M-ÁLGEBRAS

Trabalho apresentado como
tése de doutoramento
na Faculdade de Filosofia da U.S.P.

RIO CLARO - 1964

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um desenvolvimento de idéias originais de A. Monteiro.

Algèbricamente estuda certos complementos fracos em reticulados distributivos que lògicamente são de importância para a análise do conceito de negação.

No capítulo I as estruturas algébricas correspondentes são estudadas enquanto no capítulo II sistemas formais interpretáveis nessas estruturas são examinados.

Podemos dizer que a noção central do trabalho (N-álgebra no capítulo I e certo sistema formal no capítulo II) emerge do estudo de desenvolvimentos que seletivamente vão construindo estruturas. Na parte construtiva dos desenvolvimentos a intuição essencial é análoga à da teoria dos números elementar, enquanto as intuições que orientam os desenvolvimentos e interpretam as estruturas são de natureza algébrica e lógica.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. A.Monteiro que inspirou e orientou o trabalho.

Ao prof. E.Farah que acolhe a tése em sua cadeira.

Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro pela cooperação e pelo estímulo.

A administração da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro por financiar esta edição.

Ao CNPq, CAPES E FAPESP por auxílios concedidos.

Rio Claro, outubro de 1964.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

M - ÁLGEBRAS

1. Definição e exemplos

Uma M - álgebra A é um reticulado distributivo com primeiro (0) e último (1) elemento, juntamente com uma aplicação

$$n : A \longrightarrow A$$
$$n(x) = -x$$

tal que

$$\left.\begin{array}{l} -(x \wedge y) = -x \vee -y \\ -(x \vee y) = -x \wedge -y \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(dualização)} \\ \underline{\text{leis de De Morgan}}\end{array}$$

sem: complem.
" : involução
$(n^2(x)=x)$

$$- - -x = -x$$
$$-0 = 1$$
$$-1 = 0$$

[$x \wedge y$ é o ínfimo de x e y e $x \vee y$ o supremo de x e y].

"M" sugere o papel proeminente das leis de "De Morgan" e também "A.Monteiro" o primeiro a estudar tais estruturas.

Do ponto de vista algébrico $n : x \longrightarrow -x$ é um complemento fraco e do ponto de vista lógico uma negação com características clássicas (leis de De Morgan completas) e intuicionistas ($---x=-x$) (a dupla negação $--x$ pode então ser interpretada como outro tipo de afirmação).

Como consequência da definição acima temos que

$$\text{se } x \leq y \text{ então } -y \leq -x$$

pois $x \leq y$ implica que $x \wedge y = x$, donde $-(x \wedge y) = -x$, $-x \vee -y = -x$, $-y \leq -x$.

Segue-se imediatamente das leis de De Morgan que

$$--(x \wedge y) = --x \wedge --y$$
$$--(x \vee y) = --x \vee --y$$

Uma M - álgebra é uma estrutura do tipo

$$\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$$

onde $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ é um reticulado distributivo com primeiro e último elemento e $n : A \to A$ uma <u>dualidade</u> tal que

$$n^3(x) = n(x)$$

desde que entendamos por dualidade ou homomorfismo-dual de um reticulado $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ uma aplicação $d : A \to A$ tal que

$$d(x \wedge y) = d(x) \vee d(y)$$

$$d(x \vee y) = d(x) \wedge d(y)$$

$$d(0) = 1$$

$$d(1) = 0$$

Substituindo na definição acima $---x = -x$ por

$$--x = x \quad (\text{simétrica}: n^2(x) = x)$$

obtemos um caso particular de M - álgebra a que chamaremos de <u>M-álgebra simétrica</u>. Tal estrutura (e generalização omitindo a existência de 0 e 1) é estudada em Bialynicki - Birula [1], [2], Bialynick-Birula e Rasiowa [3], Rasiowa [4], Kalman [5] e Monteiro [6] e aparece naturalmente em algebrizações de negações fortes em lógicas construtivas.

Outro caso particular das M - álgebras é a estrutura das álgebras de Boole.

Como em uma M - álgebra valem as leis de De Morgan completas e, em particular, vale

$$-(x \wedge y) \leq -x \vee -y$$

(que não é válida em geral na lógica intuicionista) segue-se que, em geral, uma álgebra de Heyting não é uma M - álgebra. No entanto, um particular tipo de álgebra de Heyting, estudado por A. Monteiro, o denominado "álgebra de Heyting linear" é M - álgebra. Uma álgebra de <u>Heyting linear</u> é uma álgebra de Heyting para a qual se verifica

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1$$

Para provar que uma tal estrutura é uma M - álgebra basta provar que

$$\neg(x \wedge y) \leq \neg x \vee \neg y$$

De fato, usando as propriedades das álgebras de Heyting, temos

$$[(x \wedge y) \rightarrow z] \wedge (x \rightarrow y) \leq [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] \wedge$$
$$\wedge (x \rightarrow y)$$
$$\leq x \rightarrow z$$
$$\leq (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$$

Anàlogamente

$$[(y \wedge x) \rightarrow z] \wedge (y \rightarrow x) \leq (y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z)$$

donde

$$[(x \wedge y) \rightarrow z] \wedge [(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)] \leq (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$$

e, em vista de propriedade característica da álgebra de Heyting linear,

$$(x \wedge y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$$

donde, pondo $z = 0$,

$$\neg(x \wedge y) \leq \neg x \vee \neg y$$

Vejamos mais dois casos particulares.

Uma M - álgebra diz-se <u>regular</u> se

$$x \leq \neg\neg x$$

e diz-se <u>forte</u> se

$$x \wedge \neg x = 0$$

Tôda M - álgebra forte é regular.

Pois de

$$x \wedge \neg x = 0$$

obtemos

$$(x \wedge \neg x) \vee \neg\neg x = 0 \vee \neg\neg x$$

$$(x \vee \neg\neg x) \wedge (\neg x \vee \neg\neg x) = \neg\neg x$$

e, como $x \wedge -x = 0$ implica $-x \vee --x = 1$, temos

$$x \vee --x = --x$$
$$x \leq --x$$

2. Relação de incompatibilidade

Em uma aproximação algébrica da relação lógica de incompatibilidade podemos pensar nas relações binárias $|$ definidas em um reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ e satisfazendo às seguintes propriedades

I 1) se $x \mid y$ então $y \mid x$

I 2) se $x \mid y$ e $a \leq x$ então $a \mid y$

I 3) se $a \mid x$ para todo $x \in A$ então $a = 0$.

Seria natural então introduzir $-x$ (negação de x) de modo que $x \mid -x$ e, se $x \mid y$ então $y \leq -x$. Assim sendo, pediremos para $|$ mais

I 4) dado $x \in A$ existe $y \in A$ tal que

$$x \mid y$$

se $x \mid a$ então $a \leq y$

Êsse y que existe para cada x é então único e será denotado por "$-x$".

Algumas consequências simples são

N 1) $x \leq --x$

pois, como $-x \mid x$ segue-se por I 4) o resultado.

N 2) se $x \leq y$ então $-y \leq -x$

uma vez que

$$y \mid -y \text{ e } x \leq y$$

implicam

$$x \mid -y$$

donde

$$-y \leq -x$$

N 3) $-1 = 0$

$1 \mid 0$ porque $1 \mid -1$ e $0 \leq -1$ implicam $1 \mid 0$. Se $1 \mid a$, temos $x \mid a$ para todo x, donde por I3 $a = 0$. Logo $-1 = 0$.

Reciprocamente, se no reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ fixarmos uma aplicação $x \to -x$ de A em A satisfazendo N1, N2 e N3 podemos definir

$$x \mid y \text{ se e só se } x \leq -y$$

e verificar que as propriedades I1 a I4 se verificam.

De fato, se $x \mid y$ então $x \leq -y$ donde $--y \leq -x$ e $y \leq -x$ que dá $y \mid x$.

Se $x \mid y$ e $a \leq x$ temos $x \leq -y$ e $a \leq x$ ou $a \leq -y$ que é $a \mid y$.

Se $a \mid x$ para todo $x \in A$ temos que $a \leq -x$, para todo x, $a \leq -1$, $a \leq 0$, $a = 0$.

Dado $x \in A$ observamos que

$$x \mid -x$$

pois $x \leq --x$ e se

$$x \mid a$$

$x \leq -a$, $--a \leq -x$, $a \leq -x$.

Além disso, se x/y é uma relação binária em A para a qual

$$x/-x$$

$$\text{se} \quad x/a \text{ então } a \leq -x$$

e valem I1 a I3

temos que

$$x/y \text{ implica } y \leq -x$$

donde

$$x/y \text{ implica } x \leq -y$$

enquanto que, se $x \leq -y$, como $-y/y$, x/y. Logo

$$x/y \text{ se e só se } x \mid y$$

Assim sendo, se num reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ definirmos uma relação binária $\mid$ satisfazendo I1 a I4 ou se de finirmos uma aplicação − satisfazendo N1 a N3, obtemos essencialmente a mesma estrutura.

Observemos que N1 e N2 podem ser substituídos por

$$\text{se } x \leq -y \text{ então } y \leq -x$$

pois já vimos que N1 e N2 implicam esta propriedade, enquanto que, a partir dela obtemos $x \leq --x$ uma vez que

$$-x \leq -x \text{ implica } x \leq --x$$

e, se $x \leq y$ temos $x \leq --y$, $-y \leq -x$.

Consequências de N1, N2 e N3 são

$$-0 = 1$$

$0 \leq -x$, para todo $x \in A$, donde $--x \leq -0$, $x \leq -0$ para todo $x \in A$, ou seja, $-0 = 1$.

$$---x = -x$$

pois de $x \leq --x$ vem $---x \leq -x$ e claramente $-x \leq ---x$.

$$-(x \vee y) = -x \wedge -y$$

Como $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$, $-(x \vee y) \leq -x$ e $-(x \vee y) \leq -y$ ou seja $-(x \vee y) \leq -x \wedge -y$. $-x \wedge -y \leq -x$, donde $x \leq -(-x \wedge -y)$; anàlogamente $y \leq -(-x \wedge -y)$ que, com a anterior, dá $x \vee y \leq -(-x \wedge -y)$ ou seja $-x \wedge -y \leq -(x \vee y)$

$$-x \vee -y \leq -(x \wedge y)$$

pois de $x \wedge y \leq x$ tiramos $-x \leq -(x \wedge y)$ e da mesma maneira $-y \leq -(x \wedge y)$ dando o resultado.

Com isso temos que, acrescentando

N4) $-(x \wedge y) \leq -x \vee -y$

obtemos uma M-álgebra regular. Portanto uma M-álgebra regular pode ser caracterizada como um reticulado distributivo A com primeiro e último elemento, juntamente com uma aplicação − de A em A satisfazendo N1) a N4).

Acrescentar

I 5) se $x \mid y$ então $x \wedge y = 0$

a I1 a I4 aquivale a acrescentar

$$N5) \quad x \wedge -x = 0$$

a N1, N2 e N3, donde N1 a N5 caracterizam uma M-álgebra forte.

Observemos que numa M-álgebra forte $-x$ é o orto-complemento de x, isto é,

$$x \wedge -x = 0$$

$$\text{se} \quad x \wedge a = 0 \quad \text{então} \quad a \leq -x$$

pois de $x \wedge a = 0$ obtemos $-x \vee -a = 1$, $(-x \vee -a) \wedge a = 1 \wedge a$, $(-x \wedge a) \vee (-a \wedge a) = a$, $-x \wedge a = a$, $a \leq -x$.

3. <u>Sub-Álgebras</u>

Uma sub-álgebra de uma M-álgebra A é uma parte B de A fechada para $\wedge$, $\vee$ e $-$, contendo 0 e 1, juntamente com as operações induzidas.

Exemplos extremos de sub-álgebras são obtidos fazendo $B = A$ e $B = \{0, 1\}$.

Outro exemplo de sub-álgebra é $n(A)$ = conjunto dos $-x$, $x \in A$. Pois

$$0 = -1 \in n(A) \qquad 1 = -0 \in n(A)$$

se $x, y \in n(A)$, $x = -u$ e $y = -v$, $u, v \in A$, donde

$$x \wedge y = -u \wedge -v = -(u \vee v) \in n(A)$$

Analogamente, se $x, y \in n(A)$, $x \vee y \in n(A)$. $n(A)$ é uma M-álgebra simétrica pois se $x \in n(A)$, $x = -u$, $u \in A$, donde

$$--x = --(-u) = -u = x$$

Ademais $n(A)$ é a maior sub-álgebra de A que é M-álgebra simétrica, pois se B é uma M-álgebra simétrica que é sub-álgebra de A e se $x \in B$ então $--x = x$ donde $x \in n(A)$.

Vamos agora caracterizar a maior sub-álgebra de A que é álgebra de Boole. Seja B = o conjunto dos $x \in A$ tais que $x \wedge -x = 0$ e $x \vee -x = 1$. $0 \in B$, $1 \in B$ e se $x, y \in B$ temos que

$$x \wedge -x = y \wedge -y = 0$$

$$x \vee -x = y \vee -y = 1$$

donde

$$(x \wedge y) \wedge -(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge (-x \vee -y) = 0$$

$$(x \wedge y) \vee -(x \wedge y) = (x \wedge y) \vee (-x \vee y) = 1$$

$$(x \vee y) \wedge -(x \vee y) = (x \vee y) \wedge (-x \wedge -y) = 0$$

$$(x \vee y) \vee -(x \vee y) = (x \vee y) \vee (-x \wedge -y) = 1$$

acarretando que $x \wedge y \in B$ e $x \vee y \in B$. Se $x \in B$

$$-x \wedge --x = -(x \vee -x) = 0$$

$$-x \vee --x = -(x \wedge -x) = 1$$

então $-x \in B$. Assim sendo, B é a maior sub-álgebra de A que é álgebra de Boole.

Se A é M-álgebra então a maior sub-álgebra de A que é M-álgebra regular é o sub-conjunto B de todos os $x \in A$ tais que

$$x \leq --x$$

De fato, se $x \in B$ $y \in B$ temos

$$x \leq --x$$

$$y \leq --y$$

donde

$$x \wedge y \leq --x \wedge --y = --(x \wedge y)$$

e portanto $x \wedge y \in B$. Analogamente, $x \vee y \in B$.

Além disso $-x \in B$ quer x pertença ou não a B, pois

$$-x = ---x = --(-x) \quad \Rightarrow (-x) \leq --(-x)$$

Assim sendo, B é uma "sub-álgebra regular" de A e claramente a maior de tôdas.

A maior sub-álgebra de A que é uma M-álgebra forte é o conjunto B de todos os $x \in A$ tais que

$$x \wedge -x = 0$$

De fato, se $x \in B$ e $y \in B$

$$(x \wedge y) \wedge -(x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge (-x \vee -y) =$$
$$= (x \wedge y \wedge -x) \vee (x \wedge y \wedge -y) =$$
$$= 0 \vee 0 = 0$$

donde $x \wedge y \in B$.

$$(x \vee y) \wedge -(x \vee y) = (x \vee y) \wedge (-x \wedge -y) =$$
$$= (x \wedge -x \wedge -y) \vee (y \wedge -x \wedge -y) =$$
$$= 0 \vee 0 = 0$$

donde $x \vee y \in B$.

Se $x \in B$

$$--(x \wedge -x) = 0$$
$$= --x \wedge ---x$$
$$= --x \wedge -x$$

donde $-x \in B$.

4. <u>Representação</u>

Seja E um conjunto não vazio e

$$\varphi : E \longrightarrow E$$

uma aplicação de E em E tal que

$$\varphi^3(x) = \varphi(x) \qquad x \in E$$

Pondo

$$-A = \complement_E \, \varphi^{-1}(A) \qquad A \subset E$$

[$\complement_E$ complementar em relação a E] obtemos um complemento fraco em $\mathcal{P}(E)$ (conjunto das partes de E) satisfazendo

$$-\emptyset = \complement_E \, \varphi^{-1}(\emptyset) = E$$

$$-E = \complement_E \, \varphi^{-1}(E) = \emptyset$$

$$-(X \cap Y) = \complement_E \varphi^{-1}(X \cap Y) = \complement_E(\varphi^{-1}(X) \cap \varphi^{-1}(Y)) =$$

$$= \complement_E \varphi^{-1}(X) \cup \complement_E \varphi^{-1}(Y) = -X \cup -Y$$

$$-(X \cup Y) = -X \cap -Y$$

$$---X = \complement_E \varphi^{-1} \complement_E \varphi^{-1} \complement_E \varphi^{-1}(X) = \complement_E \varphi^{-1}(X) = -X$$

ou seja, satisfazendo propriedades análogas às do complemento em uma M - álgebra.

Isso sugere definir um <u>M - anél de conjuntos</u> como sendo uma parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ tal que

$$\emptyset \in \mathcal{A}, \quad E \in \mathcal{A}$$

se $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{A}$, então $X \cap Y \in \mathcal{A}$

se $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{A}$, então $X \cup Y \in \mathcal{A}$

se $X \in \mathcal{A}$ então $-X \in \mathcal{A}$

juntamente com as operações induzidas $\cap$, $\cup$, $-$. Todo M - anél de conjuntos é uma M - álgebra e, na verdade, um M - anél de conjuntos é o exemplo mais geral de M - álgebra, pois tôda M - álgebra é isomorfa a algum M - anél de conjuntos.

Para demonstrar êsse resultado, recordemos que um <u>filtro</u> de um reticulado A (e também de uma M - álgebra A) é uma parte F de A não vazia tal que

F 1) se $x \in F$ e $x \leq y$ então $y \in F$

F 2) se $x \in F$, $y \in F$, então $x \wedge y \in F$

Um filtro P de A diz-se <u>primo</u> se $P \neq A$ e

P) se $x \vee y \in P$ então $x \in P$ ou $y \in P$

Seja então A uma M - álgebra e $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os filtros primos de A. Se $x \in A$ façamos $i(x)$ = conjunto dos $P \in \mathcal{S}$ tais que $x \in P$, ou seja

$P \in i(x)$ se e só se $x \in P$

Demonstra-se que i é uma aplicação biunívoca tal que

$$i(0) = \emptyset$$

$$i(1) = \mathcal{S}$$

$$i(x \wedge y) = i(x) \cap i(y)$$

$$i(x \vee y) = i(x) \cup i(y)$$

(ver por exemplo [7]) donde o reticulado distributivo

$$\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$$

é isomorfo ao anél de conjuntos

$$\langle \Gamma, \cap, \cup, \emptyset, \mathcal{S} \rangle \qquad \Gamma = i(A)$$

entendendo-se por anél de conjunto uma família de partes de um conjunto, fechada para $\cap$ e $\cup$ e contendo $\emptyset$ e o conjunto.

Vamos definir uma aplicação

$$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

pondo

$$\varphi(P) = \complement_A n^{-1}(P)$$

que, como mostraremos, é realmente uma aplicação de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$. Como $0 \notin P$, $1 \notin n^{-1}(P)$, $1 \in \varphi(P)$ que é portanto não vazio. Como $1 \in P$, $0 \in n^{-1}(P)$, $0 \notin \varphi(P)$ que é assim distinto de A. Se $x \in \varphi(P)$ e $x \leq y$ temos que $-x \notin P$ e $-y \leq -x$, donde $-y \notin P$ e $y \in \varphi(P)$. Se $x \in \varphi(P)$ e $y \in \varphi(P)$ temos que $-x \notin P$ e $-y \notin P$, $-x \vee -y \notin P$, $-(x \wedge y) \notin P$ ou seja $x \wedge y \in \varphi(P)$. Se $x \vee y \in \varphi(P)$ então $-(x \vee y) \notin P$, $-x \wedge -y \notin P$ donde $-x \notin P$ ou $-y \notin P$ o que significa $x \in \varphi(P)$ ou $y \in \varphi(P)$. Assim sendo, $\varphi(P)$ é de fato um filtro primo. Claramente

$$\varphi^3(P) = \varphi(P)$$

para todo $P \in \mathcal{S}$ e, portanto, se mostrarmos que

$$\complement_{\mathcal{S}} \varphi^{-1}(i(x)) = -i(x) = i(-x)$$

então

$$\langle \Gamma, \cap, \cup, -, \emptyset, \mathcal{S} \rangle$$

é um M - anél de conjuntos isomorfo à M - álgebra

$$\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$$

E, na verdade,

$$P \in \complement_{\mathcal{S}} \varphi^{-1}(i(x)) \longleftrightarrow \varphi(P) \notin i(x)$$

$$\longleftrightarrow x \notin \varphi(P)$$

$$\longleftrightarrow x \notin \complement_A n^{-1}(P)$$

$$\longleftrightarrow -x \in P$$

$$\longleftrightarrow P \in i(-x)$$

Assim sendo, obtemos uma representação simples das M - álgebras como M-anéis de conjuntos.

