Caos em dinâmica topológica

Thiago de Araujo Ferreira Pinto

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática Aplicada

Programa: Mestrado em Matemática Aplicada
Orientador: Manuel Valentim de Pera Garcia

São Paulo, fevereiro de 2013

Caos em dinâmica topológica

Esta é a verso original da dissertação elaborada pelo
candidato Thiago de Araujo Ferreira, tal como
submetida à comissão julgadora.

À Vovó e à Titia

O Vencedor

Olha lá, quem vem do lado oposto
Vem sem gosto de viver
Olha lá, que os bravos são
Escravos sãos e salvos de sofrer
Olha lá, quem acha que perder
É ser menor na vida
Olha lá, quem sempre quer vitória
E perde a glória de chorar
Eu que já não quero mais ser um vencedor
Levo a vida devagar pra não faltar amor

Olha você e diz que não
Vive a esconder o coração

Não faz isso, amigo
Já se sabe que você
Só procura abrigo
Mas não deixa ninguém ver
Por que será?

Eu que nunca fui assim
Muito de ganhar
Junto às mãos ao meu redor
Faço o melhor que sou capaz
Só pra viver em paz

Marcelo Camelo

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à minho vó Tereza e ao meu padrinho Miguel que me deixaram nesse percurso tendo deixado muitos ensinamentos.

Agradeço especialmente à Mamãe e ao Papai por estarem sempre comigo e me darem todo o amor necessário para minha vida.

Agradeço carinhosamente a toda minha família, em especial à minha irmã Thais pela palavra moderada, à minha tia Rosa pela ajuda oferecida, à minha madrinha Ivone pela vida dedicada e ao meu avô Manoel pela vida vivida. Também a Anezio, Celso, Luis, Jacira, Naiara, Nelson e Terezinha.

Agradeço imensamente à Camila que esteve ao meu lado durante todo o processo de redação.

Agradeço desmedidamente ao meu orientador Manuel por sua genialidade matemática e, principalmente, por ter aturado minhas falhas e desaparecimentos durante todo esse período sem nunca desistir de mim.

Agradeço fortemente à professora Sônia que na prática foi minha co-orientadora sempre acrescentando palavras brilhantes aos nossos seminários, à mente privilegiada do professor Barone por quem guardo muito carinho, ao professor Fichmann que se tornou um grande amigo, aos professores Fábio e Ricardo pela colaboração, além de todos os funcionários e professores do IME que muito acrescentaram à minha formação, a citar: Bissacot, Chaim, Clodoaldo, Cordaro, Helena, Hirata, Humes, Leonardo, Nelson, Orlando, Pádua, Salvador, Saulo, Serginho, Soto, Tausk, Toscano, Weschler, Zara, entre outros que me perdoem esquecê-los nesse momento.

Agradeço nostalgicamente à professora Dora que foi a minha primeira professora de matemática, ao Robson, à Gisele, à Lígia e todos os meus professores da Arte de Viver, os quais fizeram jus ao belo nome dessa escola.

Agradeço fraternalmente ao Marcelo, que me foi um grande companheiro em muitas situações e a todos os meus amigos do IME, a citar: Antonieta, Ari, Arthur, Belotto, Bettiol, Bin, Bittei, Bolinhas, Boneco, Camilla, Canetta, Chester, Darah, Dani, Danilo, David, Déa, Débora, Edu, Enéas, Fan, Fês, Gerolin, Hana, Helen, Israel, Japas, John, Jony, Julio, Kali, Karen, Kelly, Larissa, Liginha, Marchetti, Maria Lígia, Marília, Militer, Oda, Pamela, Paola, Paulera, Paulinho, Paulo, Pedro, Pedrosa, Rafinha, Rapper, Renatinho, Ri, Ricardo, Riccardo, Rodolfo, Sapo, Sarah, Seno, Tais, Tiago, Tigras, Ting, Tuka, Victor, Vini, Willy, Zeca, Zumbis, entre outros que me perdoem esquecê-los nesse momento.

Agradeço efusivamente a todos os amigos, os colegas, enfim...a todas as pessoas que já passaram pela minha vida, a citar: Ádea, Bruno, Bulla, Caio, Cris, Deco, Du, Fernando, Gandula, Kleber, Leandro, Maestro, Marco, Mayra, Nélia, Nilzete, Quén, Rafa, Renato, Rita, Terezinha, Thais, Thata, entre outros que me perdoem esquecê-los nesse momento.

Agradeço com todas as minhas forças à Vovó Dete e à Titia Sylvia por terem se tornado parte de mim.

Resumo

Ferreira Pinto, T. A. **Caos em dinâmica topológica**. 2013. Disseração (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Ao longo dos tempos, o significado da palavra *caos* sempre foi algo muito confuso. Desde o final do século XIX, cientistas vêm estudando o comportamento de sistemas dinâmicos e pesquisadores de diversas áreas do conhecimento -tais como a matemática, a astronomia, a meteorologia, a física e a biologia - começaram a descrevê-los como *complicados*, *irregulares*, *imprevisíveis*, *sensíveis às condições iniciais*, entre outros.

Foi muito provavelmente em 1975, com os matemáticos Tien-Yien Li e James Yorke, que o termo *caótico* foi usado pela primeira vez para caracterizar uma dinâmica. Talvez pelo valor poético do vocábulo caos, diversos pesquisadores e até mesmo pessoas de fora do mundo acadêmico passaram a se interessar pelo que seria então batizado de *Teoria do caos*. Na matemática, passou-se a procurar conceitos que poderiam definir o que seria um sistema dinâmico caótico. Nesta dissertação, apresentaremos e faremos relações entre os principais conceitos que já foram ligados ao termo *caos* em sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos.

Palavras-chave: Caos; Sistemas dinâmicos; Espaços métricos compactos.

Abstract

Ferreira Pinto, T. A. **Chaos in Topological Dynamics**. 2013. Disseração (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Over the years, the meaning of the word *Chaos* has always been very obscure. Since the late 19th century, scientists have been studying the behavior of Dynamical Systems and researchers from different fields of knowledge -such as Mathematics, Meteorology, Physics and Biology- have began to describe them as *complicated*, *irregular*, *unpredictable*, *sensitive to initial conditions*, between others.

It was probably in 1975, with Mathematicians Tien-Yien Li and James Yorke, that the term *Chaotic* was first used to characterize a Dynamical System. Probably because of the poetic value of the vocable *Chaos*, various researchers and even people outside of academia became interested in what would be named *Chaos Theory*. In Mathematics, people started to look for concepts that could define what would be a Chaotic Dynamical System. In this dissertation, we present relations between the key concepts that have already been linked to the term *Chaos* in Dynamical Systems on Compact Metric Spaces.

Keywords: Chaos; Dynamical Systems; Compact Metric Spaces.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, trataremos do conceito de *caos* na matemática. A ideia de *caos* sofreu alterações ao longo do tempo e a usaremos aqui para retratar o comportamento aparentemente errático de dinâmicas geradas em sistemas ditos determinísticos. Muitas propriedades que hoje são relacionadas ao conceito de caos já eram estudadas há muito tempo por grandes matemáticos como *Poincaré, Birkhoff, Smale, Kolmogorov*, $\check{S}arkovs'ki\breve{i}$, entre outros, mas foi em 1975 a primeira vez que o termo foi usado na literatura matemática. Os norte-americanos *Tien-Yien Li* e *James Yorke* em [LY75] *"Period Three Implies Chaos"* usaram, aparentemente de forma despretensiosa, o termo *caótico* para caracterizar uma dinâmica de aplicações. Em um contexto de dinâmicas em intervalos da reta, eles demonstraram que a presença de uma órbita de período três no sistema garantia a existência de um conjunto não-enumerável de pontos cujas órbitas em alguns momentos se aproximavam e e em outros momentos se afastavam.

Caos muitas vezes é associado ao conceito de "imprevisibilidade" em sistemas dinâmicos num sentido que, em matamética, é definido como *sensibilidade em relação às condições iniciais* Essa propriedade quantifica a ideia de que pequenas alterações no sistema podem se propagar e determinar rumos completamente diferentes. Dessa forma, em sistemas com essa propriedade, seria difíicil fazermos boas previsões, já que os dados colhidos sempre têm um certo grau de imprecisão. Enquanto isso, a cultura popular identifica como caos qualquer coisa que lhe pareça um pouco bagunçado.

Nesta dissertação, restringimo-nos ao estudo de sistemas dinâmicos determinísticos e discretos, abordando apenas aspectos "topológicos" dos mesmos (sem explorar, por exemplo, diferenciabilidade das aplicações envolvidas). Parece-nos que os aspectos de dinâmica topológica envolvidos já apresentam uma boa perspectiva dos fenômenos ligados a *caos*.

O capítulo 2 do trabalho apresenta as preliminares básicas e elementares para o estudo de sistemas dinâmicos que são estudados, em seus aspectos gerais, no capítulo 3. No capítulo 4, faz-se uma descrição dos conceitos de entropia comparando a noção de entropia topológica com o conceito de "complexidade topológica". O capítulo 5 apresenta uma comparação entre os conceitos de *caos* definidos no texto e, por fim, no capítulo 6 tanta-se fazer algo que possa chamar-se *conclusão*, que vá além da constatação, deixada clara ao longo do trabalho, que esta gama de conceitos e relações são, estas sim, um verdadeiro caos.

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos

Em termos muito pouco formais, um sistema dinâmico é um conjunto de estados que muda de acordo com o tempo respeitando alguma determinada regra.

A posição de uma partícula em função do tempo ou a cotação do dólar ao final de cada dia são exemplos de sistemas dinâmicos, sendo o primeiro um sistema cuja variável "tempo" é real e o segundo um sistema cuja variável "tempo" toma valores em um conjunto discreto.

2.1 Preliminares

Apresentaremos alguns conceitos básicos que serão úteis para a leitura do texto subsequente.

2.1.1 Algébricas

As estruturas algébricas mais simples são os conjuntos munidos de uma operação binária.

Definição 1 *Um monóide é um par $(G, \cdot)$ em que G é um conjunto não vazio e $\cdot$ é uma operação em G com as propriedades associativa e elemento neutro.*

O conjunto dos números naturais munidos da soma é um exemplo de *monóide*: $(\mathbb{N}, +)$ em que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$[1].

Definição 2 *Um grupo é um monóide $(G, \cdot)$ em que todos os seus elementos têm um inverso, isto é, para todo $a \in G$, existe $b \in G$, tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$, em que e é o elemento neutro do grupo.*

O conjunto dos números inteiros munidos da soma é um exemplo de *grupo*: $(\mathbb{Z}, +)$ em que $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto, então $G(A) = \{f : A \to A \ : \ f \text{ é } \textit{bijetora}\}$ munido da composição de funções é outro exemplo de grupo.

Definição 3 *Um grupo $(G, \cdot)$ é dito* comutativo ou abeliano*, quando $\cdot$ for uma operação comutativa, isto é, $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer $a, b \in G$.*

[1] Neste texto, consideramos o 0 como um número natural

2.1.2 Topológicas

Listaremos aqui as principais definições e propriedades da topologia que nos serão úteis neste texto.

Definição 4 *Um espaço topológico é um par (X, τ), em que X é um conjunto não vazio e $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ é uma família de subconjuntos de X satisfazendo:*

- $\emptyset \in \tau$ *e* $X \in \tau$ *;*
- $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$*, para todo* $\mathcal{A} \subset \tau$*;*
- $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$*, para todo* $\mathcal{A} \subset \tau$ *com* $\mathcal{A}$ *finito.*

Neste caso, dizemos que τ é uma topologia em X e seus elementos são os conjuntos abertos de X. Os conjuntos fechados de X são aqueles cujos complementares são abertos.

Definição 5 *Uma base de um espaço topológico (X, τ) é uma coleção de abertos tal que qualquer aberto é uma união de abertos dessa coleção. Ou seja, $\beta \subset \tau$ é dito uma base de (X, τ) se para todo $A \in \tau$, existe $S = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \beta$ tal que $A = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.*

Definição 6 *Sejam (X, τ) e (Y, Γ) dois espaços topológicos. Uma função $T : X \to Y$ é dita contínua se $f^{-1}(A) \in \tau$, para todo $A \in \Gamma$ (isto é, se as pré-imagens de abertos de Y são abertos de X).*

Definição 7 *Um monóide topológico é uma terna $(G, \cdot, \tau)$ em que $(G, \cdot)$ é um monóide e $\cdot : G \times G \to G$ é uma operação contínua na topologia τ.*

Definição 8 *Um espaço métrico é um par (M, d), em que M é um conjunto não vazio e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo:*

- $d(x, y) \geq 0$*, para quaisquer* x, y *em* M*;*
- $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$*;*
- $d(x, y) = d(y, x)$*, para quaisquer* x, y *em* M*;*
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*, para quaisquer* x, y, z *em* M*;*

Neste caso, dizemos que d é uma métrica ou uma distância em M. Observe que todo espaço métrico é um espaço topológico de uma maneira natural: dado um ponto $x \in X$ e um número positivo $r \in \mathbb{R}$, definimos a bola aberta de centro em x e raio r por $B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$ e, dessa forma, definimos a topologia oriunda da métrica d como $\tau = \{A \in \mathcal{P}(M) : \forall x \in A, \exists r > 0 \mid B(x, r) \subset A\}$.

Se X é um espaço topológico, uma cobertura aberta de X é uma coleção $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de abertos de X tal que $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X$ e, nesse caso, dizemos que $\mathcal{C}$ cobre X. Uma coleção $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ é dita uma subcobertura de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{S}$ for uma cobertura de X.

Definição 9 *Dizemos que X é compacto se toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ tiver uma subcobertura finita.*

Uma propriedade básica sobre espaços compactos, cuja demonstração omitiremos, é a seguinte: (ver [Rud76] para referência)

Proposição 1 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua. Então $f(K) \subset Y$ é compacto para todo $K \subset X$ compacto.*

Definição 10 *Seja (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de X. Dizemos que $\rho > 0$ é um* número de Lebesgue *da cobertura $\mathcal{C}$ se para todo $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B(x, \rho) \subset C_\lambda$.*

Demonstraremos a seguinte propriedade a qual usaremos algumas vezes nessa dissertação.

Lema 1 (Lebesgue) *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Então toda $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ cobertura aberta de X tem um* número de Lebesgue.

Dem: Como X é compacto, $\exists\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\{C_{\lambda_j}\}_{j \in \{1,\dots,n\}}$ cobre X. Agora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, defina $f_j : X \to \mathbb{R}$ por $f_j(x) = d(x, (C_{\lambda_j})^c) = inf\{d(x, y) \mid y \in (C_{\lambda_j})^c\}$. Sabemos que f_j é contínua $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ e, portanto, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = max\ \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ também é contínua. Como X é compacto, $\varphi(X) \subset \mathbb{R}_+$ é compacto.
Então, seja $\rho = min\{\varphi(x) \mid x \in X\}$. Claro que $\rho > 0$, pois $\rho = 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in X \mid \varphi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow max\ \{f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})\} = 0 \Rightarrow f_j(\bar{x}) = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \bar{x} \in (C_{\lambda_j})^c, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, o que seria um absurdo, já que $\{C_{\lambda_j}\}_{j \in \{1,\dots,n\}}$ é cobertura de X.
Afirmamos que ρ é um número de Lebesgue para $\mathcal{C}$. De fato, tome $\bar{x} \in X$. Temos que $\rho \leq \varphi(\bar{x}) = max\ \{f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})\}$, donde $\exists \bar{j} \in \{1, \dots, n\} \mid \rho \leq f_{\bar{j}}(\bar{x}) = d(\bar{x}, (C_{\lambda_{\bar{j}}})^c)$ e, portanto, $B(\bar{x}, \rho) \subset C_{\lambda_{\bar{j}}} \in \mathcal{C}$.
$\therefore \rho$ é número de Lebesgue de $\mathcal{C}$. $\square$

Algumas definições são importantes para caracterizar o "tamanho" topológico de alguns subconjuntos de espaços topológicos:

Definição 11 *Seja X um espaço topológico. Temos as seguintes definições básicas:*

(i) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado F_σ se for uma união enumerável de conjuntos fechados;*

(ii) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado G_δ se for uma intersecção enumerável de conjuntos abertos;*

(iii) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado de raro se o seu fecho tiver interior vazio, isto é, se $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$;*

(iv) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado de 1^a categoria em X se puder ser escrito como uma união enumerável de conjuntos raros;*

(v) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado de 2^a categoria em X se não for de 1^a categoria em X;*

(vi) *Um conjunto $A \subset X$ é chamado residual se A^c for de 1^a categoria em X ou, equivalentemente, se puder ser escrito como uma intersecção enumerável de conjuntos abertos densos;*

(vii) *O espaço X é dito um espaço de Baire se todos os seus subconjuntos residuais forem densos ou, equivalentemente, se todos os seus subconjuntos abertos não vazios forem de 2^a categoria em X.*

O conceito de equicontinuidade, que é fundamental para a caracterização de sequências de funções contínuas que tem subsequências uniformemente convergentes no teorema de *Arzelá(1847-1912)-Ascoli(1843-1896)*, será muito útil nesta dissertação.

