

**Uma análise sobre
duas medidas de evidência:
p-valor e s-valor**

Eriton Barros dos Santos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Galvão Patriota

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Agosto de 2016

Uma análise sobre duas medidas de evidência: p-valor e s-valor

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 04/08/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Silvia Lopes de Paula Ferrari - IME-USP
- Profa. Dra. Denise Aparecida Botter - IME-USP
- Prof. Dr. Rafael Bassi Stern - UFSCar

Agradecimentos

Primeiramente, aos meus pais, Eridan e Nilton, e minha irmã, Sarah, por todo o apoio e amor e por acreditarem em minhas escolhas.

Ao meu orientador, Alexandre G. Patriota, por contribuir de forma significativa para a minha formação acadêmica, como, também, pelas sugestões, contribuições e por acreditar que fosse capaz de desenvolver esse trabalho.

Aos meus amigos, Bruno, Daniel, Eliardo, Gabriela, Gilberto (Tomtom), Itailma (Tata), Joelson (Boy) e Marcos (Mombaça), pelo apoio, brincadeiras, noites comendo pizza, conselhos e momentos de felicidade que jamais esquecerei.

Aos participantes da banca examinadora, pelas sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

SANTOS, E. B. **Uma análise sobre duas medidas de evidência: p -valor e s -valor.** 2016. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Este trabalho tem como objetivo o estudo de duas medidas de evidência, a saber: o p -valor e o s -valor. A estatística da razão de verossimilhanças é utilizada para o cálculo dessas duas medidas de evidência. De maneira informal, o p -valor é a probabilidade de ocorrer um evento extremo sob as condições impostas pela hipótese nula, enquanto que o s -valor é o maior nível de significância da região de confiança tal que o espaço paramétrico sob a hipótese nula e a região de confiança tenham ao menos um elemento em comum. Para ambas as medidas, quanto menor forem seus respectivos valores, maior é o grau de inconsistência entre os dados observados e a hipótese nula postulada. O estudo será restrito a hipóteses nulas simples e compostas, considerando independência e distribuição normal para os dados. Os resultados principais deste trabalho são: 1) obtenção de fórmulas analíticas para o p -valor, utilizando probabilidades condicionais, e para o s -valor; e 2) comparação entre o p -valor e o s -valor em diferentes cenários, a saber: variância conhecida e desconhecida, e hipóteses nulas simples e compostas. Para hipóteses nulas simples, o s -valor coincide com o p -valor, e quando as hipóteses nulas são compostas, a relação entre o p -valor e o s -valor são complexas. No caso da variância conhecida, se a hipótese nula for uma semi-reta o p -valor é majorado pelo s -valor, se a hipótese é um intervalo fechado a diferença entre as duas medidas de evidência diminui conforme o comprimento do intervalo da hipótese testada. No caso de variância desconhecida e hipóteses nulas compostas, o s -valor é majorado pelo p -valor para valores pequenos do s -valor, por exemplo, quando o s -valor é menor do que 0.05.

Palavras-chave: Medidas de evidência, P -valor, S -valor, Teste de hipóteses.

Abstract

SANTOS, E. B. **An analysis on two measures of evidence: p -value and s -value.** 2016. Dissertation (master's degree) - Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2016.

This work aims to study two measures of evidence, namely: the p -value and s -value. The likelihood ratio statistic is used to calculate these two evidence measures. Informally, the p -value is the probability of an extreme event under the conditions imposed by the null hypothesis, while the s -value is the greatest confidence level of the confidence region such that the parameter space under the null hypothesis and the confidence region have at least one element in common. For both measures, the smaller are the respective values, the greater is the degree of inconsistency between the observed values and the null hypothesis. In this study, we will consider simple and composite null hypotheses and it will be restricted to independently and normally distributed data. The main results are: 1) to obtain the analytical formulas for the p -value, by using conditional probabilities, and for the s -value, and 2) to compare the p -value and s -value under different scenarios, namely: known and unknown variance, and simple and composite null hypotheses. For simple null hypotheses, the s -value coincides with the p -value, and for composite null hypotheses, the p -value and the s -value relationships are complex. In the case of known variance, if the null hypothesis is a half-line the p -value is smaller than the s -value, if the null hypothesis is a closed interval the difference between the two measures of evidence decreases with the interval width specified in the null hypothesis. In the case of unknown variance and composite hypotheses, the s -value is smaller than the p -value when the value of the s -value is small.

Keywords: Hypothesis testing, Measures of evidence, P-value, S-value.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e contribuições	2
1.2 Organização do Trabalho	3
2 Medidas de evidência	5
2.1 Conceitos gerais	5
2.2 P-valor	7
2.2.1 Definição do p-valor	7
2.3 S-valor	8
2.3.1 Definição do s-valor	9
3 Resultados	13
3.1 Teoremas relacionados com o p-valor	14
3.2 Teoremas relacionados com o s-valor	17
3.3 Comparações entre p-valor e s-valor	18
3.3.1 Caso normal com variância conhecida	18
3.3.2 Caso normal com variância desconhecida	20
4 Conclusões	23
4.1 Sugestões para Pesquisas Futuras	24
A P-valor	25
A.1 Teorema 3.1.1	25
A.1.1 Caso i	25
A.1.2 Caso ii	26
A.1.3 Caso iii	28
A.2 Teorema 3.1.2	34
A.2.1 Caso i	34
A.2.2 Caso ii	34
A.2.3 Caso iii	37

B	S-valor	41
B.1	Teorema 3.2.1	41
B.1.1	Caso i	41
B.1.2	Caso ii	42
B.1.3	Caso iii	43
B.2	Teorema 3.2.2	44
C	Comparações entre p-valor e s-valor	51
C.1	Caso normal com variância conhecida	51
C.1.1	1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$	53
C.1.2	2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$	53
C.1.3	3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$	53
C.2	Caso normal com variância desconhecida	54
C.2.1	1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$	54
C.2.2	2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$	54
C.2.3	3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$	55
	Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica do s -valor calculado em $\theta = \mu_0$	9
3.1	Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância conhecida quando $\bar{x} < \mu_0$, $\sigma^2 = 1$ e $n = 1$ (assumindo a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3, ver Apêndice A, é verdadeira).	20
3.2	Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância conhecida quando $\bar{x} > \mu_1$, $\sigma^2 = 1$ e $n = 1$ (assumindo a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3, ver Apêndice A, é verdadeira).	21
3.3	Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 2º caso da variância desconhecida.	22
3.4	Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância desconhecida.	22
A.1	Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} \in \Theta_0$	27
A.2	Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} \in \Theta_0^c$	27
A.3	Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1$	29
A.4	Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} < \mu_0$	30
A.5	Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} > \mu_1$	30
B.1	Gráfico da função $Z_n(y) = y - n \cdot \ln(y) + n \cdot \ln(n) - n$	46

Capítulo 1

Introdução

Na ciência há o interesse em confrontar hipóteses científicas com dados obtidos de experimentos a fim de descartar hipóteses que conflitam com os dados. O teste de hipótese estatístico é amplamente utilizado para confrontar tais hipóteses, como na saúde (Blackwelder , 1982; Gail e Simon , 1985), na economia (Amisano e Giacomini , 2007; Katircioglu , 2009), em ecologia (Hobbs e Hilborn , 2006; Loehle , 1987) e em outras áreas. Usualmente, hipóteses que não conflitam com os dados experimentais são mantidas para serem testadas futuramente em outros domínios experimentais.

Há várias técnicas para realizar um teste de hipótese estatístico, dentre elas destacam-se: o teste de significância fisheriano (Fisher , 1925), o teste mais poderoso de Neyman-Pearson (Neyman e Pearson , 1933), o fator de Bayes (Jeffreys , 1961), o *Full Bayesian Significance Test* (FBST) (Pereira e Stern , 1999), entre outros. O teste de significância fisheriano, cuja medida de evidência é o p -valor, considera somente a hipótese nula a ser testada, enquanto os demais, *i.e.*, o teste de Neyman-Pearson, o fator de Bayes e o FBST, consideram também uma hipótese alternativa. Entretanto, Mudholkar e Chaubey (2009) consideram uma hipótese alternativa para o p -valor com a finalidade de discutirem o conceito de função poder. Em Diniz *et al.* (2012), os autores encontraram uma relação assintótica entre o p -valor e o FBST. Recentemente, Patriota (2013) introduziu uma medida de evidência denominada s -valor, a qual foi proposta como uma alternativa ao p -valor. Esta dissertação estuda e compara, especificamente, as medidas de evidência p -valor e s -valor.

Na estatística clássica¹, a hipótese nula contém uma afirmação sobre quantidades de interesse não aleatórias que são definidas no modelo estatístico clássico. Tais quantidades de interesse, também conhecidas como parâmetros, são representadas por θ , e o espaço de todas as quantidades de interesse por Θ (espaço paramétrico). No Capítulo 2, Seção 2.1, é definido matematicamente o modelo estatístico clássico. Por exemplo, no caso de normalidade dos dados, as quantidades de interesse são a média populacional μ e a variância populacional σ^2 . Nesse caso, as seguintes hipóteses estatísticas podem ser formuladas: “ $\mu = 0$ ”, “ $\sigma^2 = 1$ ”, “ $\mu = \sigma^2$ ”, entre outras. De maneira geral, a hipótese nula contém uma afirmação do tipo “ $\theta \in \Theta_0$ ”, em que $\Theta_0 \subseteq \Theta$. As duas medidas de evidência estudadas nesta dissertação serão definidas informalmente a seguir, entretanto, no Capítulo 2, elas são definidas formalmente. O p -valor é a probabilidade de ocorrer um evento extremo sob as condições impostas pela hipótese nula, ou seja, o p -valor deve ser calculado sob a restrição $\theta \in \Theta_0$. O s -valor, por sua vez, é o maior nível de significância da região de confiança tal que o espaço paramétrico sob

¹O termo “estatística clássica” se refere à teoria estatística que tem como base o modelo estatístico clássico presente no livro de Lehmann *et al.* (1991) (*Theory of point estimation*). Nesta dissertação não entraremos na discussão Clássico-*versus*-Frequentista, pois o entendimento desses dois conceitos varia de autor para autor (Lehmann , 2012).

a hipótese nula, Θ_0 , e a região de confiança tenham ao menos um elemento em comum.

Cox (1977) discute regras de uso e formas de interpretar o p -valor. Segundo o autor, o p -valor é uma medida que deve ser usada como um grau de coerência da hipótese nula no estudo e, também, deve ser vista como um guia, e não como uma regra de decisão, na qual é necessária a aceitação ou rejeição de hipóteses. Para o cálculo do p -valor, o autor recomenda encontrar uma estatística de teste que tenha o seguinte comportamento: quanto maior é o valor observado da estatística de teste, maior é a inconsistência entre os dados experimentais e a hipótese nula. Lehmann (2012) também aborda a maneira de interpretar o p -valor e suas diferenças em relação ao teste de Neyman-Pearson. Conforme Lehmann, Fisher considerava que o p -valor deveria ser entendido como uma medida do grau de discrepância entre a hipótese nula e os dados observados. Ainda segundo Lehmann (2012), Fisher não recomendava que um p -valor menor que 0.05 indicasse uma real discrepância.

Seguindo as recomendações dos autores acima, o p -valor deve ser interpretado como uma medida de inconsistência que está submetida ao domínio do estudo. O domínio do estudo impõe as condições e restrições em que os dados foram amostrados. Assim, esse modo de interpretação mostra que a plausibilidade da hipótese nula depende do domínio em que ela é testada e as conclusões do p -valor estão também restritas ao mesmo domínio. Por exemplo, quando se testa uma lei física no domínio macroscópico, é possível verificar uma consistência com os movimentos dos planetas do nosso sistema solar, mas isso não implica que ela necessariamente se manterá consistente fora desse domínio, como no domínio quântico.

Além dos problemas de interpretação, o p -valor apresenta ainda algumas limitações e peculiaridades teóricas. De acordo com Schervish (1996), Izbicki *et al.* (2012), Patriota (2013) e Izbicki e Esteves (2015), o p -valor não respeita alguns princípios lógicos aplicados em hipóteses aninhadas. Sejam H e H' hipóteses estatísticas tais que $H \rightarrow H'$, segundo a lógica clássica, é esperado que os dados observados apresentem mais evidências contrárias a H do que à H' . Schervish (1996) mostra que o p -valor não respeita essa propriedade lógica para hipóteses nulas intervalares. Patriota (2013) apresenta dois exemplos em casos multidimensionais em que o p -valor não respeita esse princípio lógico: teste de vetor de médias e teste de coeficientes angulares de um modelo linear. Izbicki *et al.* (2012) e Izbicki e Esteves (2015) apresentam o mesmo tipo de violação em um problema de genética.

1.1 Objetivos e contribuições

Os objetivos principais deste trabalho são estudar e comparar o p -valor e o s -valor, assumindo que os dados amostrais são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 .

As contribuições principais deste trabalho são as seguintes:

- Introduzir formalmente os conceitos de p -valor e s -valor, utilizando o modelo estatístico clássico via função supremo.
- Calcular as medidas de evidência para a hipótese $H_0 : \theta \in \Theta_0$, considerando distribuição normal, para os seguintes casos:

- a) Variância populacional σ^2 conhecida, $\theta = \mu$ e $\Theta = \mathbb{R}$
- a.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\} = \{\mu_0\}$;
 - a.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$;
 - a.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$;
- b) Variância populacional σ^2 desconhecida, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- b.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma^2 = \sigma_0^2\} = \{(\mu_0, \sigma_0^2)^T\}$;
 - b.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$;
 - b.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$;

em que μ_0 , μ_1 e σ_0^2 são valores fixos e $-\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty$. O caso a.3 considerando a variância populacional desconhecida não foi explorado, pois não conseguimos proceder com as demonstrações do seu teorema.

- Comparar o s -valor com o p -valor para os casos apresentados acima.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, as medidas de evidência são definidas matematicamente e interpretadas. Na Seção 2.1, o modelo estatístico, a hipótese nula geral e a estatística da razão de verossimilhanças são definidas. Na Seção 2.2, o p -valor é interpretado e definido matematicamente. Na Seção 2.3, os problemas lógicos do p -valor são discutidos, e o s -valor é apresentado como uma alternativa. Nessa seção, o s -valor também é definido matematicamente.

No Capítulo 3, os resultados referentes às medidas de evidência p -valor e s -valor são apresentados, considerando que a amostra é independente e identicamente distribuída de acordo com uma distribuição normal. Na Seção 3.1, dois teoremas são enunciados sobre o p -valor para os seguintes casos: a.1, a.2, a.3, b.1, b.2 e b.3 descritos na Seção 1.1. Na Seção 3.2, dois teoremas são enunciados sobre o s -valor para os mesmos casos da seção anterior. Na Seção 3.3, as comparações entre o s -valor e o p -valor são desenvolvidas para os casos mencionados anteriormente.

No Capítulo 4, as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros são destacadas.

Os Apêndices A, B e C apresentam as demonstrações dos teoremas e os resultados do Capítulo 3.

Capítulo 2

Medidas de evidência

No contexto de teste de hipóteses, há dois modos principais para estudar a plausibilidade da hipótese nula a partir dos dados: medida de evidência e construção de teste. Entretanto, a medida de evidência será o foco deste trabalho. Na Seção 2.1, definições gerais que serão necessárias nesta dissertação são apresentadas. Na Seção 2.2, uma revisão formal é feita da medida de evidência p -valor, cujo uso é largamente disseminado no meio científico. Adicionalmente, uma medida de evidência denominada s -valor, introduzida por Patriota (2013), é formalmente definida na Seção 2.3.

2.1 Conceitos gerais

Nesta seção, modelo estatístico, hipótese nula geral e estatística da razão de verossimilhanças são definidos.

O modelo estatístico pode ser definido como $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, em que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ é o espaço amostral, \mathcal{F} uma σ -álgebra gerada por subconjuntos de \mathcal{X} e $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ uma família de medidas de probabilidade, em que Θ é o espaço paramétrico e $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$, em que $p < \infty$. Se p é infinito, o modelo estatístico é não paramétrico, porém, esse caso não será tratado neste trabalho. O modelo estatístico também pode ser representado por $(\mathcal{X}, \mathcal{Q})$, em que $\mathcal{Q} = \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ e f_θ é a função (densidade) de probabilidade conjunta dos dados. Neste trabalho, iremos considerar que f_θ é uma função densidade de probabilidade conjunta, ou seja, o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{X}$ é composto por variáveis aleatórias contínuas. Seja Y uma estatística em função de \mathbf{X} , utilizaremos a notação $Y \stackrel{P_\theta}{\sim} g_\theta$ para representar que Y tem função densidade de probabilidade g_θ , sob a restrição de que a medida de probabilidade de \mathbf{X} é P_θ .

