H}(1) = H_{\Lambda_{n+1}}$. Por outro lado, se tomarmos $a = 0$, então $\widetilde{H}(0) = H_{\Lambda_n^{(1)}} + H_{\Lambda_n^{(2)}} + H_{\Lambda_n^{(3)}} + H_{\Lambda_n^{(4)}}$. Em termos da função partição com parâmetro a, definida por

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(a) = \sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}} \exp[-\beta\widetilde{H}(a)],$$

dado que a notação $\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}$ foi utilizada para enfatizar que a soma deve ser realizada sobre todas as configurações da rede Λ_{n+1}, é possível deduzir que:

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(1) = \mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}} \text{ e } \widetilde{\mathcal{Z}}(0) = \mathcal{Z}_{\Lambda_n}^4,$$

pois:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{Z}}(0) &= \sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}} \exp[-\beta\widetilde{H}(0)] \\
&= \sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}} \exp[-\beta(H_{\Lambda_n^{(1)}} + H_{\Lambda_n^{(2)}} + H_{\Lambda_n^{(3)}} + H_{\Lambda_n^{(4)}})] \\
&= \prod_{i=1}^{4} \sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_n^{(i)}}} \exp(-\beta H_{\Lambda_n^{(i)}}) \\
&= \mathcal{Z}_{\Lambda_n}^4.
\end{aligned}$$

Considerando ainda a expressão paramétrica da função partição, podemos usar o teorema fundamental do cálculo para estabelecer que:

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(1) - \widetilde{\mathcal{Z}}(0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\widetilde{\mathcal{Z}}(a)da.$$

Logo,

$$\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}} = \mathcal{Z}_{\Lambda_n}^4 + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\widetilde{\mathcal{Z}}(a)da.$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\widetilde{\mathcal{Z}}(a) &= \sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}} \beta\left(\sum_{(ij)} J\sigma_i\sigma_j\right)\exp[-\beta\widetilde{H}(a)] \\ &= \sum_{(ij)}\beta J\sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}}\sigma_i\sigma_j\exp[-\beta\widetilde{H}(a)].\end{aligned}$$

Mas, para cada par (ij), temos:

$$J\sum_{\{\sigma\}_{\Lambda_{n+1}}}\sigma_i\sigma_j\exp[-\beta\widetilde{H}(a)] = J\left\langle\sigma_i\sigma_j\right\rangle_{\Lambda_{n+1}}\widetilde{\mathcal{Z}}(a),$$

que é não negativa, pois pela *primeira desigualdade de Griffiths,* sabemos que $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_{\Lambda_{n+1}} \geq 0$. Além disto, $J \geq 0$ para interações ferromagnéticas e $\widetilde{\mathcal{Z}}(a)$, pois $\widetilde{\mathcal{Z}}(a)$ é uma soma de parcelas positivas. Portanto, o integrando é uma soma de parcelas positivas e então

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\tilde{\mathcal{Z}}(a)da \geq 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}} \geq \mathcal{Z}_{\Lambda_n}^4.$$

Consequentemente,

$$\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}}) \geq 4\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_n}).$$

Considerando agora $P_{\Lambda_{n+1}}$:

$$\frac{\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}})}{|\Lambda_{n+1}|} = \frac{\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}})}{4|\Lambda_n|} \Rightarrow \frac{\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}})}{|\Lambda_{n+1}|} \geq \frac{\ln(\mathcal{Z}_{\Lambda_{n+1}})}{|\Lambda_n|} \Rightarrow P_{\Lambda_{n+1}} \geq P_{\Lambda_n}.$$

Ou seja, $\{P_{\Lambda_n}\}$ é uma sequência monótona crescente com respeito a Λ_n. Ademais, vimos que

$$P_\Lambda^\omega(h) \leq \ln(2d\beta J + h) + \ln(2) + \beta J\frac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|}.$$

E como $\lim_{n\to\infty}\frac{|\partial\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0$, então $\{P_{\Lambda_n}\}$ é uniformemente limitada em n. Portanto $\{P_{\Lambda_n}\}$ é uma sequência convergente, como queríamos. □

Lema 4.22. A *Pressão* $P(h)$ não depende da condição de fronteira ω.

Demonstração. Fixemos inicialmente um volume $\Lambda_n \equiv \Lambda$. O Hamiltoniano do sistema de spins com condição de fronteira arbitrária ω pode ser escrito como

$$H_\Lambda^\omega = H_\Lambda - \sum_{i\in\Lambda,\ j\in\partial\Lambda} J\sigma_i\omega_j.$$

Nesse contexto, a função partição é dada por

$$\mathcal{Z}_\Lambda^\omega = \sum_{\{\sigma\}}\exp(-\beta H_\Lambda)\exp\left(\beta\sum_{i\in\Lambda,\ j\in\partial\Lambda} J\sigma_i\omega_j\right).$$

Para relacionar a expressão acima com a função partição $\mathcal{Z}_\Lambda$ associada ao sistema com contorno livre vamos nos concentrar no seguinte fator: $\exp(\beta\sum J\sigma_i\omega_j)$. Inicialmente, observemos que

$$-J|\partial\Lambda| \leq \textstyle\sum_{i\in\Lambda,\ j\in\partial\Lambda} J\sigma_i\omega_j \leq J|\partial\Lambda|,$$

pois $\sigma = 1, -1$ e $\omega = 1, -1$. Ademais, como $\beta \geq 0$, temos

$$\exp(-\beta J|\partial\Lambda|) \leq \exp\left(\beta \sum_{i\in\Lambda,\ j\in\partial\Lambda} J\sigma_i\omega_j\right) \leq \exp(\beta J|\partial\Lambda|).$$

Logo,

$$\exp(-\beta J|\partial\Lambda|)\mathcal{Z}_\Lambda \leq \mathcal{Z}_\Lambda^\omega \leq \exp(\beta J|\partial\Lambda|)\mathcal{Z}_\Lambda.$$

Tomando o logaritmo da expressão anterior e depois dividindo por $|\Lambda|$ temos

$$-\beta J\frac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|} + P_\Lambda \leq P_\Lambda^\omega \leq \beta J\frac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|} + P_\Lambda,$$

ou seja,

$$|P_\Lambda^\omega - P_\Lambda| \leq \beta J\frac{|\partial\Lambda|}{|\Lambda|}.$$

Mas, como $\lim_{n\to\infty}\frac{|\partial\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0$ quando $n \to \infty$, para uma sequência $\{\Lambda_n\}$ de hipercubos, então

$$\lim_{n\to\infty}|P_{\Lambda_n}^\omega - P_{\Lambda_n}| = 0$$

para qualquer condição de contorno ω. Portanto o limite independe das condições de contorno. □

A grandeza $P(h)$ é dita a Pressão do modelo e será alvo de nosso estudo. Iremos ligar a transição de fase em h à diferenciabilidade da Pressão em h. Veremos que os possíveis valores de h para o qual o modelo de Ising ferromagnético ($J > 0$) passa por uma transição de fase são aqueles onde a função $P(h)$ não é diferenciável. Interessante adiantar que, cumprindo o objetivo deste trabalho, veremos que $P(h)$ é analítica se $h \neq 0$. Ou seja, o modelo em questão não apresenta transição de fase para $h \neq 0$. Mas primeiro vejamos a derivada da pressão a volume finito e com condições de fronteira positiva e negativa.

As funções Pressão a volume finito Λ_n com condições de fronteira positiva e negativa, respectivamente, são dadas por

$$P_{\Lambda_n}^+(h) = \frac{\ln \mathcal{Z}_{\Lambda_n,\beta}^+}{|\Lambda_n|} \text{ e } P_{\Lambda_n}^-(h) = \frac{\ln \mathcal{Z}_{\Lambda_n,\beta}^-}{|\Lambda_n|}.$$

Lema 4.23. As derivadas das funções *Pressão* a volume finito Λ_n com condições de fronteira positiva e negativa, respectivamente, são dadas por

$$\frac{\partial P_{\Lambda_n}^+(h)}{\partial h} = \beta\mu_{\Lambda_n,\beta}^+\left(\frac{\sum_{i\in\Lambda_n}\sigma_i}{|\Lambda_n|}\right) \text{ e } \frac{\partial P_{\Lambda_n}^-(h)}{\partial h} = \beta\mu_{\Lambda_n,\beta}^-\left(\frac{\sum_{i\in\Lambda_n}\sigma_i}{|\Lambda_n|}\right).$$

Para uma prova deste lema, veja [Min00].

Lema 4.24. Para a condição de fronteira positiva,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial P_{\Lambda_n}^+(h)}{\partial h} = \beta\mu_\beta^{+,h}(\sigma_0) = \beta\left\langle\sigma_0\right\rangle_\beta^{+,h},$$

em que $\mu_\beta^{+,h} = \mu_\beta^+$. Analogamente para a condição de fronteira negativa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial P_{\Lambda_n}^-(h)}{\partial h} = \beta\left\langle\sigma_0\right\rangle_\beta^{-,h}.$$

Para uma prova deste lema, veja [Min00].

Definição 4.25. (Conjunto Convexo) Um subconjunto C de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é convexo se, para todo $v, w \in C$ e para todo $t \in [0,1]$ temos $tv + (1-t)w \in C$. Em outras palavras, todos os pontos no segmento de reta unindo v a w estão em C.

Definição 4.26. (Função Convexa) Seja C um conjunto convexo. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa se para todo $v, w \in C$ e $t \in [0,1]$ temos $f(tv + (1-t)w) \leq tf(v) + (1-t)f(w)$.

Lema 4.27. Seja f_n uma sequência de funções convexas num intervalo (a,b). Suponha que $f_n(y) \to f(y)$ para todo $y \in (a,b)$ e que $f'_n(x)$ e $f'(x)$ existem para algum $x \in (a,b)$. Então, $f'_n(x) \to f'(x)$.

Demonstração. Por hipótese, f_n é uma sequência de funções contínuas em (a,b), pois uma função convexa é sempre contínua. Ademais, existem os limites

$$\lim_{y\to x} \tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} \equiv f'_n(x) \text{ e } \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \equiv f'(x)$$

e $f_n(y) \to f(y)$ para todo $y \in (a,b)$. Logo, quando $n \to \infty$,

$$|f'_n(x) - f'(x)| = \left| \lim_{y\to x} \tfrac{f_n(y)-f_n(x)-f(y)+f(x)}{y-x} \right| \to 0.$$

□

Lema 4.28. Para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $P^+_{\Lambda_n}(h)$ e $P^-_{\Lambda_n}(h)$ são convexas.

Para uma prova deste lema consulte [Rue99].

Teorema 4.29. Considere o modelo de Ising em dimensão $d \geq 1$ e fixe $\beta > 0$ e $J > 0$. Se a Pressão a volume infinito $P(h)$ é diferenciável com respeito a h em $h = h_0$, então existe apenas uma medida de Gibbs para o modelo em questão.

Demonstração. Pelos Lemas 4.21, 4.23 e 4.28, $P^+_{\Lambda_n}$ é uma sequência de funções convexas diferenciáveis de h que converge pontualmente para $P(h)$. Pelo Lema 4.27, se $P'(h_0)$ existe, então $(P^+_{\Lambda_n})'(h_0) \to P'(h_0)$. Pelo Lema 4.24,

$$P'(h_0) = \beta\mu^{+,h_0}_\beta(\sigma_0) = \beta \left\langle \sigma_0 \right\rangle^{+,h_0}_\beta .$$

O mesmo argumento implica que

$$P'(h_0) = \beta\mu^{-,h_0}_\beta(\sigma_0) = \beta \left\langle \sigma_0 \right\rangle^{-,h_0}_\beta .$$

Assim, $\mu^{+,h_0}_\beta(\sigma_0 = 1) = \mu^{-,h_0}_\beta(\sigma_0 = 1)$.

Logo, $\mu^{+,h_0}_\beta = \mu^{-,h_0}_\beta$. Pelo Teorema 4.12, temos que existe apenas uma medida de Gibbs. □

Para mostrarmos a ausência de transição de fase em algum $h = h_0$ no modelo de Ising ferromagnético basta mostramos que a Pressão é diferenciável em $h = h_0$, o que faremos com o auxílio do Teorema de Lee-Yang. Para tanto, associaremos à função Partição um polinômio de Lee-Yang. Como a Pressão $P(h)$ não depende da condição de fronteira ω, consideraremos, a partir de agora, condição de fronteira livre.