Definição 12 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos e F uma família de funções de M_1 em M_2. Diz-se que:*

a) *A família F é equicontínua no ponto $\bar{x} \in M_1$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(\bar{x}, y) < \delta$ implica $d_2(f(\bar{x}), f(y)) < \epsilon$, para toda $f \in F$;*

b) *A família F é equicontínua se for equicontínua em cada ponto $x \in M_1$*

c) *A família F é uniformemente equicontínua se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$, para toda $f \in F$.*

O seguinte teorema é muito simples e será de grande valia.

Teorema 1 *Se M_1 é compacto, então a equicontinuidade da família F implica na equicontinuidade uniforme da mesma.*

Dem: Seja $\epsilon > 0$. Pela equicontinuidade de F, para cada $z \in X, \exists \delta_z > 0 \mid d_1(x, z) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(z)) < \frac{\epsilon}{2}, \forall f \in F$.
Note que se $x, y \in B_{d_1}(z, \delta_z)$, então $d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(z)) + d_2(f(z), f(y)) < \epsilon$, para todo $f \in F$.(*)

Agora, como X é compacto, use o lema 1 para obter $\bar{\delta} > 0$ como o número de Lebesgue da cobertura $\mathcal{C} = \{B_{d_1}(z, \delta_z)\}_{z \in X}$, isto é, para todo $x \in X$, existe $z \in X$ tal que $B_{d_1}(x, \bar{\delta}) \subset B_{d_1}(z, \delta_z)$. Logo, $d_1(x, y) < \bar{\delta}$ implica que existe $z \in X$ tal que $y \in B_{d_1}(x, \bar{\delta}) \subset B_{d_1}(z, \delta_z)$, donde por (*) $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$, para todo $f \in F$ e, portanto, F é uniformemente equicontínua. $\square$

2.2 Definindo sistemas dinâmicos

No sentido mais geral possivel, um sistema dinâmico é uma terna (X, F, G), onde X é um conjunto não vazio, G é um monóide e $F : X \times G \to X$ é uma aplicação que satisfaz:

(i) $F(x, e) = x$, para todo x em X, onde e é o elemento neutro do monóide G;

(ii) $F(F(x, g_1), g_2) = F(x, g_1 \cdot g_2)$, para todo x em X, para todos g_1, g_2 em G.

Se X é um espaço topológico e $(G, \cdot)$ um monóide topológico temos que um sistema dinâmico topológico é uma terna (X, F, G), onde $F : X \times G \to X$ é uma aplicação contínua que satisfaz (i) e (ii) como acima.

Quando $G = \mathbb{R}$, dizemos que (X, F) é um sistema dinâmico contínuo e quando $G = \mathbb{N}$ ou $G = \mathbb{Z}$, dizemos que (X, F) é um sistema dinâmico discreto. Nesta dissertação, lidaremos apenas com o segundo caso. Para nós, um sistema dinâmico discreto, ou dinâmica de aplicações, é definido por uma aplicação contínua $T : X \to X$, em que $G = \mathbb{N}$ e $F(x, n) = T^n(x)$ e quando T for inversível, fazemos $G = \mathbb{Z}$. Nestes casos, falaremos do sistema dinâmico (X, T).

2.3 Sistemas dinâmicos discretos

Daremos aqui a terminologia básica dos sistemas dinâmicos discretos.

Seja (X, T) um sistema dinâmico discreto com $G = \mathbb{N}$ ou $G = \mathbb{Z}$. Definimos a órbita de um ponto $x \in X$ como o conjtunto $O_T(x) = \{T^n(x), n \in G\}$. Se $G = \mathbb{Z}$, podemos falar da órbita futura de x como $O_T^+(x) = \{T^n(x), n \geq 0\}$ e a órbita passada de x como $O_T^-(x) = \{T^n(x), n \leq 0\}$.

Temos as seguintes definições básicas:

- Um ponto $x \in X$ é dito *ponto periódico* se $T^n(x) = x$ para algum $n > 0$;

- Chamamos de período do ponto periódico $x \in X$ o menor natural não nulo n com essa propriedade. Um ponto fixo de T é um ponto periódico de período 1;

- Um ponto $x \in X$ é dito *ponto finalmente periódico* se $T^j(x)$ for ponto periódico para algum $j \geq 0$.

Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de período n de T por $Per_n(T)$ e o conjunto dos pontos periódicos de T por $Per(T)$. $Per_{\#}(T) = \{n > 0; \text{existe um ponto periódico de período n para T}\}$ é o conjunto dos números naturais n tais que existem pontos periódicos de periodo n.

Um subconjunto $E \subset X$ é dito um conjunto *invariante* se $T(E) \subset E$.

O conjunto ω-limite de um ponto $x \in X$ é definido por $\omega_T(x) = \{y \in X \mid \exists (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ com $T^{n_i}(x) \to y\}$. Quando T é inversível, definimos o conjunto α-limite de um ponto $x \in X$ por $\alpha_T(x) = \omega_{T^{-1}}(x)$. É um fato conhecido e bastante simples que $\omega_T(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{T^k(x); k \geq n\}}$.

Capítulo 3

Propriedades caóticas de dinâmicas topológicas

A partir deste ponto diremos que (X,T) é um sistema dinâmico se (X,d) for um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma aplicação contínua.

Relembremos que um subconjunto $E \subset X$ é dito um conjunto *invariante* se $T(E) \subset E$. Se E é um conjunto fechado, então a restrição (E, T_E) também é um sistema dinâmico.

Um sistema dinâmico (X,T) é dito minimal se não possuir conjuntos T-invariantes fechados não triviais.

Um sistema dinâmico (X,T) é dito uma isometria se preservar distâncias, isto é, se $d(T(x),T(y)) = d(x,y)$, para todos $x, y \in X$.

Um sistema dinâmico (X,T) é chamado *distal* se todos seus pontos distintos são não proximais, isto é, se $x \neq y$ implica $\liminf_n \{d(T^n(x), T^n(y))\} > 0$

Um sistema dinâmico (X,T) é dito topologicamente conjugado ao sistema dinâmico (Y,F) se existir um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ T = F \circ h$. Como h é homeomorfismo, podemos escrever $F = h \circ T \circ h^{-1}$ e dizemos que h é uma conjugação topológica entre (X,T) e (Y,F).

O fato de (X,T) ser topologicamente conjugado a (Y,F) quer dizer que, em termos de dinâmica topológica, esses sistemas dinâmicos são completamente equivalentes, pois propriedades como órbitas periódicas e ω-limites são preservadas pelas conjugações.

Caso h seja contínua mas não necessariamente um homeomorfismo e satisfizer $h \circ T = F \circ h$, diremos que h é uma semiconjugação. As semiconjugações não preservam todas as propriedades que as conjugações preservam, mas são úteis em muitas situações.

3.1 Dinâmicas simbólicas

Seja $A_m = \{0, \ldots, m-1\}$ e $\Sigma_m = A_m^{\mathbb{N}} = \{S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid s_n \in A_m\}$ o conjunto das sequências infinitas de m símbolos.

Introduziremos uma métrica no espaço Σ_m conforme o que se segue. Dadas duas sequências $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ_m, definimos $\delta_n^{S,T} = 0$ se $s_n = t_n$ ou $\delta_n^{S,T} = 1$ se $s_n \neq t_n$. Também definimos $n^{S,T} = min\ \{n \in \mathbb{N} \mid \delta_n^{S,T} = 1\}$.

Agora, definimos duas métricas em Σ_m por

$d_1(S,T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\delta_n^{S,T}}{2^n}$ e $d_2(S,T) = \frac{1}{2^{n^{S,T}}}$ se $S \neq T$ e $d(S,S) = 0$.

Note que d_1 e d_2 são métricas equivalentes e, por isso, geram a mesma topologia em Σ_m, tornando-o um espaço métrico compacto.

Proposição 2 *O shift de Bernoulli* $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ *definido por* $\sigma((s_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (s_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$*, isto é,* $\sigma(s_0s_1s_2\ldots) = (s_1s_2s_3\ldots)$ *é uma aplicação contínua. Por conta disso,* (Σ_m, σ) *é um sistema dinâmico satisfazendo as seguintes propriedades (ver [Dev89]):*

1. *existem pontos periódicos de todos os períodos;*

2. *existem* m^n *pontos fixos de* σ^n*, dentre eles pontos periódicos de período* n*;*

3. *o conjunto dos pontos periódicos de* σ *é denso em* Σ_m*;*

4. *existe uma órbita densa do* σ *em* Σ_m*.*

As dinâmicas simbólicas no Σ_m são muito úteis, principalmente por serem de fácil entendimento. Dessa forma, ao estudarmos alguns sistemas dinâmicos, muitas vezes procuramos por conjugações topológicas com dinâmicas simbólicas a fim de melhor entender o comportamento desses sistemas.

3.2 Li-Yorke

Conforme já foi dito no capítulo 1, a primeira vez na literatura que a palavra "caos" foi associada a uma dinâmica ocorreu em [LY75]. Eles tentavam entender o comportamento de dinâmicas de aplicações em intervalos da reta e enunciaram uma propriedade que adjetivava essa classe de sistemas dinâmicos como "caótica". As seguintes definições e exemplos ajudarão a entender a situação.

Definição 13 *Seja* (X, T) *um sistema dinâmico. Dizemos que os pontos* x, y *de* X *são proximais se* $\liminf_n \{d(T^n(x), T^n(y))\} = 0$*.*

Exemplo 1 *Se* $X = \mathbb{R}$ *e* $T(x) = kx$ *com* $k < 1$*, então quaisquer dois pontos distintos de* $\mathbb{R}$ *são proximais.*

Definição 14 *Seja* (X, T) *um sistema dinâmico. Dizemos que os pontos* $x, y \in X$ *são não assintóticos se* $\limsup_n \{d(T^n(x), T^n(y))\} > 0$*.*

Exemplo 2 *Se* $X = [0, 1]$ *e* $T(x) = x^2$*, então quaisquer dois pontos ambos diferentes de* 1 *são proximais e para todo* $x \neq 1$*, temos que* x *e* 1 *são não assintóticos.*

Definição 15 *Sejam* (X, T) *um sistema dinâmico e* x, y *pontos de* X*. Dizemos que o par* $\{x, y\}$ *é um par de* Li-Yorke *se* x, y *são simultaneamente proximais e não assintóticos.*

Dois pontos x, y de X são proximais quando existe uma sequência estritamente crescente de naturais $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d(T^{n_k}(x), T^{n_k}(x)) = 0$ e são não assintóticos se existe $\epsilon > 0$ e existe uma sequência estritamente crescente de naturais $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tais que $d(T^{n_l}(x), T^{n_l}(x)) > \epsilon$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Um par de Li-Yorke $\{x, y\}$ de pontos de X tem a propriedade que seus pontos se aproximam em alguns momentos e se afastam em outros, mais precisamente existem subsequências $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d(T^{n_k}(x), T^{n_k}(x)) = 0$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $d(T^{n_l}(x), T^{n_l}(x)) > \epsilon$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico, $x \in X$ um ponto fixo de T e $y \in X$ um ponto cuja órbita é densa em X. Então $\{x,y\}$ é um par de Li-Yorke.*

Como $O(y)$ é densa, claro que $x \in \overline{O(y)}$ e, como x é fixo, obtemos $\liminf_n \{d(T^n(x), T^n(y))\} = \liminf_n \{d(x, T^n(y))\} = 0$, de onde x e y são proximais.

Analogamente, temos que $y \in \overline{O(y)}$ e, como x é fixo, obtemos $\limsup_n \{d(T^n(x), T^n(y))\} = \limsup_n \{d(x, T^n(y))\} \geq d(x,y) > 0$, donde x e y são não assintóticos.

Portanto, $\{x,y\}$ é um par de Li-Yorke.

Definição 16 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico. Dizemos que $S \subset X$ é um conjunto bagunçado*[1] *por T se para todo $\{x,y\} \subset S$ com $x \neq y$, temos que $\{x,y\}$ é um par de Li-Yorke.*

Claro que qualquer par de Li-Yorke forma um conjunto bagunçado. Entretanto, exemplos com maior número de elementos são mais interessantes:

Exemplo 4 *Sejam x e y como no exemplo anterior. Agora seja $S = O_T(y) \cup \{x\}$. Claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{x, T^n(y)\}$ é um par de Li-Yorke pelo que foi mostrado no exemplo anterior. Dados $p \neq q \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{T^p(y), T^q(y)\}$ é um par de Li-Yorke:*
Como $x \in \overline{O(y)}$, existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequência crescente de naturais tal que $T^{n_j}(y) \to x$. Logo, $d(T^{n_j}(T^p(y)), T^{n_j}(T^q(y)))$ $d(T^{n_j}(T^p(y)), T^{n_j}(x)) + d(T^{n_j}(x), T^{n_j}(T^q(y))) = d(T^{n_j}(T^p(y)), x) + d(x, T^{n_j}(T^q(y)))$, donde $T^p(y)$ e $T^q(y)$ são proximais.

Como $y \in \overline{O(y)}$, existe $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequência crescente de naturais tal que $T^{n_j}(y) \to y$. Logo, $d(T^{n_j}(T^p(y)), T^{n_j}(T^q(y))) \to d(T^p(y), T^q(y))$, donde $T^p(y)$ e $T^q(y)$ são não assintóticos.

Portanto, S é um conjunto bagunçado por T.

Demos um exemplo de conjunto bagunçado que contém um ponto fixo e, analogamente, poderíamos construir um exemplo de conjunto bagunçado que contenha um ponto periódico qualquer, isto é, se $p \in X$ é ponto periódico de T e $y \in X$ é um ponto cuja órbita é densa em X, então $S = O_T(y) \cup \{p\}$ é um conjunto bagunçado por T. Todavia, não é possivel que um conjunto bagunçado tenha mais que um ponto periódico e enunciamos essa simples propriedade não citada por Li-Yorke que é de simples verificação:

Proposição 3 *Um conjunto bagunçado contém no máximo um ponto periódico.*

Com tudo isso, podemos definir o primeiro conceito de caos em sistemas dinâmicos que aparecerá nesse trabalho.

Definição 17 *Dizemos que o sistema dinâmico (X,T) é* caótico *no sentido de* Li-Yorke *se existir um subconjunto não enumerável $S \subset X$ bagunçado por T.*

Às vezes, além de exigirmos a existência de um conjunto bagunçado que seja "grande em cardinalidade", isto é, não enumerável, também exigimos que o mesmo seja também "grande topologicamente", isto é, seja denso:

Definição 18 *Dizemos que o sistema dinâmico (X,T) é* densamente caótico *(no sentido de* Li-Yorke*) se existir um subconjunto $S \subset X$ bagunçado por T, não enumerável e denso em X.*

[1] tradução livre de *scrambled*

Podemos encontrar outras variações dessas definições, exigindo diferentes propriedades dos conjuntos bagunçados, além de um aprofundamento no tema em [Kol04], [AK03] e [BGKM02].