A hipótese nula é definida por

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

em que $\Theta_0 \subseteq \Theta$ é um conjunto fechado.

A estatística da razão de verossimilhanças é definida como

$$\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})}, \quad (2.1)$$

em que $L(\theta; \mathbf{x}) = f_\theta(\mathbf{x})$ é a função de verossimilhança e \mathbf{x} é o valor observado do vetor aleatório \mathbf{X} . Se o estimador de máxima verossimilhança existe e pertence ao espaço paramétrico Θ , então a estatística da razão de verossimilhanças em (2.1) pode ser reduzida a seguinte

forma:

$$\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = \frac{L(\hat{\theta}_0; \mathbf{x})}{L(\hat{\theta}; \mathbf{x})},$$

em que $\hat{\theta}_0$ e $\hat{\theta}$ são os estimadores de máxima verossimilhança restritos a Θ_0 e Θ , respectivamente. Ou seja, os estimadores devem satisfazer:

$$L(\hat{\theta}_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})$$

e

$$L(\hat{\theta}; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}).$$

Assumindo que a função de verossimilhança é não negativa e unimodal, tem-se os seguintes resultados (Shi e Tao , 2008, pp. 72):

- $0 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \leq 1$.
- À medida em que $\hat{\theta}$ se distancia de $\hat{\theta}_0$, $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)$ se aproxima de 0. Por outro lado, à medida em que $\hat{\theta}$ se aproxima de $\hat{\theta}_0$, $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)$ se aproxima de 1.
- $\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \xrightarrow{P_\theta} 1$ quando $n \rightarrow \infty$, para $\theta \in \Theta_0$, em que “ $\xrightarrow{P_\theta}$ ” significa convergência em probabilidade de acordo com a medida de probabilidade P_θ . Ou seja, para cada $\epsilon > 0$ e $\theta \in \Theta_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta (|\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) - 1| > \epsilon) = 0.$$

Segundo Bahadur e Raghavachari (1972), a razão de verossimilhanças é uma estatística de teste assintoticamente ótima, sob certas condições de regularidade, para o caso em que a amostra é independente e identicamente distribuída. Esses autores também estudam o comportamento da razão de verossimilhanças em casos gerais, quando a amostra não é independente ou identicamente distribuída. Eles concluem que os resultados assintoticamente ótimos também podem se estender para esses casos gerais.

Seja $T(\mathbf{X}; \Theta_0) = -2 \ln \lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)$ e H_0 a hipótese de interesse, em que Θ_0 é um conjunto formado por igualdades ou desigualdades polinomiais em θ tal que não exista ponto de singularidade, então, sob certas condições de regularidade (Cox e Hinkley , 1974, cap. 9) e sob as condições impostas por H_0 , a variável aleatória $T(\mathbf{X}; \Theta_0)$ converge em distribuição para uma distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade (Drton , 2009). Em notação matemática,

$$T(\mathbf{X}; \Theta_0) \xrightarrow{D_{P_\theta}} \chi_v^2,$$

para cada $\theta \in \Theta_0$, em que “ $\xrightarrow{D_{P_\theta}}$ ” significa convergência em distribuição de acordo com a medida de probabilidade P_θ . Ou seja, para cada $u \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \Theta_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq t] = F_{\chi^2}(u; v),$$

em que $v = \dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)$, $\dim(\cdot)$ é uma função que retorna a dimensão de um conjunto e $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é a função acumulada da distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade.

Entretanto, no caso em que Θ_0 é um conjunto formado por igualdades ou desigualdades polinomiais em θ , podem existir pontos de singularidades em Θ_0 (e.g., o conjunto algébrico

$\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \theta_2^2 = \theta_1^3\}$ tem uma singularidade em $\theta = (0, 0)^T$ para os quais a distribuição de $T(\mathbf{X}; \Theta_0)$ não converge para uma distribuição χ_v^2 (Drton, 2009). Em notação matemática, se $\theta^* \in \Theta_0$ é um ponto de singularidade, então, sob as condições de regularidade¹ definidas em Drton (2009),

$$T(\mathbf{X}; \Theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}_{P_{\theta^*}}} U,$$

em que W não é necessariamente uma variável aleatória qui-quadrado. Por exemplo, U pode ser o mínimo de qui-quadrados ou mistura de qui-quadrados, conforme os exemplos 1.1 e 1.2 exibidos em Drton (2009).

2.2 P-valor

O teste de significância fisheriano consiste em calcular o p -valor e utilizá-lo como um grau de discordância entre a hipótese nula postulada H_0 e os dados observados. Cox (1977) recomenda encontrar uma estatística positiva T_{H_0} tal que quanto maior for o seu valor observado $T_{H_0} = t$, maior deve ser a discordância entre H_0 e os dados observados. Essa estatística T_{H_0} , recomendada por Cox, é denominada estatística do teste.

Fisher (1955) discute os problemas na utilização dos testes de significância como procedimento de decisão:

The attempt to reinterpret the common tests of significance used in scientific research as though they constituted some kind of acceptance procedure and led to “decisions” in Wald’s sense, originated in several misapprehensions and has led, apparently, to several more.

Segundo Cox (1977), o p -valor deve ser usado como um guia, e não como uma regra de decisão, na qual é necessária a aceitação ou rejeição de hipóteses:

Application of the significance test consists of computing approximately the value of p -value and using it as a summary measure of the degree of consistency with H_0 , in the respect under study. [...] Such a procedure is to be distinguished sharply from a decision problem in which ‘acceptance’ or ‘rejection’ is required. [...] We shall later discuss how p -value is to be used, but broadly it is to be regarded as a guide, and no more, to interpretation.

Nesta dissertação, o p -valor será utilizado conforme os autores acima recomendam: como uma medida de discrepância entre H_0 e os dados observados, e não como uma regra de decisão entre a hipótese nula e uma hipótese alternativa.

2.2.1 Definição do p -valor

Nesta seção, o p -valor é definido matematicamente a fim de evitar problemas de interpretação. É comum definir o p -valor de maneira informal, utilizando probabilidade condicional. Porém, a quantidade que condiciona, $\theta \in \Theta_0$, não está descrita na σ -álgebra do modelo estatístico clássico $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Por isso, não utilizaremos essa definição informal neste trabalho.

¹Ver as definições 2.1 (modelo regular) e 2.5 (condições de regularidade de Chernoff) apresentadas em Drton (2009).

Seja $T_{H_0}(\mathbf{X})$ uma estatística do teste para testar H_0 e $t(\mathbf{x})$ o seu valor observado. O p -valor é definido por (Shi e Tao , 2008, pp. 71)

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T_{H_0}(\mathbf{X}) \geq t(\mathbf{x})]. \quad (2.2)$$

No caso em que H_0 é uma hipótese simples, ou seja, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, o p -valor tem distribuição uniforme padrão, ou seja, $p(\Theta_0; \mathbf{x}) \stackrel{P_{\theta_0}}{\sim} U(0, 1)$, sempre que $T_{H_0}(\mathbf{X})$ for uma variável aleatória contínua (Cox , 1977).

Para o estudo do trabalho será considerado que $T_{H_0}(\mathbf{X}) = T(\mathbf{X}; \Theta_0) = -2 \ln [\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)]$ pelas razões mencionadas na Seção 2.1. Assim, o p -valor baseado na estatística da razão de verossimilhanças tem a seguinte forma:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

Quanto menor é o p -valor, maior é a “distância” entre os estimadores $\hat{\theta}_0$ e $\hat{\theta}$.

2.3 S-valor

O teste de significância com base no p -valor é um método bastante utilizado no meio científico para testar hipóteses. Entretanto, o p -valor tem algumas limitações e peculiaridades teóricas e quando utilizado deve-se ter noção de seus problemas. Segundo Schervish (1996), Izbicki *et al.* (2012), Patriota (2013) e Izbicki e Esteves (2015), o p -valor nem sempre respeita alguns princípios lógicos aplicados em hipóteses aninhadas, como já mencionado no Capítulo 1. Sejam H e H' hipóteses estatísticas tais que $H \rightarrow H'$, segundo a lógica clássica, é esperado que os dados observados apresentem mais evidência contrária a H do que a H' . Ou seja, o grau de discordância entre H e os dados observados deve ser sempre maior ou igual ao grau de discordância entre H' e os dados observados. Contudo, o p -valor não satisfaz essa relação lógica esperada.

Em Schervish (1996), o autor discute essa incoerência lógica a respeito da hipótese nula quando Θ_0 é um intervalo fechado e a exemplifica com o problema seguinte. Considere que X é uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, 1)$ e se deseja testar as seguintes hipóteses: $H_0 : \mu \in [-0.5, 0.5]$ e $H'_0 : \mu \in [-0.82, 0.52]$. Segundo o problema, observou-se $x = 2.18$ e p -valores 0.0502 e 0.0498 para H_0 e H'_0 , respectivamente. Com isso, tem-se que conforme o x observado, o grau de discordância da hipótese H'_0 é maior que o grau de H_0 . Esse comportamento não satisfaz a relação lógica discutida acima.

Patriota (2013) discute esse problema lógico em dois exemplos. O primeiro exemplo trata de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma normal bivariada, tais que $\mathbf{X}_i \sim N_2(\mu, I)$, $i \in \{1, \dots, 100\}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ e I é uma matriz identidade (2×2) , e se deseja testar as seguintes hipóteses: $H_{01} : \mu = (0, 0)^T$ e $H_{02} : \mu_1 = \mu_2$. Conforme esse problema, o vetor de médias observado foi $\bar{\mathbf{x}} = (0.14, -0.16)^T$ e os p -valores foram 0.10 (H_{01}) e 0.03 (H_{02}). Assim, observou-se que o grau de discordância é maior para H_{02} do que para H_{01} . O segundo exemplo trata de teste de hipóteses em relação aos coeficientes do seguinte modelo linear: $\mathbf{y} = \mathbf{x}b + \boldsymbol{\epsilon}$, em que $b = (b_1, b_2)^T$ é o vetor de parâmetros do modelo, \mathbf{x} é a matriz de covariáveis $(n \times 2)$, $\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\mathbf{0}, I_n)$ com I_n sendo uma matriz identidade $(n \times n)$. As hipóteses de interesse desse exemplo são $H_{01} : b_1 = 0$, $H_{02} : b_2 = 0$ e $H_{03} : b = (0, 0)^T$ e os p -valores calculados são 0.03, 0.045 e 0.10, respectivamente. Assim, foi observado um grau de discordância maior para as hipóteses H_{01} e H_{02} do que para a hipótese H_{03} . Porém, note que $H_{03} \rightarrow H_{01}$ e $H_{03} \rightarrow H_{02}$.

Izbicki *et al.* (2012) e Izbicki e Esteves (2015) apresentam essa incongruência lógica do p -valor em genética. O problema consiste em um estudo de caso-controle com o intuito de verificar se os genótipos e os alelos são homogeneamente distribuídos entre os grupos. As hipóteses são definidas como $H_0^G : \gamma = \pi$ (estudo genótipo) e $H_0^A : \gamma_{AA} + \frac{1}{2}\gamma_{AB} = \pi_{AA} + \frac{1}{2}\pi_{AB}$ (estudo alelo), em que $\gamma = \{\gamma_{AA}, \gamma_{AB}, \gamma_{BB}\}$, $\pi = \{\pi_{AA}, \pi_{AB}, \pi_{BB}\}$ e γ_i e π_i são as probabilidades que o paciente do grupo caso e controle, respectivamente, tenha o genótipo i , $i \in \{AA, AB, BB\}$. Observou-se o grau de discordância maior para a hipótese H_0^A do que para H_0^G .

A fim de contornar esses problemas, Patriota (2013) desenvolveu uma nova medida de evidência, o s -valor, que satisfaz as relações lógicas discutidas acima.

2.3.1 Definição do s -valor

Para contornar os problemas do p -valor, primeiramente, é necessário criar uma medida de evidência cuja métrica não dependa dos subconjuntos de Θ . A definição do s -valor envolve regiões de confiança com base na razão de verossimilhanças. Utilizou-se a razão de verossimilhanças, pois existem outros procedimentos cujos conjuntos de confiança produzidos podem não estar contidos no espaço paramétrico (Spratt, 2000).

Assumindo regularidade do modelo estatístico (Cox e Hinkley, 1974), a região de confiança baseada na estatística da razão de verossimilhanças com nível de significância α , em que $\alpha = 1 - \varphi$ e φ é o nível de confiança da região, é dada por

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \{\theta \in \Theta : T(\mathbf{x}; \{\theta\}) \leq F_\alpha\},$$

em que F_α é tal que $F(F_\alpha) = 1 - \alpha$, com $F(\cdot)$ sendo a função de distribuição acumulada da variável aleatória $T(\mathbf{X}; \{\theta\}) = -2 \ln [\lambda(\mathbf{X}; \{\theta\})]$.

De acordo com Patriota (2013), o s -valor para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ é definido matematicamente por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \max \{0, \sup \{\alpha \in (0, 1) : \Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset\}\}, \quad (2.3)$$

em que $\sup\{\emptyset\} = -\infty$. Na Figura 2.1 é representado o s -valor de um ponto de vista gráfico quando deseja-se testar $H_0 : \theta = \mu_0$ e os dados se distribuem conforme uma distribuição $N(\theta, \sigma^2)$. Pelo gráfico é possível perceber que o α_3 é o maior dentre os α 's que respeita a condição: $\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset$.

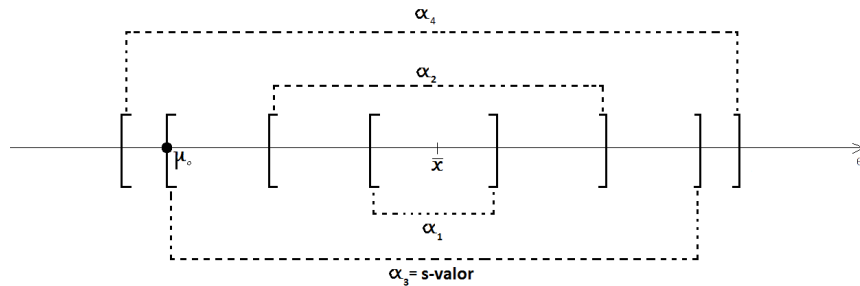


Figura 2.1: Representação gráfica do s -valor calculado em $\theta = \mu_0$.

Quanto mais “distante” o estimador $\hat{\theta}_0$ estiver do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$, menor é o s -valor. Quando não se conhece a distribuição exata da razão de verossimilhanças, calcula-se um s -valor aproximado usando sua distribuição assintótica. De acordo com [Patriota \(2013\)](#), as propriedades do s -valor são:

- i. $s(\emptyset; \mathbf{x}) = 0$ e $s(\Theta; \mathbf{x}) = 1$;
- ii. Se $\Theta_1 \subseteq \Theta_2$, então $s(\Theta_1; \mathbf{x}) \leq s(\Theta_2; \mathbf{x})$;
- iii. Para quaisquer $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$, tem-se $s(\Theta_1 \cup \Theta_2; \mathbf{x}) = \max \{s(\Theta_1; \mathbf{x}), s(\Theta_2; \mathbf{x})\}$;
- iv. Seja $\Theta_1 \subset \Theta$, então $s(\Theta_1; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_1} s(\{\theta\}; \mathbf{x})$;
- v. Se $\hat{\theta} \in \overline{\Theta_1} \cap \overline{\Theta_1^c}$, então $s(\Theta_1; \mathbf{x}) = s(\Theta_1^c; \mathbf{x}) = 1$.

As propriedades i, iii e iv contemplam a ideia de uma medida de possibilidade, logo o s -valor é uma medida possibilística em Θ ([Patriota, 2013](#)). Em [Dubois e Prade \(2001\)](#) e [Dubois \(2006\)](#), os autores discutem o conceito e as interpretações sobre a medida de possibilidade e suas diferenças em relação à medida de probabilidade. Segundo [Dubois \(2006\)](#),

In quantitative theories..., degrees of possibility are numbers that generally stand for upper probability bounds. Of course the probabilistic view is only one among other interpretive settings for possibility measures.