Dada uma configuração de spins $(\sigma_i)_{i\in\Lambda}$, seja

$$S = \{i \in \Lambda : \sigma_i = -1\}.$$

Esta associação define uma bijeção entre os conjuntos Ω_Λ e $\{S : S \subset \Lambda\} = \mathcal{P}(\Lambda)$. Para representar a função partição como um polinômio de Lee-Yang em uma variável complexa fazemos $z = \exp(-2\beta h)$ e para cada $i, j \in \Lambda$ e fixado $S = S((\sigma_i)_{i\in\Lambda})$ definimos

$$A_{ij} = \begin{cases} \exp(-2\beta J), & se\ i \in S,\ j \in (\Lambda \setminus S)\ \ e\ \ ||i-j|| = 1; \\ 1, & caso\ \ contrário. \end{cases}.$$

Usando agora a definição de função partição temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_\Lambda(h) &= \sum_{(\sigma_i)_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{(ij)} J(\sigma_i\sigma_j - 1) + \beta \sum_{i\in\Lambda} h(\sigma_i - 1)\right) \\
&= \sum_{(\sigma_i)_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{(ij),\ i\in S\subset\Lambda,\ j\in\Lambda\setminus S} J(\sigma_i\sigma_j - 1) + \beta \sum_{i\in S\subset\Lambda} h(\sigma_i - 1)\right) \\
&= \sum_{(\sigma_i)_{i\in\Lambda}\in\Omega_\Lambda} \left(\prod_{(ij),\ i\in S\subset\Lambda,\ j\in\Lambda\setminus S} e^{-2\beta J} \prod_{i\in S\subset\Lambda} e^{-2\beta h}\right) \\
&= \sum_{S\subset\Lambda} z^{|\Lambda|} \left(\prod_{i\in S} \prod_{j\in\Lambda\setminus S} A_{ij}\right) \qquad (z = \exp(-2\beta h)) \\
&= \mathcal{P}_{|\Lambda|}(z, \cdots, z).
\end{aligned}$$

A seguir, veremos um corolário do Teorema de Lee-Yang.

Corolário 4.30. $\mathcal{Z}_\Lambda(h) \neq 0$ para $Re(h) \neq 0$.

Demonstração. Seja $|\Lambda| = n$. Então $\mathcal{Z}_\Lambda = \mathcal{P}_n(z, \cdots, z) \equiv \mathcal{P}(z)$. Logo, $\mathcal{Z}_\Lambda = 0$ se, e somente se, $\mathcal{P} = 0$.

Na prova do Corolário 4.3 vimos que $\mathcal{P}(z^{-1}) = z^{-n}\mathcal{P}(z)$. Portanto, se $\mathcal{P}(z) = 0$, então $\mathcal{P}(z^{-1}) = 0$. Suponha que $\mathcal{P}(z) = 0$, então temos as seguintes possibilidades: $|z| \geq 1$ ou $|z^{-1}| \geq 1$. Se $|z| \geq 1$, pelo Teorema de Lee-Yang, devemos ter $|z| \leq 1$ e, portanto, $|z| = 1$. Se $|z^{-1}| \geq 1$, pelo Teorema de Lee-Yang, devemos ter $|z^{-1}| \leq 1$ e, portanto, $|z| = 1$.

Logo, $\mathcal{P}(z) = 0$ implica que $|z| = |e^{-2\beta h}| = 1$, ou seja, $Re(h) \neq 0$, como queríamos. □

Antes de apresentarmos uma prova da ausência de transição de fase no modelo de Ising Ferromagnético para $h \neq 0$ através da analiticidade da pressão livre para $h \neq 0$, precisamos enunciar alguns resultados de análise complexa.

Teorema 4.31. (Teorema de Vitali) Seja $g_n(z)$ uma sequência de funções analíticas numa região $\mathcal{D}$ tal que

$$|g_n(z)| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $z \in \mathcal{D}$. Suponha que $g_n(z)$ tende a um limite, quando $n \to \infty$, num conjunto com ponto de acumulação dentro de $\mathcal{D}$. Então $g_n(z)$ tende uniformemente a um limite em qualquer região limitada por um contorno no interior de $\mathcal{D}$, o limite sendo, portanto uma função analítica de z.

Para uma prova deste Teorema, veja [Net93].

Teorema 4.32. (Teorema de Hurwitz) Seja $g_n(z)$ uma sequência de funções analíticas numa região $\mathcal{D}$ limitada por uma curva fechada simples e $g_n(z) \to g(z)$ uniformemente em $\mathcal{D}$. Suponha que $g(z)$ não é identicamente nula. Seja z_0 um ponto no interior de $\mathcal{D}$. Então, z_0 é um zero de $g(z)$ se, e somente se, é um ponto de acumulação do conjunto de zeros das funções $g_n(z)$, pontos que são zeros de uma infinidade de valores de n sendo contados como pontos de acumulação.

Para uma prova deste Teorema, veja [Net93].

Agora estamos preparados para compreender a prova do seguinte resultado acerca da analiticidade da *pressão* do modelo.

Proposição 4.33. A *pressão* $P(h)$ existe e é analítica em h pra $Re(h) \neq 0$.

Demonstração. Considere a seguinte função

$$g_\Lambda(h) = \mathcal{Z}_\Lambda(h)^{\frac{1}{|\Lambda|}} = e^{P_\Lambda(h)},$$

então

$$g_\Lambda(h) \leq 2e^{2\beta|h|}.$$

Seja $\mathcal{D}$ uma região limitada e simplesmente conexa, no plano complexo h, com um segmento do eixo real e positivo de h em seu interior. Pelo Lema 4.21, $\lim_{|\Lambda|\to\infty} g_\Lambda$ existe neste segmento, o qual será denotado por g. Ademais, como $g_\Lambda(h) \leq 2e^{2\beta|h|}$, existe uma constante $E(\mathcal{D}, \beta)$ tal que $g_\Lambda(h) \leq E(\mathcal{D}, \beta)$ para todo $h \in \mathcal{D}$ e Λ e pelo Corolário 4.30, para cada Λ na sequência $\{\mathcal{Z}_\Lambda\}$ nenhum zero de $\mathcal{Z}_\Lambda$, portanto de g_Λ, ocorre em $\mathcal{D}$. Então g pode ser extendida a uma função analítica $g(h)$ em $\mathcal{D}$ e, em particular, analítica no segmento do eixo real h dentro de $\mathcal{D}$. Em qualquer região limitada $\mathcal{D}'$ em $\mathcal{D}$ a sequência $\{g_\Lambda(h)\}$, definida por continuação analítica através do eixo real positivo em $\mathcal{D}$, converge uniformemente para $g(h)$.

De fato, pelo Teorema de Vitali, Teorema 4.31, a sequência de funções analíticas g_Λ definidas por $g_\Lambda(h) \leq 2e^{2\beta|h|}$ a qual é limitada em $\mathcal{D}$ e converge numa porção do eixo h real dentro de $\mathcal{D}$, converge para uma função analítica no interior de $\mathcal{D}$ e converge uniformemente em $\mathcal{D}'$ (que podemos assumir simplesmente conexo). Pelo Teorema de Hurwitz, Teorema 4.32, o limite, g, não tem zeros no interior de $\mathcal{D}$ (ela não pode ser zero em toda parte, visto que g_Λ nunca é menor que 1 para h real). Consequentemente, seu logarítmo $P(h)$, é analítico no interior de $\mathcal{D}$ e limitado em $\mathcal{D}'$. A convergência uniforme de e^{P_Λ} em $\mathcal{D}'$ garante que P_Λ também converge uniformemente. □

4.1.1 Prova do Teorema de Lee-Yang

Nessa subseção seguiremos de perto a referência [CCF14] : *Polinômios de Lee-Yang com Coeficientes Complexos* publicado na revista *Matemática Universitária-SBM* em 2014.

A prova que apresentaremos será feita em duas partes onde os coeficientes que aparecem nos polinômios do Teorema de Lee-Yang dependem de uma família $\{A_{ij}\}_{i\neq j}$ de números complexos tais que $|A_{ij}| \leq 1$ e $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Na primeira parte, supomos que $0 < |A_{ij}| < 1$ e, usando uma indução no grau dos polinômios, mostramos que o teorema é verdadeiro. Para esta indução utilizamos várias propriedades das aplicações de Möbius que detalhamos no 1, *Material preliminar*, deste trabalho. Na segunda parte da demonstração supomos que $|A_{ij}| \leq 1$ e, neste caso, a prova do teorema é baseada na dependência contínua das raízes de polinômios em uma variável complexa com respeito a seus coeficientes.

Sem perda de generalidade, podemos supor $m = n$, pois a prova é análoga para os casos com $m \neq n$. Suponha que $A_{ij} \in (0, 1)$. Para $n = 0$, temos que $\mathcal{P}_0 \equiv 1$ por convenção. Para $n = 1$, $\mathcal{P}([1]) = \{\{1\}, \emptyset\}$ e, assim,

$$\mathcal{P}_1(z_1) = \sum_{S\subset\mathcal{P}([1])} z^S \prod_{i\in S} \prod_{j\in[1]\setminus S} A_{ij} = 1 + z_1.$$

Assim, para $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{P}_1(z_1) = 0$, temos que $z_1 = -1$ e, portanto, $|z_1| = 1$.
Para $n = 2$, $\mathcal{P}([2]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ e, assim,

$$\mathcal{P}_2(z_1, z_2) = \sum_{S \subset \mathcal{P}([2])} z^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in [2] \setminus S} A_{ij} = 1 + A_{12} z_1 + A_{21} z_2 + z_1 z_2$$

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\mathcal{P}_2(z_1, z_2) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 1 + A_{12} z_1 + A_{21} z_2 + z_1 z_2 &= 0 \\ &\Rightarrow A_{12} z_1 + z_1 z_2 = -1 - A_{21} z_2 \\ &\Rightarrow z_1 = \frac{-1 - A_{21} z_2}{A_{12} + z_2} = \frac{-1 - \overline{A}_{12} z_2}{A_{12} + z_2} \\ &\Rightarrow z_1 = -\frac{A + C z_2}{B + D z_2} \equiv T(z_2). \end{aligned}$$

Como $AD - BC = 1 - A_{12}\overline{A}_{12} = 1 - |A_{12}|^2$ e $|A_{12}| < 1$, segue que $AD - BC \neq 0$ e portanto $T(z_2)$ é uma transformação de Möbius. Vejamos a seguinte

Proposição 4.34. Se $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ é uma transformação de Möbius da forma $T(z) = K.\frac{1+az}{\overline{a}+z}$, onde $|K| = 1$, então $T(S^1) = S^1$. Ademais, Se $|a| < 1$, então $T(B(0,1)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Demonstração. Seja $z = e^{i\theta} \in S^1$. Então

$$T(e^{i\theta}) = \left|\tfrac{1+ae^{i\theta}}{\overline{a}+e^{i\theta}}\right| = \left|\tfrac{1+ae^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}\overline{a}+1)}\right| = \tfrac{|1+ae^{i\theta}|}{|(\overline{e^{i\theta}\overline{a}+1})|} = 1.$$

Ou seja, $T(S^1) = S^1$. Agora, se $|a| < 1$, então $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$. Assim, $|T(0)| = \left|\frac{1}{a}\right| > 1$. Ademais, T é contínua. Logo, pelo Teorema da Alfândega, segue que $T(B(0,1)) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Por outro lado, como T é uma bijeção, então $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \subset T(B(0,1))$. Caso contrário, existiria $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $z \notin T(B(0,1))$. Logo $z \in T(\overline{B(0,1)}^C)$. Absurdo. $\square$

Pela proposição acima, dado $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_2| \geq 1$ e $\mathcal{P}_2(z_1, z_2) = 0$, tem-se que

$$|z_1| = |T(z_2)| \leq 1.$$

Agora, para $n = 3$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3) &= 1 + A_{12}A_{13} z_1 + A_{21}A_{23} z_2 + A_{31}A_{32} z_3 + A_{13}A_{23} z_1 z_2 \\ &\quad + A_{12}A_{32} z_1 z_3 + A_{21}A_{31} z_2 z_3 + z_1 z_2 z_3. \end{aligned}$$

Assim, dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + A_{21}A_{23} z_2) + z_3(A_{31}A_{32} + A_{21}A_{31} z_2) + z_1(A_{12}A_{13} + A_{13}A_{23} z_2) \\ &\quad + z_1 z_3 (A_{12}A_{32} + z_2) \\ &\equiv A + z_3 B + z_1 C + z_1 z_3 D \\ &\Rightarrow z_1 = -\frac{A + B z_3}{C + D z_3} \equiv T(z_3), \end{aligned}$$

em que $A = 1 + A_{21}A_{23} z_2$, $B = A_{31}A_{32} + A_{21}A_{31} z_2$, $C = A_{12}A_{13} + A_{13}A_{23} z_2$ e $D = A_{12}A_{32} + z_2$. Ou seja, obtemos uma aplicação linear fracionária definida em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{C}{D}\right\}$ e que denotaremos por T. A seguir, alguns fatos sobre os coeficientes de T.

Fato 4.35. Na aplicação T definida acima, para $|z_2| \geq 1$, temos que $D \neq 0$.

Demonstração. $D = A_{12}A_{32} + z_2 \Rightarrow D = A_{12}A_{32}(1 + A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}z_2)$. Definindo $\varepsilon_1 = A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}z_2$, temos que $D = A_{12}A_{32}(1+\varepsilon_1)$. Da definição de $\mathcal{P}_1(z_1)$, segue que $D = A_{12}A_{32}\mathcal{P}_1(\varepsilon_1)$. Como $|A_{12}|, |A_{32}| < 1$, então $|A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}| > 1$ e, assim, $|\varepsilon_1| = |A_{12}^{-1}A_{32}^{-1}||z_2| > |z_2| \geq 1 \Rightarrow |\varepsilon_1| > 1$. Logo, $\mathcal{P}_1(\varepsilon_1) \neq 0$, pois

$$\mathcal{P}_1(\varepsilon_1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \varepsilon_1 = 0 \Leftrightarrow |\varepsilon_1| = 1.$$

Como $A_{12}A_{32} \neq 0$, concluímos que $D \neq 0$. $\square$

Fato 4.36. Na aplicação T definida acima, para $|z_2| \geq 1$, temos que $\left|-\frac{C}{D}\right| < 1$ e $\left|-\frac{B}{D}\right| < 1$.