Quando *Li* e *Yorke* redigiram [LY75] (artigo que motivou as definições acima) em 1975, eles não tinham conhecimento do *Teorema de Sharkovsky* que define uma ordem de prioridade entre os períodes de órbitas para aplicações do intervalo.

Teorema 2 (Teorema de Sharkovsky) *Seja* $\mathbb{N}^\infty = \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ *munido da seguinte ordem* $\prec$*:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
3 & \succ & 5 & \succ & 7 & \succ & 9 & \succ & \dots & \succ & 2n+1 & \succ & \dots & & & & & & \\
2.3 & \succ & 2.5 & \succ & 2.7 & \succ & 2.9 & \succ & \dots & \succ & 2.(2n+1) & \succ & \dots & & & & & & \\
2^2.3 & \succ & 2^2.5 & \succ & 2^2.7 & \succ & 2^2.9 & \succ & \dots & \succ & 2^2.(2n+1) & \succ & \dots & & & & & & \\
2^3.3 & \succ & 2^3.5 & \succ & 2^3.7 & \succ & 2^3.9 & \succ & \dots & \succ & 2^3.(2n+1) & \succ & \dots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
2^n.3 & \succ & 2^n.5 & \succ & 2^n.7 & \succ & 2^n.9 & \succ & \dots & \succ & 2^n.(2n+1) & \succ & \dots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
2^\infty & \succ & \dots & \succ & \dots & \succ & \dots & \succ & \dots & \succ & 2^n & \succ & \dots & \succ & 2^2 & \succ & 2 & \succ & 1
\end{array}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}^\infty$*, defina* $S(m) = \{m \in \mathbb{N}^\infty : n \preceq m\}$.

Agora seja (J, T) *um sistema dinâmico com* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo da reta e* T *contínua. Então, existe* $m \in \mathbb{N}^\infty$ *tal que* $Per_\#(T) = S(m)$*, isto é,* T *tem órbitas periódicas de todos os períodos* $n \preceq m$.

Também vale a recíproca: para todo $m \in \mathbb{N}^\infty$*, existe um sistema dinâmico* (J,T)[2] *com* $Per_\#(T) = S(m)$.

Obs.: Dizer que T *tem ponto de período* 2^∞ *significa que* T *tem pontos de período* 2^n*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Ver [Šar64] e [Dev89] □

O seguinte teorema nos dará exemplos de sistemas caóticos no sentido de Li-Yorke e parte de sua conclusão é consequência do teorema 2 acima.

Teorema 3 *Sejam* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo,* $T : J \to J$ *uma aplicação contínua e* $a \in J$ *um ponto tal que os pontos* $T^3(a) \leq a < T(a) < T^2(a)$ *(ou* $T^3(a) \geq a > T(a) > T^2(a)$*). Então:*

(LY1) *Existem pontos periódicos de período* m*, para todo* $m > 0$*;*

(LY2) *Existe um conjunto não enumerável* $S \subset J$ *bagunçado por* T.

Para a demonstração desse teorema, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 2 *Sejam* J *um intervalo compacto da reta e* $f : J \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então para todo intervalo compacto* $[c, d]$ *contido na imagem de* f*, existe* $[a, b]$ *contido em* J *tal que* $f([a, b]) = [c, d]$.

Dem: Dado $[c, d] \subset Im(f)$, existem $p, q \in J$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha $p < q$ e defina $a = max\{x < q \mid f(x) = c\}$ o maior ponto à esquerda de q cuja imagem é c, que existe pela continuidade de f. Analogamente, defina $b = min\{x > a \mid f(x) = d\}$ o menor ponto à direita de a cuja imagem é d.

Então, obiamente, $f([a, b]) = [c, d]$. O caso $p > q$ é completamente análogo. □

[2] podemos tomar $J = [0, 1]$

Lema 3 *Sejam J um intervalo compacto da reta, $f : J \to J$ uma função contínua e $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos compactos contidos em J satisfazendo $I_{n+1} \subset f(I_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definindo $\{Q_n = [c_n, d_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ indutivamente por $Q_0 = I_0$ e $Q_{n+1} \subset Q_n$ tal que $f^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$.*

Então os conjuntos $(Q_n = [c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$ formam uma sequência de intervalos compactos encaixantes contidos em J satisfazendo $Q_{n+1} \subset Q_n, f^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $Q_0 \subset I_0$ e para todo $x \in Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ (Q é compacto e não vazio), temos $f^n(x) \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Imediato. □

Lema 4 *Sejam J um intervalo compacto da reta e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para todo intervalo compacto $I = [a, b]$ contido em J com $g(I) \supset I$, existe $p \in I$ ponto fixo de g.*

Dem: Dado $I = [a, b] \subset J$, como $g(I) \supset I$, existem $\alpha, \beta \in I$ tal que $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$.

Logo, $f(x) = g(x) - x$ é tal que $f(\alpha) \leq 0$ e $f(\beta) \geq 0$. Como f é contínua, existe p entre α e β tal que $f(p) = 0$, donde p é ponto fixo de g. □

Demonstração do teorema 3:

(LY1) Consequência do teorema 2. □

(LY2) Sejam $b = T(a), c = T^2(a), d = T^3(a)$ e tome $K = [a, b]$ e $L = [b, c]$. Então $T(K) \supset L$ e $T(L) \supset (K \cup L) \supset K$.

Sejam $\mathcal{I}(L) = \{I \subset L \mid I$ é um intervalo compacto$\}$ e $\mathcal{J} = \{K\} \cup \mathcal{I}(L)$.

Agora defina $\mathcal{M} = \{M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{J}^{\mathbb{N}^*} \mid T(M_n) \supset M_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*; M_n = K$ implica $n = m^2\}$.

Portanto, $\mathcal{M}$ é o conjunto das sequências de intervalos compactos $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $M_n = K$ ou $M_n \subset L$, $T(M_n) \supset M_{n+1}$ e $M_n = K$ somente se n for um quadrado perfeito.

Para cada $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}$, defina $P(M, n) = \#\ \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid M_i = K\}$, ou seja, $P(M, n)$ é o número de vezes que o intervalo K aparece na sequência M até o índice n. Claro que $P(M, n^2) \leq n$, para toda sequência M e para todo $n \in mathbbN^*$.

Agora note que, tomando sequências de números racionais dadas por $(r_n)_{n>0} = (\frac{j_n}{n})$ onde $j_1 = 0$ ou $j_1 = 1$ e $j_{n+1} = j_n$ ou $j_1 = j_{n+1} = j_n + 1$, temos que, dado $r \in [0, 1]$, podemos encontrar uma sequência desse tipo de forma que $\lim_{n\to\infty} r_n = r$.

A partir disso, dado $r \in]\frac{3}{4}, 1[$, é fácil obter uma sequência de intervalos $M^r = (M^r_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(M^r, n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\#\ \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid M_i = K\}}{n} = r$. Sendo $\mathcal{M}_0 = \{M^r\}_{r\in]\frac{3}{4},1[} \subset \mathcal{M}$, claro que $\mathcal{M}_0$ é não enumerável.

Agora, pelo lema 3, para cada $M^r = (M^r_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}_0$, existe $x_r \in L$ tal que $T^n(x_r) \in M^r_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Sendo $S = \{x_r\}_{r\in]\frac{3}{4},1[}$, claro que S também é não enumerável.

Dados dois pontos distintos x_{r_1} e x_{r_2} em S, com $r_1 > r_2$, note que $\lim_{n\to\infty} P(M^{r_1}, n) - P(M^{r_1}, n) = \infty$ e, portanto, existem infinitos valores de n para os quais $T^n(x_{r_1}) \in K$ e $T^n(x_{r_2}) \in L$ ou o contrário e, portanto, uma sequência crescente de naturais $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ com essa propriedade.

Como T^2 é contínua, $\exists\delta > 0$ tal que $T^2(x) < \frac{a+b}{2}$ se $x \in [b - \delta, b] \subset K$.

Logo, $T^n(x_r) \in K \underbrace{\Rightarrow}_{n+2 \text{ não é quadrado perfeito}} T^{n+2}(x_r) \in L \Rightarrow T^n(x_r) < b - \delta$.

Portanto, usando a continuidade, $T^{n_j}(x_{r_1})$ e $T^{n_j}(x_{r_2})$ não podem se acumular, pois $\limsup_n d(T^n(x_{r_1}), T^n(x_{r_2})) \geq \limsup_j d(T^{n_j}(x_{r_1}), T^{n_j}(x_{r_2})) \geq \delta > 0$. Portanto, x_{r_1} e x_{r_2} são não assintóticos.

Para mostrarmos que todos os pontos de S são proximais, teremos que proceder com maior cuidado na definição do conjunto S:
Tome uma sequência de intervalos $([b_n, c_n])_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $[b, c] = [b_0, c_0] \supset [b_1, c_1] \supset \dots$; $T^{n+1}(b_{n+1}) = c_n$ e $T^{n+1}(c_{n+1}) = b_n$; e $T(]b_{n+1}, c_{n+1}[) \subset]b_n, c_n[$.
Agora, seja $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [b_n, c_n] = [b_*, c_*]$. Claro que $T(b_*) = c_*$ e $T(c_*) = b_*$.

Nós restringiremos $\mathcal{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ às sequências de intervalos que satisfazem que se $M_{k^2} = M_{(k+1)^2} = K$, então $M_{k^2+2j-1} = [b_{2k-(2j-1)}, b_*]$ e $M_{k^2+2j} = [c_*, c_{2k-2j}]$ para $j \in \{1, \dots, k\}$ e $M^n = L$ para os outros naturais n que não são quadrados perfeitos.

Mesmo com essas exigências, conseguimos construir as sequências M_r tais que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P(M^r, n^2)}{n} = r$. Para $r_1 > r_2 \in]\frac{3}{4}, 1[$, também conseguimos encontrar infinitos valores de n tais que $M^{r_1}_{n^2} = M^{r_2}_{n^2} = M^{r_1}_{(n+1)^2} = M^{r_2}_{(n+1)^2}$. (P)

Agora, como $b_n \to b_*$ e $c_n \to c_*$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_n, b_*) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(c_n, c_*) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n > \bar{n}$. Portanto, se $n > \bar{n}$ e $M^{r_1}_{n^2} = M^{r_2}_{n^2} = M^{r_1}_{(n+1)^2} = M^{r_2}_{(n+1)^2}$, temos que ambos $T^{n^2+1}(x_{r_1})$ e $T^{n^2+1}(x_{r_2})$ pertencem ao intervalo $M^{r_1}_{n^2+1} = M^{r_2}_{n^2+1} = [b_{2n-1}, b_*]$, donde $d(T^{n^2+1}(x_{r_1}), T^{n^2+1}(x_{r_2})) < \epsilon$.

Chamando de $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequência crescente de naturais, que satisfazem (P), temos que $T^{n_j}(x_{r_1})$ e $T^{n_j}(x_{r_2})$ se acumulam, pois
$\liminf_n d(T^n(x_{r_1}), T^n(x_{r_2})) \leq \limsup_j d(T^{n_j}(x_{r_1}), T^{n_j}(x_{r_2})) \leq \epsilon$.
Portanto, x_{r_1} e x_{r_2} são proximais.

Logo, o conjunto não enumerável resultante S é bagunçado por T. $\square$

O enunciado do seguinte corolário motivou o título do artigo [LY75].

Corolário 1 *Seja J um intervalo da reta. Se $T : J \to J$ tem um ponto periódico de período 3, então T é caótica no sentido de* Li-Yorke.

Exemplo 5 (Família Quadrática) *A família quadrática é a família de aplicações $\{F_\mu\}$ definida por $F_\mu(x) = \mu.x.(1-x)$. Quando $\mu \in]0, 4]$, falaremos do sistema dinâmico $([0, 1], F_\mu)$ e quando $\mu > 4$, falaremos do sistema dinâmico (Λ, F_μ), onde $\Lambda = \{x \in [0, 1] \mid O_{F_\mu}(x) \subset [0, 1]\}$ é homeomorfo ao conjunto triádico de Cantor, o qual por sua vez é homeomorfo ao Σ_2 (ver [Dev89] para referência). Não lidamos com as órbitas de pontos maiores que 1 ou menores que 0, pois estas são muito simples.*

Uma propriedade interessante que aparece nas dinâmicas da família $\{F_\mu\}$ é o de bifurcação, conceito algumas vezes associados a caos mas que, conforme já foi dito, não será abordado com essa visão nessa dissertação: conforme μ varia, a dinâmica de $\{F_\mu\}$ vai se modificando. Por exemplo, se $\mu < 1$, a órbita de todos os pontos se aproxima do ponto fixo 0. Quando $\mu = 1$, um novo ponto fixo aparece e muda a dinâmica de $\{F_\mu\}$. Quando $\mu > 3$, surgem órbitas de período 2 e acompanhando o crescimento de μ, podemos notar o "nascimento" de órbitas periódicas de períodos $4, 8, 16, \dots, 7, 5, 3$ respeitando a ordem de Sharkovsky $\prec$ dada no teorema 2.

Pelo que já foi visto acima, quando μ é tal que F_μ tem uma órbita de período 3, temos que F_μ é caótica no sentido de Li-Yorke. Ressaltamos que existem valores de μ menores que 4 que satisfazem *essa propriedade (F_μ tem pontos periódicos de periodo 3 se, e somente se $\mu \geq 1 + 2\sqrt{2}$)* [3].

Se $\mu > 4$, a aplicação $S : \Lambda \to \Sigma_2$ definida por $S(x) = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $s_n(x) = 0$ se $F_\mu^n(x) < \frac{1}{2}$ e $s_n(x) = 1$ se $F_\mu^n(x) > \frac{1}{2}$ é uma conjugação topológica entre F_μ e o shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Portanto, se $\mu > 4$, a dinâmica de F_μ tem, topologicamente, as mesmas características que a dinâmica do σ.

3.3 Transitividade topológica

Um dos conceitos mais básicos e mais importantes em dinâmicas topológicas é o de transitividade topológica. Esta propriedade garante que todos os abertos por "menores" que sejam se "espalham" o suficiente para passar por todos os outros abertos.

Definição 19 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito topologicamente transitivo se para qualquer par de abertos não vazios U, V, existe $n > 0$ tal que $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.*

A presença de transitividade topológica garante um fator de indecomponibilidade no sistema, uma vez que X não pode ser decomposto em dois subconjuntos próprios, fechados e T-invariantes, porém podem existir subconjuntos próprios e fechados que sejam T^n-invariantes para algum $n > 0$, o que nos motiva a seguinte definição:

Definição 20 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito totalmente transitivo se (X, T^n) for transitivo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observe que os conceitos não são equivalentes:

Exemplo 6 (Transitividade não implica transitividade total) *Sejam $n \geq 2$ e (X, d) um espaço métrico, em que $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ é um conjunto finito qualquer munido da métrica $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$ se $x = y$. A topologia induzida por d é aquela em que todos os subconjuntos de X são abertos.*

Agora defina $T : X \to X$ por $T(x_j) = x_{j+1}$ se $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ e $T(x_{n-1}) = x_0$, isto é, (X, T) é um ciclo de ordem n, pois X é todo uma órbita periódica de período n. (X, T) é claramente topologicamente transitivo, mas T^n é a identidade em X, donde (X, T^n) não é transitivo.