Usando M - anéis de conjuntos podemos dar fàcilmente exemplos de M - álgebras. Seja $E = \{a, b, c\}$ e $\varphi : E \longrightarrow E$ dada por

$$\varphi(a) = b \qquad \varphi(b) = c \qquad \varphi(c) = b$$

Em $\mathcal{P}(E)$ temos a seguinte tábua para -

$$-\emptyset = \complement_E \varphi^{-1}(\emptyset) = E$$

$$-\{a\} = E$$

$$-\{b\} = \{b\}$$

$$-\{c\} = \{a, c\}$$

$$-\{a, b\} = \{b\}$$

$$-\{a, c\} = \{a, c\}$$

$$-\{b, c\} = \emptyset$$

$$-E = \emptyset$$

O diagrama dessa M - álgebra A (fazendo $\emptyset = 0$, $\{a\} = a$, $\{b\} = b$, $\{c\} = c$, $\{a, b\} = d$, $\{a, c\} = e$, $\{b, c\} = f$, $E = 1$) é

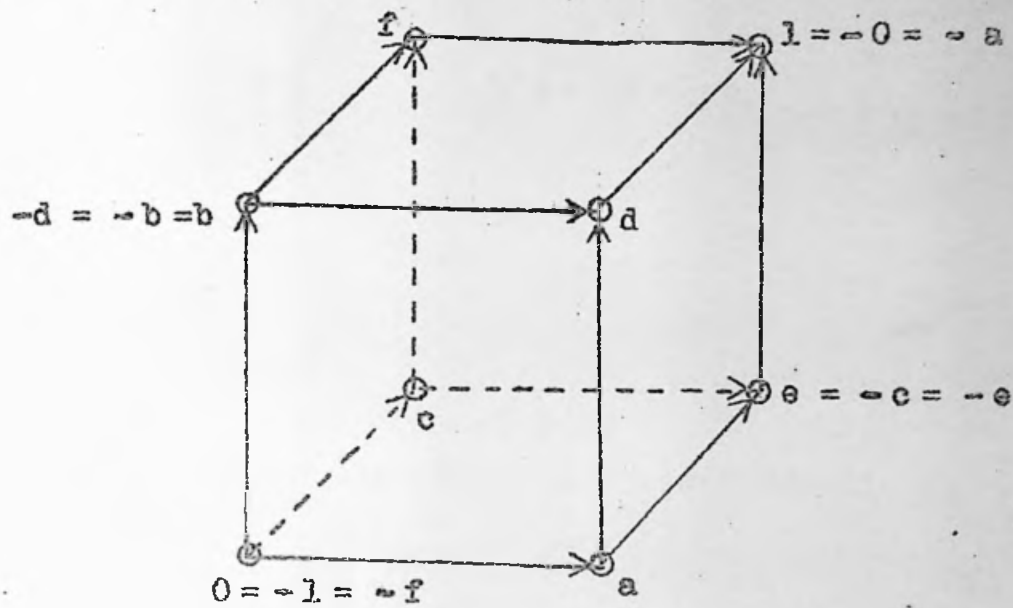


Fig. 1

sendo o diagrama de n(A) o seguinte :

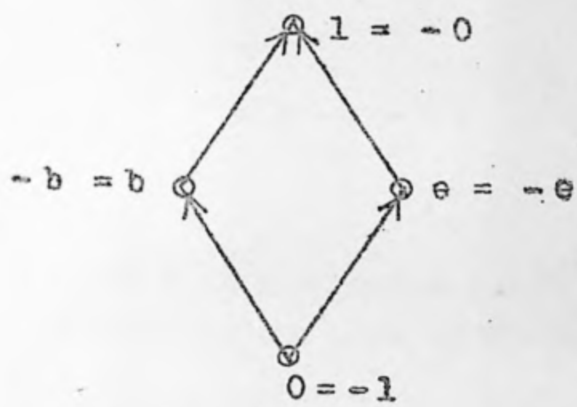


Fig. 2

A única sub - álgebra de A que é álgebra de Boole é $\{0,1\}$.
Outra sub - álgebra de A tem êste diagrama

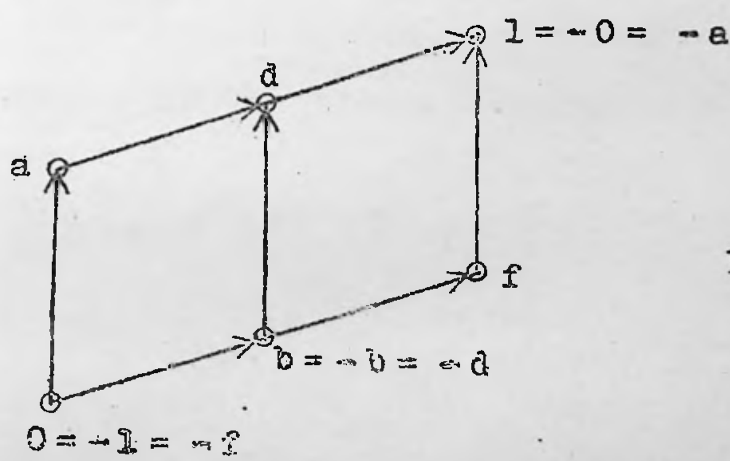
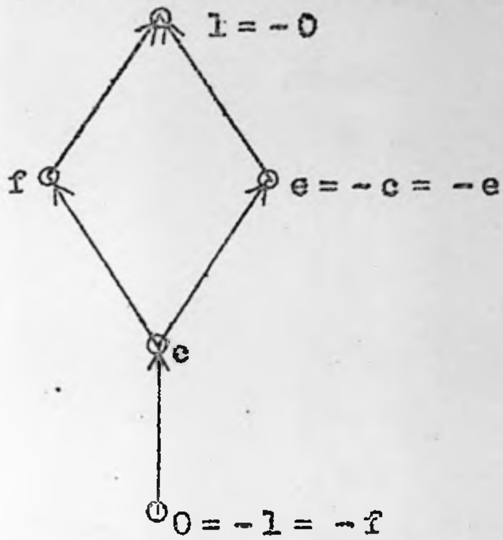


Fig. 3

Uma sub - álgebra regular de A é



$c \leq \sim\sim c = e$

$e \leq \sim\sim e = e$

$f \leq \sim\sim f = 1$

Fig. 4

enquanto que a única sub - álgebra forte diferente de $\{0, 1\}$ é a cadeia

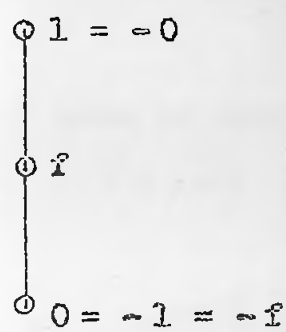


Fig. 5

Entre os M - anéis de conjuntos estão os exemplos mais gerais das M - álgebras regulares, ou sejaos M - anéis para os quais

$$X \subset \sim\sim X$$

$$X \subset \varphi^{-1} \varphi^{-1}(X)$$

que é equivalente a

$$\varphi^2(X) \subset X$$

Para as M - álgebras fortes devemos escolher os M - anéis para os quais

$$X \cap \complement_E \varphi^{-1}(X) = \emptyset$$

que é equivalente a

$$X \subset \varphi^{-1}(X)$$

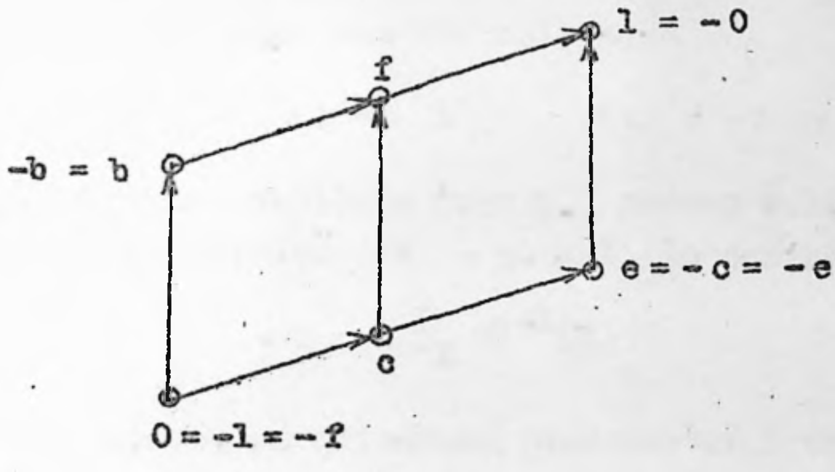
ou

$$\varphi(X) \subset X$$

No exemplo anterior temos

X	$\varphi(X)$	$\varphi^2(X)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
E	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$

Os sub-conjuntos X para os quais $\varphi^2(X) \subset X$ são $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, E, que nos dão a seguinte M-álgebra regular



$b \leq --b = b$

$c \leq --c = e$

$e \leq --e = e$

$f \leq --f = 1$

Fig. 6

que é, como foi visto em 3., a maior sub-álgebra de A que é M-álgebra regular.

O conjunto dos X tais que $\varphi(X) \subset X$ é $\{\emptyset, \{b, c\}, E\}$, ou seja a maior sub-álgebra forte de A e que é a representada na Fig. 5.

Para representar as M-álgebras simétricas devemos escolher os X tais que

$$--X = X$$

ou seja, tais que

$$\varphi^{-1}\varphi^{-1}(X) = X$$

ou seja, tais que

$$x \in X \longleftrightarrow \varphi^2(x) \in X$$

o conjunto de todos êsses X é a maior sub-álgebra simétrica e, no caso do exemplo, é a M-álgebra simétrica da Fig.2.

Também podemos representar as M-álgebras simétricas restringindo nossas aplicações φ às que satisfazem

$$\varphi^2(x) = x$$

definindo

$$-X = C_E\, \varphi^{-1}(X) = C_E\, \varphi(X)$$

e tomando uma parte de $\mathcal{P}(E)$ fechada para $\cap$, $\cup$ e $-$ e contendo $\emptyset$ e E, parte essa a que podemos chamar de <u>M-anél de conjuntos simétrico</u> . (ver [3]).

Se quisermos representar o reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ com uma aplicação

$$n : A \longrightarrow A \qquad n(x) = -x$$

que é apenas uma dualidade (ver 1.) nossas aplicações φ são quaisquer e a definição de $-$ no anél de conjuntos continua sendo

$$-X = C_E\, \varphi^{-1}(X)$$

Finalmente, se quisermos representar o reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ com um homomorfismo, ou seja, com uma aplicação

$$h : A \longrightarrow A$$

tal que

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$$
$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$$
$$h(0) = 0$$
$$h(1) = 1$$

nossas aplicações φ são quaisquer e devemos omitir o complementar na operação que representa h, ou seja, chamando de H essa ope ração, temos

$$H(X) = \varphi^{-1}(X)$$

Resumimos os resultados acima no seguinte quadro:

Tipo de aplicação no reticulado distributivo $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$	Tipo de aplicação no anel de sub-conjuntos de E. $\langle \mathcal{A}, \cap, \cup, \emptyset, E\rangle$
Homomorfismo: $h: A \to A$	$\varphi: E \to E$ qualquer $H: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $H(X) = \varphi^{-1}(X)$
Dualidade $d: A \to A$	$\varphi: E \to E$ qualquer $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $D(X) = C_E\, \varphi^{-1}(X)$
M - Complemento simétrico $s: A \to A$	$\varphi: E \to E$, $\varphi^2(x) = x$ $S: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $S(X) = C_E\, \varphi^{-1}(X)$
M - complemento $n: A \to A$	$\varphi: E \to E$, $\varphi^3(x) = \varphi(x)$ $N: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $N(X) = C_E\, \varphi^{-1}(X)$

onde ao lado direito temos o exemplo mais geral das estruturas descritas ao lado esquerdo.

5. Conjuntos M - ordenados

Um conjunto M - ordenado é um conjunto A parcialmente ordenado por $\leq$ juntamente com uma aplicação $\psi: A \to A$ tal que

1) $\psi^3(x) = \psi(x)$ $\forall$

2) se $x \leq y$ então $\psi(y) \leq \psi(x)$

se $\langle A, \leq, \psi\rangle$ e $\langle A', \leq', \psi'\rangle$ são conjuntos M - ordenados, uma aplicação

$$f: A \to A'$$

é um isomorfismo entre essas estruturas se

a) f é aplicação biunívoca de A sôbre A'

b) $x \leq y$ se e só se $f(x) \leq' f(y)$

c) $f(\psi(x)) = \psi'(f(x))$

Seja

$$\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1\rangle$$

uma M-álgebra. Se $\mathcal{S}$ é o conjunto dos filtros primos de A já vimos que em $\mathcal{S}$ está definida uma aplicação φ dada por

$$\boxed{\varphi(P) = C_A\, n^{-1}(P)} \qquad P \in \mathcal{S}$$

Seja $\mathcal{Q}$ uma parte não vazia de $\mathcal{S}$ tal que, se $P \in \mathcal{Q}$ então $\varphi(P) \in \mathcal{Q}$. Assim sendo

$\mathcal{Q}$ estável por φ

$$\langle \mathcal{Q}, \subset, \varphi\rangle$$

é um conjunto M-ordenado que diremos ser associado à M-álgebra A.

Uma relação de equivalência $\equiv$ definida em A é compatível com a estrutura de M-álgebra de A se

a) se $x \equiv x'$ e $y \equiv y'$ então $x \wedge y \equiv x' \wedge y'$

b) se $x \equiv x'$ e $y \equiv y'$ então $x \vee y \equiv x' \vee y'$

c) se $x \equiv x'$ então $-x \equiv -x'$

Para cada conjunto M-ordenado

$$\langle \mathcal{Q}, \subset, \varphi\rangle$$

associado a A vamos definir

$x \equiv y(\mathcal{Q})$ se e só se para todo

$P \in \mathcal{Q}$, "$x \in P$" é equivalente a "$y \in P$"

ou seja, $x \equiv y(\mathcal{Q})$ significa que exatamente os mesmos filtros primos que contêm x contêm y. Obtemos assim uma relação de equivalência compatível com a estrutura de A. De fato, se $x \equiv x'$(1), $y \equiv y'$ e $x \wedge y \in P (P \in \mathcal{Q})$ temos que $x \in P$, $y \in P$ donde $x' \in P$, $y' \in P$ e $x' \wedge y' \in P$. Analogamente, se $x' \wedge y' \in P (P \in \mathcal{Q})$

---

(1) Omitiremos no que segue "$(\mathcal{Q})$".

temos que $x \wedge y \in P$. Logo $x \wedge y \equiv x' \wedge y'$.

Se $x \equiv x'$, $y \equiv y'$ e $x \vee y \in P (P \in \mathcal{Q})$ temos que $x \in P$ ou $y \in P$, donde $x' \in P$ ou $y' \in P$, o que acarreta $x' \vee y' \in P$. Anàlogamente, se $x' \vee y' \in P (P \in \mathcal{Q})$ temos que $x \vee y \in P$. Logo $x \vee y \equiv x' \vee y'$.

Seja agora $x \equiv x'$ e $-x \notin P$, onde $P \in \mathcal{Q}$. Então $-x \in \complement_A P$, $x \in n^{-1}(\complement_A P)$, $x \in \complement_A n^{-1}(P) (= \varphi(P))$, donde $x' \in \varphi(P)$ (uma vez que $\varphi(P) \in \mathcal{Q}$), $x' \in \complement_A n^{-1}(P)$, $-x' \notin P$. Anàlogamente, para todo $P \in \mathcal{Q}$, se $-x' \notin P$ então $-x \notin P$. Assim sendo $-x \equiv -x'$.

Demonstramos, portanto, que cada conjunto M-ordenado $\mathcal{Q}$, associado à M-álgebra A, determina uma relação de equivalência compatível com a estrutura de A.

Dois conjuntos M-ordenados $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$, associados a A, se dizem <u>equivalentes</u> caso as relações de equivalência determinadas por êles coincidam (em extensão).

6. <u>Homomorfismos</u>

Sejam

$$\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle \quad e \quad \langle A', \wedge', \vee', -', 0', 1' \rangle$$

M-álgebras.

$$h : A \longrightarrow A'$$

é um <u>homomorfismo</u> se

a) h é uma aplicação de A sôbre A'

b) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge' h(b)$

c) $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b)$

d) $h(-a) = -' h(a)$

Um homomorfismo biunívoco é um <u>isomorfismo</u>.

Se $\leq$ e $\leq'$ são definidos da maneira usual e h é um homomorfismo temos

$$\text{se } x \leq y \quad \text{então } h(x) \leq' h(y)$$

Pois de $x \leq y$ vem $x \wedge y = x$ donde

$$h(x \wedge y) = h(x)$$
$$h(x) \wedge' h(y) = h(x)$$
$$h(x) \leq' h(y)$$

h sendo homomorfismo temos também

$$h(0) = 0' \qquad h(1) = 1'$$

a primeira igualdade se demonstrando, por exemplo, assim

$$0 \leq x \qquad \text{para todo } x \in A$$
$$h(0) \leq' h(x) \qquad \text{para todo } x \in A$$

donde, como h é "sôbre" $h(0) = 0'$.

Se h é um homomorfismo e P' um filtro primo de A' então $h^{-1}(P')$ é um filtro primo de A.

De fato, como $1' \in P'$ e $h(1) = 1'$ temos que $h^{-1}(P') \neq \emptyset$; se 0 estivesse em $h^{-1}(P)$, $h(0) = 0'$ estaria em P', absurdo; logo $h^{-1}(P') \neq A$. Seja agora

$$x \in h^{-1}(P') \quad \text{e} \quad x \leq y$$

Daí $h(x) \in P'$ e $h(x) \leq' h(y)$ e, como P' é filtro $h(y) \in P'$ donde $y \in h^{-1}(P')$. Se $x \in h^{-1}(P')$ e $y \in h^{-1}(P')$, $h(x) \in P'$ e $h(y) \in P'$ donde como P' é filtro $h(x) \wedge' h(y) = h(x \wedge y) \in P'$ ou seja $x \wedge y \in h^{-1}(P')$. Se $x \vee y \in h^{-1}(P')$, $h(x \vee y) =$ $= h(x) \vee' h(y) \in P'$ que, como P' é filtro primo, acarreta $h(x) \in P'$ ou $h(y) \in P'$ ou seja $x \in h^{-1}(P')$ ou $y \in h^{-1}(P')$.

A cada homomorfismo h corresponde um conjunto M-ordenado associado a A $\langle \mathcal{G}_h, \subset, \varphi \rangle$ onde $\mathcal{G}_h$ é a família dos filtros primos de A de forma $h^{-1}(P')$.

Para demonstrar a afirmação acima devemos verificar que $\mathcal{G}_h$ é invariante para φ. Seja então $P \in \mathcal{G}_h$, ou seja, $P = h^{-1}(P')$, onde $P' \in \mathcal{G}'$ = família dos filtros primos de A'.
Assim sendo

$$\varphi(P) = C_A\, n^{-1}(h^{-1}(P'))$$

Mostremos que

$$\varphi(P) = \varphi(h^{-1}(P')) = h^{-1}(\ \varphi'(P'))$$

onde

$$\varphi'(P') = \complement_{A'}\ n'^{-1}(P')$$

e $n'(x') = -' x'$, $x' \in A'$.

De fato,

$$x \in \varphi(h^{-1}(P')) \iff x \in \complement_A n^{-1}(h^{-1}(P')) \iff$$

$$\iff x \notin n^{-1}(h^{-1}(P')) \iff -x \notin h^{-1}(P') \iff$$

$$\iff h(-x) \notin P' \iff -'h(x) \notin P' \iff$$

$$\iff h(x) \notin n'^{-1}(P') \iff h(x) \in \complement_{A'} n'^{-1}(P') \iff$$

$$\iff h(x) \in \varphi'(P') \iff x \in h^{-1}(\ \varphi'(P'))$$

E, sendo

$$\varphi(P) = h^{-1}(\ \varphi'(P'))$$

temos que

$$\varphi(P) \in \mathcal{S}_h$$

O resultado acima mostra também que a aplicação

$$I : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}_h$$

dada por

$$I(P') = h^{-1}(P')$$

é um isomorfismo entre os conjuntos M - ordenados $\langle \mathcal{S}', \subset', \varphi' \rangle$ e $\langle \mathcal{S}_h, \subset, \varphi \rangle$.

Vimos assim que, a cada homomorfismo

$$h : A \longrightarrow A'$$

está associado um bem determinado conjunto M - ordenado $\langle \mathcal{S}_h, \subset, \varphi \rangle$.

Recìprocamente, cada conjunto M - ordenado associado a A, $\langle \mathcal{Q}, \subset, \varphi \rangle$ digamos, determina um homomorfismo h que leva cada $x \in A$ na classe de equivalência módulo $\mathcal{Q}$ (ver número anterior) a que x pertence.

Para elucidar conexões entre conjuntos M - ordenados, relações de equivalência e homomorfismos, fixemos uma M - álgebra A e façamos:

$\mathcal{M}$ = classe dos conjuntos M - ordenados associados a A.

$\mathcal{R}$ = classe das relações de equivalência compatíveis com a estrutura de A.

$\mathcal{H}$ = classe dos homomorfismos $h : A \longrightarrow A'$, A' M - álgebra arbitrária.

Nas considerações que seguem elementos de $\mathcal{M}$ são considerados "iguais" se são isomorfos, elementos de $\mathcal{R}$ são considerados "iguais" se coincidem em extensão e $h \in \mathcal{H}$, $\bar{h} \in \mathcal{H}$

$h : A \longrightarrow A'$, $\bar{h} : A \longrightarrow \bar{A}$, são considerados "iguais" se existe um isomorfismo $i : A' \longrightarrow \bar{A}$ tal que $\bar{h} = i \circ h$.

Vamos, então, definir aplicações relacionando essas classes, segundo o esquema abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "K"] & \mathcal{H} \arrow[l, "L"'] \arrow[r, shift left, "I"] & \mathcal{R} \arrow[l, shift left, "J"] \end{tikzcd}$$

sendo as definições como segue:

Se $h \in \mathcal{H}$, $I(h)$ é a relação de equivalência em A dada por $x \equiv y(I(h))$ se e só se $h(x) = h(y)$. Essa relação de equivalência é compatível com a estrutura de A.

Se $R \in \mathcal{R}$, $J(R)$ é o homomorfismo de A sôbre $A/_R$ que associa a cada $x \in A$ a classe de equivalência módulo R a que x pertence.

Se $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}$, $K(\mathcal{Q})$ é a relação de equivalência $\equiv$ dada por $x \equiv y$ se e só se $x \in P \Longleftrightarrow y \in P$ para todo $P \in \mathcal{Q}$. Como vimos, essa relação de equivalência é compatível com a estrutura de M-álgebra de A.

Finalmente, se $h \in \mathcal{H}$, $L(h) = \mathcal{S}_h$ que já vimos ser um conjunto M - ordenado.

Mostremos agora que essas aplicações são tais que :

$$J \circ I = \text{identidade de } \mathcal{H}$$

$$I \circ J = \text{identidade de } \mathcal{R}$$

$$K \circ L = I$$

As duas primeiras igualdades são fàcilmente verificadas, donde I(ou J) estabelece uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{R}$ (sendo $J = I^{-1}$).

Demonstrar a última igualdade significa mostrar que, para $h \in \mathcal{H}$, $(h : A \rightarrow A')$,

$$h(x) = h(y) \quad \text{se e só se } x \equiv y(\mathcal{S}_h)$$

o que pode ser feito como segue. Sejam $x \in A$, $y \in A$ tais que $h(x) = h(y)$ e $P \in \mathcal{S}_h$ tal que $x \in P$; existe P' filtro primo de A' satisfazendo $P = h^{-1}(P')$; logo, $x \in h^{-1}(P')$, $h(x) \in P'$, $h(y) \in P'$ ou $y \in h^{-1}(P')$, $y \in P$. Anàlogamente, se $P \in \mathcal{S}_h$ é tal que $y \in P$, então $x \in P$. Donde $x \equiv y(\mathcal{S}_h)$. Reciprocamente, supondo que $x \equiv y(\mathcal{S}_h)$, seja P' um filtro primo de A' tal que $h(x) \in P'$; então $x \in h^{-1}(P')$, $y \in h^{-1}(P')$, $h(y) \in P'$, donde $h(x) \leq h(y)$. Anàlogamente $h(y) \leq h(x)$.

Assim sendo, entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}$ temos as aplicações

$$\mathcal{H} \underset{L}{\overset{J \circ K}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}$$

e, de $K \circ L = I$, vem

$$J \circ K \circ L = \text{identidade de } \mathcal{H}$$

ou seja, entre os conjuntos M - ordenados $\mathcal{Q}$ que determinam o homomorfismo h (isto é, tais que $J \circ K(\mathcal{Q}) = h$) está $L(h) = \mathcal{S}_h$. Ademais $\mathcal{S}_h$ se distingue entre tais conjuntos M - ordenados por ser o maior. Em outras palavras

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}_h$$

para todo $\mathcal{Q}$ tal que $J \circ K(\mathcal{Q}) = h$. Isso decorre de

$$x \equiv y(\mathcal{Q}) \quad \text{se e só se} \quad h(x) = h(y)$$

e de

$$P \in \mathcal{S}_h \quad \text{se e só se } (x \in P \ \text{ e } \ h(x) = h(y) \text{ implicam } y \in P)$$

Identificando conjuntos M-ordenados que determinam a mesma relação de equivalência, vemos assim que estudar homomorfismos de A (ou relações de equivalência compatíveis com A) equivale essencialmente a estudar conjuntos M-ordenados associados a A.

7. Um particular homomorfismo

Seja A uma M-álgebra e n(A) a sub-álgebra de A constituida pelos elementos da forma $-x$, $x \in A$.

Definamos

$$h : A \longrightarrow n(A)$$

por

$$h(x) = --x \qquad x \in A$$

e vejamos que h é um homomorfismo

$$h(x \wedge y) = --(x \wedge y) = --x \wedge --y = h(x) \wedge h(y)$$

$$h(x \vee y) = --(x \vee y) = --x \vee --y \doteq h(x) \vee h(y)$$

$$h(-x) = ---x = -h(x)$$

Se $y \in n(A)$, $y = -x$, $x \in A$, donde

$$h(y) = h(-x) = ---x = -x = y$$

ou seja, h é "sôbre" e deixa os elementos de n(A) invariantes.