As regras da medida de possibilidade incorporam uma característica peculiar: tanto um evento como seu complementar podem ser completamente possíveis, veja por exemplo a propriedade v acima. [Dubois e Prade \(2001\)](#) comentam o seguinte:

Let us take an example, considered already by Aristotle, namely the proposition: “There will be a sea battle tomorrow (p) and there will not be a sea battle tomorrow ($\neg p$)”. This proposition, of the form “ p and $\neg p$ ” is always false, because of the non-contradiction law. Similarly, the proposition “ p or $\neg p$ ” is always true, because tertium non datur. [...] In this case, at least intuitively, it seems reasonable to say that it is possible that there will be a sea battle tomorrow but at the same time, it is possible that there will not be a sea battle tomorrow. [...] ... the proposition possible p is not the same as p , and possible $\neg p$ is not the negation of possible p . Hence the fact that the proposition “possible p and possible $\neg p$ ” may be true does not question the law of non-contradiction.

Utilizando interpretações de medida de possibilidade, $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$ indica que a amostra observada não traz informações que discordem de Θ_0 , $0 < s(\Theta_0; \mathbf{x}) < 1$ indica que a amostra observada traz alguma informação que discordem de Θ_0 , $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 0$ indica que a amostra observada discorda completamente de Θ_0 , $s(\Theta_1; \mathbf{x}) < s(\Theta_2; \mathbf{x})$ indica que a amostra observada traz mais informações que discordem de Θ_1 do que de Θ_2 . O s -valor utiliza a região de confiança baseada na razão de verossimilhanças como critério de discordância. Ou seja, $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = s_0$ indica que s_0 é o maior nível de significância tal que o Θ_0 e a região de confiança tenham ao menos um elemento em comum.

Com isso, o s -valor não deve ser interpretado utilizando as regras da medida de probabilidade, e sim utilizando as propriedades destacadas nos itens i–v. Em termos possibilísticos, a propriedade i indica que um conjunto vazio é impossível de ocorrer e que Θ é completamente possível. Já a propriedade ii mostra que o s -valor respeita a ideia de hipóteses aninhadas,

ou seja, é esperado mais evidências contrárias a Θ_2 do que a Θ_1 . Em **iii**, tem-se que o s -valor da união de eventos é igual ao s -valor do evento mais provável, ou seja, os eventos menos prováveis são dominados pelo evento de maior possibilidade. Note que a propriedade **iv** implica em **iii**. A propriedade **v** representa o caso em que os dados não mostram indícios favoráveis para Θ_1 nem para Θ_1^c , ou seja, não há informações suficiente para concluir qual conjunto é mais possível. Para uma revisão geral sobre medida de possibilidade consulte [Dubois e Prade \(2001\)](#) e [Dubois \(2006\)](#).

Dualmente, o grau de crença em Θ_0 reflete a falta de plausibilidade da negação de Θ_0 e é definida por uma função de necessidade ([Dubois e Prade , 2001](#)):

$$N_s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - s(\Theta_0^c; \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

A definição em (2.4) avalia até que ponto o conjunto Θ_0 é necessário ([Dubois e Prade , 2001](#)). Se $N_s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$, então a função de necessidade indica que o conjunto Θ_0 é totalmente necessário, pois seu complementar é impossível. Se $N_s(\Theta_0; \mathbf{x}) > 0$, então a função de necessidade indica que a necessidade de Θ_0 é esperada, pois há evidências contrárias ao seu complementar. Se $N_s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 0$, então a função de necessidade indica a possibilidade de uma indecisão, pois o conjunto Θ_0 e seu complementar podem ser completamente possíveis. Assim, pelas definições em (2.3) e (2.4), poder-se-ia aceitar a proposição $H_0 : \theta \in \Theta_0$ se $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$ e $N_s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$. Para mais informações consulte a Seção 4 de [Patriota \(2013\)](#).

Capítulo 3

Resultados

Neste capítulo, mostraremos os principais resultados desenvolvidos nesta dissertação, referentes ao p -valor e ao s -valor. Os resultados encontrados têm como suposição uma amostra independente e identicamente distribuída de acordo com uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. As duas medidas de evidência são calculadas a partir da estatística da razão de verossimilhanças.

Neste capítulo, os teoremas são referentes às seguintes hipóteses nulas já mencionadas na Seção 1.1:

- a) Variância populacional σ^2 conhecida, $\theta = \mu$ e $\Theta = \mathbb{R}$
 - a.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\} = \{\mu_0\}$;
 - a.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$;
 - a.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$;
- b) Variância populacional σ^2 desconhecida, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
 - b.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma^2 = \sigma_0^2\} = \{(\mu_0, \sigma_0^2)^T\}$;
 - b.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$;
 - b.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$;

em que μ_0 , μ_1 e σ_0^2 são valores fixos e $-\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty$. As provas dos teoremas deste capítulo foram compiladas nos Apêndices A e B.

Na literatura estatística existem alguns autores que calcularam o p -valor para alguns casos acima, utilizando a estatística da razão de verossimilhanças. [Brownlee \(1965, p. 120\)](#) e [Shi e Tao \(2008, p. 74–75\)](#) abordam o conceito de p -valor para o caso a.1. [Pestman \(1998, p. 156–158\)](#) apresenta um exemplo de p -valor para o caso b.2. [Severini \(2000, p. 100\)](#) menciona que o p -valor pode ser calculado com base na estatística da razão de verossimilhanças se a distribuição exata ou assintótica da razão for conhecida. [Shi e Tao \(2008, p. 75–76\)](#) também calculam o p -valor para diversas situações. Dentre elas, os casos b.2 e uma variação de a.2 ($\theta \leq \mu_0$) são apresentados.

Com isso, podemos verificar que os resultados referentes ao p -valor para os casos a.3, b.1 e b.3 são contribuições dessa dissertação. Vale ressaltar que todos os resultados referentes ao s -valor são novos.

Os teoremas relacionados ao p -valor e ao s -valor estão descritos nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente, e as suas respectivas demonstrações nos Apêndices A e B. As comparações entre o p -valor e o s -valor são expostas na Seção 3.3 e os detalhes dessas comparações são oferecidos no Apêndice C.

No Apêndice A, as demonstrações dos teoremas relacionados ao p -valor (Seção 3.1) são longas, pois detalhamos todas as contas necessárias para suas provas. Note que para o cálculo do p -valor, definido em (2.2), é preciso calcular a distribuição de probabilidade induzida por $T(\mathbf{X}; \Theta_0)$ e posteriormente calcular o *supremum* de $P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0)]$ sob a restrição $\theta \in \Theta_0$. De maneira geral, o cálculo da distribuição de λ é um dos passos mais complexos, pois ele exige transformações de variáveis e integrais cujas complexidades dependem da hipótese nula. Entretanto, para o cálculo do s -valor, apesar de serem necessárias transformações de variáveis e integrais, elas não dependem da hipótese nula, o que facilita consideravelmente o seu cálculo.

3.1 Teoremas relacionados com o p -valor

Nesta seção, os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 expressam formas analíticas para o p -valor. No Teorema 3.1.1, o interesse é testar as seguintes hipóteses nulas: a.1, a.2 e a.3.; e, no Teorema 3.1.2, o interesse é testar as seguintes hipóteses nulas: b.1, b.2 e b.3.

Teorema 3.1.1 (Caso normal com variância conhecida) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, sendo σ^2 um valor numérico conhecido. Considere a seguinte hipótese nula:*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 \subset \Theta$ e $\Theta = \mathbb{R}$. O p -valor definido em (2.2) é explicitado para os seguintes casos:

i. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\} = \{\mu_0\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2} \left(n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right), \quad (3.1)$$

em que $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é a função acumulada da distribuição χ^2 com v graus de liberdade;

ii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ \Phi \left(\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases}; \quad (3.2)$$

iii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ \sup_{\theta \in \Theta_0} f_0(\theta) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ \sup_{\theta \in \Theta_0} f_1(\theta) & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases}, \quad (3.3)$$

em que

$$f_0(\theta) = 1 - \Phi \left(\frac{\max(2\mu_0 - \bar{x}, \mu_1) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) + \Phi \left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right)$$

e

$$f_1(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\min(2\mu_1 - \bar{x}, \mu_0) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

Se a Conjectura A.1.3 proposta na Seção A.1.3 (ver Apêndice A) é verdadeira, então este p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ f_0(\mu_1) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ f_1(\mu_0) & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases}.$$

O Teorema 3.1.1 mostra que as formas analíticas obtidas dependem da distância euclidiana ao quadrado entre a estimativa de máxima verossimilhança \bar{x} e as bordas do conjunto Θ_0 , *i.e.*, μ_0 ou μ_1 , dado que $\bar{x} \notin \Theta_0$. Com isso, tem-se que quanto maior for essa distância, menor será o p -valor e, por conseguinte, maior será a discrepância entre Θ_0 e a amostra observada.

Na obtenção da Expressão (3.1) não há dificuldades teóricas, pois quando σ^2 é conhecido $T(\mathbf{X}; \Theta_0) \stackrel{P_\theta}{\sim} \chi_1^2$, para $\theta \in \Theta_0$, e a etapa referente ao cálculo do *supremum* restrito a $\theta \in \Theta_0$ resume-se a substituir θ por μ_0 . Para mais detalhes da prova dessa Expressão (3.1), consulte a Seção A.1.1. Note que a Fórmula (3.1) é apresentada por Brownlee (1965, p. 120) e Shi e Tao (2008, p. 74–75). Em contrapartida, para o cálculo da Expressão (3.2) é necessário analisar o comportamento do numerador da razão de verossimilhanças em dois casos, a saber: $\bar{x} \in \Theta_0$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$. Depois, é preciso calcular $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0)]$.

Para mais detalhes da prova dessa Expressão (3.2), consulte a Seção A.1.2. Por fim, para o desenvolvimento da Expressão (3.3) é necessário analisar o comportamento do numerador da razão de verossimilhanças em três casos, a saber: $\bar{x} < \mu_0$, $\mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1$ e $\bar{x} > \mu_1$. Após, é preciso calcular $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0)]$. Para mais detalhes da prova dessa Expressão (3.3), consulte a Seção A.1.3.

Teorema 3.1.2 (Caso normal com variância desconhecida) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Considere a seguinte hipótese nula:*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta_0 \subset \Theta$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. O p -valor definido em (2.2) é explicitado para os seguintes casos:

i. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\} = \{(\mu_0, \sigma_0^2)^T\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)], \quad (3.4)$$

em que

$$F_T(b) = \int_{g_0(b)}^n f_{\chi^2}(u_1; n-1) F_{\chi^2}(b - g_0^{-1}(u_1); 1) du_1 + \\ + \int_n^{g_1(b)} f_{\chi^2}(u_2; n-1) F_{\chi^2}(b - g_1^{-1}(u_2); 1) du_2$$

é a função de distribuição acumulada exata de $T(\mathbf{X}; \Theta_0) = -2 \ln[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)]$ e $f_{\chi^2}(\cdot; v)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade,

$$g_0(b) = -n \cdot W_0 \left(-e^{-\frac{1}{n}(b+n)} \right) \quad e \quad g_1(b) = -n \cdot W_1 \left(-e^{-\frac{1}{n}(b+n)} \right),$$

$$u_{i+1} = g_i \left(\left(n \frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \right) - n \cdot \ln \left(n \frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \right) + n \cdot \ln(n) - n \right), \quad i = \{0, 1\}$$

e

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Note que W_i , $i = \{0, 1\}$, pertence a um conjunto de funções denominado função W de Lambert e maiores detalhes sobre esse conjunto podem ser encontrados em *Olver et al. (2010, pp. 111)* e em *Corless et al. (1996)*.

ii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1) + F_t(-q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1), \quad (3.5)$$

em que $F_t(\cdot; v)$ é a função acumulada da distribuição t -Student central com v graus de liberdade,

$$q(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sqrt{(n-1)[c(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-2/n} - 1]}$$

e

$$c(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2,$$

em que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = [c(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{n/2}$.

iii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$, então

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ F_t(-q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

em que $q(\mathbf{x}; \Theta_0)$ foi definido no item ii acima.

O Teorema 3.1.2 mostra que a forma analítica obtida no caso i é a função de sobrevivência de $T(\mathbf{X}; \Theta_0)$. Os demais casos dependem de onde a concentração de dados está localizada, dado que $\bar{x} \notin \Theta_0$, pois o p -valor é igual a 1 se $\bar{x} \in \Theta_0$.

Na obtenção da Expressão (3.4) é necessário encontrar a função de distribuição acumulada de $T(\mathbf{X}; \Theta_0)$. Para isso, é preciso trabalhar com uma transformação de variável aleatória que necessita particionar o seu domínio de tal forma que cada parte tenha inversa. Além disso, é necessário calcular uma integral dupla, cuja solução requer inverter os limites de integração. Para a prova dessa Expressão (3.4), consulte a Seção A.2.1. Entretanto, para mais detalhes dessa prova é sugerido ler algumas partes da Seção B.2. Na derivação da Expressão (3.5) a estatística da razão de verossimilhanças pode ser escrita em termos de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S_{n-1}$, em que $S_{n-1}^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, cuja distribuição não depende de

θ , ou seja, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S_{n-1} \stackrel{P_\theta}{\sim} t_{(n-1)}$, para $\theta \in \Theta_0$. Esse fato auxilia no cálculo do *supremum* restrito a $\theta \in \Theta_0$, resumindo-se a substituir μ por μ_0 . Para mais detalhes da prova dessa Expressão (3.5), consulte a Seção A.2.2. Note que a fórmula (3.5) é apresentada por [Pestman \(1998, p. 156–158\)](#) e [Shi e Tao \(2008, p. 75–76\)](#). No desenvolvimento da Expressão (3.6) é exigido analisar o comportamento do numerador da razão de verossimilhanças em dois casos, a saber: $\bar{x} \geq \mu_0$ e $\bar{x} < \mu_0$. Depois, é preciso calcular o $\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0)]$, que requer a aplicação da distribuição *t*-Student não central e as suas propriedades. Para mais detalhes da prova dessa Expressão (3.6), consulte a Seção A.2.3.

3.2 Teoremas relacionados com o s-valor

Nesta seção, os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 expressam formas analíticas para o s-valor. No Teorema 3.2.1, o interesse é testar as seguintes hipóteses nulas: a.1, a.2 e a.3; e, no Teorema 3.2.2 é avaliado para o caso da variância desconhecida, que pode ser utilizado para testar qualquer combinação entre μ e σ^2 , inclusive para b.1, b.2 e b.3.

Teorema 3.2.1 (Caso normal com variância conhecida) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido. Considere a seguinte hipótese nula:*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 \subset \Theta$ e $\Theta = \mathbb{R}$. Assim, o s-valor definido em (2.3) pode ser descrito das seguintes formas:

i. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$, então

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2} \left(n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right); \quad (3.7)$$

ii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$, então

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ 1 - F_{\chi^2} \left(n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases}; \quad (3.8)$$

iii. Se $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$, então

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ g(\mu_0) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ g(\mu_1) & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

em que

$$g(\mu_i) = 1 - F_{\chi^2} \left(n \frac{(\bar{x} - \mu_i)^2}{\sigma^2}; 1 \right), \quad i \in \{0, 1\}.$$

O Teorema 3.2.1 mostra que as formas analíticas obtidas também dependem da distância euclidiana ao quadrado entre a estimativa de máxima verossimilhança \bar{x} e as bordas do

conjunto Θ_0 , *i.e.*, μ_0 ou μ_1 , dado que $\bar{x} \notin \Theta_0$, pois o s -valor é igual a 1 se $\bar{x} \in \Theta_0$. Assim, tem-se que quanto maior for essa distância, menor será o s -valor e, por conseguinte, maior será a discrepância entre Θ_0 e a amostra observada. Note que as formas analíticas do s -valor utilizam a mesma função distribuição de probabilidade, enquanto que as formas analíticas do p -valor utilizam diferentes distribuições de probabilidade, as quais variam com a hipótese nula.

Para obter o Teorema 3.2.1 é fundamental encontrar a função densidade de probabilidade ou a função de distribuição acumulada de $T(\mathbf{X}; \{\theta\}) = -2 \ln[\lambda(\mathbf{X}; \{\theta\})]$. Após, é necessário basicamente utilizar a definição do s -valor. Para mais detalhes referentes a prova do Teorema 3.2.1, consulte as Seções B.1.1, B.1.2 e B.1.3.

Teorema 3.2.2 (Caso normal com variância desconhecida) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Considere, também, a seguinte hipótese nula:*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0,$$

em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e Θ_0 é um conjunto não vazio. Então, o s -valor definido em (2.3) se resume a

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{x} \in \Theta_0 \\ \alpha_s, & \text{se } \bar{x} \notin \Theta_0 \end{cases},$$

em que $\alpha_s = 1 - F_T[T(\mathbf{X}; \Theta_0)]$ e $F_T(\cdot)$ é definida no Teorema 3.1.2.

