

# Difeomorfismos do plano com número de rotação de fins primos irracional

Diego Pereira Barboza

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado em Matemática Aplicada do IME-USP

Orientador: Prof. Dr. Salvador Addas Zanata

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Dezembro de 2018

# Resumo

BARBOZA D.P. **Difeomorfismos do plano com número de rotação de fins primos irracional**. 2018. 72+vi f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

O principal objetivo desta tese é estudar o número de rotação de fins primos de homeomorfismos planares que pertencem a uma classe de homeomorfismos  $\mathcal{H}$ . Tal número de rotação é devido à Carathéodory e semelhante à teoria de Poincaré para homeomorfismos do círculo. Para todo irracional  $\alpha \in (0, 1)$ , denotando por  $\rho(h, U)$  o número de rotação de fins primos de  $h \in \mathcal{H}$  em  $U$ , com  $U$  a bacia de repulsão do infinito, construiremos um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  satisfazendo  $\rho(h, U) = \alpha$  e que possui uma sela periódica com intersecção homoclínica transversal em  $\partial U$ . Além disso, quando  $h$  é de classe  $C^2$  e  $\det(Dh|_x) < 1$  em todo ponto, mostraremos que existe ponto periódico acessível em  $\partial U$  se, e somente se,  $\rho(h, U)$  é racional.

Também será provado que, quando  $h$  é uma ferradura de Smale, o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional. Finalizando, provaremos que se for possível a existência de um difeomorfismo  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em um conjunto genérico a ser definido, com  $\partial U = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$  para  $p$  uma sela homoclínica com intersecção transversal e tal que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, necessariamente,  $h$  deve satisfazer uma propriedade que não é válida para ferraduras de Smale.

**Palavras-chave:** Difeomorfismos Planares; Número de Rotação; Teoria de Fins Primos.

# Abstract

BARBOZA D.P. **Diffeomorphisms of the plane with irrational prime ends rotation number** 2018. 72+vi pp. PhD thesis- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The main objective of this thesis is to study the prime ends rotation number of planar homeomorphisms belonging to a class of homeomorphisms  $\mathcal{H}$ . Such rotation number is due to Carathéodory and similar to the Poincaré's theory of homeomorphisms of the circle. For all irrational  $\alpha \in (0, 1)$ , denoting by  $\rho(h, U)$  the prime end rotation number of  $h \in \mathcal{H}$  in  $U$ , with  $U$  the infinity repulsion basin, we will construct a homeomorphism  $h \in \mathcal{H}$  satisfying  $\rho(h, U) = \alpha$  and having a homoclinic saddle with transverse intersection in  $\partial U$ . Also, when  $h$  is class  $C^2$  and  $\det(Dh|_x) < 1$  at every point, we will show that there is accessible periodic point in  $\partial U$  if, and only if,  $\rho(h, U)$  is rational.

It will also be proved that when  $h$  is a Smale's horseshoe, the rotation number  $\rho(h, U)$  is rational. To conclude, we will prove that if there exists a  $C^r$ -diffeomorphism, in a generic set to be defined, with  $\partial U = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$  for a saddle point  $p$  with transverse homoclinical intersection and such that the rotation number  $\rho(h, U)$  is irrational, then  $h$  must satisfy a property that is not valid for Smale's horseshoes.

**Keywords:** Planar Diffeomorphisms; Rotation Number; Prime Ends Theory.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivos . . . . .	9
1.2	Resultados Obtidos . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1	Conceitos Básicos e Definições . . . . .	13
2.2	Uma Propriedade dos continuos . . . . .	18
2.3	Número de Rotação de Homeomorfismos do Círculo . . . . .	21
2.4	Teoria de Fins Primos . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Alguns Resultados 1</b>	<b>31</b>
3.1	Sobre à Classe de Homeomorfismos $\mathcal{H}$ . . . . .	31
3.2	Demonstração do Teorema 3.1.1 . . . . .	35
3.3	O exemplo de Matsumoto . . . . .	45
3.4	O exemplo de Bernado e Salvador . . . . .	48
3.5	Demonstração do Teorema 3.1.4 . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Alguns Resultados 2</b>	<b>53</b>

4.1	Preliminares . . . . .	53
4.2	Número de Rotação da Ferradura de Smale . . . . .	57
4.3	Consequências do Número de Rotação de Fins Primos $\rho(h, U)$ Irracional.	64

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>73</b>
-----------------------------------	-----------

# Lista de Figuras

2.1	Informações dos conjuntos $\Sigma$ e $M$ . . . . .	20
3.1	O conjunto $\Sigma$ visto como um subconjunto da esfera. . . . .	33
3.2	Se $x \neq h(x)$ em $\mathbb{R}^2$ , então $\mathbf{p} \neq \tilde{h}(\mathbf{p})$ em $\mathbb{P}(U)$ . . . . .	38
3.3	Informações na compactificação de fins primos de $U$ . . . . .	41
3.4	A dinâmica de $h$ em uma vizinhança de $\Pi(\mathbf{p}) \cap U$ . . . . .	44
3.5	A dinâmica de $h$ perto de $\Pi(\mathbf{p}) \cap U$ , $p_0 \in \Pi(\mathbf{p}) \cap U$ e $V$ uma vizinhança aberta de $p$ . . . . .	44
3.6	Em vermelho, temos os "cabelos" de $\Sigma$ com origem nos pontos do conjunto minimal $C_\alpha$ e que estão se enrolando em torno do atrator do exemplo de Bernado e Salvador. . . . .	51
4.1	Informações na compactificação de fins primos de $U$ . . . . .	56
4.2	Exemplo em que a intersecção $h(Q) \cap Q$ possui 3 retângulos . . . . .	58
4.3	Informações de $Q \cap h(Q)$ no plano. . . . .	61
4.4	Semi-reta $l$ acessando o ponto $a \in \Gamma$ . . . . .	63

# Capítulo 1

## Introdução

O conceito de número de rotação de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação foi introduzido por Henri Poincaré em [Po52], e se mostrou uma ferramenta muito útil para se descrever a dinâmica de tais aplicações. A dinâmica desses homeomorfismos é topologicamente simples e pode ser caracterizada pelo número de rotação.

Poincaré percebeu que, dado um homeomorfismo do círculo que preserva orientação,  $h : S^1 \rightarrow S^1$ , podemos considerar um ponto  $x \in S^1$  qualquer e obter que as médias  $\frac{H^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}$  convergem para um mesmo número, com  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento para o recobrimento universal de  $h$  e  $\tilde{x}$  satisfazendo  $\pi(\tilde{x}) = x$  onde  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  é a aplicação de recobrimento. Este número é chamado de número de rotação de  $\tilde{h}$ . O seguinte resultado, conhecido como Teorema de Poincaré, pode ser encontrado em [KH99].

*O número de rotação de um homeomorfismo do círculo  $S^1$  que preserva orientação é racional se, e somente se, este homeomorfismo possuir um ponto periódico cujo período é igual ao denominador de tal racional, pensando na fração irredutível.*

Com o objetivo de estudar a dinâmica de um homeomorfismo  $h$  do plano que preserva orientação na fronteira de um aberto  $U$  conexo, simplesmente conexo e invariante por  $h$ , é natural tentar definir um invariante similar à tal número de rotação e tentar aplicar o resultado acima. Embora  $U$  seja topologicamente um disco aberto, a fronteira de  $U$  pode

não ser topologicamente um círculo e pode possuir uma estrutura muito complicada, por exemplo, a fronteira de  $U$  pode não ser localmente conexa em nenhum ponto.

A teoria de fins primos, desenvolvida por Carathéodory [Ca13], fornece uma compactificação da região  $U$  adicionando um conjunto  $\mathbb{P}(U)$  chamado de *conjunto de fins primos de  $U$* , tal que, com uma topologia que surge naturalmente da construção, o conjunto dos fins primos é homeomorfo a um círculo e o conjunto  $U^* = U \cup \mathbb{P}(U)$  é homeomorfo ao disco unitário fechado.

Desse modo, o homeomorfismo  $h$  pode ser estendido para um homeomorfismo  $\tilde{h}$  de  $U^*$ , cuja restrição  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$  induz um homeomorfismo  $h' : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva orientação. Portanto, podemos definir para cada homeomorfismo do plano  $h$  que preserva orientação e cada aberto  $U$ , conexo, simplesmente conexo e invariante por  $h$ , um número de rotação de fins primos  $\rho(h, U)$  como sendo o número de rotação de Poincaré de  $h'$ . A compreensão da relação do número de rotação de  $h'$  com a dinâmica de  $h$  na fronteira de  $U$  é um problema sutil que tem sido estudado em vários trabalhos.

O Teorema de Poincaré para homeomorfismos do círculo mostra como o número de rotação clássico está relacionado com a existência de órbitas periódicas. Para os homeomorfismos do plano  $h$  e os domínios simplesmente conexos  $U$ , já foi observado por Cartwright e Littlewood em [CL51] que o número de rotação  $\rho(h, U)$  ser racional não é suficiente para garantir a existência de órbitas periódicas na fronteira de  $U$ . No entanto, com algumas hipóteses adicionais ao homeomorfismo ou na região  $U$ , é possível obter algum tipo de conexão entre as duas noções. Por exemplo, no caso em que  $h$  preserva área a situação é diferente, como foi mostrado por Cartwright e Littlewood em [CL51]:

*Se  $h$  preserva área e o número de rotação de fins primos  
é racional, então existe ponto periódico em  $\partial U$ .*

Resultados semelhantes, obtendo pontos periódicos a partir de um número de rotação de fins primos racional, foram provados por vários autores, por exemplo em [AY92, BG91, BG92, BaK98]. A afirmação inversa questiona se a existência de pontos periódicos implica que o número de rotação de fins primos é racional. Neste caso, alguns resultados foram



obtidos em [KLN15] mas, em geral, isto não é verdade, como foi provado por Matsumoto em [Mat13].

Em [KLN15], Koropecki, Le Calvez e Nassiri deram alguma luz sobre como é a dinâmica induzida na fronteira de  $U$  quando o número de rotação de fins primos é irracional e o homeomorfismo satisfaz algumas hipóteses não-errantes em uma vizinhança de  $\partial U$ , que é satisfeita, por exemplo, quando o homeomorfismo preserva área. Como um corolário, eles provam que para homeomorfismos no plano, não pode existir pontos periódicos na fronteira de  $U$ , desde que o homeomorfismo satisfaça esta hipótese extra.

No caso em que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, alguns exemplos mostram que, mesmo quando  $h$  preserva área, pode existir ponto fixo em  $\partial U$  (ver exemplos 9.5 e 9.6 em [KLN15]). No entanto, estes exemplos são bem específicos e possuem apenas um ponto fixo e não possuem outros pontos periódicos.

## 1.1 Objetivos

Nesta tese, iremos trabalhar com uma classe específica de homeomorfismos do plano que será denotada por  $\mathcal{H}$ . A seguir, definiremos o que significa o infinito ser um ponto repulsor e definiremos também a classe de homeomorfismos  $\mathcal{H}$ .

**Definição 1.1.1.** *O infinito é chamado de um ponto repulsor para um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  quando existirem curvas de Jordan  $\gamma$ , arbitrariamente distantes da origem que enlaçam a origem, tais que  $h(\gamma)$  está contida no disco  $D$  limitado pela curva  $\gamma$ .*

**Definição 1.1.2.** *Considere  $h$  um homeomorfismo do plano e suponha que  $h$  preserva orientação. Diremos que  $h$  pertence ao conjunto  $\mathcal{H}$  quando:*

1. *O infinito é um ponto repulsor para  $h$  e existe um ponto fixo atrator  $p$  para  $h$ ;*
2. *O homeomorfismo  $h$  é dissipativo, isto é, para todo aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , a área de  $h^n(D) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ;*
3. *A região de repulsão do infinito,  $U = U_\infty$ , é um subconjunto próprio de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .*

Sem perda de generalidade, iremos supor que, para todo  $h \in \mathcal{H}$ , o ponto fixo atrator  $p$  na definição 1.1.2 pode ser tomado como sendo a origem. Denotando por  $U$  a bacia de repulsão do infinito por  $h$ , é possível mostrar a existência de um conjunto conexo e compacto  $\Sigma = \partial U \subset \mathbb{R}^2$ , que contém a origem, é um atrator global para  $h$  e possui interior vazio. Além disso, definindo  $h(\infty) = \infty$ , podemos considerar a extensão natural de  $h$  para a esfera de Riemann  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , para obtermos que  $U$  é um domínio conexo, simplesmente conexo e invariante de  $S^2$ . Desse modo, a teoria de fins primos desenvolvida por Carathéodory pode ser aplicada. Pretendemos fazer um link entre a teoria do número de rotação de fins primos associado ao conjunto  $U$  com a existência de órbitas periódicas. Assim, estudaremos se o número de rotação de alguma forma liga o comportamento dinâmico local e global.

Dado  $h \in \mathcal{H}$ , quando o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, alguns resultados foram obtidos em [COR10] e [Mat13]. Em [COR10], os autores forneceram uma hipótese suficiente para que a origem seja o único ponto periódico de  $h$ . Em [Mat13], Matsumoto provou o seguinte Teorema:

**Teorema 1.1.1.** *Para quaisquer números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , existe um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  tal que  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$  e  $\rho(h, U_0) = \beta$ , onde  $U_\infty$  é a bacia de repulsão de  $\infty$  e  $U_0$  a bacia de atração de 0 por  $h$ .*

Este resultado mostra que existem homeomorfismos  $h \in \mathcal{H}$  com número de rotação  $\rho(h, U)$  irracional e que possuem órbitas periódicas em  $\partial U$ . Dito de outro modo, a existência de órbitas periódicas não implica que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional. Nos próximos capítulos, apresentaremos detalhadamente estes resultados.

Tendo em vista o resultado de Matsumoto, o principal objetivo desta tese é estudar a seguinte pergunta.

**Pergunta 1:** Dado  $h \in \mathcal{H}$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ , se o número de rotação  $\rho(h, U)$  for irracional, é possível existir um ponto periódico de sela com intersecção homoclínica  $C^1$ -transversa na fronteira de  $U$ ?

## 1.2 Resultados Obtidos

No capítulo 2 apresentaremos os resultados básicos para o entendimento da teoria, definiremos o número de rotação de um homeomorfismo do círculo, o que é a compactificação de fins primos de um aberto conexo, simplesmente conexo e invariante do plano ou da esfera e exibiremos alguns resultados importantes destas teorias.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo detalhado da classe de homeomorfismos  $\mathcal{H}$  e a exposição dos principais resultados de [COR10] e [Mat13] que motivaram esta tese. Ainda no capítulo 3, provaremos seguintes resultados:

**Teorema 1.2.1.** *Para todo  $h \in \mathcal{H}$  com  $\rho(h, U)$  racional, existe ponto periódico diferente da origem em  $\partial U$ . Adicionalmente, supondo que  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$  e que  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , então este ponto periódico é acessível.*

No próximo Teorema, provaremos que existe  $h \in \mathcal{H}$  que responde positivamente à Pergunta 1. Este  $h$  não é um difeomorfismo, mas é um difeomorfismo local em disco topológico que contém os pontos periódicos de sela.

**Teorema 1.2.2.** *Dado  $\alpha \in (0, 1)$  irracional, existe  $h \in \mathcal{H}$  com número de rotação  $\rho(h, U) = \alpha$  e tal que  $\partial U$  possui um ponto  $p$  de sela com intersecção homoclínica.*

Tendo em vista o Teorema anterior, no capítulo 4 estudamos a Pergunta 1 com a hipótese adicional de que  $\Sigma = \overline{W^u(p)}$ , para  $p \in \Sigma$  um ponto de sela com intersecção homoclínica. Neste caminho, provamos o seguinte resultado que responde negativamente a pergunta Pergunta 1 quando  $h$  é uma ferradura de Smale generalizada:

**Teorema 1.2.3.** *Dado  $h \in \Sigma$ , se  $h$  é uma ferradura de Smale generalizada, então o número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}$ .*

A seguir, iremos apresentar algumas definições necessárias para o enunciado do próximo Teorema.

Um *endcut* de  $U$  em  $\partial U$  é um arco  $\gamma : [0, 1) \rightarrow U$  tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x$ , para algum  $x \in \partial U$  (tal que  $\gamma$  estende continuamente para um arco  $[0, 1] \rightarrow \overline{U}$  com  $\gamma(1) = x \in \partial U$ ).

Um ponto  $a \in \partial U$  é dito *acessível* (por  $U$ ) se é um ponto final para algum endcut. Neste caso, diremos que o endcut  $\gamma$  acessa o ponto  $a$ .

Um *crosscut*  $c$  de  $U$  é a imagem de um arco  $\gamma : (0, 1) \rightarrow U$  que pode ser estendido para um arco  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \bar{U}$  tal que seus dois pontos finais são pontos acessíveis diferentes em  $\partial U$ . No Lema 2.2.2 provaremos que um crosscut divide  $U$  em duas regiões que são topologicamente discos abertos e chamadas de *cross-sections*.

Finalizando o capítulo 4, provaremos que se for possível a existência de um difeomorfismo  $C^1$ ,  $r \geq 1$ , genérico num certo sentido a ser precisado, com  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$  e tal que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, necessariamente  $h$  deve satisfazer a propriedade do próximo Teorema, onde  $\sigma_a$  é qualquer crosscut com pontos finais nos pontos  $a$  e  $h(a)$ ,  $D_1$  e  $D_2$  as componentes conexas abertas de  $(\Sigma \cup \sigma_a)^c$  e  $K_i^a = \partial D_i \setminus \sigma_a$ , com  $i = 1, 2$ .

**Teorema 1.2.4.** *Se o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional então, para todo ponto  $a \in \Sigma$  acessível, temos que  $K_1^a = K_2^a = \Sigma$ .*

# Capítulo 2

## Preliminares

Ao longo deste capítulo, será feita uma breve exposição de conceitos e resultados preliminares cujo entendimento é primordial para a compreensão dos resultados obtidos nesta tese. Entre tais conceitos, definiremos o número de rotação de um homeomorfismo do círculo, o que é a compactificação de fins primos de um aberto conexo e simplesmente conexo do plano ou da esfera e exibiremos alguns resultados importantes destas teorias.

### 2.1 Conceitos Básicos e Definições

Nesta seção veremos conceitos básicos e definições que serão utilizados no decorrer desta tese. De um modo geral sempre consideramos como espaço ambiente o plano  $\mathbb{R}^2$ . Em alguns momentos exigimos que o espaço ambiente seja a esfera de Riemann  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

Consideramos  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo. Um ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  é *periódico* quando existir um inteiro  $p > 0$  tal que  $h^p(x) = x$ , o menor  $p > 0$  com tal propriedade é o período de  $x$ . Quando  $p = 1$ ,  $x$  é chamado de *ponto fixo*. Denotaremos o conjunto de todos os pontos periódicos de  $h$  por  $Per(h)$ . Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é invariante por  $h$ , quando  $h(A) = A$ . Um conjunto compacto  $A$  é chamado de *conjunto minimal* quando todas as órbitas contidas em  $A$  são densas em  $A$ . As operações topológicas de fecho, fronteira e

interior de um conjunto, serão denotadas por  $\overline{A}$ ,  $\partial A$  e  $\text{int}A$  e entendidas com relação ao plano ou a esfera.

Um conjunto  $A$  contido no plano ou na esfera é topologicamente um disco aberto (resp. fechado) se é homeomorfo ao disco aberto (resp. fechado) unitário em  $\mathbb{R}^2$ . Similarmente, um anel topológico aberto (resp. fechado) é um conjunto homeomorfo ao anel  $S^1 \times (0, 1)$  (resp.  $S^1 \times [0, 1]$ ).

Dois homeomorfismos  $h$  e  $g$  são conjugados se existe um terceiro homeomorfismo  $f$  tal que  $h \circ f = f \circ g$ . Dizemos que um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  é um *continuo*, caso  $S$  seja conexo, compacto e não-vazio. Se  $S$  contém mais de um ponto, dizemos que  $S$  é um contínuo não-degenerado. Finalmente, se  $T \subset S$  é um contínuo, dizemos que  $T$  é um *subcontínuo* de  $S$ .

