DOMINGOS PISANELLI

A L G U N S F U N C I O N A I S A N A L Í T I C O S E S E U S C A M P O S D E D E F I N I Ç Ã O

Tese apresentada para doutoramento em Ciências (Matemática), à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo

São Paulo
1956

INTRODUÇÃO

A finalidade desta tese é o estudo dos funcionais analíticos n-lineares, dos funcionais homogêneos que se podem definir a partir destes e de várias questões dos fundamentos da teoria dos funcionais analíticos.

A primeira fórmula que exprimia um funcional analítico bilinear, sob forma de integral dupla complexa, foi dada pelo prof. Fantappié ([7], pg. 512).+ Quanto às curvas de integração que aparecem na referida fórmula, aquela sôbre a qual é feita a primeira integração é variavel, dependendo da segunda variavel de integração.

Em (2, §2, I) ++ damos uma caracterização dos abertos do produto de um espaço topológico por outro compacto e utilizamos o teorema (3, §3, I) para associar biunívocamente, a cada conjunto n-linear do produto de n espaços funcionais analíticos, um aberto do produto de n esferas complexas.

Generalizando o conceito de curva separatriz na esfera complexa, damos no (§3, I) a definição de n-separatriz que é o produto cartesiano de n contornos fixos, convenientemente escolhidos.

+Como é hábito, os números entre colchetes referem-se à bibliografia.

++Para nos referir a um teorema desta tese, colocaremos em primeiro lugar o número do teorema, depois o do parágrafo e finalmente o do capítulo. Quando não houver ambiguidade, omitiremos alguns destes números.

No (§2,II) damos a forma integral de um funcional analítico n-linear, com variedade de integração igual a uma n-separatriz, e caracterizamos as funções que são indicatrizes de funcionais analíticos n-lineares.

Achamos importante o estudo dos funcionais analíticos n-lineares, pois vários destes aparecem na análise : o wronskiano de n funções analíticas que exprimimos sob forma de integral e o produto simétrico de duas funções.

Quanto aos funcionais analíticos homogêneos que se podem definir a partir dos funcionais analíticos n-lineares, a sua definição foi apenas esboçada pelo prof. Omar Catunda ([6], pg. 54). Achamos, porém mais natural definir funcional homogêneo a partir da restrição de um funcional n-linear à intersecção de seu campo de definição $\mathcal{H}_n$ com a diagonal Δ_n do espaço onde se encontra $\mathcal{H}_n$.

No (§4,I) estudamos os campos de definição dos funcionais homogêneos, e provamos (§4,II) que os mesmos são equivalentes (a menos de um prolongamento) aos de mesmo nome, estudados pelos profs. Fantappié, Pellegrino e Haefeli, quando definidos em reuniões de regiões lineares.

O presente trabalho se inicia com as principais definições e teoremas da teoria do espaço funcional analítico e algumas modificações de teoremas, pela introdução da região linear vazia.

No (§4,I) damos uma definição mais natural de linha analítica e provamos a equivalência desta com a de F. Pellegrino e D.Del Pasqua ([13], pg. 15). Aproveitando um corolário do teorema (2, §2,I) demonstramos a possibilidade de "unir" duas funções do espaço funcional analítico por uma linha analítica conexa. Provamos, também, a possibilidade de "unir" duas funções de uma vizinhança fundamental, por meio de uma poligonal analítica conexa, de três lados. Por fim, demonstramos a equivalência das definições de conexão de um conjunto aberto no espaço funcional, por poligonais analíticas conexas, por arcos contínuos e por cadeias de vizinhanças fundamentais.

A definição de linha analítica adotada pelo prof. Fantappié (linha F) é mais restritiva que a de F.Pellegrino e D.Del Pasqua (linha quase analítica), portanto todo funcional "hiperanalítico" isto é analítico sôbre as linhas quase analíticas, será analítico sôbre as linhas F. Escrevem então os autores F.Pellegrino e D.Del Pasqua (([13], pg.38) - ([21],pg.966)): " resta da conoscere quali funzionali analitici sono iperanalitici". Demonstramos no (§1,II) que todos os funcionais analíticos são hiperanalíticos.

Para melhor compreensão deste trabalho, intercalamos aqui e acolá definições e teoremas de teoria dos funcionais analíticos.

Preferimos usar o espaço funcional analítico segundo Fantappié ao espaço estudado pelos profs. J.Sebastião e Silva [20] e Candido L.da Silva Dias [19]. Justificamos isto pelo exemplo do produto funcional simétrico dado no (§3,II).

Como na definição de integral múltipla no campo complexo, aparece o jacobiano relativo à representação paramétrica da variedade de integração, preferimos dar a fórmula fundamental dos funcionais analíticos lineares sob forma de integral extendida a um contorno, e não extendida simplesmente a curvas de Jordan fechadas e rectificaveis.

A maioria dos símbolos e definições da teoria dos conjuntos e da topologia, que adotamos, são de N.Bourbaki ([2] e [3]).

Consignamos aqui os nossos agradecimentos à "Fondazione Amerigo Rotellini" que nos concedeu uma bolsa de estudos junto ao " Istituto di alta matematica " de Roma, onde tivemos a oportunidade de iniciar o estudo dos funcionais analíticos.

C A P I T U L O I

§1 T O P O L O G I A DO E S P A Ç O F U N C I O N A L A N A L Í T I C O

1 F u n ç õ e s b i r e g u l a r e s

Definição 1

Chama-se <u>função analítica biregular</u>, uma função $y(t)$ analítica num aberto M da esfera complexa S e distinta de S, tal que $y(\infty) = 0$ se $\infty \in M$.

Se $\infty \in M$ e $y(\infty) \neq 0$ diremos que o ∞ é singular para $y(t)$.

Indicaremos com o símbolo $(y(t), M)$ uma função biregular; quando não houver ambiguidade, simplesmente por $y(t)$ ou y. Muitas vezes usaremos os símbolos M_y para indicar o campo de definição de $y(t)$, e I_y ou I para o conjunto das singularidades, isto é $\complement M_y$.

Dado $(y(t), M)$ biregular, se $M \supset A$, diremos que $y(t)$ é biregular sôbre A.

Pela definição, a função nula sôbre a esfera complexa não é biregular, pois está definida num aberto que coincide com S.

2

Definição 2

Dada uma função biregular (y_o, M_o), um conjunto fechado não vazio $A \subset M_o$ e um número real positivo σ, chama-se (A,σ) vizinhança de y_o e indica-se por $(A, \sigma)\, y_o$ o conjunto das funções biregulares (y,M) que satisfazem às condições :

$$A \subset M \qquad \text{e} \qquad |y(t)-y_o(t)| < \sigma \qquad \forall\, t \in A$$

A cada (y_o,M_o) fica então associado um sistema de vizinhanças $\mathcal{V}(y_o)$, que satisfazem às seguintes propriedades ([8] ,pg.23 - [9] ,pg.639 - [11] ,pg.304 - [6] ,pg.22).

1) Se $V \in \mathcal{V}(y_o) \implies y_o \in V$;

2) dadas V_1 e $V_2 \in \mathcal{V}(y_o) \implies \exists V_3 \in \mathcal{V}(y_o) \,|\, V_1 \cap V_2 \supset V_3$;

3) dada $V \in \mathcal{V}(y_o)$ e $y \in V \implies \exists W \in \mathcal{V}(y) \,|\, W \subset V$.

Dada (y_o,M_o) e um fechado não vazio $A \subset M_o$, chamaremos <u>vizinhança linear</u> e indicaremos por $(A)y_o$, o conjunto das funções biregulares sôbre A.

É claro que $\bigcup_{\sigma > 0}(A,\sigma)y_o = (A)y_o$. Poremos então $(A,\infty)y_o = (A)y_o$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{G}$ das partes R do conjunto das funções biregulares que gozam da propriedade :

$$\forall\, y \in R \quad \exists \quad V \in \mathcal{V}(y) \quad | \quad V \subset R \, .$$

Pode-se verificar ([17], pg. 60) que $\mathcal{O}$ define uma estrutura topológica no conjunto das funções biregulares. Muitas vezes usaremos o termo região para indicar um conjunto aberto+.

O conjunto das funções biregulares, munido desta topologia, será chamado espaço funcional analítico e será representado pelo símbolo $\mathcal{S}$.

3 R e g i õ e s   l i n e a r e s

<u>Definição 3</u>

Chama-se região linear, uma região R_ℓ que goza das propriedades : ‡

$$\forall (y_1,M_1),(y_2,M_2) \in R_\ell \implies (y_1+y_2,\ M_1 \cap M_2) \in R_\ell$$

$$\forall (y,M) \in R_\ell\ ,\ \alpha \in \Pi \implies \alpha(y,M) \in R_\ell$$

<u>Observação 1</u>

Evidentemente a região vazia de $\mathcal{S}$ é linear.

<u>Teorema 1</u>

<u>Se uma vizinhança</u> $(A, \sigma)y_0$, <u>está contida numa região linear</u> R_ℓ , <u>então tambem a vizinhança linear</u> $(A)y_0$ <u>estará contida em</u> R_ℓ <u>([8], pg. 24, teor.1)</u>.

+As vizinhanças, que definimos, formam um sistema fundamental de vizinhanças abertas.

‡ Chama-se soma de (y_1,M_1)e(y_2,M_2)a função cuja região de definição é $M_1 \cap M_2$ e que em cada $t \in M_1 \cap M_2$ tome o valor $y_1(t)+y_2(t)$. Evidentemente supomos $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.
Chama-se produto de $\alpha \in \Pi$(corpo complexo) por(y,M) a função cujo campo de definição é M, e que em cada $t \in M$ tome o valor $\alpha\, y(t)$.

Utilizando-se êste teorema , pode-se demonstrar o seguinte teorema fundamental de Fantappié ([8] pg.25).

A cada região linear $R_\ell \neq \emptyset$ é possivel associar um conjunto fechado $A \neq S$ não vazio , definido pela intersecção das regiões de definição das funções de R_ℓ, de modo que cada função $y(t) \varepsilon \mathcal{S}$, biregular sôbre A , pertença a R_ℓ e recipro camente .

Usando-se a observação 1 , podemos evitar a hipótese $R_\ell \neq \emptyset$. Com efeito se $R_\ell = \emptyset$, teremos :

$$\bigcap_{y \varepsilon R_\ell} M_y = S$$

que é fechado. Reciprocamente , como não existem em $\mathcal{S}$ funções biregulares sôbre S, o conjunto das funções biregulares sôbre S é vazio .

Fica então generalizado o teorema do prof. Fantappié com o

Teorema 2

A cada região linear R_ℓ é possivel associar um conjunto fechado A não vazio , definido pela intersecção das regiões de definição das funções de R_ℓ, de modo que cada função $y(t)$ de $\mathcal{S}$, biregular sôbre A , pertença a R_ℓ e reciprocamente.

Indicaremos, de agora em diante , uma região linear pelo simbolo (A) .

4 Intersecção de regiões lineares

G.Aruffo e D. Gallarati ([1],pg6) demonstraram um teorema sôbre intersecção de regiões lineares, sob a hipótese que esta não seja vazia. Usando a observação 1, podemos demonstrar o teorema mais geral :

Teorema 3

Para que a intersecção $\bigcap_{j \varepsilon J}(A_j)$ seja uma região linear é condição necessária e suficiente que $\bigcup_{j \varepsilon J} A_j$ seja fechada e $J \neq \phi$.

Provemos que se $\bigcap_{j \varepsilon J}(A_j) = (A)$, será $\bigcup_{j \varepsilon J} A_j = A$ e recìprocamente.

Com efeito, seja :

I)

1) $\bigcap_{j \varepsilon J}(A_j) \supset (A)$, e teremos :

$$(A_j) \supset (A) \quad \forall\, j \varepsilon J$$

$$A_j \subset A \quad \forall\, j \varepsilon J$$

2) $\bigcup_{j \varepsilon J} A_j \subset A$

Percorrendo o caminho contrário, vemos que a relação 2) tem como consequência 1).

II)

Seja :

3) $\bigcap_{j \varepsilon J}(A_j) \subset (A)$, donde

$$\forall\, y \;\varepsilon \bigcap_{j \varepsilon J}(A_j) \Longrightarrow y \;\varepsilon\; (A)$$

$$\forall\, y \;\varepsilon\; (A_j),\ \forall_{j \varepsilon J} \Longrightarrow y \;\varepsilon\; (A)$$

$$\forall \text{ o fechado } I \subset B_j,\ \forall_{j \varepsilon J} \Longrightarrow I \subset B \quad (B_j = \complement A_j\ \forall j \varepsilon J,\ B = \complement A)$$

donde

$$\bigcap_{j \in J} B_j = B$$

4) $$\bigcup_{j \in J} A_j = A$$

Percorrendo o caminho contrário, vemos que a relação 4) tem como consequência 3).

5 Reunião de regiões lineares.

Outro teorema, demonstrado por Aruffo e Gallarati ([1] ,pg.8), importante para a teoria dos operadores lineares é o seguinte :

Teorema 4

Para que uma reunião de regiões lineares $\bigcup_{j \in J}(A_j)$ seja uma região linear, é condição necessária e suficiente que $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$ e que qualquer aberto Ω que contém $\bigcap_{j \in J} A_j$ contenha algum A_j $(j \in J)$.

Daremos a seguir uma condição suficiente para que $\bigcup_{j \in J}(A_j)$ seja uma região linear.

Teorema 5

Para que $\bigcup_{j \in J}(A_j)$ seja uma região linear é condição suficiente que $\mathcal{B} = [A_j]_{j \in J}$ seja uma base de filtro.

Seja $\mathcal{F}$ o filtro com base $\mathcal{B}$. Pela compacidade de S , teremos ([3] ,pg.81) :

I) $\bigcap_{A \in \mathscr{F}} \bar{A} \neq \emptyset$

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j \Rightarrow \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \bar{A} ,$$

logo $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.

II)

Seja $\Omega \supset \bigcap_{j \in J} A_j$, teremos $\Omega \supset A_j$ $(j \in J)$. Com efeito :

$$\Omega \supset \bigcap_{A \in \mathscr{F}} \bar{A}$$

$$\Omega \supset A \qquad (A \in \mathscr{F}) \qquad ([3], \text{pg. } 92)$$

logo $\Omega \supset A_j$ $(j \in J)$.

Segue-se de I) e II) e pelo teorema 4, que $\bigcup_{j \in J} (A_j)$ será uma região linear $(\bigcap_{j \in J} A_j)$.

§ 2 CARACTERIZAÇÃO DE ABERTOS NO PRODUTO DE UM ESPAÇO TOPOLÓGICO POR OUTRO COMPACTO.

1)

Sejam E e F dois conjuntos e $H \subset E \times F$. Sejam $H(\alpha)$ e $H(t)$ os cortes de H, segundo $\alpha \in E$ e $t \in F$ respectivamente ([2] ,pg.17).

São imediatas as proposições :

1) Se $A \times B \subset H \Leftrightarrow B \subset \bigcap_{t \in A} H(t)$ ou $B \subset H(t)$ $\forall t \in A$.

2) $\bigcap_{t \in A} H(t) \times A \subset H$

3) $[\bigcap_{j \in J} A_j] \times [\bigcup_{j \in J} B_j] \subset \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j$

Daremos agora um teorema importante para o que segue. Em virtude deste poderemos estender o teorema (2, §1) do prof. Fantappié aos campos de definição dos funcionais n-lineares.