O Teorema 3.2.2 mostra que a forma analítica do s -valor obtida é a mesma do p -valor para o caso i no Teorema 3.1.2, ao qual refere-se a hipóteses simples. Entretanto, esse teorema do s -valor pode ser utilizado para qualquer Θ_0 não vazio, ou seja, os casos b.1, b.2 e b.3, e casos não triviais, tais como $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \sigma^2\}$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu/\sigma^2 \geq 1\}$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \ln(\sigma^2)\}$, entre outras. Para mais detalhes referentes a prova do Teorema 3.2.2, consulte a Seção B.2¹.

3.3 Comparações entre p -valor e s -valor

Nesta seção, uma comparação entre o p -valor e o s -valor é feita quando $\hat{\theta} \notin \Theta_0$, pois para o caso em que $\hat{\theta} \in \Theta_0$, o s -valor e o p -valor são iguais a 1. Essas comparações são feitas considerando os casos a.1, a.2, a.3, b.1, b.2 e b.3 mencionados na Seção 1.1.

3.3.1 Caso normal com variância conhecida

Seja $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 \subseteq \Theta$ e $\Theta = \mathbb{R}$. Assim, pode-se tomar os seguintes casos:

¹ O Teorema 3.2.2 foi obtido cronologicamente primeiro do que o Teorema 3.1.2 caso i .

1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$

Para este primeiro caso, tem-se a mesma expressão que um teste Z bilateral para ambas as medidas (p -valor e s -valor). Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = p(\Theta_0; \mathbf{x}).$$

Logo, para esse primeiro caso, tem-se que o p -valor é igual ao s -valor.

2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$

Para este segundo caso, tem-se que o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\right),$$

que tem a expressão de um teste Z unilateral. O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2}\left(n\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\right),$$

que tem a expressão de um teste Z bilateral como no primeiro caso. Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2 \cdot p(\Theta_0; \mathbf{x}).$$

Todavia, $p(\Theta_0; \mathbf{x}) \in [0, 1/2)$ para esse segundo caso.

3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$

Assumir-se-á que a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3 (ver Apêndice A) é verdadeira. Assim, para este terceiro caso, tem-se que dividir em duas partes.

- $\bar{x} < \mu_0$

Supondo a hipótese nula desse terceiro caso e que $\bar{x} < \mu_0$, tem-se que o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{\max(2\mu_0 - \bar{x} - \mu_1, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2}\left(n\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}\right).$$

Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{\max(\mu_0 - \mu_1 - \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2)\sqrt{\sigma^2/n}, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} + \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2)\right).$$

Para mais detalhes consulte a Seção C.1.3.

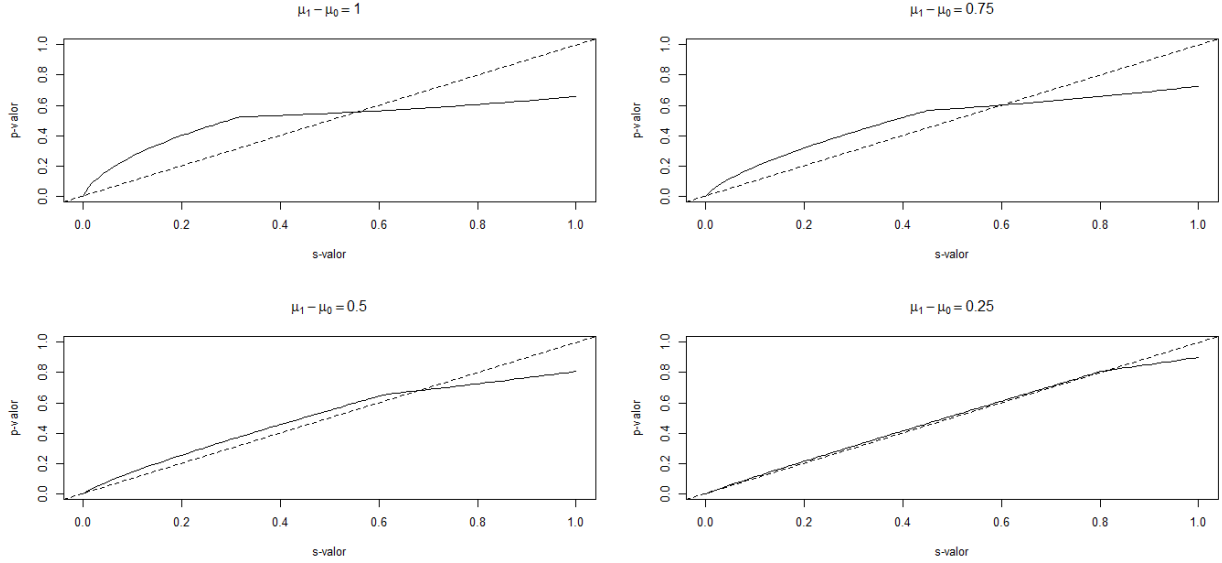


Figura 3.1: Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância conhecida quando $\bar{x} < \mu_0$, $\sigma^2 = 1$ e $n = 1$ (assumindo a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3, ver Apêndice A, é verdadeira).

- $\bar{x} > \mu_1$

Supondo a hipótese nula desse terceiro caso e que $\bar{x} > \mu_1$, tem-se que o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\min(2\mu_1 - \bar{x} - \mu_0, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2}\left(n \frac{(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}; 1\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n} \frac{(\mu_1 - \bar{x})}{\sigma}\right).$$

Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2)\right) + \Phi\left(\frac{\min(\mu_1 - \mu_0 + \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2)\sqrt{\sigma^2/n}, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

Para mais detalhes consulte a Seção C.1.3.

Pelas Figuras 3.1 e 3.2, tem-se que a diferença entre p -valor e s -valor diminui conforme o comprimento do intervalo $[\mu_0, \mu_1]$.

3.3.2 Caso normal com variância desconhecida

Seja $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu \ \sigma^2)$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, tal que $\Theta_0 \subseteq \Theta$. Assim, pode-se tomar os seguintes casos:

1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$

Para este primeiro caso, tem-se que o p -valor é igual ao s -valor.

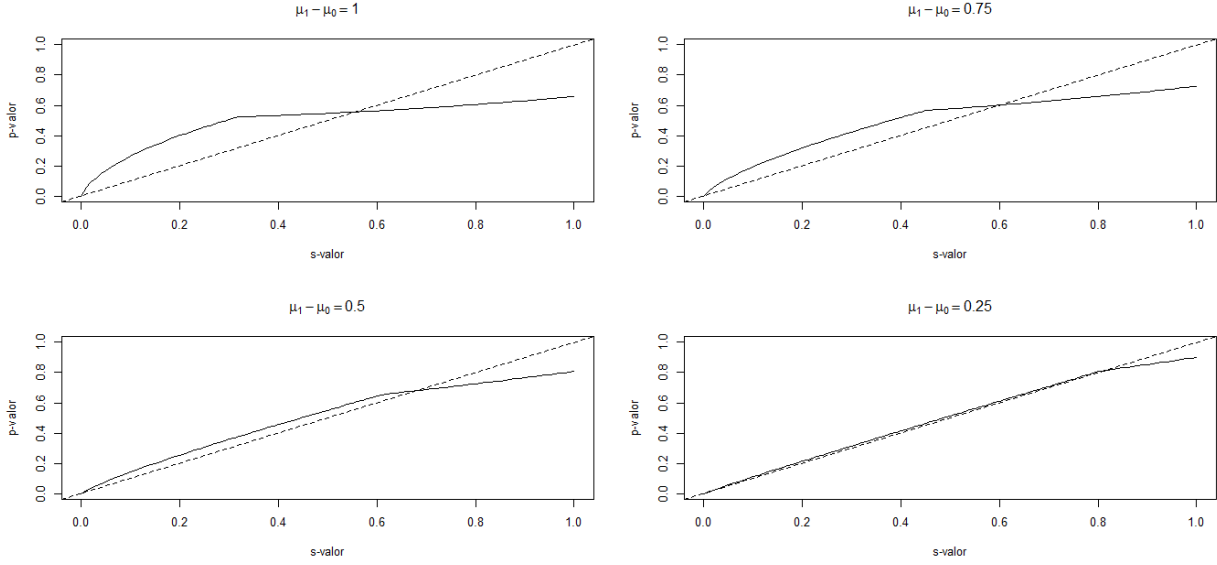


Figura 3.2: Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância conhecida quando $\bar{x} > \mu_1$, $\sigma^2 = 1$ e $n = 1$ (assumindo a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3, ver Apêndice A, é verdadeira).

2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$

Para este segundo caso, tem-se que o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2 [1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n - 1)],$$

em que $q(\mathbf{x}; \Theta_0)$ é definido no Teorema 3.1.2 e a expressão do p -valor coincide com um teste t bilateral. O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T[T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T \left[\frac{n^2}{2} \ln \left[\frac{\left[F_t^{-1} \left(1 - \frac{p(\mathbf{x}; \Theta_0)}{2}; n - 1 \right) \right]^2}{n - 1} + 1 \right] \right].$$

Para mais detalhes consulte a Seção C.2.2.

Pela Figura 3.3, tem-se que $p(\Theta_0; \mathbf{x}) \geq s(\Theta_0; \mathbf{x})$ quando o tamanho amostral é suficientemente grande.

3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$

Para este terceiro caso, tem-se que o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n - 1),$$

em que $q(\mathbf{x}; \Theta_0)$ é definido no Teorema 3.1.2 e sua expressão coincide com um teste t unilateral. O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T[T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

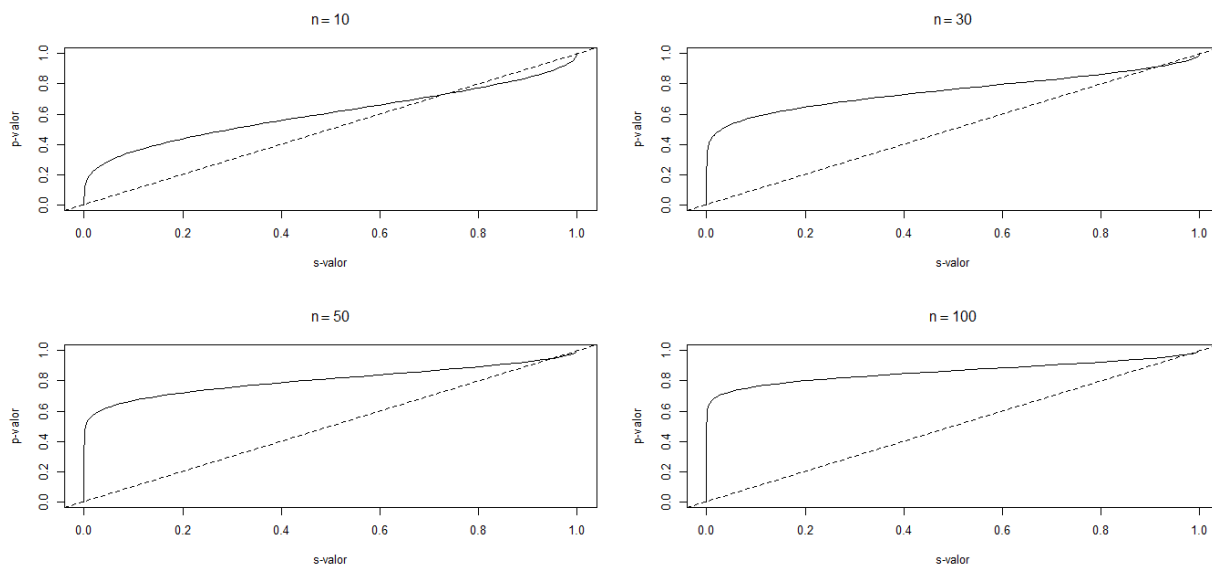


Figura 3.3: Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 2º caso da variância desconhecida.

Portanto, a relação entre o s -valor e o p -valor é dada por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T \left[\frac{n^2}{2} \ln \left[\frac{[F_t^{-1}(1 - p(\mathbf{x}; \Theta_0); n - 1)]^2}{n - 1} + 1 \right] \right].$$

Para mais detalhes consulte a Seção C.2.3.

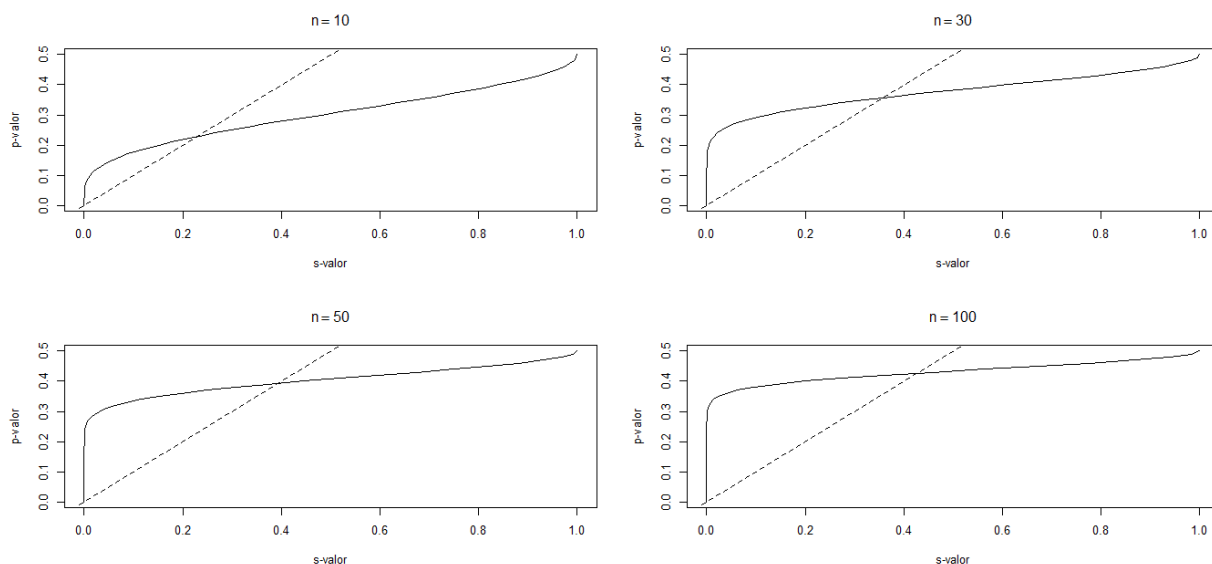


Figura 3.4: Gráficos da relação entre o s -valor e o p -valor para o 3º caso da variância desconhecida.

Pela Figura 3.4, tem-se que o s -valor é majorado pelo p -valor para valores pequenos do s -valor, por exemplo, quando $s(\Theta_0; \mathbf{x}) < 0.05$.

Capítulo 4

Conclusões

Neste trabalho, estudamos as medidas de evidência p -valor e s -valor, assumindo que os dados amostrais são independentes e identicamente distribuídos de acordo com uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 . Para esse estudo, foram desenvolvidas fórmulas analíticas para o p -valor e para o s -valor nos seguintes cenários:

- a) Variância populacional σ^2 conhecida, $\theta = \mu$ e $\Theta = \mathbb{R}$
 - a.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\} = \{\mu_0\}$;
 - a.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$;
 - a.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$;
- b) Variância populacional σ^2 desconhecida, $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
 - b.1) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma^2 = \sigma_0^2\} = \{(\mu_0, \sigma_0^2)^T\}$;
 - b.2) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$;
 - b.3) $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$;

em que μ_0 , μ_1 e σ_0^2 são valores fixos e $-\infty < \mu_0 < \mu_1 < \infty$.

As medidas p -valor e s -valor foram comparadas para todos os casos acima. Para os casos a.1 e b.1, o s -valor coincide com o p -valor. Em a.2, constatou-se que o p -valor é majorado pelo s -valor; observe que nesse caso $p(\Theta_0; \mathbf{x}) \in [0, 1/2)$. Para os demais casos, encontramos relações complexas entre o p -valor e o s -valor, que a princípio não conseguimos encontrar uma interpretação simples. No caso a.3, considerando que a Conjectura A.1.3 na Seção A.1.3 (ver Apêndice A) é verdadeira, observou-se por gráficos que quanto menor o comprimento do intervalo $[\mu_0, \mu_1]$ menor é a diferença entre essas duas medidas. Em b.2, quando o tamanho amostral é suficientemente grande, tem-se que o s -valor é majorado pelo p -valor. Já no caso b.3, observou-se que $p(\Theta_0; \mathbf{x}) \in [0, 1/2)$ e que o s -valor é majorado pelo p -valor para valores pequenos do s -valor, por exemplo, quando $s(\Theta_0; \mathbf{x}) < 0.05$. Não foi possível identificar que uma medida sempre majora a outra, ou seja, o p -valor ser sempre majorado pelo s -valor, ou vice-versa.