A relação de equivalência determinada por h é

$$x \equiv y \Longleftrightarrow --x = --y$$

ou

$$x \equiv y \Longleftrightarrow -x \doteq -y$$

sendo que em cada classe de equivalência está um e um só elemento de n(A).

O conjunto M-ordenado associado a h é $\mathcal{G}_h$, ou seja o conjunto dos filtros primos de A da forma $h^{-1}(P')$, P' filtro primo de n(A).

Uma parte B de A diz-se <u>saturada</u> para a relação de equivalência $\equiv$ definida acima se $x \in A$ e $x \equiv y$ implicam $y \in A$.

Vamos mostrar que <u>$\mathcal{G}_h$ coincide com o conjunto dos filtros saturados de A.</u> Se $P \in \mathcal{G}_h$, $x \in P$ e $x \equiv y$ temos que $x \in h^{-1}(P')$, (P' filtro primo de n(A)), $h(x) \in P'$, $--x \in P'$, $--y \in P'$, $h(y) \in P'$, $y \in h^{-1}(P')$, $y \in P$, donde, se $P \in \mathcal{G}_h$ então P é saturado para $\equiv$. Reciprocamente, se P é um filtro primo saturado para $\equiv$ vê-se fàcilmente que $P \in \mathcal{G}_h$.

Vejamos agora que os filtros primos saturados de A coincidem com os filtros da forma $\varphi(P)$, P filtro primo de A. De fato, $\varphi(P)$ é saturado pois se $x \in \varphi(P)$ e $-x = -y$ então $x \in C_A n^{-1}(P)$, $x \notin n^{-1}(P)$, $-x \notin P$, $-y \notin P$, $y \notin n^{-1}(P)$, $y \in C_A n^{-1}(P)$, $y \in \varphi(P)$. Por outro lado, se $\mathcal{Q}$ é filtro primo saturado então $\varphi^2(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ pois $x \in \varphi^2(\mathcal{Q})$ se e só se $x \in n^{-1}n^{-1}(\mathcal{Q})$, ou seja, se e só se $--x \in \mathcal{Q}$, ou ainda, se e só se $x \in \mathcal{Q}$ (pois $\mathcal{Q}$ é saturado e $x \equiv --x$).

Temos portanto

$\mathcal{G}_h$ = conjunto dos filtros primos saturados.

= conjunto dos filtros $\varphi(P)$, P filtro primo de A.

Se A e B são M-álgebras, diremos que B é <u>imagem homomorfa</u> de A se existe um homomorfismo h de A sôbre B. Mostraremos agora que, se B é imagem homomorfa simétrica (isto é uma imagem homomorfa que é M-álgebra simétrica) de A então B também é imagem homomorfa de n(A). De fato, como B é imagem homomorfa de A existe um homomorfismo g

$$g: A \longrightarrow B$$

Definamos

$$f: n(A) \longrightarrow B$$

fazendo

$$f(y) = g(y) \qquad , y \in n(A)$$

ou seja, f é a restrição de g a $n(A)$. Se $z \in B$, $z = g(x)$, $z = --g(x)$ (pois B é simétrica), $z = g(--x) = f(--x)$. Assim sendo f é homomorfismo. Se $\approx$ é a relação de equivalência em A induzida por g, isto é,

$$x \approx y \longleftrightarrow g(x) = g(y)$$

então $x \equiv y$ implica $x \approx y$ ou seja tôda passagem ao quociente de A que resulte em M-álgebra simétrica é obtida por uma partição menos fina que a determinada por $\equiv$.

Podemos dizer que x e y são <u>simètricamente equivalentes</u> se $x \equiv y$. $x \equiv 1$ se e só se $-x = -1$ ou seja se e só se $--x = 1$, $h(x) = 1$. Portanto, $x \equiv 1$ se e só se $x \in h^{-1}(\{1\})$. Chamando de <u>núcleo</u> de um homomorfimso h a $N = h^{-1}(\{1\})$ vemos que o núcleo de nosso particular homomorfismo coincide com o conjunto dos elementos simètricamente equivalentes a 1. Além disso, sempre em nosso caso particular, vemos fàcilmente que o núcleo N é também dado por

$$N = \bigcap_{P \in \mathcal{G}} \varphi(P)$$

sendo $\mathcal{G}$ o conjunto dos filtros primos de A.

8. Sistemas Dedutivos

Seja A uma M-álgebra. Se $x \in A$ e $y \in A$ definamos

$$x \twoheadrightarrow y = -x \vee y$$

O símbolo $\twoheadrightarrow$ agora definido não deve ser confundido com o mesmo símbolo anteriormente usado para as álgebras de Heyting.

Um filtro D de A diz-se um <u>sistema dedutivo</u> se

D) $x \in D$ e $x \twoheadrightarrow y \in D$ acarretam $y \in D$ e $--y \in D$

A condição D é equivalente às duas seguintes:

D1) se $x \in D$ e $x \twoheadrightarrow y \in D$ então $y \in D$

D2) se $x \in D$ então $--x \in D$

Se $D \neq A$ o sistema dedutivo é <u>próprio</u>. Se D é próprio e não está contido pròpriamente em nenhum outro sistema dedutivo próprio, então D é <u>maximal</u>.

Claramente, se $(D_i)_{i \in I}$ é uma família de sistemas dedutivos de A então

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i$$

também é um sistema dedutivo de A.

Se P é filtro primo de A então

$$D = P \cap \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

é sistema dedutivo de A. De fato, se $x \in D$ e $x \to y \in D$ temos que

$$x \in P, \ \neg x \notin P, \ \neg\neg x \in P$$

$$\neg x \vee y \in P, \ \neg\neg x \wedge \neg y \notin P, \ \neg x \vee \neg\neg y \in P$$

donde

$$y \in P, \text{ pois } P \text{ é primo } \neg x \notin P \text{ e } \neg x \vee y \in P$$

$$\neg y \notin P, \text{ pois se } \neg y \in P \text{ teríamos } \neg\neg x \wedge \neg y \in P \text{ absurdo}$$

$$\neg\neg y \in P, \text{ pois } P \text{ é primo, } \neg x \notin P \text{ e } \neg x \vee \neg\neg y \in P$$

o que acarreta

$$y \in D \text{ e } \neg\neg y \in D$$

sendo D portanto sistema dedutivo.

Como consequência, se P é filtro primo de A, $\varphi(P) \cap \varphi^2(P)$ é sistema dedutivo de A. Pois $\varphi(P)$ é filtro primo e

$$\varphi(P) \cap \varphi^2(P) \cap \varphi^3(P) = \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

pelo raciocínio anterior é sistema dedutivo.

Um sistema dedutivo D é elementar se existe um filtro primo P tal que

$$D = P \cap \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

e é simétrico se existe um filtro primo P tal que

$$D = \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

Claramente, todo sistema dedutivo simétrico é elementar.

Se D é um sistema dedutivo próprio então

$$D \cap -D = \emptyset$$

pois se $x \in D \cap -D$, $x \in D$ e $x = -y$, $y \in D$, donde $y \to 0 = -y \vee 0 = x \vee 0 = x \in D$ e $0 \in D$.

Se D é um sistema dedutivo próprio e P um filtro primo tal que

$$D \subset P, \quad P \cap -D = \emptyset$$

então $\varphi(P)$ e $\varphi^2(P)$ também têm essas propriedades, ou seja,

$$D \subset \varphi(P), \quad \varphi(P) \cap -D = \emptyset$$
$$D \subset \varphi^2(P), \quad \varphi^2(P) \cap -D = \emptyset$$

De fato, se $x \in D$ e $-x \in P$, teríamos $-x \in P \cap -D$ absurdo. Logo, $D \subset \varphi(P)$.

Se $x \in \varphi(P) \cap -D$, $x = -y$, $y \in D$ e $-x \notin P$, donde $--y \in D$ e $--y \notin P$ absurdo. Portanto $\varphi(P) \cap -D = \emptyset$.

Se $x \in D$, $--x \in D$, $--x \in P$, $x \in \varphi^2(P)$. Assim $D \subset \varphi^2(P)$.

Se $x \in \varphi^2(P) \cap -D$, $--x \in P$ e $x = -y$, $y \in D$, donde $--x = ---y = -y \in P$ e $-y \in P \cap -D$ absurdo. Logo, $\varphi(P) \cap -D = \emptyset$.

Podemos demonstrar agora dois resultados interessantes. O primeiro afirma que todo sistema dedutivo maximal é simétrico. Pois seja D sistema dedutivo maximal; então D é próprio e $D \cap -D = \emptyset$. Como o ideal gerado por $-D$ é constituido pelos elementos x tais que $x \leq -y$, $y \in D$, existe um filtro primo P tal que

$$D \subset P \quad \text{e} \quad P \cap -D = \emptyset$$

donde

$$D \subset \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

e, como D é maximal,

$$D = \varphi(P) \cap \varphi^2(P)$$

O outro resultado diz que todo sistema dedutivo próprio é intersecção de sistemas dedutivos elementares.

Realmente, seja D um sistema dedutivo próprio e $x \notin D$. Se I_x é o ideal gerado por $\{x\} \cup -D$ mostremos que

$$D \cap I_x = \emptyset$$

Se $y \in D \cap I_x$ então

$$y \in D, y \leq -u \vee x, \; u \in D$$

donde $-u \vee x \in D, u \rightarrow x \in D$ e $x \in D$ absurdo. Assim sendo, para cada $x \notin D$ existe um filtro primo P_x tal que

$$D \subset P_x \,, P_x \cap I_x = \emptyset$$

ou seja, tal que

$$D \subset P_x \text{ e } P_x \cap -D = \emptyset$$

donde

$$D \subset \varphi(P_x) \,, \quad D \subset \varphi^2(P_x)$$

e

$$D \subset P_x \cap \varphi(P_x) \cap \varphi^2(P_x)$$

para cada $x \notin D$. Fazendo

$$D_x = P_x \cap \varphi(P_x) \cap \varphi^2(P_x)$$

temos que D_x é sistema dedutivo elementar e $x \notin D_x$. Ademais

$$D = \bigcap_{x \notin D} D_x$$

9. <u>Sistemas Dedutivos e Homomorfismos</u>

Se A e A' são M-álgebras e $h : A \rightarrow A'$ é um homomorfismo, então o núcleo $N = h^{-1}(\{1\})$ de h é um sistema dedutivo próprio.

Pois $0 \notin N$ (nas M-álgebras consideramos sempre $0 \neq 1$) e $1 \in N$; se x e y estão em N, $h(x) = h(y) = 1$ donde $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) = 1$ e $x \wedge y \in N$; se $x \in N$ e $x \leq y$ temos que $h(x) = 1$ e $h(x) \leq h(y)$ donde $h(y) = 1$ e $y \in N$. Logo, N é um filtro próprio. Se

$$x \in N \quad \text{e} \quad x \rightarrow y \in N$$

então

$$h(x) = 1 \quad \text{e} \quad -h(x) \vee h(y) = 1$$

resultando

$$h(y) = 1 \qquad --h(y) = h(--y) = 1$$

ou seja

$$y \in N \quad e \quad --y \in N$$

Portanto N é um sistema dedutivo próprio.

Reciprocamente, se N é um sistema dedutivo próprio, N é núcleo de algum homomorfismo. De fato, se N é sistema dedutivo próprio

$$N = \bigcap_{i \in I} D_i$$

onde os D_i são sistemas dedutivos elementares.

$$D_i = P_i \cap \varphi(P_i) \cap \varphi^2(P_i)$$

Seja $\mathcal{Q} = \bigcup_{i \in I} \{P_i, \varphi(P_i), \varphi^2(P_i)\}$. Como $\mathcal{Q}$ é uma família de filtros primos invariante para φ, $\mathcal{Q}$ determina uma relação de equivalência, uma álgebra quociente e um homomorfismo canônico. O núcleo dêsse homomorfismo canônico é

$$\bigcap_{P \in \mathcal{Q}} P = \bigcap_{i \in I} D_i = N$$

Assim sendo, se A é M-álgebra, a cada sistema dedutivo próprio N de A corresponde um conjunto $\mathcal{H}_N$ de homomorfismos h que têm como núcleo N. Em outras palavras

$$h \in \mathcal{H}_N \Longleftrightarrow h \text{ é homomorfismo de núcleo } N.$$ Re

Reciprocamente, todo homomorfismo h de A está em um dêsses conjuntos $\mathcal{H}_N$.

Os homomorfismos de $\mathcal{H}_N$ são obtidos a partir das famílias invariantes $\mathcal{Q}$ de filtros primos de A tais que

$$\bigcap_{P \in \mathcal{Q}} P = N$$

10. Imagens homomorfas regulares.

Uma M-álgebra A é regular se e só se

$$P \subset \varphi^2(P)$$

para todo filtro primo P de A.

De fato, seja A M-álgebra regular, P filtro primo de A e $x \in P$; como $x \leq --x$ temos que $--x \in P$ ou seja $x \in \varphi^2(P)$. Portanto $P \subset \varphi^2(P)$. Reciprocamente, se essa condição é satisfeita em uma M-álgebra A e $x \in A (x \neq 0)$, tomemos um filtro primo P tal que $x \in P$; então $x \in \varphi^2(P)$, $--x \in P$. Logo todo filtro primo que contém x contém $--x$ e $x \leq --x$.

Definamos pois um filtro primo regular como um filtro primo P tal que $P \subset \varphi^2(P)$.

Um filtro primo P é regular se e só se

$$x \in P \Rightarrow --x \in P$$

Vejamos agora que as imagens homomorfas regulares são determinadas pelas famílias invariantes para φ de filtros primos regulares.

Seja então A M-álgebra e $\mathcal{Q}$ uma tal família de filtros primos de A. Temos

1) $P \in \mathcal{Q} \Rightarrow \varphi(P) \in \mathcal{Q}$

2) $P \subset \varphi^2(P)$ para todo $P \subset \mathcal{Q}$

Denotemos por

$$A/\mathcal{Q}$$

a M-álgebra quociente de A pela relação de equivalência $x \equiv y\ (\mathcal{Q})$ determinada por $\mathcal{Q}$ e compatível com a estrutura de A. Mostremos que $A/\mathcal{Q}$ é M-álgebra regular. Se $x \in A$, $P \in \mathcal{Q}$ e $x \in P$, então $x \in \varphi^2(P)$, $--x \in P$ e $x \wedge --x \in P$. Por outro lado, se $x \wedge --x \in P$ então $x \in P$. Assim sendo

$$x \wedge --x \equiv x (\mathcal{Q})$$

donde

$$\mathring{x} \wedge --\mathring{x} = \mathring{x}$$

(onde $\mathring{x}$ é a classe de equivalência segundo $\mathcal{Q}$ que contém x) e

$$\mathring{x} \leq --\mathring{x}$$

Recíprocamente, se

$$h : A \longrightarrow A'$$

é um homomorfismo da M - álgebra A sôbre a M - álgebra regular A' então $\mathcal{S}_h$ tem as propriedades 1 e 2 acima e

$$A/\mathcal{S}_h \text{ isomorfa a } A'$$

De fato, se P' é filtro primo de A' e

$$P = h^{-1}(P')$$

temos que (ver 6)

$$\varphi^2(P) = h^{-1}(\varphi'^2(P'))$$

e, como $P' \subset \varphi'^2(P')$, resulta

$$P \subset \varphi^2(P)$$

Fica assim demonstrado o nosso resultado

Se $\mathcal{Q}$ é a família de todos os filtros primos regulares então $\mathcal{Q}$ é não vazia e $\mathcal{Q}$ é invariante para φ (pois $\varphi P \in \mathcal{Q}$ qualquer que seja o filtro primo P). Assim sendo

$$A/\mathcal{Q}$$

é a "maior" imagem homomórfa regular e

$$R = \bigcap_{P \in \mathcal{Q}} P$$

será denominado de <u>radical regular</u> da M - álgebra A. R é pois o núcleo do homomorfismo correspondente a maior imagem regular e também o conjunto dos elementos equivalentes a 1 segundo a relação determinada por $\mathcal{Q}$.

Um <u>sistema dedutivo elementar</u> D diz-se <u>regular</u> se existe um filtro primo regular P tal que

$$D = P \cap \varphi(P)$$

A intersecção de uma família não vazia de sistemas dedutivos elementares regulares é um <u>sistema dedutivo regular</u>.

O núcleo N de um homomorfismo $h: A \rightarrow A'$ (A' regular) é um sistema dedutivo elementar.

Pois

$$N = \bigcap_{P \in \mathcal{G}_h} P \qquad \text{onde } P \subset \varphi^2(P)$$

$$= \bigcap_{P \in \mathcal{G}_h} (P \cap \varphi(P))$$

uma vez que $P \in \mathcal{G}_h$ acarreta $\varphi(P) \in \mathcal{G}_h$.

Reciprocamente, todo sistema dedutivo regular D é núcleo de algum homomorfismo $h: A \rightarrow A'$ (A' regular).

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i \qquad D_i \text{ sitema ded. elem. reg.}$$

$$= \bigcap_{i \in I} (P_i \cap \varphi(P_i)) \qquad P_i \subset \varphi^2(P_i)$$

$$= \bigcap_{i \in I} (P_i \cap \varphi(P_i) \cap \varphi^2(P_i))$$

dondo, fazendo

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i \qquad \text{onde } \mathcal{G}_i = \{P_i, \varphi(P_i), \varphi^2(P_i)\}$$

temos que $A/_{\mathcal{Q}}$ é regular e o homomorfismo canônico

$$h: A \rightarrow A/_{\mathcal{Q}}$$

tem como núcleo D.

O radical regular R é o "menor" sistema dedutivo regular.

Estudo análogo pode ser feito para as N-álgebras A tais que

$$\sim\sim x \leq x \qquad \text{para todo } x \in A$$

sendo os filtros primos P correspondentes aqueles para os quais

$$\varphi^2(P) \subset P$$

11. Imagens homomorfas simétricas

Estudo semelhante ao do número anterior mostra que as imagens homomorfas simétricas de uma M - álgebra A são determinadas pelas famílias invariantes para φ de filtros primos P tais que

$$\varphi^2(P) = P$$

Êsses serão então os filtros primos simétricos, caracterizados por $x \in P$ se e só se $\sim\sim x \in P$.

Os núcleos dos homomorfismos

$$h : A \to A' \qquad (A' \text{ simétrica})$$

são intersecção de sistemas dedutivos elementares da forma

$$P \cap \varphi(P) \qquad \text{onde} \qquad \varphi^2(P) = P$$

(chamados de simétricos em 8). Êsses sistemas dedutivos D satisfazem à condição

$$\sim\sim x \in D \to x \in D$$

Recìprocamente, se D é um sistema dedutivo próprio que satisfaz a tal condição então existe um homomorfismo $h : A \to A'$ (A' simétrica) que tem D como núcleo.

De fato, sendo D um dêsses sistemas dedutivos de A e fazendo

$$\bar{D} = D \cap n(A)$$

temos que $\bar{D}$ é um sistema dedutivo da sub - álgebra $n(A)$. Assim sendo $\bar{D}$ é núcleo de algum homomorfismo

$$g : n(A) \to A' \qquad A' \text{ simétrica}$$

Se

$$f : A \to n(A)$$

é dada, como em 7 por

$$f(x) = \sim\sim x$$

temos que

$$h = g \circ f$$

é um homomorfismo da M - álgebra A sôbre a M - álgebra simétrica A' cujo núcleo é

$$h^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{1\})) = f^{-1}(\bar{D})$$

Ademais

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bar{D}) &\Longleftrightarrow \sim\sim x \in \bar{D} \\ &\Longleftrightarrow \sim\sim x \in D \\ &\Longleftrightarrow x \in D \end{aligned}$$

ou seja

$$\text{núcleo de } h = D$$

O radical simétrico S de uma M-álgebra A é a intersecção de todos filtros primos simétricos ou seja o núcleo da $f : A \to n(A)$ dada acima.

$$\begin{aligned} x \in S &\Longleftrightarrow \sim\sim x = 1 \\ &\Longleftrightarrow \sim x = 0 \end{aligned}$$

12 . Imagens Homomorfas Fortes

Um filtro primo P é <u>forte</u> se $x \wedge \sim x \notin P$ qualquer que seja x, ou seja se e só se

$$x \in P \longrightarrow \sim x \notin P$$

$$P \subset \varphi(P)$$

Uma M-álgebra A é forte se e só se todo filtro primo de A é forte.

Seja $\mathcal{Q}$ uma família invariante para φ de filtros primos fortes. Então

$$P \in \mathcal{Q} \longrightarrow P \subset \varphi(P) = \varphi^2(P)$$

Assim cada $P \in \mathcal{Q}$ é um sistema dedutivo elementar (dito forte) e $A/\mathcal{Q}$ é uma M-álgebra forte.

Reciprocamente, se

$$h : A \longrightarrow A' \qquad A' \text{ forte}$$

é um homomorfismo então $\mathcal{B}_h$ é uma família invariante para φ de filtros primos fortes. As imagens homomorfas fortes são portanto determinadas por tais famílias.

O núcleo de h é intersecção de sistemas dedutivos elementares fortes (sistema dedutivo forte). Se D é um sistema dedutivo forte então

1) $-x \vee --x \in D$ para todo x

2) $a \vee (x \wedge -x) \in D \Longrightarrow a \in D$

Pois se D é sistema dedutivo forte

$$D = \bigcap_{i \in I} P_i \qquad P_i \subset \varphi(P_i) = \varphi^2(P_i)$$

e se $-x \notin P_i$, $x \in \varphi(P_i)$, $x \in \varphi^2(P_i)$, $--x \in P_i$; logo para todo i, $-x \vee --x \in P_i$ ou seja $-x \vee --x \in D$. Além disso se $a \vee (x \wedge -x) \in D$, $a \vee (x \wedge -x) \in P_i$ para todo i e, como $x \wedge -x \notin P_i$, $a \in P_i$ para todo i, $a \in D$.

Essas propriedades caracterizam os sistemas dedutivos fortes, pois se D é um sistema dedutivo próprio satisfazendo 1 e 2 vamos mostrar que D é forte. Seja $a \notin D$, B o conjunto dos elementos da forma $x \wedge -x$, I o ideal gerado por $B \cup \{a\}$ e suponhamos que $y \in D \cap I$; então

$$y \in D$$

$$y \leq a \vee (x_1 \wedge -x_1) \vee \ldots \vee (x_n \wedge -x_n)$$

donde

$$a \vee (x_1 \wedge -x_1) \vee \ldots \vee (x_n \wedge -x_n) \in D$$

$$a \in D$$

absurdo. Assim sendo

$$D \cap I = \emptyset$$

e portanto existe um filtro primo P tal que

$$D \subset P, \quad P \cap I = \emptyset$$

Se $x \in P$ então $\neg x \notin P$ donde $P \subset \varphi(P)$. Se $x \in \varphi(P)$ então $\neg x \notin P$ e como $\neg x \vee \neg\neg x \in P$ temos que $\neg\neg x \in P$, $x \in \varphi^2(P)$; donde $\varphi(P) \subset \varphi^2(P)$. Para cada $a \notin D$ existe assim um sistema dedutivo elementar forte contendo D e não incluindo a, ou seja D é a intersecção de tais sistemas.

O <u>radical forte</u> F é a intersecção de todos os sistemas dedutivos fortes.