2 Teorema 1

Seja E um espaço topológico compacto, F um espaço topológico e H contido no produto $E \times F$. Para que H seja aberto, é condição necessária e suficiente que sejam abertos $\bigcap_{t \in I} A(t)$ ($\forall$ I fechado de E) e $H(\alpha)$ ($\forall \alpha \in F$).

I) A condição é necessária :

Seja $\bigcap_{t \in I} H(t) = \emptyset$. A condição é evidente.

Seja $\bigcap_{t \in I} H(t) \neq \emptyset$ (I fechado em E) e α_0 pertencente a esta. Será por 2) $\{\alpha_0\} \times I \subset H$. Existirá então uma familia de vizinhanças $[V_t(\alpha_0) \times V(t)]_{t \in I}$ dos pontos de $\{\alpha_0\} \times I$ contídos em H e cobrindo $\{\alpha_0\} \times I$. Seja a familia de vizinhanças $[V(t)]_{t \in I}$ que cobrem I. Pela compacidade de E, existirá :

$$\bigcup_{j=1}^{n} V(t_j) \supset I.$$

Teremos então :

4) $$\bigcap_{j=1}^{n} V_{t_j}(\alpha_o) \times I \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_{t_j}(\alpha_o) \times \bigcup_{j=1}^{n} V(t_j)$$

Pondo

$\bigcap V_{t_j}(\alpha_o) = V(\alpha_o)$, será por 3) e 4)

$$V(\alpha_o) \times I \subset H,$$

e por 1)

$$V(\alpha_o) \subset \bigcap_{t \in I} H(t)$$

o que demonstra que $\bigcap_{t \in I} H(t)$ é aberta. Que $H(\alpha)$ ($\forall\ \alpha \in F$) é aberto, é conhecido ([3] ,pg.65).

II) A condição é suficiente :

Se $H = \emptyset$ o teorema é evidente.

Seja $H \neq \emptyset$ e $(\alpha_o, t_o) \in H$, teremos $t_o \in H(\alpha_o)$. Pela regularidade de E([3] ,pg.92), existe uma vizinhança fechada $V(t_o)$ tal que

$$V(t_o) \subset H(\alpha_o)$$

logo $$\{\alpha_o\} \times V(t_o) \subset H .$$

Por 1), teremos :

$$\alpha_o \in \bigcap_{t \in V(t_o)} H(t)$$

que é aberto por hipótese. Colocando $\bigcap_{t \in V(t_o)} H(t) = V(\alpha_o)$, será por 2)

$$V(\alpha_o) \times V(t_o) \subset H$$

o que nos diz que H é aberto.

3 Seja $\mathscr{E}$ o conjunto das partes abertas não vazias de E +. Podemos munir este de uma topologia análoga à do espaço funcional $\mathscr{S}$. Dado $M_o \in \mathscr{E}$ e $A \neq \emptyset$ fechado e contido em M_o, chamaremos vizinhança de M_o:

$$\{ M \in \mathscr{E} \mid M \supset A \}.$$

Este sistema de vizinhanças forma um sistema fundamental de vizinhanças abertas; define, portanto, uma topologia em $\mathscr{E}$.

<u>Teorema 2</u>

<u>Seja</u> $H \neq \emptyset$ <u>contido no produto topológico de um espaço compacto</u> E <u>por um espaço topológico</u> F. <u>Para que</u> H <u>seja aberto, é condição necessária e suficiente que</u> $pr_F H$ e $H(\alpha)$ ($\forall \alpha \in F$) <u>sejam abertos e a aplicação</u> $\alpha \to H(\alpha) \in \mathscr{E}$ ($\alpha \in pr_F H$) <u>seja contínua.</u>

I) A condição é suficiente.

Evidentemente $H(\alpha)$ ($\forall \alpha \in pr_F H$) e $pr_E H$ são abertos.

Seja $\alpha_o \in pr_E H$. Mostremos que a aplicação $\alpha \to H(\alpha)$ é contínua em α_o. Seja A fechado, não vazio, contido em $A(\alpha_o)$. Pelo teorema 1, $\bigcap_{t \in A} H(t) = V(\alpha_o)$ é aberta.

+ Supomos E regular.

Pela relação 2) será :

$$V(\alpha_o) \times A \subset H$$

logo por 1), se $\alpha \in V(\alpha_o) \Rightarrow H(\alpha) \supset A$. Isto nos diz que a aplicação $\alpha \to H(\alpha)$ é contínua em α_o (ver inicio deste número).

II) A condição é suficiente :

Seja $(\alpha_o, t_o) \in H$, será $t_o \in H(\alpha_o)$. Pela regularidade de E existirá uma vizinhança fechada $V(t_o)$ tal que :

$$V(t_o) \subset H(\alpha_o).$$

Pela continuidade da aplicação $\alpha \to H(\alpha)$, existirá $V(\alpha_o) \subset pr_E H$ tal que :

$$\text{se} \quad \alpha \in V(\alpha_o) \quad \Longrightarrow \quad V(t_o) \subset H(\alpha),$$

isto é

$$V(\alpha_o) \times V(t_o) \subset H$$

donde segue-se que H é aberto.

§ 3 ESTUDO DE CONJUNTOS ABERTOS NO PRODUTO DO ESPAÇO FUNCIONAL ANALÍTICO POR UM ESPAÇO TOPOLÓGICO.

1 Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n espaços topológicos $(n > 1)$. Indicaremos por $E^{[j]}$ o produto topológico dos espaços dados, na ordem natural, excetuado E_j $(1 \leq j \leq n)$. Designaremos por $x^{[j]}$ um elemento de $E^{[j]}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Definição 1

Sejam os espaços $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e um aberto $H \subset E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ (produto topológico). Se o corte $H(x^{[j]})$ ($\forall\, x^{[j]} \in E^{[j]}$) $(1 \leq j \leq n)$ fôr uma parte própria de E_j, diremos que H é próprio segundo E_j. Se H fôr próprio segundo E_j ($\forall\, 1 \leq j \leq n$), diremos que H é totalmente próprio.

Quando os espaços forem as esferas complexas S_j de variável t_j $(1 \leq j \leq n)$, indicaremos o produto destas, na ordem natural, por $\mathfrak{S}_n$.

Quando os espaços forem os espaços $\mathcal{S}_j$ de funções biregulares $y(t_j)$ (t_j = variável da esfera complexa S_j) $(1 \leq j \leq n)$, indicaremos o produto dêstes por Σ_n.

Dado $y = (y_1(t_1), \ldots, y_n(t_n)) \in \Sigma_n$, indicaremos por $\mathcal{J}$ ou $\mathcal{J}_y$ o produto cartesiano das singularidades $I_1, I_2, \ldots, I_n$, respectivamente de $y_1, \ldots, y_{n-1}$, que chamaremos conjunto das singularidades de y. Indicaremos o produto $(A_1)\, y_1 \times \ldots \times (A_n)\, y_n$ por $[A]\, y$.

Seja $\mathcal{S}$ o espaço funcional analítico e E um espaço topológico. Consideremos o espaço topológico $\mathcal{S} \times E$. Seja $\mathcal{H}$ um conjunto contido em $\mathcal{S} \times E$ tal que $\mathcal{H}(x)$ ($\forall\, x \in E$) seja uma região linear de $\mathcal{S}$. Designá-la-emos por $(A(x))$ ($A(x)$ é o conjunto fechado da esfera complexa associado à região linear $\mathcal{H}(x)$). Teremos:

a) $\mathcal{H}(y,M)$+ só depende de M , ou de $I = \complement M$ o que é o mesmo .

Com efeito ,

$$\mathcal{H}(y,M) = \{x \in E \mid (A(x)) \ni (y,M)\} =$$
$$= \{x \in E \mid A(x) \subset M\}$$

Como na última expressão só intervem M, é claro que $\mathcal{H}(y,M)$ só dependerá de M. Poremos então $\mathcal{H}(y,M) = \mathcal{H}(M)$.

b) Se (y,M) e (y_o,M_o) pertencem a $\mathcal{S}$ e $M \subset M_o$, será por a) $\mathcal{H}(M) \subset \mathcal{H}(M_o)$.

c) Seja $H = \bigcup_{x \in E} B(x) \times \{x\} \subset \mathcal{S} \times E$ $\quad (B(x) = \complement A(x))$, teremos :

$$H(x) = B(x) \qquad (\forall x \in E),$$

o que é evidente, e

$$H(t) = \mathcal{H}(S-t) \qquad (\forall t \in S)$$

pois $H(t) = \{x \in E \mid B(x) \ni t\} = \{x \in E \mid A(x) \subset S-t\} =$
$= \mathcal{H}(S-t)$

Temos além disto H próprio segundo S .

d) Podemos também obter $\mathcal{H}(M)$ a partir dos cortes de H .

Com efeito:

$$\mathcal{H}(M) = \{x \in E \mid A(x) \subset M\} = \{x \in E \mid B(x) \supset \complement M\} =$$
$$= \{x \in E \mid t \in \complement M \Rightarrow t \in B(x)\} = \{x \in E \mid t \in \complement M \Rightarrow x \in H(t)\}.$$

Teremos :

$$\mathcal{H}(M) = \bigcap_{t \in \complement M} H(t)$$

+ $\mathcal{H}(y,M)$ é o corte de $\mathcal{H}$ segundo $(y,M) \in \mathcal{S}$

e) Se o conjunto $\mathcal{H} \subset \mathcal{S} \times E$ fôr aberto, dado $(y_0, x_0) \varepsilon \mathcal{H}$, existirá $(A)y_0 \times V(x_0) \subset \mathcal{H}$. Com efeito existe :

$$(A,\sigma)y_0 \times V(x_0) \subset \mathcal{H} .$$

Pela propriedade 1) teremos :

$$x \varepsilon V(x_0) \Rightarrow (A,\sigma)y_0 \subset (A(x))$$

Pelo teorema (1,§1) teremos :

$$x \varepsilon V(x_0) \Rightarrow (A)y_0 \subset (A(x))$$

Pela propriedade 1) teremos :

$$(A)y_0 \times V(x_0) \subset \mathcal{H} .$$

As propriedades a) e b) foram obtidas por F.Pellegrino e F.Succi, no caso em que $E = S$ (|15|,pg.12).As propriedades c) e d) foram obtidas por F.Pellegrino e D.Del Pasqua, nas hipoteses em que $E = S$ e $\mathcal{H}$ é o campo de definição de um funcional analítico misto ([13],pg.16 e seg.).

2 Teorema 1

Seja $\mathcal{H}$ um conjunto do produto do espaço $\mathcal{S}$ por um espaço topológico E. Se $\mathcal{H}(x) = (A(x))$ $\forall x \varepsilon E$ e $\mathcal{H}(y,M)$ fôr aberto $\forall$ $(y,M) \varepsilon \mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ será aberto.

O teorema é evidente se $\mathcal{H} = \emptyset$.

Seja $\mathcal{H} \neq \emptyset$ e $(y_0, x_0) \varepsilon \mathcal{H}$. Teremos $(y_0, M_0) \varepsilon (A(x_0))$, portanto $M_0 \supset A(x_0)$. Consideremos A fechado de modo que

$$M_0 \supset A \supset \mathring{A} \supset A(x_0) .$$

Seja $(y_0, \mathring{A})$ a restrição de (y_0, M_0) a $\mathring{A}$, teremos também

$$(y_0, \mathring{A}) \quad \varepsilon \quad (A(x_0))$$

donde virá : $x_0 \varepsilon \mathcal{H}(\mathring{A})$ que é aberto por hipótese.

Se $y \in (A)(y_o, M_o)$ será $M_y \supset \mathring{A}$. Pela propriedade b) será

$$\mathcal{H}(M_y) \supset \mathcal{H}(\mathring{A})$$

Em resumo, $y \in (A)(y_o, M_o) \Rightarrow \mathcal{H}(M_y) \supset \mathcal{H}(\mathring{A})$

isto é,
$$(A)y_o \times \mathcal{H}(\mathring{A}) \subset \mathcal{H} \quad .$$

Este teorema foi demonstrado por F. Pellegrino e F. Succi no caso de $E = S$ ([15], pg. 18). Generalizamos o mesmo para um espaço topológico E, para aplicá-lo aos conjuntos n-lineares, o que veremos em seguida.

<u>Definição 2</u>

Um conjunto $\mathcal{H}_n \subset \Sigma_n$ que satisfaz à condição :

O corte de $\mathcal{H}_n$ segundo $\forall\, y^{[j]} \in \mathcal{S}^{[j]}$ $(1 \leq j \leq n)$ é uma região linear de $\mathcal{S}_j$,

será chamado conjunto n-linear.

Utilizando o teorema 1 dêste §, veremos que é possível dispensar a hipótese de que o campo de definição de um funcional n-linear seja uma região (como aparece em ([6], §5)), pois esta condição é consequência do fato de o campo ser n-linear.

<u>Teorema 2</u>

<u>Um conjunto n-linear de Σ_n é uma região.</u>

Demonstraremos o teorema por indução. Com efeito, seja $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ um conjunto bilinear. Pelo teorema 1, $\mathcal{H}_2$ é uma região de Σ_2.

Suponhamos demonstrado que os conjuntos (n-1)-lineares $\mathcal{H}_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$ sejam regiões dêste espaço, demonstraremos que qualquer conjunto n-linear de Σ_n é uma região.

Seja o espaço $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}^{[1]}$ hômeomorfo a Σn e o conjunto $\mathcal{L}n$ correspondente a $\mathcal{H}n$. O seu corte segundo $y_1 \in pr_1 \mathcal{H}_n$ é um conjunto (n-1)-linear que pela hipótese de indução é uma região. O corte segundo $y^{[1]} \in \mathcal{S}^{[1]}$ é uma região linear de $\mathcal{S}_1$, logo, pelo teorema 1, $\mathcal{L}_n$ é uma região. Pelo hômeomorfismo também $\mathcal{H}_n$ será uma região de Σn.

Um conjunto n-linear, sendo também uma região, será chamado <u>região n-linear</u>.

Levando em conta o teorema e) e procedendo-se por indução como no teorema 2, podemos também demonstrar que :

<u>Observação 1</u>

Se $\mathcal{H}n$ é uma região n-linear de Σn, dado $(A_1, \sigma_1) y, \times \ldots \times (An, \sigma n) y_n \subset \mathcal{H}_n$, também $[A]\, y = (A_1) y_1 \times \ldots \times (A_n) y_n \subset \mathcal{H}_n$.

Estamos agora em condições de demonstrar a generalização do teorema (2, §1), que permite reduzir o estudo das regiões n-lineares de Σ_n às regiões totalmente próprias do espaço $\mathfrak{S}_n$, mais acessível.

<u>Teorema 3</u>

<u>A cada região n-linear</u> $\mathcal{H}_n \subset \Sigma_n$ <u>é possível asso</u>

ciar uma região totalmente própria $H_n \subset \mathfrak{S}_n$ formada pela reunião das singularidades dos elmentos de $\mathcal{H}_n$, de modo que se $y \varepsilon \Sigma_n$ é tal que $\mathcal{J}_y \subset H_n$, será $y \varepsilon \mathcal{H}_n$ e reciprocamente.