4.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Objetivamos estudar o s -valor para o caso de 2 normais independentes com a mesma variância (conhecida e desconhecida), e ambas as medidas de evidência p -valor e s -valor utilizando as seguintes famílias de distribuições:

- Família exponencial (Poisson, binomial, exponencial etc.);
- Família elíptica (normal, t-Student, exponencial-potência etc.).

Entretanto, as hipóteses a serem estudadas dependerão da distribuição de probabilidade dos dados amostrais.

Apêndice A

P-valor

Neste Apêndice, as demonstrações dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2, omitidas na Seção 3.1, são apresentadas nas Seções A.1 e A.2, respectivamente. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. O σ^2 é considerado conhecido na Seção A.1 e desconhecido na Seção A.2. O desenvolvimento dos p -valores nos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 tem como estatística de teste a razão de verossimilhanças.

A.1 Teorema 3.1.1

A.1.1 Caso i

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. A estatística da razão de verossimilhanças para este caso é dada por

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})} \\ &= \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right\}} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu_0 \sum_{i=1}^n x_i + n\mu_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 \right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [n\mu_0^2 - 2\mu_0 n\bar{x} + n\bar{x}^2]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2} (\mu_0 - \bar{x})^2\right\}.\end{aligned}$$

Assim, utilizando a definição do p -valor em (2.2), tem-se que

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0) \right],$$

em que $T(\mathbf{x}; \Theta_0) = -2 \ln [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)]$ e $\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \stackrel{P_{\mu_0}}{\sim} \chi_{(1)}^2$. Logo,

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right),$$

em que $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é a função acumulada da distribuição χ^2 com v graus de liberdade.

A.1.2 Caso ii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. A estatística da razão de verossimilhanças para este caso é dada por

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})} \\ &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right\} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Agora, estudaremos o numerador de (A.1). Note que

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i + n\theta^2 \right] \right\} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[n\theta^2 - 2\theta \sum_{i=1}^n x_i \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} [\theta^2 - 2\theta\bar{x} + \bar{x}^2 - \bar{x}^2] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x})^2 \right\} = h_{\bar{x}}(\theta). \end{aligned}$$

Considere $g_{\bar{x}}(\theta) = \ln[h_{\bar{x}}(\theta)]$. Com isso,

- $g'_{\bar{x}}(\theta) = -\frac{n}{\sigma^2}(\theta - \bar{x})$;
- $g''_{\bar{x}}(\theta) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$, então existe o ponto de máximo;
- $g'_{\bar{x}}(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \bar{x}$, logo o ponto de máximo de $g_{\bar{x}}(\theta)$ é \bar{x} .

Como a função logarítmica é uma função estritamente crescente, então o ponto de máximo de $h_{\bar{x}}(\theta)$ é o mesmo de $g_{\bar{x}}(\theta)$. A fim de estudar o *supremum* do numerador da estatística da razão de verossimilhanças, considere os seguintes casos:

1. Se $\bar{x} \in \Theta_0$, então $g_{\bar{x}}(\bar{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_{\bar{x}}(\theta)$, conforme pode ser visualizado na Figura A.1.
2. Se $\bar{x} \in \Theta_0^c$, em que $\Theta_0^c = \{\Theta - \Theta_0\}$, então $g_{\bar{x}}(\mu_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_{\bar{x}}(\theta)$, conforme pode ser visualizado na Figura A.2.

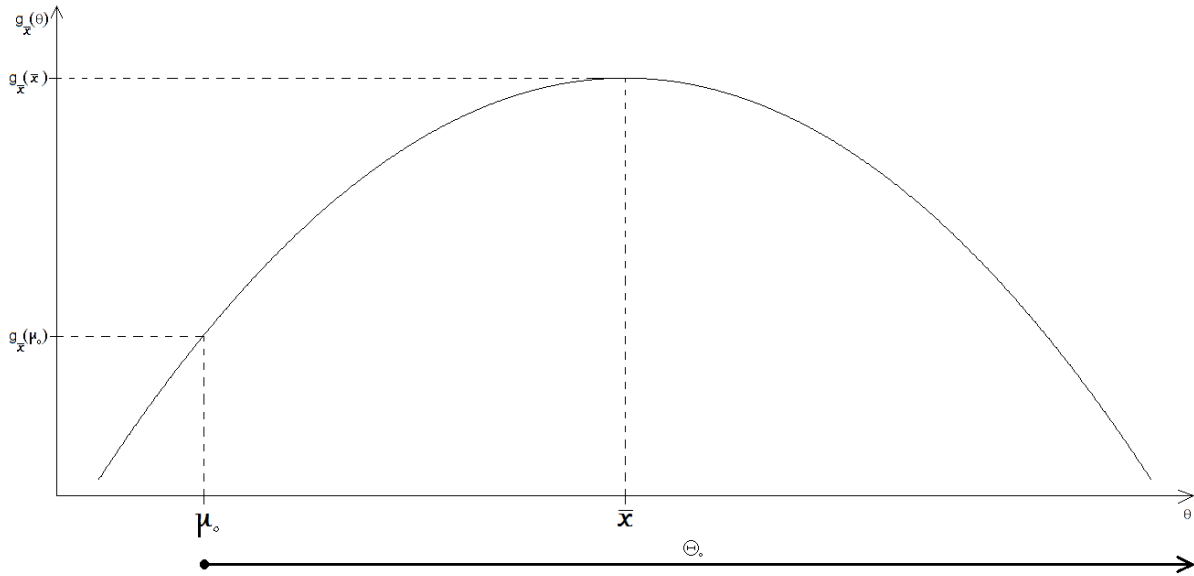


Figura A.1: Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} \in \Theta_0$.

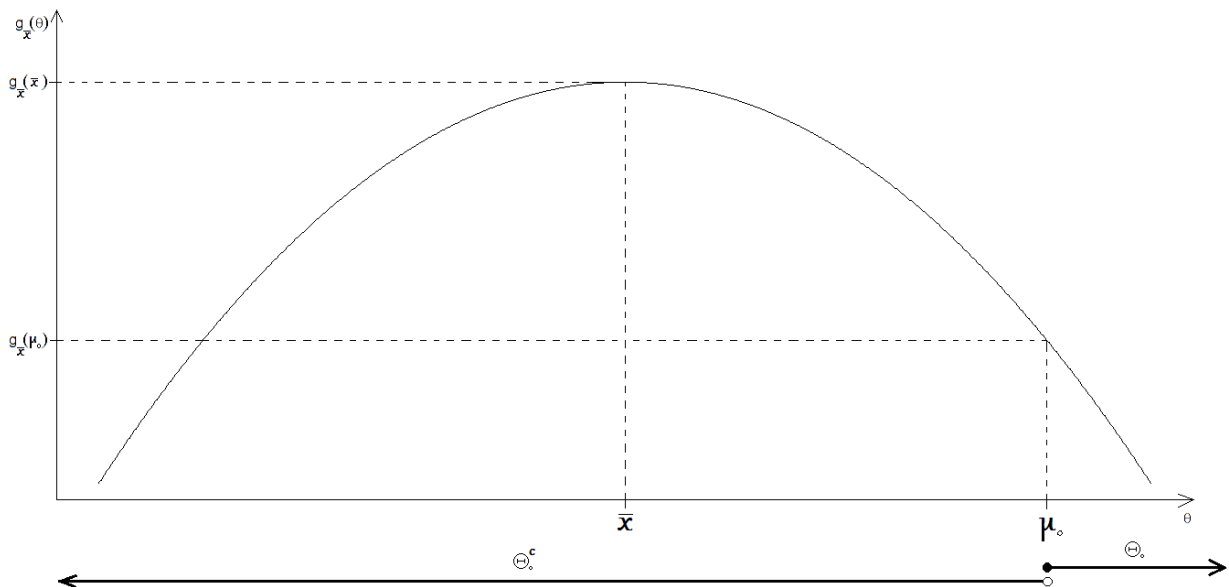


Figura A.2: Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} \in \Theta_0^c$.

Assim,

$$\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \in \Theta_0 \\ e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2} & , \text{ se } \bar{x} \in \Theta_0^c \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a definição do p -valor em (2.2), se $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = 1$, tem-se

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq 0] = 1.$$

Para o caso em que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) < 1$, utilizando a fórmula da probabilidade total

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

tem-se que

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0] + P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0^c] \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Para o cálculo de $P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0]$, note que, por (A.2), a variável aleatória $\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)$ é degenerada no ponto 1, dado que $\bar{X} \in \Theta_0$. Note que $0 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) < 1$, então, tem-se que

$$\begin{aligned} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0] &= P_\theta [\bar{X} \in \Theta_0] P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0) | \bar{X} \in \Theta_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \in \Theta_0] P_\theta [1 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) | \bar{X} \in \Theta_0] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para $P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0^c]$ deve-se considerar que $\bar{x} < \mu_0$, pois $\bar{X} \in \Theta_0^c$. Com isso, tem-se que

$$\begin{aligned} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0^c] &= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}, \bar{X} < \mu_0 \right] \\ &= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0|, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq \mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \geq 2\mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] + P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}] \\ &= \Phi \left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que $T(\mathbf{x}; \Theta_0) = -2 \ln[\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)] = \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}$ e $P_\theta [\bar{X} \geq 2\mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] = 0$. Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3), tem-se que, quando $\bar{x} < \mu_0$,

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \Phi \left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right).$$

Note que Φ é uma função decrescente em θ , como $\Theta_0 = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta \geq \mu_0\}$, o *supremum* restrito desse conjunto ocorre em $\theta = \mu_0$. Portanto,

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ \Phi \left(-\sqrt{n} \frac{(\mu_0 - \bar{x})}{\sigma} \right) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases}.$$

A.1.3 Caso iii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \mathbb{R} : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. A estatística da razão de verossimilhanças para este caso é dada por

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})} \\
&= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right\} \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

De forma análoga ao **Caso ii**, analisaremos o numerador em (A.6), utilizando a função $g_{\bar{x}}(\theta)$. Para isso, deve-se considerar os seguintes casos:

1. Se $\mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1$, então $g_{\bar{x}}(\bar{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_{\bar{x}}(\theta)$, conforme pode ser visualizado na Figura A.3.
2. Se $\bar{x} < \mu_0$, então $g_{\bar{x}}(\mu_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_{\bar{x}}(\theta)$, conforme pode ser visualizado na Figura A.4.
3. Se $\bar{x} > \mu_1$, então $g_{\bar{x}}(\mu_1) = \sup_{\theta \in \Theta_0} g_{\bar{x}}(\theta)$, conforme pode ser visualizado na Figura A.5.

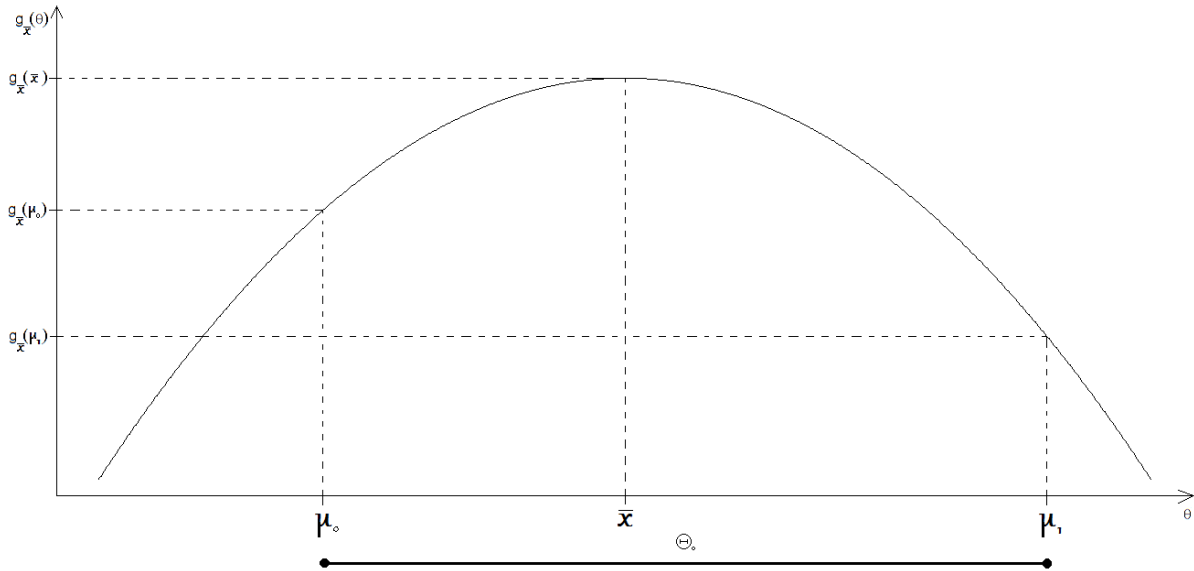


Figura A.3: Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1$.

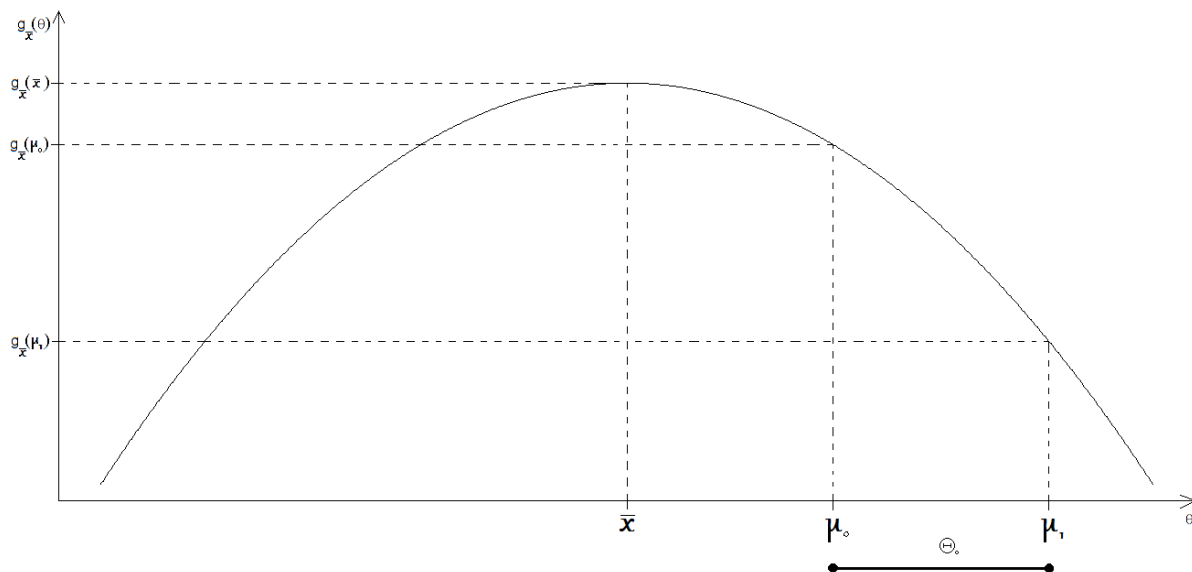


Figura A.4: Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} < \mu_0$.

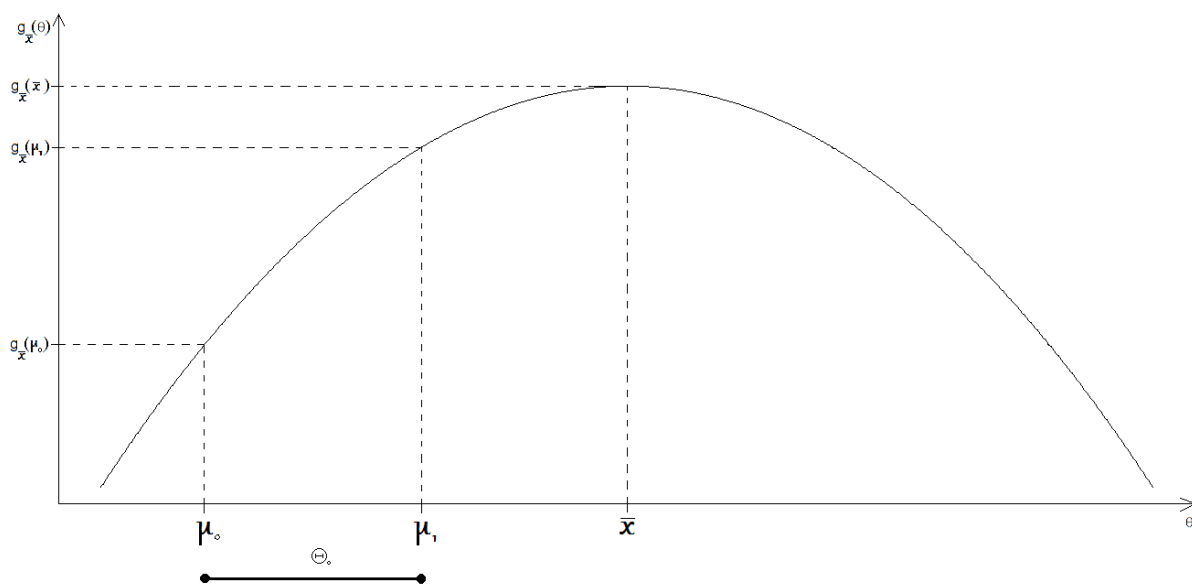


Figura A.5: Ponto de máximo local de g em Θ_0 , quando $\bar{x} > \mu_1$.