Uma M - álgebra A é forte-dual se $x \vee \neg x = 1$ para todo $x \in A$. Isso acontece se e só se

$$\varphi(P) \subset P$$

para todo filtro primo P. Um filtro primo que satisfaz a essa condição em uma M - álgebra A diz-se um filtro primo forte-dual. Chamando de T o filtro gerado pelos elementos da forma $x \vee \neg x$ temos que o filtro primo P é forte-dual se e só se

$$T \subset P\,.$$

donde

$$T = \bigcap_{i \in I} P_i$$

sendo $(P_i)_{i \in I}$ a família dos filtros primos fortes-duais.

As imagens homomorfas fortes-duais são determinadas pelas famílias inveriantes para φ de filtros primos fortes-duais. Os sistemas dedutivos correspondentes são intersecções de sistemas dedutivos elementares da forma

$$P \cap \varphi(P) \cap \varphi^2(P) \quad \text{onde} \quad \varphi(P) = \varphi^2(P) \subset P$$

e coincidem com os sistemas dedutivos booleanos (ver número seguinte). Assim o radical forte-dual coincide com o radical booleano B que é o sistema dedutivo gerado pelos elementos da forma

$$x \vee \neg x\,.$$

3.3. Imagens Homomorfas Booleanas

Um filtro primo P é **invariante** ou **booleano** se

$$P = \varphi(P)$$

Condições equivalentes são

$$x \in P \Longleftrightarrow -x \notin P$$

$x \vee -x \in P$ para todo x e $x \wedge -x \notin P$ para todo x.

Para que uma M-álgebra A seja álgebra de Boole é necessário e suficiente que todos os filtros primos de A sejam invariantes.

As imagens homomorfas booleanas são determinadas pelas famílias de filtros primos invariantes.

Um sistema dedutivo é **booleano** se fôr intersecção de filtros primos booleanos. Os núcleos dos homomorfismos

$$h : A \longrightarrow A' \qquad A' \text{ álgebra de Boole}$$

coincidem com os sistemas dedutivos booleanos.

Se D é um sistema dedutivo booleano então D é um sistema dedutivo próprio e

$$x \vee -x \in D \text{ para todo } x$$

Reciprocamente, seja D um sistema dedutivo próprio satisfazendo essa condição; vamos mostrar que D é booleano. Seja $a \notin D$ e I o ideal gerado por a e os elementos da forma $x \wedge -x$; suponhamos que

$$y \in D \cap I$$

então

$$y \in D$$
$$y \leq a \vee (x_1 \wedge -x_1) \vee \ldots \vee (x_n \wedge -x_n)$$

donde

$$a \vee (x_1 \wedge -x_1) \vee \ldots \vee (x_n \wedge -x_n) \in D$$

$$-- \quad a \vee -(x_1 \vee --x_1) \vee \ldots \vee -(-x_n \vee --x_n) \in D$$

e, como $-x_i \vee --x_i \in D$, temos que

$$\sim\sim a \in D$$

$$\sim a \vee a = \sim(\sim\sim a) \vee a \in D$$

$$a \in D$$

absurdo. Assim sendo, existe um filtro primo P tal que

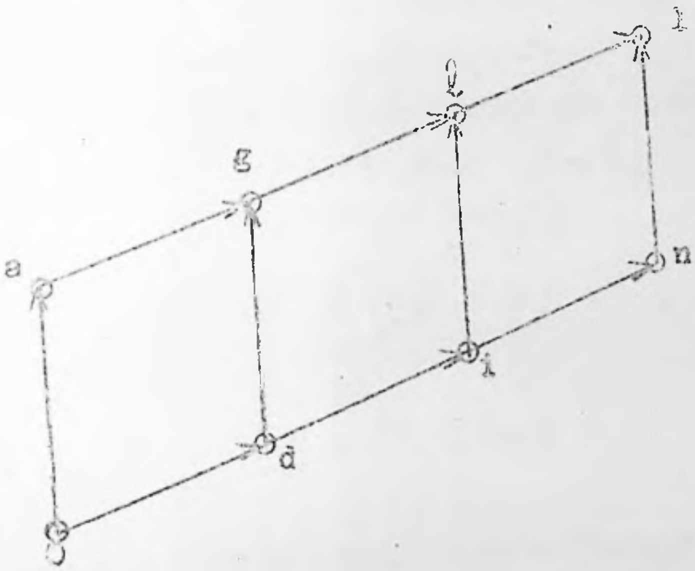
$$D \subset P \qquad P \cap I = \emptyset$$

Se $x \in P$, como $x \wedge \sim x \notin P$, $\sim x \notin P$; se $\sim x \notin P$, como $x \vee \sim x \in P$, $x \in P$. Portanto P é booleano. Para cada $a \notin D$ temos um filtro primo booleano que contém D e não contém a. Logo D é intersecção de filtros primos booleanos, ou seja D é booleano.

O radical booleano B é a intersecção de todos os filtros primos booleanos (ou a própria M-álgebra A se não existir nenhum filtro primo booleano). B é portanto o sistema dedutivo gerado pelos elementos da forma $x \vee \sim x$ e também o núcleo do homomorfismo correspondente à maior imagem homomorfa booleana.

14 Exemplos de Imagens Homomorfas

Seja a M-álgebra



$\sim 0 = 1$

$\sim a = n$

$\sim d = \ell$

$\sim g = i$

$\sim i = \ell$

$\sim \ell = i$

$\sim n = a$

$\sim 1 = 0$

que pode ser obtida como em 4., a partir de um conjunto

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

por meio de uma aplicação

$$\varphi(a_1) = a_1$$
$$\varphi(a_2) = a_3$$
$$\varphi(a_3) = a_4$$
$$\varphi(a_4) = a_3$$

Se chamarmos de $F(x)$ o filtro gerado por x (ou seja o conjunto dos y tais que $y \geq x$) temos que os filtros primos dessa M-álgebra são

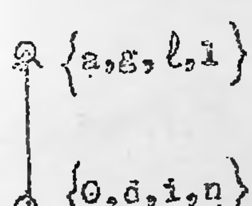
$$F(a),\ F(d),\ F(i) \ \text{e}\ F(n)$$

e que a aplicação φ correspondente é

$$\varphi(F(a)) = F(a)$$
$$\varphi(F(i)) = F(n)$$
$$\varphi(F(n)) = F(d)$$
$$\varphi(F(d)) = F(n)$$

Vejamos as famílias de filtros primos invariantes para φ e as imagens homomorfas correspondentes.

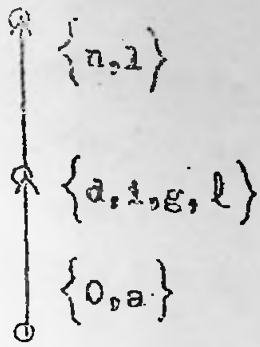
$\{F(a)\}$ é uma tal família, sendo $F(a)$ filtro primo (sistema dedutivo também) booleano. Como $F(a)$ é o único filtro primo booleano temos que $F(a)$ é o sistema dedutivo gerado pelos elementos de forma $x \vee -x$, ou seja $\{1, \ell\}$. A imagem homomorfa correspondente é a álgebra de Boole.



$$-\{0,d,i,n\} = \{a,g,\ell,1\}$$
$$-\{a,g,\ell,1\} = \{0,d,i,n\}$$

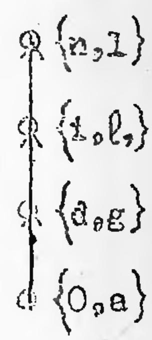
Observemos que os filtros primos fortes-duais são $F(a)$, $F(d)$ e $F(i)$ cuja intersecção é $\{1, \ell\}$

Outra família invariante é $\{F(d), F(n)\}$ constituida por filtros primos simétricos e cuja intersacção é o sistema dedutivo simétrico $F(n)$. A imagem homomorfa correspondente é a M-álgebra simétrica.



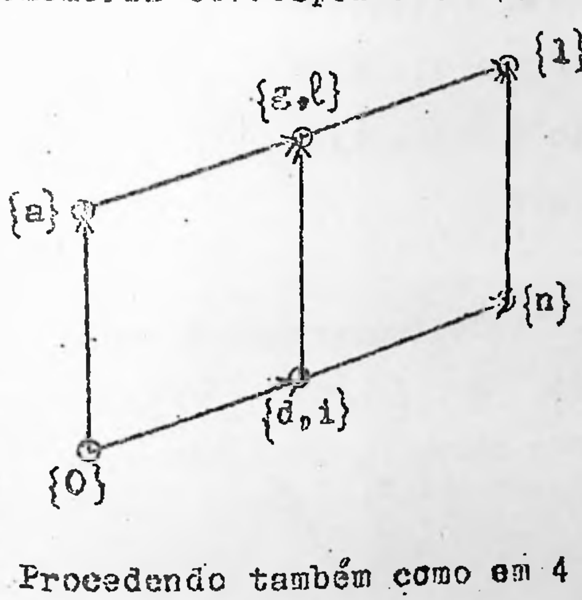
$\sim \{0,a\} = \{n,1\}$
$\sim \{d,i,g,\ell\} = \{d,i,g,\ell\}$
$\sim \{n,1\} = \{0,a\}$

Como $\varphi^2(F(i)) = F(d)$ e $F(i) \subset F(d)$ segue-se que $F(i)$ é filtro primo regular donde $\{F(i), F(n), F(d)\}$ é uma família invariante de filtros primos regulares. A intersecção dessa família é o sistema dedutivo regular $F(n)$ e a imagem homomorfa correspondente a M - álgebra regular



$\sim \{0,a\} = \{n,1\}$
$\sim \{d,g\} = \{i,\ell\}$
$\sim \{i,\ell\} = \{i,\ell\}$
$\sim \{n,1\} = \{0,a\}$

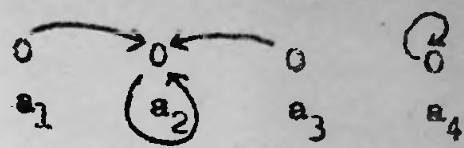
Finalmente, da família $\{F(a), F(d), F(n)\}$ obtemos os sistemas dedutivos elementares $F(a)$ e $F(d) \cap F(n) = F(n)$ (ambos simétricos) donde o radical simétrico $F(a) \cap F(n) = \{1\}$. A imagem homomorfa correspondente (isomorfa a $n(A)$) é



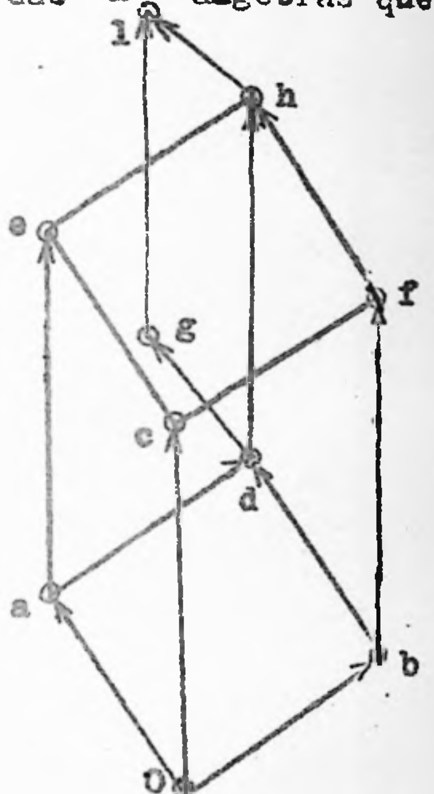
$\sim \{0\} = \{1\}$
$\sim \{a\} = \{n\}$
$\sim \{d,i\} = \{g,\ell\}$
$\sim \{g,\ell\} = \{d,i\}$
$\sim \{n\} = \{a\}$
$\sim \{1\} = \{0\}$

Procedendo também como em 4. com um conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e uma aplicação φ dada por

$$\varphi(a_1) = a_2$$
$$\varphi(a_2) = a_2$$
$$\varphi(a_3) = a_2$$
$$\varphi(a_4) = a_4$$



uma das M_5 álgebras que obtemos é



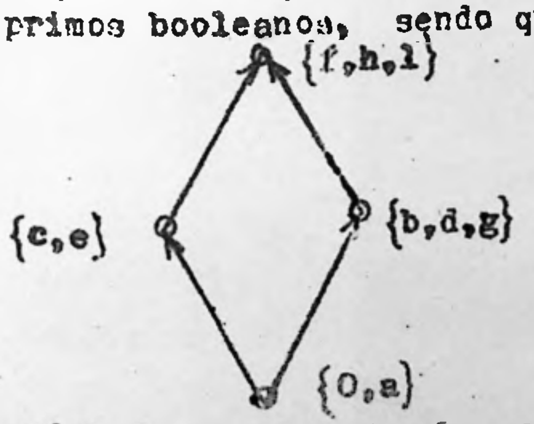
$$- 0 = 1$$
$$- a = 1$$
$$- b = c$$
$$- d = c$$
$$- c = g$$
$$- e = g$$
$$- f = 0$$
$$- g = c$$
$$- h = 0$$
$$- 1 = 0$$

sendo $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ e $F(g)$ os filtros primos e

$$\varphi(F(a)) = F(b)$$
$$\varphi(F(b)) = F(b)$$
$$\varphi(F(c)) = F(c)$$
$$\varphi(F(g)) = F(b)$$

a aplicação φ correspondente.

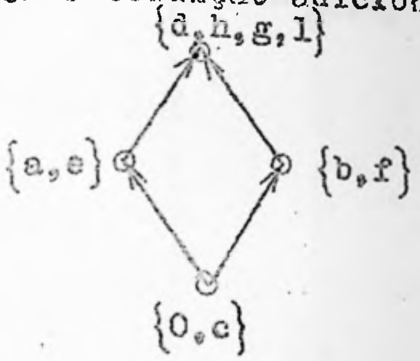
$\{F(b)\}$, $\{F(c)\}$ e $\{F(b), F(c)\}$ são famílias de filtros primos booleanos, sendo que a última dá a imagem homomorfa



$$- \{0,a\} = \{f,h,1\}$$
$$- \{c,e\} = \{b,d,g\}$$
$$- \{b,d,g\} = \{c,e\}$$
$$- \{f,h,1\} = \{0,a\}$$

onde $F(f)$ é o radical booleano.

As famílias $\{F(a), F(b)\}$, $\{F(a), F(b), F(g)\}$ e $\{F(a), F(b), F(c)\}$ são formadas por filtros primos que satisfazem a $\varphi(P) = \varphi^2(P)$, donde as imagens homomorfas correspondentes satisfazem a condição adicional de $\sim x \vee \sim\sim x = 1$. Essas imagens são

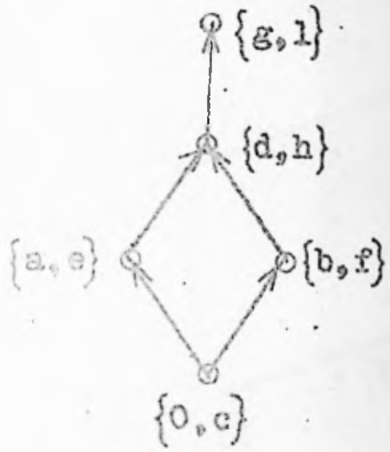


$\sim\{0,c\} = \{d,h,g,1\}$

$\sim\{a,e\} = \{d,h,g,1\}$

$\sim\{b,f\} = \{0,c\}$

$\sim\{d,h,g,1\} = \{0,c\}$



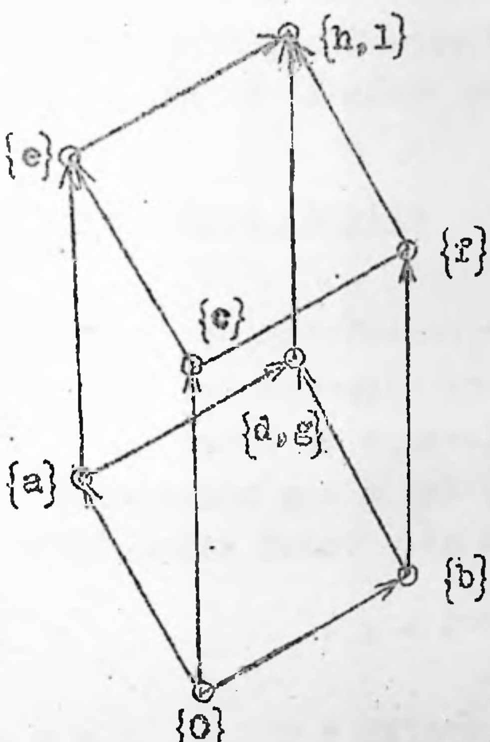
$\sim\{0,c\} = \{g,1\}$

$\sim\{a,e\} = \{g,1\}$

$\sim\{b,f\} = \{0,c\}$

$\sim\{d,h\} = \{0,c\}$

$\sim\{g,1\} = \{0,c\}$



$\sim\{0\} = \{h,1\}$

$\sim\{a\} = \{h,1\}$

$\sim\{b\} = \{c\}$

$\sim\{c\} = \{d,g\}$

$\sim\{d,g\} = \{c\}$

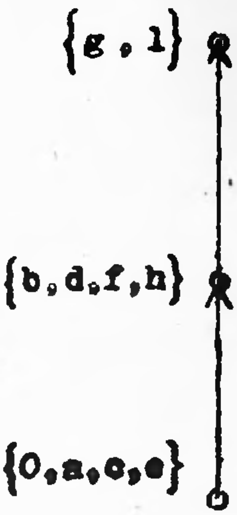
$\sim\{e\} = \{d,g\}$

$\sim\{f\} = \{0\}$

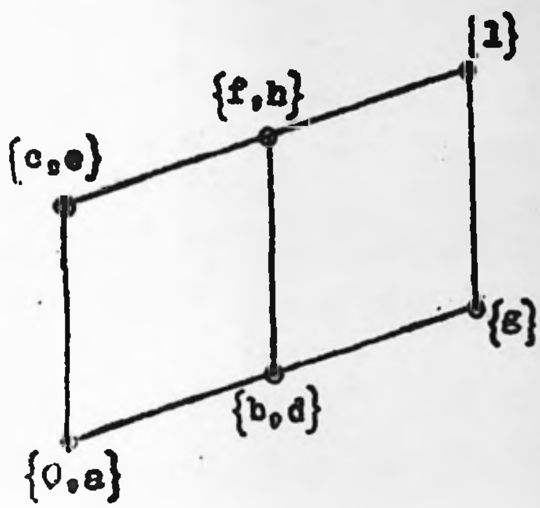
$\sim\{h,1\} = \{0\}$

Os núcleos dos respectivos homomorfismos são os sistemas dedutivos $F(d)$, $F(g)$ e $F(h)$.

Finalmente, as famílias $\{F(b), F(g)\}$ e $\{F(b), F(c), F(g)\}$ são constituidas por filtros primos fortes, gerando como imagens homomorfas as N-álgebras fortes seguintes



$$-\{0,a,c,e\} = \{g,1\}$$
$$-\{b,d,f,h\} = \{0,a,c,e\}$$
$$-\{g,1\} = \{0,a,c,e\}$$



$$-\{0,a\} = \{1\}$$
$$-\{b,d\} = \{c,e\}$$
$$-\{c,e\} = \{g\}$$
$$-\{f,h\} = \{0,a\}$$
$$-\{g\} = \{c,e\}$$
$$-\{1\} = \{0,a\}$$

Os núcleos dos respectivos homomorfismos canônicos são os sistemas dedutivos fortes $F(g)$ e $F(1)$, sendo êste último o radical forte da M-álgebra considerada.

15. M-álgebras finitas

Vimos anteriormente como os conjuntos M-ordenados estão intimamente relacionados às M-álgebras. Vejamos agora como essa relação se torna em equivalência no caso finito.

Recordemos que a relação fundamental entre a aplicação φ e o complemento fraco $-$ em uma M-álgebra A é

$$-x \in P \Longleftrightarrow x \notin \varphi(P) \qquad (1)$$

onde $x \in A$ e P é filtro primo de A.

Seja agora A uma M-álgebra finita. Um elemento p de A diz-se primo se $p \neq 0$ e

$$p \leq x \vee y \longrightarrow (p \leq x \text{ ou } p \leq y)$$

Como A é finito os filtros de A são os conjuntos $F(x)$, $x \in A$, onde

$$F(x) = \text{filtro principal gerado por } x$$
$$= \text{conjunto dos } y \in A \text{ tais que } x \leq y$$

e os filtros primos de A coincidem com os conjuntos $F(p)$ onde p é primo.

Seja P o conjunto dos elementos primos de A. P com a ordem induzida pela ordem de A é um conjunto parcialmente ordenado e, se transportarmos a aplicação φ para P obtemos uma função $\psi : P \to P$ dada por

$$F(\psi(p)) = \varphi(F(p))$$

ou seja, $\psi(p)$ é o gerador do filtro primo $\varphi(F(p))$. Assim sendo, $\langle P, \leq, \psi \rangle$ é um conjunto M-ordenado, dito "determinado por A".

Passando de filtros para elementos e de φ para ψ, observemos que a relação (1) acima se torna

$$p \leq -x \iff \psi(p) \nleq x \qquad (2)$$

de modo que podemos definir ψ e $-$ um a partir do outro da seguinte maneira

$$\psi(p) = \bigwedge_{p \nleq -x} x \qquad x \in A,\ p \in P$$

$$-x = \bigvee_{\psi(p) \nleq x} p \qquad x \in A,\ p \in P$$

(não havendo $p \in P$ tal que $\psi(p) \nleq x$, $-x = 0$)

Passemos a ver como, reciprocamente, um conjunto M-ordenado <u>finito</u> $\langle P, \leq, \psi \rangle$ determina univocamente uma M-álgebra que tenha P como o conjunto M-ordenado dos primos. Para isso definamos uma parte <u>normal</u> N de P como um sub-conjunto de P tal que

$$(p \in N \text{ e } q \leq p) \to q \in N$$

e façamos $\mathcal{A}$ o conjunto das partes normais de P. Claramente $\emptyset \in \mathcal{A}$, $P \in \mathcal{A}$ e, se $M \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{A}$ então $M \cap N \in \mathcal{A}$ e $M \cup N \in \mathcal{A}$. Pondo

$$-N = \complement_P\, \psi^{-1}(N) \qquad N \in \mathcal{A}$$

$-N \in \mathcal{Q}$ pois se $p \in -N$ e $q \leq p$ temos que $\psi(p) \notin N$ e $\psi(p) \leq \psi(q)$ donde $\psi(q) \notin N$ e $q \in -N$. Portanto

$$\langle \mathcal{Q}, \cap, \cup, -, \emptyset, P \rangle$$

é um M-anel de conjuntos e, portanto, uma M-álgebra.

Se $p \in P$, $N(p)$ representará a parte normal constituída dos $q \in P$ tais que $q \leq p$. É fácil ver que os elementos primos de $\mathcal{Q}$ são êsses conjuntos $N(p)$ e que a correspondência

$$p \to N(p)$$

é um isomorfismo de ordem entre $\langle P, \leq \rangle$ e êsses conjuntos $N(p)$ com a relação $\subset$. Além disso, por (2) acima

$$\psi(N(p)) \subset M \Leftrightarrow N(p) \not\subset -M$$

$$\Leftrightarrow N(p) \not\subset \complement_P \psi^{-1}(M)$$

$$\Leftrightarrow p \in \psi^{-1}(M)$$

$$\Leftrightarrow N(\psi(p)) \subset M$$

onde $M \in \mathcal{Q}$, o que mostra que

$$N(\psi(p)) = \psi(N(p))$$

e que $\langle P, \leq, \psi \rangle$ é, a menos de isomorfismo, o conjunto M-ordenado determinado pela M-álgebra $\langle \mathcal{Q}, \cap, \cup, -, \emptyset, P \rangle$.