Seja $H = \bigcup_{y \varepsilon \mathcal{H}_n} \mathcal{J}_y$

I) Se $\alpha^* \varepsilon H_n$, existe $y^* \varepsilon \mathcal{H}_n$ com singularidades só em α^*.

Com efeito existe $y \varepsilon \mathcal{H}_n$ com singularidades $\mathcal{J} \ni \alpha^*$. Existirá $[A]\, y \subset \mathcal{H}_n$. Seja y^* com singularidades só em α^*. Será $y^* \varepsilon [A]\, y$ donde $y^* \varepsilon \mathcal{H}_n$.

II) O conjunto H_n é uma região de $\mathfrak{S}_n$.

Seja $\alpha^* \varepsilon H_n$. Existe um elemento $y^* \varepsilon \mathcal{H}_n$ singular em α^*. Existirá também $[A^*]\, y^* \subset \mathcal{H}_n$ + . Seja $y \varepsilon \Sigma_n$ com singularidades só em $\alpha \varepsilon B^* = B_1^* \times B_2^* \times \ldots \times B_n^*$ ‡ ; será $y \varepsilon \mathcal{H}_n$, portanto $\alpha \varepsilon H_n$, donde $B^* \subset H_n$, o que nos diz que H_n é aberto.

III) A região é totalmente própria no espaço $\mathfrak{S}_n$ (Def. 1). O corte segundo $\alpha^{[j]}$ $pr_{\mathfrak{S}[j]} H_n$ é :

\+ $\mathcal{H}_n$ por hipótese é aberto.

‡ Temos $[A^*]\, y^* = (A_1^*)y_1^* \times (A_2^*)y_2^* \times \ldots \times (A_n^*)y_n^*$ e

$$B_j^* = \complement A_j^* \qquad (1 \leq j \leq n) .$$

$$H_n(\alpha^{[j]}) = \{\alpha_j \in S_j \mid (\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) \in H_n\} \qquad (1\leq j\leq n) .$$

Seja $y \in \mathcal{H}_n$ com singularidades só em $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in H_n$, teremos $y_j \in (A(y^{[j]}))$ +, donde $\alpha_j \in B(y^{[j]})$ e recìprocamente . Teremos portanto :

$$H_n(\alpha^{[j]}) = B(y^{[j]}) \neq S_j \qquad (1\leq j\leq n)$$

e pela definição H_n será totalmente própria em $\mathfrak{S}_n$.

IV) A região $\mathcal{H}_n$ é formada pelo conjunto das funções y tais que $\mathcal{I}_y \subset H_n$.

Seja $y = (y_1,\ldots,y_n)$ de modo que $\mathcal{I}_y = I_1\times\ldots\times I_n \subset H_n$. Mostremos que $y \in \mathcal{H}_n$. Sejam $\alpha^{[j]}$ variavel em $I^{[j]}$ ‡ e as funções $\bar{y}^{[j]}$ singulares só em $\alpha^{[j]}$ $(1\leq j\leq n)$.

Teremos:

$$I_1\times\{\alpha_2\}\times\ldots\times\{\alpha_n\} \subset H_n \quad ,$$

portanto ,

$$I_1 \subset H_n(\alpha^{[1]}) = B(\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_n)$$

segundo III) .

Desta última teremos :

$$y_1 \in (A(\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_n)) \quad , \text{ donde :}$$
$$\bar{y}_2 \in (A(y_1,\bar{y}_3,\ldots,\bar{y}_n))$$

+ $y^{[j]}$ indica a (n-1)-pla formada por $y_1,\ldots,y_n$ (na ordem natural excepto y_j $(1\leq j\leq n)$.

‡ $I^{[j]}$ indica o produto de $I_1,\ldots,I_n$ (na ordem natural) excepto I_j $(1\leq j\leq n)$.

e $\alpha_2 \in B(y_1, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_n)$ $\qquad \forall \alpha_2 \in I_2$

donde $\qquad I_2 \subset B(y_1, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_n)$

e $\qquad y_2 \in (A(y_1, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_n))$

Continuando assim, faremos desaparecer as funções assinaladas, nas relações do tipo da última, e obteremos :

$$y_n \in (A(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}))$$

isto é :

$$y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathcal{H}_n \qquad \text{c.q.d.}$$

V) Reciprocamente, demonstremos que se $H_n \subset \mathfrak{S}_n$ é totalmente própria, o conjunto $\mathcal{H}_n$ das funções y tais que $\mathcal{J}_y \subset H_n$ é uma região n-linear.

Seja $y^{[j]} \in \mathcal{G}^{[j]}$ e $\mathcal{H}_n(y^{[j]})$ $\qquad (1 \leq j \leq n)$.

Temos :

$$\mathcal{H}_n(y^{[j]}) = \left\{ y_j \mid \mathcal{J}_y \subset H_n \right\} \stackrel{+}{=}$$

$$= \left\{ y_j \mid I_j \subset B(y^{[j]}) \right\} \qquad (B(y^{[j]}) = \bigcap_{t^{[j]} \in I^{[j]}} H\,(t^{[j]}))$$

Para provarmos esta última igualdade é suficiente utilizar as relações 1) e 2) do § 2.

+$\mathcal{J}_y$ indica o produto das singularidades das funções de $y^{[j]}$ e de y_j, na ordem natural.

Pelo teorema (1, §2), o conjunto $B(y^{[j]})$ é aberto e diferente de S_j, porque cada $H(t^{[j]}) \neq S_j$ (H_n é totalmente própria por hipótese). Pelo teorema fundamental (2, §1), $\mathcal{H}(y^{[j]}) = (A(y^{[j]}))$ será uma região linear ($A(y^{[j]}) = \complement B(y^{[j]})$).

Existe, portanto, uma correspondência biunívoca entre regiões n-lineares $\mathcal{H}_n \subset \Sigma_n$ e as regiões próprias $H_n \subset \mathfrak{S}_n$.

3 Adotaremos no II capítulo as seguintes definições :

__Contorno__ - Chama-se contorno, na esfera complexa, um conjunto de um número finito de curvas de Jordan fechadas sem pontos comuns; compostas de um número finito de arcos regulares.

__Separatriz__ - Chama-se separatriz entre dois conjuntos fechados disjuntos I e A da esfera complexa, um contorno C de modo que uma das partes limitadas por C contenha I e a outra A.

C limitará uma parte aberta da esfera complexa que contem I e estará contida em $B = \complement A$.

A existência de uma separatriz entre dois fechados disjuntos da esfera complexa foi demonstrada pelo prof. Fantappié ([8],pg. 40).

__n-separatriz__. Seja H_n aberto em $S_1 \times \ldots \times S_n$ e $\mathcal{I} = I_1 \times \ldots \times I_n$ fechado contido em H_n. Chama-se n-separatriz entre $\mathcal{I}$ e $\complement H_n$ o produto Γ de contornos $C_j \subset S_j$ $(1 \leq j \leq n)$ que limitam domínios + D_j que contém I_j $(1 < j < n)$, de modo que o produto $D_1 \times \ldots \times D_j$ esteja contido em H_n.

Quando H_n é uma região totalmente própria de $\mathfrak{S}_n$, a existência de uma n-separatriz é facilmente demonstrável, utilizando o teorema anterior :

Sejam $I_1 \times \ldots \times I_n \subset H_n$ e as funções $y_1, \ldots, y_n$ singulares em $I_1, \ldots, I_n$ respectivamente. Será $(y_1, \ldots, y_n) \varepsilon$ $\varepsilon\ \mathcal{H}_n$ (região n-linear correspondente a H_n). Existirá $(A_1)y_1 \times \ldots \times (A_n)y_n \subset \mathcal{H}_n$, e pela primeira parte da demonstração do teorema 5), será :

$$B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \subset H_n. \tag{1)}$$

Se C_j $(1 \leq j \leq n)$ forem sepatrizes entre I_j e A_j $(A_j = \complement B_j)$, $\Gamma = C_1 \times \ldots \times C_n$ será uma n-separatriz entre $\mathcal{Y}$ e $\complement H_n$.

<u>Observação 2</u>

Seja $I^n \subset H_n$, existe B^n tal que $I^n \subset B^n \subset H_n$ (I fechado e B aberto).

É suficiente substituir na relação 1) acima, os B_j $(1 < j < n)$ por $B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$.

+ domínio = aderência de um aberto.

Como consequência, dado $y \in \mathcal{H}_n \cap \Delta_n^{+}$, existe $(A(y_o))^n \subset \mathcal{H}_n$, sendo $y = (y_o, y_o, \ldots, y_o)$.

Poderemos também tomar as sepatrizes $C_j \subset S_j$ $(1 \leq j \leq n)$ iguais e teremos uma n-separatriz C^n.

No capítulo II), usaremos sepatrizes entre as singularidades I e A de funções $y(t) \in \mathcal{S}$ e $u(t) \in \mathcal{S}$ respectivamente. Orientá-las-emos de modo a deixar I à direita.

Para orientarmos uma n-separatriz $\Gamma = C_1 \times \ldots \times C_n$, entre $\mathcal{I} = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ e $\complement H_n$ ($\mathcal{I}$ fechado e H_n aberto), orientaremos cada contorno C_j $(1 \leq j \leq n)$ de modo a deixar I_j à direita.

4 No segundo capítulo estudaremos os funcionais analíticos homogêneos que se podem definir a partir dos funcionais analíticos n-lineares $F[y_1, \ldots, y_n]$. A maneira mais natural de fazer isto é a de igualar as funções variáveis independentes. Isto, do ponto de vista da teoria dos conjuntos, significa considerar a intersecção entre uma região n-linear de Σ_n com a diagonal deste mesmo.

Como o funcional homogêneo que estudaremos deverá estar definido numa região do espaço de Fantappié, projetaremos a intersecção considerada, sôbre um qualquer dos fatores de Σ_n.

+ Δ_n = diagonal de Σ_n.

Estudaremos em seguida a intersecção de uma região n-linear com a diagonal de Σ_n.

Seja $R = \bigcup_{j \varepsilon J} (A_j)$. Consideremos $y_0 \varepsilon \mathscr{S}$ e

$J_0 = \{ j \varepsilon J \mid (A_j) \ni y_0 \}$

Se $\bigcup_{j \varepsilon J_0} (A_j) \subset (A_0) \quad \forall y_0 \varepsilon R$ ((A_0) região linear dep. de y_0), diremos que em R está satisfeita a <u>condição P.</u>

<u>Teorema 4</u>

<u>A projeção da intersecção de uma região n-linear de Σ_n com a diagonal, sôbre qualquer dos fatores de Σ_n, é uma reunião de vizinhanças lineares que satisfaz à condição P.</u>

I) Seja $\mathscr{H}_n \cap \Delta_n = \emptyset$, será pr $\mathscr{H}_n \cap \Delta_n = \emptyset$ que é uma região linear.

Seja $\mathscr{H}_n \cap \Delta_n \neq \emptyset$. Existirá $y_0 \varepsilon R = \text{pr } \mathscr{H}_n \cap \Delta_n$ e $(A, \sigma) y_0 \subset R$. Provemos que $(A) y_0 \subset R$. Para isto provaremos antes que $B^n \subset H_n$.

Seja $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \varepsilon B^n$. Será $\alpha_s \varepsilon B \quad (1 \leq s \leq n)$.

A restrição y_0^* de y_0 com os novos pontos singulares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pertencerá a $(A, \sigma) y_0$, portanto a R, logo :

$$(y_0^*, y_0^*, \dots, y_0^*) \varepsilon \mathscr{H}_n, \ (I^*)^n \subset H_n \quad \text{e} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \varepsilon H_n$$

isto é :

1) $$B^n \subset H_n$$

Finalmente $(A) \subset R$, porque se $y \varepsilon (A)$, será $I \subset B$ e $I^n \subset B^n$, donde $I^n \subset H_n$ e $y \varepsilon R$. Poderemos colocar o conjunto dos (A) tais que $(A)y_o \subset R$ (fazendo variar y_o em R) numa familia $(A_j)_{j \varepsilon J}$. Fica então demonstrado que $R = \bigcup_{j \varepsilon J} (A_j)$.

II) A condição P está satisfeita.

Se $R = \emptyset$ é evidente.

Seja $R \neq \emptyset$ e $y_o \varepsilon R$ e $J_o = \{ j \varepsilon J \mid (A_j) \ni y_o \}$.

Teremos por 1) :

$$[(A_j)y_o]^n \subset \mathcal{H}_n \qquad \forall j \varepsilon J_o$$

e

$$I_o^n \subset B_j^n \subset H_n \qquad \forall j \varepsilon J_o \qquad (B_j = \complement A_j)$$

donde

$$B_j \subset \bigcap_{t^{[j]} \varepsilon B_j^{n-1}} H_n(t^{[j]}) \subset \bigcap_{t^{[j]} \varepsilon I_o^{n-1}} H_n(t^{[j]}) = B_o$$

Pelo teorema (1, §2) B_o será aberto e também diferente de S.

Concluimos que

$$(A_j) \subset (A_o) \qquad \forall j \varepsilon J_o \qquad (A_o = \complement B_o)$$

portanto,

$$\bigcup_{j \varepsilon J_o} (A_j) \subset (A_o) \qquad \text{c.q.d.}$$

Vice-versa podemos demonstrar o teorema que, de certo modo, é o recíproco dêste último :

<u>Teorema 5</u>

<u>Seja</u> $R = \bigcup_{j \varepsilon J} (A_j)$ <u>onde está satisfeita a condição</u>

P. Então R está contida na projeção de intersecção de uma região n-linear com a diagonal Δ_n de Σ_n.

I) Seja $H_n = \bigcup_{j \in J} B_j^n \subset \mathfrak{S}_n$.

Mostremos que H_n é totalmente própria em $\mathfrak{S}_n$. Seja $H_n(\alpha^{[r]})$ $(1 \leq r \leq n)$.

Teremos :

$$H_n(\alpha^{[r]}) = \{\alpha_r \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in H_n\}$$

$$H_n(\alpha^{[r]}) = \bigcup_{B_j \ni \alpha_k} B_j \subset \bigcup_{B_j \ni \alpha_k} B_j \quad (K \neq r)$$

Seja y_k uma função singular só em α_k. Quando $\alpha_k \in B_j (j \in J)$, será $y_k \in R$ e reciprocamente.

Teremos $\bigcup_{B_j \ni \alpha_k} (A_j) \subset (A_{y_k})$, por hipótese,

e será também

$$\bigcup_{B_j \ni \alpha_k} B_j \subset B_{y_k} \neq S.$$

Concluímos que $H_n(\alpha^{[r]}) \neq S$ $(1 \leq r \leq n)$. O que prova que H_n é totalmente própria em $\mathfrak{S}_n$.

II) Provemos que $R \subset pr\, \mathcal{H}_n \cap \Delta_n$, sendo $\mathcal{H}_n$ a região n-linear correspondente a H_n.