Assim,

$$\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2} & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_1)^2} & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases} . \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a definição do p -valor em (2.2), se $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = 1$, tem-se que

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta} [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq 0] = 1.$$

Para o caso em que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) < 1$, utilizando a seguinte propriedade:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D)$$

tal que $A = B \cup C \cup D$, $B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$ e $C \cap D = \emptyset$, ou seja, B , C e D formam uma partição de A , tem-se que

$$\begin{aligned} p(\Theta_0; \mathbf{x}) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \{ P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0] + \\ &\quad P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0] + \\ &\quad P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} > \mu_1] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para o cálculo de $P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0]$, note que, por (A.7), a variável aleatória $\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)$ é degenerada no ponto 1, dado que $\bar{X} \in \Theta_0$. Note que $0 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) < 1$, então, tem-se que

$$\begin{aligned} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} \in \Theta_0] &= P_\theta [\bar{X} \in \Theta_0] P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0) | \bar{X} \in \Theta_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \in \Theta_0] P_\theta [1 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) | \bar{X} \in \Theta_0] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para as seguintes probabilidades,

$$P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0]$$

e

$$P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} > \mu_1],$$

deve-se considerar dois casos, a saber: $\bar{x} < \mu_0$ e $\bar{x} > \mu_1$.

Quando $\bar{x} < \mu_0$, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{aligned} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0] &= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}, \bar{X} < \mu_0 \right] \\ &= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0|, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq \mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \geq 2\mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] + P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] \\ &= P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}] \\ &= \Phi \left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

em que $P_\theta [\bar{X} \geq 2\mu_0 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] = 0$, e

$$\begin{aligned}
P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} > \mu_1] &= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}, \bar{X} > \mu_1 \right] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu_0|, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_0| \geq \mu_0 - \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [\bar{X} \geq 2\mu_0 - \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] + P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [\bar{X} > \max(2\mu_0 - \bar{x}, \mu_1)] \\
&= 1 - \Phi \left(\frac{\max(2\mu_0 - \bar{x}, \mu_1) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right), \tag{A.11}
\end{aligned}$$

em que $P_\theta [\bar{X} \leq \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] = 0$. Quando $\bar{x} > \mu_1$, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{aligned}
P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0] &= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}, \bar{X} < \mu_0 \right] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_1| \geq |\bar{x} - \mu_1|, \bar{X} < \mu_0] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_1| \geq \bar{x} - \mu_1, \bar{X} < \mu_0] \\
&= P_\theta [\bar{X} \geq \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] + P_\theta [\bar{X} \leq 2\mu_1 - \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] \\
&= P_\theta [\bar{X} \leq \min(2\mu_1 - \bar{x}, \mu_0)] \\
&= \Phi \left(\frac{\min(2\mu_1 - \bar{x}, \mu_0) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right), \tag{A.12}
\end{aligned}$$

em que $P_\theta [\bar{X} \geq \bar{x}, \bar{X} < \mu_0] = 0$, e

$$\begin{aligned}
P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} > \mu_1] &= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}, \bar{X} > \mu_1 \right] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_1| \geq |\bar{x} - \mu_1|, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [|\bar{X} - \mu_1| \geq \bar{x} - \mu_1, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [\bar{X} \geq \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] + P_\theta [\bar{X} \leq 2\mu_1 - \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] \\
&= P_\theta [\bar{X} \geq \bar{x}] \\
&= 1 - \Phi \left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right), \tag{A.13}
\end{aligned}$$

em que $P_\theta [\bar{X} \leq 2\mu_1 - \bar{x}, \bar{X} > \mu_1] = 0$.

Se $\bar{x} < \mu_0$, substitui-se (A.9), (A.10) e (A.11) em (A.8), e se $\bar{x} > \mu_1$, substitui-se (A.9), (A.12) e (A.13) em (A.8). Logo, tem-se que o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \in \Theta_0 \\ \sup_{\theta \in \Theta_0} f_0(\theta) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ \sup_{\theta \in \Theta_0} f_1(\theta) & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases} ,$$

em que

$$f_0(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\max(2\mu_0 - \bar{x}, \mu_1) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \quad (\text{A.14})$$

e

$$f_1(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(\frac{\min(2\mu_1 - \bar{x}, \mu_0) - \theta}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right). \quad (\text{A.15})$$

Conjectura A.1.3: *Sejam as funções $f_0(\theta)$ e $f_1(\theta)$ expressadas nas Equações (A.14) e (A.15), respectivamente. Então, tem-se que:*

$$f_0(\mu_1) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f_0(\theta)$$

e

$$f_1(\mu_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f_1(\theta).$$

Se a Conjectura A.1.3 é verdadeira, tem-se que o p -valor pode ser expressado da seguinte forma:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ f_0(\mu_1) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ f_1(\mu_0) & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases} .$$

A.2 Teorema 3.1.2

A.2.1 Caso i

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Conforme os cálculos em B.2, a função acumulada de $T(\mathbf{X}; \Theta_0) = -2 \ln [\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)]$, sob H_0 , ou seja, quando $\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma_0^2)^T\}$, é dada por

$$F_T(b) = \int_{g_0(b)}^n f_{\chi^2}(u_1; n-1) F_{\chi^2}(b - g_0^{-1}(u_1); 1) du_1 + \int_n^{g_1(b)} f_{\chi^2}(u_2; n-1) F_{\chi^2}(b - g_1^{-1}(u_2); 1) du_2,$$

em que $f_{\chi^2}(\cdot; v)$ é a função densidade de probabilidade de uma distribuição χ^2 com v graus de liberdade,

$$g_0(b) = -n \cdot W_0 \left(-e^{-\frac{1}{n}(b+n)} \right) \quad \text{e} \quad g_1(b) = -n \cdot W_1 \left(-e^{-\frac{1}{n}(b+n)} \right),$$

e

$$u_{i+1} = g_i \left(\left(n \frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \right) - n \cdot \ln \left(n \frac{s_n^2}{\sigma_0^2} \right) + n \cdot \ln(n) - n \right), \quad i = \{0, 1\}.$$

As funções W_i , $i = \{0, 1\}$, pertencem a um conjunto de funções denominado função W de Lambert e maiores detalhes sobre esse conjunto podem ser encontrados em [Olver *et al.* \(2010, p. 111\)](#) e em [Corless *et al.* \(1996\)](#).

Assim, o p -valor definido em (2.2) é

$$\begin{aligned} p(\Theta_0; \mathbf{x}) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} [1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)]] \\ &= 1 - \inf_{\theta \in \Theta_0} F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)]. \end{aligned}$$

Como não existe θ em $F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)]$, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

A.2.2 Caso ii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. A estatística da razão de verossimilhanças para este caso é dada por

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})} \\ &= \frac{(\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right\}}{(s_n^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2s_n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}}, \end{aligned}$$

em que $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \left(\frac{s_n^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 - \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] \right\} \\ &= \left(\frac{s_n^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Utilizando a definição do p -valor em (2.2), tem-se

$$\begin{aligned} p(\Theta_0; \mathbf{x}) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0)] \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

tal que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \in [0, 1]$. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} P_\theta \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \right] &= P_\theta \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \leq [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{\frac{2}{n}} \right] \\ &= P_\theta \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \geq [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{-\frac{2}{n}} \right] \\ &= P_\theta \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{(n-1)S_{n-1}^2} \geq [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{-\frac{2}{n}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

em que $S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Sabe-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2 \\ &= (n-1)S_{n-1}^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.18) em (A.17), tem-se que

$$\begin{aligned}
P_\theta \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \right] &= P_\theta \left[1 + \frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{(n-1)S_{n-1}^2} \geq [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{-\frac{2}{n}} \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S_{n-1}^2} \geq (n-1) \left[\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-\frac{2}{n}} - 1 \right] \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq \sqrt{(n-1) \left[\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-\frac{2}{n}} - 1 \right]} \right] \\
&= 1 - P_\theta \left[\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} < \sqrt{(n-1) \left[\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-\frac{2}{n}} - 1 \right]} \right] \\
&= 1 - P_\theta [-q(\mathbf{x}; \Theta_0) < Q_\theta(\mathbf{X}; \Theta_0) < q(\mathbf{x}; \Theta_0)], \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

em que $q(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sqrt{(n-1) \left[\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-\frac{2}{n}} - 1 \right]}$ e $Q_\theta(\mathbf{X}; \Theta_0) = [\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) + \sqrt{n}(\mu - \mu_0)] / S_{n-1}$.

Substituindo (A.19) em (A.16), tem-se que

$$\begin{aligned}
p(\Theta_0; \mathbf{x}) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ 1 - P_\theta \left[-q(\mathbf{x}; \Theta_0) < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) + \sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{S_{n-1}} < q(\mathbf{x}; \Theta_0) \right] \right\} \\
&= 1 - \inf_{\theta \in \Theta_0} P_\theta \left[-q(\mathbf{x}; \Theta_0) < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) + \sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{S_{n-1}} < q(\mathbf{x}; \Theta_0) \right] \\
&= 1 - P_{\theta_0} \left[-q(\mathbf{x}; \Theta_0) < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < q(\mathbf{x}; \Theta_0) \right]
\end{aligned}$$

O p -valor será calculado utilizando-se o seguinte teorema de Casella e Berger (2002, p. 218):

Teorema A.2.1 *Sejam X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Então,*

- (i) \bar{X} e S_{n-1}^2 são independentes de acordo com P_θ , para cada $\theta \in \Theta$;
- (ii) $\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \stackrel{P_{\theta_0}}{\sim} \chi_{n-1}^2$;
- (iii) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \stackrel{P_{\theta_0}}{\sim} t_{n-1}$,

em que $\theta_0 = (\mu_0, \sigma^2)^T$, χ_v^2 denota uma variável aleatória qui-quadrado com v graus de liberdade e t_v denota uma variável aleatória t de Student com v graus de liberdade.

Logo, o p -valor para testar H_0 é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1) + F_t(-q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1),$$

em que $F_t(\cdot; v)$ é uma função acumulada de uma distribuição t de Student com v graus de liberdade.

A.2.3 Caso iii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. A estatística da razão de verossimilhanças para este caso é dada por

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})} \\ &= \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \right\}}{\left(s_n^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2s_n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

O vetor θ que maximiza a função $(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\}$ em (A.20) é $\hat{\theta} = (\bar{x}, s_n^2)^T$. Com isso, tem-se os seguintes casos:

1. Se $\bar{x} \geq \mu_0$, então o vetor de máximo local em Θ_0 é $\hat{\theta}_0 = (\bar{x}, s_n^2)^T$;
2. Se $\bar{x} < \mu_0$, então o vetor de máximo local em Θ_0 é $\hat{\theta}_0 = (\mu_0, \hat{\sigma}_{\mu_0}^2)^T$, em que $\hat{\sigma}_{\mu_0}^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$.

Logo,

$$\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \hat{\theta} \in \Theta_0 \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} & , \text{ se } \hat{\theta} \in \Theta_0^c \end{cases}. \quad (\text{A.21})$$

Utilizando a definição do p -valor em (2.2), se $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = 1$, tem-se que

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta [T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq 0] = 1.$$

Para o caso em que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) < 1$, utilizando a propriedade da probabilidade total

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c), \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} p(\Theta_0; \mathbf{x}) &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0 \right] P_\theta \left[T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] P_\theta \left[T(\mathbf{X}; \Theta_0) \geq T(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \right\}. \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \left\{ P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0 \right] P_\theta \left[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] P_\theta \left[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Para o cálculo de $P_\theta \left[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right]$, note que, por (A.21), a variável aleatória $\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0)$ é degenerada no ponto 1, dado que $\hat{\theta} \in \Theta_0$. Por isso, tem-se que

$$\begin{aligned} P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0 \right] P_\theta \left[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right] &= P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0 \right] P_\theta \left[1 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

pois $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \in [0, 1) \Rightarrow P_\theta \left[1 \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0 \right] = 0$.

Depois, calcula-se esta probabilidade:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] P_\theta \left[\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \\
&= P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \cdot P_\theta \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \\
&= P_\theta \left[\hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \cdot P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \hat{\theta} \in \Theta_0^c \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \hat{\theta} \in (-\infty, \mu_0) \times \mathbb{R}^+ \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0, S_n^2 \in \mathbb{R}^+ \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \bar{X} < \mu_0 \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < 0 \right],
\end{aligned}$$

em que $q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sqrt{(n-1) \left[c_0(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-\frac{2}{n}} - 1 \right]}$ e $c_0(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$.

Para solucionar essa probabilidade P_1 , considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{ \frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \right\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < 0 \right\}.$$

Logo, pode-se reescrever o conjunto A da seguinte forma: $A = A_1 \cup A_2$, em que

$$A_1 = \left\{ \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \leq -q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \right\}$$

e

$$A_2 = \left\{ \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \right\}.$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} |\bar{X} - \mu_0|}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < 0 \right] \\
&= P_\theta [(A_1 \cup A_2) \cap B] \\
&= P_\theta [(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)] \\
&= P_\theta [A_1 \cap B] + P_\theta [A_2 \cap B],
\end{aligned}$$

pois $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = \emptyset$. Logo,

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_\theta [\hat{\theta} \in \Theta_0^c] P_\theta [\lambda(\mathbf{X}; \Theta_0) \leq \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) \mid \hat{\theta} \in \Theta_0^c] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \leq -q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < 0 \right] + \\
&\quad + P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \geq q_0(\mathbf{x}; \Theta_0), \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} < 0 \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu_0)}{S_{n-1}} \leq -q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \right] \\
&= P_\theta \left[\frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \mu) + \sqrt{n} (\mu - \mu_0)}{S_{n-1}} \leq -q_0(\mathbf{x}; \Theta_0) \right]. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Substituindo (A.23) e (A.24) em (A.22), tem-se

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ \sup_{\theta \in \Theta_0} F_t \left(-q_0(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1, \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \right) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases},$$

em que $F_t(\cdot; v, \delta)$ é uma função acumulada de uma distribuição t de Student não central com v graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade δ . Quando $\delta = 0$, $F_t(\cdot; v, 0) = F_t(\cdot; v)$, ou seja, a função acumulada de uma distribuição t de Student não central se reduz a uma função acumulada de uma distribuição t de Student central.

Agora, considere a seguinte igualdade:

$$F_t(q; v, \delta) = P \left[\frac{Z + \delta}{\sqrt{V/v}} \leq q \right] = P \left[Z - q\sqrt{V/v} \leq -\delta \right], \tag{A.25}$$

em que $Z \sim N(0, 1)$ e $V \sim \chi_v^2$.

Pelas propriedades de função acumulada, tem-se que, quando δ cresce, a probabilidade em (A.25) tende a 0, e quando δ decresce, a probabilidade em (A.25) tende a 1. Logo, $F_t(\cdot; v, \delta)$ é uma função decrescente em relação a δ .

Como $\sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma \in \mathbb{R}^+$, então a função $\sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma$ é mínima quando $\mu = \mu_0$ ou $\sigma^2 \rightarrow \infty$. Como $(\mu, \sigma^2)^T \in \Theta_0$, $\mu \in [\mu_0, \infty)$ e $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, então

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} F_t \left(-q_0(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1, \frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} \right) = F_t(-q_0(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1, 0).$$

Logo, o p -valor é

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ F_t(-q_0(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1) & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases} .$$

Apêndice B

S-valor

Neste Apêndice, as demonstrações dos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2, omitidas na Seção 3.2, são apresentadas nas Seções B.1 e B.2, respectivamente. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. O σ^2 é considerado conhecido na Seção B.1 e desconhecido na Seção B.2.