Considere  $h : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  onde  $M$  é uma superfície e seja  $p \in M$  um ponto fixo de  $h$ . Denotando por  $Dh(p)$  a matriz Jacobiana de  $h$  no ponto  $p$ , temos as seguintes possibilidades:

- um autovalor de  $Dh(p)$  é igual a 1 ou  $-1$ : o ponto  $p$  é chamado *ponto degenerado*;
- os autovalores de  $Dh(p)$  são dois números complexos diferentes de 1 e ambos com módulo 1: o ponto  $p$  é *ponto elíptico*;
- os autovalores de  $Dh(p)$  são ambos de módulo menor que 1: o ponto  $p$  é chamado *atrator*;
- os autovalores de  $Dh(p)$  são ambos de módulo maior que 1: o ponto  $p$  é chamado *fonte*;
- os autovalores  $\lambda$  e  $\sigma$  de  $Dh(p)$  são reais e satisfazem  $0 < |\lambda| < 1 < |\sigma|$ : o ponto  $p$  é chamado de *ponto de sela*.

Se os dois autovalores de  $Dh(p)$  tem módulo diferente de 1,  $p$  é chamado de ponto fixo hiperbólico. Por simplicidade, no último caso, assumimos que  $0 < \lambda < 1 < \sigma$ . Vamos

agora enunciar um Teorema importante, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ha82].

**Teorema 2.1.1.** (*Hartman, 1964*). *Seja  $h$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em uma superfície  $M$  e  $p \in M$  um ponto fixo de sela para  $h$ . Então  $h$  admite coordenadas linearizantes em uma vizinhança de  $p$ .*

Aqui, entendemos por *coordenadas linearizantes* a uma mudança de coordenadas que torne a função linear nas novas coordenadas. Assumiremos aqui que em uma vizinhança  $U$  de  $p$ ,  $x_1$  e  $x_2$  são coordenadas tais que  $p = (0, 0)$  e tal que

$$\tilde{h}(x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \sigma \cdot x_2),$$

onde  $\tilde{h}$  é a função nas novas coordenadas e  $0 < \lambda < 1 < \sigma$  são os autovalores de  $Dh(p)$ . Então, se  $g$  é a mudanças de coordenadas,  $\tilde{h} = g \circ h \circ g^{-1}$ . Porém, nas próximas seções omitiremos o sinal  $\sim$  de  $h$  por simplicidade de notação.

Se  $p$  é um ponto fixo de sela de  $h$ , os conjuntos

$$\mathcal{W}^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) \rightarrow p\}$$

e

$$\mathcal{W}^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \rightarrow -\infty} h^n(x) \rightarrow p\}$$

são chamados de *variedade estável* e *variedade instável* do ponto  $p$ , respectivamente. Se  $p$  é um ponto periódico de período  $n$  para  $h$ , então  $p$  é um ponto fixo para  $h^n$ . Logo  $\mathcal{W}^s(p)$  e  $\mathcal{W}^u(p)$  serão as variedades estáveis e instáveis com respeito a  $h^n$ . Pelo Teorema da variedade estável, estas variedades são curvas conexas imersas injetivamente que se intersectam transversalmente no ponto  $p$ , ver [MePa77].

Os *ramos estáveis* (resp. *instáveis*) de um ponto periódico de sela  $p$  são as duas componentes de  $\mathcal{W}^s(p) \setminus \{p\}$  (resp.  $\mathcal{W}^u(p) \setminus \{p\}$ ). Uma *conexão de selas* é um ramo  $\Gamma$  que é um ramo estável de um ponto periódico de sela  $p$  e um ramo instável de um ponto periódico

de sela  $q$ , (talvez igual a  $p$ ). Um ponto *homoclínico* de  $p$  é um ponto  $x \in \mathcal{W}^s(p) \cap \mathcal{W}^u(p)$ . Logo,  $h^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \pm\infty$  e é chamado ponto *homoclínico transversal* quando  $\mathcal{W}^s(p)$  intersecta  $\mathcal{W}^u(p)$   $C^1$ -transversalmente em  $x$ , ou seja,  $T_x \mathcal{W}^s(p) \oplus T_x \mathcal{W}^u(p) = T_x M$ .

Para  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente e  $p$  um ponto fixo, as variedades estável e instável locais de  $h$  no ponto  $p$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^s(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(h^n(x), p) \leq \varepsilon\} \text{ e} \\ \mathcal{W}_\varepsilon^u(p) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{para todo } n \in \mathbb{N}, d(h^{-n}(x), p) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Sejam  $B^s$  uma bola contida em  $\mathcal{W}_\varepsilon^s(p)$ ,  $B^u$  uma bola contida em  $\mathcal{W}_\varepsilon^u(p)$  e  $V = B^s \times B^u$ . Considere  $q \in \mathcal{W}_\varepsilon^s(p)$  e um disco  $D^u$  de dimensão 1,  $C^1$ -transversal a  $\mathcal{W}_\varepsilon^s(p)$  em  $q$ . A seguir, enunciaremos um resultado muito útil a respeito de variedades estável e instável, cuja demonstração pode ser encontrada no livro [MePa77].

**Teorema 2.1.2.** ( *$\lambda$ -Lema ou Lema da Inclinação*). *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^k$ . Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $V = B^s \times B^u$  e  $q \in \mathcal{W}^s(p) \setminus \{p\}$  como acima. Seja  $D^u$  um disco mergulhado de dimensão 1 tal que  $D^u$  é  $C^1$ -transversal a  $\mathcal{W}_\varepsilon^s(p)$ . Defina  $D_1^u = h(D^u) \cap (E^u(\varepsilon) \times E^s(\varepsilon))$  e  $D_{n+1}^u = h(D_n^u) \cap (E^u(\varepsilon) \times E^s(\varepsilon))$ . Então,  $D_n^u$  converge para  $\mathcal{W}_\varepsilon^u(p)$  na topologia  $C^k$ .*

Considere  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo e  $m$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$  que associa um número positivo para cada conjunto aberto e não vazio. Nós dizemos que  $h$  preserva  $m$  quando  $m(h(E)) = m(E)$  para todo Boreliano  $E \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $m(h(E)) < m(E)$  para todo Boreliano, dizemos que  $h$  contrai área. Nos referimos a  $m(E)$  como a área do conjunto  $E$ .

Denotamos o conjunto dos difeomorfismos de classe  $C^r$  sobre  $\mathbb{R}^2$  por  $\text{Diff}^r(\mathbb{R}^2)$ . Uma propriedade para os difeomorfismos de classe  $C^r$  em  $\mathbb{R}^2$  é dita ser *genérica*, se existe um conjunto residual  $R \subset \text{Diff}^r(\mathbb{R}^2)$  tal que a propriedade é válida para todo  $g \in R$ , onde um conjunto de um espaço de Baire é chamado residual caso contenha uma intersecção enumerável de abertos densos.



No conjuntos do difeomorfismos que preservam áreas em uma superfície compacta, os seguintes são alguns exemplos de propriedades genéricas conhecidas:

- G1 Para quaisquer dois pontos periódicos hiperbólicos  $p$  e  $q$ , as intersecções da variedade estável  $\mathcal{W}^s(p)$  e variedade instável  $\mathcal{W}^u(q)$  são transversais. Isto foi provado por Robinson [Ro70].
- G2 Todos os pontos periódicos são elípticos ou hiperbólicos. Isto também foi provado por Robinson em [Ro70]. G1 e G2 juntos são frequentemente referidos como a condição de Kupka-Smale para difeomorfismos que preservam área.
- G3 Para todo ponto periódico hiperbólico  $p$ , se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são dois ramos da variedade estável ou variedade instável de  $p$ , então  $\overline{\Gamma_1} = \overline{\Gamma_2}$ . Para  $S^2$ , isto foi provado por Mather [Ma82].
- G4 Em  $S^2$ , seja  $\Gamma_1$  um ramo da variedade estável de um ponto periódico hiperbólico  $p$  e  $\Gamma_2$  um ramo da variedade instável de  $p$ , então  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ . Isto foi provado por Pixton em [Pi82]. Para toros, este mesmo resultado foi provado por Oliveira em [Oli87].
- G5 No conjunto dos difeomorfismo de classe  $C^r$  que preservam área em  $S^2$ , a união das variedades estável e instável de pontos periódicos hiperbólicos são densas em  $S^2$ . Este resultado foi provado por Franks e Le Calvez [FC03].

O próximo resultado foi provado por Pixton [Pi82]. Em particular, este resultado mostrará, nas nossas hipóteses, que genericamente, se  $p$  é um ponto fixo de sela e o número de rotação de fins primos é irracional, então a variedade  $\mathcal{W}^u(p)$  intersecta transversalmente os dois ramos da variedade estável de todos os pontos periódicos de sela  $q \in \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ .

**Teorema 2.1.3.** *Para todo  $r \geq 1$ , existe um conjunto residual  $G_r \in \text{Diff}^r(\mathbb{R}^2)$  tal que, para todo  $g \in G_r$  a seguinte propriedade é satisfeita:*

*Sejam  $p$  e  $q$  são pontos periódicos de sela. Então, o fecho de um ramo instável de  $\mathcal{W}^u(p)$  intersecta um ramo estável de  $\mathcal{W}^s(q)$  se, e somente se, este ramo de  $\mathcal{W}^u(p)$  intersecta tal ramo de  $\mathcal{W}^s(q)$  de forma  $C^1$ -transversa.*

## 2.2 Uma Propriedade dos continuos

Os próximos resultados, referentes aos continuos, são de extrema importância para os capítulos posteriores.

Ao longo desta seção, utilizaremos o seguinte resultado clássico, que pode ser encontrado no livro de Topologia Algébrica de Spanier [Spa66]:

**Teorema 2.2.1** (Teorema da Curva de Jordan). *Seja  $J \subset \mathbb{R}^2$  um círculo topológico. Então o complementar de  $J$  em  $\mathbb{R}^2$  é a união de dois abertos conexos por caminhos que possuem  $J$  como fronteira comum. Além disto, apenas um destes abertos é limitado.*

**Teorema 2.2.2** (Teorema de Schönflies). *Se  $\alpha \subset \mathbb{R}^2$  é um arco simples, então existe homeomorfismo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva orientação, tal que  $g(\alpha) = [0, 1] \times \{0\}$ . Se  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  é uma curva de Jordan, então existe homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva orientação, tal que  $h(\gamma) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$ .*

**Lema 2.2.1.** *Seja  $\Sigma$  um continuo do plano, cujo complementar é conexo. Se  $\alpha$  é um crosscut, então  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui componente conexa limitada.*

*Demonstração.* Como  $\Sigma \cup \alpha$  é um continuo, existe  $r > 0$  de modo que  $(\Sigma \cup \alpha) \subset B_r(0)$ . Então, como  $B_r(0)^c$  é um conexo, qualquer outra componente conexa de  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  será limitada e estará contida em  $B_r(0)$ . Para concluir a demonstração do Lema, mostraremos que  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui uma componente conexa contida em  $B_r(0)$ . Para isto, iremos supor, por absurdo, que  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  é conexo.

Seja  $p \in \alpha$  com  $p \notin \Sigma$ . Pelo Teorema de Schönflies, existe um homeomorfismo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $g(\alpha) = [0, 1] \times \{0\}$ . Pela escolha de  $p$ , observe que  $g(p)$  não é um extremo de  $[0, 1] \times \{0\}$ . Logo, podemos tomar  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeno de modo que  $B_{\varepsilon_0}(g(p)) \setminus g(\alpha)$  possui duas componentes conexas e  $g(\Sigma) \cap B_{\varepsilon_0}(g(p)) = \emptyset$ . Sejam  $A$  e  $B$  estas componentes. Tome  $a \in A$  e  $b \in B$ , de modo que o seguimento  $\overline{ab}$  intersecta  $g(\alpha)$  transversalmente no ponto  $p$ .

Então,  $V = g^{-1}(B_{\varepsilon_0}(g(p)))$  é um aberto,  $V \setminus \alpha$  possui duas componentes conexas e

$V \cap \Sigma = \emptyset$ . Além disso, definindo por  $\beta = g^{-1}(\overline{ab})$  com extremos nos pontos  $x = g^{-1}(a)$  e  $y = g^{-1}(b)$ , resulta que  $x$  e  $y$  estão em diferentes componentes conexas de  $V$  e  $\beta \cap \alpha = p$ .

Agora, note que  $(\Sigma \cup \alpha \cup \beta)^c$  é conexo, isto porque  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  é conexo e  $(\Sigma \cup \alpha) \cap \beta = p$ . Então, como conjuntos abertos e conexos de  $\mathbb{R}^n$  são conexos por caminhos, existe um caminho  $\gamma \subset (\Sigma \cup \alpha \cup \beta)^c$  com extremos nos pontos  $x$  e  $y$ . Logo,  $\gamma \cup \beta$  é uma curva de Jordan e, portanto, segue do Teorema 2.2.1 que  $(\gamma \cup \beta)^c$  possui exatamente duas componentes conexas. Denote por  $U_1$  e  $U_2$  estas componentes.

Como  $\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = p$ , resulta que os pontos finais do crosscut  $\alpha$  estão em diferentes componentes conexas de  $(\gamma \cup \beta)^c$ . Consequentemente,  $\Sigma \cap U_1 \neq \emptyset$  e  $\Sigma \cap U_2 \neq \emptyset$ . No entanto, como  $\Sigma$  é conexo e  $\beta \cap \Sigma = \emptyset$ , obtemos que  $\Sigma \cap \gamma \neq \emptyset$ . Mas isto contradiz a hipótese de que  $\gamma \subset (\Sigma \cup \alpha)^c$ . Portanto,  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui componente conexa limitada.  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Nas hipóteses do Lema 2.2.1, temos que  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui exatamente uma componente conexa limitada.*

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos que se  $G$  é uma componente conexa de  $(\Sigma \cup \alpha)^c$ , então  $\alpha \setminus \Sigma \subset \partial G$ . Para isto, dado  $p \in \alpha \setminus \Sigma$ , utilizando o Teorema de Schonflies como na demonstração do Lema 2.2.1, considere  $V_p$  uma vizinhança aberta de  $p$  tal que  $V_p \setminus \alpha$  possui exatamente duas componentes conexas.

Fixe  $q \in G$  e tome  $\varepsilon > 0$  satisfazendo  $B_\varepsilon(p) \subset V_p$  e  $q \notin B_\varepsilon(p)$ . Também, considere  $S$  uma circunferência de centro em  $p$  e raio  $r < \varepsilon$ . Iniciando no ponto  $p$  e percorrendo  $\alpha$  nas duas direções possíveis, sejam  $A$  e  $B$  os primeiros pontos da intersecção  $\alpha \cap S$ . Como  $\Sigma$  é conexo, note que

$$M = (\Sigma \cup \alpha) \setminus (\alpha \cap B_r(p))$$

é compacto, conexo e  $M^c$  é um conjunto conexo aberto. Isto vai seguir do fato de que  $\alpha$  intersecta  $\Sigma$  apenas nos dois extremos de  $\alpha$  e tomamos  $A \neq B$ .

Então, considere uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ . Denotando por  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in S\}$  e  $m_0 = \gamma(t_0)$ , observe que

- (i)  $t_0 \neq 1$ , pois, caso contrário,  $m_0 = \gamma(1) = q \in S$ , uma contradição visto que  $S \subset B_\varepsilon(p)$  e tomamos  $q \notin B_\varepsilon(p)$ .
- (ii)  $m_0 \notin (\Sigma \cup \alpha)$ , pois, caso contrário,  $m_0 \in (\alpha \cap S) \subset M$ , é isto contradiz o fato de que  $\alpha \cap M = \emptyset$ .

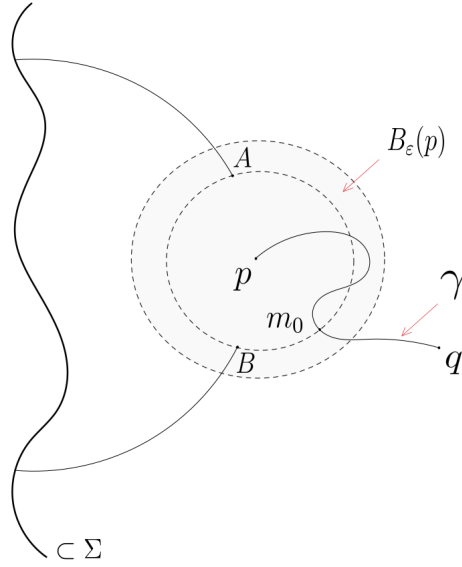


Figura 2.1: Informações dos conjuntos  $\Sigma$  e  $M$ .

Façamos a restrição

$$\gamma|_{[t_0, 1]} : [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus M.$$

Dessa forma,  $\gamma([t_0, 1]) \subset (\Sigma \cup \alpha)^c$ , pois se  $\gamma([t_0, 1]) \cap (\Sigma \cup \alpha) \neq \emptyset$ , existiria  $t_1 \in (t_0, 1)$  satisfazendo  $\gamma(t_1) \in (\Sigma \cup \alpha) \setminus M$  e, portanto,  $\gamma(t_1)$  pertenceria a bola  $B_r(p)$  que tem  $S$  como fronteira. Consequentemente, existiria  $t_2 > t_1$  tal que  $\gamma(t_2) \in S$ , o que se traduz em um absurdo com a definição de  $t_0$ .

Assim,  $\gamma([t_0, 1])$  é um caminho inteiramente contido em  $(\Sigma \cup \alpha)^c$ , estando portanto contido em uma mesma componente conexa  $G$ . Portanto,  $m_0 \in B_\varepsilon(p) \cap G$ , ficando provado que  $B_\varepsilon(p) \cap G \neq \emptyset$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Então, fazendo  $\varepsilon$  convergir para 0, obtemos que  $p \in \partial G$ , como queríamos demonstrar.

Para finalizar a demonstração do Lema, tome  $p \in \alpha \setminus \Sigma$ . Dado  $B_\varepsilon(p) \subset V_p$ , sejam  $U_1$  e  $U_2$  as componentes conexas de  $B_\varepsilon(p) \setminus (\Sigma \cup \alpha)$ . Pelo Lema 2.2.1, sabemos que  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui pelo menos duas componentes conexas. Sejam  $G_1$  e  $G_2$  duas dessas componentes e suponhamos que  $U_1 \subset G_1$  e  $U_2 \subset G_2$ . Supondo por absurdo que exista uma outra componente conexa  $G$  de  $(\Sigma \cup \alpha)^c$ , segue da primeira parte desta demonstração que  $p \in \partial G$ , logo, devemos ter

$$B_\varepsilon(p) \cap G \neq \emptyset.$$

Portanto,  $G = G_1$  ou  $G = G_2$ , ou seja,  $(\Sigma \cup \alpha)^c$  possui apenas duas componentes conexas.

□

## 2.3 Número de Rotação de Homeomorfismos do Círculo

Nesta seção iremos tratar de um conceito de extrema importância à teoria subsequente, que é o conceito de número de rotação para homeomorfismos em  $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  que preservam orientação. Tal conceito foi apresentado primeiramente por Poincaré em [Po52]. As propriedades dinâmicas dos homeomorfismos do círculo estão intimamente ligadas ao seu número de rotação, conforme descrito por um Teorema de classificação que será apresentado abaixo.

O número de rotação mede o deslocamento médio de pontos no recobrimento. Tal deslocamento médio é feito considerando-se partes finitas da órbita de um determinado ponto no recobrimento e depois tomando-se o limite. Este número independe do ponto  $x \in S^1$  e as propriedades dos homeomorfismos variam de acordo com sua racionalidade ou não.

**Definição 2.3.1.** *Seja  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação. Um homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um levantamento de  $h$  se*

$$h(\pi(\tilde{x})) = \pi(H(\tilde{x})),$$

com  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a aplicação de recobrimento definida por  $\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} \pmod{1}$ .

Se  $H$  é um levantamento de  $h$ , não é difícil verificar que um homeomorfismo  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também é um levantamento de  $h$  se, e somente se,  $G(\tilde{x}) = H(\tilde{x}) + n$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Isto porque  $H - G$  é uma função contínua e assumindo valores inteiros, logo constante.

**Proposição 2.3.1** (Poincaré). *Seja  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação e  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $h$  para o recobrimento universal. Então o limite*

$$\rho(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}$$

*existe para todo  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ , é independente de  $\tilde{x}$  e está definido a menos de um inteiro, isto é, se  $H$  e  $G$  forem levantamentos de  $h$ , então  $\tau(H) - \tau(G) \in \mathbb{Z}$ .*

**Definição 2.3.2.** *Seja  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação e  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $h$ . O número*

$$\rho(h) = \pi(\rho(H))$$

*diz-se o número de rotação de  $h$ , com  $H$  qualquer levantamento de  $h$  e  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a aplicação de recobrimento.*

A Proposição 2.3.1 garante que, para todo homeomorfismo do círculo que preserva orientação, o número  $\rho(h)$  existe, está bem definido e independe de  $x$ .