Seja $y \in R$, teremos :

$y \in (A_j)$ $(j \in J)$

portanto $I \subset B_j$

$$I^n \subset B_j^n \subset H_n$$

$$(y,\ldots,y) \in \mathcal{H}_n \qquad \text{e}$$

$$y \in \mathrm{pr}\ \mathcal{H}_n \cap \Delta_n$$

isto é
$$R \subset \mathrm{pr}\ \mathcal{H}_n \cap \Delta_n \qquad \text{c.q.d.}$$

Em geral não é verificada a igualdade $R = \mathrm{pr}\, \mathcal{H}_n \cap \Delta_n$, pois, para isto, deveríamos demonstrar que :

$$y \in \mathrm{pr}\ \mathcal{H}_n \cap \Delta_n \Rightarrow y \in R$$

isto é, indicando I as singularidades de y :

$$I^n \subset \bigcup_{j \in J} B_j^n \Rightarrow I \subset B_j \qquad (j \in J)$$

O exemplo seguinte nos mostra que esta implicação nem sempre é verdadeira :

Sejam três pontos P_1, P_2, P_3 da esfera complexa e B_1, B_2 e B_3 três abertos que contenham cada par dêstes pontos e não o terceiro. Teremos, pondo $I = \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup \{P_3\}$:

$$I^2 \subset B_1^2 \cup B_2^2 \cup B_3^2 .$$

Entretanto, não temos :

$$I \subset B_j \qquad (1 \leq j \leq 3) .$$

§4 LINHAS ANALÍTICAS E CONEXÃO NO ESPAÇO FUNCIONAL ANALÍTICO.

1 Linhas analíticas

A idéia de linha analítica, introduzida pelo prof.Fantappié, é a de uma função de duas variaveis $y(\alpha,t)$, de modo que dado α_o num aberto Ω de esfera complexa, a função $y(\alpha_o,t)$ seja biregular num aberto M_{α_o}. Alem disto, fixado t_o, a função $y(\alpha,t_o)$ deve ser regular e - introduzida a noção de desvio + entre dois conjuntos fechados de S - a aplicação $\alpha \to I_\alpha = \complement M_\alpha$ (M_α campo de definição de $y(\alpha,t)$ como função de t) deve ser contínua ([8],pg. 27).

Posteriormente F.Pellegrino e D.Del Pasqua introduziram o espaço $\mathcal{Q}$ das partes fechadas parciais não vazias de S, tomando como vizinhança fundamental aberta de $I_o \varepsilon \mathcal{Q}$, o conjunto dos $I \varepsilon \mathcal{Q}$ cujas distâncias de seus pontos a I_o é menor que um número $\rho > o$. Segue-se daqui a definição de continuidade da aplicação $\alpha \to I_\alpha$. A definição de linha analítica de F.Pellegrino e D.Del Pasqua, é obtida substituindo-se esta definição de continuidade àquela dada anteriormente pelo prof. Fantappié. Esta definição de linha analítica, é equivalente à de uma função analítica de duas variáves (α,t), definida num aberto $H \subset S_\alpha \times S_t$ próprio segundo S_t, biregular com relação a t. Esta nova linha é designada pelos autores "linha quase analítica" ([13],pg. 15).

Preferimos adotar, nesta tese, uma definição de linha analítica semelhante à de J. Sebastião e Silva [20]. Provare-

+Dados I_1 e I_2 fechados não vazios de S, define-se desvio entre I_1 e I_2 : $\sup[(x_1,I_2),(I_1,x_2)]$ $(x_1 \varepsilon I_1, x_2 \varepsilon I_2)$, sendo (x_1,I_2) = dist. entre x_1 e I_2 e (I_1,x_2) = dist. entre I_1 e x_2.

mos ser esta definição equivalente à de F. Pellegrino e D. Del Pasqua, e portanto não equivalente àquela do prof. Fantappiè, onde a definição da continuidade de aplicação $\alpha \longrightarrow I_\alpha$ é mais restritiva ([13].pg. 2).

Definição 1

Chama-se <u>linha analítica</u>, uma aplicação $y_\alpha(t)$ de $\Omega \neq \emptyset$ (aberto em S_α) em $\mathcal{S}$, que em cada $\alpha_0 \varepsilon \Omega$ satisfaz à condição de <u>holomorfia</u> :

$$1) \quad \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)}{\alpha - \alpha_0} = (\varphi_{\alpha_0}(t), M_{\alpha_0}),$$

sendo M_{α_0} a região de definição de $y_{\alpha_0}(t)$ e $(\varphi_{\alpha_0}(t), M_{\alpha_0}) \varepsilon \mathcal{S}^{+}$.

Isto é, dado $(A,\sigma)\,\varphi_{\alpha_0}(t)$, podemos determinar $\delta > 0$ de modo que :

$$0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta \Longrightarrow \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)}{\alpha - \alpha_0} \varepsilon (A,\sigma)\,\varphi_{\alpha_0}(t) \quad ‡$$

Na definição de holomorfia, fixamos a região M_{α_0} da função limite, para obtermos a unicidade do limite, como veremos em seguida. Pode-se verificar que deixando indetermina-

+Como habitualmente, $y_\alpha(t)$ será holomorfa no ponto ∞, se $\psi_\beta(t) = y_{\frac{1}{\beta}}(t)$ fôr holomorfa na origem.

‡ Isto equivale a dizer que $\frac{y(\alpha,t) - y(\alpha_0,t)}{\alpha - \alpha_0}$ tende uniformemente a $\varphi_{\alpha_0}(t)$ em qualquer $A \subset M_{\alpha_0}$ $(y(\alpha,t) = y_\alpha(t))$.

da a região de definição de função limite, toda restrição desta pertencente a $\mathcal{S}$, também será limite. A razão disto está no fato de que o espaço $\mathcal{S}$, é simplesmente um espaço T_o e não um espaço separado segundo Hausdorff [10] .

Uma linha analítica será designada pelos símbolos

$$[y_\alpha(t)]_{\alpha\,\varepsilon\,\Omega} \qquad \text{ou} \qquad f(\alpha) \qquad (\alpha\,\varepsilon\,\Omega).$$

Teorema 1

Toda linha analítica é contínua.

Como nas funções reaes, consideraremos a identidade :

$$2) \quad y_\alpha(t) - y_{\alpha_o}(t) = \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_o}(t)}{\alpha - \alpha_o}(\alpha - \alpha_o) \qquad \alpha \neq \alpha_o$$

A definição 1) nos dá :

$$0 < |\alpha - \alpha_o| < \delta \implies \left| \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_o}(t)}{\alpha - \alpha_o} \right| < \sigma + M \qquad (\forall t\,\varepsilon\,A),$$

sendo $M = \max\limits_{t\,\varepsilon\,A} |\varphi_{\alpha_o}(t)|$.

Desta última relação e de 2) segue-se facilmente a continuidade de linha analítica em cada $\alpha_o\ \varepsilon\ \Omega$.

Teorema 2

Para que uma aplicação $(y_\alpha(t), M_\alpha)$ de Ω(aberto em S_α) em $\mathcal{S}$, seja uma linha analítica, é condição necessária e suficiente que $H = \bigcup\limits_{\alpha\,\varepsilon\,\Omega} \{\alpha\} \times M_\alpha$ seja aberta e $y(\alpha,t) = y_\alpha(t)$ seja analítica em cada ponto $(\alpha,t)\ \varepsilon\ H$.

I) A condição é necessária .

Com efeito, na definição 1 está implicita a continuidade de aplicação $\alpha \rightarrow M_\alpha \in \mathscr{C}$ +. Pelo teorema (2, § 2)o conjunto $H = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \{\alpha\} \times M_\alpha \subset S_\alpha \times S_t$ é aberto.

Por construção, $y(\alpha,t)$ é analítica com relação a t. Provemos a analiticidade com relação a α. Fixemos $t_o \in pr_t H$ e $\alpha_o \in H(t_o)$. Teremos $t_o \in H(\alpha_o) = M_{\alpha_o}$. Dado $(\{t_o\}, \sigma)\ \varphi_{\alpha_o}(t)$, teremos :

$$0 < |\alpha - \alpha_o| < \delta \implies \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_o}(t)}{\alpha - \alpha_o} \in (\{t_o\}, \sigma)\ \varphi_{\alpha_o}(t)$$

$$\text{ou} \quad \left| \frac{y(\alpha, t_o) - y(\alpha_o, t_o)}{\alpha - \alpha_o} - \varphi_{\alpha_o}(t) \right| < \sigma \quad .$$

Isto é, $y(\alpha, t_o)$ é holomorfa em cada $\alpha_o \in H(t_o)$.

A função $y(\alpha,t)$ está definida num aberto $H \subset S_\alpha \times S_t$ e sendo analítica separadamente, em relação a α e t, será, pelo teorema de Hartog, analítica no par (α, t).

II) A condição é suficiente.

Seja $y(\alpha,t)$ analítica em cada $(\alpha,t) \in H$ aberto. Seja $\alpha_o \in \Omega$. Consideremos um fechado não vazio $A \subset M_{\alpha_o}$. Pela compacidade de $S_\alpha \times S_t$, poderemos determinar uma vizinhança circular $V(\alpha_o)$ de raio R, tal que :

+ $\mathscr{C}$ indica o conjunto dos abertos não vazios de S_α. Ver a definição de uma topologia em $\mathscr{C}$ no início do número 3 do § 2.

$$V(\alpha_o) \times A \subset H \quad .$$

Seja C a circunferência de $V(\alpha_o)$, orientada de modo a deixar α_o à esquerda. Para cada $t \in A$ e α tal que $|\alpha - \alpha_o| < r < R$, será:

$$y(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(z,t)}{z-\alpha}\, dz$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_o} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(z,t)}{z-\alpha}\, dz$$

Teremos então, quando $\alpha \neq \alpha_o$:

$$\frac{y(\alpha,t) - y(\alpha_o,t)}{\alpha - \alpha_o} - \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = \alpha_o} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C y(z,t) \left\{ \left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha_o}\right] \frac{1}{\alpha-\alpha_o} - \frac{1}{(z-\alpha_o)^2} \right\} dz =$$

$$= \frac{\alpha-\alpha_o}{2\pi i} \int_C y(z,t) \frac{1}{(z-\alpha)(z-\alpha_o)^2}\, dz$$

Por conseguinte, sendo $y(z,t)$ contínua em H:

$$\left| \frac{y(\alpha,t) - y(\alpha_o,t)}{\alpha - \alpha_o} - \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_o} \right| \leq |\alpha-\alpha_o|\; K \frac{1}{R-r}\, \frac{1}{R}$$

$$\left(K = \max_{(z,t)\in C\times A} |y(z,t)|\right)$$

Desta última desigualdade segue-se a convergência uniforme de $\dfrac{y(\alpha,t) - y(\alpha_o,t)}{\alpha - \alpha_o}$ a $\varphi_{\alpha_o}(t) = \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_o}$ sôbre

$A = M_{\alpha_o}$. A aplicação $[y_\alpha(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega}$ será então uma linha analítica.

Seja uma função analítica de duas variáveis $y(\alpha,t)$, definida num aberto $H = S_\alpha \times S_t$ próprio segundo S_t, biregular com relação a t, qualquer que seja $\alpha \varepsilon pr_\alpha H$. Podemos definir, em virtude do teorema 2, uma linha analítica $[y_\alpha(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega}$, tomando $y_\alpha(t) = y(\alpha,t)$ e $\Omega = pr_\alpha H$. Diremos que esta linha está associada a $y(\alpha,t)$.

2 C o n e x ã o

Definição 2

Chama-se <u>linha analítica conexa</u>, uma linha analítica $[y_\alpha(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega}$ onde Ω é conexa.

Se $y(t) = y_{\alpha_o}(t)$ $(\alpha_o \varepsilon \Omega)$, diremos que $[y_\alpha(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega}$ passa por $y(t)$.

Teorema 3

<u>Dadas duas funções $(y_1(t), M_1)$ e $(y_2(t), M_2)$ de $\mathcal{S}$, existe sempre uma linha analítica conexa que passa por $y_1(t)$ e $y_2(t)$.</u>

I) Suponhamos $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Sejam C_1 e C_2 dois abertos de modo que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Seja a função analítica de duas variáveis complexas :

$$y(\alpha,t) = \begin{cases} y_1(t) & (\alpha,t) \in C_1 \times M_1 = R_1 \\ y_2(t) & (\alpha,t) \in C_2 \times M_2 = R_2 \end{cases}$$

Pela definição 2, a linha $[y_\alpha(t)]_{\alpha \in \Omega}$ $(\Omega = C_1 \cup C_2)$ associada a $y(\alpha,t)$, é analítica, conexa, e passa por (y_1,M_1) e (y_2,M_2).

II) Supomos $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

Seja um aberto $M \subset M_1 \cap M_2$ de modo que $(\complement\bar{M}) \cap M_2 \neq \emptyset$. Sejam C_1, C e C_2 círculos abertos de modo que $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, $C \cap C_2 \neq \emptyset$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Sejam
$$R_1 = C_1 \times M_1$$
$$R = C \times M$$
$$R_2 = C_2 \times M_2$$

e $(\complement\overline{R_1 \cup R}) \cap R_2 = R_0$

Consideremos a função analítica :

$$y(\alpha,t) = \begin{cases} y_1(t) & (\alpha,t) \in R_1 \cup R \\ y_2(t) & (\alpha,t) \in R_0 \end{cases}$$

A linha analítica $[y_\alpha(t)]_{\alpha \in \Omega}$ $(\Omega = C_1 \cup C \cup C_2)$ associada a esta função é conexa.

Nos pontos $\alpha \in C_1$ e fora de C temos $y_\alpha(t) = y_1(t)$.

Nos pontos $\alpha \varepsilon C_2$ e fora de C, temos $y_\alpha(t) = y_2(t)$.

O corte de $R_1 \cup R \cup R_o$ segundo $\alpha \varepsilon \bar{C} \cap C_2$ é $(\complement \bar{M}) \cap M_2$ e a função correspondente será $(y_2(t), (\complement \bar{M}) \cap M_2)$.

Teorema 4

Se $(y,M) \varepsilon \mathscr{S}$ e $(y_1,M_1) \varepsilon \mathscr{S}$ é uma restrição de primeira, existe sempre uma linha analítica conexa que passa por elas.

Com efeito sejam C e C_1 dois círculos abertos distintos, tais que $C \cap C_1 \neq \emptyset$. Consideremos em $S_\alpha \times S_t$ os abertos $R = C \times M$ e $R_1 = C_1 \times M_1$. Definamos $y(\alpha,t) = y(t)$ $((\alpha,t) \varepsilon R \cup R_1)$. A linha analítica correspondente a esta função é conexa e passa por (y,M) e (y_1,M_1).

Definição 3

Chama-se poligonal analítica conexa, um conjunto de um número finito de linhas analíticas conexas $[y_{j\alpha}(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega_j}$ $(1 \leq j \leq n)$, de modo que cada uma tenha alguma função comum com a anterior (a partir da segunda).

Definição 4

Um conjunto $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$, se diz conexo, se quaisquer que sejam (y_o,M_o) e (y,M) pertencentes a $\mathscr{C}$, existe uma poligonal analítica conexa $[y_{j\alpha}(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega_j}$ $(o \leq j \leq n)$, de modo que $y_{o\,\alpha_o}(t) = y_o(t)$ e $y_{n\,\alpha_n}(t) = y(t)$ $(\alpha_o \varepsilon \Omega_o, \alpha_n \varepsilon \Omega_n)$.

Teorema 5

Uma vizinhança $(A,\sigma)y$ é um conjunto conexo.