B.1 Teorema 3.2.1

B.1.1 Caso i

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. Seja

$$L(\theta; \mathbf{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right\},$$

em que a estimativa de máxima verossimilhança para θ , nesse caso, é \bar{x} . Assim,

$$T(\mathbf{X}; \{\theta\}) = \frac{n(\bar{X} - \theta)^2}{\sigma^2} \stackrel{P_\theta}{\sim} \chi_{(1)}^2, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Pela definição (2.3), primeiramente, tem-se que encontrar a região de confiança $\Lambda_\alpha(\mathbf{x})$. Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{\sigma^2} &\leq F_\alpha \\ (\bar{x} - \theta)^2 &\leq \frac{\sigma^2}{n} F_\alpha \\ |\bar{x} - \theta| &\leq \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} F_\alpha}, \end{aligned}$$

Logo,

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} F_\alpha}; \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} F_\alpha} \right].$$

Para satisfazer $\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset$, pelo menos um ponto de Θ_0 deve estar na região de

confiança. Com isso, o α que resolver o $\sup \{\alpha \in (0, 1) : \Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset\}$ seria o maior nível de significância que gera a menor região de confiança que contém um ponto de Θ_0 na borda de sua região. Assim,

$$\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha = \mu_0 \quad \text{ou} \quad \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha = \mu_0,$$

então

$$F_\alpha = \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}$$

$$F_{\chi^2}(F_\alpha; 1) = F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right),$$

em que $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é uma função acumulada de uma distribuição χ^2 com v graus de liberdade. Portanto,

$$1 - \alpha_s = F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right)$$

$$\alpha_s = 1 - F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right).$$

Logo, o s -valor é dado por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \alpha_s.$$

B.1.2 Caso ii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. Pela Seção B.1.1, tem-se que, a região de confiança $\Lambda_\alpha(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha; \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha \right].$$

Para satisfazer $\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset$, pelo menos um ponto de Θ_0 deve estar na região de confiança. Com isso, o α que resolver o $\sup \{\alpha \in (0, 1) : \Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset\}$ seria o maior nível de significância que gera a menor região de confiança que contém um ponto de Θ_0 na borda de sua região. Sendo assim, as soluções seriam duas:

1º Se $\bar{x} \geq \mu_0$, então $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$;

2º Se $\bar{x} < \mu_0$, então a borda superior da região de confiança deve ser igual a μ_0 .

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha &= \mu_0 \\ F_\alpha &= \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \\ F_{\chi^2}(F_\alpha; 1) &= F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right),\end{aligned}$$

em que $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é uma função acumulada de uma distribuição χ^2 com v graus de liberdade. Portanto,

$$\begin{aligned}1 - \alpha_s &= F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right) \\ \alpha_s &= 1 - F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right).\end{aligned}$$

Logo, o s -valor é dado por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \geq \mu_0 \\ \alpha_s & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \end{cases}.$$

B.1.3 Caso iii

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\Theta = \mathbb{R}$. Pela Seção B.1.1, tem-se que, a região de confiança $\Lambda_\alpha(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \left[\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha; \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha \right].$$

Para satisfazer $\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset$, pelo menos um ponto de Θ_0 deve estar na região de confiança. Com isso, o α que resolver o $\sup \{\alpha \in (0, 1) : \Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset\}$ seria o maior nível de significância que gera a menor região de confiança que contém um ponto de Θ_0 na borda de sua região. Sendo assim, as soluções seriam três:

- 1º Se $\mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1$, então $s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1$;
- 2º Se $\bar{x} < \mu_0$, então a borda superior da região de confiança deve ser igual a μ_0 ;
- 3º Se $\bar{x} > \mu_1$, então a borda inferior da região de confiança deve ser igual a μ_1 .

No primeiro caso, em que $\bar{x} < \mu_0$, tem-se que

$$\begin{aligned}\bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_\alpha &= \mu_0 \\ F_\alpha &= \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \\ F_{\chi^2}(F_\alpha; 1) &= F_{\chi^2}\left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1\right),\end{aligned}$$

em que $F_{\chi^2}(\cdot; v)$ é uma função acumulada de uma distribuição χ^2 com v graus de liberdade. Portanto,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_{s_0} &= F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right) \\ \alpha_{s_0} &= 1 - F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}; 1 \right). \end{aligned}$$

No caso em que $\bar{x} > \mu_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} F_{\alpha} &= \mu_1 \\ F_{\alpha} &= \frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \\ F_{\chi^2}(F_{\alpha}; 1) &= F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}; 1 \right) \\ 1 - \alpha_{s_1} &= F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}; 1 \right) \\ \alpha_{s_1} &= 1 - F_{\chi^2} \left(\frac{n(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2}; 1 \right). \end{aligned}$$

Logo, o s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu_0 \leq \bar{x} \leq \mu_1 \\ \alpha_{s_0} & , \text{ se } \bar{x} < \mu_0 \\ \alpha_{s_1} & , \text{ se } \bar{x} > \mu_1 \end{cases}.$$

B.2 Teorema 3.2.2

Nesta seção, a hipótese nula considerada é $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, Θ_0 (um conjunto não vazio) e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Para essa seção, a estimativa de máxima verossimilhança é $\hat{\theta} = (\bar{x}, s_n^2)^T$. Assim,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}; \{\theta\}) &= 2 \left[-\frac{n}{2} \ln(2\pi s_n^2) - \frac{1}{2s_n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] \\ &= n \left[\ln(2\pi\sigma^2) - \ln(2\pi s_n^2) \right] + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right] - n - n \cdot \ln \left(\frac{s_n^2}{\sigma^2} \right) \\ &= n \frac{s_n^2}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{x} - \mu)^2}{\sigma^2} - n \cdot \ln \left(n \frac{s_n^2}{\sigma^2} \right) + n \cdot \ln(n) - n. \end{aligned}$$

Logo,

$$T(\mathbf{X}; \{\theta\}) = n \frac{S_n^2}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} - n \cdot \ln \left(n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \right) + n \cdot \ln(n) - n.$$

Com isso, sabe-se que

$$Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\}) = n \frac{S_n^2}{\sigma^2} \stackrel{P_\theta}{\sim} \chi_{(n-1)}^2, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

$$Y_2(\mathbf{X}; \{\theta\}) = n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \stackrel{P_\theta}{\sim} \chi_{(1)}^2, \quad \forall \theta \in \Theta$$

e

$$Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\}) \perp Y_2(\mathbf{X}; \{\theta\}).$$

Assim, como o objetivo é encontrar a distribuição de $T(\mathbf{X}; \{\theta\})$, note que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}; \{\theta\}) &= Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\}) + Y_2(\mathbf{X}; \{\theta\}) - n \cdot \ln(Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\})) + n \cdot \ln(n) - n \\ &= Z(\mathbf{X}; \{\theta\}) + Y_2(\mathbf{X}; \{\theta\}), \end{aligned}$$

em que $Z(\mathbf{X}; \{\theta\}) = Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\}) - n \cdot \ln(Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\})) + n \cdot \ln(n) - n$. A fim de evitar sobrecarga de notação, serão removidos os argumentos das funções, e serão adotadas as seguintes formas:

$$\begin{aligned} T &\equiv T(\mathbf{X}; \{\theta\}), \\ Y_1 &\equiv Y_1(\mathbf{X}; \{\theta\}), \\ Y_2 &\equiv Y_2(\mathbf{X}; \{\theta\}), \\ Z &\equiv Z(\mathbf{X}; \{\theta\}). \end{aligned}$$

Estudaremos as seguintes transformações de variáveis:

$$T = Z + Y_2 \quad \text{e} \quad J = Y_2. \tag{B.1}$$

A fim de encontrar a distribuição de T , primeiramente, deve-se encontrar a distribuição de Z , pois $Y_2 \stackrel{P_\theta}{\sim} \chi_{(1)}^2$. Observe que Z tem um comportamento parecido com uma função quadrática, como mostra a Figura B.1. Então, tem-se que particionar o domínio de Z em duas partes que possuam inversas. Assim, tem-se que

1ª parte:

$$Z = Y_1 - n \cdot \ln(Y_1) + n \cdot \ln(n) - n, \quad \text{para } Y_1 \in (0, n];$$

2ª parte:

$$Z = Y_1 - n \cdot \ln(Y_1) + n \cdot \ln(n) - n, \quad \text{para } Y_1 \in (n, \infty).$$

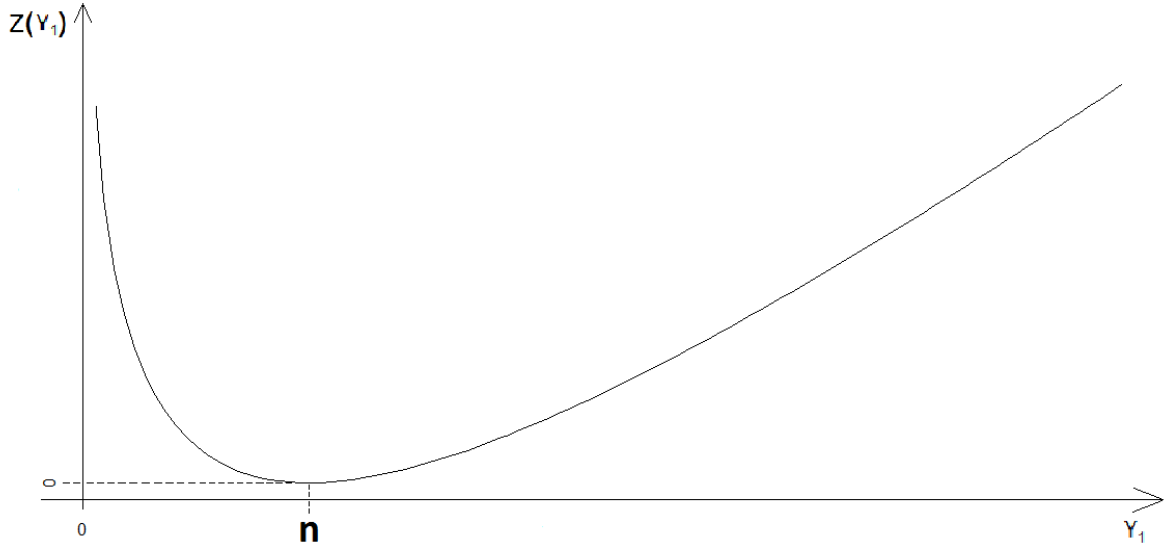


Figura B.1: Gráfico da função $Z_n(y) = y - n \cdot \ln(y) + n \cdot \ln(n) - n$.

Manipulando Z tem-se que

$$\begin{aligned}
 Z &= Y_1 - n \cdot \ln(Y_1) + n \cdot \ln(n) - n \\
 Z + n &= Y_1 - n \cdot \ln(Y_1) + n \cdot \ln(n) \\
 -\frac{1}{n}(Z + n) &= -\frac{Y_1}{n} + \ln(Y_1) - \ln(n) \\
 -\frac{1}{n}(Z + n) &= -\frac{Y_1}{n} + \ln\left(\frac{Y_1}{n}\right) \\
 e^{-\frac{1}{n}(Z+n)} &= \frac{Y_1}{n} \cdot e^{-\frac{Y_1}{n}} \\
 -e^{-\frac{1}{n}(Z+n)} &= -\frac{Y_1}{n} \cdot e^{-\frac{Y_1}{n}}. \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

Para encontrar a inversa em (B.2) é necessário utilizar a função W de Lambert (vide [Corless *et al.* \(1996\)](#) e [Olver *et al.* \(2010, pp. 111\)](#) para maiores detalhes). A função W de Lambert, também chamada de função ômega ou logaritmo do produto, é um conjunto de funções, ou seja, os ramos da relação inversa da função $f(y) = y \cdot e^y$, tal que $y \in \mathbb{C}$. Assim,

$$y = f^{-1}(y \cdot e^y) = W(y \cdot e^y).$$

Com isso, aplicando a função W de Lambert em (B.2) tem-se que

$$\begin{aligned}
 W\left(-e^{-\frac{1}{n}(Z+n)}\right) &= -\frac{Y_1}{n} \\
 Y_1 &= -n \cdot W\left(-e^{-\frac{1}{n}(Z+n)}\right).
 \end{aligned}$$

Logo, a inversa para a 1ª parte é

$$g_0(Z) = -n \cdot W_0\left(-e^{-\frac{1}{n}(Z+n)}\right),$$

em que W_0 é o ramo principal da função de Lambert, e a inversa da 2ª parte é

$$g_1(Z) = -n \cdot W_1 \left(-e^{-\frac{1}{n}(Z+n)} \right),$$

em que W_1 é o ramo não principal da função de Lambert. Com isso, a função densidade de Z é dada por

$$f_Z(z) = f_{Y_1}(g_0(z)) \left| \frac{\delta g_0(z)}{\delta z} \right| + f_{Y_1}(g_1(z)) \left| \frac{\delta g_1(z)}{\delta z} \right|.$$

Como Z e Y_2 são independentes, a função de densidade conjunta da transformação (B.1) é dada por

$$f_{T,J}(t, j) = f_Z(t - j) f_{Y_2}(j).$$

A distribuição marginal da variável T e sua função acumulada, respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T,J}(t, j) dj \\ &= \int_0^\infty f_Z(t - j) f_{Y_2}(j) dj \\ &= \int_0^\infty (f_{Y_1}(g_0(t - j)) |g'_0(t - j)| + \\ &\quad + f_{Y_1}(g_1(t - j)) |g'_1(t - j)|) I_{(0;\infty)}(t - j) f_{Y_2}(j) dj \\ &= \int_0^t (f_{Y_1}(g_0(t - j)) |g'_0(t - j)| + f_{Y_1}(g_1(t - j)) |g'_1(t - j)|) f_{Y_2}(j) dj \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_T(b) &= \int_0^b f_T(t) dt \\ &= \int_0^b \int_0^t (f_{Y_1}(g_0(t - j)) |g'_0(t - j)| + f_{Y_1}(g_1(t - j)) |g'_1(t - j)|) f_{Y_2}(j) dj dt \\ &= F_1(b) + F_2(b), \end{aligned}$$

em que

$$F_1(b) = \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_0(t - j)) |g'_0(t - j)| f_{Y_2}(j) dj dt$$

e

$$F_2(b) = \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_1(t - j)) |g'_1(t - j)| f_{Y_2}(j) dj dt.$$

Os próximos passos são necessários para obter F_1 e F_2 . Considere a seguinte transformação $u_1 = g_0(t - j)$, então tem-se que $du_1 = -g'_0(t - j) dj$ e $j = t - g_0^{-1}(u_1)$, em que

$g_0^{-1}(u_1) = u_1 - n \cdot \ln(u_1) + n \cdot \ln(n) - n$. Note que $g_0(0) = n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
F_1(b) &= \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_0(t-j)) |g_0'(t-j)| f_{Y_2}(j) dj dt \\
&= \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_0(t-j)) (-g_0'(t-j)) f_{Y_2}(j) dj dt \\
&= \int_0^b \int_{g_0(t)}^n f_{Y_1}(u_1) f_{Y_2}(t - g_0^{-1}(u_1)) du_1 dt \\
&= \int_{g_0(b)}^n \int_{g_0^{-1}(u_1)}^b f_{Y_1}(u_1) f_{Y_2}(t - g_0^{-1}(u_1)) dt du_1 \\
&= \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) \int_{g_0^{-1}(u_1)}^b f_{Y_2}(t - g_0^{-1}(u_1)) dt du_1.
\end{aligned}$$

Tome $v_1 = t - g_0^{-1}(u_1)$ e $dv_1 = dt$,

$$\begin{aligned}
F_1(b) &= \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) \int_{g_0^{-1}(u_1)}^b f_{Y_2}(t - g_0^{-1}(u_1)) dt du_1 \\
&= \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) \int_0^{b-g_0^{-1}(u_1)} f_{Y_2}(v_1) dv_1 du_1 \\
&= \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) F_{Y_2}(b - g_0^{-1}(u_1)) du_1 \\
&= \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) F_{\chi^2}(b - g_0^{-1}(u_1); 1) du_1.
\end{aligned}$$

Para $F_2(b)$ foi utilizado o mesmo método. Com isso, considere a seguinte transformação $u_2 = g_1(t-j)$, então tem-se que $du_2 = -g_1'(t-j) dj$ e $j = t - g_1^{-1}(u_2)$, em que $g_1^{-1}(u_2) = u_2 - n \cdot \ln(u_2) + n \cdot \ln(n) - n$. Note que $g_1(0) = n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
F_2(b) &= \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_1(t-j)) |g_1'(t-j)| f_{Y_2}(j) dj dt \\
&= \int_0^b \int_0^t f_{Y_1}(g_1(t-j)) g_1'(t-j) f_{Y_2}(j) dj dt \\
&= - \int_0^b \int_{g_1(t)}^n f_{Y_1}(u_2) f_{Y_2}(t - g_1^{-1}(u_2)) du_2 dt \\
&= \int_0^b \int_n^{g_1(t)} f_{Y_1}(u_2) f_{Y_2}(t - g_1^{-1}(u_2)) du_2 dt \\
&= \int_n^{g_1(b)} \int_{g_1^{-1}(u_2)}^b f_{Y_1}(u_2) f_{Y_2}(t - g_1^{-1}(u_2)) dt du_2 \\
&= \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) \int_{g_1^{-1}(u_2)}^b f_{Y_2}(t - g_1^{-1}(u_2)) dt du_2.
\end{aligned}$$

Tome $v_2 = t - g_1^{-1}(u_2)$ e $dv_2 = dt$,

$$\begin{aligned}
F_2(b) &= \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) \int_{g_1^{-1}(u_2)}^b f_{Y_2}(t - g_1^{-1}(u_2)) dt du_2 \\
&= \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) \int_0^{b-g_1^{-1}(u_2)} f_{Y_2}(v_2) dv_2 du_2 \\
&= \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) F_{Y_2}(b - g_1^{-1}(u_2)) du_2 \\
&= \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) F_{\chi^2}(b - g_1^{-1}(u_2); 1) du_2.
\end{aligned}$$

Portanto, a distribuição acumulada da variável aleatória T é explicitada por:

$$F_T(b) = \int_{g_0(b)}^n f_{Y_1}(u_1) F_{\chi^2}(b - g_0^{-1}(u_1); 1) du_1 + \int_n^{g_1(b)} f_{Y_1}(u_2) F_{\chi^2}(b - g_1^{-1}(u_2); 1) du_2.$$

Observe que $F_T(\cdot)$ não depende de θ .

