

PROPRIEDADES DE SEGUNDA ORDEM DE PROCESSOS
ESTOCÁSTICOS PONTUAIS ESTACIONÁRIOS

ADHEMAR SANCHES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. PEDRO ALBERTO MORETTIN

- SÃO PAULO, AGOSTO DE 1977 -

À Elizete,
ao Estevão
e
aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao terminarmos este trabalho não poderíamos nos esquecer de externar os nossos agradecimentos a todos que nos ajudaram, em especial

ao Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin pela atenção e amizade com que nos orientou neste trabalho e também pelo incentivo e apoio que sempre nos tem dado;

ao Prof. Dr. Carlos Alberto Barbosa Dantas e ao Prof. Dr. Milton Luiz Kelmanson pelos valiosos comentários;

ao Prof. Dr. Odelar Leite Linhares pelo empenho em nos proporcionar excelentes condições de trabalho e também pelo incentivo constante, sempre disposto a facilitar os nossos contatos com outros centros de pesquisa;

aos colegas e amigos do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos pela amizade demonstrada e incentivo constante e pelo ótimo ambiente de trabalho;

ao Conselho Nacional de Pesquisas pelo auxílio financeiro concedido para a realização do programa de Mestrado e

à Srta. Maria José Gualtieri pelo cuidadoso trabalho de datilografia e ao Sr. José Augusto Evaristo Filho, responsável pela impressão deste trabalho.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO -----	1
1.1 - Objetivos -----	1
1.2 - Desenvolvimento histórico e notas bibliográficas ----	1
1.3 - Considerações gerais sobre processos pontuais -----	3
1.4 - Aplicações -----	4
1.5 - Conteúdo do trabalho -----	5
CAPÍTULO 2 - DEFINIÇÕES, NOTAÇÕES, NOMENCLATURA, EXEMPLOS E RESULTADOS BÁSICOS -----	8
2.1 - O vetor aleatório multivariado $\underline{N}(\Delta)$ -----	8
2.2 - Alguns exemplos de processos pontuais -----	10
2.3 - Resultados básicos -----	13
2.4 - Ordem e densidade produto -----	15
CAPÍTULO 3 - PROCESSOS PONTUAIS ESTACIONÁRIOS -----	21
3.1 - Estacionaridade e espectro cumulante de ordem k ----	21
3.2 - Representação espectral -----	26
3.3 - Processo pontual regular -----	27
3.4 - Exemplos de espectros de processos pontuais -----	32
CAPÍTULO 4 - ESTIMAÇÃO -----	37
4.1 - Preliminares -----	37
4.2 - Transformada de Fourier finita -----	38
4.3 - Estimação da intensidade do processo -----	47
4.4 - O periodograma de segunda ordem -----	48
4.5 - Estimação do espectro de segunda ordem -----	50
4.6 - Estimação da função densidade produto de ordem dois e da função intensidade de segunda ordem -----	54
REFERÊNCIAS -----	61

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - OBJETIVOS

Em nosso trabalho vamos considerar eventos ocorrendo de modo aleatório, em pontos, no espaço ou no tempo. Estes processos ocorrem em muitos campos de estudo. Por exemplo, os eventos podem ser paradas de uma máquina, falhas de equipamentos, acidentes, pulsos ao longo de um nervo, plantas de uma espécie particular distribuídas em uma área, instantes de ocorrência de terremotos, etc.

O interesse básico é o de obter estimadores da razão média da ocorrência dos eventos ou então, estudar o padrão típico da ocorrência. Outro tipo de análise que se pode fazer é a análise espectral do processo, iniciada por Bartlett.

Nosso objetivo principal será o de estudar algumas propriedades de segunda ordem dos processos pontuais estacionários.