Suponhamos agora que a M-álgebra A também determine P como conjunto M-ordenado dos primos e mostremos que A e $\mathcal{Q}$ são isomorfas. Para isso definamos $f: \mathcal{Q} \to A$ fazendo

$$f(\emptyset) = 0$$
$$f(N) = f(\{p_1, \ldots, p_m\}) = p_1 \vee \ldots \vee p_m \qquad N \in \mathcal{Q}$$

f é biunívoca, pois se

$$M = \{p_1 \ldots p_m\} \qquad N = \{q_1 \ldots q_n\}$$

$$f(M) = f(N)$$

então

$$p_1 \vee \dots \vee p_m = q_1 \vee \dots \vee q_n$$

e, como p_i é primo

$$p_i \leq q_1 \vee \dots \vee q_n$$

implica

$$p_i \leq q_j$$

para algum q_j, donde, como N é normal

$$p_i \in N$$

Logo, $M \subset N$. Anàlogamente, $N \subset M$. f é "sôbre" pois se $x \in A$ e N = conjunto dos $p \in P$ tais que $p \leq x$ temos que $N \in \mathfrak{A}$ e $f(N) = x$.

Claramente $f(P) = 1$ e, notando que

$$p \leq f(N) \Leftrightarrow p \in N \qquad p \in P, N \in \mathfrak{A}$$

obtemos

$$p \leq f(M \cap N) \Leftrightarrow p \in M \cap N$$

$$\Leftrightarrow p \leq f(M) \text{ e } p \leq f(N)$$

$$\Leftrightarrow p \leq f(M) \wedge f(N)$$

donde $f(M \cap N) = f(M) \wedge f(N)$. De maneira semelhante vemos que

$$f(M \cup N) = f(M) \vee f(N)$$

Resta-nos mostrar que

$$f(-N) = -f(N)$$

o que faremos da seguinte maneira

$$p \leq f(-N) \Leftrightarrow p \in -N$$

$$\Leftrightarrow p \in C_P\, \psi^{-1}(N)$$

$$\Leftrightarrow \psi(p) \notin N$$

$$\Leftrightarrow \psi(p) \not\leq f(N)$$

$$\Leftrightarrow p \leq -f(N)$$

Vejamos agora como caracterizar M-álgebras finitas particulares. A é M-álgebra finita regular se e só se

$$F(p) \subset \varphi^2(F(p)) \text{ para todo } p \text{ primo}$$

ou seja se e só se

$$F(p) \subset F(\psi^2(p)).$$

o que é equivalente a

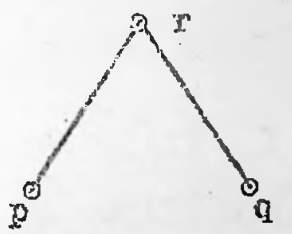
$$\psi^2(p) \leq p$$

Analogamente podemos tratar os outros casos estudados obtendo

M-álgebra finita particular	Condição adicional para o conjunto M-ordenado
regular (dual)	$\psi^2(p) \leq p \quad (p \leq \psi^2(p))$
simétrica	$\psi^2(p) = p$
forte (dual)	$\psi(p) \leq p \quad (p \leq \psi(p))$
booleana	$\psi(p) = p$

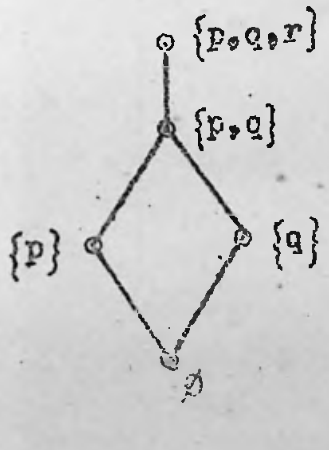
Os adjetivos correspondentes podem ser aplicados aos conjuntos M-ordenados com as respectivas condições adicionais. O exemplo abaixo é regular-dual

Conjunto M-ordenado



$$\psi(p) = r$$
$$\psi(q) = p$$
$$\psi(r) = p$$

M-álgebra



$$-\emptyset = \{p,q,r\}$$
$$-\{p\} = \{p\}$$
$$-\{q\} = \{p,q,r\}$$
$$-\{p,q\} = \{p\}$$
$$-\{p,q,r\} = \emptyset$$

Observemos que um conjunto M-ordenado booleano por ter $\psi(p) = p$ deve ser tal que

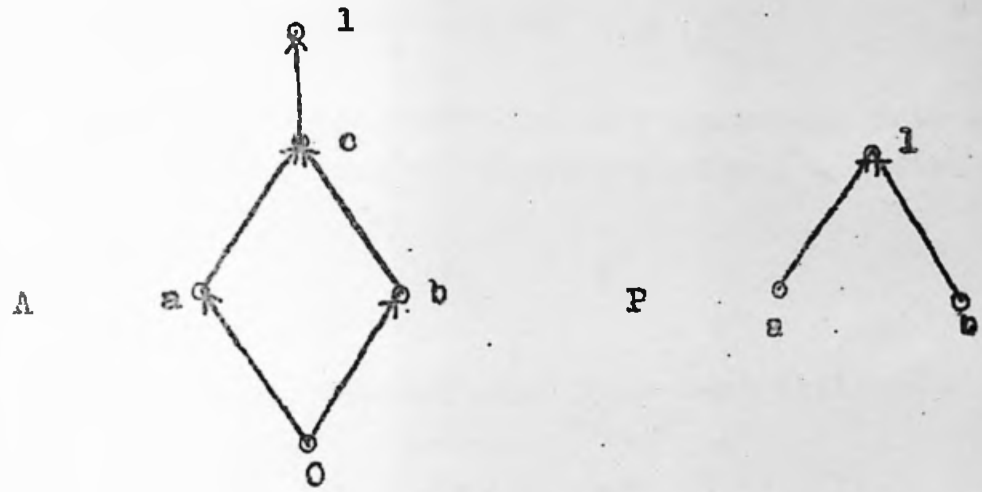
$$p \leq q \leftrightarrow p = q$$

ou seja seus elementos devem ser incomparáveis dois a dois.

Se A é um reticulado distributivo finito e P o conjunto de seus elementos primos podemos determinar todos os complementos fracos que tornam A M-álgebra por meio de aplicações $\psi : P \to P$ que tornem P conjunto M-ordenado. De fato, pelo que vimos êsses complementos devem ser definidos a partir de ψ por

$$-x = \bigvee_{\psi(p) \nleq x} p \qquad x \in A,\ p \in P$$

Como exemplo, vejamos como determinar as M-álgebras definidas em



ψ	$-$	tipo
$\psi(a) = \psi(b) = \psi(1) = 1$	$-a = -b = -c = 1$	forte-dual
$\psi(a) = \psi(b) = \psi(1) = a$	$-a = 0,\ -b = 1,\ -c = 0$	$\psi(p) = \psi^2(p)$; $-x \wedge --x = 0,\ -x \vee --x$
análogo, trocando a e b		
$\psi(a) = 1\ \psi(b) = a \quad \psi(1) = a$	$-a = a,\ -b = 1,\ -c = a$	regular-dual
análogo, trocando a e b		
$\psi(a) = \psi(b) = 1,\ \psi(1) = a$	$-a = a,\ -b = 1,\ -c = 0$	p comparável com ψ; $x \wedge -x \leq y \vee -y$
análogo trocando a e b		

Mesmo no caso em que $\langle P, \leq, \psi \rangle$ é um conjunto M-ordenado qualquer (não necessàriamente finito) podemos realizar a construção acima do M-anel de conjuntos $\mathcal{A}$ obtendo assim uma M-álgebra $\langle \mathcal{A}, \cap, \cup, -, \emptyset, P\rangle$ onde todos os $N(p)$ são elementos primos. Mas em geral podem haver outros elementos primos além dos $N(p)$ e perdemos portanto o isomorfismo entre o conjunto M-ordenado dos primos de $\mathcal{A}$ e P. Além disso não podemos garantir que tôda M-álgebra seja assim gerada.

A caracterização de M-álgebras simétricas finitas por conjuntos M-ordenados é estudada em [6].

16. Homomorfismos Finitos

Seja A uma M-álgebra, $\mathcal{G}$ a família dos filtros primos de A e $\mathcal{Q}$ uma parte finita de $\mathcal{G}$ invariante para φ. Então

$$\langle \mathcal{Q}, \supset, \varphi \rangle$$

é um conjunto M-ordenado finito e portanto, pelo método do número anterior, gera uma M-álgebra finita Γ. Mostremos que

$$A/\mathcal{Q} \cong \Gamma$$

onde o $\cong$ indica isomorfismo. Para isso definamos

$$f : A/\mathcal{Q} \rightarrow \Gamma$$

fazendo $f(X)$ = conjunto dos filtros primos P de $\mathcal{Q}$ tais que $X \subset P$, onde $X \in A/\mathcal{Q}$. Claramente $f(X)$ é uma parte normal de $\mathcal{Q}$ e portanto $f(X) \in \Gamma$.

Se $f(X) = f(Y)$ então todo filtro de $\mathcal{Q}$ que contém X contém Y e reciprocamente, donde $X = Y$:

Seja $\mathcal{N} \in \Gamma$ e façamos

$$X_{\mathcal{N}} = \bigcap_{P \in \mathcal{N}} P - \bigcup_{P \in \mathcal{Q} - \mathcal{N}} P$$

onde $\bigcap_{P \in \emptyset} P = A$ e $\bigcup_{P \in \emptyset} P = \emptyset$. Vejamos que $X_{\mathcal{N}}$ é uma classe de equivalência segundo $\mathcal{Q}$. $X_{\emptyset}$ é a classe a que 0 pertence e $X_{\mathcal{Q}}$ a classe contendo 1. Nos outros casos $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q} - \mathcal{N}$ são não vazios e escrevemos

$$\mathcal{N} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$$

$$\mathcal{Q} - \mathcal{N} = \{P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+r}\}$$

com os P_i distintos.

Mostremos que

$$P_1 \cap \ldots \cap P_n \subset P_{n+1} \cup \ldots \cup P_{n+r}$$

acarreta

$$P_i \subset P_{n+j} \quad \text{para algum } (i, j)$$

Pois caso contrário, para cada (i, j) existe x_{ij} com

$$x_{ij} \in P_i \quad \text{e} \quad x_{ij} \notin P_{n+j}$$

e de

$$x_1 = x_{11} \wedge x_{12} \wedge \ldots \wedge x_{1r} \in P_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_{n1} \wedge x_{n2} \wedge \ldots \wedge x_{nr} \in P_n$$

tiramos que

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \in P_1 \cap P_2 \cap \ldots$$

$$\ldots \cap P_n \subset P_{n+1} \cup P_{n+2} \cup \ldots \cup P_{n+r}$$

$$x_1 \vee \ldots \vee x_n \in P_{n+j} \quad \text{para algum } j$$

donde, como P_{n+j} é primo

$$x_i \in P_{n+j} \quad \text{para algum } i$$

$$x_{ij} \in P_{n+j}$$

absurdo.

Logo, se $P_1 \cap \ldots \cap P_n \subset P_{n+1} \cup \ldots \cup P_{n+r}$ então $P_i \subset P_{n+j}$ para algum (i, j). Mas daí, como $\mathcal{N}$ é normal e $P_i \in \mathcal{N}$ teríamos que $P_{n+j} \in \mathcal{N}$ absurdo.

Assim sendo

$$P_1 \cap \ldots \cap P_n \not\subset P_{n+1} \cup \ldots \cup P_{n+r}$$

e

$$X_{\mathcal{N}} \neq \emptyset$$

Tomemos $x \in X_{\mathcal{N}}$; $y \in X_{\mathcal{N}}$ se e só se $y \equiv x(\Omega)$, donde $X_{\mathcal{N}}$ é classe de equivalência segundo Ω e

$$f(X_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}$$

Vemos portanto que f é uma aplicação biunívoca de A/Ω sôbre Γ. Ademais

$$\begin{aligned} P \in f(X \wedge Y) &\Longleftrightarrow X \wedge Y \subset P \\ &\Longleftrightarrow X \subset P \text{ e } Y \subset P \\ &\Longleftrightarrow P \in f(X) \cap f(Y) \end{aligned}$$

para todo $P \in \Omega$, donde

$$f(X \wedge Y) = f(X) \cap f(Y)$$

$$\begin{aligned} P \in f(X \vee Y) &\Longleftrightarrow X \vee Y \in P \\ &\Longleftrightarrow X \subset P \text{ ou } Y \subset P \quad \text{pois } P \text{ é primo} \\ &\Longleftrightarrow P \in f(X) \cup f(Y) \end{aligned}$$

para todo $P \in \Omega$, donde

$$f(X \vee Y) = f(X) \cup f(Y)$$

$$\begin{aligned} P \in f(-X) &\Longleftrightarrow -X \subset P \\ &\Longleftrightarrow -x \in P, \text{ onde } x \in X \\ &\Longleftrightarrow P \in \mathfrak{S}_{-x} \\ &\Longleftrightarrow P \in C_{\mathfrak{S}}\varphi^{-1}(\mathfrak{S}_x) \\ &\Longleftrightarrow P \in C_{\mathfrak{S}}\varphi^{-1}(f(X)) \\ &\Longleftrightarrow P \in -f(X) \end{aligned}$$

para todo $P \in \Omega$, donde

$$f(-X) = -f(X)$$

Assim sendo, uma imagem homomorfa finita da M-álgebra A é obtida tomando uma parte finita Ω de $\mathfrak{S}$ invariante para φ e gerando pelo método do número anterior uma M-álgebra Γ finita a partir do conjunto M-ordenado finito $\langle \mathcal{Q}, \supset, \psi \rangle$. Γ é então isomorfa a $A/_{\mathcal{Q}}$.

Reciprocamente, se B é imagem homomorfa finita de A pelo homomorfismo h então

$$A/_{\mathcal{G}_h} \cong B$$

e o conjunto M-ordenado $\langle \mathcal{G}_h, \supset, \varphi \rangle$ é isomorfo ao conjunto M-ordenado finito dos elementos primos de B.

Se $\mathcal{Q}$ é tal que

$$A/_{\mathcal{Q}} \cong B$$

então tanto $\mathcal{Q}$ como $\mathcal{G}_h$ são isomorfos ao conjunto M-ordenado dos elementos primos de B e, como $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}_h$, temos que $\mathcal{Q} = \mathcal{G}_h$.

Temos portanto uma correspondência biunívoca natural entre as imagens homomorfas finitas de A e os conjuntos M-ordenados finitos $\langle \mathcal{Q}, \supset, \varphi \rangle$, onde $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}$. Podemos também ver essa correspondência assim:

Se h é um homomorfismo de uma M-álgebra em outra, êsse homomorfismo induz um isomorfismo g do conjunto M-ordenado da álgebra imagem sôbre uma parte do conjunto M-ordenado da álgebra de partida. Reciprocamente, se $\langle R, \leq, \Psi \rangle$ é um conjunto M-ordenado finito e g um isomorfismo de R sôbre uma parte de $\mathcal{G}$ (onde $\mathcal{G}$ é o conjunto M-ordenado dos filtros primos de uma M-álgebra A) então o homomorfismo h de A sôbre a M-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por R e que induz g é o prolongamento a $\mathcal{B}$ do homomorfismo canônico de A sôbre $A/_{g(R)}$ e é dado por

$$h(x) = \text{conjunto dos } r \in R \text{ tais que } x \in g(r)$$

g e h estão relacionados por

$$r \in h(x) \Longleftrightarrow x \in g(r) \qquad r \in R \text{ e } x \in A$$

$$h(x) = g^{-1})(\mathcal{G}_x)$$

$$g(r) = h^{-1}\,[F(N(r))]$$

ou, identificando r com N(r)

$$r \leq h(x) \Longleftrightarrow x \in g(r)$$

$$h(x) = \bigvee_{x \in g(r)} r$$

$$g(r) = h^{-1}(F(r))$$

Caso A seja finita, A é determinada pelo conjunto M-ordenado $\langle P, \leq, \psi \rangle$ e g pode ser dado como um isomorfismo do conjunto M-ordenado finito $\langle R, \leq, \psi \rangle$ sôbre uma parte do conjunto M-ordenado $\langle P, \leq, \psi \rangle$. Temos então

$$h(\{p_1 \ldots p_m\}) = g^{-1}(\{p_1 \ldots p_m\}) \qquad p_i \in P$$

$$r \in h(\{p_1 \ldots p_m\}) \Longleftrightarrow g(r) \in \{p_1 \ldots p_m\} \qquad r \in R$$

ou, fazendo o tipo de identificação anterior

$$r \leq h(x) \Longleftrightarrow g(r) \leq x \qquad r \in R, x \in A$$

$$h(x) = \bigvee_{g(r) \leq x} r$$

$$g(r) = \bigwedge_{r \leq h(x)} x$$

Assim sendo, estudar homomorfismos de M-álgebras finitas equivale a estudar isomorfismos "em" de conjuntos M-ordenados finitos.

17. Sub-Álgebra gerada por uma parte

Seja $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ um reticulado distributivo com primeiro (0) e último(1) elemento. Uma parte B de A é um <u>sub-reticulado de A</u> (com primeiro e último elemento) se B contém 0 e 1 e é fechado para $\wedge$ e $\vee$. É claro que B com as operações induzidas é um reticulado distributivo com primeiro e último elemento. Se S é um sub-conjunto de A, o <u>sub-reticulado de A gerado por S</u> é a intersecção dos sub-reticulados de A que contém S. Vamos determinar o sub-reticulado gerado por S. Primeiro construamos o conjunto I(S) caracterizado por

$x \in I(S)$ se e só se $x = 1$ ou existem $s_1, \ldots, s_n \in S$

Depois construímos $U[I(S)]$ determinado por

$$x \in U[I(S)] \text{ se e só se } x = 0 \text{ ou existem } b_1, \ldots, b_n \in I(S)$$

$$\text{tais que } x = b_1 \vee \ldots \vee b_n \quad (n \geq 1)$$

Mostremos que $B = U[I(S)]$ é o sub-reticulado de A gerado por S. Claramente temos que $S \subset I(S) \subset B$ e $0 \in B$, $1 \in B$. Se $x, y \in B$ e um dêles é 0, $x \wedge y \in B$; se nenhum é 0 então

$$x = x_1 \vee \ldots \vee x_m \qquad x_i \in I(S)$$

$$y = y_1 \vee \ldots \vee y_n \qquad y_j \in I(S)$$

donde

$$x \wedge y = (x_1 \vee \ldots \vee x_m) \wedge (y_1 \vee \ldots \vee y_n)$$

$$= (x_1 \wedge y_1) \vee \ldots \vee (x_1 \wedge y_n) \vee \ldots \vee (x_m \wedge y_1) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee (x_m \wedge y_n)$$

$x_i, y_j \in I(S)$; se um dêles é 1, $x_i \wedge y_j \in I(S)$; se nenhum dêles é 1

$$x_i = x_{i1} \wedge \ldots \wedge x_{ip_i} \qquad x_{ik} \in S$$

$$y_j = y_{j1} \wedge \ldots \wedge y_{jq_j} \qquad y_{jl} \in S$$

donde

$$x_i \wedge y_j = x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{p_i}} \wedge y_{j_1} \wedge \ldots \wedge y_{j_{q_j}} \in I(S)$$

e portanto $x \wedge y \in B$. Por outro lado, se um dos x, y é 0 então $x \vee y \in B$ e, se nenhum é 0

$$x \vee y = x_1 \vee \ldots \vee x_m \vee y_1 \vee \ldots \vee y_n \qquad x_i, y_i \in I(S)$$

donde $x \vee y \in B$. Assim sendo, B é um sub-reticulado de A contendo S e ademais todo sub-reticulado de A que contém S contém B. B é portanto o sub-reticulado de A gerado por S.

Seja agora $\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$ uma M-álgebra e $S \subset A$. <u>A sub-álgebra de A gerada por S</u> é a interseção de tôdas as sub-álgebras de A que contém S. Para determinar a sub-álgebra de A gerada por S façamos

$$-S = \text{conjunto dos } -a \text{ onde } a \in S$$

$$- -S = \text{conjunto dos } --a \text{ onde } a \in S$$

$$T = S \cup -S \cup --S$$

e B o sub-reticulado de A gerado por T. Mostremos que B é fechado para $-$ e portanto sub-álgebra de A. Se $x \in B$ e $x = 0$ então $-x = 1 \in B$; se $x \neq 0$

$$x = x_1 \vee \ldots \vee x_n \qquad x_i \in I(T)$$

Se algum dos $x_i = 1$, $x = 1$, $-x = 0 \in B$; se nenhum dos $x_i = 1$

$$x = (x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1p_1}) \vee \ldots \vee (x_{n1} \wedge \ldots \wedge x_{np_n}) \qquad x_{ij} \in T$$

$$-x = (-x_{11} \vee \ldots \vee -x_{1p_1}) \wedge \ldots \wedge (-x_{n1} \vee \ldots \vee -x_{np_n})$$

$$= (-x_{11} \wedge \ldots \wedge -x_{n1}) \vee \ldots \vee (-x_{1p_1} \wedge \ldots \wedge -x_{np_n})$$

Mas se x_{ij} está em T também $-x_{ij}$ está em T donde $-x$ está em B.

Assim sendo, B é sub-álgebra de A e, como tôda a sub-álgebra de A que contém S contém B, segue-se que B é a sub-álgebra de A gerada por S.

18. <u>M-álgebra gerada por uma família de conjuntos M-ordenados finitos.</u>

Seja $\langle P_i, \leq_i, \psi_i \rangle$, $i \in I$, uma família de conjuntos M- ordenados finitos. Seja

$$P = \prod_{i \in I} P_i$$

e definamos

$$(p_i)_{i \in I} \leq (q_i)_{i \in I} \iff p_i \leq_i q_i \text{ para todo } i \in I$$

$$\psi((p_i)_{i \in I}) = (\psi_i(p_i))_{i \in I}$$

Com isso $\langle P, \leq, \psi \rangle$ torna-se um conjunto M-ordenado.

Se $i \in I$, seja $\langle \mathcal{N}_i, \cap, \cup, -_i, \emptyset, P_i \rangle$ a M-álgebra das partes normais de P_i, onde $\sim_i N = \complement_{P_i} \psi_i^{-1}(N)$, $N \in \mathcal{N}_i$.

$\langle \mathcal{N}, \cap, \cup, -, \emptyset, P \rangle$ será a M-álgebra das partes normais de P, sendo $-N = \complement_P \psi^{-1}(N)$, $N \in \mathcal{N}$.

Sejam $i_1, \ldots, i_n$ elementos distintos de $I (n \geq 1)$ e $p_1 \in P_{i_1}, \ldots, p_n \in P_{i_n}$. Definiremos

$N(p_1, \ldots, p_n)_{i_1 \ldots i_n}$ = conjunto dos $(q_i)_{i \in I} \in P$ tais

que $q_{i_1} \leq_{i_1} p_1, \ldots, q_{i_n} \leq_{i_n} p_n$

$= \prod_{i \in I} Q_i$, onde $Q_{i_1} = N_{i_1}(p_1), \ldots$

$\ldots, Q_{i_n} = N_{i_n}(p_n)$ e $Q_j = P_j$

para todo $j \neq i_1, \ldots, i_n$.

sendo $N_{i_1}(p_1)$, por exemplo, o conjunto dos $q \in P_{i_1}$, tais que $q \leq_{i_1} p_1$.