Outro resultado relevante é a seguinte Proposição que afirma que o número de rotação é um invariante topológico da dinâmica.

**Proposição 2.3.2.** *Sejam  $h$  e  $g$  homeomorfismos do círculo que preservam orientação. Se  $h$  e  $g$  são topologicamente conjugados, então  $\rho(h) = \rho(g)$ .*

A próxima proposição mostra como o conceito de número de rotação serve de critério para garantir a existência de pontos periódicos para um homeomorfismo  $h : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva orientação.

**Proposição 2.3.3** (Poincaré). *Seja  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação.*

- $\rho(h^n) = n\rho(h)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .
- $\rho(h) \in \mathbb{Q}$  se, e somente se,  $h$  tem um ponto periódico e todas as órbitas periódicas têm o mesmo período, que é igual ao denominador de  $\rho(h)$ , pensando na fração irredutível.

**Exemplo 2.3.1.** *Entre os tipos mais simples de homeomorfismos de  $S^1$  que preservam orientação podemos citar as rotações. Seja  $\alpha \in [0, 1)$  e considere a rotação  $R_\alpha$  em  $S^1$ . Lembremos que a órbita de um ponto  $x \in S^1$  pela rotação  $R_\alpha$  é*

$$O_{R_\alpha}(x) = \{x + n\alpha \pmod{1} : n \geq 0\}.$$

*Considere um levantamento  $\tilde{R}_\alpha(x) = x + \alpha + k$ . Se  $\alpha$  é um número racional,  $\alpha = p/q$  com  $p$  e  $q$  primos entre si, então  $q\alpha = p \in \mathbb{Z}$ , e neste caso a órbita  $O_{R_\alpha}(x)$  é periódica com período  $q$ . Quando  $\alpha$  é irracional, não existem órbitas periódicas e a órbita de qualquer ponto é densa em  $S^1$ . Em ambos os casos,*

$$\begin{aligned} \rho(R_\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}_\alpha^n(x) - x}{n} \pmod{1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \alpha n + kn - x}{n} \pmod{1} \\ &= \alpha + k \pmod{1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

O seguinte Teorema remonta ao trabalho de Poincaré e Denjoy [De32] e classifica o comportamento dinâmico dos homeomorfismos do círculo que preservam orientação em termos do número de rotação.

**Teorema 2.3.1** (Classificação dos homeomorfismos do círculo). *Seja  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação.*

- *Assuma que  $\rho(h) = p/q$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si. Então,  $h$  tem pelo menos uma órbita com período  $q$  e toda órbita periódica deve ter o mesmo período  $q$ . Adicionalmente, toda órbita positiva ou negativa converge para uma órbita periódica.*

- *Assuma que  $\rho(h) \notin \mathbb{Q}$ . Existem duas possibilidades:*
  - *Se existir uma órbita densa, então  $h$  é topologicamente conjugada a uma rotação irracional. Portanto toda órbita é densa.*
  - *Caso contrário, existe um conjunto invariante de Cantor  $C$  que é o único conjunto minimal de  $S^1$  tal que, cada órbita positiva e negativa converge para  $C$ .*

O homeomorfismo que pertence a este último tipo, possuindo número de rotação irracional e um conjunto invariante de Cantor, é chamado de homeomorfismo de Denjoy. Uma propriedade muito importante para tais homeomorfismos é que eles não podem existir em classe  $C^2$ , ver [De32].

Dados dois pontos  $x$  e  $y$  em  $S^1$  com  $x \neq y$ , veja que existem exatamente dois intervalos em  $S^1$  com extremos em  $x$  e  $y$ . Se um número de rotação  $\rho(h)$  é irracional, então todo ponto  $x \in S^1$  não é periódico e podemos considerar um intervalo  $I$  como um dos intervalos com extremos nos pontos  $x$  e  $h(x)$ . O próximo Lema, que será importante no Capítulo 4, verifica-se para qualquer escolha do intervalo  $I$  com extremos em  $x$  e  $h(x)$ .

**Lema 2.3.1.** *Considere  $h : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação,  $x \in S^1$  e  $I \subset S^1$  um intervalo fechado com extremos nos pontos  $x$  e  $h(x)$ . Se o número de rotação  $\rho(h)$  for irracional, temos que a semi-órbita positiva ou negativa de qualquer ponto  $y$  em  $S^1$  intersecta  $I$ .*

*Demonstração.* Vamos provar o Lema para semi-órbitas positivas, visto que a demonstração para semi-órbitas negativas é exatamente análoga. Considere  $\{h^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$  a semi-órbita positiva de  $y$ . Para provarmos o lema, veja que é suficiente mostrarmos que os iterados para trás de  $I$  cobrem  $S^1$ , ou seja, que

$$S^1 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} h^{-k}(I).$$

Para isto, defina  $I_k = h^{-k}(I)$  e note que a sequência  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é formada por intervalos consecutivos, ou seja, dado  $k \in \mathbb{N}$ , os intervalos  $I_k$  e  $I_{k+1}$  têm o ponto final  $h^{-k}(y)$  em



comum. Logo, se  $S^1 \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$  então a sequência de pontos  $\{h^{-k}(y)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que são os extremos dos intervalos  $I_k$ , converge para algum  $z \in S^1$ . Se isto acontecer, veja que  $z$  é um ponto fixo, pois

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{-k}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} h^{-k+1}(y) = h\left(\lim_{k \rightarrow \infty} h^{-k}(y)\right) = h(z).$$

Como isto contradiz a hipótese de que  $\rho(h)$  é irracional, o lema está provado.  $\square$

## 2.4 Teoria de Fins Primos

Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo e  $U \subset \mathbb{R}^2$  um disco topológico aberto tal que  $h(U) = U$ . Se  $\partial U$  é uma curva de Jordan, então  $\partial U$  é homeomorfo a  $S^1$  e podemos associar um número de rotação  $\rho(h, U)$  como o número de rotação de  $h|_{\partial U}$ . Neste caso, a teoria desenvolvida por Poincaré nos diz que existe ponto periódico em  $\partial U$  se, e somente se, o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional. No entanto, em geral, este resultado de Poincaré não é válido quando  $\partial U$  não é uma curva de Jordan.

A teoria de fins primos, desenvolvida por Carathéodory [Ca13] em 1913, nos permite substituir a fronteira de um domínio conexo e simplesmente conexo por uma fronteira "ideal" com a propriedade de que, com a topologia que surge naturalmente da sua construção, esta nova fronteira é homeomorfa ao círculo. Uma breve descrição da teoria de fins primos será apresentada a seguir. Para mais informações e provas, o leitor pode consultar [Ma82, Po91].

Dado um homeomorfismo  $h$  do plano ou da esfera que preserva orientação, considere  $U$  um aberto conexo e simplesmente conexo invariante por  $h$ . Um sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é dita uma *cadeia de crosscuts* se satisfaz as seguintes condições:

- $c_n$  separa  $c_{n-1}$  e  $c_{n+1}$ , isto é,  $c_{n-1}$  e  $c_{n+1}$  estão em diferentes componentes de  $U \setminus c_n$ .
- $\bar{c}_n \cap \bar{c}_{n+1} = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Associada a uma cadeia  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de crosscuts, existe a sequência  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $V_n$  é a

componente de  $U \setminus c_n$  que contém  $c_{n+1}$ . Uma sequência  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$  é chamada de *cadeia*.

Dizemos que uma cadeia  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  *divide* outra cadeia  $\{V'_n\}_{n \geq 0}$  quando, dado qualquer inteiro  $n$ , existir um  $m$  de modo que  $V_m \subset V'_n$ . Duas cadeias que se dividem mutuamente são chamadas de *cadeias equivalentes*. É fácil verificar que isto define um relação de equivalência. Uma cadeia  $V = \{V_n\}_{n \geq 0}$  é chamada de *cadeia prima* se qualquer cadeia que dividir  $V$  for equivalente a  $V$ . Um *fim primo* de  $U$  é a classe de equivalência de uma cadeia prima. O conjunto dos fins primos de  $U$  será denotado por  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(U)$ .

Para definirmos uma topologia em  $U^* = U \cup \mathbb{P}$ , considere  $\mathfrak{p} \in U^*$  um fim primo e assumamos que a cadeia  $\{V_1 \supset V_2 \supset \dots\}$  representa  $\mathfrak{p}$ . Dado  $W$  um subconjunto aberto de  $U$ , diremos que o fim primo  $\mathfrak{p}$  divide  $W$  se existir um  $i$  tal que  $V_i \subset W$ . Denote por

$$\tilde{W} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(U) : \mathfrak{p} \text{ divide } W\}$$

o conjunto de todos os fins primos que dividem  $W$ . Definimos uma base de abertos para a compactificação de fins primos de  $U$  como a família de todos os conjuntos  $\tilde{W}$ , com  $W$  um aberto em  $U$ , juntamente com o conjunto de todos os abertos de  $U$ . Estes abertos formam uma base para nossa topologia natural em  $U^*$ .

Com esta topologia, uma sequência  $\{\mathfrak{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de fins primos converge para um fim primo  $\mathfrak{p}$  representado pela cadeia  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  quando, para todo  $m$ , existe um  $N(m) \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathfrak{p}_n \in \tilde{V}_m$  para todo  $n > N(m)$ . O conjunto  $U^*$  com esta topologia é chamado de *compactificação de fins primos de  $U$* .

O próximo Teorema, devido à Carathéodory, é um clássico e fundamental resultado da teoria de fins primos e nos diz que  $U^*$  é topologicamente o disco unitário fechado. O enunciado abaixo foi retirado de um artigo de Cartwright e Littlewood sobre existência de pontos fixos em um contínuo do plano [Ca13]:

**Teorema 2.4.1.** (*Carathéodory*) *Seja  $U \subset S^2$  um aberto conexo e simplesmente conexo. Suponha que  $\partial U$  possui mais de um ponto, e que  $\mathbb{D} = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| \leq 1\}$ . Então existe um homeomorfismo  $\tau : U^* \rightarrow \mathbb{D}$ , de maneira que os pontos em  $U$  são enviados em*

pontos no interior do disco  $\mathbb{D}$ , e os fins primos de  $U^*$  correspondem a pontos da fronteira  $S^1$ . Além disto, se  $h$  é um homeomorfismo de  $S^2$  que deixa  $U$  invariante, então existe uma aplicação  $\tilde{h}$  em  $U^*$ , de maneira que  $\tilde{h} = h$  em  $U$ .

Com este Teorema, conseguimos estudar a dinâmica de  $h$  na fronteira de  $U$  estudando a correspondente dinâmica em  $S^1$ . Como fins primos são mandados em fins primos por  $h$ , e a fronteira de  $U$  é  $h$ -invariante, temos que  $h$  induz um homeomorfismo  $\tilde{h}$  em  $U^*$ . Seja  $\tau$  o homeomorfismo entre  $U^*$  e  $\overline{D}$ . Então o círculo  $S^1$  é invariante pelo homeomorfismo  $h' = \tau \circ \tilde{h} \circ \tau^{-1}$  de  $\overline{D}$  que preserva orientação, visto que  $h$  preserva orientação. Este fato é consequência de resultados conhecidos da teoria de variedades com bordo. Portanto, podemos estudar a dinâmica de  $h$  na fronteira de  $U$  através do homeomorfismo  $h'$ , associando um número de rotação para  $h$  e  $U$  definido por  $\rho(h, U) := \rho(h'|_{S^1})$ .

**Definição 2.4.1.** *Considere  $h : S^2 \rightarrow S^2$  um homeomorfismo que preserva orientação e que deixa invariante um conjunto aberto  $U$  conexo e simplesmente conexo. Seja  $h' : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$  o homeomorfismo induzido por  $h$ , como definido acima. O número de rotação de fins primos de  $h$  em  $U$  é definido por*

$$\rho(h, U) := \rho(h'|_{S^1}).$$

**Observação 2.4.1.** *Seja  $\gamma \subset U$  um crosscut com pontos finais nos pontos  $a, b$  e denote por  $V$  uma cross-section de  $U \setminus \gamma$ . Então, o conjunto  $\tilde{V}$  é um intervalo aberto em  $\mathbb{P}(U)$ . O fecho de  $\tilde{V}$  é um intervalo fechado cujos pontos finais são pontos acessíveis  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$ , determinados pelo crosscut  $\gamma$ .*

Tendo em vista estas definições, é uma questão particularmente relevante saber em que medida a teoria de Poincaré para os homeomorfismos do círculo que preservam orientação se estende a este novo número invariante: o que se pode dizer sobre a dinâmica de  $h$  na fronteira de  $U$ , conhecendo o número de rotação de fins primos de  $h$  em  $U$ ?

Ao contrário do caso clássico do círculo, exemplos mostram que é possível ter  $\rho(h, U) = 0$  mas não existir ponto fixo em  $\partial U$ . Também é possível que o número de rotação  $\rho(h, U)$  seja irracional e exista ponto fixo na fronteira de  $U$ . De um modo geral, para obter algum

tipo de conexão entre as duas noções, é preciso fazer hipóteses adicionais ao homeomorfismo ou na região  $U$ . O próximo Teorema, que é importante para os próximos capítulos, torna-se um resultado particularmente útil por não exigir tais hipóteses adicionais. Para uma demonstração, ver [KLN15].

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um homeomorfismo que preserva orientação e  $U \subsetneq \mathbb{R}^2$  um aberto conexo, simplesmente conexo e invariante por  $h$ . Se existir um ponto fixo acessível em  $\partial U$ , então  $\rho(h, U) = 0$ .*

Considere  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma cadeia que representa um fim primo  $\mathfrak{p}$ . Como cada  $V_n$  é conexo, temos que a intersecção  $\bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n}$  é um subconjunto conexo e compacto de  $S^2$ . Então, tal intersecção ou é um único ponto ou um contínuo. Chamamos

$$I(\mathfrak{p}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$$

de *impressão do fim primo*  $\mathfrak{p}$ . Veja que a definição de impressão não depende da cadeia que representa o fim primo  $\mathfrak{p}$ , pois se  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  divide  $\{V'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , então  $I(V_n) \subset I(V'_n)$ , o mesmo acontece para o oposto. Desse modo, a impressão de um fim primo está bem definida. Observe que dois fins primos diferentes podem ter a mesma impressão.

Dado um fim primo  $\mathfrak{p}$ , um ponto  $p$  em  $I(\mathfrak{p})$  é chamado de *ponto principal* de  $\mathfrak{p}$  se existir uma sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de crosscuts que definem  $\mathfrak{p}$  e de modo que o  $n$ -ésimo crosscut  $c_n$  converge para  $p$ , isto é, para qualquer vizinhança de  $p$ , existe  $n$  tal que o crosscut  $c_n$  está contido nesta vizinhança. O conjunto destes pontos é chamado de conjunto principal de  $\mathfrak{p}$  e será denotado por  $\Pi(\mathfrak{p})$ .

Os próximos lemas aparecem, por exemplo, em [Ma82] (como o Teorema 17.1 e Corolário 15, respectivamente).

**Lema 2.4.1.** *O conjunto principal de um fim primo  $\mathfrak{p}$  tem um único ponto  $p$  se, e somente se,  $p$  é acessível.*

**Lema 2.4.2.** *O conjunto principal de um fim primo é um contínuo.*

Vamos introduzir a seguinte notação: se  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de conjuntos, então  $K_i \rightarrow x \in S^2$  quando  $i \rightarrow \infty$  se, para cada vizinhança aberta  $V$  de  $x$ , existe  $i_0$  tal que

$K_i \subset V$  para todo  $i \geq i_0$ . O próximo resultado está contido em [Mat82], Lemas 3.1-3.4 e Proposição 3.7. Este resultado mostrará, em particular, que associado a cada fim primo, existe uma cadeia  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  de crosscuts que define este fim primo, tal que  $\text{diam}_{S^2}(c_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Proposição 2.4.1.** *As seguintes propriedades acontecem:*

1. Uma cadeia  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  de  $U$  é prima se, e somente se, existe um  $x \in \partial U$  e alguma cadeia equivalente  $\{V'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\partial V'_i|_U \rightarrow x$  quando  $i \rightarrow \infty$ .
2. Se  $\lambda : [0, 1) \rightarrow U$  é um endcut, então existe um fim primo  $\mathfrak{p} \in U^*$  tal que  $\lambda(t) \rightarrow \mathfrak{p}$  em  $U^*$  quando  $t \rightarrow 1^-$ .

Isto nos mostra que pontos acessíveis e fins primos estão intimamente relacionados. Além disso, é possível definir fins primos usando apenas estes tipo de cadeias. Com o próxima Lema, fins primos acessíveis formam um conjunto denso em  $\mathbb{P}(U)$ .

**Lema 2.4.3.** *Suponha que  $\partial U$  é um conjunto compacto. Então, o conjunto dos pontos acessíveis de  $\partial U$  por  $U$  é um conjunto denso em  $\partial U$ .*

*Demonstração.* Tomemos um ponto  $x \in \partial U$  e fixe um  $\varepsilon > 0$ . Como  $x \in \partial U$ , existe  $y \in B_\varepsilon(x) \cap U$ . Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização do segmento de reta com extremos em  $x$  e  $y$ , de modo que  $l(0) = y$ . Seja  $t_0 = \min\{t \geq 0 : l(t) \in \partial U\}$ . Como  $l(0) \in U$  e  $l(1) \in \partial U$ , temos que  $t_0 \in (0, 1]$  e  $l([0, t_0)) \subset U$ . Portanto,  $l([0, t_0)) \subset U$  é um endcut acessando o ponto  $l(t_0)$ . Logo, arbitrariamente próximo de  $x$ , existem pontos acessíveis.  $\square$

**Observação 2.4.2.** *Supondo que tanto  $U$  quanto  $\partial U$  sejam  $h$ -invariantes, se um endcut  $\gamma$  acessa um ponto  $p \in \partial U$ , temos que  $h(\gamma)$  é um endcut acessando  $h(p) \in \partial U$ . Desta forma, o Lema 2.4.3 nos permite concluir que o conjunto de pontos acessíveis de  $\partial U$  é um subconjunto  $h$ -invariante e denso em  $\partial U$ .*

O próximo Teorema apresenta uma descrição da dinâmica do conjunto de pontos acessíveis para um difeomorfismo  $h$  do plano ou da esfera, com as hipóteses adicionais de

que todos os pontos periódicos na fronteira de  $U$  são hiperbólicos, onde  $U$  é um aberto contendo um ponto fixo atrator  $x$  e, para todo  $y \in U$ ,  $\lim h^n(y) = x$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para uma demonstração, ver Teorema 6.1 em [AY92].

**Teorema 2.4.3.** *Assuma que os pontos periódicos de  $h \in \partial U$  são hiperbólicos, onde  $h$  e  $U$  são como acima. Se o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional, então todo ponto acessível ou é um ponto periódico ou está na variedade estável de um ponto periódico acessível.*

# Capítulo 3

## Alguns Resultados 1

Neste capítulo, apresentaremos propriedades da classe de homeomorfismos  $\mathcal{H}$ , objeto de estudo deste trabalho e algumas particularidades dinâmicas no plano, gerado pela iteração de um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  que satisfaz duas propriedades locais que estão ligadas pela dinâmica. Também iremos apresentar os primeiros resultados obtidos nesta tese, a saber, o Teorema 3.1.1 e o Teorema 3.1.4.

### 3.1 Sobre à Classe de Homeomorfismos $\mathcal{H}$

Seja  $h$  um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$ . Um ponto fixo  $a$  de  $h$  é chamado de *atrator* se existir um disco aberto e limitado  $V$  contendo  $a$  tal que

$$h(\bar{V}) \subset V \quad e \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} h^i(V) = \{a\}.$$

Para este  $V$ , o conjunto

$$U_a = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h^{-i}(V)$$

é chamado de *bacia de atração de  $a$* . A bacia de atração de um ponto fixo atrator é um subconjunto aberto, invariante, conexo e simplesmente conexo. Além disso, considerando

a extensão de  $h$  para  $S^2$ , quando  $U_a$  é um subespaço próprio de  $S^2$  e a fronteira de  $U$  não se reduz a um ponto, a teoria de fins primos de Carathéodory pode ser aplicada. Um ponto  $x \in U_a$  tem a propriedade de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) \rightarrow a.$$

Um ponto fixo atrator  $b$  para o homeomorfismo inverso  $h^{-1}$  é chamado de *repulsor* para  $h$  e a bacia  $U_b$  de atração de  $b$  por  $h^{-1}$ , também chamada de bacia de repulsão de  $h$ , é definida de modo análogo. Estas bacias, de atração e repulsão de pontos fixos, como já falamos, são conjuntos abertos, invariantes por  $h$  e homeomorfas a discos abertos de  $\mathbb{R}^2$ .