Pela definição do s -valor em (2.3), primeiramente, tem-se que encontrar a região de confiança $\Lambda_\alpha(\mathbf{x})$, tal que $\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\Lambda_\alpha(\mathbf{x}) \cap \Theta_0 \neq \emptyset &\Rightarrow T(\mathbf{x}; \{\theta\}) \leq F_\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0 \\
&\Rightarrow n \frac{s_n^2}{\sigma^2} + n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} - n \cdot \ln \left(n \frac{s_n^2}{\sigma^2} \right) + n \cdot \ln(n) - n \leq F_\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}; \{\theta\}) &\leq F_\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0 \\
F_T[T(\mathbf{x}; \{\theta\})] &\leq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0 \\
\alpha &\leq 1 - F_T[T(\mathbf{x}; \{\theta\})], \quad \forall \theta \in \Theta_0.
\end{aligned}$$

Logo, aplicando o *sup* em α , tem-se que

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= \sup_{\theta \in \Theta_0} [1 - F_T[T(\mathbf{x}; \{\theta\})]] \\
&= 1 - \inf_{\theta \in \Theta_0} F_T[T(\mathbf{x}; \{\theta\})].
\end{aligned}$$

Como a função F_T é estritamente crescente e não depende de θ , então

$$\begin{aligned}
\alpha_s &= 1 - F_T \left[\inf_{\theta \in \Theta_0} T(\mathbf{x}; \{\theta\}) \right] \\
&= 1 - F_T[T(\mathbf{x}; \Theta_0)],
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\inf_{\theta \in \Theta_0} T(\mathbf{x}; \{\theta\}) &= \inf_{\theta \in \Theta_0} -2 \ln [\lambda(\mathbf{x}; \{\theta\})] \\
&= -2 \ln [\sup_{\theta \in \Theta_0} \lambda(\mathbf{x}; \{\theta\})] \\
&= -2 \ln [\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0)] \\
&= T(\mathbf{x}; \Theta_0).
\end{aligned}$$

Portanto, se $\Theta_0 \neq \emptyset$, então o s -valor é dado por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \bar{x} \in \Theta_0 \\ \alpha_s & , \text{ se } \bar{x} \notin \Theta_0 \end{cases} . \quad (\text{B.3})$$

Note que a equação B.3 para o s -valor é obtida de forma geral para uma hipótese nula Θ_0 não vazia arbitrária. Contudo, nesse trabalho, focamos nosso estudo nas seguintes hipóteses nulas:

- i. $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$;
- ii. $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$;
- iii. $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$.

Apêndice C

Comparações entre p -valor e s -valor

Neste Apêndice, os cálculos omitidos na Seção 3.3 são apresentados na Seção C.1 e na Seção C.2

C.1 Caso normal com variância conhecida

Primeiramente, sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido. E considere que $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = \mu$, $\Theta_0 \subseteq \Theta$, $\Theta = \mathbb{R}$ e o conjunto Θ_0 será especificado posteriormente.

Para esta seção, deve-se colocar o p -valor e o s -valor sob a mesma família paramétrica de distribuição. Com isso, o s -valor para o caso normal com variância conhecida será representado por uma $N(0, 1)$ quando necessário.

Nos casos em que $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ ou $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\bar{x} < \mu_0$, o s -valor é dado por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - P_{\mu_0} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right),$$

em que $Z^2 \sim \chi_{(1)}^2$.

Com isso,

$$\begin{aligned}
s(\Theta_0; \mathbf{x}) &= 1 - P_{\mu_0} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_0} \left(|Z| \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_0} \left(-\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \leq Z \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \right) + P_{\mu_0} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_0} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) + P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) \\
&= P_{\mu_0} \left(Z \geq -\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) + P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot \Phi \left(\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right),
\end{aligned}$$

em que $Z \sim N(0, 1)$.

No caso em que $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\bar{x} > \mu_1$, o s -valor é dado por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - P_{\mu_1} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \right),$$

em que $Z^2 \sim \chi_{(1)}^2$. Com isso,

$$\begin{aligned}
s(\Theta_0; \mathbf{x}) &= 1 - P_{\mu_1} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_1)^2}{\sigma^2} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_1} \left(|Z| \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_1|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_1} \left(-\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_1|}{\sigma} \leq Z \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_1|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_1} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_1|}{\sigma} \right) + P_{\mu_1} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \mu_1|}{\sigma} \right) \\
&= 1 - P_{\mu_1} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right) + P_{\mu_1} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right) \\
&= P_{\mu_1} \left(Z \geq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right) + P_{\mu_1} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot P_{\mu_1} \left(Z \leq -\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot \Phi \left(-\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right),
\end{aligned}$$

em que $Z \sim N(0, 1)$.

C.1.1 1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta = \mu_0\}$

Neste primeiro caso, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - P_{\mu_0} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right),$$

e o s -valor por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - P_{\mu_0} \left(Z^2 \leq n \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right).$$

Logo, o s -valor é igual ao p -valor nesse caso.

C.1.2 2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta \geq \mu_0\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$

Neste segundo caso, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right),$$

e o s -valor por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2 \cdot P_{\mu_0} \left(Z \leq \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right).$$

Logo, o s -valor é duas vezes maior que o p -valor nesse caso.

C.1.3 3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu_0 \leq \theta \leq \mu_1\}$ e $\bar{x} \notin \Theta_0$

Neste terceiro caso, considerando que a conjectura proposta na Seção A.1.3 (ver Apêndice A) é verdadeira, tem-se que dividi-lo em dois casos, quando $\bar{x} < \mu_0$ ou $\bar{x} > \mu_1$.

i. $\bar{x} < \mu_0$

Nesse caso, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi \left(\frac{\max(2\mu_0 - \bar{x} - \mu_1, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) + \Phi \left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right),$$

e o s -valor por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2\Phi \left(\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} \right),$$

em que é possível isolar o termo \bar{x} em função de $s(\Theta_0; \mathbf{x})$, ou seja, $\bar{x} = \mu_0 + \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \sqrt{\sigma^2/n}$. Então, a relação entre o p -valor e o s -valor é dada por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi \left(\frac{\max \left(\mu_0 - \mu_1 - \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \sqrt{\sigma^2/n}, 0 \right)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) + \Phi \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} + \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \right).$$

ii. $\bar{x} > \mu_1$

Nesse caso, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) + \Phi \left(\frac{\min(2\mu_1 - \bar{x} - \mu_0, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right),$$

e o s -valor por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2\Phi \left(-\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - \mu_1)}{\sigma} \right),$$

em que é possível isolar o termo \bar{x} em função de $s(\Theta_0; \mathbf{x})$, ou seja, $\bar{x} = \mu_1 - \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \sqrt{\sigma^2/n}$. Então, a relação entre o p -valor e o s -valor é dada por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - \Phi \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \right) + \Phi \left(\frac{\min(\mu_1 - \mu_0 + \Phi^{-1}(s(\Theta_0; \mathbf{x})/2) \sqrt{\sigma^2/n}, 0)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right).$$

C.2 Caso normal com variância desconhecida

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. E considere que $H_0 : \theta \in \Theta_0$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$, $\Theta_0 \subseteq \Theta$ e $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

C.2.1 1º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2\}$

Neste caso, o p -valor é dado por

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)],$$

e o s -valor por

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

Logo, o s -valor é igual ao p -valor nesse caso.

C.2.2 2º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu = \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$

Para este segundo caso, o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 2[1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1)],$$

em que

$$q(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sqrt{(n-1)[c(\mathbf{x}; \Theta_0)^{-2/n} - 1]}$$

e

$$c(\mathbf{x}; \Theta_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2,$$

tal que $\lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) = [c(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{n/2}$.

O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}; \Theta_0) &= [c(\mathbf{x}; \Theta_0)]^{n/2} \\ &= \left[\frac{[q(\mathbf{x}; \Theta_0)]^2}{n-1} + 1 \right]^{-\frac{n^2}{4}} \end{aligned}$$

e

$$q(\mathbf{x}; \Theta_0) = F_t^{-1} \left(1 - \frac{p(\mathbf{x}; \Theta_0)}{2}; n-1 \right).$$

Portanto,

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T \left[\frac{n^2}{2} \ln \left[\frac{[F_t^{-1} \left(1 - \frac{p(\mathbf{x}; \Theta_0)}{2}; n-1 \right)]^2}{n-1} + 1 \right] \right].$$

C.2.3 3º caso: $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}$ e $\hat{\theta} \notin \Theta_0$

Para este terceiro caso, o p -valor é dado por:

$$p(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_t(q(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1).$$

O s -valor é dado por:

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T [T(\mathbf{x}; \Theta_0)].$$

Fazendo operações similares as estudadas na Seção C.2.2 tem-se que

$$s(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - F_T \left[\frac{n^2}{2} \ln \left[\frac{[F_t^{-1}(1 - p(\mathbf{x}; \Theta_0); n-1)]^2}{n-1} + 1 \right] \right].$$

Referências Bibliográficas

- Amisano e Giacomini (2007)** Gianni Amisano e Raffaella Giacomini. Comparing density forecasts via weighted likelihood ratio tests. *Journal of Business & Economic Statistics*, 25(2):177–190. Citado na pág. 1
- Bahadur e Raghavachari (1972)** RR Bahadur e M Raghavachari. Some asymptotic properties of likelihood ratios on general sample spaces. Em *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, páginas 129–152. Univ of California Press. Citado na pág. 6
- Blackwelder (1982)** William C Blackwelder. “proving the null hypothesis” in clinical trials. *Controlled clinical trials*, 3(4):345–353. Citado na pág. 1
- Brownlee (1965)** Kenneth Alexander Brownlee. *Statistical theory and methodology in science and engineering*, volume 150. Wiley New York. Citado na pág. 13, 15
- Casella e Berger (2002)** George Casella e Roger L Berger. *Statistical inference*, volume 2. Duxbury Pacific Grove, CA. Citado na pág. 36
- Corless et al. (1996)** Robert M Corless, Gaston H Gonnet, David EG Hare, David J Jeffrey e Donald E Knuth. On the lambertw function. *Advances in Computational mathematics*, 5(1):329–359. Citado na pág. 16, 34, 46
- Cox (1977)** David R Cox. The role of significance tests [with discussion and reply]. *Scandinavian Journal of Statistics*, páginas 49–70. Citado na pág. 2, 7, 8
- Cox e Hinkley (1974)** David R Cox e David V Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman-Hall, London. Citado na pág. 6, 9
- Diniz et al. (2012)** Marcio Diniz, Carlos AB Pereira, Adriano Polpo, Julio M Stern e Sergio Wechsler. Relationship between bayesian and frequentist significance indices. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2(2). Citado na pág. 1
- Drton (2009)** Mathias Drton. Likelihood ratio tests and singularities. *The Annals of Statistics*, páginas 979–1012. Citado na pág. 6, 7
- Dubois (2006)** Didier Dubois. Possibility theory and statistical reasoning. *Computational statistics & data analysis*, 51(1):47–69. Citado na pág. 10, 11
- Dubois e Prade (2001)** Didier Dubois e Henri Prade. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification. *Annals of mathematics and Artificial Intelligence*, 32(1-4):35–66. Citado na pág. 10, 11
- Fisher (1955)** Ronald Fisher. Statistical methods and scientific induction. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, páginas 69–78. Citado na pág. 7

- Fisher (1925)** Ronald Aylmer Fisher. *Statistical methods for research workers*. Genesis Publishing Pvt Ltd. Citado na pág. 1
- Gail e Simon (1985)** M. Gail e R. Simon. Testing for qualitative interactions between treatment effects and patient subsets. *Biometrics*, 41(2):361–372. ISSN 0006341X, 15410420. URL <http://www.jstor.org/stable/2530862>. Citado na pág. 1
- Hobbs e Hilborn (2006)** N Thompson Hobbs e Ray Hilborn. Alternatives to statistical hypothesis testing in ecology: a guide to self teaching. *Ecological Applications*, 16(1):5–19. Citado na pág. 1
- Izbicki e Esteves (2015)** Rafael Izbicki e Luís Gustavo Esteves. Logical consistency in simultaneous statistical test procedures. *Logic Journal of IGPL*, 23(5):732–758. Citado na pág. 2, 8, 9
- Izbicki et al. (2012)** Rafael Izbicki, Victor Fossaluzza, Ana Gabriela Hounie, Eduardo Yoshio Nakano e Carlos Alberto de Braganca Pereira. Testing allele homogeneity: the problem of nested hypotheses. *BMC genetics*, 13(1):103. Citado na pág. 2, 8
- Jeffreys (1961)** Harold Jeffreys. *Theory of probability*. Oxford Univeristy Press, 3 ed. Citado na pág. 1
- Katircioglu (2009)** Salih T Katircioglu. Revisiting the tourism-led-growth hypothesis for turkey using the bounds test and johansen approach for cointegration. *Tourism Management*, 30(1):17–20. Citado na pág. 1
- Lehmann (2012)** Erich L Lehmann. The fisher, neyman-peerson theories of testing hypotheses: One theory or two? Em *Selected Works of EL Lehmann*, páginas 201–208. Springer. Citado na pág. 1, 2
- Lehmann et al. (1991)** Erich Leo Lehmann, George Casella e George Casella. *Theory of point estimation*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software. Citado na pág. 1
- Loehle (1987)** Craig Loehle. Hypothesis testing in ecology: psychological aspects and the importance of theory maturation. *Quarterly Review of Biology*, 62(4):397–409. Citado na pág. 1
- Mudholkar e Chaubey (2009)** Govind S Mudholkar e Yogendra P Chaubey. On defining p-values. *Statistics & Probability Letters*, 79(18):1963–1971. Citado na pág. 1
- Neyman e Pearson (1933)** Jerzy Neyman e Egon S Pearson. The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 29, páginas 492–510. Cambridge Univ Press. Citado na pág. 1
- Olver et al. (2010)** Frank WJ Olver, Daniel W Lozier, Ronald F Boisvert e Charles W Clark. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press. Citado na pág. 16, 34, 46
- Patriota (2013)** Alexandre G Patriota. A classical measure of evidence for general null hypotheses. *Fuzzy Sets and Systems*, 233:74–88. Citado na pág. 1, 2, 5, 8, 9, 10, 11
- Pereira e Stern (1999)** Carlos Alberto de Bragança Pereira e Julio Michael Stern. Evidence and credibility: full bayesian significance test for precise hypotheses. *Entropy*, 1(4):99–110. Citado na pág. 1

- Pestman (1998)** Wiebe R Pestman. *Mathematical statistics: an introduction*, volume 1. Walter de Gruyter. Citado na pág. 13, 17
- Schervish (1996)** Mark J Schervish. P values: what they are and what they are not. *The American Statistician*, 50(3):203–206. Citado na pág. 2, 8
- Severini (2000)** Thomas A Severini. *Likelihood methods in statistics*. Citado na pág. 13
- Shi e Tao (2008)** Ning-Zhong Shi e Jian Tao. *Statistical hypothesis testing: theory and methods*. World Scientific. Citado na pág. 6, 8, 13, 15, 17
- Sprott (2000)** David A Sprott. *Statistical inference in science*. Springer, New York. Citado na pág. 9