Sejam (y_o,M_o) e (y_1,M_1) duas funções quaisquer de

$(A,\sigma)y$. Consideremos a linha analítica $[y_o + \alpha(y_1 - y_o)]_{\alpha\varepsilon\pi}$ (π = plano complexo). As funções correspondentes a $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ estão contidos em $(A,\sigma)y$, pois :

$$|y_o(t) - y(t) + \alpha(y_1(t) - y_o(t))| = |y_o - y + \alpha[y_1 - y - (y_o - y)]| =$$

$$= |(y_o - y)(1-\alpha) + \alpha(y_1 - y)| < \sigma\,(1-\alpha) + \alpha\,\sigma = \sigma \qquad \forall\, t \,\varepsilon\, A.$$

O campo de definição de $y_o + \alpha(y_1 - y_o)$ é $M_o \cap M_1$ que contem A.

Sendo $[y_o + \alpha(y_1 - y_o)]_{\alpha\varepsilon\pi}$ uma aplicação contínua de $\alpha \,\varepsilon\, \pi$ em $\mathcal{S}$ (teorema 1), a imagem inversa de (A,σ) por esta aplicação é um aberto Ω que contém o intervalo $[0,1]$. Poderemos também determinar um aberto conexo C tal que $[0,1] \subset C \subset \Omega$. A linha analítica conexa $[y_o + \alpha(y_1 - y_o)]_{\alpha\varepsilon C}$, para $\alpha = 0$ nos dá $(y_o, M_o \cap M_1)$ e para $\alpha = 1$ nos dá $(y_1, M_o \cap M_1)$ Pelo teorema anterior podemos determinar duas linhas analíticas conexas $[y_{o\alpha}(t)]_{\alpha\,\varepsilon\, C_o}$ e $[y_{1\alpha}(t)]_{\alpha\,\varepsilon\, C_1}$ que ligam respectivamente (y_o, M_o) com $(y_o, M_o \cap M_1)$ e (y_1, M_1) com $(y_1, M_o \cap M_1)$. É evidente que estas linhas estão contidas em $(A,\sigma)y$. As três linhas $[y_{o\alpha}(t)]_{\alpha\,\varepsilon C_o}$, $[y\ (t)]_{\alpha\,\varepsilon C}$ e $[y_{1\alpha}(t)]_{\alpha\,\varepsilon\, C_1}$ resolvem o problema em virtude de definição 4.

__Definição 5__

Chama-se cadeia, um conjunto ordenado e finito de vizinhanças fundamentais, cada uma tendo uma função comum com a anterior (a partir da segunda).

Se uma região R goza de propriedade que quaisquer que sejam as funções y_o e y, existe uma cadeia contida em R, cujas vizinhanças extremas contém as mesmas, diremos que R é conexa por cadeias.

Teorema 6

Se uma região é conexa, ela é conexa por cadeias e reciprocamente.

Seja R a região e y_o e y duas funções quaisquer de R. Existe uma poligonal $[y_{j\alpha}(t)]_{\alpha\varepsilon\Omega_j}$ $(0 \leq j \leq n)$ que passa por y_o e y, correspondentes a valores $\alpha_o \varepsilon \Omega_o$ e $\alpha_{n+1} \varepsilon \Omega_n$, respectivamente.

Seja em cada Ω_j o parâmetro α_j que dá o cruzamento da linha $j^{\underline{ma}}$ com a anterior $(1 \leq j \leq n)$. Existirão poligonais $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \subset \Omega_j$ $(o \leq j \leq n)$. Seja $\alpha = \alpha(x)$, uma representação contínua de $[0,1]$ sobre $\bigcup_{j=o}^{n}(\alpha_j, \alpha_{j+1})$, de modo que $\alpha_o = \alpha(o)$ e $\alpha_{n+1} = \alpha(1)$. Obteremos por substituição uma aplicação contínua $\psi(x)$ de $[0,1]$ em $R \subset \mathcal{S}$. Designemos por $y_x(t)$ esta aplicação. Para cada função $y_x(t)$ $x \varepsilon [0,1]$, existe um entorno $(A_x, \sigma_x) y_x$ contido em R. Existirá por conseguinte para cada $x \varepsilon [0,1]$ um intervalo aberto+ contido na imagem inversa de $(A_x, \sigma_x)\ y_x$ (pela continuidade de aplicação $y_x(t)$). Pelo teorema de Borel-Lebesgue, poderemos determinar um número finito destes intervalos que cobrem $[0,1]$. Poderemos ordená-los de

+Intervalo aberto na topologia induzida sobre $[0,1]$ pela reta numérica.

modo que cada um corte o anterior (a partir do segundo). Em correspondência teremos em R uma cadeia que "passa" por y_0 e y.

A recíproca deste teorema é evidente em virtude do teorema 4.

Definamos conexão por intermédio de aplicações contínuas :

Uma região R se diz conexa, quando quaisquer que sejam $y_0(t)$ e $y(t)$ de R, existe uma aplicação contínua $\psi(x)$ de $[0,1]$ em R tal que $\psi(0) = y_0(t)$ e $\psi(1) = y(t)$.

É fácil ver que, prodedendo-se como no teorema 6, a definição de conexão, de abertos de $\mathcal{S}$, por aplicações contínuas é equivalente à definição de conexão por cadeias e, portanto, equivalente à definição por poligonais analíticas.

Em resumo : as definições de conexão de um aberto de $\mathcal{S}$ por poligonais analíticas, por aplicações contínuas e por cadeias são equivalentes.

O estudo da conexão do espaço $\mathcal{S}$, depois de sistematização dada pelo prof. Luigi Fantappié à teoria dos funcionais analíticos, em 1941 [9], foi iniciada por L. Calabi [4] e M. Carafa [5].

Com relação à conexão por linhas analíticas, foi demonstrado por L. Calabi que :

a) Dadas duas funções quaisquer de $\mathcal{S}$, existe sempre uma poligonal analítica com cinco lados que passa por elas.

b) Dada uma função e um de seus prolongamentos, existe uma linha analítica que passa por elas.

No texto demonstramos o teorema 3 mais forte que a) e demos outra demonstração do teorema b).

Dada uma região $R \subset \mathcal{G}$, introduzamos a seguinte relação de equivalência:

dadas y_1 e y_2 em R, diremos que y_1 é equivalente a y_2, se existir uma poligonal analítica contida em R e que passa por y_1 e y_2.

As classes de equivalência desta relação, serão chamadas <u>componentes conexas de R.</u>

Tendo em vista o teorema 4, é claro que : <u>cada componente conexa de uma região será aberta.</u>

C A P I T U L O   II

§1 F U N C I O N A I S   A N A L Í T I C O S.+

1

Definição 1

Chama-se funcional analítico uma aplicação $F[y(t)]$ de uma região $R \subset \mathcal{S}$ em π, satisfazendo às seguintes propriedades:

a) se $y_1 \varepsilon R$ e $y_2 \varepsilon \mathcal{S}$ é um prolongamento de y_1:

$$F[y_1] = F[y_2]$$

b) se $f(\alpha)$ $(\alpha \varepsilon \Omega)$ é uma linha analítica (def.1 (§4,I)) que penetra‡ em R, $F[f(\alpha)]$ é uma função analítica de $\alpha \varepsilon \overset{-1}{f}(R)$.

Um funcional analítico segundo esta definição é chamado por F.Pellegrino e D.Del Pasqua ([13],pg.38) hiperanalítico.

A definição de linha analítica (linha F), dada pelo prof. Fantappié, é mais restritiva que a de F.Pellegrino e D.Del Pasqua (linha quase analítica, ver início do (§4,I)). É claro então que todo funcional hiperanalítico será analítico sobre as li -

+ Para este §, ver ([8],pg.31 e seg.), ([9].pg. 652 e seg.), ([11].pg. 21), ([12].pg. 375-382), ([6],pg.42-48),([13],pg.38)

‡ Diz-se que uma linha analítica $f(\alpha)$ $(\alpha \varepsilon \Omega)$ penetra numa região $R \subset \mathcal{S}$, se $f(\Omega) \cap R \neq \emptyset$.

nhas F([13],pg. 38). Porém tambem a recíproca é verdadeira, isto é todo funcional analítico é hiperanalítico. Para demonstrarmos isto, é suficiente determinar uma linha do tipo F, que penetre na região de definição do funcional, e que seja "formada" por restrições das funções de uma linha quase analítica.

Seja $F[y(t)]$, definido em $R \subset \mathcal{S}$, analítico sôbre as linhas F que penetram em R.

Seja $f(\alpha) = y_\alpha(t)$ ($\alpha \in \Omega$) uma linha quase analítica que penetra em R. Seja $\alpha_o \in \overset{-1}{f}(R)$, será então $y_{\alpha_o}(t) \in R$ e existirá $(A,\sigma)y_{\alpha_o} \subset R$. Pela continuidade da linha analítica (teorema (1,§4,I)) existirá uma vizinhança aberta $V_1(\alpha_o) \subset \overset{-1}{f}(R)$, de modo que

$$1) \quad \text{se} \quad \alpha \in V_1(\alpha_o) \implies y_\alpha(t) \in (A,\sigma)y_{\alpha_o}(t).$$

Teremos também $\{\alpha_o\} \times A \subset H$. Pela compacidade de $S_\alpha \times S_t$, poderemos determinar uma vizinhança aberta $V_2(\alpha_o) \subset S_\alpha$, e um aberto $M \subset S_t$ e que contem A, de modo que $V_2(\alpha_o) \times M \subset H$, isto é :

$$2) \quad \text{se} \quad \alpha \in V_2(\alpha_o) \implies M_\alpha^{+} = H_\alpha \supset M \supset A .$$

Seja a linha $(\bar{y}_\alpha(t))_{\alpha \in V}$ $(V = V_1 \cap V_2)$, onde

+ M_α = campo de definição de $y_\alpha(t)$

$\bar{y}_\alpha(t)$ é restrição de $y_\alpha(t)$ a M. Evidentemente esta nova linha é do tipo F, porque a aplicação $\alpha \to I_\alpha = \complement M$ é constante, portanto contínua segundo a definição do prof. Fantappié (§4, I). Por 1) e 2) será : $\bar{y}_\alpha(t) \in (A,\sigma) y_{\alpha_0}(t) \subset R$, ($\alpha \in V(\alpha_0)$), e

$$F[y_\alpha(t)] = F[\bar{y}_\alpha(t)] \qquad \alpha \in V(\alpha_0) \subset \overset{-1}{f}(R)^{+}$$

Isto nos diz que $F[y_\alpha(t)]$ é analítica numa vizinhança de cada ponto $\alpha_0 \in \overset{-1}{f}(R)$, isto é $F[y(t)]$ é hiperanalítico. Teremos então o

<u>Teorema 1</u>

<u>As definições de funcional analítico e hiperanalítico são equivalentes.</u>

Em virtude desta equivalência, poderemos utilizar todos os resultados de teoria dos funcionais analíticos do prof. Fantappié.

De agora em diante chamaremos funcional analítico, todo funcional que satisfaz à definição 1.

2

<u>Definição 2</u>

Chama-se <u>funcional analítico linear</u>, um funcional analítico definido numa região linear (A), satisfazendo à seguinte propriedade :

$$c) \quad F[y_1(t)+y_2(t)] = F[y_1(t)]+F[y_2(t)] \qquad \forall\, y_1,y_2 \in (A).$$

+Um funcional analítico assume o mesmo valor nos prolongamentos.

A propriedade :

$$F[\alpha y] = \alpha F[y] \qquad \forall\, \alpha \in \pi, y \in (A)$$

imposta geralmente aos funcionais lineares, é deduzida das propriedades b) e c) ([8],pg. 34).

A fórmula central da teoria dos funcionais analíticos lineares do prof. Fantappiè, é aquela que dá o valor de um funcional analítico linear sob forma de integral de Riemann :

$$1) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\alpha) \quad y(\alpha)\, d\alpha \qquad \forall\, y(t) \in (A)$$

onde $u(\alpha) = F\left[\frac{1}{t-\alpha}\right]$ é uma função analítica biregular em $B = \complement A$, chamada indicatriz do funcional linear $F[y(t)]$ e C é uma separatriz entre os conjuntos fechados A e I (I = conjunto das singularidades de $y(t)$).

Recìprocamente, se $u(t)$ fôr uma função analítica biregular numa região própria $B \subset \overset{\infty}{S}$, associando-se a cada função $y(t) \in (A)$ $(A = \complement B)$ o número complexo dado por

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(t) \quad y(t)\, dt$$

e sendo C uma separatriz entre A e I, obteremos um funcional analítico linear cuja indicatriz é exatamente $u(\alpha)$.

Pode-se demonstrar que se $\bar{C}$ for outra separatriz entre A e I, a integral acima não muda de valor, qualquer que seja a posição do ∞ com relação às separatrizes C e $\bar{C}$ (pela biregularidade de $u(t)$ e $y(t)$).

§ 2 FUNCIONAIS ANALÍTICOS n - LINEARES

1

Definição 1

Chama-se funcional analítico n-linear, uma aplicação $F[y_1,\ldots,y_n]$ de uma região n-linear $\mathcal{H}_n \subset \Sigma_n$ em π, com a seguinte propriedade:

Fixado qualquer $\bar{y}^{[j]} \varepsilon\, pr_{\mathcal{G}[j]} \mathcal{H}_n$ $(1 \leq j \leq n)$, o funcional $F[\bar{y}_1,\ldots,y_j,\ldots,\bar{y}_n]$ é analítico e linear em $\mathcal{H}_n(\bar{y}^{[j]})$.

2 Fórmula fundamental dos funcionais analíticos n-lineares

Seja $F[y_1,\ldots,y_n]$ um funcional analítico n-linear definido numa região n-linear. Fixemos $y = (y_1,\ldots,y_n) \,\varepsilon\, \mathcal{H}_n$. Existirá $[A]_y = (A_1)y_1 \times (A_2)y_2 \times \ldots \times (A_n)y_n \subset \mathcal{H}_n$. A restrição de $F[y_1,\ldots,y_n]$ a $[A]y$ continuará a ser um funcional analítico n-linear. O valor de $F[y_1,\ldots,y_n]$ como funcional linear de y_1, será dado pela fórmula (1,§1):

$$1_1)\quad F[y_1,\ldots,y_n] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, y_2,\ldots y_n\right] y_1(\alpha_1)\, d\alpha_1$$

onde $F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, y_2,\ldots,y_n\right]$ é uma função analítica de $\alpha_1 \,\varepsilon\, B_1$ $(B_1 = \complement A_1)$ e um funcional (n-1)linear de $(y_2,\ldots,y_n)$ em $(A_2)y_2 \times \ldots \times (A_n)y_n$, e C_1 uma separatriz entre I_1 e A_1.

Calculando o valor de $F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, y_2, \ldots, y_n\right]$, pela fórmula (1, §1), obteremos :

$$1_2)\quad F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, y_2 \ldots, y_n\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \frac{1}{\alpha_2 - t_2}, y_3 \ldots, y_n\right] y_2(\alpha_2)\, d\alpha_2,$$

sendo C_2 uma separatriz entre I_2 e A_2.

Continuando, obteremos :

$$1_n)\quad F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1} - t_{n-1}}, y_n\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right] y_n(\alpha_n)\, d\alpha_n,$$

sendo C_n uma separatriz entre I_n e A_n.

Fazendo as substituições necessárias, obteremos a fórmula :

$$2)\quad F[y_1, \ldots, y_n] =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \cdots \int_{C_n} F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right] y_1(\alpha_1) \ldots y_n(\alpha_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

onde $F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right]$ é uma função analítica de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, em $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, no sentido de Osgood, evidentemente biregular com relação a cada variável.