Notemos que

$$N(p_1, \ldots, p_n)_{i_1 \ldots i_n} = N(p_1)_{i_1} \cap \ldots \cap N(p_n)_{i_n}$$

Uma parte N de P diz-se <u>normal elementar</u> se existem $i_1, \ldots, i_n \in I (n \geq 1)$ distintos e $p_1 \in P_{i_1}, \ldots, p_n \in P_{i_n}$ tais que

$$N = N(p_1 \ldots p_n)_{i_1 \ldots i_n}$$

Uma parte N de P diz-se <u>finitamente normal</u> se $N = \emptyset$ ou existem $N_1, \ldots, N_m (m \geq 1)$ normais elementares tais que

$$N = N_1 \cup \ldots \cup N_m$$

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das partes finitamente normais de P e $\mathcal{B}$ a sub-álgebra de $\mathcal{N}$ gerada pelos elementos da forma $N(p)_i$, i variando em I e p em P_i. Para mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ basta notar que

$$- [N(p)_i] = \emptyset \quad \text{ou}$$

$$- [N(p)_i] = N(q_1)_i \cup \dots \cup N(q_n)_i$$

onde $q_1, \dots, q_n$ são elementos de P_i tais que

$$N_i(p) = N_i(q_1) \cup \dots \cup N_i(q_n)$$

$$\Rightarrow - [N(p)_i] = - [N(q_1)_i \cup \dots \cup N(q_n)_i]$$

$$= - N(q_1)_i \cap \dots \cap - N(q_n)_i$$

e também que

$$N(p)_i \cap N(q)_i = \emptyset \quad \text{ou}$$

$$N(p)_i \cap N(q)_i = N(r_1)_i \cup \dots \cup N(r_n)_i$$

sendo $r_1, \dots, r_n$ os elementos de P_i tais que

$$N_i(p) \cap N_i(q) = N_i(r_1) \cup \dots \cup N_i(r_n)$$

Diremos que $\mathcal{A}$ é a <u>M-álgebra gerada pela família $(P_i)_{i \in I}$</u>. Se $\mathcal{A}_i$ é a sub-álgebra de $\mathcal{A}$ formada por $\emptyset$ e pelos elementos da forma

$$N(p_1)_i \cup \dots \cup N(p_n)_i \qquad p_1, \dots, p_n \in P_i$$

então $\mathcal{A}_i$ é isomorfa a $\mathcal{N}_i$, sendo o isomorfismo dado por

$$\emptyset \longleftrightarrow \emptyset$$

$$N(p_1)_i \cup \dots \cup N(p_n)_i \longleftrightarrow N_i(p_1) \cup \dots \cup N_i(p_n)$$

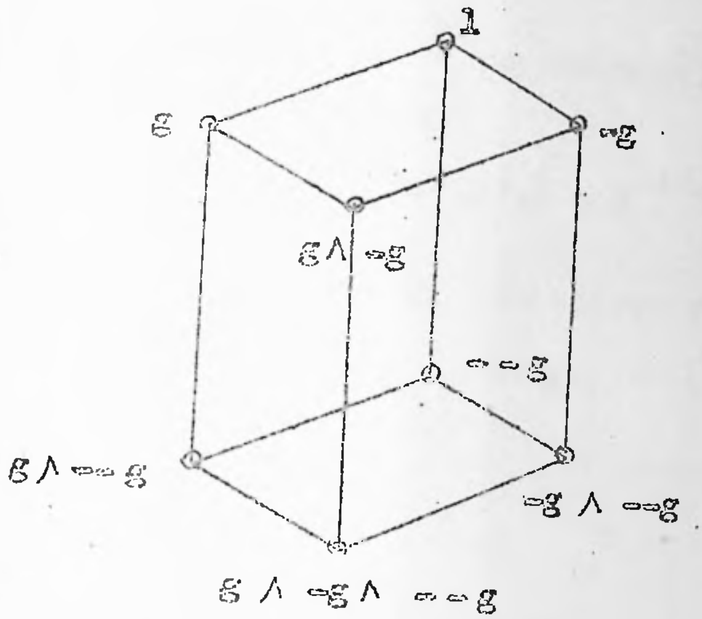
Assim sendo, $\mathcal{A}$ tem sub-álgebras $\mathcal{A}_i$ isomorfas a cada $\mathcal{N}_i$ e é gerada em $\mathcal{N}$ por essas sub-álgebras. Ademais,

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \{\emptyset, P\} \qquad \text{para } i \neq j$$

Se I é finito, $\mathcal{A} = \mathcal{N}$ é a M-álgebra das partes normais do conjunto M-ordenado finito P.

19. M-álgebras livres

Seja α um cardinal diferente de 0 e determinemos a M-álgebra livre com α geradores livres. Para isso seja I um conjunto de potência α e consideremos a família $\langle P_i, \leq_i, \psi_i \rangle$, $i \in I$, de conjuntos M-ordenados, onde cada $\langle P_i, \leq_i, \psi_i \rangle$ coincide com o conjunto M-ordenado abaixo



$$\psi(g \wedge \sim g \wedge \sim\sim g) = 1$$
$$\psi(\sim g \wedge \sim\sim g) = 1$$
$$\psi(g \wedge \sim\sim g) = g \wedge \sim\sim g$$
$$\psi(g \wedge \sim g) = \sim g$$
$$\psi(\sim\sim g) = g \wedge \sim\sim g$$
$$\psi(\sim g) = \sim g$$
$$\psi(g) = g \wedge \sim g \wedge \sim\sim g$$
$$\psi(1) = g \wedge \sim g \wedge \sim\sim$$

Seja $\mathcal{Q}$ a M-álgebra gerada pela família $(P_i)_{i \in I}$ e mostremos que $\mathcal{Q}$ é a M-álgebra livre com α geradores livres. Primeiro observemos que

$$\sim [N(g)_i] = N(\sim g)_i$$

$$\sim\sim [N(g)_i] = N(\sim\sim g)_i$$

donde $\mathcal{Q}$ é gerada pelos elementos da forma $N(g)_i$, $i \in I$, que são os α geradores livres de $\mathcal{Q}$.

Seja $\mathcal{B}$ uma M-álgebra arbitrária que, sem perda de generalidade, podemos supor ser um M-anel de sub-conjuntos de E com uma aplicação $\varphi : E \to E$ tal que $\varphi^3 = \varphi$. Seja f uma aplicação de I em $\mathcal{B}$ e vamos definir $k : E \to P = \prod_{i \in I} P_i$,

$$k(x) = (k_i(x))_{i \in I}, \quad x \in E$$

de modo a satisfazer

$$k_1(x) \leq g \longleftrightarrow x \in f(i)$$

$$k_2(x) \leq -g \longleftrightarrow x \in -f(i)$$

$$k_1(x) \leq --g \longleftrightarrow x \in --f(i)$$

o que determina univocamente a aplicação k. Finalmente definamos

$$h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

fazendo

$$h(N) = k^{-1}(N) \quad , \; N \in \mathcal{A}$$

e mostremos que h é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ sôbre uma parte de $\mathcal{B}$. Primeiro mostremos que

$$h(N(g)_i) = k^{-1}(N(g)_i) = f(i)$$

De fato, para um x arbitrário de E temos

$$x \in h(N(g)_i) \longleftrightarrow k(x) \in N(g)_i$$

$$\longleftrightarrow k_i(x) \leq g$$

$$\longleftrightarrow x \in f(i)$$

Anàlogamente

$$h(-[N(g)_i]) = h(N(-g)_i) = -f(i)$$

$$h(--[N(g)_i]) = h(N(--g)_i) = --f(i)$$

Depois, notando que

$$h(\emptyset) = \emptyset \quad , \; h(P) = E$$

$$h(M \cap N) = h(M) \cap h(N)$$

$$h(M \cup N) = h(M) \cup h(N) \qquad M, N \in \mathcal{A}$$

concluimos que h leva realmente $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Resta mostrar que

$$h(-N) = -h(N) \qquad N \in \mathcal{A}$$

Antes vejamos que

$$k_i(\varphi(x)) = \psi(k_i(x)) \quad \text{para todo } x \in E$$

$$
\begin{aligned}
k_i(-\varphi(x)) \leq g &\iff \varphi(x) \in f(i) \\
&\iff x \in \varphi^{-1}(f(i)) \\
&\iff x \not\leq -f(i) \\
&\iff k_i(x) \not\leq -g \\
&\iff \psi(k_i(x)) \leq g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_i(\varphi(x)) \leq -g &\iff \varphi(x) \in -f(i) \\
&\iff \varphi(x) \not\leq \varphi^{-1}(f(i)) \\
&\iff x \not\leq \varphi^{-1}\ \varphi^{-1}(f(i)) \\
&\iff x \not\leq --f(i) \\
&\iff k_i(x) \not\leq --g \\
&\iff \psi(k_i(x)) \leq -g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_i(\varphi(x)) \leq --g &\iff \varphi(x) \in --f(i) \\
&\iff \varphi(x) \in \varphi^{-1}\ \varphi^{-1}(f(i)) \\
&\iff x \in \varphi^{-1}(f(i)) \\
&\iff x \not\leq -f(i) \\
&\iff k_i(x) \not\leq -g \\
&\iff \psi(k_i(x)) \leq --g
\end{aligned}
$$

Com isso temos que

$$k(\varphi(x)) = (k_i(\varphi(x))_{i \in I} = (\psi(k_i(x)))_{i \in I} = \psi(k(x))$$

Por outro lado

$$h(-N) = k^{-1}(-N) = k^{-1} \complement_P \psi^{-1}(N)$$

$$-h(N) = \complement_E \varphi^{-1} k^{-1}(N)$$

donde

$$x \in h(-N) \iff x \in k^{-1} \complement_P \psi^{-1}(N)$$

$$\iff k(x) \notin \psi^{-1}(N)$$

$$\iff \psi(k(x)) \notin N$$

$$\iff k(\varphi(x)) \notin N$$

$$\iff \varphi(x) \notin k^{-1}(N)$$

$$\iff x \notin \varphi^{-1} k^{-1}(N)$$

$$\iff x \in -h(N),$$

e

$$h(-N) = -h(N)$$

Assim sendo, dada a aplicação

$$f : I \longrightarrow \mathcal{B}$$

é possível definir

$$h : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{B}$$

tal que

$$h(N(g)_i) = f(i) \qquad \text{para todo } i \in I$$

e de modo que h seja um homomorfismo de

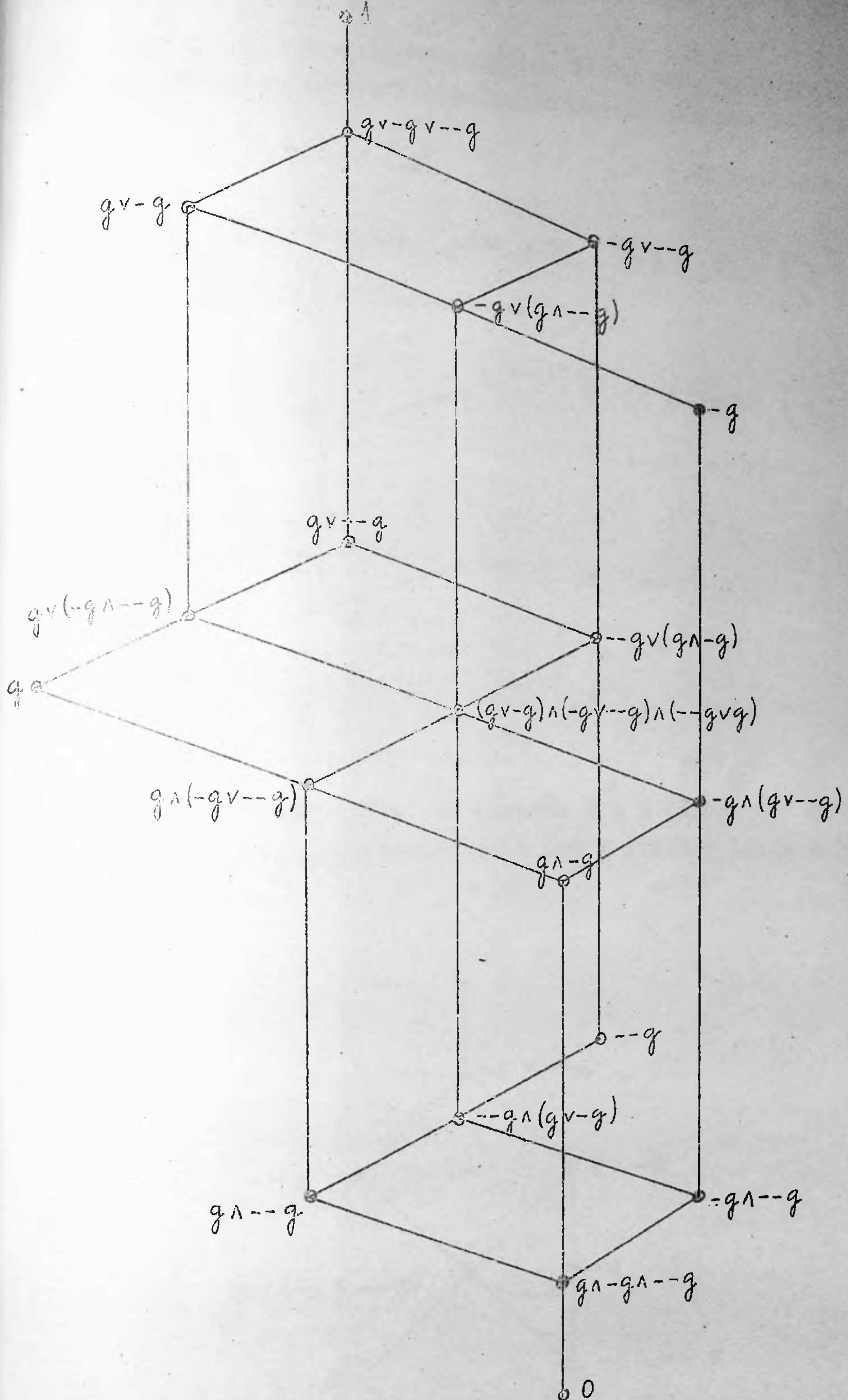
$$\langle \mathcal{Q}, \cap, \cup, -, \emptyset, P \rangle$$

sôbre uma parte de

$$\langle \mathcal{B}, \cap, \cup, -, \emptyset, E \rangle$$

ou seja, $\mathcal{Q}$ é a M-álgebra livre tendo os $N(g)_i$, $i \in I$, como seus α geradores livres.

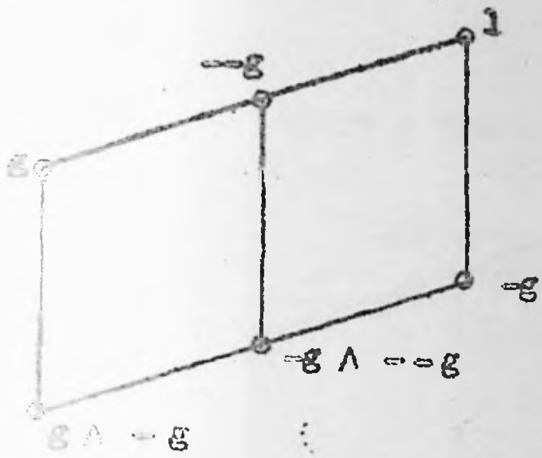
Apresentamos abaixo a M-álgebra livre com um gerador g.


1
g v -g v --g
g v -g
-g v --g
-g v (g ∧ --g)
--g
g v --g
g v (-g ∧ --g)
--g v (g ∧ -g)
g
(g v -g) ∧ (-g v --g) ∧ (--g v g)
g ∧ (-g v --g)
-g ∧ (g v --g)
g ∧ -g
--g
--g ∧ (g v -g)
g ∧ --g
-g ∧ --g
g ∧ -g ∧ --g
0

Para obter a M-álgebra regular livre com α geradores livres procedemos de maneira semelhante, agora com uma família

$\langle P_i, \leq_i, \Psi_i \rangle$, $i \in I$, I de potência α

de conjuntos M-ordenados, onde cada $\langle P_i, \leq_i, \Psi_i \rangle$ coincide com o conjunto M-ordenado abaixo



$\Psi\ (g \wedge -g) = 1$

$\Psi\ (-g \wedge --g) = 1$

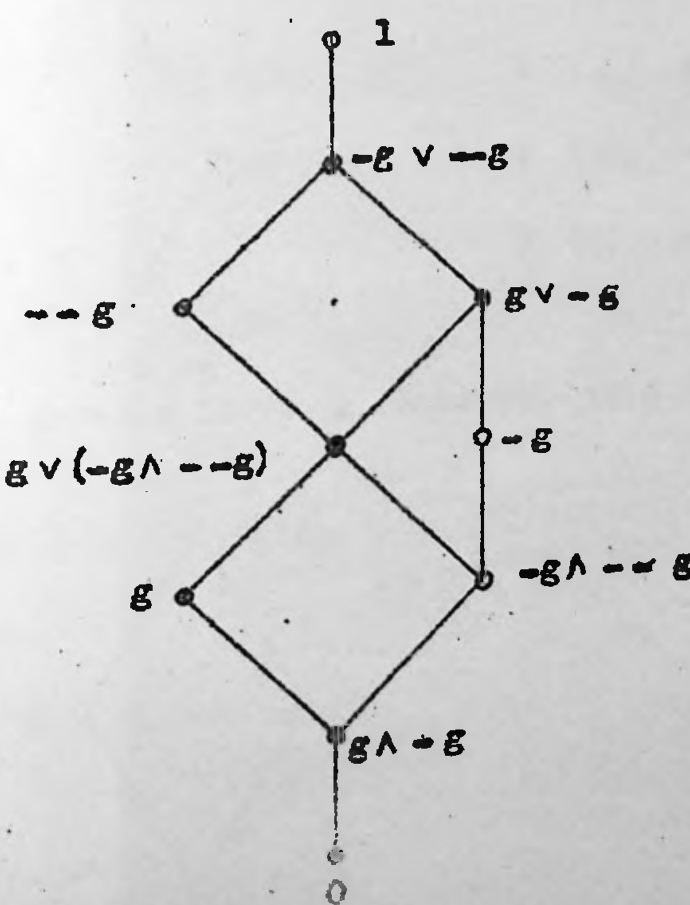
$\Psi\ (g) = g$

$\Psi\ (--g) = g$

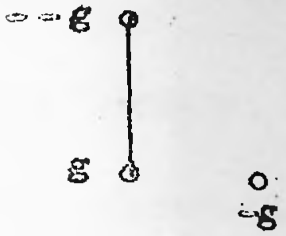
$\Psi\ (-g) = -g$

$\Psi\ (1) = g \wedge -g$

A M-álgebra regular livre em questão é a M-álgebra $\mathfrak{a}$ gerada pela família $(P_i)_{i \in I}$, sendo que a com 1 gerador livre g tem o seguinte diagrama



A M-álgebra forte livre é construída de maneira análoga usando o conjunto M-ordenado

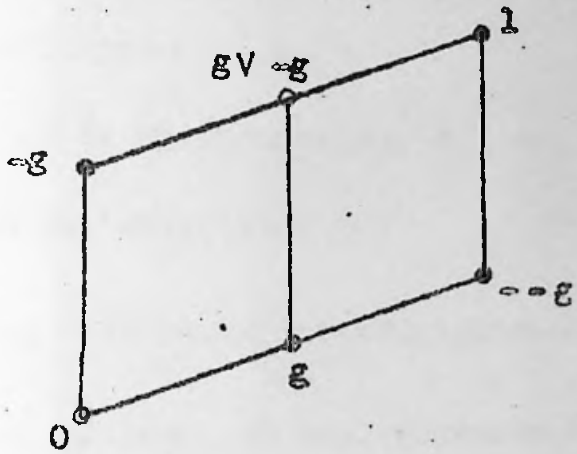


$$\Psi(g) = g$$

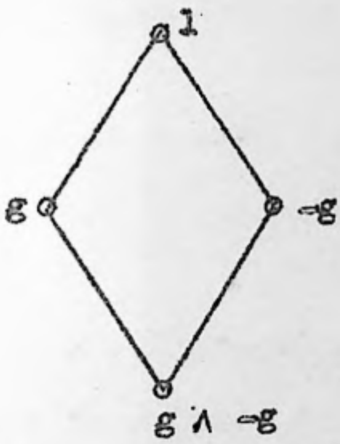
$$\Psi(\sim g) = -g$$

$$\Psi(\sim\sim g) = g$$

e a com um gerador livre g tem o diagrama



Finalmente a M-álgebra simétrica livre é obtida a partir do conjunto M-ordenado



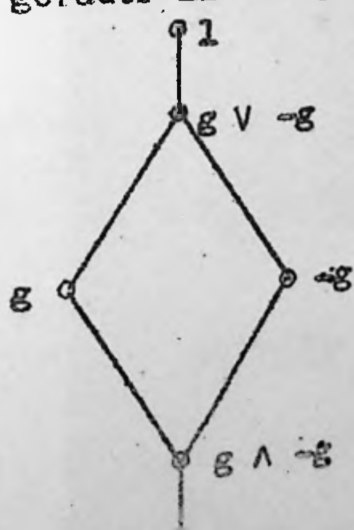
$$\Psi(g \wedge \sim g) = 1$$

$$\Psi(g) = g$$

$$\Psi(\sim g) = \sim g$$

$$\Psi(1) = g \wedge \sim g$$

sendo a com um gerador livre g descrita pelo diagrama



CAPÍTULO II

SISTEMAS FORMAIS

1. O sistema formal M

Vamos descrever agora um sistema formal que mostraremos es-tar intimamente relacionado às M-álgebras. Será o nosso sistema formal M.

Os símbolos primitivos de M são

a) variáveis: $v_1, v_2, v_3, \ldots$

b) constantes: $0, 1$

c) símbolos operacionais: $\wedge, \vee, \sim$

d) símbolo relacional: $\prec$.

As *fórmulas* são assim caracterizadas:

F1) uma variável ou uma constante é uma fórmula.

F2) se α é uma fórmula $\sim\alpha$ é uma fórmula.

F3) se α e β são fórmulas $(\alpha \wedge \beta)$ e $(\alpha \vee \beta)$ são fórmulas.

As *relações* de M são

$$\alpha \prec \beta$$

onde α e β são fórmulas.

Exemplo de relação é

$$v_1 \wedge (\sim v_1 \vee v_2) \prec v_2$$

enquanto que

$$v_1 \sim v_2 \prec v_1$$

não é relação pois

$$v_1 \sim v_2$$

não pode ser obtida pelas regras F_1, F_2 e F_3, não sendo portanto uma fórmula. Podemos nos convencer de que sabemos sempre determinar se uma expressão é ou não uma fórmula ou relação de M.

Vamos agora caracterizar certas relações, ditas <u>relações iniciais</u> e certas regras, ditas <u>regras de demonstração</u> ou simplesmente <u>regras</u>, que permitem obter relações a partir de outras relações. Essas regras são descritas abaixo na forma

$$\frac{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}{-\ -\ -\ -}$$

onde as relações acima da linha geram, pela regra em consideração, as relações no nível inferior. Eis então a caracterização simultânea das relações iniciais e regras, distribuida em nove grupos.