O conjunto  $\omega$ -limite de um ponto  $p \in \mathbb{R}^2$ , denotado por  $\omega(p)$ , é definido como o conjunto (possivelmente vazio) dos pontos  $x \in \mathbb{R}^2$  para os quais existe uma sequência de inteiros  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  convergindo para  $+\infty$ , tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^{n_k}(p) \rightarrow x.$$

Dizemos que a origem  $0 \in \mathbb{R}^2$  é um atrator global para  $h$  quando for um atrator local e  $\omega(p) = \{0\}$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ .

Finalmente, chamamos um conjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  de atrator global para  $h$  quando, para alguma vizinhança compacta  $K \subset \mathbb{R}^2$  de  $\Sigma$ , tenhamos:

(a) Para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , existe  $n > 0$  tal que  $h^n(p) \in K$ .

(b)  $h(K) \subset \text{int}(K)$ , e

(c)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} h^n(K) = \Sigma$ .

Dado  $h \in \mathcal{H}$ , como o infinito é um repulsor para  $h$ , considere  $D$  o disco aberto limitado por uma curva de Jordan  $\gamma$ , suficientemente grande e que enlaça a origem, tal que  $h(\gamma) \subset D$ . Estaremos interessados em estudar a dinâmica de  $h$  no conjunto:

$$\Sigma = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(D).$$



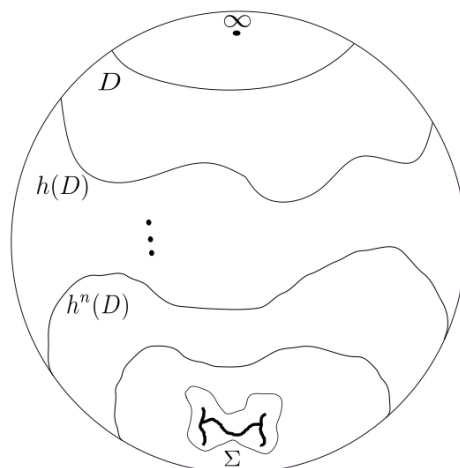


Figura 3.1: O conjunto  $\Sigma$  visto como um subconjunto da esfera.

As propriedades importantes do atrator  $\Sigma$  estão presentes na próxima proposição, para uma demonstração, ver [Go07].

**Proposição 3.1.1.** *Dado  $h \in \mathcal{H}$  e  $U$  a bacia de repulsão do infinito, temos que o atrator  $\Sigma = \partial U$  é compacto, conexo,  $h$ -invariante e como  $h$  é dissipativo, ele tem interior vazio. Mais ainda,  $S^2 = \Sigma \cup U$ .*

A definição de dissipatividade de  $h \in \mathcal{H}$  nos diz que, para todo aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , a área  $h^n(D) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Caso  $h$  seja um difeomorfismo, esta é uma condição mais fraca do que exigir que  $\det(Dh_x) < 1$  para todo ponto. Nas diferentes hipóteses, resultados diferentes valem ou ainda não se sabe, por exemplo, não se sabe existe um difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  com  $\det(Dh_x) < 1$  para todo ponto nas condições do Teorema 3.1.4.

Um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  tem a propriedade importante de que a medida de Lebesgue de  $\Sigma$  é zero. De fato, dado  $A$  um aberto que contém  $\Sigma$ , como  $\Sigma$  é invariante e a medida de Lebesgue de  $h^n(A)$  converge para zero quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos que  $m(\Sigma) = 0$ . Além disso, a bacia  $U_\infty$  tem medida infinita.

**Observação 3.1.1.** *Tendo  $\Sigma$  quando o seu complementar em  $\mathbb{R}^2$  são  $h$ -invariantes, portanto, segue da Observação 2.4.2 que o conjunto de pontos acessíveis de  $\Sigma$  é um subconjunto  $h$ -invariante e denso em  $\Sigma$ .*

Dados  $h \in \mathcal{H}$  e  $U = U_\infty$  a bacia de repulsão do infinito, estaremos interessados em estudar a relação do número de rotação  $\rho(h, U)$  com a existência de pontos periódicos acessíveis. Para o caso em que  $\rho(h, U)$  é racional, provamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.1.** *Para todo  $h \in \mathcal{H}$  com  $\rho(h, U)$  racional, existe ponto periódico diferente da origem em  $\partial U$ . Adicionalmente, supondo que  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$  e que  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , então este ponto periódico é acessível.*

A demonstração deste Teorema será apresentada na seção 3.2. A primeira parte dele apareceu em [OR11] com uma demonstração diferente.

Em vista do Teorema 3.1.1, naturalmente surge a seguinte pergunta para os casos em que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional:

**Pergunta 3.1.1.** *Se  $h \in \mathcal{H}$  e o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, então a origem é o único ponto periódico de  $h$ ?*

Em [COR10], Luiz Corbato, Rafael Ortega e Ruiz del Portal apresentaram exemplos que motivam a pergunta anterior. Neste mesmo artigo, adicionando a hipótese de que a origem é acessível pela bacia de repulsão do infinito,  $U$ , os autores apresentaram uma resposta parcial positiva.

**Teorema 3.1.2.** *Seja  $h \in \mathcal{H}$  e suponha que a origem é acessível pela bacia de repulsão do infinito,  $U$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *O número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional.*
- *O único ponto periódico de  $h$  é a origem.*

Em [Mat13], Matsumoto mostrou que a condição de acessibilidade da origem no Teorema 3.1.2 é necessária para que a origem seja o único ponto periódico de  $h$ .

**Teorema 3.1.3.** *Para quaisquer números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , existe um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  tal que  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$  e  $\rho(h, U_0) = \beta$ , onde  $U_\infty$  é a bacia de repulsão de  $\infty$  e  $U_0$  a bacia de atração de 0 por  $h$ .*

Com este Teorema, a condição de acessibilidade da origem torna-se necessária, uma vez que, podemos escolher  $\alpha$  irracional e  $\beta$  racional e, pelo Teorema 3.1.1, existirá ponto periódico para  $h$  na fronteira de  $U_\infty$ . Desse modo, apenas a hipótese de irracionalidade no número de rotação de fins primos da compactificação de fins primos de  $U_\infty$  não é suficiente para garantir que a origem é o único ponto periódico de  $h$ . Além disso, este Teorema mostra que a existência de pontos periódicos na fronteira de um aberto  $U$  conexo, simplesmente conexo e invariante por  $h$ , não implica que  $\rho(h, U)$  é racional.

Em vista do resultado de Matsumoto, a Pergunta 3.1.1 é reformulada para:

**Pergunta 3.1.2.** *Considere  $h \in \mathcal{H}$  e  $U$  a bacia de repulsão do infinito. Se o número de rotação  $\rho(h, U)$  for irracional, é possível existir um ponto periódico de sela com intersecção homoclínica na fronteira de  $U$ ?*

Usando um exemplo de Addas Zanata e Veiga Gomes em [BS11] e as ideias do trabalho de Matsumoto [Mat13], é possível construir um exemplo de um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  que demonstra o Teorema a seguir.

**Teorema 3.1.4.** *Para todo  $\alpha \in (0, 1)$  irracional, existe  $h \in \mathcal{H}$  com número de rotação  $\rho(h, U) = \alpha$  e tal que  $\partial U$  possui um ponto  $p$  de sela com intersecção homoclínica.*

Nas próximas seções, apresentaremos resumidamente o exemplo de Matsumoto e o exemplo de Addas Zanata com Veiga Gomes. Utilizaremos estes exemplos para construir um homeomorfismo  $h$  nas condições do Teorema 3.1.4.

## 3.2 Demonstração do Teorema 3.1.1

Se  $h$  é um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e tem um ponto periódico de período  $n$ , como já dissemos, pelo Teorema da classificação dos homeomorfismos do círculo, é conhecido que todo ponto do círculo ou é um ponto fixo por  $h^n$  ou sua órbita converge para um ponto de período  $n$  sob iterados de  $h^n$ .

No seguinte conjunto de definições, descreveremos noções de estabilidade para pontos periódicos. Frequentemente, mencionamos apenas pontos fixos, mas considerando que um ponto periódico de período  $n$  é um ponto fixo para  $h^n$ , as definições e resultados que seguem são satisfeitas para pontos periódicos.

Considere  $h$  um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Um ponto fixo  $p$  em  $S^1$  é chamado:

- (1) *Atrator por um lado*, se existe uma vizinhança em um dos lados de  $p$  tal que todos os pontos convergem para  $p$  por iterados de  $h$ .
- (2) *Repulsor por um lado*, se existe uma vizinhança em um dos lados de  $p$  tal que todos os pontos convergem para  $p$  por iterados de  $h^{-1}$ .

Com esta definição, um ponto fixo isolado  $p \in S^1$  é um atrator ou um repulsor em cada um de seus lados. Definições análogas são feitas para o espaço de fins primos e a palavra "ponto" é substituída pelo termo "fim primo". Se  $p$  é um ponto fixo atrator (resp. repulsor) por um do lado, então pelo Teorema de Carathéodory, o fim primo associado  $\mathfrak{p}$  será atrator (resp. repulsor) por um lado.

Agora, suponha que  $h$  é um homeomorfismo do plano,  $U$  é um disco topológico aberto e  $\tilde{h}$  é o homeomorfismo no conjunto  $U^*$ , induzido por  $h$ . Apesar de que fins primos fixos correspondem a pontos fixos em  $S^1$ , não é verdade que um fim primo fixo por  $\tilde{h}$  necessariamente contém um ponto que é fixo por  $h$ . Nos próximos Lemas, considere que  $h \in \mathcal{H}$ . Estes Lemas são importantes porque relacionam pontos fixos de  $h$  em  $\partial U = \Sigma$  com fins primos fixos de  $\tilde{h}$  em  $\mathbb{P}(U)$ . Para uma demonstração do Lema 3.2.1, ver [CL51].

**Lema 3.2.1.** *Seja  $\mathfrak{p}$  um fim primo de  $U^*$  fixo por  $\tilde{h}$  e seja  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de crosscuts convergindo para um ponto principal  $p$  de  $\mathfrak{p}$ . Se, para todo  $n$ , o crosscut  $h(c_n)$  tem pelo menos um ponto em comum com  $c_n$ , então  $p$  é um ponto fixo de  $h$ .*

**Lema 3.2.2.** *Se  $\Sigma = \partial U$  onde  $U$  é a bacia de atração de um ponto fixo e  $\mathfrak{p}$  é um fim primo fixo que atrai por pelo menos um lado, então todo ponto principal de  $\mathfrak{p}$  é um ponto fixo de  $h$ .*

*Demonstração.* Considere  $\mathfrak{p}$  um fim primo de  $\mathbb{P}(U)$  que atrai por um lado e considere  $p$  um ponto principal do fim primo  $\mathfrak{p}$ . Por definição de ponto principal, existe uma sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que define uma cadeia  $V = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com

$$V_n \subset (\Sigma \cup c_n)^c \text{ e } c_{n+1} \subset V_n,$$

de modo que  $c_n \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $\mathfrak{p}$  atrai por pelo menos um lado, mostraremos que não pode existir uma subsequência  $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de modo que  $h(c_{m_n}) \cap c_{m_n} = \emptyset$  para todo  $n$ . Consequentemente, descartando uma quantidade finita de termos da sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , podemos assumir que  $h(c_n) \cap c_n \neq \emptyset$  para todo  $n$ . Então, usando o Lema 3.2.1, concluiremos que  $p$  é um ponto fixo.

Dado o crosscut  $c_i$ , como os pontos finais de  $c_i$  são pontos acessíveis, denotemos por  $a_i$  e  $b_i$  os pontos finais do crosscut  $c_i$  e por  $\tilde{a}_i$  e  $\tilde{b}_i$  os fins primos acessíveis associados aos pontos  $a_i$  e  $b_i$ , respectivamente.

Como estamos supondo que o fim primo  $\mathfrak{p}$  atrai por pelo menos um lado por  $\tilde{h}$ , denote por  $I$  o lado de  $\mathfrak{p}$  tal que, se um fim primo  $\mathfrak{p}_0 \in I$ , então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{h}^m(\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p} \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Desse modo, jogando fora alguns termos da sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se necessário, podemos assumir que para todo  $n$ , no círculo de fins primos  $S^1$ , um extremo de  $c_n$  pertence a  $I$ . Seja  $\tilde{a}_n$  este extremo. Portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{h}^m(\tilde{a}_n) = \mathfrak{p},$$

onde  $\tilde{h}^m(\tilde{a}_n) \in I$  é um fim primo que é um extremo do crosscut  $\tilde{h}^m(c_n)$ .

Suponhamos agora que nesta sequência de crosscuts exista um crosscut  $c_n$  satisfazendo  $h(c_n) \cap c_n = \emptyset$ . Então, como  $\mathfrak{p}$  atrai por um lado, a existência de tal crosscut  $c_n$  implica que, no círculo de fins primos,  $\tilde{h}(\overline{V_n}) \subset V_n$ . Consequentemente,  $\tilde{h}^m(\overline{V_n}) \subset V_n$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , ver figura 3.2. Por este motivo, concluí-se que, em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$h^m(\overline{V_n}) \subset V_n \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Mas note que este fato contradiz a hipótese de que  $U$  é a bacia de atração de um ponto fixo em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ .  $\square$

A seguir, apresentaremos a prova do Teorema 3.1.1.

*Demonstração.* Considere que  $\rho(h, U) = p/q$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si. Para facilitar a notação, vamos assumir que  $q = 1$  (para o caso geral, basta substituir  $h$  por  $h^q$ ). Inicialmente, assumamos o caso em que o homeomorfismo  $\tilde{h}$  no círculo de fins primos  $\mathbb{P}(U)$  seja a identidade. Provemos a seguinte afirmação:

*Afirmção 1.* Suponha que  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$  é a identidade. Então, todos os pontos acessíveis de  $h$  em  $\Sigma$  são fixos por  $h$ .

De fato, se  $x \in \Sigma$  é um ponto acessível e  $\gamma : [0, 1) \rightarrow U$  um endcut acessando  $x$ , então a Proposição 2.4.1 nos diz que existe um fim primo  $\mathbf{p} \in \mathbb{P}(U)$  tal que  $\gamma(t) \rightarrow \mathbf{p}$  em  $U^*$  quando  $t \rightarrow 1^-$ . Como o fim primo  $\mathbf{p}$  é fixo por  $\tilde{h}$ , note que  $h(\gamma(t)) \rightarrow \mathbf{p}$  em  $U^*$  quando  $t \rightarrow 1^-$ . Desse modo, temos que  $h(x) = x$  pois, caso contrário,

$$\lim h(\gamma(t)) = \tilde{h}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p} = \lim \gamma(t),$$

em  $U^*$ , quando  $t \rightarrow 1^-$ . Logo, se  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$  é a identidade, todo ponto acessível em  $\Sigma$  é um ponto fixo por  $h$ .

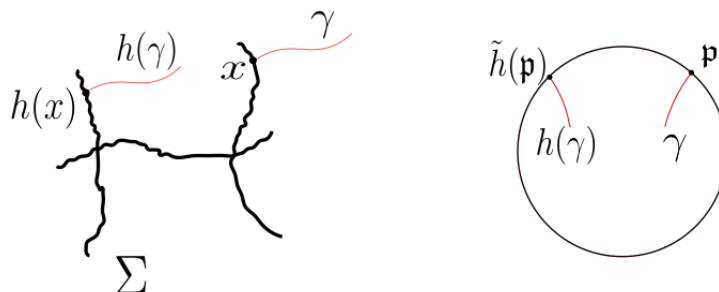


Figura 3.2: Se  $x \neq h(x)$  em  $\mathbb{R}^2$ , então  $\mathbf{p} \neq \tilde{h}(\mathbf{p})$  em  $\mathbb{P}(U)$ .

Vamos assumir então que o homeomorfismo  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$  não é a identidade. Inicialmente, iremos provar que existe um ponto fixo para  $h$  que é diferente da origem.

Como  $\rho(h^{-1}, U) = -\rho(h, U) = 0$  e  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$  não é a identidade, existe um fim primo fixo  $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(U)$  que atrai por pelo menos um lado por iterados de  $h^{-1}$ . Tome  $p \in \Pi(\mathfrak{p})$  um ponto principal do fim primo  $\mathfrak{p}$ . Por definição, existe uma sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , que define uma cadeia  $V = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com

$$V_n \subset (\Sigma \cup c_n)^c \text{ e } c_{n+1} \subset V_n$$

de modo que  $c_n \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O Lema 3.2.2 mostra que  $p$  é um ponto fixo.

Com a finalidade de provar (por absurdo) a existência de um outro ponto fixo para  $h$  em  $\Sigma$  além da origem, podemos assumir que a origem é o único ponto periódico de  $h$ , ou seja, vamos supor que  $p = 0$ .

Sendo 0 um ponto fixo atrator de  $h$ , considere  $U_0$  a bacia de atração de 0 por  $h$ . Logo, por definição, existe disco aberto  $A \subset U$  satisfazendo

$$h(\bar{A}) \subset A \text{ e } 0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} h^n(\bar{A}).$$

Observe que, como a sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para 0 quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos descartar uma quantidade finita de elementos desta sequência e assumir que  $c_n \subset A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, isto implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h^m(c_n) = 0.$$

Além disso, para todo elemento  $c_i$  desta sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , pelo menos um dos seguintes casos acontece:

(i) Existe subsequência infinita  $m'_n \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$h^{m'_n}(c_i) \cap c_i = \emptyset, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Existe subsequência infinita  $m''_n \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$h^{m_n''}(c_i) \cap c_i \neq \emptyset, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

No entanto, mostraremos que a hipótese de 0 ser o único ponto fixo de  $h$  implica que, para todo crosscut  $c_i$  da sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , os dois casos (i) e (ii) não podem ocorrer. Mas veja que isto é um absurdo, visto que não é possível que cada um dos casos ocorra apenas para uma quantidade finita de inteiros. Logo, concluiremos que a origem não pode ser o único ponto periódico de  $h$ , implicando que o ponto periódico  $p \neq 0$ .

*Afirmção 2.* Para todo crosscut  $c_i$  em  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , não existe subsequência  $\{m'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo o caso (i).

Para demonstrar esta afirmação, vamos supor por absurdo que existe um crosscut  $c_i$  e uma subsequência  $\{m'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo  $h^{m'_n}(c_i) \cap c_i = \emptyset$ . Para facilitar a notação, vamos denotar por  $\{m\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal subsequência, isto é,  $h^m(c_i) \cap c_i = \emptyset$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Consequentemente, o mesmo acontece no conjunto de fins primos  $\mathbb{P}(\mathbb{U})$ , ou seja, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{h}^m(c_i) \cap c_i = \emptyset, \text{ em } U^* \simeq \overline{D}.$$

Visto que os pontos finais de um crosscut são pontos acessíveis, denotemos por  $a_i$  e  $b_i$  os pontos finais do crosscut  $c_i$  e por  $\tilde{a}_i$  e  $\tilde{b}_i$  os fins primos acessíveis associados aos pontos  $a_i$  e  $b_i$ , respectivamente.

Novamente, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , descartando alguns termos da sequência  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se necessário, podemos assumir que para todo  $i$ , no círculo de fins primos  $S^1$  um extremo de  $c_i$  pertence a  $I$ , intervalo atrator para  $\tilde{h}$  lateral a  $\mathfrak{p}$ . Seja  $\tilde{a}_i$  este extremo. Então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{h}^{-m}(\tilde{a}_i) = \mathfrak{p},$$

onde  $\tilde{h}^{-m}(\tilde{a}_i) \in I$  é um fim primo que é um extremo do crosscut  $\tilde{h}^{-m}(c_i)$ .

Como  $\tilde{h}^{-m}(c_i) \cap c_i = \emptyset$ , então  $\tilde{h}^{-m}(c_i) \subset \tilde{V}_i$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , ver figura 3.2. Por este motivo, concluí-se que, em  $\mathbb{R}^2$ ,



$$h^{-m}(c_i) \subset V_i \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Logo, isto mostra que, tomando  $x \in h^{-m}(c_i)$  para algum  $m$ , como  $h^{-r}(x) \in V_i$  para todo  $r$ , temos que  $x$  não pode pertencer a  $U$ , que é a bacia de atração do infinito por  $h^{-1}$ . Isto completa a demonstração da afirmação 2.