Demonstração. Considere a aplicação $z \mapsto C + Dz$. Pela definição de T vemos que

$$\begin{aligned} C + Dz &= A_{12}A_{13} + A_{13}A_{23}z_2 + (A_{12}A_{32} + z_2)z \\ &= A_{12}A_{13}(1 + z_2A_{12}^{-1}A_{23} + zA_{13}^{-1}A_{32} + z_2A_{12}^{-1}zA_{13}^{-1}). \end{aligned}$$

Definindo $\varepsilon_1 = zA_{13}^{-1}$ e $\varepsilon_2 = z_2A_{12}^{-1}$, pela definição de $\mathcal{P}_2(z_1, z_2)$, temos que $C+Dz = A_{12}A_{13}\mathcal{P}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. E fazendo $z = -\frac{C}{D}$, segue que $0 = A_{12}A_{13}\mathcal{P}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, donde $\mathcal{P}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. Como $|A_{12}| < 1$ e $|z_2| \geq 1$, então $1 \leq |z_2| < |A_{12}^{-1}||z_2| = |\varepsilon_2|$. Logo, pelo Teorema de Lee-Yang para o caso $n = 2$, concluímos que $|\varepsilon_1| \leq 1$. Portanto, $\left|-\frac{C}{D}\right| = |z| < |\varepsilon_1| \leq 1$. Para provar que $\left|-\frac{B}{D}\right| < 1$, basta considerar a aplicação $z \mapsto B + Dz$ e seguir com processo análogo ao da prova acima. $\square$

Fato 4.37. A aplicação linear fracionária T é uma aplicação de Möbius.

Demonstração. Se T é uma aplicação linear fracionária que não é Möbius, então ela é constante. Logo, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = -\frac{A+Bz_3}{C+Dz_3} \Rightarrow -\lambda D = B$. Logo $|z_1| = |\lambda| = \left|\frac{B}{D}\right| < 1$. Absurdo. $\square$

Feitas as considerações acima sobre a transformação T construída a partir de um zero de $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3)$, continuemos a prova para o caso $n = 3$. Suponha, por absurdo, que o Teorema de Lee-Yang não seja válido para $n = 3$ e, assim, considere $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha \in \mathbb{C}^3$ um zero de $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3)$ tal que $|\alpha_1| \geq 1$, $|\alpha_2| \geq 1$ e $|\alpha_3| > 1$. Para concluir a prova, (1) construiremos a partir de α, cuja existência provém da hipótese de absurdo, um outro zero de $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta \in \mathbb{C}^3$, tal que $|\beta_1| = 1$. Em seguida, (2) construiremos uma transformação de Möbius $\widetilde{T}$ de modo análogo à construção de T e, por fim, (3) aplicaremos a proposição enunciada na prova do caso $n = 2$, Proposição 4.34, para a aplicação $\widetilde{T}$ e teremos, assim, um absurdo.

1. Construção de β a partir de α tal que $\mathcal{P}_3(\beta) = 0$ e $|\beta_1| = 1$:

   Considere $|\alpha_1| > 1$, pois caso $|\alpha_1| = 1$, bastaria fazer $\alpha_1 = \beta_1$. Fixando α_2 e procedendo analogamente à construção de T obtemos uma transformação linear fracionária da forma $T(z_3)$ com A, B, C e D funções de α_2 no lugar de z_2. Como não há perigo de confusão, denotemos também esta aplicação por T. Afirmamos que T é uma aplicação de Möbius. De fato, se T é uma aplicação linear fracionária que não é Möbius, então ela é constante. Logo, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = -\frac{A+Bz_3}{C+Dz_3} \Rightarrow -\lambda D = B$. Logo $|\alpha_1| = |\lambda| = \left|\frac{B}{D}\right| < 1$. Absurdo. Seja Γ uma reta arbitrária que passe por α_3 e não intercepte o círculo unitário. Note que $-\frac{C}{D} \notin \Gamma$. Assim, $T(\Gamma)$ é uma circunferência em $\mathbb{C}$, pois T é uma bijeção, $T\left(-\frac{C}{D}\right) = \infty$ e transformações de Möbius preservam círculos em $\mathbb{C}_\infty$. Ademais,

   - $\alpha_1 \in T(\Gamma)$, pois $\alpha_3 \in \Gamma$ e $\alpha_1 = T(\alpha_3)$;
   - $-\frac{B}{D} \in T(\Gamma)$, pois $\infty \in \Gamma$ e $-\frac{B}{D} = T(\infty)$.

E como $|\alpha_1| > 1$ e $\left|-\frac{C}{D}\right| < 1$, segue que $T(\Gamma)$ é uma circunferência que intercepta o círculo unitário em dois pontos distintos. Defina

- β_1 como um desses pontos de interseção;
- $\beta_3 = T^{-1}(\beta_1)$;
- $\beta_2 = \alpha_2$.

Temos, assim, o ponto β como queríamos. Lembre que $|\beta_1| = 1$ e $|\beta_2| = |\alpha_2| \geq 1$.

2. Construção da transformação de Möbius $\widetilde{T}$ que se encaixa nas hipóteses da Proposição 4.34: Da definição de $\mathcal{P}_3(z_1, z_2, z_3)$, fixado β_1 obtido anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_3(\beta) &= (1 + A_{12}A_{13}\beta_1) + \beta_2(A_{21}A_{23} + A_{13}A_{23}\beta_1) \\ &\quad +\beta_3(A_{31}A_{32} + A_{12}A_{32}\beta_1) + \beta_2\beta_3(A_{21}A_{31} + \beta_1) \\ &\equiv \widetilde{A} + \beta_2\widetilde{B} + \beta_3\widetilde{C} + \beta_2\beta_3\widetilde{D}.\end{aligned}$$

Note que os coeficientes $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ e $\widetilde{D}$ são ligeiramente diferentes dos coeficientes A, B, C e D, os quais foram obtidos para expressar z_1 em função de z_3. A intenção agora é expressar β_2 como função de β_3. Análogo ao feito anteriormente, podemos mostrar que $|\beta_1| = 1$ implica $\left|-\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right| < 1$. Note que $\mathcal{P}_3(\beta) = 0$ por construção e $\beta_3 \neq -\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}$. Logo, podemos expressar β_2 como imagem de β_3 pela seguinte transformação de Möbius:

$$\beta_2 \equiv \widetilde{T}(\beta_3) = -\frac{\widetilde{A}+\widetilde{C}\beta_3}{\widetilde{B}+\widetilde{D}\beta_3}$$

que está bem definida, pois $\beta_3 \neq -\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}$. Vejamos agora alguma relações entre os coeficientes $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ e $\widetilde{D}$:

Fato 4.38. Sejam $\widetilde{A}$ e $\widetilde{D}$ definidos na equação 4.38. Então $\widetilde{A} = \beta_1\overline{\widetilde{D}}$.

Demonstração. Como $|\beta_1| = 1$, então $\overline{\beta}_1 = \beta_1^{-1}$. E como $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$, segue que

$$\widetilde{A} = 1 + A_{12}A_{13}\beta_1 = \beta_1(\beta_1^{-1} + \overline{A_{21}A_{31}}) = \beta_1(\overline{\beta}_1 + \overline{A_{21}A_{31}}) = \beta_1\overline{\widetilde{D}}.$$

□

Fato 4.39. Sejam $\widetilde{C}$ e $\widetilde{B}$ definidos na equação 4.38. Então $\widetilde{C} = \beta_1\overline{\widetilde{B}}$.

Demonstração. Como $|\beta_1| = 1$, então $\overline{\beta}_1 = \beta_1^{-1}$. E como $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$, segue que

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= A_{31}A_{32} + A_{12}A_{32}\beta_1 \\ &= \beta_1(\beta_1^{-1}\overline{A_{13}A_{23}} + \overline{A_{21}A_{23}}) \\ &= \beta_1(\overline{\beta}_1\overline{A_{13}A_{23}} + \overline{A_{21}A_{23}}) \\ &= \beta_1\overline{\widetilde{B}}.\end{aligned}$$

□

Usando esses dois últimos fatos podemos reescrever e expressão de $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T}(\beta_3) = -\frac{\beta_1 \overline{\widetilde{D}} + \beta_1 \overline{\widetilde{B}} \beta_3}{\widetilde{B} + \widetilde{D}\beta_3} = -\beta_1 \left(\frac{\overline{\widetilde{D}}}{\widetilde{D}} \right) \left[\frac{1 + \overline{\left(\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right)}\beta_3}{\left(\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}}\right) + \beta_3} \right]$$

em que $\widetilde{D} = A_{21}A_{31} + \beta_1 \neq 0$.

Definindo $K = -\beta_1 \left(\frac{\overline{\widetilde{D}}}{\widetilde{D}} \right)$ e $a = \overline{\left(\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{D}} \right)}$, temos que $|K| = 1$ e $|a| < 1$. Logo, $\widetilde{T}$ satisfaz às hipóteses da Proposição 4.34.

3. Aplicaremos a proposição enunciada na prova do caso $n = 2$, Proposição 4.34, para a aplicação $\widetilde{T}$:

   Como $\widetilde{T}$ satisfaz às hipóteses da Proposição 4.34, temos que $\widetilde{T}$ transforma o plano de modo que o exterior do disco unitário torna-se o interior do mesmo. Lembre que supomos $|\beta_1| = 1$, $|\beta_2| \geq 1$ e $|\beta_3| > 1$. Logo, pela Proposição 4.34, temos que $|\beta_3| = |\widetilde{T}(\beta_2)| < 1$. Absurdo.

Portanto o Teorema de Lee-Yang é válido para $n = 3$.

Agora, para provar o caso geral ($n \geq 4$) usaremos indução em n. Os principais argumentos dessa prova estão exemplificados nos casos particulares $n = 2$ e $n = 3$. Para fazermos esta indução, precisaremos do seguinte:

Lema 4.40. Suponhamos que o Teorema de Lee-Yang seja válido para $n - 1$ e $n - 2$. Sejam A, B, C e D os coeficientes dependentes de z_i, com $i \in [n-1] \setminus \{k\} \equiv X$, definidos pela seguinte igualdade

$$\mathcal{P}_n(z_1, ..., z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_k z_n. \tag{4.41}$$

Se para todo $i \in X$, $|z_i| \geq 1$, então $D \neq 0$, $\left|-\frac{C}{D}\right| < 1$ e $\left|-\frac{B}{D}\right| < 1$.

Demonstração. Suponha que $|z_i| \geq 1$ para todo $i \in X \equiv \{1, 2, \cdots, \check{k}, \cdots, n-1\}$. Note que $X = [n] \setminus \{k, n\}$. Das definições de D e X vemos que:

$$\begin{aligned} Dz_n z_k &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z_n z_k z^S \prod_{i \in S \cup \{k,n\}} \prod_{j \in [n] \setminus \{S \cup \{k,n\}\}} A_{ij} \\ &= z_n z_k \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k,n\}} \prod_{j \in [n] \setminus \{S \cup \{k,n\}\}} A_{ij}. \end{aligned}$$

Como z_n e z_k acima são quaisquer, podemos escrever

$$D = \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k,n\}} \prod_{j \in [n] \setminus \{S \cup \{k,n\}\}} A_{ij}.$$

Mas $[n] \setminus \{S \cup \{k, n\}\} = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{k, n\} \setminus S = X \setminus S$. Logo,

$$\begin{aligned} D &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \prod_{i \in S \cup \{k,n\}} \prod_{j \in X \setminus S} A_{ij} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \left(\prod_{j \in X \setminus S} A_{kj} A_{nj} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X \setminus S} A_{ij} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}(X)} z^S \left(\prod_{j \in X} A_{kj} A_{nj} \right) \left(\prod_{j \in S} A_{kj}^{-1} A_{nj}^{-1} \right) \left(\prod_{i \in S} \prod_{j \in X \setminus S} A_{ij} \right). \end{aligned}$$

Como $\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}$ não depende de S, segue que

$$
\begin{aligned}
D &= \left(\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} z^S \left(\prod_{j\in S} A_{kj}^{-1}A_{nj}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X\setminus S} A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \left(\prod_{j\in S} z_j A_{kj}^{-1}A_{nj}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X\setminus S} A_{ij}\right).
\end{aligned}
$$

Definindo $\varepsilon_j = z_j A_{kj}^{-1}A_{nj}^{-1}$ temos que

$$
\begin{aligned}
D &= \left(\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \left(\prod_{j\in S} \varepsilon_j\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in X\setminus S} A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}(X)} \varepsilon^S \prod_{i\in S}\prod_{j\in X\setminus S} A_{ij}\\
&= \left(\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj}\right) \mathcal{P}_{n-2}(\{\varepsilon_j\}_{j\in X})
\end{aligned}
$$

pois $|X| = n-2$. Observe que usamos a notação usual neste trabalho $\varepsilon^S = \prod_{j\in S}\varepsilon_j$. Por hipótese, $|z_j| \geq 1$ para todo $j \in X = [n]\setminus\{k,n\}$. Assim, $|\varepsilon_j| = |z_j||A_{kj}^{-1}||A_{nj}^{-1}| > |z_j| \geq 1$ para todo $j \in X$, pois $|A_{kj}A_{nj}| < 1$. Ou seja, $|\varepsilon_j| > 1$ para todo $j \in X$ e pela hipótese de indução segue que $\mathcal{P}_{n-2}(\{\varepsilon_j\}_{j\in X}) \neq 0$. E como $\prod_{j\in X} A_{kj}A_{nj} \neq 0$, segue que $D \neq 0$.