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ variáveis metamatemáticas

I $\quad \alpha < \alpha \qquad \dfrac{\alpha < \beta \qquad \beta < \gamma}{\alpha < \gamma}$

II $\quad \alpha < 1 \qquad 0 < \alpha$

III $\quad \alpha \wedge \beta < \alpha \qquad \dfrac{\gamma < \alpha \qquad \gamma < \beta}{\gamma < \alpha \wedge \beta}$

$\quad \alpha \wedge \beta < \beta$

IV $\quad \alpha < \alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\alpha < \gamma \qquad \beta < \gamma}{\alpha \vee \beta < \gamma}$

$\quad \beta < \alpha \vee \beta$

V $\quad \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) < (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

$\quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) < \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$

VI $\quad \sim\alpha \wedge \sim\beta < \sim(\alpha \vee \beta)$

$\quad \sim(\alpha \wedge \beta) < \sim\alpha \vee \sim\beta$

VII $\quad \sim\alpha < \sim\sim\sim\alpha \qquad \sim\sim\sim\alpha < \sim\alpha$

VIII $\quad 1 < \sim 0 \qquad \sim 1 < 0$

IX $\quad \dfrac{\alpha < \beta}{\sim\beta < \sim\alpha}$

A partir dessa caracterização damos a seguinte definição (que dá a M a sua estrutura fundamental) :

Uma sequência

$$\alpha_1 \prec \beta_1$$

$$\alpha_2 \prec \beta_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha_n \prec \beta_n$$

de relações diz-se uma demonstração se, para cada $i, 1 \leq i \leq n$, ou $\alpha_i \prec \beta_i$ é uma relação inicial ou $\alpha_i \prec \beta_i$ é obtida de relações anteriores na sequência por uma das regras.

Exemplo de demonstração :

$$v_1 \wedge v_2 \prec v_1 \qquad \text{(III)}$$

$$\sim v_1 \prec \sim (v_1 \wedge v_2) \qquad \text{(IX)}$$

$$v_1 \wedge v_2 \prec v_2 \qquad \text{(III)}$$

$$\sim v_2 \prec \sim (v_1 \wedge v_2) \qquad \text{(IX)}$$

$$\sim v_1 \vee \sim v_2 \prec \sim (v_1 \wedge v_2) \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo nessa demonstração v_1 e v_2 por fórmulas arbitrárias α e β obtemos ainda uma demonstração, o que ilustra um fato geral.

Qualquer relação

$$\alpha \prec \beta$$

que ocorre em uma demonstração diz-se uma relação demonstrável.

Diremos que α implica β se $\alpha \prec \beta$ é demonstrável.

2. Interpretações

O sistema formal é associado às M-álgebras por meio de "interpretações". Seja Γ o conjunto das fórmulas do sistema formal M; uma aplicação

$$i : \Gamma \longrightarrow A$$

onde $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ é M-álgebra, diz-se uma interpretação se

$$i(\alpha \wedge \beta) = i(\alpha) \wedge i(\beta)$$
$$i(\alpha \vee \beta) = i(\alpha) \vee i(\beta)$$
$$i(\sim \alpha) = \sim i(\alpha)$$
$$i(0) = 0$$
$$i(1) = 1$$

Claramente $i(\Gamma)$ é sub-álgebra de A.

Se V é o conjunto das variáveis de M e

$$f : V \longrightarrow A$$

uma aplicação de V em uma M-álgebra A então fica determinada uma interpretação i que prolonga f. Essa interpretação diz-se induzida por f. De fato, como as fórmulas são construidas recursivamente a partir das variáveis e constantes i será caracterizada por

$$i(v_i) = f(v_i) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$i(0) = 0$$
$$i(1) = 1$$
$$i(\alpha \wedge \beta) = i(\alpha) \wedge i(\beta)$$
$$i(\alpha \vee \beta) = i(\alpha) \vee i(\beta)$$
$$i(\sim \alpha) = i(\alpha)$$

Se i é uma interpretação e

$$\alpha_1 \prec \beta_1, \alpha_2 \prec \beta_2, \ldots, \alpha_n \prec \beta_n$$

é uma demonstração podemos mostrar que

$$i(\alpha_i) \leq i(\beta_i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Basta verificar que as relações iniciais se comportam assim e que as regras preservam êsse comportamento. Por exemplo, se $\alpha_1 \prec \beta_1$ é uma relação inicial do tipo

$$\lambda \wedge \mu \prec \lambda$$

temos que

$$i(\lambda) \wedge i(\mu) \leq i(\lambda)$$

donde

$$i(\lambda \wedge \mu) \leq i(\lambda).$$

Se $\alpha_1 \prec \beta_1$ é da forma

$$\sim \mu \prec \sim \lambda$$

e é obtida na demonstração por IX a partir de

$$\lambda \prec \mu$$

anterior na sequência e se supomos

$$i(\lambda) \leq i(\mu)$$

já verificado, temos que

$$-i(\mu) \leq -i(\lambda)$$

$$i(\sim\mu) \leq i(\sim\lambda)$$

Assim sendo, obtemos o resultado

se α implica β então $i(\alpha) \leq i(\beta)$

para tôda a interpretação i. Se também β implica α temos que $i(\alpha) = i(\beta)$ para tôda i, o que sugere dar a seguinte definição.

Se $\alpha, \beta \in \Gamma$ fazemos

$$\alpha \equiv \beta \quad (\alpha \text{ \underline{equivalente} a } \beta)$$

se α implica β e β implica α. É fácil ver que $\equiv$ é uma relação de equivalência em Γ e que

$$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha \qquad \alpha \vee \alpha \equiv \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha \qquad \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \qquad \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$$

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha \qquad \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$$

$$0 \wedge \alpha \equiv 0 \qquad 1 \vee \alpha \equiv 1$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \qquad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$\sim 0 \equiv 1 \qquad \sim 1 \equiv 0$$

$$\sim (\alpha \wedge \beta) \equiv \sim \alpha \vee \sim \beta \qquad \sim (\alpha \vee \beta) \equiv \sim \alpha \wedge \sim \beta$$

$$\sim\sim\sim \alpha \equiv \sim \alpha$$

e também que

Se $\alpha \equiv \beta$ então $\sim \alpha \equiv \sim \beta$

$$\text{Se } \begin{cases} \alpha_1 \equiv \beta_1 \\ \alpha_2 \equiv \beta_2 \end{cases} \text{ então } \begin{cases} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \beta_1 \wedge \beta_2 \\ \alpha_1 \vee \alpha_2 \equiv \beta_1 \vee \beta_2 \end{cases}$$

α implica β se e só se $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha$

se e só se $\alpha \vee \beta \equiv \beta$

Assim sendo, fazendo

$$F = \Gamma / \equiv$$

e, pondo para $\alpha \in \Gamma$

$\pi(\alpha)$ = classe de equivalência segundo $\equiv$ a qual α pertence

temos que $\pi(\alpha) \in F$ e podemos definir em F

$$\pi(\alpha) \wedge \pi(\beta) = \pi(\alpha \wedge \beta)$$

$$\pi(\alpha) \vee \pi(\beta) = \pi(\alpha \vee \beta)$$

$$- \pi(\alpha) = \pi(\sim \alpha)$$

donde

$$\langle F, \wedge, \vee, \to; \Pi(0), \Pi(1)\rangle$$

torna-se M-álgebra, dita M-álgebra associada ao sistema formal M.

A aplicação

$$\Pi : \Gamma \to F$$

dada por

$$\alpha \longmapsto \Pi(\alpha)$$

é então uma interpretação particular, dita interpretação canônica.

Como Π é interpretação temos que, se α implica β então $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$. Reciprocamente, se

$$\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$$

então

$$\Pi(\alpha) \wedge \Pi(\beta) = \Pi(\alpha)$$

$$\Pi(\alpha \wedge \beta) = \Pi(\alpha)$$

$$\alpha \wedge \beta \equiv \alpha$$

$$\alpha \text{ implica } \alpha \wedge \beta$$

donde, como

$$\alpha \wedge \beta \text{ implica } \beta$$

chegamos finalmente a que

$$\alpha \text{ implica } \beta$$

Portanto

$$\alpha \text{ implica } \beta \text{ se e só se } \Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$$

A idéia de interpretação faz pensar na idéia de relações que se comportam de maneira semelhante em tôdas as interpretações e isso sugere a seguinte definição.

A relação $\alpha < \beta$ diz-se válida se $i(\alpha) \leq i(\beta)$ para tôdas as interpretações i.

Se α implica β vimos que $i(\alpha) \leq i(\beta)$ para tôda interpretação i, donde $\alpha < \beta$ é válida. Recíprocamente, se $\alpha < \beta$ é válida então, em particular, $\Pi(\alpha) \leq \Pi(\beta)$ e portanto α implica β. Assim sendo, "relação demonstrável" e "relação válida" são conceitos equivalentes. Essa equivalência é que dá importância ao sistema formal em nosso estudo.

Podemos mostrar agora que uma relação $\alpha < \beta$ não é demonstrável dando uma interpretação i em uma M-álgebra A de modo que $i(\alpha) \not\leq i(\beta)$ em A. Para mostrar, por exemplo, que $v_1 < v_2$ não é demonstrável basta dar uma interpretação i na M-álgebra $\{0, 1\}$ tal que $i(v_1) = 1$ e $i(v_2) = 0$.

As interpretações correspondem aos homomorfismos de F. De fato, se i

$$i : \Gamma \longrightarrow A$$

é interpretação podemos definir

$$h_i : F \longrightarrow i(A)$$

por

$$h_i(\pi(\alpha)) = i(\alpha)$$

que é um homomorfismo. Recìprocamente, se

$$h : F \longrightarrow A$$

é um homomorfismo,

$$i_h : \Gamma \longrightarrow A$$

dada por

$$i_h(\alpha) = h(\pi(\alpha))$$

é uma interpretação. Admitindo homomorfismos não sobrejetores as interpretações são as aplicações $h \circ \pi$ onde h é homomorfismo de F.

Mostremos que F é a M-álgebra livre com uma infinidade enumerável de geradores livres $\pi(v_j)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. De fato, seja A M-álgebra arbitrária e

$$f : V \longrightarrow A$$

uma aplicação de V (conjunto das variáveis) em A. A restrição de π a V é uma aplicação biunívoca, pois se $\pi(v_j) = \pi(v_k)$ então $v_j \equiv v_k$, v_j implica v_k e portanto $j = k$. Seja i a interpretação induzida por f; então h_i é um homomorfismo de F sôbre $i(A)$ e

$$h_i(\bar{h}(v_j)) = \bar{f}(v_j) = f(v_j) \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

3. <u>Decisão para Relações Demonstráveis</u>

Neste número vamos descrever um processo simples para decidir se uma dada relação é demonstrável ou não.

Como preparação mostraremos que as fórmulas podem ser escritas em formas equivalentes, úteis para nossos propósitos, ditas formas normais. Isso é obtido com os seguintes resultados:

Seja α uma fórmula, então ou $\alpha \equiv 0$ ou $\alpha \equiv 1$ ou

$$\alpha \equiv (\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1p_1}) \wedge \ldots \wedge (\beta_{m1} \vee \ldots \vee \beta_{mp_m})$$

$$m \geq 1, \; p_j \geq 1$$

onde os β_{jk} são variáveis ou variáveis precedidas de uma ou duas ocorrências de " $\sim$ ". Quando aplicamos êsse resultado dizemos que colocamos α na <u>forma normal conjuntiva</u>.

Seja α uma fórmula, então ou $\alpha \equiv 0$ ou $\alpha \equiv 1$ ou

$$\alpha \equiv (\gamma_{11} \wedge \ldots \wedge \gamma_{1q_1}) \vee \ldots \vee (\gamma_{n1} \wedge \ldots \wedge \gamma_{nq_n})$$

$$n \geq 1, \; q_j \geq 1$$

onde os γ_{jk} são variáveis ou variáveis precedidas de uma ou duas ocorrências de " $\sim$ ". Quando aplicamos êsse resultado dizemos que colocamos α na <u>forma normal disjuntiva</u>.

Os resultados podem ser fàcilmente demonstrados usando as equivalências anteriormente descritas. Daremos antes exemplos

$$\begin{aligned} \sim(0 \wedge 1) \vee v_1 &\equiv \sim 0 \vee v_1 \\ &\equiv 1 \vee v_1 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$(\sim v_1 \vee v_2) \wedge \sim(v_1 \wedge \sim v_2) \equiv (\sim v_1 \vee v_2) \wedge (\sim v_1 \vee \sim\sim v_2)$$

(forma normal conjuntiva)

$$\equiv (\sim v_1) \vee (v_2 \wedge \sim\sim v_2)$$

(forma normal disjuntiva)

Suponhamos agora que

$$\alpha \prec \beta$$

seja uma relação e que desejamos saber se $\alpha \prec \beta$ é demonstrável ou não. Coloquemos α em forma normal disjuntiva e β em forma normal conjuntiva, os casos possíveis são

1) α se reduz a 0 ; então $\alpha \prec \beta$ é demonstrável.

2) β se reduz a 1 ; então $\alpha \prec \beta$ é demonstrável.

3) α se reduz a 1 e β se reduz a 0 ; então $\alpha \prec \beta$ não é demonstrável.

4) α se reduz a 1 enquanto que β toma a forma geral $(\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1q_1}) \wedge \ldots \wedge (\beta_{n1} \vee \ldots \vee \beta_{nq_n})$; mostraremos depois que nesse caso $\alpha \prec \beta$ não é demonstrável.

5) α toma a forma geral $(\alpha_{11} \wedge \ldots \wedge \alpha_{1p_1}) \vee \ldots$ $\ldots \vee (\alpha_{m1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{mp_m})$ enquanto que β se reduz a 0 ; também nesse caso mostraremos depois que $\alpha \prec \beta$ não é demonstrável.

6) α e β tomam a forma geral e portanto $\alpha \prec \beta$ é demonstrável se e só se

$$(\alpha_{11} \wedge \ldots \wedge \alpha_{1p_1}) \vee \ldots \vee (\alpha_{m1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{mp_m}) \prec$$

$$\prec (\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1q_1}) \wedge \ldots \wedge (\beta_{n1} \vee \ldots \vee \beta_{nq_n})$$

for demonstrável . Chamando

$$\alpha_j \equiv \alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} \qquad j = 1 \ldots m$$

$$\beta_k \equiv \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k} \qquad k = 1 \ldots n$$

podemos abreviar a última relação assim

$$\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m \prec \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$$

Mas esta relação é demonstrável se e só se cada uma das relações

$$\alpha_j < \beta_k \qquad j = 1 \ldots m, \; k = 1 \ldots n$$

for demonstrável. Assim sendo, reduzimos o problema de saber se $\alpha < \beta$ é demonstrável ao problema de saber se cada uma das relações

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} < \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

$$j = 1 \ldots m, \; k = 1 \ldots n$$

é demonstrável. E, como veremos depois, uma tal relação é demonstrável se e só se

$$\alpha_{jr} \text{ coincide com } \beta_{ks}$$

para algum r, $1 \leq r \leq p_j$ e algum s, $1 \leq s \leq q_k$

Para nos convencermos do que foi afirmado nos casos 4, 5 e 6 consideraremos um novo sistema formal M_0 descrito como segue.

Sistema Formal M_0

Símbolos : os mesmos de M .

Fórmulas Atômicas

As fórmulas atômicas são as constantes e as variáveis precedidas de zero, uma ou duas ocorrências de "$\sim$".

Fórmulas

F1) Se α é uma fórmula atômica então α é uma fórmula.

F2) Se α e β são fórmulas então $(\alpha \wedge \beta)$ e $(\alpha \vee \beta)$ são fórmulas.

Relações

$\alpha < \beta$ onde α e β são fórmulas.

Relações Iniciais e Regras

Análogas às relações iniciais e regras dos grupos I a V (inclusive) de M.

Demonstração e Relações demonstráveis caracterizadas de maneira semelhante à caracterização em M.

Claramente tôda relação de M_0 é relação de M e tôda demonstração de M_0 é demonstração de M.

Vamos fazer corresponder a cada demonstração de M uma demonstração de M_0; mas antes vejamos alguns resultados em M_0.

Consideremos a correspondência

$$\begin{array}{ccccccccc} v_1, & \sim v_1, & \sim\sim v_1, & v_2, & \sim v_2, & \sim\sim v_2, & v_2, & v_3, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & & v_6 & v_7 & \ldots \end{array}$$

e, se α é uma fórmula de M_0, façamos α^0 representar a fórmula obtida de α efetuando substituições segundo a correspondência acima. Se α é

$$1 \wedge (\sim v_1 \vee v_2)$$

α^0 é

$$1 \wedge (v_2 \vee v_4)$$

Podemos mostrar que, se $\alpha < \beta$ é demonstrável em M_0 então $\alpha^0 < \beta^0$ também é demonstrável em M_0. Basta fazer a substituição em tôdas as fórmulas que ocorrem na demonstração.

Se α é uma fórmula de M_0, $\bar{\alpha}$ será a fórmula obtida de α trocando os símbolos " $\wedge$ " e " $\vee$ ", trocando as constantes "0" e "1", e substituindo

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda & \text{por} & \sim\lambda \\ \sim\lambda & \text{por} & \sim\sim\lambda \\ \sim\sim\lambda & \text{por} & \sim\lambda \end{array}\right\} \quad \text{onde } \lambda \text{ é variável.}$$

Se α, por exemplo, é

$$v_1 \wedge ((\sim v_1 \vee v_2) \wedge 1)$$

$\bar{\alpha}$ é

$$\sim v_1 \vee ((\sim\sim v_1 \wedge \sim v_2) \vee 0)$$

enquanto que $\bar{\bar{\alpha}}$ é

$$\sim\sim v_1 \wedge ((\sim v_1 \vee \sim\sim v_2) \wedge 1)$$

Podemos mostrar que, se $\alpha < \beta$ é demonstrável em M_0 então $\bar{\beta} < \bar{\alpha}$ também é demonstrável em M_0. De fato, se $\alpha < \beta$ é relação inicial então $\bar{\beta} < \bar{\alpha}$ também é relação inicial; se em uma demonstração $\alpha < \gamma$ provém de $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ por I e se $\bar{\beta} < \bar{\alpha}$, $\bar{\gamma} < \bar{\beta}$ são demonstráveis então $\bar{\gamma} < \bar{\alpha}$ é demonstrável também por I; se $\gamma < \alpha \wedge \beta$ provém de $\gamma < \alpha$ e $\gamma < \beta$ por III e $\bar{\alpha} < \bar{\gamma}$ e $\bar{\beta} < \bar{\gamma}$ são demonstráveis então $\bar{\alpha} \vee \bar{\beta} < \bar{\gamma}$ é demonstrável por IV, ou seja $\overline{\alpha \wedge \beta} < \bar{\gamma}$ é demonstrável; anàlogamente com a regra restante.

Para fazer corresponder cada demonstração de M a uma demonstração de M_0 precisamos primeiro fazer corresponder a cada fórmula de M uma fórmula de M_0. Seja então α uma fórmula de M; α_0 será a fórmula de M_0 obtida de α fazendo tôdas as substituições possíveis do tipo

$$\sim(\alpha \wedge \beta) \quad \text{por} \quad (\sim\alpha \vee \sim\beta)$$

$$\sim(\alpha \vee \beta) \quad \text{por} \quad (\sim\alpha \wedge \sim\beta)$$

$$\sim\sim\sim\alpha \quad \text{por} \quad \sim\alpha$$

$$\sim 0 \quad \text{por} \quad 1$$

$$\sim 1 \quad \text{por} \quad 0$$

Se α, por exemplo, é

$$\sim((\sim v_1 \vee v_2) \wedge \sim(\sim v_1 \vee v_2)) \vee \sim\sim(1 \wedge \sim v_2)$$

chegamos a α_0 fazendo as substituições acima e terminamos com

$$((\sim\sim v_1 \wedge \sim v_2) \vee (\sim v_1 \vee \sim\sim v_2)) \vee (1 \wedge \sim v_2)$$

Seja então

$$\alpha_1 < \beta_1 \; , \; \alpha_2 < \beta_2 \; , \ldots , \alpha_n < \beta_n$$

uma demonstração de M; primeiro consideremos a sequência de relações de M_0

$$(\alpha_1)_0 < (\beta_1)_0 \; , \; (\alpha_2)_0 < (\beta_2)_0 \; , \ldots , (\alpha_n)_0 < (\beta_n)_0$$

e vejamos como completar essa sequência de modo a se tornar uma demonstração de M_0. Se $\alpha_i < \beta_i$ é uma relação inicial de M então $(\alpha_i)_0 < (\beta_i)_0$ é uma relação inicial de M_0. Supondo que até $(\alpha_i)_0 < (\beta_i)_0$ já tenhamos feito as adições necessárias para que a sequência até êsse ponto seja demonstração em M_0 admitamos que $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$ seja $\alpha < \gamma$ e que essa relação, na demonstração em M, seja justificada pela ocorrência anterior de $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$. Então, nada é preciso acrescentar, pois $\alpha_0 < \gamma_0$ é justificado por $\alpha_0 < \beta_0$ e $\beta_0 < \gamma_0$ anteriores. Se $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$ é

$$\gamma < \alpha \wedge \beta$$

justificado pela ocorrência anterior de $\gamma < \alpha$ e $\gamma < \beta$ então também nada é preciso adicionar pois $\gamma_0 < (\alpha \wedge \beta)_0$ é $\gamma_0 < \alpha_0 \wedge \beta_0$ justificável de maneira semelhante. A regre IV é tratada de maneira análoga. Finalmente, se $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$ é

$$-\beta < -\alpha$$

justificada pela ocorrência anterior de $\alpha < \beta$, então, como $\alpha_0 < \beta_0$ é demonstrável em M_0, podemos acrescentar uma demonstração em M_0 de $\overline{\beta_0} < \overline{\alpha_0}$; mas $\overline{\beta_0} < \overline{\alpha_0}$ é $(-\beta)_0 < (-\alpha)_0$.

Assim sendo, a cada demonstração de M vimos como associar uma demonstração de M_0. Com isso vemos que, se $\alpha < \beta$ é demonstrável em M então $\alpha_0 < \beta_0$ é demonstrável em M_0.

Podemos agora completar o nosso estudo sôbre a decisão para as relações demonstráveis justificando o que foi dito nos casos 4, 5 e 6. De fato, se

$$1 < (\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1q_1}) \wedge \ldots \wedge (\beta_{n1} \vee \ldots \vee \beta_{nq_n})$$

fosse demonstrável em M então

$$1 < \beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1q}$$

também seria e, pelo resultado acima, essa mesma relação seria demonstrável em M_0. Mas então

$$1 \prec (\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1q_1})'$$

seria demonstrável em M_0, o que se percebe ser absurdo tomando a interpretação i na M-álgebra $\{0, 1\}$ tal que $i(v_j) = 0$ para $j = 1, 2, 3, \ldots$. O caso 5 é tratado de maneira semelhante.

Finalmente, se um dos α_{jr} coincide com um dos β_{ks}

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} \prec \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

é claramente demonstrável em M. Porém se isso não acontece, a suposição de que essa relação é demonstrável em M nos leva a admitir que essa mesma relação é demonstrável em M_0 e que portanto

$$(\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j})' \prec (\beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k})'$$

também é demonstrável em M_0. Mas podemos ver fàcilmente que isso é absurdo considerando uma interpretação i que tome o valor 1 nas variáveis de

$$(\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j})'$$

e que tome o valor 0 nas variáveis de

$$(\beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k})'$$

4. <u>Dedução</u>

Vamos considerar agora uma ampliação $\overline{M}$ de nosso sistema formal M obtida como segue.