Exemplo 7 *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma aplicação topologicamente transitiva tal que $f(0) = f(1) = 0$. Então há duas possibilidades:*

- *f^2 não é topologicamente transitiva e, portanto, f não é totalmente transitiva;*
- *$g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definida por $g(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } x \leq 0 \\ -f(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é topologicamente transitiva (pois f^2 é transitiva), mas não é totalmente transitiva (pois $[-1, 0]$ e $[0, 1]$ são fechados g^2-invariantes).*

Na literatura, o conceito de transitividade topológica é comumente tido como equivalente à existência de uma órbita densa. Porém, esta equivalência nem sempre é verdadeira:

[3] arquivo pessoal

Exemplo 8 (Existência de órbita densa não implica transitividade topológica) *Seja* $X = \{0,1\}$ *com a topologia discreta, isto é,* $\tau = \mathcal{P}(X)$*. Defina* $T : X \to X$ *por* $T(0) = T(1) = 1$*.*
Então $O_T(0) = X$ *é densa em* X*, mas* T *não é topologicamente transitiva, uma vez que* $T^n\{1\} = \{1\}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 9 (Transitividade topológica não implica existência de órbita densa) *Seja* S^1 *o círculo unitário definido pelo quociente* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*, o qual pode ser visto como um espaço métrico com a métrica quociente herdada de* $\mathbb{R}$*.*

Seja $A : S^1 \to S^1$ *definida por* $A(\theta) = 2\theta$*.*

Note que 0 *é ponto fixo de* A *e* $\frac{k}{2^n-1}$ *é periódico para todos naturais* k *e* n *(se pensarmos o* S^1 *como o conjunto dos números complexos de módulo 1 estes pontos periódicos são raízes* (2^n-1)*-ésimas da unidade). Os pontos da forma* $\frac{k}{2^n}$ *são pontos finalmente periódicos. Tanto os pontos periódicos quanto os finalmente periódicos de* A *formam um conjunto denso em* S^1*.*

Agora, tome $P = Per(A)$ *o conjunto dos pontos periódicos de* A *e seja* $h = A|_P$*. Então, claramente* h *é topologicamente transitiva, mas não existem órbitas densas, uma vez que todos os pontos de* P *são pontos periódicos de* h*.*

Obs: Note que no exemplo 8, X é compacto, mas é finito e no exemplo 9, P não é compacto. O teorema 4 a seguir mostra que, em espaços métricos compactos "decentes" (veja a definição 21 abaixo), há uma equivalência entre os conceitos de transitividade topológica e a existência de uma órbita densa.

Definição 21 *Diz-se que o que o espaço métrico* X *satisfaz a propriedade [FD] se todo aberto não vazio* U *não contém conjuntos finitos densos em* U *.*

Teorema 4 *Se* X *é um espaço métrico completo com uma base enumerável de abertos que satisfaz [FD] e* $T : X \to X$ *é contínua, temos que* (X,T) *é topologicamente transitivo se, e somente se, existir uma órbita de* T *densa em* X*.*

Dem: ($\Leftarrow$) Seja $\bar{x}$ tal que $O_T(\bar{x})$ seja densa em X. Agora, tome abertos não vazios U e V e mostremos que existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap T^{-\bar{n}}(V) \neq \emptyset$.

Como $O_T(\bar{x})$ seja densa em X, então $O_T(\bar{x}) \cap U \neq \emptyset$ e $O_T(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$. Sejam $j_U = min\ \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(\bar{x}) \in U\}$ e $j_V = min\ \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(\bar{x}) \in V\}$.

Então, se $j_U < j_V$, tome $\bar{n} = j_V - j_U$ e teremos que $T^{\bar{n}}(T^{j_U}(\bar{x})) = T^{j_V}(\bar{x}) \in V$, donde $T^{j_U}(\bar{x}) \in U \cap T^{-\bar{n}}(V) \neq \emptyset$.

Se $j_U \geq j_V$, seja $K_V = \{k < j_U \mid T^k(\bar{x}) \in V\}$. Claro que K_V é um conjunto finito (eventualmente vazio), donde $\{T^k(\bar{x})\}_{k \in K_V} \subset V$ não é um conjunto denso em V por [FD]. Dessa forma, obtemos que $V' = V \setminus \{T^k(\bar{x})\}_{k \in K_V}$ é um aberto não vazio, donde existe um natural $j' > j_U$ tal que $T^{j'}(\bar{x}) \in V' \subset V$. Portanto, tome $\bar{n} = j' - j_U$ e veja que $T^{\bar{n}}(T^{j_U}(\bar{x})) = T^{j'}(\bar{x}) \in V'$, assim $T^{j_U}(\bar{x}) \in U \cap T^{-\bar{n}}(V) \neq \emptyset$.

Logo, (X,T) é topologicamente transitivo. $\square$

($\Rightarrow$) Seja $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável de abertos de X. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $D_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(B_i)$, o qual, pela transitividade e continuidade de T, é um conjunto aberto e denso de X.

Como X é um espaço métrico completo, temos pelo teorema das categorias de *Baire*, X é um espaço de *Baire* e, portanto, $D = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D_i$ é denso em X. Claramente, todo ponto de D tem órbita densa. □

Repare que, na demonstração acima, usamos apenas [FD] em ($\Leftarrow$), enquanto em ($\Rightarrow$), usamos a continuidade de T e que X é um espaço métrico completo com base enumerável de abertos. Em particular, se X é um espaço métrico compacto, assim como nos sistemas dinâmicos que estamos lidando, temos que X é completo e tem uma base enumerável de abertos e, portanto, a transitividade topológica sempre implica na existência de órbitas densas. A maioria dos espaços com os quais trabalhamos ($[0,1]$, S^1, Σ_m) tem a propriedade [FD] e, portanto, esses casos como do exemplo 8 são de pequena importância, sendo a referida equivalência normalmente verdadeira.

Note que se X é compacto, satisfaz [FD] e (X,T) é minimal, então (X,T) é topologicamente transitivo, pois todas as suas órbitas são densas. Em particular, sistemas minimais não contêm órbitas periódicas.

Exemplo 10 (Rotações do círculo) *A rotação $R_\lambda : S^1 \to S^1$ é definida por $R_\lambda(x) = x + \lambda$ e é uma aplicação contínua. Por conta disso, (S^1, R_λ) é um sistema dinâmico. As seguintes propriedades caracterizam a dinâmica de R_λ:*

1. *se $\lambda = \frac{p}{q}$ é um número racional com p e q primos entre si, todos os pontos do S^1 são periódicos de período q;*
2. *se λ é um número irracional, todas as órbitas de R_λ são densas em S^1.*

As rotações do círculo R_λ são isometrias do S^1, para qualquer λ. Quando λ é um número irracional, (S^1, R_λ) é minimal e, portanto, R_λ é topologicamente transitiva.

3.4 Sensibilidade em relação às condições iniciais x Equicontinuidade: Caos x Ordem?

Definição 22 *Seja (X,T) um sistema dinâmico. Dizemos que T tem sensibilidade em relação às condições iniciais se existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$, para todo $\delta > 0$, existe $y \in B(x,\delta)$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \epsilon$. Neste caso, dizemos que ϵ é uma constante de sensibilidade para T.*

Em temos livres, uma aplicação T tem sensibilidade em relação às condições iniciais se todos os pontos x em X têm pontos arbitrariamente próximos, cujas órbitas se separam por pelo menos ϵ durante as iterações de T. Repare que não se exige que todos os pontos próximos de x tenham órbitas que se separem da órbita de x, mas sim que, em qualquer vizinhança do mesmo, sempre exista pelo menos um ponto que satisfaça essa condição.

A sensibilidade em relação às condições iniciais é a definição matemática precisa do que se conhece por imprevisibilidade ou que poderia se relacionar ao *Efeito borboleta* e é tida em alguns contextos como uma das definições de caos em sistemas dinâmicos. Se T tem sensibilidade, então previsões numéricas sobre a sua dinâmica podem falhar computacionalmente, pois pequenos erros de arredondamento que aparentemente não deveriam interferir na dinâmica do sistema crescem de forma que o comportamento medido muitas vezes não retrata bem o comportamento real procurado.

A seguinte definição define uma propriedade local semelhante à sensibilidade.

Definição 23 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico e $\epsilon > 0$. Dizemos que $x \in X$ é ϵ-Lyapunov instável se para todo $\delta > 0$, existe $y \in B(x,\delta)$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \epsilon$. Neste caso, dizemos que ϵ é uma constante de sensibilidade para x.*

Exemplo 11 (Sensibilidade) *Retomemos a aplicação do exemplo 9, $A : S^1 \to S^1$ definida por $A(\theta) = 2\theta$.*

A tem sensibilidade em relação às condições iniciais: qualquer $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ é uma constante de sensibilidade para A, uma vez que a distância entre dois pontos dobra a cada iteração de A, no sentindo que, se $d(x,y) = \delta_0$, temos que $\delta_{n+1} = d(A^{n+1}(x), A^{n+1}(y)) = min\{2\delta_n, 1-2\delta_n\}$. Portanto, para todo $x \neq y$, as suas órbitas se separam por pelo menos $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ dado.

Na verdade, A é expansiva, conceito mais forte que o de sensibilidade às condições iniciais, já que a expansividade separa órbitas de quaisquer pontos distintos, o que é mais do que o exigido na definição de sensibilidade como já comentamos.

Pela nossa definição de uma sistema dinâmico (X,T) em espaços métricos compactos exigir a continuidade de T, é claro que T^n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$ e, pela compacidade de X, T^n é uniformemente contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se quisermos fazer previsões com erro menor do que $\epsilon > 0$, é fácil tomarmos $\delta > 0$ de forma que órbitas que comecem próximas por δ permaneçam desta forma para um número finito de iteradas $\bar{n} \in \mathbb{N}$ fixado, isto é, para todo $\bar{n} \in \mathbb{N}$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon$, para todo $n \in \{0, 1, \ldots, \bar{n}\}$. O que nem sempre conseguimos é garantir essa margem de segurança para todo $n \in \mathbb{N}$.

Quando conseguimos fazer esse tipo de previsão para todo $n \in \mathbb{N}$, é como se o nosso sistema fosse mais bem comportado, pois conseguiríamos controlar seus erros e seus desvios de acordo com as condições iniciais de suas órbitas. Um sistema com tal propriedade seria algo, a princípio, bem comportado e previsível, tendo portanto um fator oposto ao de sensibilidade. Essa condição será expressa matematicamente pelo conceito de equicontinuidade.

Mas cuidado: assim como subconjuntos da reta não são ou fechados ou abertos, os sistemas dinâmicos não são ou sensíveis ou equicontínuos. Dentro da classe dos sistemas não equicontínuos estará a classe dos sistemas sensíveis em relação às condições iniciais. Apesar de vários confrontos entre definições de caos, uma está clara: os sistemas equicontínuos não são "caóticos" e são uma boa descrição de sistemas bem "comportados"'.

Definição 24 (Equicontinuidade) *Seja (X,T) um sistema dinâmico. Dizemos que:*

- *$x \in X$ é um ponto de equicontinuidade de T se for um ponto de equicontinuidade da família $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$;*
- *$\mathcal{E}_T = \{x \in X \mid x$ é ponto de equicontinuidade de $T\} =$*
  $\{x \in X \mid \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid d(x,y) < \delta \Rightarrow d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}$
  é o conjunto dos pontos de equicontinuidade de T;
- *T é equicontínua se a família $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for equicontínua ou ainda se $\mathcal{E}_T = X$;*
- *T é uniformemente equicontínua se a família $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uniformemente equicontínua.*

Note que, como X é compacto, a equicontinuidade de T é equivalente à equicontinuidade uniforme de T pelo resultado do teorema 1. Diremos apenas que T é equicontínua quando para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Exemplo 12 *Dizemos que um ponto fixo $p \in X$ é atrator se existe $\delta > 0$ tal que $d(x,p) < \delta$ implica $\lim_n d(T^n(x),p) = 0$.*
Obviamente, todo ponto fixo atrator é um ponto de equicontinuidade.

Note que, trivialmente, toda isometria é equicontínua e, portanto, as rotações do círculo são equicontínuas. Dessa maneira, vemos que mesmo a transitividade sendo uma exigência comum para definirmos um sistema como caótico, ela é um elemento presente em aplicações bem ordenadas como são as isometrias.

A seguinte propriedade é óbvia, mas ilustra como os conceitos de sensibilidade e equicontinuidade se contrapõem. No entanto, apesar de eles serem excludentes, a ausência de um não implica na presença do outro.

Proposição 4 *Seja (X,T) um sistema dinâmico. Se T tem sensibilidade em relação às condições iniciais, então $\mathcal{E}_T = \emptyset$, isto é, T não tem pontos de equicontinuidade.*

Note que a diferença entre os conceitos se passa nos quantificadores: T é sensível com relação às condições iniciais significa que
$\exists \epsilon > 0, \forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B(x,\delta), \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x),T^n(y)) > \epsilon$

enquanto T não ter pontos de equicontinuidade quer dizer que
$\forall x \in X, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in B(x,\delta), \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x),T^n(y)) > \epsilon$

Se x não é um ponto de equicontinuidade, então x é ϵ-Lyapunov instável para algum $\epsilon > 0$. Em linguagem livre, podemos dizer que a sensibilidade em relação às condições iniciais representa uma ausência "uniforme" de pontos de equicontinuidade.

Conforme dito, a recírproca da proposição 4 não é verdadeira: existem sistemas sem sensibilidade em relação às condições iniciais e sem pontos de equicontinuidade. A partir do exemplo anterior, construiremos exemplos com essa característica.

Exemplo 13 (Ausência de equicontinuidade não implica em sensibilidade) *Seja $X \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto que é o disco unitário do plano xy unido por um círculo que só intercepta esse disco na origem, ou seja,*
$X = D \cup C$, com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1$ e $z = 0\}$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+z^2 = 1$ e $y = 0\}$.

Agora, definimos $G : X \to X$ por $G(rcos(\theta), rsin(\theta), 0) = (rcos(2\theta), rsin(2\theta), 0)$ se $x \in D$ e $G(1-cos(\theta), 0, sin(\theta)) = (1-cos(2\theta), 0, sin(2\theta))$ se $x \in C$.

Então G não tem sensibilidade em relação às condições iniciais e não tem pontos de equicontinuidade.

Obs: $g = G|_D$ tem a origem como ponto de equicontinuidade.

Repare que a aplicação G do exemplo acima não é transitiva. Um resultado importante é que em um sistema transitivo, os conceitos são equivalentes.

Teorema 5 *Seja (X,T) um sistema dinâmico topologicamente transitivo. Se T não tem pontos de equicontinuidade, então T tem sensibilidade em relação às condições iniciais.*

Dem:

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, defina $G_k = \{x \in X \mid \exists \delta > 0 \text{ tal que } y, z \in B(x, \delta) \Rightarrow d(T^n(y), T^n(z)) \leq \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Note que G_k é aberto para todo $k \in \mathbb{N}^*$ e $\mathcal{E}_T = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} G_k$ (basta usar a definição de equicontinuidade e usar a desigualdade triangular). Em particular, $\mathcal{E}_T$ é um G_δ.

G_k é negativamente T-invariante: se $T^m(x) \in G_k$, existe $\delta > 0$ tal que se y e z pertencem a $B(T^m(x), \delta)$, então $d(T^n(y), T^n(z)) \leq \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}$. Como T^m é contínua, existe $\eta > 0$ tal que $y \in B(x, \eta)$ implica $T^m(y) \in B(T^m(x), \delta)$. Logo, $x \in G_k$.

Agora, tome $\bar{x}$ um ponto de X cuja órbita é densa. Se $G_k \neq \emptyset$, então existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(\bar{x}) \in G_k$ e, portanto, $\bar{x} \in G_k$, pois G_k é negativamente T-invariante.

Logo, se $G_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\bar{x} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} G_k = \mathcal{E}_T$.

Como $\mathcal{E}_T = \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G_k = \emptyset$, pois caso contrário $\bar{x} \in \mathcal{E}_T$, donde $\frac{1}{k}$ é constante de sensibilidade para T.

Portanto, T é sensível em relação às condições iniciais. □

Obs: Em particular, vale que se $\mathcal{E}_T \neq \emptyset$, então $\mathcal{E}_T$ é formado pelos pontos cujas órbitas são densas (ver [AAB96]).

3.5 Caos segundo Devaney

Muitas definições de caos apareceram, mas no campo de dinâmica topológica, a definição que certamente é mais aceita entre os pesquisadores é a seguinte definição clássica de *Robert L. Devaney*:

Definição 25 *Um sistema dinâmico* (X, T) *é dito* caótico *no sentido de Devaney se:*

(i) (X, T) *é topologicamente transitivo;*

(ii) $Per(T)$ *é denso em* X*;*

(iii) (X, T) *é sensível com relação às condições iniciais.*

Os seguintes exemplos ilustrarão a exigência de cada uma dessas propriedades para a definição de caos no sentido de Davaney.