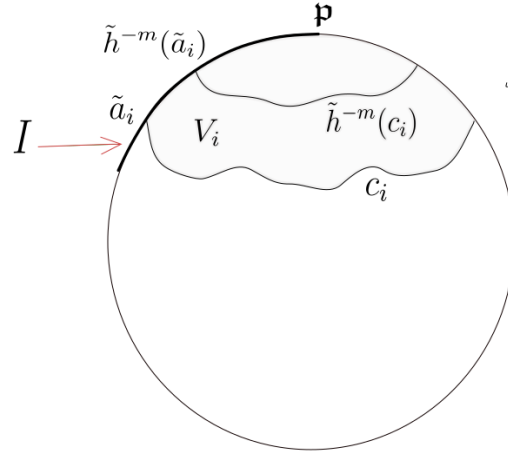


Figura 3.3: Informações na compactificação de fins primos de  $U$ .

*Afirmação 3.* Para todo crosscut  $c_i$  em  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , não existe sequência  $\{m''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisfazendo o caso (ii).

Para a demonstração de tal afirmação, suponhamos por absurdo que existe um crosscut  $c_i$  e que existe uma sequência  $\{m''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfaz  $h^{m''_n}(c_i) \cap c_i \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Novamente, para facilitar a notação, suponhamos que  $h^m(c_i) \cap c_i \neq \emptyset$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Como no caso (i), denote por  $a_i$  e  $b_i$  os pontos acessíveis que são os pontos extremais do crosscut  $c_i$  e denote por  $\bar{c}_i = c_i \cup \{a_i, b_i\}$ . Sendo  $\bar{c}_i$  é um compacto, temos que  $d(\bar{c}_i, 0) = \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Em consequência,  $h^m(c_i) \cap c_i \neq \emptyset$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h^m(c_i) \neq 0.$$

Porém, isto entra em contradição com a nossa escolha de crosscuts, visto que tomamos uma sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ , que está contido da bacia de atração de 0 por  $h$ . Esta contradição finaliza a demonstração da afirmação 3.

Observe que, as contradições nos casos (i) e (ii) surgiram quando assumimos que  $Per(h) = \{0\}$ . Portanto, quando  $h \in \mathcal{H}$  e o número de rotação  $\rho(h, U) = 0$ , obrigatoriamente, existe ponto fixo para  $h$  além da origem.

Para demonstrar a segunda parte do Teorema, na próxima afirmação utilizaremos a hipótese de que  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e mostraremos que o conjunto principal do fim primo  $\mathfrak{p}$  contém apenas o ponto  $p$ . Portanto, utilizando o Lema 2.4.1, concluiremos que  $p$  é ponto fixo e acessível. Por este motivo, para finalizarmos a demonstração deste Teorema, provemos a seguinte afirmação:

*Afirmação 4.* Se  $h \in Diff^2(\mathbb{R}^2)$  e  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , então o conjunto principal de  $\mathfrak{p}$ , contém um único ponto  $p$ . Portanto, pelo Lema 2.4.1,  $p$  é fixo e acessível.

Antes de iniciarmos a prova desta afirmação, precisaremos de alguns resultados que serão apresentados a seguir.

Para uma demonstração do próximo Lema, ver por exemplo Carr [Ca81], Teorema 1, página 16 e Lema 1, página 20, onde o resultado foi provado para campos de vetores, demonstrações análogas valem para difeomorfismos, como indicado nas páginas 33-35.

**Lema 3.2.3.** *Assuma que  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$  que fixa a origem e  $Dh(0,0)$  tem 1 e  $\lambda$  como autovalores, com  $0 < \lambda < 1$ . Se escrevermos  $h$  em coordenadas tais que  $h(x, y) = (x + u(x, y), \lambda y + v(x, y))$ , onde as funções  $u, v$  e suas primeiras derivadas tem valor 0 na origem, então existe uma função  $g$  de classe  $C^2$ , definida para  $|x|$  suficientemente pequeno, tal que  $g(0) = g'(0) = 0$ , cujo gráfico é invariante por iterados de  $h$ , uma vizinhança  $U$  de  $(0,0)$  e  $C > 0$  de modo que, para todo segmento de órbita  $(x_k, y_k)_{0 \leq k \leq n}$  contido em  $U$ , temos que  $|y_n - g(x_n)| \leq C\lambda^n |y_0 - g(x_0)|$ .*

Como consequência do Lema anterior, temos interesse no seguinte resultado:

**Corolário 3.2.1.** *Assuma que  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$  que fixa a origem e  $Dh(0,0)$  tem 1 e  $\lambda$  como autovalores, com  $0 < \lambda < 1$ . Considere a função  $g$  definida para  $|x|$  pequeno, a vizinhança  $U$  e a constante  $C$  dadas pelo Lema anterior.*

Então, se existir algum ponto fixo  $(x_0, y_0) \in U$ , temos que  $y_0 = g(x_0)$ , ou seja, todo ponto fixo  $(x_0, y_0)$  de  $h$  que está contido em  $U$  pertence ao gráfico de  $g$ .

*Demonstração.* De fato, supondo que  $(x_0, y_0) \in U$  é um ponto fixo, observe que a órbita  $(x_n, y_n) = h^n(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$  é fixa. Logo, usando o Lema 3.2.3, obtemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|y_0 - g(x_0)| \leq C\lambda^n |y_0 - g(x_0)|,$$

Como  $\lambda < 1$ , fazendo  $n \rightarrow \infty$ , conclui-se que  $y_0 = g(x_0)$ . Isto mostra que o ponto  $(x_0, y_0)$  pertence ao gráfico de  $g$ .  $\square$

*Demonstração da Afirmação 4.*

A hipótese  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  nos diz que, para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , pelo menos um autovalor tem módulo menor que 1.

Suponha que os dois autovalores de  $Dh|_p$  possuem módulo diferente de um. Então,  $p$  é ponto fixo isolado. Logo, como  $U$  é bacia de atração do infinito por  $h^{-1}$  e o fim primo  $\mathfrak{p}$  atrai por pelo menos um lado por  $\tilde{h}^{-1}$ , o Lema 3.2.2 nos mostra que todos os pontos principais de  $\Pi(\mathfrak{p})$  são fixos por  $h$ . Sendo  $p$  um ponto fixo isolado, obtemos que  $\Pi(\mathfrak{p}) = p$ . Consequentemente, pelo Lema 2.4.1, temos que  $p$  é um ponto fixo acessível. Então, iremos assumir que  $\det(Dh|_p)$  possui 1 e  $\lambda \in (0, 1)$  como autovalores.

Por absurdo, suponha que o conjunto principal de  $\mathfrak{p}$  não se reduz a apenas um ponto. Então, os Lemas 2.4.1 e 2.4.2 garantem que  $\Pi(\mathfrak{p})$  é um contínuo não-degenerado e sem pontos acessíveis. Além disso, o Lema 3.2.2 nos mostra que todo ponto de  $\Pi(\mathfrak{p})$  é fixo por  $h$ . Seja  $p$  um ponto fixo de  $\Pi(\mathfrak{p})$ . Via uma mudança de coordenadas, assumamos que  $p$  é a origem. Então, considerando a função  $g$  do Corolário 3.2.1, resulta que

$$\Pi(\mathfrak{p}) \cap U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x)\},$$

ou seja, os pontos fixos de  $\Pi(\mathfrak{p}) \cap U$  estão contidos no gráfico de  $g$ . Portanto, como  $\Pi(\mathfrak{p}) \cap U$  é um contínuo de pontos fixos (porque segue do Lema 2.4.2 que  $\Pi(\mathfrak{p})$  é um

continuo), a dinâmica de  $h$  em uma vizinhança de  $\Pi(\mathfrak{p}) \cap U$  é como na figura 3.4.

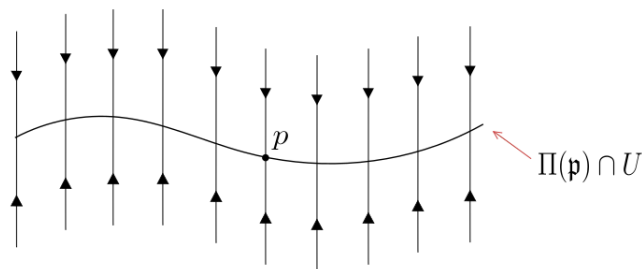


Figura 3.4: A dinâmica de  $h$  em uma vizinhança de  $\Pi(\mathfrak{p}) \cap U$ .

Tomamos o fim primo  $\mathfrak{p}$  de modo que este atrai por pelo menos um lado por  $\tilde{h}^{-1}$  em  $\mathbb{P}(U)$ . Logo  $\mathfrak{p}$  repele por um lado por  $\tilde{h}$ .

Agora, tome  $p_0 \in \Pi(\mathfrak{p}) \cap U$  um ponto principal do fim primo  $\mathfrak{p}$  e considere  $V \subset U$  uma vizinhança aberta de  $p_0$ , como na figura 3.5. Para todo  $x \in V$ , observe que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h^m(x) \in \Pi(\mathfrak{p}).$$

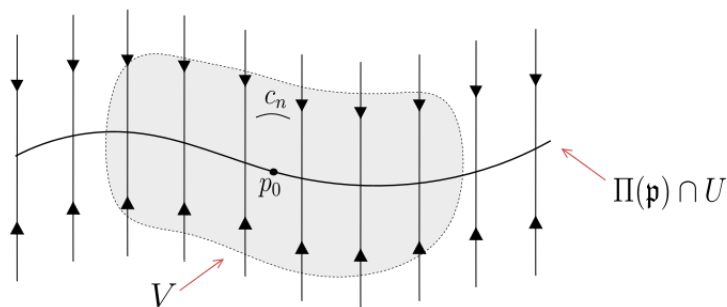


Figura 3.5: A dinâmica de  $h$  perto de  $\Pi(\mathfrak{p}) \cap U$ ,  $p_0 \in \Pi(\mathfrak{p}) \cap U$  e  $V$  uma vizinhança aberta de  $p_0$ .

Sendo  $p_0$  um ponto principal, considere  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de crosscuts satisfazendo  $c_n \rightarrow p_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Visto que  $V$  é uma vizinhança aberta de  $p_0$ , podemos descartar alguns elementos desta sequência de crosscuts e assumir que  $c_n \in V$  para todo  $n$ .

Como  $c_n \subset U$  e os pontos extremos de cada  $c_n$  são pontos acessíveis de  $\Sigma \setminus \Pi(\mathfrak{p})$ , resulta que

$$\overline{c_n} \cap \Pi(\mathbf{p}) = \emptyset.$$

Por outro lado, dado que  $c_n \in V$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , temos que,

$$d(h^m(\overline{c_n}), \Pi(\mathbf{p})) \rightarrow 0.$$

Consequentemente, existe  $m > 0$  de modo que

$$h^m(\overline{c_n}) \cap \overline{c_n} = \emptyset. \quad (3.1)$$

Agora, com este fim primo  $\mathbf{p}$  repele por um lado por  $\tilde{h}$  e a sequência de crosscuts  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $p_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , alguns argumentos da demonstração da Afirmação 2 nos mostram que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que, se  $n \geq n_0$ , então  $h^m(c_n) \not\subset V_n$ , onde  $V_n$  é a componente conexa aberta de  $(\Sigma \cup c_n)^c$  que contém  $c_{n+1}$ . Por este motivo, fixando  $n > n_0$ , segue de 3.1 a existência de  $m > 0$  tal que  $h^m(c_n) \cap V_n = \emptyset$ .

No entanto, repetindo os detalhes na demonstração da afirmação 2, obtemos que  $h^{-m}(c_n) \subset V_n$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Novamente, isto contradiz a hipótese de que o infinito é um atrator para  $h^{-1}$  em  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ .

□

O Teorema 2.4.2 junto com o Teorema 3.1.1 fornecem diretamente o próximo Corolário.

**Corolário 3.2.1.** *Assuma que  $h \in \mathcal{H}$  é um difeomorfismo de classe  $C^2$ . Adicionalmente, suponha que  $\det(Dh|_x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Então o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional se, e somente se, existe ponto periódico acessível  $p \in \Sigma$ .*

### 3.3 O exemplo de Matsumoto

Nesta seção, iremos apresentar o homeomorfismo que Matsumoto usou para demonstrar o Teorema 3.1.3. Para isto, considere a esfera menos os dois polos,  $S^2 \setminus \{0, \infty\}$ , que é homeomorfa ao cilindro  $\mathbb{A} = S^1 \times \mathbb{R}$ . Se 0 e  $\infty$  são pontos fixos de um homeomorfismo

$h : S^2 \rightarrow S^2$ , que preserva orientação, então  $h$  induz um homeomorfismo que preserva orientação em  $\mathbb{A}$ , e vice-versa, que também iremos denotar por  $h$ .

Para demonstrar o Teorema 3.1.3, Matsumoto construiu um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  e mostrou que podemos tomar  $h$  de modo que  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$  e  $\rho(h, U_0) = \beta$  para  $\alpha$  e  $\beta$  fixados. A seguir, apresentaremos os principais passos da construção de tal homeomorfismo. Inicialmente, considere o cilindro  $\mathbb{A} = S^1 \times \mathbb{R} \cong S^2 \setminus \{0, \infty\}$ .

No subdomínio  $S^1 \times [5, \infty)$ ,  $h$  é da forma

$$h(\theta, t) = (f_\alpha(\theta), t - g_\alpha(\theta, t)),$$

onde  $f_\alpha$  é a rotação em  $S^1$  se  $\alpha$  é racional e um homeomorfismo de Denjoy caso contrário, com o número de rotação de  $f_\alpha$  igual a  $\alpha$ . Escolhendo uma função  $g_\alpha$  apropriada, com  $g_\alpha((S^1 \times [5, +\infty[)) \subset [0, 1]$ , podemos obter um homeomorfismo  $h$  que tem um único conjunto minimal  $C_\alpha$  em  $t = 10$  e com  $h$  satisfazendo também

$$h(S^1 \times [5, \infty)) = S^1 \times [4, \infty).$$

Do mesmo modo, nós definimos  $h$  em  $(\infty, -5]$  usando um homeomorfismo  $f_\beta$  de  $S^1$  com número de rotação  $\beta$  e tal que  $h$  tem um único conjunto minimal  $C_\beta$  em  $t = -10$ . Finalmente, em  $S^1 \times [-5, 5]$ , definimos  $h$  como

$$h(\theta, t) = (\varphi_t(\theta), t - 1)$$

usando uma isotopia  $\varphi_t$  para  $t \in [-5, 5]$ , que cola  $f_\alpha$  com  $f_\beta$ .

Para a construção de  $h$ , uma função contínua  $g_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  é tomada de maneira que

(a)  $g_\alpha^{-1}(0) = C_\alpha$ , e

(b) para todo  $\theta \in S^1 \setminus C_\alpha$ ,

$$\sum_{i \geq 0} g_\alpha(f_\alpha^i(\theta)) = \infty \quad \text{e} \quad \sum_{i \leq 0} g_\alpha(f_\alpha^i(\theta)) = \infty.$$

Após provar a existência de  $f_\alpha, C_\alpha$  e  $g_\alpha$  (analogamente para  $f_\beta, C_\beta$  e  $g_\beta$ ) com as condições requeridas, Matsumoto construiu uma função contínua  $g_0 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , diferenciável ao longo de  $\mathbb{R}$ , e que satisfaz

$$(c) \quad g_0^{-1}(0) = (C_\alpha \times \{10\}) \cup (C_\beta \times \{-10\}),$$

(d) para  $t \in [9, 11]$ ,  $g_0(\theta, t) \geq g_\alpha(\theta)$  e para  $t \in [-11, -9]$ ,  $g_0(\theta, t) \geq g_\beta(\theta)$ , com a igualdade apenas quando  $t = \pm 10$ ,

(f)  $g_0 = 1$  em  $S^1 \times ((-\infty, 15] \cup [-5, 5] \cup [15, \infty))$ , e

(e)  $\partial g_0 / \partial t < 1$ .

Agora, escolha uma família contínua  $\varphi_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) de homeomorfismos de  $S^1$  tal que  $\varphi_t = f_\alpha$  para  $t \in [5, \infty)$  e  $\varphi_t = f_\beta$  para  $t \in (-\infty, -5]$ . Então, Matsumoto mostrou que  $h : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , definido por

$$h(\theta, t) = (\varphi_t(\theta), t - g_0(\theta, t)),$$

é um homeomorfismo que satisfaz as condições do Teorema 3.1.3. Além disso,

$$U_\infty \cap (S^1 \times [5, \infty)) = (S^1 \times [5, \infty)) \setminus (C_\alpha \times [5, 10]).$$

Para mostrar que  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$ , Matsumoto usou que, para qualquer  $\theta \in S^1$ , o raio  $r_\theta : (0, \infty) \rightarrow \infty$  definido por

$$r_\theta(t) = (\theta, t^{-1} + 10)$$

satisfaz a propriedade: para todo  $\theta \notin C_\alpha$ , o ponto extremo de  $r_\theta(\infty) = (\theta, 10)$  é um ponto em  $U_\infty$  e para todo  $\theta \in C_\alpha$ , o ponto extremo de  $r_\theta(\infty)$  é um ponto acessível que corresponde a um fim primo acessível em  $S^1$ , com número de rotação  $\alpha$ . Desse modo, Matsumoto mostrou que  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$  e  $\rho(h, U_0) = \beta$ .

Com a demonstração do Teorema 3.1.3, Matsumoto produziu exemplos de homeomorfismos  $h \in \mathcal{H}$  com número de rotação  $\rho(h, U_\infty)$  irracional e com órbita periódica em  $\partial U_\infty$ . Logo, a irracionalidade de  $\rho(h, U_\infty)$  não caracteriza a não existência de órbitas periódicas na fronteira da bacia de atração do infinito.

### 3.4 O exemplo de Bernado e Salvador

Em [BS11], Bernado e Salvador construíram um difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  que possui um ponto  $p \in \Sigma$  de sela com intersecção homoclínica transversal, fato que implica na existência de infinitos pontos periódicos hiperbólicos. Este difeomorfismo satisfaz propriedades específicas e fornece um contra exemplo para a Versão Modificada da Conjectura Discreta de Markus-Yamabe, para detalhes referentes à conjectura, ver [BS11].

**Definição 3.4.1.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada real. Definimos o espectro de  $A$ , denotado por  $\text{Spec}(A)$ , como o conjunto de todos os autovalores de  $A$ . De forma análoga, se  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação diferenciável, definimos  $\text{Spec}(h)$  como sendo o conjunto de todos os autovalores de  $Dh|_p$ , com  $p$  variando em  $\mathbb{R}^2$ .*

O principal resultado obtido em [BS11] é o seguinte Teorema:

**Teorema 3.4.1.** *Existe um difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  de classe  $C^r$  (para todo  $r \geq 1$ ) satisfazendo a propriedade  $\text{spec}(Dh|_p) \subset B_1(0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  e que possui uma intersecção homoclínica transversal, e portanto, contém infinitos pontos periódicos.*

Então, como intersecções homoclínicas são estáveis por  $C^1$  perturbações, difeomorfismos genéricos satisfazendo as hipóteses do Teorema acima não são Morse-Smale, isto é, existe um conjunto aberto de difeomorfismos contendo ferraduras.

A seguir, esboçaremos a construção do exemplo de Bernado e Salvador.

Inicialmente, usando um resultado de Zenhder [Ze73], os autores mostraram que existe um difeomorfismo  $h$  de classe  $C^r$  que preserva área e que satisfaz:

- $h$  possui um ponto periódico hiperbólico com uma intersecção homoclínica transversal em  $B_1(0)$ .
- Para  $r_0 \geq 1$ , cada círculo  $C_{r_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 = x^2 + y^2 = r_0^2\}$  é fixado por  $h$  e rotacionado por um ângulo que cresce uniformemente com a respeito a  $r_0$  ( $h(C_{r_0}) = C_{r_0}$  e a dinâmica de  $h$  em cada círculo é uma rotação rígida).



- $\text{Spec}(h) \subset S^1$ .

Esta intersecção homoclínica é persistente no conjunto dos difeomorfismos planares com a topologia  $C^1$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, o difeomorfismo

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + \varepsilon} h(x, y),$$

pertence a  $\mathcal{H}$ , satisfaz  $\text{Spec}(g) \subset B_{1/1+\varepsilon}(0)$ , e o ponto periódico com intersecção homoclínica em  $\Sigma$  é mantido por  $g$ .

Este difeomorfismo  $g$  possui infinitos pontos periódicos hiperbólicos em  $B_1$ .