1.2 - DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

A teoria de processos estocásticos pontuais tem suas origens nas tentativas dos físicos para formular problemas gerais em Física Estatística. Von Mises (1936) estudou as propriedades de certos funcionais associados com eventos aleatórios pontuais no espaço de fases. Yvon (1937) introduziu certas funções de correlação em conexão com o estudo de um conjunto de moléculas distribuídas sobre o espaço de fases. Rice (1945) investigou as propriedades de cruzamentos nulos

de certos processos estocásticos introduzindo funções de distribuição de probabilidade que tiveram sua utilidade no estudo geral de processos pontuais. Pouco tempo depois, Hermann Wold (1948) introduziu de um modo formal a teoria de processos pontuais estacionários em conexão com as propriedades de uma sequência ordenada de pontos na reta real colocados por um mecanismo aleatório. Mais tarde, D. G. Kendall (1949), Janossy (1950) e Bhabha (1950) investigaram algumas propriedades de certos processos por eles denominados processos pontuais populacionais, com particular referência à determinação dos momentos do tamanho da população em termos de funções de correlação. Ramakrishnan (1950) estendeu o trabalho de Rice estudando as propriedades das funções de distribuição introduzidas por este. Bartlett (1954 e 1966) identificou esses processos com aqueles estudados por Wold e sugeriu também que tais processos poderiam ser estudados do ponto de vista da teoria geral de processos estocásticos. Finalmente, Moyal (1962) apresentou uma teoria geral de processos pontuais cobrindo o caso de espaços não Euclidianos. Um tratamento ligeiramente diferente da teoria de processos pontuais foi apresentado por Harris (1963) em conexão com a teoria de processos de ramificação.

A literatura existente em processos pontuais está ainda muito dispersa. Embora haja livros ou monografias sobre o assunto, quase todos colocam a teoria sob o ponto de vista de um particular problema. Sobre *processos de renovação* e algumas de suas generalizações, um interessante tratamento é dado em "*Renewal Theory*" por D.R. Cox, "*Mathematical Methods in the Theory of Queueing*" por A.Y. Khintchine e "*The Statistical Analysis of Series of Events*" por Cox e Lewis. Este último está relacionado com questões de análise estatística e desse ponto de vista desenvolve alguns aspectos da teoria descrevendo vários modelos e apresentando muitas referências. Sobre *processos de ramificação*, um interessante tratamento é dado em "*The Theory of Branching Processes*" por T.E. Harris. Uma apresentação da teoria geral de processos pontuais e aplicações, com muitas referências, está em "*Stochastic Point Processes and their Applications*" por S.K. Srinivasan. Uma série de re

centes artigos de pesquisa de vários autores, com muitas referências, está em "*Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*", editado por P.A. Lewis. Dois interessantes artigos de pesquisa referidos por quase todos os pesquisadores do assunto são apresentados por M.S. Bartlett (1963) e J.A. McFadden (1962). O primeiro refere-se à análise espectral de processos pontuais e o segundo estuda questões relativas aos intervalos entre eventos em um processo pontual estacionário. Também merece destaque um trabalho de pesquisa feito por Beutler e Lenemann (1966) apresentando uma formulação axiomática para processos pontuais. Este trabalho foi inspirado no artigo de McFadden cujos resultados são apresentados heurísticamente. Segundo Beutler e Lenemann, McFadden erroneamente conclui que num processo pontual estacionário os intervalos entre eventos necessariamente constitui um processo aleatório estacionário. Finalmente, Brillinger (1972, 1974a, 1974b, 1975a, 1975b e 1976a) apresenta uma série de artigos de pesquisa sobre o assunto. A metodologia de Brillinger tem como base a teoria de distribuições aleatórias (ou funções aleatórias generalizadas) como ele próprio esclarece na discussão do trabalho de Vere Jones (1970).