Exemplo 14 (Sem transitividade) *Seja* $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ *um anel compacto e* $h : \Delta \to \Delta$ *definida por* $h(rcos(\theta), rsin(\theta)) = (rcos(2\theta), rsin(2\theta))$.

Então (Δ, h) *tem sensibilidade em relação às condições iniciais e* $Per(h)$ *é denso em* Δ. *Portanto, temos que a única condição que falta a* (Δ, h) *para ser caótico no sentido de Devaney é a transitividade topológica.*

Exemplo 15 (Sem conjunto denso de pontos periódicos) *Analogamente ao exemplo 9, seja* $Q = S^1 \backslash P$ *e temos que* $A|_Q$ *é topologicamente transitivo, tem sensibilidade em relação às condições iniciais e não tem órbitas periódicas. Portanto, a única condição que falta a* $(Q, A|_Q)$ *para ser caótico no sentido de Devaney é o conjunto denso de pontos periódicos.*

Exemplo 16 (Sem sensibilidade) *Seja* (X, T) *como no exemplo 6. Então*(X, T) *é claramente equicontínuo e, portanto, não tem sensibilidade em relação às condições iniciais.*

Note que $O(x_j)$ *é um conjunto denso em* X, *para todo* $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *e, portanto,* (X, T) *é topologicamente transitivo (*(X, T) *é até mininal) e como* $Per(T) = X$ *é denso em* X, *temos que* *a única condição que falta a (X, T) para ser caótico no sentido de Devaney é a sensibilidade em relação às condições iniciais.*

Teorema 6 *Seja (X, T) um sistema dinâmico satisfazendo (i) e (ii), isto é, (X, T) é topologicamente transitivo e $Per(T)$ é denso em X. Então, se (X, T) não é formado por uma única órbita periódica, (X, T) é sensível com relação às condições iniciais.*

Dem: Algumas demonstrações desse fato foram dadas, mas apresentaremos aqui a prova elementar apresentada em [BBC+92]:

Como (X, T) não é composto de apenas uma órbita periódica, existem 2 pontos periódicos p_1 e p_2 em X cujas órbitas são distintas. Tome $\rho = d(O(p_1), O(p_2))$. Claro que $\rho > 0$ e para todo $x \in X$, ou a órbita de p_1 ou a órbita de p_2 distam de x pelo menos $\frac{\rho}{2}$, isto é, para todo $x \in X$, existe $j \in \{1, 2\}$ tal que $d(x, O(p_j)) \geq \frac{\rho}{2}$.

Vamos mostrar que (X, T) tem sensibilidade em relação às condições iniciais com constante $\epsilon = \frac{\rho}{8}$, isto é, vamos mostrar que para todo $x \in X$, para todo $\delta > 0$, existe $y \in B(x, \delta)$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) > \epsilon$:

Fixado $x \in X$, tome $\delta > 0$ com $\delta < \epsilon$ sem perda de generalidade. Como o conjunto dos pontos peródicos de T é denso em X, existe $q \in B(x, \delta)$ ponto periódico. Seja n o período de q.

Pelo dito acima, $d(x, O(p_j)) \geq \frac{\rho}{2} = 4.\epsilon$ para algum $j \in \{1, 2\}$. Então defina $V = \bigcap_{i=0}^{n} T^{-i}(B(f^i(p_j), \epsilon))$ e pela transitividade de T, existe $y \in B(x, \delta)$ e um natural k tais que $T^k(y) \in V$.

Agora, sendo j a parte inteira de $\frac{k}{n} + 1$, ou seja, $j = \llcorner \frac{k}{n} \lrcorner + 1$, obtemos que $1 \leq nj - k \leq n$ e, portanto,

$T^{n.j}(y) = T^{n.j-k}(T^k(y)) \in T^{n.j-k}(V) \subset B(T^{nj-k}(p_j), \epsilon)$.

Agora, como $T^{nj}(q) = q$, resulta que:

$d(x, T^{nj-k}(p_j)) \leq d(x, q) + d(q, T^{nj}(y)) + d(T^{nj}(y), T^{nj-k}(y)) + d(T^{nj-k}(y), T^{nj-k}(p_j))$, donde

$d(T^{nj}(q), T^{nj}(y)) = d(q, T^{nj}(y)) \geq d(x, T^{nj-k}(p_j)) - d(x, q) - d(T^{nj}(y), T^{nj-k}(y)) - d(T^{nj-k}(y), T^{nj-k}(p_j))$

Dessa forma, $d(T^{nj}(q), T^{nj}(y)) > 4.\epsilon - \epsilon - \epsilon = 2.\epsilon$, já que $q \in B(x, \delta)$ e $T^{nj}(y) \in B(T^{nj-k}(p_j), \epsilon)$.

Portanto, o ponto periódico q e o ponto y, os quais estão próximos de x, têm suas órbitas separadas por $2.\epsilon$, donde pela desigualdade triangular, pelo menos um dos dois tem sua órbita separada da órbita de x por ϵ. $\square$

Obs: Note que essa demonstração nos ajuda a encontrar a constante de sensibilidade da aplicação T simplesmente calculando a distância entre duas órbitas periódicas distintas.

Devaney definiu um sistema dinâmico (X, T) como caótico se continha esses 3 ingredientes: *transitividade topológica* (para garantir a indecomponibilidade do sistema); *conjunto denso de pontos periódicos* (para garantir um "grande"elemento de regularidade no sistema); *sensibilidade em relação às condições iniciais* (para garantir a imprevisibilidade do sistema).

Como dissemos, muitos vêem esse conceito de imprevisibilidade, expresso aqui pela sensibilidade, como um elemento essencial para a definição de caos, de modo que muito surpreende o resultado do teorema anterior. Também parece-nos inesperado que fatores ligados exclusivamente à topologia do espaço (transitividade e conjunto denso de pontos periódicos) impliquem na existência de um fator ligado à métrica do sistema. Uma consequência simples do teorema acima é a de que caos segundo Devaney é preservado sob conjugações topológicas, já que estas claramente preservam tanto a transitividade como o conjunto denso de pontos periódicos, apesar de sensibilidade em relação às condições iniciais não ser, a priori, preservada sob conjugações.

Exemplo 17 *O shift $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ é caótico no sentido de Devaney, pois conforme já foi apresentado, σ é topologicamento transitivo e $Per(\sigma)$ é denso em Σ_m.*

Também dissemos que, se $\mu > 4$, F_μ é conjugado ao shift do Σ_2 e, portanto, F_μ também é caótico no sentido de Devaney.

Quando $\mu = 4$, também temos que F_4 é caótico no sentido de Devaney. Existe uma conjugação topológica entre F_4 e $f : S^1 \to S^1$ definida por $f(\theta) = 2.\theta$ e f também á caótica no sentido de Devaney.

Se $\mu < 4$, F_μ não é caótica no sentido de Devaney, uma vez que não é topologicamente transitiva (basta notar que F_μ não é sobrejetora). Em particular, temos um exemplo de função caótica no sentido de Li-Yorke que não é caótica no sentido de Devaney.

3.6 Caos segundo Auslander-Yorke

Definição 26 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito catico no sentido de Auslander-Yorke se:*

(i) *(X, T) é topologicamente transitivo;*

(iii) *(X, T) é sensível com relação às condições iniciais.*

Essa definição dada em [AY80] precedeu a definição de Devaney. Nela, o conjunto denso de pontos periódicos não é exigido para a caoticidade. O exemplo 15 apresenta um sistema caótico no sentido de Auslander-Yorke que não é caótico no sentido de Devaney, entretanto esse sistema não está definido em um espaço compacto.

Acontece que, em muitos espaços, estas definições são equivalente. Veja nesta referência que se I é um intervalo compacto da reta e $T : I \to I$ é transitiva, então $Per(T)$ é denso em I, donde pelo teorema 6, T é caótica (nos sentidos de Auslander-Yorke e de Devaney).

Capítulo 4

Propriedades topológicas oriundas da teoria ergódica

A teoria ergódica há muito tempo estudava o "grau de desordem" de um sistema dinâmico em espaços de medida e muitas propriedades desses sistemas geraram conceitos análogos no escopo de dinâmica topológica.

4.1 Preliminares da teoria ergódica

Nesta seção, um sistema dinâmico será uma 4-upla $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ onde $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida e T é uma aplicação que preserva a medida μ, isto é, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}$. Quando $\mu(X) = 1$, dizemos que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.

Definição 27 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. O sistema dinâmico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ é dito ergódico se todos os conjuntos $T-$invariantes tiverem medida nula ou medida total, isto é, se $T^{-1}(E) = E$ implica $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.*

Definição 28 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. O sistema dinâmico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ é dito:*

- *fortemente mixing, se $\lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$, para quaisquer A, B em $\mathcal{B}$;*
- *fracamente mixing, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |\mu(A \cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0$, para quaisquer A, B em $\mathcal{B}$.*

Claramente a propriedade de *fortemente mixing* implica a de *fracamente mixing*.

Proposição 5 *O sistema dinâmico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ é fracamente mixing se, e somente se, $(X^2, \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \mu \times \mu, T \times T)$ é ergódica.*

4.1.1 Entropia

Uma partição de X é uma coleção finita de conjuntos mensuráveis $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \mathcal{B}$ com $\bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i = X$ e $\mu(\alpha_i \cap \alpha_j) = 0$ para todos os pares (i, j) com $i \neq j$.

Definição 29 *A entropia H de uma partição $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é dada por* $H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(\alpha_i)\ln(\mu(\alpha_i))$

Sejam $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ e $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ partições de X. Definimos a partição $\alpha \vee \beta = \{\alpha_i \cap \beta_j | i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l\}$ e dadas partições $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ definimos a partição $\bigvee_{i=0}^{m} \gamma_i = \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_m$. Dizemos que a partição $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é um refinamento da partição $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ ou que α é mais fina que β, e denotamos isto por $\beta \preceq \alpha$, se todo elemento de α estiver contido em algum elemento de β, isto é, se para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $\alpha_i \subset \beta_j$.

Se $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é uma partição de X, então $T^{-1}(\alpha) = \{T^{-1}(\alpha_1), \ldots, T^{-1}(\alpha_k)\}$ também é uma partição de X.

Definição 30 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ um sistema dinâmico.*
A entropia h_μ de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ com relação à partição $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é definida por $h_\mu(T, \alpha) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}(\alpha))$.

Definição 31 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ um sistema dinâmico. A entropia h_μ de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ é definida por* $h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha)$.

Se a entropia de um sistema é positiva, então existe uma partição α cuja entropia é positiva. Isto significa que a entropia das pré-imagens da partição α cresce exponencialmente.

4.2 Entropia topológica

Em [AKM65] definiu-se o conceito de entropia topológica baseado no conceito prévio definido na teoria ergódica, que media o grau de espalhamento de um sistema deinâmico num espaço de medida. Os autores tentaram criar uma definição análoga, de forma que a entropia topológica tivesse o mesmo papel para dinâmica em espaços topológicos. Naturalmente, isso necessitaria de alguns ajustes, assim para definirmos a entropia topológica, mudamos de partições de conjuntos mensuráveis para coberturas por abertos e trocamos de medida dos conjuntos mensuráveis para a cardinalidade mínima de uma subcobertura.

Denotaremos por $\mathfrak{C}(X) = \{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{C} \text{ é cobertura de } X\}$ o conjunto das coberturas de X, por $\mathfrak{C}^*(X) = \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(X) \mid \mathcal{C} \text{ é finita}\}$ o conjunto das coberturas finitas de X e por $\mathfrak{A}(X) = \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(X) \mid \mathcal{C}\text{é cobertura aberta}\}$ o conjunto das coberturas abertas de X. Dada uma cobertura $\mathcal{C}$, denotaremos por $\mathfrak{S}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \mid \mathcal{S} \in \mathfrak{C}(X)\}$ o conjunto das subcoberturas de $\mathcal{C}$ e por $\mathfrak{S}^*(\mathcal{C}) = \{\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \mid \mathcal{S} \in \mathfrak{C}^*(X)\}$ o conjunto das subcoberturas finitas de $\mathcal{C}$. Claro que se X é compacto e $\mathcal{C}$ é cobertura aberta de X, temos que $\mathfrak{S}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Dadas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ coberturas abertas de X, definimos, analogamente às partições em Espaços de Medida, a cobertura $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{C \cap D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$ e dadas coberturas $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m$ definimos a cobertura $\bigvee_{i=0}^{m} \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{E}_m$. Dizemos que a cobertura $\mathcal{C}$ é um refinamento da cobertura $\mathcal{D}$ (ou que $\mathcal{C}$ é mais fina que $\mathcal{D}$), e denotamos por $\mathcal{D} \preceq \mathcal{C}$, se todo elemento de $\mathcal{C}$ estiver contido em algum elemento de $\mathcal{D}$, isto é, se $\forall C \in \mathcal{C}$, $\exists D \in \mathcal{D} \mid C \subset D$.

Se $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é cobertura de X e $T : X \to X$, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(\mathcal{C}) := \{T^{-n}(C_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura de X. Se $\mathcal{C}$ é cobertura aberta e T é contínua, temos que $T^{-n}(\mathcal{C})$ também é cobertura aberta.

Definição 32 *Se $\mathcal{C}$ é cobertura aberta de X, definimos $\eta(\mathcal{C})$ como a menor cardinalidade de subcoberturas de $\mathcal{C}$, isto é, $\eta(\mathcal{C}) = min\ \{\#\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \in \mathfrak{S}^*(\mathcal{C})\}$.*
Definimos a entropia topológica da cobertura $\mathcal{C}$ como $H(\mathcal{C}) = log(\eta(\mathcal{C}))$.

Proposição 6 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{C}', \mathcal{D}'$ coberturas abertas de X e $T : X \to X$ contínua. Então trivialmente valem(ver [AKM65]):*

(a) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}', \mathcal{D} \preceq \mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{C} \vee \mathcal{D} \preceq \mathcal{C}' \vee \mathcal{D}'$;

(b) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{D} \preceq \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$;

(c) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D} \Rightarrow \eta(\mathcal{C}) \leq \eta(\mathcal{D}), H(\mathcal{C}) \leq H(\mathcal{D})$;

(d) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D} \Rightarrow \eta(\mathcal{D}) = \eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}), H(\mathcal{D}) = H(\mathcal{C} \vee \mathcal{D})$;

(e) $\eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leq \eta(\mathcal{C})\eta(\mathcal{D})$ *e* $H(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leq H(\mathcal{C}) + H(\mathcal{D})$;

(f) $\eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leq \eta(\mathcal{C})\eta(\mathcal{D})$ *e* $H(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leq H(\mathcal{C}) + H(\mathcal{D})$;

(g) $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D} \Rightarrow T^{-1}(\mathcal{C}) \preceq T^{-1}(\mathcal{D})$;

(h) $T^{-1}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = T^{-1}(\mathcal{C}) \vee T^{-1}(\mathcal{D})$;

(i) $\eta(T^{-1}(\mathcal{C})) \leq \eta(\mathcal{C})$;

(j) *T sobrejetora* $\Rightarrow \eta(T^{-1}(\mathcal{C})) = \eta(\mathcal{C})$.

Definição 33 *Sejam (X, T) um sistema dinâmico e $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de X. A entropia de (X, T) com respeito à cobertura $\mathcal{C}$ é definida por $h(T, \mathcal{C}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N-1} T^{-n}(\mathcal{C}))$*

Definição 34 *A entropia topológica do sistema dinâmico (X, T) é definida por $h(T) = \sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} h(T, \mathcal{C})$.*

Diremos que um sistema dinâmico (X, T) tem entropia positiva quando $h(T) > 0$, ou seja, quando existe uma cobertura finita por abertos não densos $\mathcal{C}$ tal que $h(T, \mathcal{C}) > 0$. O shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tem entropia positiva: basta tomarmos a cobertura canônica $\mathcal{C} = \{Cl_0, Cl_1\}$ definida pelos cilindros (aberto-fechados) $Cl_j = \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_0 = j\}$.