Provemos agora que $\left|-\frac{C}{D}\right| < 1$. Lembrando que $[n-1] = \{1, 2, \cdots, n-1\}$, note que

$$C z_n + D z_k z_n = \textstyle\sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} z_n z^S \prod_{i\in S\cup\{n\}} \prod_{j\in[n]\setminus\{S\cup\{n\}\}} A_{ij}.$$

Logo,

$$z_n(C + D z_k) = z_n \textstyle\sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} z^S \prod_{i\in S\cup\{n\}} \prod_{j\in[n]\setminus\{S\cup\{n\}\}} A_{ij}.$$

Como $z_n \in \mathbb{C}$ é qualquer, segue que

$$C + D z_k = \textstyle\sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} z^S \prod_{i\in S\cup\{n\}} \prod_{j\in[n]\setminus\{S\cup\{n\}\}} A_{ij}.$$

Note que $[n]\setminus\{S\cup\{n\}\} = [n-1]\setminus S$. Logo,

$$
\begin{aligned}
C + D z_k &= \sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} z^S \left(\prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{nj}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{ij}\right)\\
&= \sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} z^S \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right)\left(\prod_{j\in S} A_{nj}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{ij}\right)\\
&= \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} \left(\prod_{j\in S} z_j A_{nj}^{-1}\right)\left(\prod_{i\in S}\prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{ij}\right).
\end{aligned}
$$

Definindo $\eta_j = z_j A_{nj}^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned}
C + Dz_k &= \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} \left(\prod_{j\in S} \eta_j\right) \left(\prod_{i\in S} \prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{ij}\right) \\
&= \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right) \sum_{S\in\mathcal{P}([n-1])} \eta^S \left(\prod_{i\in S} \prod_{j\in[n-1]\setminus S} A_{ij}\right) \\
&= \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right) \mathcal{P}_{n-1}(\{\eta_j\}_{j\in[n-1]}).
\end{aligned}$$

Fazendo $z_k = -\frac{C}{D}$ na equação acima, obtemos:

$$0 = C + Dz_k = \left(\prod_{j\in[n-1]} A_{nj}\right) \mathcal{P}_{n-1}(\{\eta_j\}_{j\in[n-1]}).$$

Como $\prod_{j\in[n-1]} A_{nj} \neq 0$, então $\mathcal{P}_{n-1}(\{\eta_j\}_{j\in[n-1]}) = 0$. Usando mais uma vez que $|z_j| \geq 1$ para todo $j \in X$, concluímos que $|\eta_j| = |z_j||A_{nj}^{-1}| > |z_j| \geq 1$ para todo $j \in X$. Ou seja, $|\eta_j| > 1$ para todo $j \in X = [n-1] \setminus \{k\}$. Como supomos válido o Teorema de Lee-Yang para $n-1$, segue que $|\eta_k| \leq 1$. Logo,

$$\left|-\frac{C}{D}\right| = |z_k| = |A_{nk}\eta_k| < |\eta_k| \leq 1,$$

como queríamos. Analogamente provamos que $\left|-\frac{B}{D}\right| < 1$. □

Agora, provemos o Teorema de Lee-Yang.

Considere o polinômio de Lee-Yang definido em 4.41:

$$\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = A + Bz_k + Cz_n + Dz_k z_n.$$

Assim, dado $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = 0$, obtemos uma aplicação linear fracionária $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ definida em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{B}{D}\right\}$ dada por:

$$z_k = -\tfrac{A+Cz_n}{B+Dz_n} \equiv T(z_n).$$

Pelo Lema 4.40, $D \neq 0$. Assim, $T(\infty) = -\frac{C}{D}$. Note que T pode ou não ser uma aplicação de Möbius. Assim, temos que considerar os dois casos:

- Caso T não seja uma transformação de Möbius:

  existe, então, $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(z_n) \equiv \lambda$. Como $\left|-\frac{C}{D}\right| < 1$, pelo Lema 4.40, então

  $$T(\infty) = \left|-\tfrac{C}{D}\right| < 1,$$

  donde $|\lambda| < 1$. Ademais,

  $$\begin{aligned}
  \lambda = T(z_n) = -\frac{A + Cz_n}{B + Dz_n} \quad &\Rightarrow \quad -(A + Cz_n) = \lambda(B + Dz_n) \\
  &\Rightarrow \quad A = -\lambda B \;\; e \;\; C = -\lambda D.
  \end{aligned}$$

  Logo, dado $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= A + Bz_k + Cz_n + Dz_kz_n \\ &= -\lambda B + Bz_k - \lambda Dz_n + Dz_kz_n \\ &= B(z_k - \lambda) + Dz_n(z_k - \lambda) \\ &= (z_k - \lambda)(B + Dz_n). \end{aligned}$$

Como $z_n \neq -\frac{B}{D}$, pois T está definida em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{B}{D}\}$, segue que $z_k - \lambda = 0$. Logo, não existe raiz $(z_1, \cdots, z_n)$ de $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n)$ tal que $|z_j| \geq 1$ para todo $j \in [n-1]$ e $|z_n| > 1$.

- Caso T seja uma transformação de Möbius:

  seja $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ um zero de $\mathcal{P}_n$, isto é, $\mathcal{P}_n(\alpha) = 0$. Suponha que $|\alpha_j| \geq 1$ para todo $j \in [n-1]$. Se $|\alpha_1| = 1$, defina os seguintes números complexos: $\beta_i = \alpha_i$ para todo $i \in [n]$. Caso $|\alpha_i| > 1$, usamos o Lema 4.40 para garantir que $T(\alpha_n) = \alpha_1$ e $T(\infty) = -\frac{C}{D}$. Basta considerar, neste Lema, $k = 1$ e teremos $X = \{2, 3, \cdots, n-1\}$, donde

  $$|z_j| \geq 1 \text{ para todo } j \in X \Rightarrow D \neq 0, \left|-\frac{C}{D}\right| < 1 \text{ e } \left|-\frac{B}{D}\right| < 1.$$

  Ademais, sendo α um zero de $\mathcal{P}_n$, temos que $\mathcal{P}_n(\alpha)$ define uma aplicação $\alpha_1 = T(\alpha_n)$ que leva ∞ em $-\frac{C}{D}$.

  Agora, seja Γ uma reta que passe por α_n e não intercepte o círculo unitário. O Lema 4.40 garante que Γ não passa pelo ponto $-\frac{B}{D}$. Logo, $T(\Gamma)$ é um círculo em $\mathbb{C}$ que intercepta o círculo em dois pontos distintos, pois

  - T preserva círculos em $\mathbb{C}_\infty$;
  - T é uma bijeção;
  - $\alpha_1 \in T(\Gamma)$ e $|\alpha_1| \geq 1$;
  - $-\frac{C}{D} \in T(\Gamma)$ e $|-\frac{C}{D}| < 1$.

  Defina β_1 como um desses pontos de interseção, $\beta_n = T^{-1}(\beta_1)$ e $\beta_j = \alpha_j$ para todo $2 \leq j \leq n-1$. Assim, a partir de α, construímos um ponto $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ tal que

  - $|\beta_1| = 1$ por construção;
  - $|\beta_n| > 1$, pois $\beta_n \in \Gamma$;
  - $|\beta_j| \geq 1$ para todo $2 \leq j \leq n-1$, por construção.

  Note que, podemos aplicar esse processo, com base no Lema 4.40, com k variando entre 2 e $n-2$. Assim, podemos construir uma n-upla $(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que

  - $\mathcal{P}_n(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_n) = 0$;
  - $|\dot{z}_1| = |\dot{z}_2| = \cdots = |\dot{z}_{n-2}| = 1$;
  - $|\dot{z}_n| > 1$;
  - $|\dot{z}_{n-1}| \geq 1$.

  Em que

  Definição 4.42.
  $$\mathcal{P}_n(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_n) = \dot{A} + \dot{B}\dot{z}_{n-1} + \dot{C}\dot{z}_n + \dot{D}\dot{z}_{n-1}\dot{z}_n,$$

  e seus coeficientes $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ e $\dot{D}$ são da forma A, B, C e D, respectivamente, porém são funções de $\dot{z}_j$ em vez de funções de z_j, com $j \in [n-2]$.

Mais uma vez pelo Lema 4.40, $-\frac{\dot{B}}{\dot{D}} \neq \dot{z}_{n-1}$, pois, pelo Lema, $\left|-\frac{\dot{B}}{\dot{D}}\right| < 1$.

Como $\mathcal{P}_n(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_n) = 0$, podemos expressar $\dot{z}_{n-1}$ como imagem de $\dot{z}_n$ pela seguinte transformação de Möbius:

$$\dot{z}_{n-1} = \dot{T}(\dot{z}_n) = -\tfrac{\dot{A}+\dot{C}\dot{z}_n}{\dot{B}+\dot{D}\dot{z}_n}.$$

Vejamos agora algumas relações entre os coeficientes $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ e $\dot{D}$:

Fato 4.43. Sejam $\dot{A}$ e $\dot{D}$ definidos na Definição 4.42. Então $\overline{\dot{A}} = \overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \dot{D}$.

Demonstração. Note que $\dot{A} \equiv A(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})$ e $\dot{D} \equiv D(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})$. Ademais, $|\dot{z}_1| = |\dot{z}_2| = \cdots = |\dot{z}_{n-2}| = 1$, ou seja, $\overline{\dot{z}_i} = \dot{z}_i^{-1}$. Também, supomos que $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{A(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})} &= \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^S} \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} \overline{A_{ij}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^S} \prod_{i \in [n] \setminus S} \prod_{j \in S} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^{S-[n-2]}} \prod_{i \in [n] \setminus S} \prod_{j \in S} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} [(\dot{z})^{S-[n-2]}]^{-1} \prod_{i \in [n] \setminus S} \prod_{j \in S} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} (\dot{z})^{[n-2] \setminus S} \prod_{i \in [n] \setminus S} \prod_{j \in S} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} D(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2}).
\end{aligned}$$

o qual $\overline{(\dot{z})^{S-[n-2]}}$ quer dizer que o somatório é feito em $\mathcal{P}([n-2]) \setminus \{[n-2]\}$. □

Fato 4.44. Sejam $\dot{B}$ e $\dot{C}$ definidos na Definição 4.42. Então $\overline{\dot{B}} = \overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \dot{C}$.

Demonstração. Note que $\dot{B} \equiv B(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})$ e $\dot{C} \equiv C(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})$. Ademais, $|\dot{z}_1| = |\dot{z}_2| = \cdots = |\dot{z}_{n-2}| = 1$, ou seja, $\overline{\dot{z}_i} = \dot{z}_i^{-1}$. Também, supomos que $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{B(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2})} &= \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^S} \prod_{i \in S \cup \{n-1\}} \prod_{j \in [n] \setminus (S \cup \{n-1\})} \overline{A_{ij}} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^S} \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup \{n-1\})} \prod_{j \in S \cup \{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} \overline{(\dot{z})^{S-[n-2]}} \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup \{n-1\})} \prod_{j \in S \cup \{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} [(\dot{z})^{S-[n-2]}]^{-1} \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup \{n-1\})} \prod_{j \in S \cup \{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} \sum_{S \in \mathcal{P}([n-2])} (\dot{z})^{[n-2] \setminus S} \prod_{i \in [n] \setminus (S \cup \{n-1\})} \prod_{j \in S \cup \{n-1\}} A_{ji} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}} B(\dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_{n-2}).
\end{aligned}$$

em que $\overline{(\dot{z})^{S-[n-2]}}$ quer dizer que o somatório é feito em $\mathcal{P}([n-2]) \setminus \{[n-2]\}$. □

Usando os dois últimos fatos, podemos reescrever a expressão de $\dot{T}$:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{n-1} = \dot{T}(\dot{z}_n) &= -\frac{\dot{A} + \dot{C}\dot{z}_n}{\dot{B} + \dot{D}\dot{z}_n} \\
&= -\frac{\overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \overline{\dot{D}} + \overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \overline{\dot{B}}\ \dot{z}_n}{\dot{B} + \dot{D}\dot{z}_n} \\
&= -\frac{\overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \overline{\dot{D}} \left(1 + \frac{\overline{\dot{B}}}{\overline{\dot{D}}}\dot{z}_n\right)}{\dot{D}\left(\frac{\dot{B}}{\dot{D}} + \dot{z}_n\right)} \\
&= \overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \frac{\overline{\dot{D}}}{\dot{D}}\ \frac{\left(1 + \overline{\left(\frac{\dot{B}}{\dot{D}}\right)}\dot{z}_n\right)}{\left(\frac{\dot{B}}{\dot{D}} + \dot{z}_n\right)}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.40 concluímos que $\left|-\frac{\dot{B}}{\dot{D}}\right| < 1$. Assim, estamos em condições de aplicar a Proposição 4.34. Pois basta considerar, em $\dot{T}$, $K = -\overline{(\dot{z})^{[n-2]}}\ \frac{\overline{\dot{D}}}{\dot{D}}$ e $a = \overline{\left(\frac{\dot{B}}{\dot{D}}\right)}$. Como supomos $|\dot{z}_n| > 1$, segue que $|\dot{z}_{n-1}| = |\dot{T}(\dot{z}_n)| < 1$. Absurdo, pois $|\dot{z}_{n-1}| \geq 1$.