1.3 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE PROCESSOS PONTUAIS

Um processo estocástico pontual é um modelo matemático que resulta de um fenômeno como uma sequência de eventos pontuais ocorrendo de um modo aleatório no tempo. Tipicamente, há um espaço de estados T (um contínuo, usualmente, mas não necessariamente unidimensional) e um conjunto de pontos τ_n de T representando os instantes nos quais os eventos ocorrem. Se T é a reta real, os τ_n podem ser os instantes de ocorrência de terremotos em uma dada região (ver Vere Jones (1970)) ou os instantes nos quais carros passam num ponto fixado em uma estrada de rodagem (ver Bartlett (1963)). Se T é o plano, os τ_n podem ser pontos em uma determinada área de terra onde nascem plantas de uma particular espécie. Outros exemplos incluem eventos que podem ser os instantes nos quais uma peça de um equipamento falha e é repostada ou instantes de para

das de uma máquina, etc. . Pelo fato de uma realização de qualquer um desses fenômenos ser um conjunto de pontos no tempo ou no espaço, uma família de tais realizações é chamada um *processo pontual*.

As propriedades de um processo pontual podem ser classificadas, grosseiramente falando, em duas categorias. Por um lado estão aquelas propriedades que se relacionam com o número de pontos que caem dentro de especificados subconjuntos do espaço de estados que serão denominadas *propriedades contadoras*. Por outro lado, existem aquelas propriedades referentes aos espaços entre pontos que serão denominadas *propriedades de intervalos*, no caso de T ser a reta real. Um importante problema em processos pontuais é descobrir meios de expressar propriedades contadoras em termos de propriedades de intervalos e vice-versa. Daley e Vere Jones (1972) apresentam uma interessante seção à respeito deste assunto.

Em alguns problemas estudamos somente um tipo de evento ocorrendo no tempo. Outras vezes, entretanto, nós estudamos mais de um tipo de eventos. Um tal processo pontual denominaremos *multivariado*. Por outro lado, se mais de um parâmetro é envolvido, temos um processo *multidimensional*. Eventualmente, podemos ter um processo pontual multivariado e multidimensional. Nós nos ocuparemos do caso unidimensional.

No estudo da teoria de processos estocásticos pontuais na reta real, essencialmente três elementos básicos aparecem: (a) o *processo pontual* que consiste na sequência de pontos τ_n colocados em T de uma maneira aleatória; (b) o *processo de intervalos* caracterizado pela sequência de intervalos entre os pontos; (c) o *processo contador* que "conta" o número de pontos em especificados subconjuntos de T .

1.4 - APLICAÇÕES

A importância e a principal atração de processos pontuais está na grande variedade de aplicações. Fenômenos em diversos campos tais como a Física Estatística, crescimento populacional, comunicação e teoria de controle e pesquisa operacional tem contribuído para o desen

volvimento do assunto. Uma breve apresentação destes campos de aplicação está em Srinivasan (1974). Uma série de aplicações em problemas de confiabilidade, distribuição espacial de galáxias, epidemiologia, neurofisiologia e outros podem ser encontradas em Lewis (1972).

No campo da neurofisiologia, por exemplo, um interessante trabalho é apresentado por H.L. Bryant Jr., A. Ruiz Marcos e J.P. Segundo (1973) (ver Brillinger (1976b)). Em termos formais, o problema considerado é medir o grau de associação de pontos (eventos) de dois tipos ocorrendo de um modo aleatório no tempo. Em termos reais, o problema é investigar o comportamento de uma rede de células nervosas simples em uma lesma marinha (*Aplysia Californica*). A atividade elétrica de uma célula nervosa, na transmissão de uma informação, apresenta mudanças de voltagem que podem ser registradas por um microeletrodo nela inserido. O registro é constituído de pulsos de grande amplitude, comparado com sua duração. Por causa de sua aparência, tal registro é frequentemente denominado uma *série de picos*. O ramo da teoria de probabilidade que estuda essas séries de picos é a teoria de processos estocásticos pontuais. Com referência ao trabalho de Bryant, Marcos e Segundo, Brillinger (1976b) discute uma medida sumária de associação que é muito útil para determinar se duas células nervosas se comportam de uma maneira relacionada ou independentemente. No final da seção 2.4 deste nosso trabalho nós estudamos outra medida de associação que também é útil neste caso.