Teorema 7 *A entropia topológica é um invariante por conjugações topológicas, isto é, se o homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ conjuga os Sistemas Dinâmicos (X, T_X) e (Y, T_Y), então $h(T_X) = h(T_Y)$.*

Dem: Como h conjuga T_X e T_Y, temos que $T_Y = \varphi \circ T_X \circ \varphi^{-1}$. Note que, como φ é um homeomorfismo, $\mathcal{D}$ é cobertura aberta de $Y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{D})$ é cobertura aberta de X.
Logo, $h(T_Y) = h(\varphi \circ T_X \circ \varphi^{-1}) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathfrak{A}(Y)} h(\varphi \circ T_X \circ \varphi^{-1}, \mathcal{D}) = \sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} h(\varphi \circ T_X \circ \varphi^{-1}, \varphi(\mathcal{C})) =$
$\sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N-1} (\varphi \circ T_X \circ \varphi^{-1})^{-n}(\varphi(\mathcal{C}))) = \sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N-1} \varphi \circ T_X^{-n} \circ \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{C}))) =$
$\sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H(\bigvee_{n=0}^{N-1} T_X^{-n}(\mathcal{C})) = \sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{A}(X)} h(T_X, \mathcal{C}) = h(T_Y)$ $\square$

4.3 Complexidade topológica

Nesta seção, vamos definir o conceito de complexidade topológica de uma cobertura finita de X de acordo com [BHM00]. Diferentemente da seção anterior, nossas coberturas nem sempre serão abertas. Diremos que uma cobertura $\mathcal{C}$ é standard se for formada por 2 conjuntos abertos não densos, isto é, se $\mathcal{C} = \{A, B\}$ com A, B abertos e não densos. Dizemos que uma cobertura standard $\mathcal{C} = \{A, B\}$ separa os pontos $x \neq y \in X$ se $x \in B^c$ e $y \in A^c$.
Uma cobertura $\mathcal{C}$ é dita trivial se $X \in \mathcal{C}$.

Definição 35 *A complexidade topológica da cobertura finita $\mathcal{C}$ de (X, T) é definida pela função $c(\mathcal{C}, .) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com $c(\mathcal{C}, n) = \eta(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\mathcal{C}))$.*

Proposição 7 *As seguintes propriedades são muito simples:*

- *$c(\mathcal{C}, .)$ é não decrescente;*
- *$\mathcal{C} \preceq \mathcal{D} \Rightarrow c(\mathcal{C}, n) \leq c(\mathcal{D}, n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*
- *$c(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, n) \leq c(\mathcal{C}, n).c(\mathcal{D}, n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Dizemos que $\mathcal{C}$ tem *complexidade limitada* quando $c(\mathcal{C}, .)$ for uma função limitada, o que implica em ser finalmente constante, já que é não decrescente, isto é $\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} \; |n \geq n_0 \Rightarrow c(\mathcal{C}, n) = k$. Quando $\mathcal{C}$ não tem complexidade limitada, dizemos que $\mathcal{C}$ tem complexidade infinita ou não limitada. Observe que $h(T, \mathcal{C}) > 0$ implica que $\mathcal{C}$ tem complexidade não limitada.

Dada uma cobertura $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{m-1}\}$, definimos por $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ como o conjunto das intersecções de $\eta(\mathcal{C}) - 1$ complementos de elementos de $\mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{C = \bigcap \mathcal{S} \subset X \mid \mathcal{S} \subset \{(C_0)^c, \ldots, (C_{m-1})^c\} \text{ e } \# \mathcal{S} = \eta(\mathcal{C}) - 1\}$. Pela definição de $\eta(\mathcal{C})$, nenhuma dessas intersecções é vazia, ou seja $\emptyset \notin \mathcal{I}(\mathcal{C})$.

Lema 5 *Sejam $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{m-1}\}$ e $\mathcal{D} = \{D_0, \ldots, D_{n-1}\}$ coberturas finitas não triviais por fechados de X com $\eta(\mathcal{C}) = k$ e $\eta(\mathcal{D}) = l$. Se $A \cap B \neq \emptyset, \forall A \in \mathcal{I}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$, então $\eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \geq k + l - 1$.*

Dem: Suponha, por absurdo, que $\eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) < k + l - 1$. Então existiria $\mathcal{S} = \{C_i \cap D_j\}$ subcobertura de $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ com $k + l - 2$ subconjuntos e, portanto,

$$\emptyset = (\bigcup_{s=1,\ldots,k+l-2} C_{i_s} \cap D_{j_s})^c = \bigcap_{s=1,\ldots,k+l-2} (C_{i_s} \cap D_{j_s})^c = \bigcap_{s=1,\ldots,k+l-2} (C_{i_s})^c \cup (D_{j_s})^c =$$

$$(C_{i_1}^c \cap C_{i_2}^c \cap \ldots \cap C_{i_{k+l-2}}^c) \cup (D_{j_1}^c \cap C_{i_2}^c \cap \ldots \cap C_{i_{k+l-2}}^c) \cup \ldots \cup \underbrace{(C_{i_1}^c \cap \ldots \cap C_{i_{k-1}}^c \cap D_{j_1}^c \cap \ldots \cap D_{j_{l-1}}^c)}_{\neq \emptyset}$$

$$\cup \ldots \cup (D_{j_1}^c \cap D_{j_2}^c \cap \ldots \cap D_{j_{k+l-2}}^c).$$

Portanto, $\eta(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \geq k + l - 1$. □

4.3.1 Nomes e itinerários

Seja $A_m = \{0, \ldots, m - 1\}$ um alfabeto de m símbolos e $\Sigma_m = A_m^{\mathbb{N}}$ o conjunto das palavras infinitas de m símbolos. Uma palavra finita w de tamanho k é uma *$k - $upla ordenada* $w = (w_0, \ldots, w_{k-1}) \in A_m^k$. O conjunto das palavras finitas de todos os tamanhos é denotado por $\Sigma_m^* =$

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_m^k$. Definimos a concatenação de 2 palavras finitas $u = (u_0, \ldots, u_{k-1})$ e $w = (w_0, \ldots, w_{l-1})$ por $u.w = (u_0, \ldots, u_{k-1}, w_0, \ldots, w_{l-1})$. Sendo $w = (w_0, \ldots, w_{k-1}) \in \Sigma_m^*$ e $u = (u_0, u_1, \ldots) \in \Sigma_m$, dizemos que w ocorre em u na posição i se $u_{i+j} = w_j, \forall j \in \{0, \ldots, k-1\}$. Se w ocorre em u na posição 0, dizemos que w é prefixo de u.

Definição 36 *Seja $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{m-1}\} \in \mathfrak{C}^*(X)$. Dizemos que $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_m$ é um $\mathcal{C}$-nome ou $\mathcal{C}$-itinerário de $x \in X$ se $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(C_{s_i})$, isto é, se $T^i(x) \in C_{s_i}, \forall i \in \mathbb{N}$.*

Sendo $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{m-1}\} \in \mathfrak{C}^*(X)$ uma cobertura finita de X e $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ o shift de Bernoulli, temos que S é $\mathcal{C}$-nome de x implica em $\sigma(S)$ é $\mathcal{C}$-nome de $T(x)$. Observe que isto é equivalente a dizer que o conjunto $J = \{(x, S) \mid S \text{ é } \mathcal{C} - \textit{nome de } x\} \subset X \times \Sigma_m$ é $T \times \sigma$-invariante.

Para cada $x \in X$, defina $J_*(x) = \{S \in \Sigma_m \mid (x, S) \in J\} \subset \Sigma_m$ a fibra de J sobre x, isto é, $J_*(x)$ é o conjunto de todos os $\mathcal{C}$-nomes ou $\mathcal{C}$-itinerários de x e para cada $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_m$, defina $J^*(S) = \{x \in X \mid (x, S) \in J\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(C_{s_i}) \subset X$ a fibra de J sobre S, isto é, $J^*(S)$ é o conjunto dos pontos que têm S como $\mathcal{C}$-nome.

Observe que se $\mathcal{C} = \{C_0, \ldots, C_{m-1}\}$ é uma cobertura por fechados, então $J_*(x)$ e $J^*(S)$ são conjuntos fechados em Σ_m e X respectivamente.

Diremos que o conjunto de $\mathcal{C}$-nomes $\{S_i\}_{i\in I} \subset \Sigma_m$ cobre X se a família $\{J^*(S_i)\}_{i\in I}$ for uma cobertura de X.

Um $\mathcal{C}$-nome de $x \in X$ de tamanho n é uma palavra finita w de tamanho n que é prefixo de algum $\mathcal{C}$-nome de x. Note que $c(\mathcal{C}, n) \leq k$ se, e somente se, existe uma família $\{w_1, \ldots, w_k\}$ de k $\mathcal{C}$-nomes de tamanho n que cobre X.

O seguinte lema será muito útil para relacionar os a complexidade de $\mathcal{C}$ com a quantidade de $\mathcal{C}$-nomes que cobrem X.

Lema 6 *Sejam (X, T) um sistema dinâmico e $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}\}$ uma cobertura finita de X. Então existe k em $\mathbb{N}$ tal que $c(\mathcal{C}, n) \leq k$, para todo n em $\mathbb{N}$ se, e somente se, existe $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k\} \subset \Sigma_m$ um conjunto de $\mathcal{C}$-nomes que cobre X.*

Dem: ($\Rightarrow$) Para cada $S = (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma_m$ e cada $n \in \mathbb{N}$, defina $J_n^*(S) \subset J^*(S) \subset X$ o conjunto dos pontos de X que têm o prefixo $(s_0, \ldots, s_{n-1})$ como $\mathcal{C}$-nome de tamanho n. Seja $H(n) = \{(S_1, \ldots, S_k) \in (\Sigma_m)^k \mid \{J_n^*(S_j)\}_{j\in\{1,\ldots,k\}} \textit{ cobre } X\} \subset (\Sigma_m)^k$. Como $c(\mathcal{C}, n) \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$, pela observação anterior temos que $H(n)$ é um fechado não vazio de $(\Sigma_m)^k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mas, se $\{J_n^*(S_j)\}_{j\in\{1,\ldots,k\}}$ *cobre* X, então $\{J_{n-1}^*(S_j)\}_{j\in\{1,\ldots,k\}}$ também cobre e, portanto, $\{H(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma sequência de fechados encaixantes ($H(n+1) \subset H(n), \forall n \in \mathbb{N}$) e, portanto, pela compacidade de $(\Sigma_m)^k$, temos que $H := \bigcap_{n=0}^{\infty} H(n)$. Tomando $(\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k) \in H$, temos que $\bigcup_{j=1}^{k} J^*(\bar{S}_j) = \bigcup_{j=1}^{k} \lim_{n\to\infty} (J_n^*(\bar{S}_j)) = \lim_{n\to\infty} (\bigcup_{j=1}^{k} J_n^*(\bar{S}_j)) = \lim_{n\to\infty} X = X$, donde $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k\}$ é um conjunto de $\mathcal{C}$-nomes que cobre X.$\square$

($\Leftarrow$) Como $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k\}$ é um conjunto de $\mathcal{C}$-nomes que cobre X, temos que os seus prefixos cobrem X. Logo, pela observação acima, $c(\mathcal{C}, n) \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

4.3.2 Scattering e 2-scattering

A entropia topológica do sistema com respeito à cobertura $\mathcal{C}$ mede a taxa de crescimento exponencial das entropias das coberturas formadas pelos refinamentos $\bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}(\mathcal{C})$. No entanto, muitas vezes essas entropias não crescem exponencialmente, fazendo com que a entropia com respeito àquela cobertura seja zero. A complexidade topológica aparece para generalizar o conceito de entropia, pois $h(T,\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(c(\mathcal{C},n))}{n}$. Dessa forma, entre aqueles sistemas que têm entropia zero, podemos usar a complexidade topológica para distinguí-los entre comlexidade limitada e não limitada. Se a complexidade de determinado cobertura por abertos é não limitada, veremos que o sistema não pode ser equicontínuo. Também entre os sistemas de complexidade não limitada podemos diferenciá-los pela "velocidade" com que vão a infinito.

Exemplo 18 (Complexidade e entropia) *Seja $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ o shift de Bernoulli definido na proposição 2. Tome $\mathcal{C} = \{Cl_0, \dots, Cl_{m-1}\}$ definida pelos cilindros (aberto-fechados) $Cl_j = \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_0 = j\}$, $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Note que $c(\mathcal{C}, 0) = \eta(\mathcal{C}) = m$.*

O refinamento $\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) = \{Cl_{j_0,j_1}\}_{j_0,j_1\in\{0,1,\dots,m-1\}}$ dado por $Cl_{j_0,j_1} = \{(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid s_0 = j_0, s_1 = j_1\}$, $j_0, j_1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ nos mostra que $c(\mathcal{C}, 1) = \eta(\mathcal{C} \vee T^{-1}(\mathcal{C}) = m^2$.

Procedendo da mesma forma, vemos que $c(\mathcal{C}, n) = m^{n+1}$, isto é, o shift *tem a maior complexidade topológica possível, uma vez que nenhuma das intersecções de pré-imagens podem ser descartadas em nenhum passo para cálculo da complexidade.*

Claro que $h(\sigma, \mathcal{C}) = log\ m > 0$ e, portanto, o shift *tem entropia positiva.*

A seguinte nomenclatura vai caracterizar sistemas que se "espalham" bem, pois suas coberturas terão sempre complexidade não limitada.

Definição 37 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito scattering se toda cobertura por abertos não densos tiver complexidade não limitada.*

Definição 38 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito 2-scattering se toda cobertura standard tiver complexidade não limitada.*

É claro que 2-scattering implica scattering, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

Proposição 8 *Um sistema dinâmico (X, T) é scattering se, e somente se, toda cobertura não trivial por fechados tiver complexidade não limitada. Analogamente, (X, T) é 2-scattering se, e somente se, toda 2-cobertura não trivial por fechados tiver complexidade não limitada.*

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha (X, T) scattering e tome $\mathcal{C}$ cobertura não trivial por fechados. Como X é compacto, para todo conjunto fechado $F \in \mathcal{C}$, existe um aberto não denso A_F que contém F.
Portanto, $\mathcal{D} = \{A_F\}_{F\in\mathcal{C}}$ é uma cobertura de X por abertos não densos que é mais fina que $\mathcal{C}$ por construção. Logo, $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D}$, donde $c(\mathcal{C}, n) \leq c(\mathcal{D}, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Como (X, T) é scattering, a complexidade de $\mathcal{D}$ é não limitada e, portanto, a complexidade de $\mathcal{C}$ também é não limitada. □
($\Leftarrow$) Suponha que toda cobertura não trivial por fechados tem complexidade não limitada e tome $\mathcal{C}$ cobertura por abertos não densos. Agora, defina $\mathcal{D} = \{\bar{A}\}_{A\in\mathcal{C}}$ uma cobertura formada pelos fechos

dos abertos não densos de $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{D}$ é uma cobertura não trivial por fechados que é mais fina que $\mathcal{C}$ por construção. Logo, $\mathcal{C} \preceq \mathcal{D}$, donde $c(\mathcal{C}, n) \leq c(\mathcal{D}, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por hipótese, a complexidade de $\mathcal{C}$ é não limitada e, portanto, a complexidade de $\mathcal{D}$ também é não limitada. □
O resultado para 2-scattering é idêntico. □

Note que uma cobertura por fechados é não trivial se seus fechados não são densos. Por conta disso, temos que as coberturas por abertos não densos podem ser substituídas pelas coberturas não triviais por fechados nas definições de scattering e 2-scattering. No entanto, frisamos que essa equivalência existe apenas quando todas as coberturas têm complexidade não limitada, ou ainda que nenhuma cobertura tenha complexidade limitada.
Os conceitos não são equivalentes para dizermos que todas as coberturas têm complexidade limitada: existem sistemas tais que todas as suas coberturas por abertos não densos têm complexidade limitada, mas existem coberturas não triviais por fechados que têm complexidade não limitada. Porém, isto só poderá se dar quando a cobertura não trivial formada por fechados não for o fecho de uma cobertura por abertos.