Assim, a prova do Teorema de Lee-Yang para o caso em que $|A_{ij}| \in (0, 1)$ para todo $i, j \in [n]$ está completa.

Para provarmos o caso em que $|A_{ij}| \in [0, 1]$, usaremos:

Proposição 4.45. As raízes de um polinômio em $\mathbb{C}[z]$ vistas como função dos coeficientes dependem continuamente dos mesmos.

Para uma prova desta proposição, veja [sNP94].

Seja $A \equiv (A_{ij})$ a matriz de ordem $n \times n$ que define os coeficientes do polinômio de Lee-Yang

$$\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = \textstyle\sum_{S \in \mathcal{P}([n])} z^S \prod_{i \in S} \prod_{j \in [n] \setminus S} A_{ij},$$

tal que $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ e $|A_{ij}| \in [0, 1]$ para todo $j \in [n]$. Denote $\mathcal{P}_n(z_1, \cdots, z_n) = \mathcal{P}_n(A)(z_1, \cdots, z_n)$. Agora, suponha que o Teorema de Lee-Yang não seja válido para o caso em questão. Ou seja, existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $|\alpha_i| \geq 1$ para todo $i \in [n-1]$, $|\alpha_n| > 1$ e $\mathcal{P}_n(A)(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0$. Defina o seguinte polinômio:

$$\mathcal{Q}(z) = \mathcal{P}_n(A)(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, z).$$

Suponha que $grau(\mathcal{Q}(z)) = m$ e sejam $a_0, \cdots, a_m$ seus coeficientes.

Afirmação 4.46. Para todo $0 \leq j \leq m$, a aplicação

$$f_j : A \mapsto a_j(A, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \text{ é contínua.}$$

Note que $\mathcal{Q}(\alpha_n) = 0$. Ademais, considerando α_n como função dos coeficientes, isto é, $\alpha_n \equiv \alpha_n(a_0, \cdots, a_m)$, segue, pela Proposição 4.45, que a aplicação

$$f : (a_0, \cdots, a_m) \mapsto \alpha_n(a_0, \cdots, a_m)$$

é contínua. E como a composição de aplicações contínuas é contínua, temos que a aplicação

$$A \mapsto \alpha_n\left(a_0(A, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}), \cdots, a_m(A, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})\right)$$

é contínua. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que se $\widetilde{A} \equiv (\widetilde{A}_{ij})$ é uma matriz simétrica, de ordem $n \times n$ com $|\widetilde{A}_{ij}| \in (0,1)$, com $\max_{i,j} |\widetilde{A}_{ij} - A_{ij}| < \delta$, então

$$|\alpha_n(A, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) - \alpha_n(\widetilde{A}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})| < \epsilon.$$

Pela construção do polinômio $\mathcal{Q}$, temos

$$\mathcal{P}_n(\widetilde{A})(\alpha_1, \cdots, \alpha_n(\widetilde{A}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})) = 0$$

com $|\alpha_j| \geq 1$ para todo $j \in [n-1]$ e $|\alpha_n(\widetilde{A}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})| > 1$. Mas isso contradiz o caso provado anteriormente.

4.2 Caracterização de LY_n e interpretação física

Nesta seção utilizaremos os resultados obtidos no capítulo 3 sobre polinômios de Lee-Yang para apresentar novos exemplos e para verificarmos que, na situação física onde Ψ são funções partição dependentes da temperatura, vê-se que aqueles que são polinômios de Lee-Yang em altas temperaturas, por conseguinte, a todas as temperaturas, são precisamente da forma considerada por Lee e Yang.

Os polinômios

$$\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X \subset [n+1]} E_X z^X$$

relevantes para a física são tais que $E_X = \exp \beta W_X$, onde $\beta, W_X \in \mathbb{R}$ e $\beta^{-1} > 0$ é interpretado como temperatura enquanto que $-W_X$ é a energia da configuração X. Para tal Ψ, pelos Teorema 3.6 e Proposição 3.25, temos que $\Psi \in LY_{n+1}$ se, e somente se, $\Psi = \Psi_\Phi$ e $r(\Phi) \geq 1$, isto é, $\Psi \in \mathcal{J}_{n+1}$.

Observação 4.47. Dados $\Psi_1,\ \Psi_2 \in LY_n$, vejamos que $\Psi_1 * \Psi_2 \in LY_n$. O mesmo vale se trocarmos LY_n por $\mathcal{J}_n$ *ou* $\mathcal{J}_n^\circ$. De fato, por definição, dados $\Psi_1, \Psi_2 \in LY_n$, $r(\Psi_i) = r(\Psi_i^\dagger) = 1$ $(i = 1, 2)$. Donde, pela Proposição 2.18,

$$r(\Psi_1 * \Psi_2) \geq r(\Psi_1).r(\Psi_2) = 1.1 = 1.$$

Ademais, $r(\Psi_1 * \Psi_2) \leq (r(\Psi_1).r(\Psi_2))^{-1} = 1$. Portanto $r(\Psi_1 * \Psi_2) = 1$.

Pela Observação 2.26, $r((\Psi_1 * \Psi_2)^\dagger) = r(\Psi_1^\dagger * \Psi_2^\dagger)$. Logo

$$r((\Psi_1 * \Psi_2)^\dagger) \geq r(\Psi_1^\dagger).r(\Psi_2^\dagger) = 1.$$

Ademais, pela Proposição 2.27, $r((\Psi_1 * \Psi_2)^\dagger) \leq r^{-1}(\Psi_1 * \Psi_2) = 1$. Portanto, também, $r((\Psi_1 * \Psi_2)^\dagger) = 1$, como queríamos. Ou seja, $\Psi_1 * \Psi_2 \in LY_n$.

Agora considere $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{J}_n = LY_n \cap \{\Phi \in \mathcal{A}_n \ : \ \Phi^\dagger = \Phi\}$. Assim, $\Psi_1 * \Psi_2 = \Psi_1^\dagger * \Psi_2^\dagger = (\Psi_1 * \Psi_2)^\dagger$. Ou seja, $\Psi_1 * \Psi_2 \in \mathcal{J}_n$. Dados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{J}_n^\circ$, com

$$\Psi_1(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X \subset [n+1]} E_X^1.z^X$$
$$\Psi_2(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X \subset [n+1]} E_X^2.z^X$$

temos que

$$(\Psi_1 * \Psi_2)(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \sum_{X \subset [n+1]} E_X^1.E_X^2.z^X \neq 0$$

se $|z_1|, \cdots, |z_n| \leq 1$ *e* $|z_{n+1}| < 1$.

Observação 4.48. Um elemento $\Psi \in \mathcal{H}_{n+1}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Psi(z_1,\cdots,z_{n+1}) &= A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_n\\ &\quad +C(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_{n+1}+D(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_n.z_{n+1}\end{aligned}$$

em que $A,B,C,D \in \mathcal{A}_{n-1}$, $D = A^\dagger$ e $C = B^\dagger$. De fato, como

$$\Psi(z_1,\cdots,z_{n+1}) = z_{n+1}\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n)+\Phi(z_1,\cdots,z_n), \text{ com } \Phi \in \mathcal{A}_n$$

e

$$\Phi(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{X\subset[n]} E_X.z^X = \sum_{X\subset[n-1]} F_X.z^X + \sum_{X\subset[n-1]} G_X.z^X.z_n$$

$$\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n) = \sum_{X\subset[n-1]} \overline{F}_{[n-1]\setminus X}.z^X.z_n + \sum_{X\subset[n-1]} \overline{G}_{[n-1]\setminus X}.z^X,$$

escrevendo

$$\textstyle\sum_{X\subset[n-1]} F_X.z^X \equiv A(z_1,\cdots,z_{n-1}) \quad e \quad \sum_{X\subset[n-1]} G_X.z^X \equiv B(z_1,\cdots,z_{n-1})$$

temos que

$$\Phi(z_1,\cdots,z_n) = A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(z_1,\cdots,z_n) &= A^\dagger(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_n+B^\dagger(z_1,\cdots,z_{n-1})\\ &\equiv D(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_n+C(z_1,\cdots,z_{n-1})\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}\Psi(z_1,\cdots,z_{n+1}) &= z_{n+1}[D(z_1,\cdots,z_{n-1}).z_n+C(z_1,\cdots,z_{n-1})]\\ &\quad +A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n\\ &= A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n\\ &\quad +C(z_1,\cdots,z_{n-1})z_{n+1}+D(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n.z_{n+1}\end{aligned}$$

como queríamos.

A condição $[\Psi] \in [\mathcal{J}^\circ_{n+1}]$ diz que, para $|z_1|,\cdots,|z_n| \le 1$,

$$\Phi(z_1,\cdots,z_n) = A(z_1,\cdots,z_{n-1})+B(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n \neq 0$$

Equivalentemente, $[\Psi] \in [\mathcal{J}^\circ_{n+1}]$ diz que

$$A(z_1,\cdots,z_{n-1}) \neq 0 \text{ para } |z_1|,\cdots,|z_{n-1}| \le 1$$

e

$$|B(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})| < |A(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})| \text{ para } |\alpha_j| = 1,\ j \in [n-1].$$

Note que, sob essa condição, B pode ser equivalentemente trocado por C, que corresponde a troca de z_n por z_{n+1}. Isso mostra que, na nossa caracterização de polinômios de Lee-Yang, a simetria da variável z_{n+1} é essencial.

Proposição 4.49. Considere $E_X^\beta = \exp(\beta W_X)$ para $X \subset [n]$, com $\beta > 0$ e $W_X \in \{-\infty\} \cup \mathbb{C}$. Escreva

$$\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X^\beta z^X$$

Se $r(\Phi^1) > 1$, existe um intervalo aberto I contendo 1 tal que $r(\Phi^\beta) > 1$ para todo $\beta \in I$. Ademais, para m suficientemente grande temos que $mI \supset (m-1, m+1)$.

Demonstração.

$$\Phi^1(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} e^{W_X} z^X$$

Como $r(\Phi^1) > 1$, então $\Phi^1(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ se $|z_1|, \cdots, |z_n| \leq 1$. Queremos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\beta \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$, ocorre que $\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) \neq 0$ se $|z_1|, ..., |z_n| \leq 1$. Suponha,então, por absurdo que para todo $\epsilon > 0$ existe $\beta \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ tal que $\Phi^\beta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0$ para algum $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ com $|\alpha_j| \leq 1$, $j \in [n]$. Daí $r(\Phi^\beta) = 0$. Donde $|r(\Phi^1) - r(\Phi^\beta)| = |r(\Phi^1)| > 1$ para todo $\epsilon > 0 \quad e \quad \beta \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Absurdo. De fato, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que

$$\left|\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) - \Phi^1(z_1, \cdots, z_n)\right| = \left|\sum_{X \subset [n]} \left(e^{\beta W_X} - e^{W_X}\right) z^X\right| \to 0$$

donde $|r(\Phi^1) - r(\Phi^\beta)| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, pois é contínua a aplicação $[\Phi] \mapsto r([\Phi])$.

Agora denote $I = (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Então

$$mI = (m(1-\epsilon), m(1+\epsilon)) = (m - m\epsilon, m + m\epsilon) = (m - \epsilon', m + \epsilon').$$

Para m suficientemente grande, $\epsilon' = m\epsilon > 1$. Donde $m + \epsilon' > m + 1$ e $m - \epsilon' < m - 1$. Ou seja, $mI \supset (m-1, m+1)$. □

Observe que pela Proposição 4.49 acima e pela Proposição 2.18, $r(\Phi^\beta) > 1$ para todo $\beta \geq m$.

Assim, se $\Psi_{\Phi^1} \in \mathcal{J}_n^\circ$ então $\Psi_{\Phi^\beta} \in \mathcal{J}_n^\circ$ para todo β suficientemente grande.Ou seja, escrevendo $\Psi = \Psi^\beta$, vemos que $\Psi^\beta \in \mathcal{J}_{n+1}^\circ$ para algum β. Assim, $\Psi^\beta \in \mathcal{J}_{n+1}^\circ$ para todo β suficientemente grande, isto é, pequenas temperaturas. De fato, se $r(\Phi^1) > 1$, existe um intervalo aberto I contendo 1 tal que $r(\Phi^\beta) > 1$ para $\beta \in I$. Para um inteiro suficientemente grande temos que $mI \supset (m-1, m+1)$. Então, pela proposição 3.2, $r(\Phi^\beta) > 1$ para todo $\beta \geq m$. Assim, se $\Psi_{\Phi^1} \in \mathcal{J}_n^\circ$, então $\Psi_{\Phi^\beta} \in \mathcal{J}_n^\circ$ para todo β suficientemente grande.