### 3.5 Demonstração do Teorema 3.1.4

Dado  $\alpha \in [0, 1)$  com  $\alpha$  irracional, iremos apresentar um exemplo de um homeomorfismo  $h_\alpha \in \mathcal{H}$  com o número de rotação de fins primos  $\rho(h_\alpha, U) = \alpha$  e que possui um ponto periódico de sela com intersecção homoclínica em  $\Sigma$ , logo possui infinitos pontos periódicos. Este exemplo irá responder positivamente à pergunta 3.1.2.

Para construir tal homeomorfismo, utilizaremos os exemplos de Matsumoto em [Mat13] juntamente com o exemplo de Bernado e Salvador em [BS11], apresentados nas seções 3.3 e 3.4, respectivamente.

Considere  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o homeomorfismo construído por Bernado e Salvador. O cilindro  $\mathbb{A} = S^1 \times (0, \infty)$  é identificado com  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , de maneira que o fim inferior do cilindro  $S^1 \times \{0\}$  é identificado com a origem. Então,  $g$  induz um homeomorfismo que preserva orientação em  $\mathbb{A}$ , que também chamaremos de  $g$ .

Dado  $\alpha$  irracional, tomemos  $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  o homeomorfismo construído por Matsumoto de modo que o número de rotação  $\rho(h, U) = \alpha$ , com  $U$  a bacia de repulsão do infinito por  $h$ . Para este  $\alpha$ , definiremos um homeomorfismo  $h_\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  do seguinte modo:

- Em  $S^1 \times (0, 2]$ , defina  $h_\alpha = g$ . Então, pela definição de  $g$ , para  $t \in [1, 2]$ , temos que

$$h_\alpha(\theta, t) = \left( R_{\beta_t}(\theta), \frac{t}{1 + \varepsilon} \right),$$

com  $R_{\beta_t}$  uma rotação de ângulo  $\beta_t$  que cresce uniformemente com a respeito a  $t$ .

- Em  $S^1 \times [5, \infty)$ , defina  $h_\alpha = h$ , onde

$$h(\theta, t) = (f_\alpha(\theta), t - g_0(\theta, t)),$$

$f_\alpha(\theta)$  é um difeomorfismo de Denjoy com número de rotação  $\alpha$ , tal que  $C_\alpha$  tem medida 0 e  $g_0(\theta, t) \in [0, 1]$  é uma função contínua. Aqui, lembre que das hipóteses satisfeitas por  $g_0$ , vale  $h_\alpha(S^1 \times \{5\}) = S^1 \times \{4\}$ .

- Finalmente, em  $S^1 \times [2, 5]$ , definimos  $h_\alpha$  como

$$h_\alpha(\theta, t) = (\varphi_t(\theta), \gamma(t)),$$

onde, para  $t \in [2, 5]$ ,

$$\gamma'(t) \in [\delta, 1), \quad \gamma(2) = \frac{2}{1 + \varepsilon} \quad \text{e} \quad \gamma(5) = 4$$

para algum  $\delta > 0$ . Além disso,  $\varphi_t : S^1 \rightarrow S^1$  é uma família de difeomorfismos  $C^1$  tal que  $h_\alpha$  é uma colagem  $C^1$  com  $h_\alpha|_{S^1 \times (0, 2]}$  e uma colagem  $C^0$  com  $h_\alpha|_{S^1 \times [5, \infty)}$ .

Definida desse modo, resulta que  $h_\alpha$  é um homeomorfismo do plano com  $h_\alpha|_{S^1 \times (0, 5)} : S^1 \times (0, 5) \rightarrow S^1 \times (0, 4)$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Além disso, por construção, segue que acima de  $S^1 \times \{2\}$ ,  $h_\alpha$  possui um único conjunto minimal  $C_\alpha \subset S^1 \times \{10\}$ .

Agora, note que as condições impostas à função  $\gamma$  implicam que acima de  $S^1 \times \{1\}$ ,  $\Sigma$  é uma união de "cabelos" disjuntos que têm origem no conjunto  $C_\alpha$  e que estão se acumulando no atrator do exemplo de Bernado e Salvador. Isto porque, definindo  $\Lambda = \Sigma \cap (S^1 \times [5, 10])$ , resulta do exemplo de Matsumoto que  $\Lambda$  é um conjunto de segmentos de retas verticais com origem no conjunto  $C_\alpha$ , donde  $\Lambda = C_\alpha \times [5, 10]$ . Além disso, como  $C_\alpha$  é um conjunto invariante, pela definição de  $h_\alpha$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\Sigma \cap (S^1 \times [1, \infty)) \subset h_\alpha^n(\Lambda)$ . Observe a figura 3.6 para ter uma ideia do que está acontecendo.

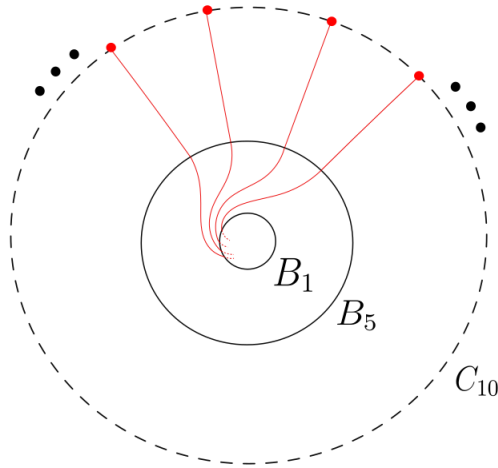


Figura 3.6: Em vermelho, temos os "cabelos" de  $\Sigma$  com origem nos pontos do conjunto minimal  $C_\alpha$  e que estão se enrolando em torno do atrator do exemplo de Bernado e Salvador.

Como  $C_\alpha$  tem medida de Lebesgue igual a zero,  $m(C_\alpha) = 0$ , no próximo Lema mostraremos que  $m(\Sigma) = 0$ , donde conclui-se que  $h_\alpha \in \mathcal{H}$ . Para demonstrarmos este lema, será usado a seguinte proposição (Proposição 10.13 em [Is09]).

**Proposição 3.5.1.** *Denote por  $m$  a medida de Lebesgue. Dados  $A, B \subset \mathbb{R}$  conjuntos mensuráveis e  $\sigma$ -finitos relativamente à  $m$ . Então  $A \times B$  é mensurável,  $\sigma$ -finitos relativamente à  $m$  e temos que  $m(A \times B) = m(A) \times m(B)$ .*

**Lema 3.5.1.** *Considere o homeomorfismo  $h$  definido acima. Como  $m(C_\alpha) = 0$ , então  $m(\Sigma) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Lambda = C_\alpha \times [5, 10]$ . Como  $m(C_\alpha) = 0$ , pela Proposição 3.5.1, notemos que  $m(\Lambda) = 0$ . Consequentemente, como  $\Sigma \cap (S^1 \times [1, \infty)) \subset h^n(\Lambda)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , temos que acima de  $S^1 \times \{1\}$ ,  $\Sigma$  tem medida de Lebesgue zero. Portanto,

$$m(\Sigma) = m(\Sigma \cap (S^1 \times (0, 1))).$$

Agora, denotando por  $A = \{x \in \Sigma : h_\alpha^{-n}(x) \in S^1 \times (0, 1) \forall n \in \mathbb{N}\}$ , observemos que  $A$  é o atrator para  $g$  do exemplo de Bernado e Salvador. Então, como  $\text{Spec}(g) \subset B_{1/1+\varepsilon}(0)$ ,

resulta que  $m(A) = 0$ . Logo, supondo por absurdo que  $m(\Sigma) > 0$ , obtemos que existe um subconjunto  $B \subset \Sigma \cap (S^1 \times (0, 1))$  com  $m(B) > 0$  e existe  $n > 0$  de modo que

$$h_\alpha^{-n}(B) \cap (S^1 \times [1, \infty))$$

tem medida positiva. Como isto é um absurdo, o Lema segue.  $\square$

Nos falta apenas justificar o porquê  $\rho(h_\alpha, U) = \alpha$ . Com esta finalidade, vejamos que no Teorema 3.1.3, para mostrar que o número de rotação  $\rho(h, U_\infty) = \alpha$ , Matsumoto utilizou apenas que os pontos de  $C_\alpha$  são acessíveis pela bacia  $U = U_\infty$ . Logo, os pontos de  $C_\alpha$  estão associados a fins primos acessíveis e tais fins primos possuem número de rotação  $\alpha$ . Portanto, como os pontos acessíveis de  $C_\alpha$  são preservados por  $h_\alpha$ , resulta que o número de rotação  $\rho(h_\alpha, U) = \alpha$  é irracional.

Note que que os "cabelos" que têm origem no conjunto  $C_\alpha$  estão se acumulando nos fechos das variedades instáveis das selas periódicas presentes em  $S^1 \times (0, 1)$  de tal modo que estes pontos de sela não são acessíveis por  $U$ . Será mostrado no próximo capítulo que  $\mathcal{W}^u(p) \subset \partial U$  para todo ponto periódico  $p \in \partial U$  de sela e que a irracionalidade do número de rotação  $\rho(h, U)$  implica que não pode existir ponto acessível em qualquer ramo instável de pontos de sela.

# Capítulo 4

## Alguns Resultados 2

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na primeira seção, apresentaremos algumas propriedades que serão usadas nas seções posteriores, na segunda seção definiremos o que é uma ferradura de Smale e mostraremos que tais ferraduras têm número de rotação de fins primos racional e, na terceira seção, exibiremos propriedades dos difeomorfismos  $h \in \mathcal{H}$ , quando o número de rotação de fins primos  $\rho(h, U)$  é irracional. Estes são os principais resultados obtidos nesta tese.

### 4.1 Preliminares

Dado  $h \in \mathcal{H}$ , considere  $U$  a bacia de repulsão do infinito e denote por  $\Sigma = \partial U$ .

Usando o exemplo de Addas Zanata e Veiga Gomes e as ideias do trabalho de Matsumoto, construímos na seção 3.5 um exemplo de um homeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  com número de rotação de fins primos  $\rho(h, U)$  irracional, de modo que existe um ponto periódico  $p \in \Sigma$  de sela e tal que as variedades instável e estável de  $p$  se intersectam transversalmente. No entanto, este homeomorfismo apresenta a propriedade importante de que não existem pontos acessíveis em  $\overline{W^u(p)}$  (será provado na Proposição 4.1.1 que  $\overline{W^u(p)} \subset \Sigma$ ). Em particular, temos que  $\Sigma \setminus \overline{W^u(p)} \neq \emptyset$ .

Em vista de tal exemplo que foi construído, agora, estaremos interessados em estudar

a Pergunta 3.1.2 com a hipótese adicional de que  $\Sigma = \overline{W^u(p)}$ , ou seja, se  $p \in \Sigma$  um ponto de sela com intersecção homoclínica transversal, queremos responder a pergunta:

**Pergunta 4.1.1.** *Se  $h \in \mathcal{H}$  é difeomorfismo de classe  $C^1$ , é possível que o número de rotação  $\rho(h, U)$  seja irracional e exista ponto de sela  $p$  com intersecção homoclínica transversal tal que  $\Sigma = \overline{W^u(p)}$ ?*

No que segue, vamos considerar  $h \in \mathcal{H}$ , que existe um ponto fixo  $p \in \Sigma$  de sela com intersecção homoclínica transversal e vamos supor que os autovalores de  $Dh(p)$  são ambos positivos. A próxima proposição fornece algumas informações referentes às variedades  $\mathcal{W}^s(p)$  e  $\mathcal{W}^u(p)$ .

**Proposição 4.1.1.** *Dado  $h \in \mathcal{H}$ , seja  $p \in \Sigma$  um ponto fixo de sela com intersecção homoclínica transversal. Então,*

- (i) *A variedade instável  $\mathcal{W}^u(p)$  está inteiramente contida em  $\Sigma$  e  $\overline{\mathcal{W}^u(p)} \subset \Sigma$ , porque  $\Sigma$  é compacto.*
- (ii) *A variedade estável  $\mathcal{W}^s(p)$  não pode estar totalmente contida em  $\Sigma$ .*
- (iii) *Se existir ponto acessível na variedade  $\mathcal{W}^u(p)$ , então o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional.*

*Demonstração.* (i) Como  $U$  é a bacia de repulsão do infinito, dado  $x \in U$ , note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^{-n}(x) \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, se  $x \in \mathcal{W}^u(p)$ , temos que  $h^{-n}(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente,  $\mathcal{W}^u(p) \subset \Sigma$ . Sendo  $\Sigma$  um conjunto fechado,  $\overline{\mathcal{W}^u(p)} \subset \Sigma$ .

- (ii) Iremos mostrar que se  $\mathcal{W}^s(p) \subset \Sigma$  então  $\Sigma^c = U$  não pode ser conexo. De fato, como  $\Sigma$  possui interior vazio e pelo item (i) temos que  $\mathcal{W}^u(p) \subset \Sigma$ , tomando qualquer  $x \in \mathcal{W}^s(p) \cap \mathcal{W}^u(p)$ , observemos que, caso  $\mathcal{W}^s(p) \subset \Sigma$ , então

$$(\mathcal{W}^s(p)|_{[x, h(x)]} \cup \mathcal{W}^u(p)|_{[x, h(x)]})^c$$

possui mais de uma componente conexa, onde

$$\mathcal{W}^s(p)|_{[x,h(x)]} \text{ e } \mathcal{W}^u(p)|_{[x,h(x)]}$$

representam os "arcos" de variedade estável e instável de  $x$  até  $h(x)$ , respectivamente. Portanto, se  $\mathcal{W}^s(p) \subset \Sigma$ , temos que  $\Sigma^c$  não é conexo. No entanto, como  $\Sigma^c = U$  é conexo pois é a bacia de repulsão do infinito, chegamos que  $\mathcal{W}^s(p)$  não pode estar totalmente contida em  $\Sigma$ .

- (iii) Suponhamos que exista um ponto acessível  $a \in \mathcal{W}^u(p)$ . Como  $h(a)$  é acessível e o aberto  $U$  é conexo, considere  $\sigma_a \subset U$  um crosscut que com pontos finais em  $a$  e  $h(a)$ . Pelo Lema 2.2.2, temos que  $(\Sigma \cup \sigma_a)^c$  possui exatamente duas componentes conexas. Sejam  $D_1$  e  $D_2$  estas componentes conexas.

Observe que, para uma dessas, digamos  $D_1$ , temos  $p \notin \overline{D_1}$ . De fato, definindo  $J = \mathcal{W}^u(p)|_{[a,h(a)]} \cup \sigma_a$ , como  $J$  é uma curva fechada simples, pelo Teorema da curva de Jordan, obtemos que existem componentes conexas abertas  $A_1$  e  $A_2$ , tais que  $J^c = A_1 \cup A_2$ . Além disso,

$$\partial A_i = J, \text{ para } i = 1, 2.$$

Então, como  $p \notin J$ , temos que para algum  $A_i$ , digamos  $A_1$ ,  $p \notin \overline{A_1}$ . Portanto, como

$$(\Sigma \cup \sigma_a)^c \subset A_1 \cup A_2,$$

considerando que  $D_1 \subset A_1$ , obtemos que  $p \notin \overline{D_1}$ .

Agora, considere  $\varepsilon > 0$  satisfazendo

$$\overline{D_1} \cap B_\varepsilon(p) = \emptyset.$$

Pelo item (ii), a variedade  $\mathcal{W}^s(p)$  não pode estar inteiramente contida em  $\Sigma$ . Logo, podemos tomar um  $x \in \mathcal{W}^s(p) \cap U$  e percorrer  $\mathcal{W}^s(p)$ , por um dos lados de  $x$ , até o primeiro momento em que  $\mathcal{W}^s(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$ . Isto mostra que o conjunto dos pontos acessíveis em  $\mathcal{W}^s(p) \cap \Sigma$  é não vazio e podemos tomar os caminhos acessando tais pontos de modo que estejam contidos em  $\mathcal{W}^s(p)$ .

Então, considere  $m \in \mathcal{W}^s(p) \cap \Sigma$  um ponto acessível com  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathcal{W}^s(p) \cap U$  um endcut acessando o ponto  $m$ . Como  $\gamma \subset \mathcal{W}^s(p)$ , existe  $n_0$  suficientemente grande tal que, para  $n \geq n_0$ ,

$$h^n(\gamma) \subset B_\varepsilon(p).$$

Consequentemente,  $h^n(\gamma) \cap \overline{D_1} = \emptyset$ , para todo  $n \geq n_0$ . Isto contradiz o Lema 2.3.1.

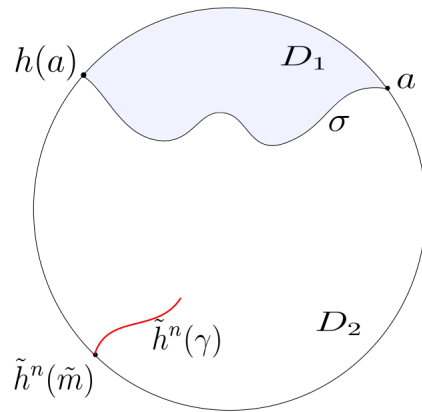


Figura 4.1: Informações na compactificação de fins primos de  $U$ .

□

Uma consequência imediata da Proposição anterior é o seguinte resultado.

**Corolário 4.1.1.** *Dada  $h \in \mathcal{H}$ , se o número de rotação  $\rho(h, U)$  for irracional, então não existe ponto acessível na variedade instável de nenhum ponto periódico de sela em  $\Sigma$ .*

**Observação 4.1.1.** *Uma primeira consequência que surge quando assumimos que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional e  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$  resulta do Corolário 4.1.1 e afirma que não pode existir ponto acessível na variedade instável de qualquer ponto de sela em  $\Sigma$ . Além disso, se  $h$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ , usando o Teorema 2.1.3 devido a Pixton, podemos tomar  $h$  num conjunto genérico tal que, se o fecho de um ramo de  $\mathcal{W}^u(p)$  intersecta um ramo de  $\mathcal{W}^s(p)$ , então estes ramos se intersectam transversalmente. Mais*



ainda, nestas hipóteses, esta mesma condição genérica garante que a variedade  $\mathcal{W}^u(p)$  intersecta transversalmente os dois ramos estáveis de todo ponto periódico de sela em  $\Sigma$ , pois, caso contrário, existiria uma sela periódica acessível e, portanto, número de rotação  $\rho(h, U)$  seria racional.

**Observação 4.1.2.** Considere  $h \in \mathcal{H}$  de Classe  $C^1$ . Sejam  $\mathcal{W}_1^u(p)$  e  $\mathcal{W}_2^u(p)$  os dois ramos instáveis de  $\mathcal{W}^u(p)$ . Supondo que  $\mathcal{W}_i^u(p) \cap \mathcal{W}^s(p) \neq \emptyset$ , então o  $\lambda$ -lema nos permite concluir que  $\overline{\mathcal{W}_i^u(p)} = \Sigma$ , pois  $\overline{\mathcal{W}^u(p)} = \Sigma$ . Agora, vamos supor que o ramo  $\mathcal{W}_1^u(p)$  intersecta transversalmente um ramo de  $\mathcal{W}^s(p)$  e supor que o ramo  $\mathcal{W}_2^u(p)$  não intersecta  $\mathcal{W}^s(p)$ . Como estamos supondo que o número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}^c$ , pela observação 4.1.1, segue que,  $\mathcal{W}_1^u(p)$  precisa intersectar transversalmente os dois ramos de  $\mathcal{W}^s(p)$ .

## 4.2 Número de Rotação da Ferradura de Smale

Existem muitos exemplos de difeomorfismos  $h \in \mathcal{H}$  tais que  $h$  possui um ponto fixo  $p \in \Sigma$  de sela com intersecção homoclínica  $C^1$ -transversa. Talvez o mais clássico deles seja a própria ferradura construída por Smale em 1965, que definiremos a seguir. A ferradura de Smale é uma transformação topológica que fornece uma base para o entendimento das propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos. Mostraremos nesta seção que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional quando  $h$  é uma ferradura de Smale.

**Definição 4.2.1.** Considere um difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$ . Diremos que  $h$  é uma ferradura de Smale, quando existirem um quadrado fechado  $Q$  centrado na origem e de lado  $l$ , um semi-disco inferior  $A$  de raio  $l/2$  localizado abaixo da base de  $Q$  e  $B$  um semi-disco superior de raio  $l/2$  localizado acima de topo de  $Q$ , de modo que, chamando de  $N = Q \cup A \cup B$  o disco topológico obtido pela união dessas três regiões, temos que:

- (i) Para todo  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus N$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  satisfazendo  $h^n(x) \in N$ .
- (ii)  $h(N) \subset \text{int } N$ , com  $h(A \cup B) \subset \text{int}(A \cup B)$ .
- (iii) A dinâmica de  $h$  em  $Q \cap h^{-1}(Q)$  satisfaz:  $h$  comprime horizontalmente  $Q$  por um fator  $0 < \lambda < 1$  e expande verticalmente por um fator  $\mu > 1$ .