As rotações irracionais R_λ satisfazem essa característica: são equicontínuas e, pelo teorema acima, todas as suas coberturas por abertos têm complexidade limitada. Entretanto, tomando a 2-cobertura formada por arcos fechados $\mathcal{C} = \{[0, 1-\lambda], [1-\lambda, 0]\}$, temos que $\mathcal{C}$ tem complexidade não limitada. Note que $\mathcal{C}$ não é o fecho de uma cobertura aberta.

Note que, apesar de a entropia topológica garantir uma taxa de crescimento exponencial da complexidade de determinada cobertura, o fato de um sistema ter entropia positiva não garante, a priori, que o sistema seja scattering. Isto, pois a entropia positiva precisa de apenas *uma* cobertura com complexidade com taxa de crescimento exponencial, enquanto o conceito de scattering exige que *todas* as coberturas tenham complexidade não limitada.

Para melhor entender esses conceitos, recomendamos [Fer99], [BK98] e [Bla09].

4.4 Mixing topológico

O conceito de mixing também foi adaptado da teoria ergódica para a teoria de dinâmicas topológicas.

Definição 39 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito fortemente (topologicamente) mixing se para qualquer par U, V de abertos não vazios, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.*

Definição 40 *Um sistema dinâmico (X, T) é dito fracamente (topologicamente) mixing se $(X^2, T \times T)$ é transitivo.*

Repare que esta definição faz referência ao resultado da teoria ergódica sobre a equivalência entre (X, T) ser fracamente mixing e $(X^2, T \times T)$ ser ergódica. Note também que $(X^2, T \times T)$ é transitivo se, e somente se, para todos abertos não vazios A_1, A_2, B_1, B_2, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A_1 \cap T^{-n}(B_1) \neq \emptyset$ e $A_2 \cap T^{-n}(B_2) \neq \emptyset$.

Proposição 9 *O sistema dinâmico (X, T) é fracamente mixing se, e somente se, $(X^m, \underbrace{T \times \ldots \times T}_{m\ vezes})$ é transitivo se, e somente se, para todos abertos não vazios $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A_j \cap T^{-n}(B_j) \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Dem: Claro que $(\Leftarrow)$ é imediato.

Para $(\Rightarrow)$, dados abertos não vazios A e B, claro que o conjunto de naturais $M(A,B) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset\}$ é não vazio. Se A_1, A_2, B_1, B_2 são abertos não vazios, então $M(A_1, B_1)$ e $M(A_2, B_2)$ são não vazios.

Como (X,T) é fracamente mixing, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $A_1 \cap T^{-k}(B_1) \neq \emptyset$ e $A_2 \cap T^{-k}(B_2) \neq \emptyset$. Tome $C = A_1 \cap T^{-k}(B_1)$ e $D = A_2 \cap T^{-k}(B_2)$ abertos não vazios e note que $\emptyset \neq M(C,D) \subset M(A_1, B_1 \cap M(A_2, B_2)$. Procedendo desta forma, obtemos que $\bigcap_{j \in \{1,\ldots,m\}} M(A_j, B_j) \neq \emptyset$, donde $(X^m, \underbrace{T \times \ldots \times T}_{m \ vezes})$ é transitivo. $\square$

Agora, é fácil ver que todos os sistemas fortemente mixing também são fracamente mixing e que todos os fracamente mixing são totalmente transitivos. No próximo capítulo, veremos que a propriedade scattering se coloca de maneira intermediária entre elas. A definição de fracamente mixing, apesar de mais fraca, é comumente associada ao conceito de caos.

Também é possivel caracterizarmos o conceito de fracamente mixing da seguinte forma:

Lema 7 *O sistema dinâmico (X,T) não é fracamente mixing se, e somente se, existem abertos não vazios U, V tais que*
$U \cap T^{-n}(U) = \emptyset$ ou $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 5

Teoremas de comparação

Neste capítulo, listaremos os principais resultados encontrados que relacionam os conceitos que foram aqui citados.

O teorema a seguir caracteriza a equicontinuidade de acordo com a complexidade de coberturas.

Teorema 8 *Seja (X, T) um sistema dinâmico. São equivalentes:*

(i) *T é equicontínua;*

(ii) *$c(\mathcal{C}, .)$ é limitada, para toda $\mathcal{C}$ cobertura finita por abertos.*

Dem: $(\Rightarrow)$ Dada $\mathcal{C}$ cobertura finita por abertos, tome $\epsilon > 0$ um número de Lebesgue de $\mathcal{C}$, isto é, $\forall x \in X, \exists C \in \mathcal{C}$ tal que $B(x, \epsilon) \subset C$. Pela equicontinuidade de T, existe $\delta > 0$ $(\delta \leq \epsilon)$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Pela compacidade de X, tome $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que a família $\{B(x_i, \delta)\}_{i \in \{1, \ldots, k\}}$ cubra X. Novamente pela equicontinuidade, temos que $T^j(B(x_i, \delta)) \subset B(T^j(x_i), \epsilon)$ e como ϵ é número de Lebesgue de $\mathcal{C}$, temos que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \forall j \in \mathbb{N}, \exists C_{i,j} \in \mathcal{C}$ tal que $B(T^j(x_i), \epsilon) \subset C_{i,j}$, donde $T^j(B(x_i, \delta)) \subset C_{i,j}$ e daí $B(x_i, \delta) \subset T^{-j}(C_{i,j}), \forall j \in \mathbb{N}$ e, portanto, $B(x_i, \delta) \subset \displaystyle\bigcap_{j \in \{0, \ldots, n\}} T^{-j}(C_{i,j}), \forall n \in \mathbb{N}$.

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, \{\displaystyle\bigcap_{j \in \{0, \ldots, n\}} T^{-j}(C_{i,j})\}_{i \in \{1, \ldots, k\}}$ é subcobertura de $\displaystyle\bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}(\mathcal{C})$ com k elementos e, portanto, $c(\mathcal{C}, n) \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

$(\Leftarrow)$ Suponha, por absurdo, que T não seja equicontínua. Então, $\exists \bar{x} \in X, \exists \bar{\epsilon} > 0 \mid \forall \delta > 0, \exists y \in B(\bar{x}, \delta), \exists n \in \mathbb{N} | d(T^n(\bar{x}), T^n(y)) > \epsilon$. Agora, novamente pela compacidade de X, tome $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tais que a família $\mathcal{C} = \{B(p_l, \frac{\bar{\epsilon}}{4})\}_{l \in \{1, \ldots, m\}}$ seja uma cobertura de X por abertos e daí $\bar{\mathcal{C}} = \{\bar{B}(p_l, \frac{\bar{\epsilon}}{4})\}_{l \in \{1, \ldots, m\}}$ é uma cobertura de X por fechados tal que $\bar{\mathcal{C}} \preceq \mathcal{C}$. Por hipótese, a complexidade de $\mathcal{C}$ é limitada, digamos por $k \in \mathbb{N}$ (claro que $k \leq m$) e, portanto, a complexidade de $\bar{\mathcal{C}}$ também é limitada por k. Pelo lema 6, $\exists \{S_j\}_{j \in \{1, \ldots, k\}} \subset \Sigma_m$ que cobre X, isto é, $\{J^*(S_j)\}_{j \in \{1, \ldots, k\}}$ é cobertura de $\bar{\mathcal{C}}$-nomes de X. Como $J^*(S_j) = \displaystyle\bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}(\bar{B}(p_{(S_j)_i}))$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, temos que $d(T^i(y), T^i(z)) < \frac{\bar{\epsilon}}{2}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall y, z \in J^*(S_j)$. Então, tome uma sequência $(y_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset X \mid d(\bar{x}, y_l) < \frac{1}{l}$. Como $\bar{x}$ não é ponto de equicontinuidade, $\exists (n_l) \subset \mathbb{N}$ uma subsequência (crescente, já que cada T^{n_l} sozinha é continua) de índices tal que $d(T^{n_l}(\bar{x}), T^{n_l}(y_l)) > \bar{\epsilon}$. Como $\{J^*(S_j)\}_{j \in \{1, \ldots, k\}}$ é finito, $\exists \bar{j} \in \{1, \ldots, k\}$ tal que existe uma subsequência de $(y_{l_t})_{t \in \mathbb{N}}$ de $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ toda em $J^*(S_{\bar{j}})$, isto é, $(y_{l_t}) \in$

$J^*(S_{\bar{j}}), \forall t \in \mathbb{N}$. Como $J^*(S_{\bar{j}})$ é fechado, temos que $\bar{x} \in J^*(S_{\bar{j}})$ e, portanto, $d(T^{n_{l_t}}(\bar{x}), T^{n_{l_t}}(y_{l_t})) < \frac{\bar{\epsilon}}{2}, \forall t \in \mathbb{N}$, o que contraria a ausência de equicontinuidade de $\bar{x}$. $\square$

Já que dissemos que a equicontinuidade é uma boa candidata a definir um sistema como "ordenado", vemos que complexidade limitada de coberturas também pode desempenhar esse papel. Isso poderia ser esperado de certa forma, já que complexidades não-limitadas têm forte ligação com a desordem dos sistemas.

O seguinte teorema nos mostra que uma aplicação que não é fracamente mixing terá alguma cobertura com complexidade limitada pelo menos por $n+2$, isto é, a complexidade da cobertura "vai a infinito muito devagar." Em particular, a entropia desta cobertura será 0.

Claro que isso mostra que equicontinuidade e mixing fraco são conceitos excludentes. Portanto, se tomarmos sistemas não-equicontínuos e não fracamente mixing, teremos alguma cobertura de complexidade não-limitada, mas que se limitará por $n+2$.

Teorema 9 *Seja (X,T) um sistema dinâmico. Se para toda cobertura standard $\mathcal{C}$ de X, $\exists n \in \mathbb{N}^* \mid c(\mathcal{C}, n) > n+2$, então (X,T) é fracamente mixing.*

Dem: Suponha que (X,T) não é fracamente mixing. Então, pelo lema de Banks, $\exists U, V$ abertos não-vazios tais que $\forall n \in \mathbb{N}, U \cap T^{-n}(U) \neq \emptyset \wedge U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. Agora, tome abertos A e B tais que $V^c \subset A$ e $U^c \subset B$e, por consequência, $U \subset A$ e $V \subset B$) e defina a cobertura standard $\bar{\mathcal{C}} = \{A, B\}$. Agora, dado $i > 0$, temos que $U \cap T^{-i}(U) \neq \emptyset$ ou $U \cap T^{-i}(U) = \emptyset$:

- Se $U \cap T^{-i}(U) \neq \emptyset$, pelo Lema, temos $U \cap T^{-i}(V) = \emptyset$ e, portanto, $U \subset (T^{-i}(V))^c \subset T^{-i}(A)$;

- Se $U \cap T^{-i}(U) = \emptyset$, então $U \subset (T^{-i}(U))^c \subset T^{-i}(B)$.

Agora, defina a sequência de abertos $(W_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \bar{\mathcal{C}}$ por $W_0 = A$ e $W_i = A$, se $U \cap T^{-i}(U) \neq \emptyset$ e $W_i = B$, se $U \cap T^{-i}(U) = \emptyset$. Dessa forma, $U \subset T^{-i}(W_i), \forall i \in \mathbb{N}$ e, portanto, $U \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} T^{-i}(W_i)$. Agora, fixado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in X, \exists i_x \in \{0, 1, \ldots, n\} \mid T^{i_x}(x) \in U$ e $T^j(x) \notin U, \forall j \in \{0, 1, \ldots, i_x - 1\}$ ou $T^j(x) \notin U, \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e, portanto, a família de $n+2$ conjuntos $\mathcal{S}_n = \{B \cap T^{-1}(B) \cap \ldots \cap T^{-(i-1)}(B) \cap T^{-1}(A) \cap T^{-(i+1)}(W_1) \cap \ldots \cap T^{-n}(W_{n-i})\}_{i \in \{0,1,\ldots,n+1\}} = \{(\bigcap_{j=0}^{i-1} T^{-j}(B)) \cap T^{-1}(A) \cap (\bigcap_{j=i+1}^{n} T^{-j}(W_{n-i}))\}_{i \in \{0,1,\ldots,n+1\}} \subset \bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}(\bar{\mathcal{C}})$ é uma cobertura de X. Logo, $\mathcal{S}_n$ é subcobertura de $\bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}(\bar{\mathcal{C}})$, donde $c(\bar{\mathcal{C}}, n) \leq n+2, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ressaltamos que durante a redação desse trabalho nos deparamos com o teorema acima enunciado com $n+1$ no lugar de $n+2$, apesar de sua demonstração garantir apenas o que enunciamos aqui [BHM00]. Dessa forma, reforçamos a hipótese desse teorema para garantir a sua demonstração, porém não encontramos um contra-exemplo que mostre que o enunciado anterior não era correto. Portanto, preferimos enunciá-lo dessa maneira.

O teorema a seguir nos mostra como a existência de um único ponto de equicontinuidade nega que (X,T) é fracamente mixing, reforçando o que dissemos antes da demonstração do teorema anterior.

Teorema 10 *Seja (X,T) um sistema dinâmico com $\mathcal{E}_T \neq \emptyset$. Então (X,T) não é fracamente mixing.*

Dem: Tome $x \in \mathcal{E}_T$. Então $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 \mid d(y,x) < \delta(\epsilon) \Rightarrow d(T^n(y), T^n(x)) < \epsilon, \forall \in \mathbb{N}$.
Agora fixe $y \neq x$ e tome $\epsilon = \frac{d(x,y)}{4}$. Como $\bar{\epsilon} > 0$, use a equicontinuidade de x, para definir $\nu = min\{\bar{\epsilon}, \delta(\bar{\epsilon})\}$ e temos que $\nu > 0$ e $d(z,x) < \nu \Rightarrow d(T^n(z), T^n(x)) < \bar{\epsilon}, \forall \in \mathbb{N}$.
Sejam $E = \bar{B}(x,\eta)$ e $F = \bar{B}(y,\bar{\epsilon})$. Claro que $d(E,F) > 2\bar{\epsilon}$.
Agora, seja $\mathcal{C} = \{E^c, F^c\}$ uma cobertura standard separando x de y. Vamos usar a caracterização do Lema de Banks para mostrarmos que (X,T) não é fracamente mixing, isto é, que dado $n \in \mathbb{N}$, $E \cap T^{-n}(F) = \emptyset$ ou $E \cap T^{-n}(E) = \emptyset$.
Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$ tenhamos que $E \cap T^{-n}(F) \neq \emptyset$ e $E \cap T^{-n}(E) \neq \emptyset$, isto é que $\exists z \in E \mid T^n(z) \in F$ e $\exists w \in E \mid T^n(w) \in E$. Dessa forma, teríamos que:
$4\bar{\epsilon} = d(x,y) \leq d(x, T^n(w)) + d(T^n(w), T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(z)) + d(T^n(z), y) <$
$< \underbrace{\bar{\epsilon}}_{T^n(w)\in E; \eta \leq \bar{\epsilon}} + \underbrace{\bar{\epsilon}}_{w \in E; x \in \mathcal{E}_T} + \underbrace{\bar{\epsilon}}_{z \in E; x \in \mathcal{E}_T} + \underbrace{\bar{\epsilon}}_{T^n(z) \in F} = 4\bar{\epsilon}$
$\therefore$ Pelo lema de Banks, (X,T) não é fracamente mixing. $\square$

O corolário seguinte é imediato utilizando os teoremas anteriores.