Observação 4.50. Se $\Psi \in \mathcal{J}_{n+1}$ possui uma fatoração não trivial

$$\Psi(z_1, \cdots, z_{n+1}) = \Psi'(z_1, \cdots, z_k) + \Psi''\Psi(z_{k+1}, \cdots, z_{n+1})$$

então $\Psi \notin \mathcal{J}_{n+1}^\circ$. De fato, temos $\Psi' \in LY_k$, $\Psi'' \in LY_{n-k+1}$ e podemos assumir $\Psi' \in \mathcal{J}_k$, $\Psi'' \in \mathcal{J}_{n-k+1}$. Portanto podemos escolher $z_1, \cdots, z_{n+1}$ tal que $\Psi'(z_1, \cdots, z_k) = 0$ com $|z_1|, \cdots, |z_k| \leq 1$ e $|z_{k+1}|, \cdots, |z_{n+1}| < 1$.

Observação 4.51. A dimensão de $\mathcal{H}_{n+1}$ é a dimensão real de $\mathcal{A}_n$, ou seja, 2^{n+1}.

Para $n > 1$, isso é estritamente maior que a dimensão $\frac{n(n+1)}{2+n+1+1}$ do conjunto de polinômios de altas temperaturas do Teorema 4.56 mais adiante (com b real) que é essencialmente a classe de polinômios originalmente considerada por Lee e Yang.

Lema 4.52. Sejam $\beta > 0$ e $W_X \in \mathbb{C}$. Dado $X \subset [n]$, defina $E_X^\beta = e^{\beta W_X}$ e $\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X^\beta z^X$. Se $r(\Phi^\beta) \geq 1$ para uma sequência de β's tendendo a zero por cima, então

$$W_X = \sum_{j \notin X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \sum_{j \in X} W_j + W_0$$

com o real $W_{jk} = W_{kj} \geq 0$, $W_{jj} = 0$ e os complexos W_j e W_0.

Demonstração. Para β suficientemente pequeno, $e^{\beta W_X}$ é próximo de 1, pois βW_X é próximo de zero, $e^0 = 1$ e a função $f(x) = e^x$ é contínua. Mais precisamente, neste caso,

$$e^{\beta W_X} = 1 + \beta W_X + o(\beta^2)$$

De fato, a expansão em série de Taylor centrada na origem da função $f(z) = e^z$ é dada por

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Assim, $e^{\beta W_X} = 1 + \beta W_X + \frac{(\beta W_X)^2}{2!} + \frac{(\beta W_X)^3}{3!} + \cdots = 1 + \beta W_X + o(\beta^2)$. Logo, para β pequeno,

$$\begin{aligned}
\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) &= \sum_{X \subset [n]} [1 + \beta W_X + o(\beta^2)] z^X \\
&= \sum_{X \subset [n]} z^X + \sum_{X \subset [n]} \beta W_X z^X + \sum_{X \subset [n]} o(\beta^2) z^X \\
&= \sum_{X \subset [n]} z^X + \sum_{X \subset [n]} \beta W_X z^X + o(\beta^2) \sum_{X \subset [n]} |z|^X
\end{aligned}$$

Ademais, $\sum_{X \subset [n]} z^X = \prod_{i=1}^n (1 + z_i)$. De fato, fazendo indução em n:

- Se $n = 1$, $\prod_{i=1}^1 (1 + z_i) = 1 + z_1$ e $\sum_{X \subset [1]} z^X = z^{\{\emptyset\}} + z^{\{1\}} = 1 + z_1$
- Supondo válida a igualdade para $n - 1$, isto é $\prod_{i=1}^{n-1} (1 + z_i) = \sum_{X \subset [n-1]} z^X$, temos que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} (1 + z_i) &= \prod_{i=1}^{n-1} (1 + z_i)(1 + z_n) \\
&= \sum_{X \subset [n-1]} z^X (1 + z_n) \\
&= \sum_{X \subset [n-1]} z^X + \sum_{X \subset [n-1]} z^X z^n \\
&= \sum_{X \subset [n]} z^X
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 + z_i) + \beta \sum_{X \subset [n]} W_X z^X + o(\beta^2) \sum_{X \subset [n]} |z|^X \tag{4.53}$$

Escrevendo $\varphi_j = 1 + z_j$, podemos assumir $\varphi \neq 0$ e $\sum |\varphi_j|$ limitado, segue que, para cada $X \subset [n]$,

$$\begin{aligned} W_X z^X &= W_X \prod_{i \in X} z_i \\ &= W_X \prod_{i \in X} (\varphi_i - 1) \\ &= W_X \prod_{i \in X} \varphi_i \theta(\varphi_i, 1) \\ &= W_X \theta(\varphi_i, 1) \prod_{i \in X} \varphi_i \\ &= W'_X \prod_{i \in X} \varphi_i \\ &= W'_X \varphi^X \end{aligned}$$

em que W'_X é combinação linear de W_X com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Assim

$$\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \prod_{i=1}^n \varphi_i + \beta \sum_{X \subset [n]} W'_X \varphi^X + o(\beta^2) \sum_{X \subset [n]} |\varphi|^X \tag{4.54}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \varphi^X = \prod_{i \in X} \varphi_i &= \prod_{i=1}^n \varphi_i . \prod_{i=1}^n \varphi_i^{-1} . \prod_{i \in X} \varphi_i \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_i . \prod_{i \in [n] \setminus X} \varphi_i^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_i \left(\prod_{i \in [n] \setminus X} \varphi_i^{-1} . \prod_{i \in X} \varphi_i . \prod_{i \in X} \varphi_i^{-1} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_i \left(\prod_{i \in [n] \setminus X} \varphi_i . \prod_{i \in X} \varphi_i \right) \prod_{i \in X} \varphi_i^{-1} \end{aligned}$$

Logo

$$W'_X \varphi^X = W'_X . \prod_{i=1}^n \varphi_i \left(\prod_{i \in [n] \setminus X} \varphi_i . \prod_{i \in X} \varphi_i \right) \prod_{i \in X} \varphi_i^{-1} = \left(\prod_{i=1}^n \varphi_i \right) W''_X (\varphi^{-1})^X$$

tal que W''_X também é combinação linear de W_X com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Também,

$$\prod_{i \in X} |\varphi_i| = \prod_{i=1}^n |\varphi_i| \left(\prod_{i \in [n] \setminus X} |\varphi_i^{-1}| \right) = \prod_{i=1}^n \varphi_i \prod_{i \in [n] \setminus X} |\varphi_i^{-1}| = \prod_{i=1}^n \varphi_i \prod_{i \in X} |\varphi_i^{-1}|$$

pois $\prod_{i\in[n]\setminus X}|\varphi_i^{-1}| = \prod_{i\in X}|\varphi_i^{-1}|$. Portanto,

$$\Phi^\beta(z_1,\cdots,z_n) = \left(\prod_{i=1}^n \varphi_i\right)\left(1+\beta\sum_{X\subset[n]} W''_X(\varphi^{-1})^X + o(\beta^2)\sum_{X\subset[n]}|\varphi^{-1}|^X\right) \tag{4.55}$$

Defina $\gamma = \beta^{\frac{1}{n}}$ e $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = \varphi = \gamma\theta^{-1}$ e considere $|X| = card(X)$. Como $\varphi_j = \varphi = \gamma\theta^{-1}$ para todo $j \in [n]$, então

$$\begin{aligned}
\beta\sum_{X\subset[n]} W''_X(\varphi^{-1})^X &= \beta\sum_{X\subset[n]} W''_X\prod_{i\in X}\varphi_i^{-1} \\
&= \beta\sum_{X\subset[n]} W''_X(\varphi^{-1})^{|X|} \\
&= \beta\sum_{X\subset[n]} W''_X(\gamma^{-1}\theta)^{|X|} \\
&= \beta W''_{[n]}(\gamma^{-1}\theta)^n + \beta\sum_{|X|<n} W''_X(\gamma^{-1}\theta)^{|X|}
\end{aligned}$$

Como $\gamma = \beta^{\frac{1}{n}}$ então

$$\begin{aligned}
\beta\sum_{X\subset[n]} W''_X(\varphi^{-1})^X &= \beta.W''_{[n]}.((\beta^{\frac{1}{n}})^{-1})^n.\theta^n + \beta\sum_{|X|<n} W''_X.((\beta^{\frac{1}{n}})^{-1})^{|X|}.\theta^{|X|} \\
&= \beta.W''_{[n]}.\beta^{-1}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.\beta^1.\beta^{\left(\frac{1}{n}.-1.|X|\right)}.\theta^{|X|} \\
&= W''_{[n]}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.\beta^{\left(1-\frac{|X|}{n}\right)}.\theta^{|X|} \\
&= W''_{[n]}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.\beta^{\left(\frac{n-|X|}{n}\right)}.\theta^{|X|} \\
&= W''_{[n]}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.(\beta^{\frac{1}{n}})^{n-|X|}.\theta^{|X|} \\
&= W''_{[n]}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.\gamma^{n-|X|}.\theta^{|X|}
\end{aligned}$$

Ainda com as última definições acima, temos que $\beta = \gamma^n$ e

$$o(\beta^2)\sum_{X\subset[n]}|\varphi^{-1}|^X = o(\gamma^{2n})\sum_{X\subset[n]}[(\gamma\theta^{-1})^{-1}]^{|X|} = o(\gamma^{2n})\sum_{X\subset[n]}\gamma^{-|X|}.\theta^{|X|}$$

Portanto, pela igualdade 4.55 obtida, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Phi^\beta(z_1,\cdots,z_n) &= \varphi^n\left[1+W''_{[n]}.\theta^n + \sum_{|X|<n} W''_X.\gamma^{n-|X|}.\theta^{|X|} + o(\gamma^{2n})\sum_{X\subset[n]}\gamma^{-|X|}.\theta^{|X|}\right] \\
&= \varphi^n\left(1+W''_{[n]}+o(\gamma)\right)
\end{aligned}$$

para θ limitado.

Se $W''_{[n]} \neq 0$, existem zeros de Φ^β da forma $z_1 = \cdots = z_n = \varphi - 1$ com

$$\varphi \approx \left(-W''_{[n]}\right)^{\frac{1}{n}} \gamma^{\ n-esima\ raiz\ de\ 1}.$$

Assim, para γ pequeno e $n > 2$, como existem zeros de Φ^β da forma $\varphi - 1$, então $\Phi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = 0$ para algum $z_1, \cdots, z_n$ com $|z_1|, \cdots, |z_n| < 1$. □

Teorema 4.56. (*Polinômios de Lee-Yang de altas temperaturas*)

Sejam $W_X \in \mathbb{C}$, $E_X^\beta = e^{\beta W_X}$ e $\psi^\beta(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{X \subset [n]} E_X^\beta z^X$. Dizemos que $(\psi^\beta)_{\beta>0}$ é um polinômio de Lee-Yang de altas temperaturas se

1. $\psi^\beta \in LY_n$ para alguma sequência de reais $\beta's$ tendendo a zero por cima
2. $\psi^\beta \in LY_n$ para todo $\beta > 0$
3. Existe $W_{jk} \in \mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ tais que $W_{jk} = W_{kj} \geq 0$ e

$$W_X = -\sum_{j \in X} \sum_{k \notin X} W_{jk} - i \sum_{j \in X} a_j + b$$

Demonstração. A implicação (3) ⇒ (2) é provada no item 1 mais adiante e (2) ⇒ (1) é óbvio.

Provemos, então, que (1) ⇒ (3).

Assumindo (1) válida, temos que $r(\psi^\beta) \geq 1$ para alguma sequência de reais $\beta's$ tendendo a zero por cima. Isto é, ψ^β satisfaz as condições do Lema 4.52 e, portanto, sendo $m = card(X) \leq n$

$$\begin{aligned}
W_X &= \sum_{j \notin X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \sum_{j \notin X} W_j + W_0 \\
&= \sum_{j \notin X} \sum_{k \in [n]} W_{jk} - \sum_{j \notin X} \sum_{k \in X} W_{jk} + \sum_{j \notin X} W_j + W_0 \\
&= \sum_{j \notin X} (W_{j1} + W_{j2} + \cdots + W_{jn} - W_{jK_1} - W_{jk_2} - \cdots - W_{jk_m}) + \sum_{j \notin X} W_j + W_0 \\
&= \sum_{j \notin X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \sum_{j \notin X} W_j + W_0 \\
&= \sum_{j \in [n]} \sum_{k \notin X} W_{jk} - \sum_{j \in X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \sum_{j \notin X} W_j + W_0 \\
&= -\sum_{j \in X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \left(\sum_{j \notin X} W_j + \sum_{j \in [n]} \sum_{k \notin X} W_{jk} \right) + W_0,
\end{aligned}$$

em que os reais $W_{jk} = W_{kj} \geq 0$, $W_{jj} = 0$ e W_j, W_0 complexos. Logo,

$$\begin{aligned}
W_X &= -\sum_{j \in X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \left(\sum_{j \notin X} W_j + \sum_{k \in [n]} \sum_{j \notin X} W_{kj} \right) + W_0 \\
&= -\sum_{j \in X} \sum_{k \notin X} W_{jk} + \sum_{j \notin X} \tilde{W}_j + W_0,
\end{aligned}$$

tal que $\tilde{W}_j = W_j + \sum_{k \in [n]} W_{jk}$ complexo.