(iv) A intersecção  $h(Q) \cap Q$  possui um número  $m$  retângulos disjuntos, todos com mesma largura e com  $m$  satisfazendo  $2 \leq m < \infty$ .

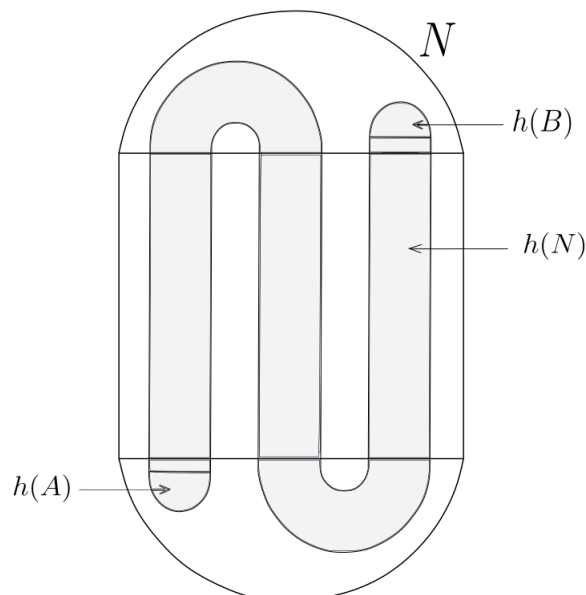


Figura 4.2: Exemplo em que a intersecção  $h(Q) \cap Q$  possui 3 retângulos

**Observação 4.2.1.** Em particular, vale uma condição mais forte em (ii),  $h$  possui um ou dois pontos periódicos atratores em  $A \cup B$ . Logo, os demais pontos periódicos de  $h$  estão contidos no retângulo  $Q$ . Como na definição de  $h$ ,  $h(U) \subset U$ , segue que  $h^2(N) \subset h(N) \subset N$ . Além disso, se  $h(Q) \cap Q$  possui  $m$  retângulos de largura  $\lambda l$ , então  $h^2(Q) \cap Q$  consiste de  $m^2$  retângulos disjuntos e de largura  $\lambda^2 l$ .

Para o entendimento de algumas propriedades das ferraduras de Smale, um importante espaço métrico e o espaço das sequências de  $m$  símbolos  $\Sigma_m$  que será definido a seguir.

**Definição 4.2.2.** O espaço das sequências de  $m$  símbolos,  $\Sigma_m$ , é definido por

$$\Sigma_m = \{0, 1, \dots, m-1\}^{\mathbb{Z}} = \{s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j \in \{0, 1, \dots, m-1\}, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Uma métrica em  $\Sigma_m$  é definida por

$$d(s, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^{|j|}},$$

onde  $s = (s_j)_{j \in \mathbb{Z}}, t = (t_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  e  $s_j, t_j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

Um fato que segue direto da Definição 4.2.2 é que essa métrica faz de  $\Sigma_m$  um espaço métrico.

**Definição 4.2.3.** *A aplicação shift (ou shift bilateral) sobre  $\Sigma_m$  é definida por  $\sigma(s) = t$ , onde  $t_k = s_{k+1}$ , para  $t = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  e  $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  em  $\Sigma_m$ . O espaço  $\Sigma_m$  junto com a aplicação  $\sigma$  é chamado shift bilateral.*

Suponha que um difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  satisfaz as propriedades da Definição 4.2.1 e que  $m$  representa o número de retângulos da intersecção  $h(Q) \cap Q$ . Representando por  $\Lambda$  o conjunto de todos os pontos cujas órbitas positivas e negativas permanecem no quadrado  $Q$ , é um fato conhecido que a aplicação  $h : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é topologicamente conjugada a aplicação shift  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ . Então, como a aplicação shift  $\sigma : \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$  possui exatamente  $m$  pontos fixos, que são os pontos

$$s = (\dots, s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, \dots), \text{ com } s_0 \in \{0, 1, \dots, m-1\},$$

temos que  $h|_{\Lambda}$  possui  $m$  pontos fixos, ou seja, existem apenas  $m$  pontos fixos de sela em  $\Sigma \cap Q$ .

Dado um ponto fixo de sela  $p \in \Sigma$ , temos que a variedade estável local do ponto  $p$  é o segmento de reta horizontal contido no retângulo  $Q$  e que passa por  $p$ . De forma análoga a variedade instável local de ponto  $p$  é o segmento de reta vertical contido em  $Q$  e que passa por esse ponto.

Construído dessa forma, uma ferradura de Smale  $h$  possui pontos fixos de sela com intersecção homoclínica. Para um tal ponto fixo de sela  $p \in \Sigma$ , vale que  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ . Além disso, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\overline{\mathcal{W}^u(p)} \cap Q \subset h^n(Q) \cap Q.$$

Então, dado  $h \in \mathcal{H}$ , supondo que  $h$  é uma ferradura de Smale, para todo ponto fixo de sela  $p \in \Sigma$ , temos que  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ . O seguinte resultado mostrará que ferraduras de Smale têm número de rotação  $\rho(h, U)$  racional.

**Teorema 4.2.1.** *Dado  $h \in \mathcal{H}$ , se  $h$  é uma ferradura de Smale, então o número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}$ .*

*Demonstração.* Para provar este resultado, mostraremos que nas hipóteses deste Teorema, existe um ponto periódico acessível  $q \in \Sigma$ . Conseqüentemente, usando o Teorema 2.4.2, a existência deste ponto  $q$  implicará que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional. Considere  $p \in \Sigma$  um ponto fixo de sela. Então,  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ . Inicialmente, notemos que quando um dos ramos de variedade  $\mathcal{W}^s(p)$  não é intersectado por  $\mathcal{W}^u(p)$ , resulta da Observação 4.1 que o próprio ponto  $p$  é um ponto periódico acessível, implicando que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é racional.

Vamos então considerar os casos em que os dois ramos da variedade  $\mathcal{W}^s(p)$  são intersectados por ramos de  $\mathcal{W}^u(p)$ . Como  $h$  é uma ferradura de Smale, então existe um quadrado  $Q$  de lado  $l$  satisfazendo a Definição 4.2.1. Assim, temos a união finita de retângulos,

$$h(Q) \cap Q = \bigcup_{i=1}^m V_i,$$

todos com a mesma largura  $\lambda_0$ , onde  $\lambda_0 = \lambda l$ . Note que, podemos assumir que  $0 < l < 1$ .

Para facilitar a notação, vamos assumir que o ponto  $p$  é a origem. Então, as componentes conexas de  $\mathcal{W}^s(0) \cap Q$  e  $\mathcal{W}^u(0) \cap Q$  que contém a origem são, respectivamente, as componentes conexas do eixos cartesianos  $x$  e  $y$  restritos a  $Q$ .

Visto que a origem não é acessível, existe algum retângulo não extremo tal que a origem pertence a ele. Isto porque a variedade  $\mathcal{W}^u(0)$  tem intersecção não vazia com os dois segmentos  $\mathcal{W}^s(0) \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$  e  $\mathcal{W}^s(0) \cap \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ .

Os retângulos são todos verticais e disjuntos. Assim, ordenaremos os mesmos da esquerda para à direita, sendo  $V_1$  o mais a esquerda e  $V_m$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , o mais à

direita. Isto define uma relação de ordem neste conjunto de retângulos. Utilizaremos a notação  $\prec$  para representar esta relação de ordem e escrevemos  $V_1 \prec V_2 \prec \dots \prec V_m$ .

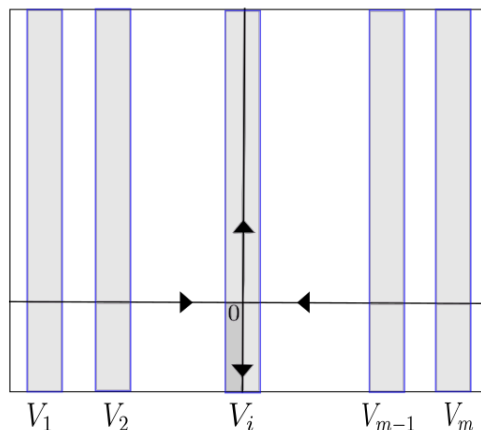


Figura 4.3: Informações de  $Q \cap h(Q)$  no plano.

Note que, para cada retângulo  $V_i$ , a intersecção  $h^2(Q) \cap V_i$  possui  $m$  retângulos disjuntos  $V_{ij}$ , com  $1 \leq j \leq m$  e todos com largura  $\lambda^2 l$ . Além disso, como  $h$  preserva orientação, após definirmos a ordem  $V_1 \prec V_m$  dos retângulos de  $h(Q) \cap Q$ , existem apenas duas possibilidades para a ordem dos retângulos de  $h^2(Q) \cap V_i$ , a saber,

- $h^2(Q) \cap V_i$  tem a mesma ordem de  $h(Q) \cap Q$ , isto é,  $V_{i1} \prec V_{im}$ .
- $h^2(Q) \cap V_i$  reverte a ordem de  $h(Q) \cap Q$ , isto é,  $V_{im} \prec V_{i1}$ .

Logo, referente às ordens das intersecções  $h^2(Q) \cap V_1$  e  $h^2(Q) \cap V_m$ , apenas um dos seguintes casos pode ocorrer:

(i) Ao menos uma destas intersecções tem a mesma ordem de  $h(Q) \cap Q$ , ou seja, sobra três casos:

- $V_{11} \prec V_{1m}$  e  $V_{m1} \prec V_{mm}$ , ou
- $V_{1m} \prec V_{11}$  e  $V_{m1} \prec V_{mm}$ , ou

$$- V_{11} \prec V_{1m} \text{ e } V_{mm} \prec V_{m1}$$

(ii) Ambas as intersecções revertem a ordem de  $h(Q) \cap Q$ , ou seja,

$$- V_{1m} \prec V_{11} \text{ e } V_{mm} \prec V_{m1}.$$

Provaremos que em ambos os casos (i) e (ii), existe ponto periódico acessível em pelo menos um dos retângulos  $V_1$  e  $V_m$ .

*Caso (i).* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $V_{m1} \prec V_{mm}$ . Por indução, obtemos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h^{n+1}(Q) \cap \underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}}_1 \cup \underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}}_2 \cup \underbrace{V_{m \cdots mm}}_{(n+1) \text{ vezes}},$$

com a ordem

$$\underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}}_1 \prec \underbrace{V_{m \cdots mm}}_{(n+1) \text{ vezes}}.$$

Isto vai permitir concluir que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a intersecção

$$h^{n+1}(Q) \cap \underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}}$$

tem a mesma ordem de  $h(Q) \cap Q$ . Logo, dado  $n \in \mathbb{N}$ , o retângulo extremo direito da intersecção  $h^n(Q) \cap Q$  é o retângulo  $C_m^n$ , definido por

$$C_m^n = \underbrace{V_{m \cdots m}}_{n \text{ vezes}}.$$

Observe que o retângulo  $C_m^n$  é formado pelos pontos  $x \in Q$  tais que  $h^{-j}(x) \in C_m^{n-j}$ , para  $1 \leq j \leq n$ . Seja

$$\Gamma = \bigcap_{n \geq 0} C_m^n.$$

*Fato:*  $\Gamma$  é vertical em  $Q$  e todo ponto de  $\Sigma$  é acessível por semi-retas horizontais vindas da direita de  $Q$ . De fato, como cada retângulo  $C_m^n$  é vertical e  $C_m^n \rightarrow \Gamma$ , segue que  $\Gamma$  é vertical em  $Q$ . Agora, supondo que existe algum ponto de  $\Gamma$  que não é acessível, note que devem existir pontos de  $\Sigma$  à direita de  $\Gamma$ , mas como isto contradiz o fato que  $\Sigma \cap Q \subset h^n(Q) \cap Q$  para todo  $n$ , obtemos que todos os pontos de  $\Gamma$  são acessíveis.

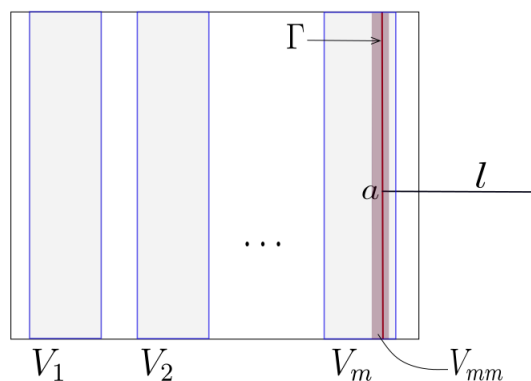


Figura 4.4: Semi-reta  $l$  acessando o ponto  $a \in \Gamma$ .

Então, como existe um ponto fixo de sela  $q \in C_m^n$ , necessariamente, temos que  $q \in \Gamma$ . Isto conclui a demonstração de que existe sela acessível em  $\Sigma$ .

*Caso (ii).* Como o disto topológico  $N$ , na definição 4.2.1, satisfaz

$$h^2(N) \subset \text{int } h(N) \subset \text{int } N,$$

definindo  $g = h^2$ , obtemos que

$$\left[ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^n(N) \right] \cap Q = \left[ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} h^n(N) \right] \cap Q = \Sigma \cap Q$$

Além disso, temos que  $g(Q) \cap Q$  possui  $m^2$  retângulos sendo que as intersecções  $g^2(Q) \cap V_1$  e  $g^2(Q) \cap V_{m^2}$  possuem a mesma ordem  $g(Q) \cap Q$ . Então, pelo caso (i), sabemos que  $g$  possui ponto fixo acessível em  $Q$ .  $\square$

Dado  $h \in \mathcal{H}$  uma ferradura de Smale, a demonstração do Teorema 4.2.1 provou que existe ponto periódico acessível de sela  $q \in \Sigma$ . Mais ainda, mostrou que todos os pontos da variedade  $\mathcal{W}^u(q)$  são acessíveis. O próximo Corolário, que segue imediatamente dos Teoremas 2.4.3 e 4.2.1, mostrará que este fato não foi apenas uma coincidência e nos dirá onde estão todos os pontos acessíveis de  $h$ , isto porque os pontos periódicos de  $h$  são pontos hiperbólicos.

**Corolário 4.2.1.** *Nas hipóteses do Teorema 4.2.1, se  $h$  é uma ferradura de Smale, então todo ponto acessível ou é um ponto periódico ou está na variedade instável de um ponto periódico acessível.*

O seguinte Corolário é consequência da demonstração do Teorema 4.2.1.

**Corolário 4.2.2.** *Se  $h \in \mathcal{H}$  é uma ferradura de Smale, então  $h$  possui um fixo acessível ou um ponto acessível de período dois.*

### 4.3 Consequências do Número de Rotação de Fins Primos $\rho(h, U)$ Irracional.

Nesta secção, consideremos que  $h \in \mathcal{H}$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ ,  $U$  é a bacia de repulsão do infinito e  $\Sigma = \overline{W^u(p)}$ , com  $p$  um ponto fixo de sela com intersecção homoclínica transversal tal que os autovalores de  $Dh(p)$  são ambos positivos. Mais ainda, assumiremos a seguinte condição que foi provada genérica na topologia  $C^r$ , para todo  $r \geq 1$ , em [Pi82] por Pixton:

*Se  $p, q \in \Sigma$  são pontos periódicos de sela e, para um ramo instável  $\mathcal{W}_i^u(p)$  de  $\mathcal{W}^u(p)$  e um ramo  $\mathcal{W}_j^s(q)$  de  $\mathcal{W}^s(q)$  vale que  $\overline{\mathcal{W}_i^u(p)} \cap \mathcal{W}_j^s(q) \neq \emptyset$ , então  $\mathcal{W}_i^u(p)$  intersecta o ramo  $\mathcal{W}_j^s(q)$  de forma  $C^1$ -transversa.*

O Teorema 4.2.1 e o Corolário 4.2.1 forneceram informações sobre o número de rotação  $\rho(h, U)$  para uma classe muito restrita de difeomorfismos que satisfazem  $h$  uma ferradura



de Smale. Com o objetivo de obtermos informações sobre o número de rotação  $\rho(h, U)$  para qualquer difeomorfismo  $h \in \mathcal{H}$  nas condições acima, vamos supor adicionalmente que  $\rho(h, U)$  é irracional e estudar as consequências de assumir tal fato.

Em [Bar91], Barge usou a teoria de limite inverso para construir exemplos de homeomorfismos que estão na classe  $\mathcal{H}$ , possuem número de rotação de fins primos irracional e  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ , para  $p$  um ponto fixo de sela. Mesmo sendo apenas um homeomorfismo, os pontos de sela estão bem definidos. No entanto, tais exemplos, provavelmente, não tem a propriedade genérica de Pixton.

Para a próxima proposição, considere  $a \in \Sigma$  um ponto acessível. Como  $h(a)$  também é um ponto acessível e  $U$  é um aberto conexo do plano, considere  $\sigma_a \subset U$  um crosscut com extremos nos pontos  $a$  e  $h(a)$ . Pelo Lema 2.2.2, sabemos que  $(\Sigma \cup \sigma_a)^c$  possui exatamente duas componentes conexas abertas. Sejam  $D_1$  e  $D_2$  estas componentes. Então,  $\partial D_i \subset \Sigma \cup \sigma_a$  para  $i = 1, 2$ . Defina

$$K_i^a = \partial D_i \setminus \sigma_a, \text{ com } i = 1, 2.$$

Veja que a definição de  $K_i^a$  pode depender da escolha do crosscut  $\sigma_a$ . No entanto, para os resultados que apresentaremos, podemos tomar qualquer crosscut com extremos nos pontos  $a$  e  $h(a)$ . Mas, se  $a$  for o conjunto principal de apenas um fim primo, então esta definição não depende de  $\sigma_a$ , no sentido de que, para todo crosscut  $\sigma_a$  com extremos em  $a$  e  $h(a)$ , os continuos  $K_1^a$  e  $K_2^a$  serão as fronteiras das componente conexas de  $(\Sigma \cup \sigma_a)^c$  restritas a  $\Sigma$ . Isto porque, dado um crosscut  $\sigma_a$ , temos que  $\partial D_i|_{\mathbb{P}(U)}$  em  $U^*$  consiste de um dos dois intervalos determinados pelos fins primos  $\tilde{a}$  e  $\tilde{h}(\tilde{a})$ , que estão associados aos pontos acessíveis  $a$  e  $h(a)$ , respectivamente.

O Lema que segue mostrará, em particular, que para todo ponto acessível  $a \in \Sigma$ , o ponto fixo de sela  $p \in K_1^a \cap K_2^a$  quando o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional.

**Lema 4.3.1.** *Seja  $a \in \Sigma$  é um ponto acessível. Se o número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}^c$ , então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que, para  $i = 1$  ou  $2$ ,*

$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^n h^{-j}(K_i^a).$$

*Demonstração.* Considere  $a \in \Sigma$  um ponto acessível. Provaremos que é possível obter um  $n_1 > 0$  que satisfaz este lema para  $K_1^a$ . Visto que podemos repetir o mesmo processo e obter um  $n_2$  que satisfaz o lema para  $K_2^a$ , para que exista um  $n$  comum para  $K_1^a$  e  $K_2^a$ , basta tomar o  $n$  como o maior entre  $n_1$  e  $n_2$ .

Como definido anteriormente, seja  $\sigma_a$  um crosscut com pontos finais em  $a$  e  $h(a)$  e considere um endcut  $\gamma_a : [0, 1) \rightarrow U$  acessando  $a$  com  $\gamma([0, 1)) \subset \sigma_a$ . No conjunto de fins primos  $U^*$ , denote por  $\tilde{a}$  o fim primo tal que  $\gamma(t) \rightarrow \tilde{a}$  em  $U^*$  quando  $t \rightarrow 1^-$  e denote por  $\tilde{h}$  a extensão de  $h|_U$  para  $U^*$ . A fronteira de  $D_1$  em  $U^*$  consiste de  $\sigma$  unido com um intervalo fechado  $I \subset \mathbb{P}(U)$  determinado pelos fins primos  $\tilde{a}$  e  $\tilde{h}(\tilde{a})$ .