Corolário 2 *Seja (X,T) um sistema dinâmico com $\mathcal{E}_T \neq \emptyset$. Então, $\forall x \in \mathcal{E}_T, \forall y \in X$ com $y \neq x$, temos que $\exists\ \mathcal{C}$ cobertura standard separando x de y tal que $c(\mathcal{C}, n) \leq n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dem: Basta tomarmos $\mathcal{C}$ como na demonstração anterior. $\square$

Teorema 11 *Se o sistema dinâmico (X,T) é fracamente mixing, então (X,T) é scattering.*

Dem: Tome $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ uma cobertura não-trivial por fechados. Vamos mostrar que a complexidade de $\mathcal{C}$ é não-limitada. Como (X,T) é fracamente mixing, temos que $(X^n, \underbrace{T \times \ldots \times T}_{nvezes})$ é topologicamente transitivo e $\forall A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ abertos não-vazios $\exists j \in \mathbb{N}^* \mid A_i \cap T^{-j}(B_i) \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. O conjunto $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ é formado por intersecções finitas de abertos não-vazios. Defina $i_0 = 0$ e $\mathcal{R}_i = \bigvee_{l=0}^{i} T^{-l}(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{I}(\mathcal{R}_{i_0})$ e $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ são coleções finitas de abertos, $\exists j_0 \in \mathbb{N} \mid A \cap T^{-j_0}(B) \neq \emptyset, \forall A \in \mathcal{I}(\mathcal{R}_{i_0}), \forall B \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$.Claro que $\mathcal{R}_{i_0}$ e $T^{-j_0}(\mathcal{C})$ são coberturas de X e $\eta(T^{-j_0}(\mathcal{C})) = \eta(\mathcal{C})$, portanto pelo lema 5 temos que $c(\mathcal{C}, j_0) \underbrace{\geq}_{\mathcal{R}_0 \vee T^{-j_0}(\mathcal{C}) \preceq \bigvee_{l=0}^{j_0} T^{-l}(\mathcal{C})} \geq \eta(\mathcal{R}_{i_0} \vee T^{-j_0}(\mathcal{C})) \geq \eta(\mathcal{R}_{i_0}) + \eta(T^{-j_0}(\mathcal{C})) - 1 > \eta(\mathcal{R}_{i_0}) = c(\mathcal{C}, 0)$. Definindo $i_{n+1} = i_n + j_n$, podemos definir $j_{n+1} \in \mathbb{N} \mid A \cap T^{-j_{n+1}}(B) \neq \emptyset, \forall A \in \mathcal{I}(\mathcal{R}_{i_1}), \forall B \in \mathcal{I}(\mathcal{C})$ e assim, obtemos uma subsequência crescente $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $c(\mathcal{C}, i_{n+1}) \underbrace{\geq}_{\mathcal{R}_{j_n} \vee T^{-j_n}(\mathcal{C}) \preceq \bigvee_{l=0}^{j_n} T^{-l}(\mathcal{C})} \geq \eta(\mathcal{R}_{i_n} \vee T^{-j_n}(\mathcal{C})) \geq \eta(\mathcal{R}_{i_n}) + \eta(T^{-j_n}(\mathcal{C})) - 1 > \eta(\mathcal{R}_{i_n}) = c(\mathcal{C}, i_n)$ e, portanto, $c(\mathcal{C}, .)$ é não limitada.
$\therefore (X,T)$ é scattering $\square$

Dessa forma, a presença de uma única cobertura de complexidade limitada nega que o sistema seja fracamente mixing. Ressaltamos que a recíproca não é verdadeira, porém o exemplo encontrado contém pontos de equicontinuidade: ver [AG01].

Teorema 12 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico e $\mathcal{C}$ uma cobertura finita de X. Então, se $\mathcal{C}$ tem T-complexidade não-limitada, $\mathcal{C}$ tem T^k-complexidade não-limitada para todo $k > 0$.*

Dem: Denotaremos por $c_T(.,.)$ a complexidade com relação a uma transformação T.

Vale que $c_T(\mathcal{C},(n+1).k-1) = c_T(\mathcal{C}, nk+k1) = \eta(\bigvee_{i=0}^{nk+k-1} T^{-i}(\mathcal{C})) =$

$\eta(\mathcal{C}) \vee T^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-(k-1)}(\mathcal{C}) \vee T^{-1.k}(\mathcal{C}) \vee T^{-(1.k+1)}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-(1.k+k-1)}(\mathcal{C}) \vee$
$T^{-2.k}(\mathcal{C}) \vee T^{-(2.k+1)}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-(2.k+k-1)}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-n.k}(\mathcal{C}) \vee T^{-(n.k+1)}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee T^{-(n.k+k-1)}(\mathcal{C}) =$
$\eta(\bigvee_{i\in\{0,\ldots,n\}} \bigvee_{j\in\{0,\ldots,k-1\}} T^{-(i.k+j)}(\mathcal{C})) = \eta(\bigvee_{j=0}^{k-1}[\bigvee_{i=0}^{n} T^{-(i.k+j)}(\mathcal{C})]) \leq \prod_{j=0}^{k-1}[\eta(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-(ik+j)}(\mathcal{C}))] =$
$\prod_{j=0}^{k-1}[\eta(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-j}(T^{-(ik)}(\mathcal{C})))] = \prod_{j=0}^{k-1}[\eta(T^{-j}(\bigvee_{i=0}^{n}(T^k)^{-1}(\mathcal{C})))] \underbrace{=}_{\eta(T^{-j}(\mathcal{C}))=\eta(\mathcal{C})} \prod_{j=0}^{k-1}\eta(\bigvee_{i=0}^{n}(T^k)^{-i}(\mathcal{C})) = [c_{T^k}(\mathcal{C},n)]^k,$

ou seja, $c_{T^k}(\mathcal{C},n) \geq \sqrt[k]{c_T(\mathcal{C},k.(n+1)-1)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\therefore$ Se $\mathcal{C}$ tem T-complexidade não-limitada, então $\mathcal{C}$ tem T^k-complexidade não-limitada para todo $k > 0$. $\square$

Corolário 3 *Se o sistema dinâmico (X,T) é scattering, então o sistema dinâmico (X,T^k) é scattering para todo $k > 0$.*

Dem: Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura finita por abertos não-densos. Como (X,T) é scattering, temos que $c_T(\mathcal{C},.)$ é não-limitada, donde pelo teorema anterior, obtemos que $c_{T^k}(\mathcal{C},.)$ é não-limitada. $\square$

Corolário 4 *Se o sistema dinâmico (X,T) é 2-scattering, então o sistema dinâmico (X,T^k) é 2-scattering para todo $k > 0$.*

Dem: Basta fazer o mesmo para coberturas standard. $\square$

Teorema 13 *Se o sistema dinâmico (X,T) é 2-scattering, então (X,T) é topologicamente transitivo.*

Dem: Suponha, por absurdo, que (X,T) não seja topologicamente transitivo. Então existiriam abertos não-vazios $A, B \mid A \cap T^{-n}(B) \neq \emptyset, \forall n > 0$. Obviamente, temos que $A \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap B = \emptyset$:
(i) Se $A \cap B \neq \emptyset$, temos que $I = A \cap B$ é um aberto não-vazio e sendo $F_0 = I^c$ e $F_1 = T^{-1}(I^c)$, temos que $\mathcal{C} = \{F_0, F_1\}$ é uma 2-cobertura não trivial por fechados, já que $I \subset T^{-1}(I^c)$, uma vez que $x \in I \subset A$ implica $T(x) \in B^c \subset I^c \Rightarrow x \in T^{-1}(I^c)$.
Note que se $T^n(x) \in T^{-1}(I)$, então $T^{n+1}(x) \in I$ e $T^j(x) \in F_0 \cap F_1, \forall j > n+1$ e, portanto, os $\mathcal{C}$-nomes $\{(010101\ldots),(101010\ldots)\}$ cobrem X.
Dessa forma, obtemos $c(\mathcal{C},n) = 2, \forall n > 0$ e, portanto, (X,T) não é 2-scattering.
(ii) Se $A \cap B = \emptyset$, seja $M = \{n \in \mathbb{N} \mid B \cap T^{-n}(A) \neq \emptyset\} \subset \mathbb{N}$ e temos novamente 2 possibilidades: [a] Se $M \neq \emptyset$, seja $m = min\ M$. Então, basta definirmos $I = B \cap T^{-m}(A)$ e caímos no caso anterior; [b] Se $M = \emptyset$, temos que $B \cap T^{-n}(A) = A \cap T^{-n}(B) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $\mathcal{C} = \{F_0, F_1\}$ é uma 2-cobertura não trivial por fechados e os $\mathcal{C}$-nomes $\{(000\ldots),(111\ldots)\}$ cobrem X.
Dessa forma, obtemos $c(\mathcal{C},n) = 2, \forall n > 0$ e, portanto, (X,T) não é 2-scattering. $\square$

Corolário 5 *Se o sistema dinâmico (X,T) é 2-scattering, então (X,T) é totalmente transitivo.*

Dem: Segue diretamente do corolário e do teorema anteriores. $\square$

Observe que a recíproca é falsa, uma vez que as rotações irracionais do círculo são totalmente transitivas e não são 2-scattering.

5.1 Relações entre definições de caos

Corolário 6 *Se o sistema dinâmico (X, T) é fracamente mixing, então (X, T) tem sensibilidade com relação às condições iniciais.*

Dem: Se (X, T) é fracamente mixing temos que (X, T) é transitivo e $\mathcal{E}_T = \emptyset$.
$\therefore$ (X, T) tem sensibilidade com relação às condições iniciais pelo resultado do teorema 5. $\square$

O seguinte teorema é de fácil demonstração:

Teorema 14 *Se o sistema dinâmico (X, T) é caótico no sentido de Devaney e T é totalmente transitiva, então T é fracamente mixing*

Teorema 15 *Seja (X, T) um sistema dinâmico com X infinito, T transitivo e $Per(T) \neq \emptyset$. Então (X, T) é caótico no sentido de Li-Yorke.*

Para isso, precisaremos dos seguintes lemas referenciados em [**?**]:

Lema 8 *Seja (X, T) um sistema dinâmico com X infinito e T transitivo. Então $As(x) = \{y \in X \mid x \text{ e } y \text{ são assintóticos } \}$ é de primeira categoria em X.*

Lema 9 *Seja X um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Se $R \subset X \times X$ é uma relação simétrica e existe um G_δ denso A tal que para todo $x \in A$, o conjunto $R(x) := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ contém um subconjunto G_δ denso, então existe $B \subset X$ não-enumerável com $(B \times B) \backslash \Delta \subset R$*

Demonstração do teorema 15:

Seja p um ponto periódico de T de período n.

Seja $Pr_n(x) = \{y \in X \mid x \text{ e } y \text{ são proximais para } T^n\}$. Então para todo $x \in X$, $Pr_n(x)$ é um G_δ e $Pr_n(x)$ é um G_δ denso se a órbita de x é densa.

Sejam $LY_n = \{(x, y) \in X^2 \mid \{x, y\} \text{ é um par de Li-Yorke para } T^n\}$,
$LY_n(x) = \{y \in X \mid \{x, y\} \text{ é um par de Li-Yorke para } T^n\}$ e D o conjunto dos pontos cujas órbitas são densas, o qual é não-vazio pela transitividade de T.

Pelo lema 8, $LY_n(x)$ contém um G_δ denso para todo $x \in D$. Como LY_n é uma relação simétrica, pelo lema 9, existe um conjunto não-enumerável $S \subset X$ tal que $(S \times S) \backslash \Delta \subset LY_n$. Claro que S é um conjunto bagunçado por T^n e, portanto, também bagunçado por T.

$\therefore$ (X, T) é caótico no sentido de Li-Yorke. $\square$

Em particular, vale o seguinte corolário, de que caos no sentido de Devaney é mais forte do que caos no sentido de Li-Yorke.

Corolário 7 *Seja (X, T) um sistema dinâmico caótico no sentido de Devaney. Então (X, T) é caótico no sentido de Li-Yorke.*

Teorema 16 *Seja (X, T) um sistema dinâmico 2-scattering. Então (X, T) é caótico no sentido de Li-Yorke.*

Portanto, a definição de caos no sentido de Li-Yorke é fraca, sendo normalmente exigida como minimamente necessária para algum sistema ser considerado caótico.

Capítulo 6

Conclusão

A sensibilidade em relação às condições iniciais, um possível "retrato matemático" da expressão *Efeito borboleta*, é uma das definições de caos mais usadas fora da matemática. Ela contradiz a existência de pontos de equicontinuidade, condição que, quando global, associamos com sistemas bem comportados. Lembramos que, existem sistemas "scattering" que não têm sensibilidade, porém os sistemas fracamente mixing são todos sensíveis às condições iniciais. A sensibilidade é normalmente tida como condição necessária para que um sistema seja caótico.

Tanto caos no sentido de Devaney como "2-scattering" e, portanto também fracamente mixing, implicam em caos no sentido de Li-Yorke, donde existem sistemas caóticos no sentido de Li-Yorke que contém pontos de equicontinuidade [Bla09], já que existem sistemas "scattering" que não têm sensibilidade em relação às condições iniciais [AG01].

Em um contexto de dinâmicas de intervalo, o caos no sentido de Li-Yorke foi a primeira propriedade realmente relacionada com caos e hoje é tida como necessária para que um sistema possa ser considerado caótico. O caos no sentido de Li-Yorke não é uma propriedade global, mas pode ser generalizada exigindo que exista um conjunto bagunçado residual ou ainda que todo o conjunto X seja bagunçado.

Entropia topológica, fracamente mixing, scattering e 2-scattering são conceitos intermediários que implicam em transitividade e são fortemente ligados a comportamentos caóticos.

Estas definições surgiram do escopo de teoria ergódica, onde podemos dizer que

$$\text{Fortemente mixing} \Rightarrow \text{Fracamente mixing} \Rightarrow \text{Ergodicidade}$$

Um esquema semelhante em dinâmica topológica pode ser apresentado como:

$$\text{Fortemente (topologicamente) mixing} \Rightarrow \text{Fracamente (topologicamente) mixing} \Rightarrow \text{Scattering} \Rightarrow$$
$$\text{2-Scattering} \Rightarrow \text{Transitividade total} \Rightarrow \text{Transitividade}$$

Caos no sentido de Devaney é o mais usual entre os textos matemáticos. É um fato notável que a condição de sensibilidade em relação às condições iniciais, tão destacada em outros contextos , seja apenas uma consequência das demais propriedades topológicas adotadas por Devaney em sua definição.

Referências Bibliográficas

[AAB96] Ethan Akin, Joseph Auslander e Kenneth Berg. When is a transitive map chaotic? Em *Convergence in ergodic theory and probability (Columbus, OH, 1993)*, volume 5 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, páginas 25–40. de Gruyter, Berlin, 1996. 20

[AG01] Ethan Akin e Eli Glasner. Residual properties and almost equicontinuity. *J. Anal. Math.*, 84:243–286, 2001. 33, 37

[AK03] Ethan Akin e Sergiĭ Kolyada. Li-Yorke sensitivity. *Nonlinearity*, 16(4):1421–1433, 2003. 12

[AKM65] R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:309–319, 1965. 24, 25

[AY80] Joseph Auslander e James A. Yorke. Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tôhoku Math. J. (2)*, 32(2):177–188, 1980. 22

[BBC+92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis e P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4):332–334, 1992. 21

[BGKM02] François Blanchard, Eli Glasner, Sergiĭ Kolyada e Alejandro Maass. On Li-Yorke pairs. *J. Reine Angew. Math.*, 547:51–68, 2002. 12

[BHM00] F. Blanchard, B. Host e A. Maass. Topological complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(3):641–662, 2000. 26, 32

[BK98] François Blanchard e Petr Kurka. Language complexity of rotations and Sturmian sequences. *Theoret. Comput. Sci.*, 209(1-2):179–193, 1998. 29

[Bla09] François Blanchard. Topological chaos: what may this mean? *J. Difference Equ. Appl.*, 15(1):23–46, 2009. 29, 37

[Dev89] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edição, 1989. 10, 12, 14

[Fer99] Sébastien Ferenczi. Complexity of sequences and dynamical systems. *Discrete Math.*, 206(1-3):145–154, 1999. Combinatorics and number theory (Tiruchirappalli, 1996). 29

[Guc79] John Guckenheimer. Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 70(2):133–160, 1979.

[Kol04] S. F. Kolyada. Li-Yorke sensitivity and other concepts of chaos. *Ukraïn. Mat. Zh.*, 56(8):1043–1061, 2004. 12

[LY75] Tien Yien Li e James A. Yorke. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82(10):985–992, 1975. 1, 10, 12, 14

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edição, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics. 5

[Šar64] O. M. Šarkovs′kiĭ. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrain. Mat. Ž.*, 16:61–71, 1964. 12