Em virtude do Teorema 3.6, $\frac{E_X^\beta}{(E_{[n]\setminus X}^\beta)^*}$ é independente de X.Ademais,

$$W_X - \overline{W}_{[n]\setminus X} = \sum_{j\notin X} \tilde{W}_j - \sum_{j\in X} \overline{\tilde{W}}_j + W_0 - \overline{W_0}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\beta}\exp\left[\beta\left(W_X - \overline{W}_{[n]\setminus X}\right)\right] &= \frac{d}{d\beta}\exp\left[\beta\left(\sum_{j\notin X}\tilde{W}_j - \sum_{j\in X}\overline{\tilde{W}}_j + W_0 - \overline{W_0}\right)\right]\\
&= \left(\sum_{j\notin X}\tilde{W}_j - \sum_{j\in X}\overline{\tilde{W}}_j + W_0 - \overline{W_0}\right)\exp\left[\beta\left(\sum_{j\notin X}\tilde{W}_j - \sum_{j\in X}\overline{\tilde{W}}_j + W_0 - \overline{W_0}\right)\right]
\end{aligned}$$

e $\lim_{\beta\to 0}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{E_X^\beta}{\overline{(E^\beta_{[n]\setminus X})}}\right)$ é também independente de X e igual a $\sum_{j\notin X}\tilde{W}_j - \sum_{j\in X}\overline{\tilde{W}}_j + W_0 - \overline{W_0}$. Assim, $\tilde{W}_j + \overline{\tilde{W}}_j = 0$. Ou seja, $\tilde{W}_j = ia_j$ com $a_j \in \mathbb{R}$. Escrevendo $W_0 + i\sum_j a_j = b \in \mathbb{C}$, podemos reescrever 4.57:

$$\begin{aligned}
W_X &= -\sum_{j\in X}\sum_{k\notin X} W_{jk} + \sum_{j\notin X}\tilde{W}_j + W_0\\
&= -\sum_{j\in X}\sum_{k\notin X} W_{jk} + i\sum_{j\notin X} a_j + b - i\sum_{j\in[n]} a_j\\
&= -\sum_{j\in X}\sum_{k\notin X} W_{jk} - i\sum_{j\in X} a_j + b
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Pelos Lema 4.52 e Teorema 4.56, existem casos onde $\Psi^\beta \in \mathcal{J}_n^\circ$ para pequenas temperaturas e $\Psi^\beta \notin \mathcal{J}_{n+1}$ para grandes temperaturas. Se $\Psi^\beta \notin \mathcal{J}_{n+1}$ para uma sequência de $\beta' s$ tendendo a zero (altas temperaturas), então $\Psi^\beta \notin \mathcal{J}_{n+1}$ para todo $\beta > 0$ (todas as temperaturas), e

$$W_X = -\sum_{j\in X}\sum_{k\notin X} W_{jk} + b,$$

com $W_{jk}, b \in \mathbb{R}$ tal que $W_{jk} = W_{kj} \geq 0$ (Teorema 3.5).

Assim, $\Psi^\beta(0,\cdots,0) = e^{\beta W_\emptyset} = e^{\beta b}$. Logo, $b \in \mathbb{R}$. Agora, considerando apenas $z_j \neq 0$ em Ψ^β, obtemos $e^{-i\beta a_j} z_j$ e, assim, $a_j = 0$. Isto significa que aqueles Ψ^β que são polinômios de Lee-Yang em altas temperaturas , por conseguinte, a todas as temperaturas, são precisamente da forma considerada por Lee e Yang.

Apêndice A

Apêndice A

A.1 Espaço afim e Conjuntos algébricos

Neste apêndice expomos definições e resultados que embasam a compreensão da topologia de Zariski utilizada no capítulo 3 deste trabalho. Esta exposição se baeou nos livros [Har13] e [Ati94].

Ao longo deste apêndice, $\mathbb{K}$ será usado para denotar um corpo comutativo. Definimos *n-espaço afim* sobre $\mathbb{K}$, denotado por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ou $\mathbb{A}^n$, quando $\mathbb{K}$ for conhecido, como o conjunto de todas as n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \{(a_1, \dots, a_n) \ : \ a_i \in \mathbb{K}, \ \ com \ \ i = 1, \cdots, n\}.$$

Em particular $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{A}^2$ é o plano afim. Um elemento $P \in \mathbb{A}^n$ será chamado um ponto, e se $P = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ com $a_i \in \mathbb{K}$, então os $a_{i's}$ serão chamados as coordenadas de P. Como conjunto, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e o produto cartesiano $\mathbb{K}^n$ sem considerá-lo como k-espaço vetorial. A relação entre $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{K}^n$ se dá em dois níveis: a cada par de pontos $P, Q \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ associa-se o vetor $\vec{PQ}$ de $\mathbb{K}^n$. Por outro lado, a cada vetor $\vec{OP} \in \mathbb{K}^n$, associa-se o seu ponto extremo $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Definição A.1. Seja $\mathbb{A} = \mathbb{K}[z_1, \cdots, z_n]$ o anel de polinômios sobre as variáveis z_i com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $\phi \in \mathbb{A}$ tal que

$$\begin{aligned} \phi : \ \ & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K} \\ & p \mapsto \phi(p) = \phi(a_1, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

Definimos o lugar dos zeros de ϕ como o conjunto $Z(\phi) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \ : \ \ \phi(p) = 0\}$. Se ϕ é não constante, $Z(\phi)$ é chamado hipersuperfície definida por ϕ.

Se $T = \{\phi_1, \cdots, \phi_r\}$, escrevemos $Z(\phi_1, \cdots, \phi_r)$ em vez de $Z(\{\phi_1, \cdots, \phi_r\})$.

Definição A.2. (*Conjunto algébrico afim*) Um subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ é dito um conjunto algébrico afim se $X = Z(T)$ para algum $T \subset \mathbb{K}[z_1, \cdots, z_n]$:

$$X = Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \ : \ \ \phi(p) = 0 \ \ \forall \phi \in T\}.$$

Vejamos agora propriedades fundamentais para o nosso trabalho, satisfeitas pelos conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n$:

Proposição A.3. Sejam $I_\beta \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (com $\beta \in B$), conjuntos algébricos:

1. A interseção qualquer de uma coleção de conjuntos algébricos e um conjunto algébrico.

2. A união finita de conjuntos algébricos e um conjunto algébrico.

3. Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ são algébricos.

Demonstração. : **(1)** Se $\{I_\beta\}$ é uma coleção de conjuntos algébricos quaisquer, então para cada $\beta \in B$ existe $T_\beta \in K[x_1, \cdots, x_n]$, com K um corpo, tal que $I_\beta = Z(T_\beta)$. Mostraremos que

$$\bigcap_\beta I_\beta = Z\left(\bigcup_\beta T_\beta\right).$$

Dado $P \in \bigcap_\beta I_\beta = \bigcap_\beta Z(T_\beta)$ então $P \in I_\beta$ para todo $\beta \in B$, isto é, $P \in Z(T_\beta)$ para todo $\beta \in B$, logo

$$f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T_\beta,\ \beta \in B \quad \Rightarrow \quad P \in Z(\cup_\beta T_\beta).$$

Assim, (i) $\bigcap_{\beta \in B} I_\beta = \bigcap_{\beta \in B} Z(T_\beta) \subset Z(\cup_\beta T_\beta)$.

Agora considere $f \in \cup_{\beta \in B} T_\beta$, isto é, $f \in T_\alpha$ para algum $\alpha \in B$, Daí

$$P \in Z(\cup_\beta T_\beta) \quad \Rightarrow \quad f(P) = 0 \ \ \forall \ \ f \in \bigcup T_\beta \quad \Rightarrow \quad P \in Z(T_\beta) = I_\beta \ \ \forall \ \ \beta \in B.$$

Logo, $P \in \bigcap I_\beta$ e (ii) $\quad Z(\cup_\beta T_\beta) \subset \bigcap_{\beta \in B} I_\beta$. Portanto, de (i) e (ii), concluímos que $\bigcap_\beta I_\beta = Z(\cup_\beta T_\beta)$, ou seja, a interseção qualquer de uma coleção de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.

(2) Observe que basta mostrar mostrar o resultado para dois conjuntos algébricos, isto é, que dados $I_\alpha,\ I_\gamma$ com $\alpha,\ \gamma \in B$ tem-se que $I_\alpha \cup I_\gamma$ é um conjunto algébrico. Dados $I_\alpha,\ I_\gamma$ com $\alpha,\ \gamma \in B$ temos que existem $T_\alpha,\ T_\gamma \in K[x_1, \cdots, x_n]$, com K um corpo, tal que $I_\alpha = Z(T_\alpha)$ e $I_\gamma = Z(T_\gamma)$.

Considere o conjunto

$$T_\alpha T_\gamma = \{f_\alpha . f_\gamma \quad : \quad f_\alpha \in T_\alpha \ \ e \ \ f_\gamma \in T_\gamma\}$$

Afirmação A.4. $I_\alpha \cup I_\gamma = Z(T_\alpha T_\gamma)$.

Assim, $I_\alpha \cup I_\gamma$ é um conjunto algébrico.

(3) Observe que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = Z(0)$, onde $0 \in K[x_1, \cdots, x_n]$ e que $\emptyset = Z(c)$ com $c \in K$ constante. □

A.1.1 Componentes irredutíveis de um conjunto algébrico

Um conjunto algébrico pode ser a união finita de vários conjuntos algébricos menores, como por exemplo, $Z(y^2 - 2xy - x^2y + x^3) = Z((y - x^2).(y - x)) = Z(y - x^2) \cup Z(y - x)$. De maneira geral, temos:

Definição A.5. Um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{A}^n$ é redutível se $V = V_1 \cup V_2$ onde V_1 e V_2 são conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n$ e $V_i V$. Caso contrário, dizemos que V é irredutível.

Para qualquer subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{A}^n$ podemos considerar os polinômios que se anulam em $\mathbb{X}$. Estes formam um ideal em $K[x_1, \cdots, x_n]$, chamado o ideal de $\mathbb{X}$ e que denotaremos por $I(\mathbb{X})$. Ou seja,

$$I(\mathbb{X}) = \{f \in K[x_1, \cdots, x_n] \ \mid \ f(p) = 0 \ \ \forall \ \ p \in \mathbb{X}\}.$$

Observação A.6. Para qualquer que seja $\mathbb{X}$, ocorre que $I(\mathbb{X})$ é finitamente gerado, pois o anel de polinômios $K[x_1, \cdots, x_n]$ é Noetheriano. Este último fato se deve aos fatos (i) K é um corpo, logo é um anel Noetheriano, e (ii) Se K é um anel Noetheriano então $K[x_1, \cdots, x_n]$ também o é. Assim, todo ideal de $K[x_1, \cdots, x_n]$ é finitamente gerado.

Observação A.7. Existem algumas propriedades importantes e de fácil verificação que mostram algumas relações entre conjuntos algébricos e seus ideais, como por exemplo:

1. Se $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$, então $I(\mathbb{X}) \supset I(\mathbb{Y})$.
2. $I(\emptyset) = K[x_1, \cdots, x_n]$; $I(\mathbb{A}^n) = (0)$ se K for um corpo infinito; $I(\{(a_1, \cdots, a_n)\}) = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$ que é o ideal finitamente gerado pelos polinômios $f_i = x_i - a_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ e com $a_i \in K$.
3. $I(Z(S)) \supset S$ para qualquer que seja $S[x_1, \cdots, x_n]$ e $Z(I(X)) \supset X$ para qualquer que seja $X \subset \mathbb{A}^n$.
4. $Z(I(Z(S))) = Z(S)$ para qualquer que seja $S[x_1, \cdots, x_n]$ e $I(Z(I(X))) = I(X)$ para qualquer que seja $X \subset \mathbb{A}^n$. Assim, se S é um conjunto algébrico, então $S = Z(I(S))$; e se I é um ideal de um conjunto algébrico, então $I = I(Z(I))$.

O resultado a seguir relaciona conjuntos algébricos irredutíveis e seus ideais primos, o que facilita a caracterização de tais conjuntos.

Proposição A.8. Um conjunto algébrico $\mathbb{X}$ é irredutível se, e somente se, o ideal $I(\mathbb{X})$ é primo.