Mas a função $F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right]$ está definida também se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in H_n$ (região totalmente própria de $\mathfrak{S}_n$ associada a $\mathcal{H}_n$).

Esta função será chamada indicatriz do funcional analítico n-linear $F[y_1, \ldots, y_n]$. Sendo analítica com relação a cada variável separadamente, será analítica no sentido de Osgood. Isto provém do fato de que um funcional de n funções analíticas é n-linear, quando fôr linear separadamente com relação a cada função.

Observando que $\Gamma = C_1 \times \ldots \times C_n$ é uma n-separatriz entre $\mathcal{J} = I_1 \times \ldots \times I_n$ e $\complement H_n$ pois $D_1 \times \ldots \times D_n \subset B_1 \times \ldots \times B_n \subset H_n$,+ teremos a seguinte fórmula fundamental :

3) $F[y_1, \ldots, y_n] =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right] y_1(\alpha_1) \ldots y_n(\alpha_n) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n .$$

Recìprocamente, seja $u(t_1, \ldots, t_n)$ uma função analítica no sentido de Osgood, numa região totalmente própria $H_n \subset \mathfrak{S}_n$, biregular com relação a cada variável. A cada $(y_1, \ldots, y_n) \varepsilon \mathcal{H}_n$ (região n-linear associada a H_n), façamos corresponder o número complexo :

4) $F[y_1, \ldots, y_n] =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma u(t_1, \ldots, t_n) y_1(t_1) \ldots y_n(t_n) dt_1 \ldots dt_n ,$$

onde Γ é uma n-separatriz entre $I_1 \times \ldots \times I_n$ e $\complement H_n$.

+D_j = domínio limitado por C_j e que contém I_j $(1 \leq j \leq n)$.

Mostremos que a fórmula acima define um funcional analítico n-linear com campo de definição $\mathcal{H}_n$.

I) Mostremos em primeiro lugar que se trata de uma aplicação, isto é, se Γ e Γ' forem duas n-separatrizes entre $\mathcal{Y}$ e $\complement H_n$, o valor de integral acima é o mesmo.

Sejam $D_1,\ldots,D_n$ os domínios limitados pelos contornos $C_1, C_2,\ldots,C_n$ de Γ, e que contêm $I_1,\ldots,I_n$, respectivamente. Sejam $D_1, D_2, \ldots, D_n$ os domínios análogos de Γ'. É suficiente demonstrar a proposição quando $D'_j \subset D_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

Consideremos um produto $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ (R_j aberto, $1 \leq j \leq n$) de modo que :

$$D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \subset R \subset H_n.$$

A restrição de $u(t_1,\ldots,t_n)$ a R é analítica e biregular com relação a cada variável, e o produto $u(t)\ y^{[j]}$ + é biregular em relação a cada variável no produto (na ordem natural) de R_j pelos $R_i - I_i$ $(i \neq j \quad 1 \leq j \leq n)$.

A integral

$$\int_{C^{[j]}} u(t)\ y^{[j]}\ dt^{[j]} \quad {}^{\ddagger}$$

\+ Quando não houver ambiguidade $y^{[j]}$ representará também o produto das funções $y_1(t_1)\ldots y_n(t_n)$ exceto $y_j[t_j]$.

‡ Os símbolos

$$\int_{C^{[j]}} u(t) y^{[j]}(t^{[j]})\ dt^{[j]} \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} u(t)\ y(t)\ dt$$

representam as integrais de $u(t_1,\ldots,t_n)$ multiplicada por $y^{[j]}$ e $y_1(t_1)\ldots y_n(t_n)$ respectivamente sôbre $C^{[j]}$ e Γ $(1 \leq j \leq n)$.

será uma função biregular de $t_j \in R_j$. Pela parte final do §1, teremos :

5) $F[y_1,\ldots,y_n] =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1\times\ldots\times C_n} u(t)y(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \left\{ \int_{C^{[1]}} u(t)\, y^{[1]}\, dt^{[1]} \right\} y_1(t_1)\, dt_1 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C'_1} \left\{ \int_{C^{[1]}} u(t)\, y^{[1]}\, dt^{[1]} \right\} y_1(t_1)\, dt_1 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C'_1\times C_2\times\ldots\times C_n} u(t)\, y(t)\, dt\ .$$

Substituindo sucessivamente os contornos C_j pelos C'_j, obteremos :

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} u(t)y(t)dt = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma'} u(t)y(t)dt \qquad \text{c.q.d.}$$

II) Mostremos que a aplicação é um funcional n-linear.

Sejam $y^{[j]} \in pr_{\mathcal{J}[j]}\mathcal{H}_n$, $y_j \in \mathcal{H}_n(y^{[j]})$ e $\bar{y}_j \in \mathcal{H}_n(y^{[j]})$ $(1 < j < n)$. Seja Γ uma n-separatriz entre $\mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}}$ e $\complement H_n^+$.

Teremos :

$+\mathcal{J} = I_1\times\ldots\times I_j\times\ldots\times I_n \quad , \bar{\mathcal{J}} = \bar{I}_1\times\ldots\times I_j \ldots\times\bar{I}_n\ .$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_j}(y_j+\bar{y}_j)\int_{C^{[j]}} u(t)y^{[j]}dt^{[j]}dt_j =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_j} y_j \int_{C^{[j]}} u(t)y^{[j]}dt^{[j]}dt_j +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_j} \bar{y}_j \int_{C^j} u(t)y^{j}\, dt^{j}\, dt_j,$$

isto é :

$$F[y_1,\dots,y_j+\bar{y}_j,\dots,y_n] = F[y_1,\dots,y_j,\dots,y_n]+F[y_1\dots,\bar{y}_j\dots y_n].$$

III) **Mostremos que a aplicação é um funcional n-linear analítico.**

Dado $\bar{y}^{[j]} \varepsilon\, pr_j\, \mathcal{H}_n$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, precisamos demonstrar que o funcional de uma só função y_j, $F[\bar{y}_1,\dots,y_j,\dots,\bar{y}_n]$, é analítico. Para isto é suficiente demonstrar que a restrição deste funcional nums vizinhança conveniente de cada função $\bar{y}_j \,\varepsilon\, \mathcal{H}_n(\bar{y}^{[j]})$ **é analítica.**

Seja $[A]\bar{y} \subset \mathcal{H}_n$. Teremos $\bar{I}_1\times\dots\times\bar{I}_n \subset B_1\times\dots\times B_n \subset H_n$ $^{+}$. A restrição de $u(t)$ a $B_1\times\dots\times B_n$ será biregular com relação a cada variavel, e a integral

$$u(t_j) = \int_{\bar{C}^{[j]}} u\, \bar{y}^{[j]}\, dt^{[j]}$$

$^{+}\bar{I}_j$ = sing. de $\bar{y}_j$, $B_j = \complement A_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$.

será função biregular de t_j B_j.

O funcional $\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_j} u(t_j) y_j(t_j) dt_j$ restrição de

$F[\bar{y}_1, \ldots, y_j, \ldots, \bar{y}_n]$ a $(A_j)\bar{y}_j \subset \mathcal{H}_n(y^{[j]})$ será analítico em virtude das considerações de parte final do §1.

IV) A indicatriz do funcional analítico n-linear construido a partir de $u(t_1, \ldots, t_n)$ é exatamente esta função.

Com efeito, levando em conta a fórmula de Cauchy das funções biregulares com relação a n variáveis, teremos :

$$F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} u(t_1, \ldots, t_n) \frac{1}{\alpha_1 - t_1} \cdots \frac{1}{\alpha_n - t_n} dt_1 \ldots dt_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{-C_1} \cdots \int_{-C_n} u(t_1, \ldots, t_n) \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_n} dt_1 \ldots dt_n$$

$$= u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in H_n.$$

Existe portanto uma correspondência biunívoca entre os funcionais analíticos n-lineares, e as funções definidas em regiões totalmente próprias de $\mathfrak{S}_n$, biregulares com relação a n variáveis.

3) O wronskiano de n funções analíticas biregulares sob forma de integral múltipla.

Como aplicação da fórmula 3), demonstraremos uma fórmula que representa, sob forma de integral múltipla, o wronskiano de n funções analíticas biregulares (y_j, M_j) $(1 \leq j \leq n)$, calculado num ponto $t_o \in \bigcap_{j=1}^{n} M_j$. Esta fórmula estabelece, ao mesmo tempo, uma relação entre o wronskiano e o determinante de Vandermonte.

Com efeito, o determinante wronskiano :

$$W[y_1,\dots,y_n] = \begin{vmatrix} y_1(t_o) & \dots\dots\dots & y_n(t_o) \\ y_1'(t_o) & \dots\dots\dots & y_n'(t_o) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t_o) & \dots\dots & y_n^{(n-1)}(t_o) \end{vmatrix}$$

está definido para cada n-pla de funções biregulares no ponto $t_o \in S$, e vê-se fàcilmente que é um funcional analítico n-linear na região $(\{t_o\})^n$.

Sua indicatriz será

$$W\left[\frac{1}{\alpha_1-t_1},\dots\dots,\frac{1}{\alpha_n-t_n}\right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1-t_o} & \dots\dots\dots & \frac{1}{\alpha_n-t_o} \\ \frac{1}{(\alpha_1-t_o)^2} & \dots\dots\dots & \frac{1}{(\alpha_n-t_o)^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(n-1)!}{(\alpha_1-t_o)^n} & \dots\dots\dots & \frac{(n-1)!}{(\alpha_n-t_o)^n} \end{vmatrix}$$

Efetuando os cálculos, teremos :

$$W\left[\frac{1}{\alpha_1-t_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n-t_o}\right]=\frac{(n-1)!!}{(\alpha_1-t_o)\ldots(\alpha_n-t_o)}V\left[\frac{1}{\alpha_1-t_o},\ldots,\frac{1}{\alpha_n-t_o}\right]^{+},$$

onde o segundo fator representa o determinante de Vandermonte relativo a $\frac{1}{\alpha_1-t_o},\ldots\ldots,\frac{1}{\alpha_n-t_o}$.

Prosseguindo os cálculos, teremos :

$$W\left[\frac{1}{\alpha_1-t_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_n-t_n}\right]=\frac{(n-1)!!}{(\alpha_1-t_o)^n\ldots(\alpha_n-t_o)^n}\prod_{r>s}(\alpha_s-\alpha_r)$$

que é uma função biregular nas variáveis $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, na região H_o complementar aos hiperplanos $\alpha_1 = t_o,\ldots,\alpha_n = t_o$.

Se C fôr uma circumferência com centro t_o e que deixa fora as singularidades de $y_1(t_1),\ldots,y_n(t_n)$, C^n será uma n-separatriz entre $\mathcal{J} = I_1\times\ldots\times I_n$ e $\complement H_o$.

Podemos escrever, levando em conta a fórmula 3) :

$$\begin{vmatrix} y_1(t_o)\ldots\ldots y_n(t_o) \\ y'(t_o)\ldots\ldots y_n'(t_o) \\ \\ y_1^{(n-1)}(t_o)\ldots y_n^{(n-1)}(t_o)\end{vmatrix}=\frac{(n-1)!!}{(2i)^n}\int_{C^n}\frac{\prod\limits_{r>s}^{1,n}(\alpha_s-\alpha_r)}{(\alpha_1-t_o)^n\ldots(\alpha_n-t_o)^n}\,y_1(\alpha_1)\ldots y_n(\alpha_n)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n$$

+ O símbolo (n-1)!! significa 1! 2!...(n-1)!

4) O produto funcional simétrico como funcional analítico bi-linear.

Dadas duas funções $(y_1(t_1), M_1) \varepsilon \mathcal{S}_1$, e $(y_2(t_2), M_2) \varepsilon \mathcal{S}_2$, define-se produto funcional simétrico, da seguinte maneira :

$$6) \quad F[y_1(t_1), y_2(t_2)] = \overset{o}{y_1}(t)\ \overset{o}{y_2}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t} y_1\left(\frac{1}{t}\right) y_2(t)\, dt$$

Em 6) C é uma separatriz entre as singularidades de $y_1(\frac{1}{t})$ e $y_2(t)$, orientada, por exemplo, de modo a deixar à direita as singularidades de $y_2(t)$. Êste funcional terá significado toda a vez que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não tiverem singularidades recíprocas pois $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são biregulares no ∞.+

Fixando $y_1(t_1)$ e designando $\bar{I}_1$ as singularidades de $y_1(\frac{1}{t_1})$, teremos um funcional analítico linear de $y_2(t_2)$ definido em $(\bar{I}_1)$. Fixando $y_2(t_2)$ e designando $\bar{I}_2$ as singularidades de $y_2(\frac{1}{t_2})$, teremos um funcional analítico linear definido em $(\bar{I}_2)$.

O funcional 6) será então analítico bilinear, definido na região $\mathcal{H}_2 \subset \Sigma_2$ dos pares $y_1(t_1)$ e $y_2(t_2)$ cujas singularidades não são recíprocas.

+Invertendo o papel das funções que comparecem em 6), o valor do funcional não muda, o que justifica o nome de produto funcional simétrico ([8],pg. 52).

Evidentemente $\mathcal{H}_2$ não pode estar contida num produto de regiões lineares, pois $pr_1 \mathcal{H}_2 = \mathcal{S}_1$ e $pr_2 \mathcal{H}_2 = \mathcal{S}_2$.

A indicatriz do funcional 6) será dada por :

$$F\left[\frac{1}{\alpha_1 - t_1}, \frac{1}{\alpha_2 - t_2}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t} \frac{1}{\alpha_1 - \frac{1}{t}} \frac{1}{\alpha_2 - t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} \frac{1}{t - \alpha_2} \frac{1}{\alpha_1 t - 1} \, dt = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 - 1}$$

§ 3 FUNCIONAIS ANALÍTICOS EM GERAL

1 Desenvolvimento em série de um funcional analítico.

Seja $F[y(t)]$ um funcional analítico definido numa região $R \subset \mathcal{S}$ e $y_o \in R$. Existirá então $(A,\sigma)y_o \subset R$. Pode-se demonstrar (([8],pg.86) e ([12],pg. 456)) que o funcional pode ser desenvolvido em série de Fantappié :

$$1)\ F[y_o + \varphi(t)] = F[y_o] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_o(t), \overset{*}{\alpha}_1, \ldots \overset{*}{\alpha}_n \mid \varphi(\underset{*}{\alpha_1}) \ldots \varphi(\underset{*}{\alpha_n})$$

$$\forall\ y_o + \varphi \in (A,\sigma) y_o$$

Na fórmula 1) pusemos :

$$a)\ F^{(n)}[y_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \ldots \partial \varepsilon_n} F\left[y_o(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t} \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = o}$$

Esta função de n variáveis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é uma função analítica no sentido de Osgood, simétrica em B^n e biregular com relação a cada variável.

b) $F^{(n)}[y_o, \overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n] \, \varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_n) =$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \ldots \int_C F^{(n)}[y_o, \overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n] \varphi(\alpha_1) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

sendo C uma separatriz entre A e as singularidades de $\varphi(t)$.

O desenvolvimento 1) é válido para as funções $y_o + \varphi$ da vizinhança $(A, \sigma)\, y_o$. Daremos em seguida um desenvolvimento válido para cada componente conexa da região de definição R de um funcional.