1.5 - CONTEÚDO DO TRABALHO

Neste capítulo apresentamos os objetivos deste trabalho e também um desenvolvimento histórico do estudo da teoria de processos estocásticos pontuais. São apresentadas também algumas notas bibliográficas que constitui em parte o material de pesquisa utilizado na preparação deste trabalho. Na seção 1.3 apresentamos algumas considerações gerais sobre processos pontuais e na seção 1.4 nós discutimos sobre algumas aplicações.

O capítulo 2 compreende definições, notações, nomenclatura,

alguns exemplos de processos pontuais e resultados básicos. Na seção 2.4 nós estudamos aqueles processos pontuais nos quais os eventos não tendem a ocorrer simultaneamente. Nós denominamos tais processos de processos regulares ou ordenados, embora na literatura de processos estocásticos pontuais sejam dadas várias definições de ordem. O leitor interessado nessas definições e nas relações entre elas pode consultar Daley (1974). Considerando processos pontuais ordenados nós definimos certas funções de interesse que são estudadas nos capítulos seguintes.

O capítulo 3 refere-se a processos pontuais estacionários. Nesse capítulo nós examinamos certas expressões introduzidas na seção 2.3 do capítulo anterior sob a hipótese de estacionaridade do processo pontual e definimos o espectro cumulante de ordem k , $k = 1, 2, \dots$. Casos particulares deste são então estudados como, por exemplo, o espectro de segunda ordem e o espectro de potência. Na seção 3.2 apresentamos uma representação espectral para o processo $\underline{N}(\Delta)$, definido na seção 2.1, quando este tem incrementos estacionários e destacamos tal representação como um instrumento útil para indicar o efeito de operações lineares invariantes no tempo no processo $\underline{N}(\Delta)$. Na seção 3.3 nós consideramos processos pontuais regulares, estudamos as funções introduzidas na seção 2.4 sob a hipótese de estacionaridade e obtemos os espectros de segunda ordem e de potência de tais processos. Na seção 3.4 apresentamos dois exemplos de processos pontuais.

O capítulo 4, que é a parte principal deste trabalho, trata do problema de estimação de certos parâmetros de interesse de um processo pontual estacionário. Nós consideramos processos pontuais bivariados embora os resultados possam ser generalizados para o caso de mais de dois tipos de eventos. Na seção 4.2 nós definimos a transformada de Fourier finita, estudamos algumas de suas propriedades estocásticas e sua distribuição assintótica. A seção 4.3 trata da estimação da intensidade do processo pontual. Na seção 4.4 estudamos o periodograma de segunda ordem como uma entidade básica na construção de estimadores do espectro de segunda ordem e vemos que o periodograma não é um estimador consistente do espectro de potência. Na seção 4.5 procuramos um melhor

estimador do espectro de potência e apresentamos três procedimentos úteis. Na seção 4.6 apresentamos estimadores da função densidade produto de ordem dois e da função intensidade de segunda ordem, ambas definidas na seção 2.4.

Este trabalho é de caráter teórico sem ser, no entanto, muito formal. Alguns resultados aqui apresentados são provados com algum rigor matemático, outros são apenas discutidos e ainda há aqueles que preferimos justificar de uma forma heurística. Em algumas ocasiões fazemos referência a certos processos aleatórios com a denominação de processos "*mixing*". Tais processos são aqueles que satisfazem alguma forma de condição "*mixing*", ou seja, funcionais do processo que são bem separados no tempo são somente fracamente dependentes.