Demonstração. Suponha que $I(\mathbb{X})$ não seja primo, isto é, existe $f_1 f_2 \in I(\mathbb{X})$ com f_1 e f_2 não pertencendo a $I(\mathbb{X})$, logo

$$\mathbb{X} = (\mathbb{X} \cap Z(f_1)) \cup (\mathbb{X} \cap Z(f_2)) \text{ e } (\mathbb{X} \cap Z(f_i))\mathbb{X} \quad (i = 1, 2),$$

ou seja, $\mathbb{X}$ é redutível. Reciprocamente, se $\mathbb{X}$ é redutível, isto é, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$, com $\mathbb{X}_i\mathbb{X}$ $(i = 1, 2)$, então, (pela Observação 1.1.3-(1)), $I(\mathbb{X}_i)I(\mathbb{X})$ $(i = 1, 2)$. Logo, existem $f_1 \in I(\mathbb{X}_1)$ tal que f_1 não pertence a $I(\mathbb{X})$ e $f_2 \in I(\mathbb{X}_2)$ tal que f_2 não pertence a $I(\mathbb{X})$. Como $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$ e $f_1 \in I(\mathbb{X}_1)$ e $f_2 \in I(\mathbb{X}_2)$, então $f_1 f_2 \in I(\mathbb{X})$. De fato: dado $r \in \mathbb{X}$ temos que $r \in \mathbb{X}_1$ ou $r \in \mathbb{X}_2$ e portanto $f_1(r) = 0$ ou $f_2(r) = 0$. Logo $(f_1 f_2)(r) = f_1(r) f_2(r) = 0$, mas f_1 e f_2 não pertencem a $I(\mathbb{X})$, ou seja, $I(\mathbb{X})$ não é primo. □

Queremos mostrar que um conjunto algébrico é a união finita de conjuntos algébricos irredutíveis. Assim, se $\mathbb{X}$ é irredutível, escrevemos $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$; e se $\mathbb{X}_2$ é irredutível, escrevemos $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_3 \cup \mathbb{X}_4$ e assim por diante. Logo, precisamos mostrar que esse processo pára.

Lema A.9. Seja $\mathcal{F}$ qualquer coleção não vazia de ideais em um anel Noetheriano $\mathbb{R}$. Então $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal, isto é, exite um ideal $I \in \mathcal{F}$ tal que I não está contido em nenhum outro ideal de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Usando o **axioma da escolha**, podemos escolher um ideal de cada subconjunto de $\mathcal{F}$. Seja I_0 o ideal escolhido para o $\mathcal{F}$ em si. Defina o conjunto $\mathcal{F}_1 = \{I \in \mathcal{F} \ : \ I_0\}$ e seja I_1 o ideal escolhido em $\mathcal{F}_1$. Defina o conjunto $\mathcal{F}_2 = \{I \in \mathcal{F} \ : \ I_1\}$ e seja I_2 o ideal escolhido em $\mathcal{F}_2$. Defina o conjunto $\mathcal{F}_3 = \{I \in \mathcal{F} \ : \ I_2\}$ e assim por diante. Note que para concluirmos o nosso resultado, basta mostrar que $\mathcal{F}_n = \emptyset$ para algum n, isto é, a cadeia crescente de ideais $I_n \supset I_{n-1} \supset \cdots \supset I_2 \supset I_1 \supset I_0$ estabiliza. Suponha que não. Seja $I = \bigcup_{n=0}^{\infty}$ um ideal de $\mathbb{R}$ e sejam $f_1, \cdots, f_r$ os geradores de I. Cada $f_i \in I_n$ para n suficientemente grande. Logo $I_n = I$ e, assim, $I_{n+1} = I_n$. Absurdo, pois $I_{n+1}I_n$. □

Segue imediatamente do Lema anterior que qualquer coleção de conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n$ tem um elemento minimal. De fato: se $\{\mathbb{X}_\alpha\}$ é uma tal coleção, seja $I(\mathbb{X}_{\alpha_0})$ o elemento maximal da coleção de ideais $\{I(\mathbb{X}_\alpha)\}$. Então $\mathbb{X}_{\alpha_0}$ é claramente o elemento minimal da coleção $\{\mathbb{X}_\alpha\}$.

Teorema A.10. Seja $\mathbb{X}$ um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n$. Então existem únicos conjuntos algébricos irredutíveis $\mathbb{X}_1, \cdots, \mathbb{X}_n$ tais que $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_n$ e $\mathbb{X}_i\mathbb{X}_j$ para todo $i \neq j$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{\mathbb{X} \subset \mathbb{A}^n \;:\; \mathbb{X}$ *é um conjunto algébrico e não é a união de um número finito de conjuntos algébricos irredutíveis* $\}$. Queremos mostrar que $\mathcal{F} = \emptyset$. Suponha que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e seja Y um elemento minimal de $\mathcal{F}$. Como $Y \in \mathcal{F}$, então Y é não irredutível, caso contrário Y seria a união de um número finito de conjuntos algébricos irredutíveis. Daí $Y = Y_1 \cup Y_2$, com $Y_i Y$ $i = 1, 2$. Como Y é minimal, temos que Y_i não pertence a $\mathcal{F}$ e, assim, $Y_i = Y_{i_1} \cup \cdots \cup Y_{i_{m_i}}$ com Y_{ij} irredutíveis. Logo $Y = \bigcup_{i,j} Y_{ij}$. Absurdo. Portanto, qualquer conjunto algébrico Y pode ser escrito como $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$, com Y_i irredutível $(i = 1, ..., m)$. Para concluir que $Y_i Y_j$ para todo $i \neq j$, basta descartar qualquer Y_i tal que $Y_i \subset Y_j$ para $i \neq j$.

Para mostrar a unicidade, seja $Y = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ uma outra decomposição. Então $Y_i = \bigcup_j (W_j \cap Y_i)$ e, assim, $Y_i \subset W_{j(i)}$ para algum $j(i)$. Analogamente $W_{j(i)} \subset Y_k$ para algum k. Mas $Y_i \subset Y_k$ implica $i = k$ e, assim, $Y_i = W_{j(i)}$. Também cada $W_j = Y_{i(j)}$ para algum $i(j)$. □

Observação A.11. $\mathbb{X}_1, \cdots, \mathbb{X}_n$ são chamados componentes irredutíveis de $\mathbb{X}$. Além disso, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_n$ é a decomposição de $\mathbb{X}$ em componentes irredutíveis.

A.1.2 Hilbert's Nullstellensatz

Se nos é dado um conjunto algébrico $\mathbb{X}$ em $\mathbb{A}^n$, queremos encontrar uma maneira de descrever $\mathbb{X}$ em termos de um conjunto de polinômios que definem $\mathbb{X}$. O Nullstellensatz, ou Teorema dos zeros, nos dá a exata relação entre os conjuntos algébricos e seus ideais. Nessa subseção, veremos o Teorema Hilbert's Nullstellensatz e alguns seus corolários importantes para o nosso estudo em questão. Serão ocultadas as demonstrações dos fatos dessa subsseção devido a necessidade (para as demonstrações) de um arcabouço maior de conteúdo de Álgebra Comutativa que não será tratado aqui por motivos de objetividade. Salvo menção em contrária, K denota um corpo algebricamente fechado.

Definição A.12. Se I e um ideal qualquer em $\mathbb{R}$, o conjunto

$$\sqrt{I} = \{a \in \mathbb{R} \;:\; a^n \in I \;\; para \;\; algum \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

é chamado o conjunto radical de I.

Observação A.13. $\sqrt{I}$ é um ideal contendo I.

Um ideal I é chamado um ideal radical se $I = \sqrt{I}$. Observe que dado um conjunto algébrico $\mathbb{X}$, ocorre que se $f^n \in I(\mathbb{X})$ para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $f \in I(\mathbb{X})$. Logo, $I(\mathbb{X})$ é um ideal radical para qualquer $\mathbb{X}$ em $\mathbb{A}^n$.

Teorema A.14. (Hilbert's Nullstellensatz)
Seja I um ideal em $K[x_1, \cdots, x_n]$, com K um corpo algebricamente fechado. Então $I(Z(I)) = \sqrt{I}$. Ou seja, se f_i $(i = 1, ..., r)$ e g pertencem a $K[x_1, \cdots, x_n]$, e g se anula sempre que f_i se anula, então existe uma equação $g^N = a^1 f^1 + \cdots + a^n f^n$, para algum $N > 0$ e $a^i \in K[x_1, \cdots, x_n]$ para todo $i = 1, 2, \cdots, r$.

Corolário A.15. Se I é um ideal radical em $K[x_1, \cdots, x_n]$, então $I(Z(I)) = I$. Logo, existe uma correspondência injetiva entre ideais radicais e conjuntos algébricos.

Corolário A.16. Se I é um ideal primo em $K[x_1, \cdots, x_n]$, então $Z(I)$ e irredutível. Logo, existe uma correspondência injetiva entre ideais primos e conjuntos algébricos irredutíveis.

Corolário A.17. Seja $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ não constante e $f = f_1^{n_1}. \cdots .f_r^{n_r}$ a decomposição de f em fatores irredutíveis. Então $Z(f) = Z(f_1) \cup \cdots \cup Z(f_r)$ e a decomposição de $Z(f)$ em componentes irredutíveis e $I(Z(f)) = (f_1, \cdots, f_r)$. Logo, existe uma correspondência injetiva entre polinômios irredutíveis de $K[x_1, \cdots, x_n]$ e hipersuperficies em $\mathbb{A}^n$.

Corolário A.18. Seja I um ideal em $K[x_1, \cdots, x_n$, então $Z(I)$ é um conjunto finito se, e somente se, $\frac{K[x_1,\cdots,x_n]}{I}$ é um espaço vetorial sobre K de dimensão finita. Em caso afirmativo, o número de pontos em $Z(I)$ é menor ou igual a $dim\left(\frac{K[x_1,\cdots,x_n]}{I}\right)$.

A.1.3 Topologia de Zariski

Nesta seção consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que é um corpo algebricamente fechado.

Definição A.19. A coleção dos subconjuntos algébricos de $\mathbb{C}^n$ satisfaz o axioma de coleção dos subconjuntos fechados de uma topologia, chamada a topologia de Zariski:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{C}^n$ são algébricos.
2. $\mathbb{X}_1, \cdots, \mathbb{X}_m \subset \mathbb{C}^n$ algébricos $\Rightarrow \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_m$ é algébrico.
3. $\mathbb{X}_i$ é algébrico para todo $i \in I \Rightarrow \bigcap_i \mathbb{X}_i$ é algébrico.

Observação A.20. Veja a proposição (xxx) (referenciar)

Se $X \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto, convencionaremos considerá-lo como subespaço topológico com a topologia de Zariski induzida.

Proposição A.21. (Base de abertos) Para cada $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, $X \subset \mathbb{C}^n$, seja $X_f = X \setminus Z(f)$. Então a coleção dos X_f é uma base de abertos da topologia de Zariski em X.

Demonstração. Podemos supor $X = \mathbb{C}^n$. Seja U um aberto e seja $Y = XU$. Trata-se de um fechado, e assim $Y = Z(I)$ para algum ideal I. Logo, $Y = \bigcap_{f \in I} Z(f)$ e, passando ao complementar, $U = \bigcup_{f \in I} X_f$. □

Proposição A.22. A topologia de Zariski em $\mathbb{C}^n$ não é Hausdorff. Entretanto, ela é T_1, isto é, todo subconjunto finito e fechado.

Referências Bibliográficas

[Ati94] Michael Atiyah. *Introduction to commutative algebra*. Westview Press, 1994. 17, 59

[BAJ99] Gastao A Braga e Francisco Fontenele Araujo Jr. O limite termodinâmico e independência das condiçoes de contorno para o modelo de ising d-dimensional1. *Anais da VIII semana da iniciação cientifica da UFMG. Belo Horizonte*, 1999. 30

[Ber08] Adriano Thiago Lopes Bernardino. *Ideais de aplicaçoes multilineares e polinômios entre espaços de Banach*. Tese de Doutorado, Dissertaçao de Mestrado, UFPB, 2008. 5, 20

[CCF14] Leandro Chiarini, Leandro Cioletti e Filipe Fernandes. Polinômios de lee-yang com coeficientes complexos. *Matemática Universitária-SBM*, páginas 52–53, 2014. 41

[COS13] VALDIR SOARES COSTA. Uma introdução aos polinômios simétricos e aplicações. 2013. 6

[Flo11] Carlos AA Florentino. Introdução à teoria das funções complexas. 2011. 1, 2

[Geo11] Hans-Otto Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9. Walter de Gruyter, 2011. 32

[Gra02] JH Grace. The zeros of a polynomial. Em *Proc. Cambridge Philos. Soc*, volume 11, páginas 352–357, 1902. 7

[Hal07] André Arbex Hallack. Noçoes (básicas) de topologia geral, espaços métricos, espaços normados e espaços com produto interno. 2007. 1

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013. 59

[Hit] Eduardo Hitomi. O teorema fundamental para polinômios simétricos. 6

[Lim] Paulo Cupertino Lima. O teorema de lee-yang. 30

[Lim70] Elon Lages Lima. *Elementos de topologia geral*. Ao Livro Técnico, 1970. 1, 4, 17

[Lim04] Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004. 17, 30

[Min00] Robert Adolfovich Minlos. *Introduction to mathematical statistical physics*. Number 19. American Mathematical Soc., 2000. 30, 38

[Net93] Alcides Lins Neto. *Funções de uma variável complexa*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993. 1, 3, 40, 41

[RAS15] Firas Rassoul-Agha e Timo Seppäläinen. *A course on large deviations with an introduction to Gibbs measures*, volume 162. American Mathematical Soc., 2015. 30

[Rue99] David Ruelle. *Statistical mechanics: Rigorous results*. World Scientific, 1999. 30, 39

[Rue10] David Ruelle. Characterization of lee-yang polynomials. *Annals of Mathematics*, páginas 589–603, 2010. ix, 5, 17

[Sim14] Barry Simon. *The statistical mechanics of lattice gases*, volume 1. Princeton University Press, 2014. 30

[sNP94] Ra suL NauLin e CarLos Pabst. The roots of a polynomial depend continuously on its coefficients. *Rev. Colombiana Mat*, 28:35–37, 1994. 50