Mais precisamente teremos o

Teorema 1

<u>Em cada componente conexa de uma região</u> $R = \bigcup_{j \varepsilon J} (A_j, \sigma_j) y_{oj}$ (y_{oj} = <u>função nula no seu campo de definição</u> $\forall j \varepsilon J$), <u>um funcional analítico tem um único desenvolvimento de Fantappié</u>.

Seja $R_1 = \bigcup_{j \varepsilon J_1} (A_j, \sigma_j) y_{oj}$ $(J_1 \subset J)$ uma componente conexa de R.

Em cada $(A_j, \sigma_j)\, y_{oj}$ $(j \varepsilon J_1)$ será válido, pela fórmula 1), o seguinte desenvolvimento :

$$F[y(t)] = F[y_{oj}] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_o, \overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n] y(\underset{*}{\alpha}_1) \ldots y(\underset{*}{\alpha}_n)$$

I) Provemos que $F[y_{oj}]$ não depende de $j \varepsilon J_1$.

Sejam (y_{op},M_{op}) e (y_{oq},M_{oq}) em R_1. Sendo R_1 conexa, existirá pelo teorema (6, §4,I), uma cadeia

$$(A_{j_1},\sigma_{j_1})y_{oj_1},\ldots\ldots\ldots\ldots,(A_{j_m},\sigma_{j_m})\,y_{oj_m} \qquad (j_1,\ldots,j_m \varepsilon J_1)$$

que "passa" por $y_{op} = y_{oj}$, e $y_{oq} = y_{oj_m}$.

Teremos $B_j \cap B_{j_2} \neq \emptyset$,......, $B_{j_{m-1}} \cap B_{j_m} \neq \emptyset$.

Escolhamos um ponto $\bar{\alpha}\,\varepsilon\, B_{j_1} \cap B_{j_2}$ e a função (y_o,M_o) singular em $\bar{\alpha}$ e nula nos outros pontos, teremos :

$$y_o \;\varepsilon\; (A_{j_1},\sigma_{j_1})\,y_{oj_1}$$

$$y_o \;\varepsilon\; (A_{j_2},\sigma_{j_2})y_{oj_2}$$

Mas $F[(y_{oj_1},M_{j_1})] = F[(y_{oj_1},M_{oj_1} \cap M_o)] = F[(y_o,M_o)]$

e $\quad F[(y_{oj_2},M_{j_2})] = F[(y_{oj_2},M_{oj_2} \cap M_o)] = F[(y_o,M_o)]$,

donde $F[(y_{oj_1},M_{oj_1})] = F[(y_{oj_2},M_{j_2})]$. Prosseguindo assim demonstraremos que $F[(y_{oj_1},M_{oj_1})] = F[(y_{oj_m},M_{oj_m})] = F_1[0]$

II) Seja $1 \leq n$ e a família de funções de n variaveis :

2) $(F^{\,n}[y_{oj},\alpha_1,\ldots,\alpha_n])_{j \varepsilon J} \qquad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\,\varepsilon\, B_j^n$

Provemos que $F^{(n)}[y_{or},\alpha_1,\ldots,\alpha_n] = F^{(n)}[y_{os},\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$

quando $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\,\varepsilon\, B_r^n \cap B_s^n \neq \emptyset \qquad (r,s\,\varepsilon\, J)$.

Com efeito, seja (y_o,M_o) uma função singular em $\bar{\alpha}\,\varepsilon\, B_r \cap B_s$ e nula nos outros pontos. Como (y_{or},M_{or}) e

(y_{os}, M_{os}) são funções nulas, será $y_o \varepsilon (A_r, \sigma_r) \cap (A_s, \sigma_s)$.

Teremos em consequência :

$$3) \quad F\left[y_{or} + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots\cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] =$$

$$= F\left[(y_{or}, M_{or} \cap M_o) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] = F\left[(y_o, M_o) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right]$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_r^n .$$

Tomamos os $\varepsilon\varepsilon$ suficientemente pequenos para assegurar que as funções consideradas pertençam à vizinhança $(A, \sigma) y_{or}$.

Da mesma forma provaríamos que :

$$4) \quad F\left[y_{os} + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] = F\left[(y_o, M_o) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_t - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right]$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_s^n \quad .$$

De 3) e 4) segue-se que :

$$F\left[y_{or} + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] = F\left[y_{os} + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right]$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_r^n \cap B_s^n$$

Derivando com relação aos $\varepsilon\varepsilon$ no ponto zero, teremos :

$$F^{(n)}[y_{or}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = F^{(n)}[y_{os}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] \quad (\text{se } B_r^n \cap B_s^n \neq \emptyset \ r, s \in J)$$

Poderemos então considerar a função de n variáveis

$$5) \qquad F^{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

definida em $\bigcup_{j \in J} B_j^n$ e igual a

$$6) \quad F^{(n)}[y_{oj}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] \quad \text{se} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B_j^n \quad j \in J.$$

Levando em conta o que foi visto em I), teremos o desenvolvimento

$$7) \quad F[y(t)] = F_1[o] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[\overset{*}{\alpha}_1,\dots,\overset{*}{\alpha}_n] y(\underset{*}{\alpha_1})\dots y(\underset{*}{\alpha_n})$$

válido em cada componente conexa de R.

<u>Observação 1</u>

A função 5) não está ligada às componentes conexas de R; portanto, se por hipótese tivermos $F[y_{oj}] = F[o] \ \forall j \in J$, o desenvolvimento 7) será válido para qualquer função $y(t) \in R$.

O teorema 1) foi demonstrado por F.Pellegrino e S.Varsano sob as hipóteses mais restritivas da região do funcional analítico ser $R = \bigcup_{j \in J}(A_j)$ e além disto $\bigcap_{j \in J} B_j \neq \emptyset$ ([16], pg. 4).

<u>Teorema 2</u>

<u>Dado um funcional analítico</u> $F[y(t)]$ <u>não localmente constante</u>+, <u>definido numa região funcional</u> R e $y_o \in R$, <u>a intersecção dos conjuntos</u> A <u>tais que</u> $(A,\sigma)y_o \subset R$ <u>não é vazia</u>.

Com efeito, temos :

$$8) \quad F[y_o+y] = F[y_o] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[y_o,\overset{*}{\alpha}_1,\dots,\overset{*}{\alpha}_n | y(\underset{*}{\alpha_1})\dots y(\underset{*}{\alpha_n})$$

$$\forall \; y_o+y \in (A,\sigma)y_o$$

+ Diz-se que um funcional é localmente constante, se existe uma vizinhança contida na região de definição, onde o funcional é constante.

onde a função $F^{(n)}[y_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ é analítica em $B^n \subset S_1 \times \ldots \times S_n$.

Coloquemos os conjuntos mencionados no enunciado, numa família $(A_j)_{j \varepsilon J}$.

Consideremos a função $u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definida em $H = \bigcup_{j \varepsilon J} B_j^n$, igual a $F^{(n)}[y_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ em B_j^n $(\forall j \varepsilon J)$.

Para mostrarmos que $\bigcap_{j \varepsilon J} A_j \neq \emptyset$, mostraremos que $\bigcup_{j \varepsilon J} B_j \neq S$.

Se, por absurdo, tivéssemos $\bigcup_{j \varepsilon J} B_j = S$, para cada $\alpha_n \varepsilon S$, teríamos um índice $j \varepsilon J$ de modo que $\alpha_n \varepsilon B_j$. Poderíamos afirmar que, dado $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \varepsilon B_j^{n-1}$, sería $u_j(\alpha_n) = u(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ uma função biregular de α_n em B_j. Teríamos, então, uma família de funções de α_n, cuja reunião dos campos de definição cobriria a esfera complexa. Isto não nos autoriza a dizer que cada função $u_j(\alpha_n)$ é nula no seu campo de definição. ([12]).

Podemos, porém, raciocinar assim :

Seja, por absurdo, $\bigcup_{j \varepsilon J} B_j = S$. Teremos :

9) $$I_o^{n-1} \times S \subset \bigcup_{j \varepsilon J} B_j^n \qquad (I_o = \text{singularidades de } y_o)$$

pois, dado $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \varepsilon I_o^{n-1} \times S$, será :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} \varepsilon I_o \quad \text{e} \quad \alpha_n \varepsilon S .$$

Mas, dado α_n pertencente a S, existirá $j_o \varepsilon S$ de modo que $\alpha_n \varepsilon B_{jo}$. Sendo $I_o \subset B_j$ $(\forall j \varepsilon J)$, teremos :

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \varepsilon B_{jo}^n$$

O conjunto $I_o^{n-1} \times S$ é fechado no espaço compacto dado pelo produto de n esferas complexas. Poderemos, pelo teorema de Borel-Lebesgue, determinar $B_{j_1}^n, \ldots, B_{j_m}^n$, de modo que :

10) $$I_o^{n-1} \times S \subset B_{j_1}^n \cup B_{j_2}^n \cup \ldots \cup B_{j_m}^n = H_1$$

Provemos que o corte de H segundo qualquer $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \varepsilon (B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_m})^{n-1}$ é a esfera complexa S_n.

Temos $pr_{s_n} H_1 = B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \ldots \cup B_{j_m} = S_n$, levando em conta 10).

Temos, também, $(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_m})^{n-1} \times (B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \ldots \cup B_{j_m}) \subset H_1$,

ou

$$(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_m})^{n-1} \times S_n \subset H_1$$

Segue-se daqui que o corte de H_1, segundo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \varepsilon (B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_m})^{n-1}$, é a esfera complexa S_n. Como consequência $u(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = o$ quando $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}) \varepsilon$ $\varepsilon (B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_m})^{n-1}$, em virtude da biregularidade com relação a α_n e do teorema de Liouville.

Seja, então, $(A, \sigma) y_o$ com $A = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_m}$ e $\sigma = \min (\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_m})$. Teremos :

$$(A, \sigma) y_o = (A_{j_1}, \sigma_{j_1}) y_o \cap \ldots \cap (A_{j_m}, \sigma_{j_m}) y_o \subset R$$

Considerando o desenvolvimento 8), teremos :

$$F[y_o + y] = F[y_o] \qquad \forall\, y_o + y \;\varepsilon\; (A, \sigma) y_o$$

contra a hipótese do funcional considerado não ser localmente constante. Como consequência $\bigcup_{j \varepsilon J} B_j \neq S$ e $\bigcap_{j \varepsilon J} A_j \neq \emptyset$.

§ 4 FUNCIONAIS HOMOGÊNEOS

1 Definição

Diz-se que um funcional analítico $F[y(t)]$, definido numa região R, é localmente homogêneo de grau n em R (ou homogêneo de grau n em cada $(A,\sigma) \subset R$), se não fôr localmente constante e satisfazer à condição : $F[ky(t)] = k^n F[y(t)]$, se $y(t), ky(t) \varepsilon R$.

Seja $F_n[y_1,..,y_n]$ um funcional analítico n-linear, definido em $\mathcal{H}_n$. Suponhamos que a intersecção $\mathcal{H}_n \cap \Delta_n$ seja diferente do vazio. Consideremos o funcional $F[y(t)]$ definido em $R = pr\ \mathcal{H}_n \cap \Delta_n$, igual a : $F_n[y(t_1),...,y(t_n)]$, isto é, a restrição de $F_n[y_1,...,y_n]$ a $\mathcal{H}_n \cap \Delta_n$.

Pela observação 2) do (§3,I), poderemos tomar iguais as separatrizes que comparecem em (3,§2). O funcional $F[y(t)]$ terá a forma :

$$1) \quad F[y(t)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} u(t_1,...,t_n)y(t_1)...y(t_n)dt_1...dt_n$$

Propriedades

a) O funcional $F[y(t)]$ é analítico em R.

Com efeito, seja $f(\alpha) = y_\alpha(t)$ $(\alpha \varepsilon \Omega)$ uma linha analítica que penetra em R. Mostraremos que $F[y_\alpha(t)]$ é uma função analítica de α em $f^{-1}(R)$.

Pelo teorema 4(§3,I), temos $R = \bigcup_{j \varepsilon J}(A_j)$.

Seja $\alpha_o \varepsilon f^{-1}(R)$; teremos $y_{\alpha_o}(t) \varepsilon R$, e portanto :

$$y_{\alpha_o}(t) \quad \varepsilon \quad (A_{j_o}) \qquad\qquad (j_o \varepsilon J)$$

e

$$I_o \quad \subset \quad B_{j_o} \qquad\qquad (j_o \varepsilon J)$$

Podemos tomar $C \subset B_{j_o}$. Seja H aberto, de modo que $I_o \subset H$ e $\bar{H}$ contido na região limitada por C e que contem I_o. Teremos $C \subset B_{j_o} - \bar{H}$ e $C^n \subset (B_{j_o} - \bar{H})^n \subset B^n_{j_o} \subset H_n$.

Pela continuidade de $[y_\alpha(t)]_{\alpha \varepsilon \Omega}$, poderemos determinar $V(\alpha_o)$ de modo que, se $\alpha \varepsilon V(\alpha_o)$, tenhamos $I_\alpha \subset H$. Por conseguinte, $y(\alpha,t) = y_\alpha(t)$ será analítica em $V(\alpha_o) \times (B_{j_o} - \bar{H})$ e

$$u(t_1,\ldots,t_n)y(\alpha,t_1)\ldots y(\alpha,t_n)$$

será analítica em $V(\alpha_o) \times (B_{j_o} - \bar{H})^n$.

Poderemos escrever, pela regra de derivação sob sinal de integração :

$$\left\{ \frac{d\,F[y_\alpha(t)]}{d\alpha} \right\}_{\alpha_o} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} \left\{ \frac{d}{d\alpha}[u(t_1,\ldots,t_n)y(\alpha,t_1)\ldots y(\alpha,t_n)] \right\}_{\alpha_o} dt_1\ldots dt_n$$

o que prova a analiticidade de $F[y(t)]$ em qualquer ponto $\alpha_o \varepsilon f^{-1}(R)$.

b) $F[ky(t)] = k^n F[y(t)]$ se $y(t)$ e $ky(t)$ pertencem a R. Isto é, o funcional é homogêneo, de grau n possivelmente, em R.

c) Cálculo das derivadas funcionais.

Seja $y_o \varepsilon R$ e $(A,\sigma)y_o \subset R$. Façamos o cálculo da derivada funcional de ordem n de 1) pela definição :

Como temos $B^n \subset H_n$ $(B = CA)$, será :

$$F^{(n)}[y_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_n] =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial\varepsilon_1 \ldots \partial\varepsilon_n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} u(t)\left[y_o(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}\right] dt \right\}_{\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = o}$$

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \,\varepsilon\, B^n$$

Os termos da expressão entre colchetes, segundo a convenção da pg. 50, provêm da matriz :

$$\left\| \begin{matrix} y_o(t_1) & \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t_1} \\ y_o(t_2) & \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_o(t_n) & \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t_n} & & \dfrac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t_n} \end{matrix} \right\|$$

Cada termo provem do produto de elementos pertencentes a n linhas distintas.

Os termos que contêm o fator y_o têm derivada $n^{\underline{ma}}$ nula com relação aos $\varepsilon\varepsilon$.

Os têrmos que têm fatôres numa mesma coluna, terão derivada nula.