Dado que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional e o intervalo  $I$  é um domínio fundamental de  $\tilde{h}|_{\mathbb{P}(U)}$ , existe um número  $n_1 > 0$  tal que

$$\mathbb{P}(U) \subset \bigcup_{j=0}^{n_1} \tilde{h}^{-j}(I).$$

Agora, tome  $z \neq a \in \Sigma$  um ponto acessível com  $\alpha(t) : [0, 1) \rightarrow U$  um endcut que termina em  $z$  e seja  $\tilde{z}$  o fim primo associado a  $z$  com  $\alpha(t) \rightarrow \tilde{z}$  quando  $t \rightarrow 1^-$  em  $U^*$ . Como já foi mencionado, existe  $k$  com  $0 \leq k \leq n_1$  tal que  $\tilde{h}^k(\tilde{z}) \in I$  e, pela irracionalidade de  $\rho(h, U)$ , temos que  $\tilde{h}^k(\tilde{z}) \neq \{\tilde{a}, \tilde{h}(\tilde{a})\}$ . Por este motivo, como  $h^k(\alpha(t)) = \tilde{h}^k(\alpha(t)) \in D_1$  se  $t < 1$ , obtemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $h^k(\alpha([\varepsilon, 1))) \subset D_1$ . Portanto  $h^k(z) \in K_1^a$ .

Em particular, isto implica que, dado qualquer ponto acessível  $z \in \Sigma$ , existe um inteiro  $k$  com  $0 \leq k \leq n_1$  de modo que  $h^k(z) \in K_1^a$ . Por esta razão, o conjunto

$$\bigcup_{j=0}^{n_1} h^{-j}(K_1^a)$$

contém todos os pontos acessíveis de  $\Sigma$ . Finalmente, como  $K_1^a$  é um compacto e o conjunto dos pontos acessíveis é um conjunto denso em  $\Sigma$ , podemos concluir que

$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^{n_1} h^{-j}(K_1^a).$$

□

**Observação 4.3.1.** Na demonstração do Lema 4.3.1, foi usado apenas que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional. O mesmo resultado continua válido para os casos que estão nas hipóteses do Lema 4.3.1 mas  $\Sigma \setminus \overline{\mathcal{W}^u(p)} \neq \emptyset$ , por exemplo, no exemplo construído na demonstração do Teorema 3.1.4.

**Corolário 4.3.1.** Seja  $a \in \Sigma$  é um ponto acessível. Se o número de rotação  $\rho(h, U)$  for irracional, então  $p \in K_1^a \cap K_2^a$ . Também temos que  $K_i^a$  intersecta os dois ramos de  $\mathcal{W}_1^u(p)$ , para  $i = 1, 2$ . Consequentemente, se existir algum ponto acessível  $a \in \Sigma$  tal que  $p \notin K_1^a \cap K_2^a$ , então  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}$ .

*Demonstração.* Como  $p$  é um ponto fixo e existe  $n$  como no Lema anterior, então

$$p \in K_i^a \cup h^{-1}(K_i^a) \dots \cup h^{-n}(K_i^a)$$

para  $i = 1, 2$ . Em particular,  $p \in K_1^a \cap K_2^a$ . As outras afirmações também são imediatas, basta notar que cada ramo instável de  $\mathcal{W}^u(p)$  também está contido em  $K_i^a \cup h^{-1}(K_i^a) \dots \cup h^{-n}(K_i^a)$ .  $\square$

Com o intuito de estudar as consequências que resultam da proposição acima, vamos entender a topologia de  $\Sigma$  em uma vizinhança do ponto  $p$ . Este estudo é iniciado com o lema a seguir.

**Lema 4.3.2.** Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a componente conexa de  $\Sigma \cap B_\varepsilon(p)$  que contém  $p$  é exatamente a componente conexa de  $\mathcal{W}^u(p) \cap B_\varepsilon(p)$  que contém  $p$ .

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.1.1 de Hatman-Grobman, podemos assumir que  $h$  se escreve como  $h(x, y) = (\mu x, \lambda y)$  em uma vizinhança aberta  $V$  de  $p$ . Então, fixando um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que a bola  $B_\varepsilon(p)$  esteja contida em  $V$ , podemos assumir que, neste sistema de coordenadas,  $p$  é a origem e a componente conexa de  $\mathcal{W}^u(p) \cap B_\varepsilon(p)$  que contém o ponto  $p$  é o intervalo  $I_\varepsilon$ , obtido da intersecção do eixo das ordenadas com a bola  $B_\varepsilon(p)$ .

Agora, se  $J_\varepsilon$  é a componente conexa de  $\Sigma \cap B_\varepsilon(p)$  que contém  $p$ , veja que, por definição,  $J_\varepsilon \supset I_\varepsilon$ . No entanto, supondo por absurdo que  $J_\varepsilon \neq I_\varepsilon$ , então deve existir  $r \in J_\varepsilon$  tal

que  $r \notin I_\varepsilon$ . Como estamos supondo que  $\rho(h, U)$  é irracional, a Observação 4.1.1 afirma que os dois ramos estáveis de  $\mathcal{W}^s(p)$  são intersectados por  $\mathcal{W}^u(p)$ . Logo, com o  $\lambda$ -Lema, obtemos  $I_\varepsilon$  é acumulado pela variedade  $\mathcal{W}^u(p)$  pelos dois lados. Consequentemente, existe  $r_0 \in J_\varepsilon \cap \mathcal{W}^u(p)$  com  $r_0 \notin \xi_\varepsilon$ . Mas note que isto implica que  $(J_\varepsilon \cup \Sigma)^c$  não é conexo. Como isto é um absurdo, o lema segue.  $\square$

Dado  $a \in \Sigma$  um ponto acessível, considere os continuos  $K_1^a$  e  $K_2^a$  como definidos anteriormente. Usando os resultados acima, iremos mostrar agora que, sob certa hipótese genérica, se o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, então  $K_1^a = K_2^a = \Sigma$ . Isso mostrará que no Lema 4.3.1,  $n = 0$ .

**Teorema 4.3.1.** *Considere  $h \in \mathcal{H}$  e  $U$  a bacia de repulsão do infinito. Suponhamos que  $h$  satisfaz a condição genérica de Pixton, que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional e  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$ , para  $p$  um ponto fixo de sela. Então, para todo ponto acessível  $a \in \Sigma$ , temos que  $K_1^a = K_2^a = \Sigma$ .*

*Demonstração.* Seja  $a \in \Sigma$  um ponto acessível. Visto que o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, o Corolário 4.3.1 mostra que

$$p \in K_1^a \cap K_2^a, K_i^a \cap \mathcal{W}_1^u(p) \neq \emptyset \text{ e } K_i^a \cap \mathcal{W}_2^u(p) \neq \emptyset.$$

Para simplificar a notação, vamos considerar  $K$  um contínuo que satisfaz as mesmas hipóteses de  $K_1^a$  e  $K_2^a$ , ou seja,  $p \in K$ ,  $a \in K$ ,  $K \cap \mathcal{W}_1^u(p) \neq \emptyset$  e  $K \cap \mathcal{W}_2^u(p) \neq \emptyset$ . Inicialmente, provemos a seguinte afirmação:

*Afirmação 1:* Se  $K$  intersecta algum ramo da variedade  $\mathcal{W}^u(p)$ , então  $K$  contém o fecho de tal ramo.

Antes de iniciarmos a demonstração desta afirmação observemos que a demonstração deste Teorema é uma consequência imediata de tal afirmação. De fato, como o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, segue da observação 4.1.2 que o fecho de pelo menos um dos ramos de  $\mathcal{W}^u(p)$  é igual a  $\Sigma$ . Logo, assumindo a afirmação anterior, como  $K \cap \mathcal{W}_1^u(p) \neq \emptyset$  e  $K \cap \mathcal{W}_2^u(p) \neq \emptyset$ , concluiremos que

$$\overline{\mathcal{W}_1^u(p)} \subset K \text{ e } \overline{\mathcal{W}_2^u(p)} \subset K,$$

donde seguirá que  $K = \Sigma$ . Por este motivo, para concluirmos a demonstração deste Teorema, precisamos apenas provar a afirmação acima.

*Prova da Afirmação.* Sem perda de generalidade, vamos supor por absurdo que o ramo  $\mathcal{W}_1^u(p)$  de  $\mathcal{W}^u(p)$  é tal que

$$\mathcal{W}_1^u(p) \cap K \neq \emptyset, \text{ mas } \mathcal{W}_1^u(p) \not\subset K.$$

Como feito na demonstração do Lema 4.3.2, dado  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, denote por  $I_\varepsilon$  a componente conexa de  $\Sigma \cap B_\varepsilon(p)$  que contém  $p$ . Visto que  $p \in K$ ,  $a \in K$  e  $K \subset \Sigma$ , se necessário, podemos considerar um  $\varepsilon$  menor e usar o mesmo lema para concluir que se  $I_{\varepsilon_k}$  é a componente conexa de  $K \cap B_\varepsilon(p)$  que contém  $p$ , então

$$I_{\varepsilon_k} = I_\varepsilon \text{ ou } I_{\varepsilon_k} = I_\varepsilon \cap \mathcal{W}_1^u(p).$$

Se  $I_{\varepsilon_k} = I_\varepsilon$ , então  $K \cap B_{\varepsilon_k}(p)$  intersecta os dois ramos de  $\mathcal{W}^u(p)$ , caso contrário, intersecta apenas um ramo. Considere a parametrização de  $\mathcal{W}_1^u(p)$ ,

$$\begin{aligned} l : [0, \infty) &\longrightarrow \mathcal{W}_1^u(p) \\ s &\longmapsto l(s). \end{aligned}$$

Observe que, como  $I_{\varepsilon_k} = I_\varepsilon$  ou  $I_{\varepsilon_k} = I_\varepsilon \cap \mathcal{W}_1^u(p)$ , em ambos os casos, supor que  $\mathcal{W}_1^u(p) \not\subset K$ , implica na existência de um  $t_0 \in (0, \infty)$  que satisfaz:

(i) Se  $t \in [0, t_0]$ , então  $l(t) \in K \cap \mathcal{W}_1^u(p)$ .

(ii) Existe sequência  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t_n \in (t_0, \infty)$ , com  $t_n \longrightarrow t_0^+$  tal que  $l(t_n) \notin K$ .

Além disso, veja que a existência deste  $t_0$  implica que, para todo  $t \in (t_0, \infty)$ ,  $l(t) \notin K$ . De fato, caso exista  $t_1 > t_0$  satisfazendo  $l(t_1) \in K$ , então existe um arco  $l([t_0, t_1]) \subset \mathcal{W}_1^u(p)$  intersectando o continuo  $K$  nos pontos  $l(t_0)$  e  $l(t_1)$ . Consequentemente, pelo Lema 2.2.2,  $(\mathcal{W}^u(p) \cup K)^c$  iria possuir pelo menos duas componentes conexas, isto porque  $\mathcal{W}^u(p) \subset \Sigma$ .

No entanto, como  $(\mathcal{W}^u(p) \cup K) \subset \Sigma$ , isto seria uma contradição com o fato de que o complementar de  $\Sigma$  é conexo ou que interior de  $\Sigma$  é vazio.

Defina  $K_0 = \mathcal{W}_1^u(p) \cap K$ . Com a parametrização  $l$  de  $\mathcal{W}_1^u(p)$ , segue-se que  $K_0 = l([0, t_0])$ . Veja que, para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$h^j(K_0) = h^j(l([0, t_0])) = l([0, t_j]),$$

onde  $l(t_j) = h^j(l(t_0))$ . Desse modo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$l([0, t_0]) = K_0 = \bigcup_{j=0}^n h^{-j}(K_0).$$

Por outro lado, o Lema 4.3.1 nos mostra que existe  $n_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{W}_1^u(p) \subset \bigcup_{j=0}^{n_0} h^{-j}(K).$$

Logo, como

$$\bigcup_{j=0}^{n_0} h^{-j}(K_0) = \mathcal{W}_1^u(p) \cap \bigcup_{j=0}^{n_0} h^{-j}(K),$$

tomando  $n = n_0$ , com as equações acima, chegamos que

$$l([0, t_0]) = \mathcal{W}_1^u(p).$$

Mas isto é um absurdo, pois, como foi construído,  $K_0 = l([0, t_0]) \subsetneq \mathcal{W}_1^u(p)$ . Note que a contradição surgiu quando assumimos que  $\mathcal{W}_1^u(p) \cap K \neq \emptyset$  e  $\mathcal{W}_1^u(p) \not\subseteq K$ . Portanto, nas condições do enunciado, se  $K$  intersecta algum ramo de  $\mathcal{W}^u(p)$ , como  $K$  é um fechado, então  $K$  contém o fecho de tal ramo, provando assim a afirmação.  $\square$

**Observação 4.3.2.** Com este Teorema, para  $h \in \mathcal{H}$  com  $\Sigma = \overline{\mathcal{W}^u(p)}$  e número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}^c$ , então  $K_1^a = K_2^a = \Sigma$  para todo  $a \in \Sigma$  acessível.

**Corolário 4.3.1.** Nas condições do Teorema 4.3.1, dado  $a \in \Sigma$  um ponto acessível, vamos denotar por  $\sigma_a^{m,n}$  um crosscut qualquer com extremos em  $h^n(a)$  e  $h^m(a)$ . De modo semelhante, denotando por  $D_1^{m,n}$  e  $D_2^{m,n}$  as componentes conexas de  $(\Sigma \cup \sigma_a^{m,n})^c$  e definindo

$$K_i^{a_{m,n}} = \partial D_i^{m,n} \Big|_{\Sigma},$$

pode-se repetir os argumentos do Teorema 4.3.1 e provar que se o número de rotação  $\rho(h, U)$  é irracional, então

$$K_1^{a_{m,n}} = K_2^{a_{m,n}} = \Sigma, \text{ para quaisquer } m, n \in \mathbb{Z}.$$

**Observação 4.3.3.** *Segue diretamente do Teorema 4.3.1 e do Corolário 4.3.1 que se existir algum ponto acessível  $a \in \Sigma$  satisfazendo  $K_i^{a_{m,n}} \subset \Sigma \setminus \mathcal{W}^u(p)$  para algum par de inteiros  $m$  e  $n$  e algum  $i = 1$  ou  $2$ , então o número de rotação  $\rho(h, U) \in \mathbb{Q}$ .*

Quando  $h$  é uma ferradura de Smale, o Teorema 4.2.1 mostrou que existe ponto periódico acessível de sela  $q \in \Sigma$ . Um ponto  $q$  com estas características, possui a propriedade de que todos os pontos da variedade  $\mathcal{W}^u(q)$  são acessíveis. Quando todos os pontos de uma variedade  $\mathcal{W}^u(q)$  forem acessíveis, chamaremos tal variedade de *variedade instável acessível*.

Considere  $h$  uma ferradura de Smale e  $q$  um ponto periódico acessível. Como  $\mathcal{W}^u(q)$  é uma variedade instável acessível, tomemos  $a \in \mathcal{W}^u(q)$ . Pelo Corolário 4.2.2, sabemos que  $q$  ou é fixo ou tem período 2. Suponhamos que  $q$  seja fixo, caso contrário, basta considerar  $h^2$ . Então, tomando qualquer crosscut  $\sigma_a$  com extremos nos pontos acessíveis  $a$  e  $h(a)$ , veja que para um  $K_i$ , digamos  $K_1$ ,

$$\partial K_1 = \mathcal{W}^u(q) \Big|_{[a, h(a)]} \cup \sigma_a.$$

Isto implica que  $p \notin K_1^a \cap K_2^a$ . Tal fato motiva a próxima definição.

**Definição 4.3.1.** *Considere  $h \in \mathcal{H}$ . Dado um ponto acessível  $a \in \Sigma$ , seja  $\sigma_a^{m,n}$  um crosscut qualquer com extremos em  $h^n(a)$  e  $h^m(a)$ . Diremos que o ponto  $a$  satisfaz a propriedade  $K_a$  quando, para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$ , tivermos  $K_1^{a_{m,n}} = K_2^{a_{m,n}} = \Sigma$ .*

Desse modo, nos casos em que  $h$  é uma ferradura de Smale, como o  $\rho(h, U)$  é racional, segue do Corolário 4.2.1 que todo ponto acessível ou é um ponto periódico ou está na

variedade instável de um ponto periódico acessível, resulta que não existe ponto acessível  $a \in \Sigma$  satisfazendo a propriedade  $K_a$ .

Por outro lado, se  $h$  não é ferradura de Smale, assumindo que o número de rotação  $\rho(h, U)$  possa ser irracional, necessariamente,  $h$  satisfaz a propriedade  $K_a$  para todo ponto acessível  $a \in \Sigma$ . Além disso, não existem pontos acessíveis na variedade instável de qualquer ponto periódico de sela.



## Referências Bibliográficas

- [AY92] K.T. Alligood, J.A. Yorke, *Accessible saddles on fractal basin boundaries*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 12 (1992), 377-400.
- [Bar93] M. Barge, *Prime end rotation numbers associated with the Hénon maps*, continuous theory and dynamical systems, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 149, Dekker, New York, 1993, pp. 15-33.
- [BaK98] M. Barge, K. Kuperberg, *Periodic points from periodic prime ends*, Proceedings of the 1998 Topology and Dynamics Conference (Fairfax, VA), vol. 23, 1998, 13-21.
- [BG91] M. Barge, R.M. Gillette, *Rotation and periodicity in plane separating continua*, Ergodic Theory Dynam. Systems 11 (1991), no. 4, 619-631.
- [BG92] M. Barge, R.M. Gillette, *A fixed point theorem for plane separating continua*, Topology Appl. 43 (1992), no. 3, 203-212.
- [BS11] B. Gomes, S. Zanata *Horseshoes for a Generalized Markus Yamabe Example*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, v. 1, p. 1-10, 2011.
- [Ca13] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. 73 (1913) 323-370
- [Ca81] Carr J. (1981) : Applications of centre manifold theory. Applied Mathematical Sciences 35. Springer-Verlag, New York-Berlin.

- [CL51] M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, *Some fixed point theorems*, Annals of Math. 54 (1951), 1-37.
- [COR10] L. Hernandez-Corbato, R. Ortega and Francisco R. Ruiz del Portal, *Attractors with irrational rotation number*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 153 (2012), 59-77.
- [De32] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Math. Pures Appl. 11 (1932, 333-375).
- [El08] L. Elon Lages, *Análise Real - Volume 2*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [FC03] J. Franks and P. Le Calvez. *Regions of instability for non-twist maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 23(1):111-141, 2003.
- [KH99] A. Katok, B. Hasselblatt; *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1999.
- [KLN12] A. Koropecki, P. Le Calvez, M. Nassiri, *Prime ends rotation numbers and periodic points*, preprint, arXiv:1206.4707.
- [KaHa95] Katok, A. and Hasselblatt, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 54, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Go07] B. Gomes, *A conjectura discreta de Markus-Yamabe*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2007.
- [Ha82] HARTMAN, P. *Ordinary differential equations*. Boston: Birkhouser, 1982.
- [Is09] C. Isnard, *Introdução à Medida e Integração*, Projeto Elclides, 2ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [Ma82] J. Mather. *Topological proofs of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends*. in Selected Studies. Eds. Th. M. Rassias and G. M. Rassias, pages 225-255, 1982.

- [Mat13] S. Matsumoto, *Nontrivial attractor-repeller maps of  $S^2$  and rotation numbers*, preprint, arXiv:1302.4041.
- [MePa77] de Melo, W.; Palis J. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977
- [OR11] R. Ortega, F.R. Ruiz del Portal, *Attractors with vanishing rotation number*, J. Eur. Math. Soc. 13 (2012), no. 6, 1569-1590.
- [Pi82] D. PIXTON *Planar homoclinic points*, J. of Diff. Eq, 44 (1982), 365-382.
- [Po52] H. Poincaré, *Ouevres Complètes*. Tome I, Gauthier - Villars, Paris, (1952), 137-1
- [Po91] Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps*, Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, 1991.
- [Ro70] C. Robinson, *Generic properties of conservative systems*, i, ii. Amer. J. of Math, 92:562-603, 897-906, 1970.
- [Ro73] C. Robinson, *Crossing stable and unstable manifolds on the two sphere*, Proc. A.M.S., 41 (1973), 299-303.
- [Spa66] Spanier, E. Algebraic topology. Mc Graw-Hill, New York, 1966
- [Oli87] F. Oliveira. *On the generic existence of homoclinic points*. Engod. The. e Dynam. Sys., 7:567-595, 1987.
- [Ze73] Zehnder E. (1973) *Homoclinic points near elliptic fixed points*, Communications on Pure and Applied Mathematics 26, 131-182.