As fórmulas de $\overline{M}$ são as mesmas de M e as relações são as de M e mais

se α e β são fórmulas $\alpha \vdash \beta$ é uma relação.

As relações iniciais e regras são as de M e mais as do grupo X abaixo

$$\alpha \vdash \sim\sim\alpha \qquad\qquad \alpha \wedge (\sim\alpha \vee \beta) \vdash \beta$$

X

$$\frac{\alpha \prec \beta}{\alpha \vdash \beta} \qquad \frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma} \qquad \frac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$$

A finalidade de $\bar{M}$ é caracterizar a noção de dedução conforme definição abaixo.

Se $\alpha \vdash \beta$ ocorre em uma demonstração diremos que β é dedutível de α. Se Δ é um conjunto não vazio de fórmulas diremos que

$$\alpha \text{ é dedutível de } \Delta$$

se existem $\alpha_1 \in \Delta, \ldots, \alpha_n \in \Delta$ tais que

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \alpha \text{ é demonstrável}$$

Mostremos, por exemplo, que

$$\sim\sim\beta \quad \text{é dedutível de} \quad \{\alpha, \sim(\alpha \wedge \sim\beta)\}$$

utilizando a seguinte demonstração

$$\begin{array}{ll}
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \prec \alpha & \text{III} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \vdash \alpha & \text{X} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \prec \sim(\alpha \wedge \sim\beta) & \text{III} \\
\sim(\alpha \wedge \sim\beta) \prec \sim\alpha \vee \sim\sim\beta & \text{VI} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \prec \sim\alpha \vee \sim\sim\beta & \text{I} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \vdash \sim\alpha \vee \sim\sim\beta & \text{X} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \vdash \alpha \wedge (\sim\alpha \vee \sim\sim\beta) & \text{X} \\
\alpha \wedge (\sim\alpha \vee \sim\sim\beta) \vdash \sim\sim\beta & \text{X} \\
\alpha \wedge \sim(\alpha \wedge \sim\beta) \vdash \sim\sim\beta & \text{X}
\end{array}$$

Vejamos como se comporta nosso novo conceito em relação às interpretações. Observemos que, como as fórmulas de M coincidem com as fórmulas de $\overline{M}$, a noção de interpretação para $\overline{M}$ é a mesma que a de M. Comecemos com uma definição.

Seja $\triangle$ um conjunto não vazio de fórmulas. Dizemos que uma fórmula α é <u>consequência</u> de $\triangle$ se tôda a interpretação i satisfazendo $i(\triangle) = \{1\}$ é tal que $i(\alpha) = 1$.

O resultado essencial que mostraremos será então que α é deductível de $\triangle$ se e só se α é consequência de $\triangle$.

Primeiro vejamos que, se i é interpretação e $\alpha \vdash \beta$ demonstrável então

$$i(\alpha) = 1 \quad \text{implica} \quad i(\beta) = 1 .$$

De fato, seja

$$R_1, R_2, \ldots, R_n \qquad R_i \text{ relações}$$

uma demonstração de $\overline{M}$, onde R_n é $\alpha \vdash \beta$, e verifiquemos para cada R_i,

$$\text{se } R_i \text{ é } \alpha_i < \beta_i \text{ e } i(\alpha_i) = 1 \text{ então } i(\beta_i) = 1$$

$$\text{se } R_i \text{ é } \alpha_i \vdash \beta_i \text{ e } i(\alpha_i) = 1 \text{ então } i(\beta_i) = 1$$

Se R_i é $\alpha_i < \beta_i$ então $i(\alpha_i) \leq i(\beta_i)$ donde se $i(\alpha) = 1$, $i(\beta) = 1$. Se R_i é $\alpha_i \vdash \beta_i$, é relação inicial da forma $\lambda \vdash \sim\sim\lambda$ e $i(\lambda) = 1$ temos que

$$i(\sim\sim\lambda) = --i(\lambda) = 1 ;$$

se é da forma $\lambda \wedge (\sim\lambda \vee \mu) \vdash \mu$ e $i(\lambda \wedge (\sim\lambda \vee \mu)) = 1$,

$$1 = i(\lambda \wedge (\sim\lambda \vee \mu)) = i(\lambda) \wedge (-i(\lambda) \vee i(\mu))$$

$$= 1 \wedge (0 \vee i(\mu)) = i(\mu)$$

Se R_i é da forma $\alpha_i \vdash \beta_i$ e é obtida por uma das regras, suponhamos que já verificamos que a propriedade se verifica para as relações anteriores; se $\alpha_i \vdash \beta_i$ provém de $\alpha_i < \beta_i$ então

$$i(\alpha_i) \leq i(\beta_i)$$

donde, se $i(\alpha_i) = 1$ então $i(\beta_i) = 1$. Se $\alpha_i \vdash \beta_i$ provém de

$\alpha_1 \vdash \gamma$ e $\gamma \vdash \beta_1$ e ademais $i(\alpha_1) = 1$ temos que $i(\gamma) = 1$ donde $i(\beta_1) = 1$. Se $\alpha_1 \vdash \beta_1$ provém de $\alpha_1 \vdash \gamma$ e de $\alpha_1 \vdash \delta$, donde β_1 é $\gamma \wedge \delta$, e ademais $i(\alpha_1) = 1$, temos que

$$i(\gamma) = i(\delta) = 1$$

donde
$$i(\beta_1) = i(\gamma \wedge \delta) = i(\gamma) \wedge i(\delta) = 1$$

Suponhamos agora que α seja dedutível de Δ. Existem então fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pertencentes a Δ tais que

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vdash \alpha \text{ é demonstrável}$$

Seja i uma interpretação tal que

$$i(\Delta) = \{1\}$$

Então

$$i(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = i(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge i(\alpha_n) = 1$$

donde $i(\alpha) = 1$ e portanto α é consequência de Δ.

Para mostrar a recíproca, vejamos antes alguns resultados. Se A é M-álgebra, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, denotemos por $\overline{B}$ o sistema dedutivo gerado por B; $a \in \overline{B}$ se e só se $a \in \overline{\{b_1, \ldots, b_n\}}$ para alguma parte finita $\{b_1 \ldots b_n\}$ de B. Pois se $a \in \overline{\{b_1 \ldots b_n\}}$ então claramente $a \in \overline{B}$; se D' é o conjunto dos $a \in A$ tais existem $b_1, \ldots, b_n$ em B com

$$a \in \overline{\{b_1, \ldots, b_n\}}$$

D' é um sistema dedutivo de A que contém B, donde $D' = D$.

Podemos demonstrar agora que

$$\alpha \text{ é dedutível de } \Delta \text{ se e só se } \Pi(\alpha) \in \overline{\Pi(\Delta)}$$

onde Π é a interpretação canônica.

Se $\Pi(\alpha) \in \overline{\Pi(\Delta)}$ então

$$\Pi(\alpha) \in \overline{\{\Pi(\beta_1), \ldots, \Pi(\beta_n)\}} \text{ onde os } \Pi(\beta_i) \in \Pi($$

Seja D a parte de F constituída pelos $\widetilde{\Pi}(\beta)$ tais que

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \text{ é demonstrável.}$$

D é sistema dedutivo, pois se

$$\widetilde{\Pi}(\beta) \in D \quad \text{e} \quad \widetilde{\Pi}(\beta) \leq \widetilde{\Pi}(\gamma)$$

então

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \quad \text{e} \quad \beta \prec \gamma$$

são demonstráveis, donde

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \gamma$$

é demonstrável, ou seja, $\widetilde{\Pi}(\gamma) \in D$.

Se $\widetilde{\Pi}(\beta)$ e $\widetilde{\Pi}(\gamma)$ estão em D

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \qquad \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \gamma$$

são demonstráveis, donde

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \wedge \gamma$$

é demonstrável, ou seja,

$$\widetilde{\Pi}(\beta \wedge \gamma) = \widetilde{\Pi}(\beta) \wedge \widetilde{\Pi}(\gamma) \in D$$

Se $\widetilde{\Pi}(\beta) \in D$

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \quad \text{é demonstrável}$$

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \sim\sim\beta \quad \text{é demonstrável}$$

$$\widetilde{\Pi}(\sim\sim\beta) = \sim\sim\widetilde{\Pi}(\beta) \in D$$

Se $\widetilde{\Pi}(\beta)$ e $\sim\widetilde{\Pi}(\beta) \vee \widetilde{\Pi}(\gamma) \in D$ então $\widetilde{\Pi}(\sim\beta \vee \gamma) \in$

e

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \\ \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \sim\beta \vee \gamma \end{array}\right\} \text{são demonstráveis}$$

donde

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \gamma \text{ é demonstrável}$$

$$\Pi(\gamma) \in D$$

Assim sendo, D é um sistema dedutivo que claramente contém os $\Pi(\beta_i)$. Logo

$$\overline{\{\Pi(\beta_1), \ldots, \Pi(\beta_n)\}} \subset D$$

$$\Pi(\alpha) \in D$$

$$\alpha \text{ é dedutível de } \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$$

$$\alpha \text{ é dedutível de } \Delta$$

Reciprocamente, se α é dedutível de Δ existem $\beta_1, \ldots, \beta_n$ em Δ tais que

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \beta \text{ é demonstrável}$$

Se $\overline{\Pi(\Delta)}$ coincide com F claramente $\Pi(\alpha) \in \overline{\Pi(\Delta)}$. Caso contrário, $\overline{\Pi(\Delta)}$ é o núcleo de algum homomorfismo h de F e $h \circ \Pi$ é interpretação.

$$h \circ \Pi(\Delta) = \{1\}$$

e, como α é consequência de Δ, temos que

$$h \circ \Pi(\alpha) = 1$$

$$\Pi(\alpha) \in \overline{\Pi(\Delta)}$$

Mostremos finalmente que, se α é consequência de Δ então α é dedutível de Δ.

Se α é consequência de Δ e $\overline{\Pi(\Delta)} = F$ então $\Pi(\alpha) \in \overline{\Pi(\Delta)}$ donde α é dedutível de Δ. Se $\overline{\Pi(\Delta)}$ está contido propriamente em F existe algum homomorfismo h de F que tenha $\overline{\Pi(\Delta)}$ como núcleo. $h \circ \Pi$ é interpretação e

$$h \circ \Pi(\Delta) = \{1\}$$

donde, como α é consequência de Δ.

$$\frac{h \circ \Pi(\alpha) = 1}{\Pi(\alpha) \in \Pi(\Delta)}$$

α é dedutível de Δ

5. M-álgebras particulares

Um sistema formal $\overline{M}_1$, semelhante a $\overline{M}$, para as M-álgebras regulares, pode ser o seguinte.

Fórmulas e relações como as de $\overline{M}$.

Nas relações iniciais e regras omitir a primeira relação de VI, omitir VII, omitir $\alpha \vdash \sim\sim\alpha$ de X e substituir IX por

$$\mathrm{IX}' \quad \frac{\alpha \prec \sim\beta}{\beta \prec \sim\alpha}$$

A partir dêsse sistema formal chegamos essencialmente aos mesmos resultados que obtivemos em 2. e 4. Quanto à decisão para as relações demonstráveis da forma $\alpha \prec \beta$ podemos proceder como em 3. modificando

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} \prec \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

é demonstrável se e só se α_{jr} coincide com β_{ks} para algum $r, 1 \leq r \leq p_j$, e algum $s, 1 \leq s \leq q_j$

para

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} \prec \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

é demonstrável se e só se ou α_{jr} coincide com β_{ks} ou α_{jr} é variável e β_{ks} é $\sim\sim\alpha_{jr}$, para algum $r, 1 \leq r \leq p_j$, e algum $s, 1 \leq s \leq q_j$.

Quanto às M-álgebras fortes podemos utilizar o sistema formal M_2 abaixo.

Não usamos as relações $\alpha \vdash \beta$ pois em uma M-álgebra forte $\vdash$ vale (sistemas dedutivos coincidem com filtros)

$$x \leq \sim\sim x \qquad x \wedge (\sim x \vee y) \leq y \quad \text{para todos } x, y \in A$$

donde podemos definir simplesmente "α é dedutível de Δ" por "existem $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Delta$ tais que $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n < \alpha$ é demonstrável".

Fórmulas como as de M omitindo as constantes 0 e 1. Relações como as de M.

Omitindo os grupos II e VIII de M_1 e acrescentando às relações iniciais e regras de M_1 a relação inicial

$$\text{XI} \qquad \alpha \wedge \sim \alpha < \beta$$

obtemos as relações iniciais e regras de M_2.

Resultados análogos aos de 2. e 4. podem então ser obtidos. Embora as constantes 0 e 1 não apareçam em Γ (conjunto das fórmulas) podemos definir

0 = classe de equivalência a que $v_1 \wedge \sim v_1$ pertence

1 = classe de equivalência a que $\sim v_1 \vee \sim\sim v_1$ pertence

de sorte que $F = \Gamma/\equiv$ é uma M-álgebra (com 0 e 1) e de fato a M-álgebra livre com uma infinidade enumerável de geradores livres $\Vert(v_i)$.

A decisão para as relações demonstráveis de M_2 requer a seguinte modificação

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} < \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

é demonstrável se e só se uma das alternativas se verifica

1) α_{j_n} é $\sim \alpha_{j_m}$ para algum m e algum n, $1 \leq m, n \leq p_j$

2) β_{km} é $\sim \lambda$ e β_{kn} é $\sim\sim \lambda$ (λ variável) para algum m e algum n, $1 \leq m, n \leq q_k$

3) Existem r e s, $1 \leq r \leq p_j$; $1 \leq s \leq q_k$, tais que α_{jr} coincide com β_{ks}

Para nos convencermos disso não usamos a técnica desenvolvida em 3. mas sim observamos que dando interpretações convenientes na M-álgebra forte livre com um gerador livre vemos que, se

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} < \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

não satisfaz a nenhuma das 3 condições acima então não é demonstrável.

Para as M-álgebras simétricas adotamos o sistema M_3 como segue.

Fórmulas sem a constante 1. Relações como antes.

Relações Iniciais e Regras.

Grupo I, primeira relação do grupo II, grupo III, grupo IV, grupo V, primeira relação do grupo VI, IX' e

$$\text{XII} \qquad \sim\sim \alpha < \alpha$$

além o grupo X com $\alpha \vdash \sim\sim \alpha$ excluida.

Chegamos então a resultados análogos aos de 2. e 4.. O método de decisão para saber se uma relação $\alpha < \beta$ é ou não demonstrável em M_3 é semelhante ao descrito em 3. e pode ser demonstrado por técnica parecida a de 3. usando um sistema formal auxiliar como M_0.

6. Matrizes Características

Como as álgebras de Boole correspondem ao cálculo proposicional clássico, nossa versão M_4 de sistema formal para essas particulares M-álgebras vai corresponder a êsse cálculo proposicional.

Sistema Formal M_4

Fórmulas sem as constantes 0 e 1.

Relações: $\alpha < \beta$ onde α e β são fórmulas

Relações Iniciais e Regras: grupos I, III/V, IX e XI acrescido de

$$\alpha < \beta \vee \sim \beta$$

Definindo Γ, $\equiv$ e $F = \Gamma/\equiv$ temos que F é a álgebra de Boole livre com uma infinidade enumerável de geradores livres.

Interpretações e relações válidas são caracterizadas de maneira análoga ao dos outros casos e a equivalência entre relação demonstrável e relação válida pode ser estabelecida como anteriormente.

Observemos que

$$0 = \text{classe de equivalência a que } v_1 \wedge \sim v_1 \text{ pertence}$$

$$1 = \text{classe de equivalência a que } v_1 \vee \sim v_1 \text{ pertence}$$

Diremos que uma fórmula α é um **teorema** se $v_1 \vee \sim v_1 < \alpha$ é demonstrável, ou seja, se $\beta < \alpha$ é demonstrável para tôda a fórmula β. Diremos que α é **válida** se $i(\alpha) = 1$ para tôda a interpretação i.

Se α é teorema

$$v_1 \vee \sim v_1 < \alpha \quad \text{demonstrável}$$

$$1 = i(v_1) \vee \sim i(v_1) \leq i(\alpha) \quad \text{para tôda } i$$

donde α é válida.

Se α é válida $\pi'(\alpha) = 1$ (onde π' é a interpretação canónica), donde

$$\alpha \equiv v_1 \vee \sim v_1$$

$$v_1 \vee \sim v_1 < \alpha \quad \text{demonstrável}$$

e, portanto α é teorema.

Podemos ver ainda que α é válida se e só se $i(\alpha) = 1$ para tôda interpretação i na álgebra de Boole $\{0, 1\}$. De fato, as interpretações i em $\{0, 1\}$ correspondem aos homomorfismos

$$h_i : F \to \{0, 1\}$$

de modo que

$$h_i \circ \pi' = i$$

Temos então que

$$h_i(\pi'(\alpha)) = i(\alpha) = 1$$

para tôda interpretação i em $\{0, 1\}$ implica que $\pi'(\alpha)$ pertence aos núcleos de todos os homomorfismos h_i, ou seja, $\pi'(\alpha) = 1$.
Portanto α é válida.

O processo de decisão quando aplicado às relações de M_4 é modificado da seguinte maneira

$$\alpha_{j1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{jp_j} \prec \beta_{k1} \vee \ldots \vee \beta_{kq_k}$$

é demonstrável se e só se uma das condições se verifica .

1) α_{jr} coincide com β_{ks} para algum r, $1 \leq r \leq p_j$, e algum s, $1 \leq s \leq q_k$.

2) α_{jn} é $\sim \alpha_{jm}$ para algum par (m, n) com $1 \leq m, n \leq p_j$

3) β_{kn} é $\sim \beta_{km}$ para algum par (m, n) com $1 \leq m, n \leq q_k$

Observemos que os α_{jr} e β_{ks} são aqui da forma λ ou $\sim \lambda$ onde λ é uma variável, de modo que, para nos convencermos de que a relação em questão não é demonstrável no caso de nenhuma das condições 1) a 3) se verificar, basta considerar interpretações convenientes em $\{0, 1\}$.

Se α é teorema

$$v_i \vee \sim v_i \prec \alpha \quad \text{demonstrável} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

donde escrevendo α na forma normal conjuntiva temos que

$$v_i \vee \sim v_i \prec \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \quad \text{demonstrável}$$

$$v_i \prec \alpha_j \quad \text{demonstrável } i = 1,2,3 \ldots \; 1 \leq j \leq n$$

e que, portanto, sendo α_j da forma

$$\alpha_{j1} \vee \ldots \vee \alpha_{jq_j}$$

temos que α_{jn} é $\sim \alpha_{jm}$ para algum par (m, n) com $1 \leq m, n \leq q_j$.

Assim sendo, se α é teorema e $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ sua forma normal conjuntiva, então cada α_j contém como componentes λ e $\sim \lambda$ para alguma variável λ.

Vamos relacionar agora o nosso sistema formal M_4 a M- álgebras arbitrárias por meio de "representações".

Seja A M-álgebra; uma aplicação

$$r : \Gamma \longrightarrow A$$

diz-se uma <u>representação</u> (em A) se

$$r(\alpha \wedge \beta) = r(\alpha) \wedge r(\beta)$$

$$r(\alpha \vee \beta) = r(\alpha) \vee r(\beta)$$

$$r(\sim \alpha) = - r(\alpha)$$

As representações nos permitem definir agora o conceito central dêste número.

Seja A M-álgebra e G um filtro próprio de A. $\langle A, G \rangle$ é <u>matriz característica</u> para o sistema formal M_4 se

α é teorema $\longleftrightarrow$ $r(\alpha) \in G$ para tôda a representação r em A

Vejamos quais os filtros próprios de A que determinam matrizes características.

Se $\langle A, G \rangle$ é matriz característica para M_4 então G é filtro próprio de A e, como

$$v_1 \vee \sim v_1$$

é teorema de M_4, temos que

$$r(v_1 \vee \sim v_1) \in G$$

$$r(v_1) \vee - r(v_1) \in G \qquad \text{para tôda representação r em A}$$

Mas $r(v_1)$ pode ser qualquer elemento de A e portanto G contém o filtro T gerado pelos elementos de A da forma $X \vee - X$.

Reciprocamente, se G contém T e é filtro próprio de A então $\langle A, G \rangle$ é matriz característica para M_4. Pois se α é teorema

$$\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \quad \text{(em M)}.$$

onde $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ é forma normal conjuntiva de α como descrita para o sistema formal M (α sendo fórmula de M_4 é também fórmula de M). Donde

$$\alpha < \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \quad \text{demonstrável em } M$$

$$\alpha < \alpha_j \quad \text{demonstrável em } M, 1 \leq j \leq n$$

$$\alpha < \alpha_j \quad \text{demonstrável em } M_4$$

$$v_i \vee \sim v_i < \alpha_j \text{ demonstrável em } M_4$$

para todo i(α é teorema). Como α_j é

$$\alpha_{j1} \vee \ldots \vee \alpha_{jp_j}$$

segue-se que algum α_{j_s} é $\sim \alpha_{j_r}$; portanto

$$r(\alpha_j) = r(\alpha_{j1}) \vee \ldots \vee r(\alpha_{jp_j}) \geq$$

$$\geq r(\alpha_{j_r}) \vee \sim r(\alpha_{j_r})$$

para tôda representação r em A. Assim

$$r(\alpha_j) \in G \qquad\qquad 1 \leq j \leq n$$

e

$$r(\alpha) = r(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge r(\alpha_n) \in G$$

Temos portanto que " α teorema" implica "$r(\alpha) \in G$", para tôda representação r em A. Por outro lado, se α é tal que $r(\alpha) \in G$ para tôda a representação r em A, consideremos as particulares representações s tais que $s(\Gamma) = \{0,1\}$; temos então que $s(\alpha) = 1$ para tôdas essas representações s. Portanto α é teorema.

Assim sendo, a M-álgebra A pode se tornar com algum filtro próprio em matriz característica se e só se existe um filtro próprio de A contendo T. Mas, como já vimos no Capítulo I número 12, existe um tal filtro se e só se existe algum filtro primo forte-dual, ou seja algum filtro primo P com

$$\varphi(P) \subset P$$

São de interêsse também as matrizes características regulares segundo a seguinte definição

$\langle A, G \rangle$ é matriz característica regular se G é sistema dedutivo próprio de A.

Pelo que vimos no Capítulo I número 13, $\langle A, G \rangle$ é matriz característica regular se e só se G fôr sistema dedutivo booleano de A.

Matrizes características usando M- álgebras simétricas são estudadas em [6] que inspirou êste número.

BIBLIOGRAFIA

[1] - A. Bialynicki - Birula (1957) - Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, 5 : 615 - 619.

[2] - A. Bialynicki - Birula (1958) - Colloquium Mathematicum, 6 : 287 - 291.

[3] - A. Bialynicki - Birula e H. Rasiowa - (1957) - Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, 5 : 259 - 261.

[4] - H. Rasiowa (1958) - Fundamenta Mathematica, 46 : 61 - 80.

[5] - J. A. Kalman (1958) - Transactions of the American Mathematical Society, 87 : 485 - 491.

[6] - A. Monteiro (1960) - Anais da Academia Brasileira de Ciências, 32 : 1 - 7.

[7] - G. Birkhoff - Lattice Theory.

.:.:.:.:.:.