Restam os têrmos provenientes de linhas distintas e colunas distintas (a partir da segunda coluna), que dão soma:

$$\sum \frac{\varepsilon_{i_1}}{\alpha_{i_1}-t_1} \frac{\varepsilon_{i_2}}{\alpha_{i_2}-t_2} \cdots\cdots\cdots \frac{\varepsilon_{i_n}}{\alpha_{i_n}-t_n}$$

onde a somatória é estendida às permutações dos índices $1, 2, \ldots, n$.

Calculando a derivada, virá:

$$F^{(n)}[y_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n] =$$

$$= \sum \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} u(t_1, \ldots, t_n) \frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1} \cdots \frac{1}{\alpha_{i_n}-t_n} dt_1 \ldots dt_n$$

Pela fórmula de Cauchy, virá:

$$F^{(n)}[y_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \sum u(\alpha_{i_1}, \ldots\ldots, \alpha_{i_n}) =$$

$$= \sum F\left[\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{\alpha_{i_n}-t_n}\right] \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n.$$

Se supuzermos esta soma não idênticamente nula em nenhum $B^n \subset H_n$, (B aberto), o funcional $F[y(t)]$ não será localmente constante em nenhum $(A, \sigma) \subset R$ (ver demonstr. (4, §3,I) onde temos $(A, \sigma) \subset R \Rightarrow B^n \subset H_n$, sendo $B = \complement A$).

Podemos então dizer, resumindo o que foi visto em a), b) e c):

<u>Dado um funcional analítico n - linear</u> $F[y_1, \ldots, y_n]$

definido em $\mathcal{H}_n$, de modo que $F\left[\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1}\right]$ não seja idênticamente nula em algum $B^n \subset H_n$ (B aberto), o funcional definido em $R = \text{pr}\, \mathcal{H}_n \cap \Delta_n$ com valores iguais à da restrição de $F[y_1, \ldots, y_n]$ a $\mathcal{H}_n \cap \Delta_n$, é analítico em $R = \bigcup_{j \in J}(A_j)$ e homogêneo de grau n em cada $(A, \sigma) \subset R$.

2) Reciprocamente , seja $F[y(t)]$ um funcional analítico em $R = \bigcup_{j \in J}(A_j)$ e homogêneo de grau n em cada $(A,\sigma) \subset R$. Mostraremos que o mesmo é restrição de um funcional do tipo visto em 1) .

Desenvolvendo $F[y(t)]$ numa vizinhança linear (A_j) $(j \in J)$, teremos :

3) $F[ky(t)] = F[o] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k^j}{j!} F^{(j)}[o, \overset{*}{\alpha}_1, \ldots, \overset{*}{\alpha}_n] y(\alpha_{*1}) \ldots y(\alpha_{*n})$ +

$\forall\ k \in \pi$,

4) $F[ky(t)] = k^n F[y(t)]$ $\forall\ k \in \pi$.

Comparando 3) com 4) , teremos :

$$F[y(t)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} F^{(n)}[o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] y(\alpha_1) \ldots y(\alpha_n) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

Pelo teorema (1,§3) teremos um desenvolvimento único em toda a região $R = \bigcup_{j \in J} (A_j)$:

$$F[y(t)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^n} u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) y(\alpha_1) \ldots y(\alpha_n) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n ,$$

sendo $u(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$ definida em $\bigcup_{j \in J} B_j^n$.

+ $F[o]$ indica o valor do funcional numa função nula qualquer de (A_j)

Como $F[y(t)]$ é homogêneo de grau n em cada $(A,\sigma) \subset R$, será tambem não localmente constante . Teremos , então , pelos teoremas (2,§3,II) e (5,§3,I), que a região $H_n = \bigcup_{j \in J} B_j^n$ é totalmente própria e , se $\mathcal{H}_n$ for a região n-linear associada a H_n , será:

$$R \subset \mathrm{pr}\,\mathcal{H}_n \cap \Delta_n \; .$$

Seja o funcional $F_n[y_1,\ldots,y_n]$ n-linear , cuja região de definição é $\mathcal{H}_n$ e indicatriz $u(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. O funcional homogêneo associado a êste será :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^n} u(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)y(\alpha_1)\ldots y(\alpha_n)d\alpha_1\ldots d\alpha_n \qquad y(t)\varepsilon\,\mathrm{pr}\,\mathcal{H}_n \cap \Delta_n$$

e a restrição deste a R será exatamente o funcional $F[y(t)]$ dado .

Finalmente , temos $u(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) =$ $= \sum \frac{1}{n!} F_n\left[\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1},\ldots,\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1}\right]^{+}$ porque $u(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ é simétrica em H_n . Como $F[y(t)]$ não é localmente constante , $\sum F\left[\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1},\ldots\ldots,\frac{1}{\alpha_{i_1}-t_1}\right]$ não será identicamente nula em nenhum $B^n \subset H_n$ (B aberto) ; caso contrário , teriamos $u(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ nula em $B^n \cap B_j^n \neq \emptyset$ $(j\varepsilon J)$, e $F[y(t)]$ nula em $(A \cup A_j) \subset R$ $(A = \complement B$ e $A_j = \complement B_j)$.

Podemos , então , dizer : <u>a definição de funcional analítico localmente homogêneo de grau n (n natural),a partir de um funcional analítico n-linear , é equivalente (a menos de um prolongamento) à de funcional analítico definido</u>

+ A somatória é extendida às permutações dos indices 1,2,.,n

<u>em</u> $\bigcup_{j\varepsilon J}(A_j)$ <u>e localmente homogêneo de grau n (n natural)</u>.

A forma geral dos funcionais estudados será :

$$\frac{1}{(2\,i)^n}\int_{C^n} u(t_1,\ldots\ldots,t_n)y(t_1)\ldots y(t_n)dt_1\ldots dt_n$$

Quanto ao funcional visto no número 1, y(t) é tomada de modo que $I^n \subset H_n$ e C^n é uma n-separatriz entre I^n e $\complement H_n$ (I = singularidades de y(t) e H_n = região de definição de $u(t_1,\ldots t_n)$, totalmente própria em $\mathfrak{S}_n$) .

Quanto ao funcional visto no número 2 , y(t) é tomada de modo que $I \subset B_j$ (jεJ) e C é uma separatriz entre I e A_j (yεR = $\bigcup_{j\varepsilon J}(A_j)$) .

APÊNDICE

Símbolos da teoria dos conjuntos, da topologia e dos espaços funcionais analíticos.

$A \Rightarrow B$	simboliza :	a proposição A implica na proposição B.
$\forall$	"	qualquer que seja.
$\mid$	"	tal que.
$\emptyset$	"	conjunto vazio.
$x \in A$	"	x é elemento do conjunto A
$A \ni x$	"	o conjunto A contem o elemento x.
$A \subset B$	"	o conjunto A está contido no conjunto B.
$A \supset B$	"	o conjunto A contem o conjunto B.
$A \cup B$	"	reunião dos conjuntos A e B.
$A \cap B$	"	intersecção dos conjuntos A e B.
$\bigcup_{j \in J} A_j$	"	reunião da familia de conjuntos $(A_j)_{j \in J}$.
$\bigcap_{j \in J} A_j$	"	intersecção da familia de conjuntos $(A_j)_{j \in J}$.
$\complement_B A$	"	complementar do conjunto $A \subset B$; pode-se retirar o índice B quando não houver dúvida sobre o conjunto $B \supset A$.
$\{x\}$	"	conjunto formado por um único elemento x.
$A - B$	"	$A' \complement_A B \quad (B \subset A)$.

$\{x \in E \mid x \text{ satisfaz } P\}$	simboliza :	conjunto dos elementos de E que satisfazem uma certa propriedade P.
$f^{-1}(A)$	"	$\{x \in E \mid f(x) \in A\}$ (f = aplicação de E em F, $A \subset F$).
$\overset{o}{A}$	"	interior de um sub-conjunto A de um espaço topológico.
$\bar{A}$	"	aderência de um sub-conjunto A de um espaço topológico.
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$	"	produto cartesiano dos conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ ou produto topológico dos espaços topológicos $E_1, \ldots, E_n$.
E^n	"	produto cartesiano dos conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ sendo $E_j = E$ $\forall j \in J$.
$E^{[j]}$	"	produto de $E_1, \ldots, E_n$ na ordem natural, excepto E_j $(1 \leq j \leq n)$.
$x^{[j]}$	"	elemento de $E^{[j]}$ $(1 \leq j \leq n)$.
$H(x^{[j]})$	"	corte de $H \subset E_1 \times \ldots \times E_n$ segundo $x^{[j]} \in \mathcal{G}^{[j]}$.
$pr_{E^{[j]}} H$	"	projeção de $H \subset E_1 \times \ldots \times E_n$ sobre $E^{[j]}$ $(1 \leq j \leq n)$.
$pr_j H$	"	projeção de $H \subset E_1 \times \ldots \times E_n$ sobre E_j $(1 \leq j \leq n)$.
π	"	corpo ou plano complexo.
S	"	esfera complexa.
$I = I_y$	"	conjunto das singularidades de (y,M) isto é $\complement M$.
$(A,\sigma)y_o$	"	uma vizinhança fundamental da função biregular y_o.

$\mathcal{S}$	simboliza :	espaço das funções biregulares.
$(A)y_o$	"	vizinhança linear da função y_o .
(A)	"	região linear com conjunto característico A.
$(A(x))$	"	região linear com conjunto característico $A(x)$ dependente de x.
$\mathcal{H}(y,M)$	"	corte de $\mathcal{H} \subset \mathcal{S} \times E$ segundo (y,M) .
$\mathfrak{S}_n$	"	produto das esferas complexas S_j de variavel t_j $(1 \leq j \leq n)$.
Σ_n	"	produto dos espaços topológicos $\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_n$ de funções$(y_j(t_j),M_j)$ $(1 \leq j \leq n)$.
$\mathcal{J} = \mathcal{J}_y$	"	produto das singularidades I_j das funções y_j $(1 \leq j \leq n)$ da n-pla $(y_1,\ldots,y_n) \in \Sigma_n$.
$[A]y$	"	produto das vizinhanças lineares $(A_j)y_j$ $(1 \leq j \leq n)$ sendo $y = (y_1,\ldots,y_n)$.
Δ_n	"	diagonal de Σ_n.
$\mathcal{H}_n$	"	região n-linear de Σ_n.
H_n	"	região de $\mathfrak{S}_n$,totalm.propria.
$[y_\alpha(t)]_{\alpha \in \Omega}$	"	linha analítica.
$f(\alpha)$ $(\alpha \in \Omega)$	"	linha analítica.

B I B L I O G R A F I A

[1] Giulio Aruffo e Dionisio Gallarati

Sulla struttura delle regioni dello spazio di Fantappié.
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni.
Serie V - Vol. XII - Fasc. 1-2 - Roma 1953.

[2] Nicolas Bourbaki

Théorie des ensembles (Fascicule de résultats)
Actualités scientifiques e industrielles nº 846.

[3] Nicolas Bourbaki

Topologie Générale - Livre III - Chapitre II
Actualités scientifiques e industrielles nº 1142

[4] Lorenzo Calabi

Cammini e linee analitiche in alcuni spazi funcionali
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni
Serie V - Vol. XII - Fasc. 1-2 - Roma 1953.

[5] Mario Carafa

Sulle regioni connesse dello spazio funzionale analitico.
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni.
Serie V - Vol. XII - Fasc. 1-2 - Roma 1953.

[6] Omar Catunda

Sôbre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos.
Tese de concurso para a cadeira de Análise Matemática a
Faculdade de Filosofia Ciencias e Letras de U.S.P.

[7] Luigi Fantappié

I funzionali analítici
Memorie della R.Accademia Nazionale dei Lincei
Serie VI - Vol. III - Fasc. 2 - 1930.

[8] Luigi Fantappié

Teoria de los funcionales analíticos y sus aplicaciones
Consejo superior de investigaciones cientificas -
Barcelona 1943.

[9] Luigi Fantappié

Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici.
Memorie della Reale Accademia d'Italia
Vol II - nº 13 - 1941.

[10] Luigi Fantappié

Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico T_0.
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni.
Serie 5ª - Vol. I - Roma - 1940.

[11] Franco Pellegrino

Problèmes concrets d'analyse fonctionelle
Paris - Gauthiers - Villars - Imprimeur-Editeurs - 1951

[12] Franco Pellegrino

Su alcune proprietè fondamentali delle regioni funzionali non lineari.
Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei.
Anno CCCXLV - 1948 - Serie VIII - Vol. V - Fasc. 6.

[13] Franco Pellegrino

Lince quasi analitiche dello spazio di Fantappié e indicatrici dei funzionali misti quasi lineari.
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni
Serie V - Vol. XII - Fasc. 1-2 - Roma 1953.

[14] Franco Pellegrino e H.Georg Haefeli

Die Reihe von Fantappié und die Stetigkeit der analyti - schen nicht linearen Funktionale.
Commentarii Mathematici Helvetici.
Vol. 23 - Fasc. 2 1949

[15] Franco Pellegrino e Francesco Succi

Fondamenti della teoria dei funzionali misti complessi
Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni.
Serie V - Vol. XII - Fasx. 1-2 - Roma 1953.

[16] F.Pellegrino e Sami Varsano

Sulle regioni di definizione dei funzionali analitici non lineari.
Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana
(Taormina 25-31 Ott.1951)

[17] Saunders Mac-Lane

Curso de Topologia Geral
Instituto de Matemática pura e aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas 1954.

[18] Candido Lima da Silva Dias

Sôbre a continuidade dos funcionais analíticos
Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo
Vol. 3º - Fasc. 1º e 2º - 1951.

[19] Candido Lima da Silva Dias

Espaços vetoriais topológicos e sua aplicação nos espaços funcionais analíticos.
Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo
Vol. 5º - Fasc. 1º e 2º - 1952.

[20] J. Sebastião e Silva

As funções analíticas e a análise funcional
(Portugaliae Mathematica - Vol. 9 - Fasc. 1-2 - 1950)

[21] J. Sebastião e Silva

"Linee quasi analitiche dello spazio di Fantappié e indicatrici dei funzionali misti analitici quasi lineari"
Mathematical Reviews - Vol. 15 - nº 11 - December 1954.

I N D I C E

ERRATA

pagina

5 Na 6ª linha , depois de : *função analítica biregular* , inserir : ou simplesmente *função biregular* .

14 Depois da 12ª linha , inserir : O conjunto $\mathcal{E}$, munido desta topologia , será indicado pelo simbolo $\mathcal{E}_{\tau}$.

16 No fim da 2ª linha , inserir : um aberto .

20 Substituir $pr_1 \mathcal{H}_n$, por $\mathcal{S}_1$, na 6ª linha .

24 Na 7ª linha , substituir regiões próprias , por: regiões totalmente próprias .

Na 16ª linha , depois de : uma das partes, inserir: abertas .

34 No rodapé , substituir: de uma topologia , por: da topologia $\mathcal{E}_{\tau}$.

36 Na 1ª linha , depois de $A \subset M_{\alpha_0}$, inserir : A demonstração pode ser repetida no caso em que $\alpha_0 = \infty$, considerando-se a função $y(\frac{1}{\beta},t)$.

68 Na 7ª linha , depois de : de grau n , inserir: (n natural) .

71 Antes da 1ª linha pôr : $\exists$, simboliza : existe .