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÕES, NOTAÇÕES, NOMENCLATURA, EXEMPLOS E RESULTADOS BÁSICOS

2.1 - O VETOR ALEATÓRIO MULTIVARIADO $\underline{N}(\Delta)$

Suponha que eventos de r ($r \geq 1$) tipos estão ocorrendo no tempo. Por exemplo, estes eventos podem ser

- (1) Instantes de ocorrência de terremoto numa dada região ($r=1$).
- (2) Zeros de um processo estocástico contínuo ($r=1$).
- (3) Instantes de ocorrência de terremoto em duas regiões separadas ($r=2$).
- (4) Cruzamentos de dois níveis separados de um processo estocástico contínuo ($r=2$).

Associado com um processo pontual está o *processo contador* que "conta" o número de eventos em intervalos especificados. Em nossa notação tal processo será representado pelo vetor $r \times 1$

$$(2.1) \quad \underline{N}(\Delta) = (N_1(\Delta), \dots, N_r(\Delta))^t$$

onde $\Delta \in \mathcal{B}(R)$, a σ -álgebra de Borel na reta, e $N_\alpha(\Delta)$ denota o número de eventos do tipo α , $\alpha = 1, \dots, r$, que ocorre no intervalo real Δ . Em termos mais formais as componentes de $\underline{N}(\Delta)$ são medidas aleatórias não negativas a valores inteiros. Os pontos de crescimento de realizações de tais medidas correspondem às locações dos pontos dos tipos de interesse. Denotaremos por $N_\alpha(t)$ o número de eventos do tipo α que ocorre no intervalo real $(0, t]$ se $t > 0$, ou menos o número de eventos do tipo

a que ocorre no intervalo $[t, 0)$ se $t < 0$, isto é,

$$(2.2) \quad N_a(t) = \begin{cases} N_a(0, t] & \text{se } t > 0 \\ -N_a[t, 0) & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Uma importante propriedade é a *aditividade*, ou seja,

$$(2.3) \quad N_a(\alpha, \beta] = N_a(\alpha, \gamma] + N_a(\gamma, \beta], \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Na seqüência, usaremos a notação

$$dN_a(t) = N_a(t, t+dt]$$

denominada *notação diferencial*.

A questão da existência de $\underline{N}(\Delta)$ é resolvida definindo-se as distribuições finito-dimensionais

$$(2.4) \quad P\{N_{a_1}(\Delta_1) = n_1, \dots, N_{a_k}(\Delta_k) = n_k\}$$

$a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots$, $n_1, \dots, n_k = 0, 1, 2, \dots$, de uma maneira consistente e usando um teorema de extensão (ver Daley e Vere Jones (1972)).

Suponhamos agora que eventos de um tipo particular ocorrem no tempo e consideremos a variável aleatória $N(A)$ denotando o número de eventos em A , $A \in \mathcal{B}(R)$. Em termos dessa variável aleatória podemos definir o processo pontual como uma seqüência de variáveis aleatórias $\{\tau_n\}$, $n \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ onde

$$(2.5) \quad \tau_n = \begin{cases} t \geq 0 & \text{se } N[0, t] \leq n < N[0, t] \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \\ t < 0 & \text{se } N(t, 0) < -n \leq N[t, 0) \text{ para } n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

As variáveis aleatórias τ_n representam os instantes nos quais os eventos ocorrem e são tais que

$$\dots \leq \tau_{-2} \leq \tau_{-1} < 0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$$

Um processo também de interesse é o *processo de intervalos*,

ou seja, a sequência de intervalos entre sucessivos eventos que denotaremos por

$$X_j = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

É claro que devemos ter $X_j \geq 0$ com probabilidade 1.

Concluimos esta seção dizendo que um processo pontual fica completamente especificado se conhecermos as quantidades ξ_0, ξ_{-1} e $X_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, onde $\xi_0 = \tau_0$ e $\xi_{-1} = \tau_{-1}$ representam, respectivamente, o tempo de zero até a ocorrência do primeiro evento depois de zero e o tempo de zero até a ocorrência do primeiro evento antes de zero, como está indicado na figura 2.1.

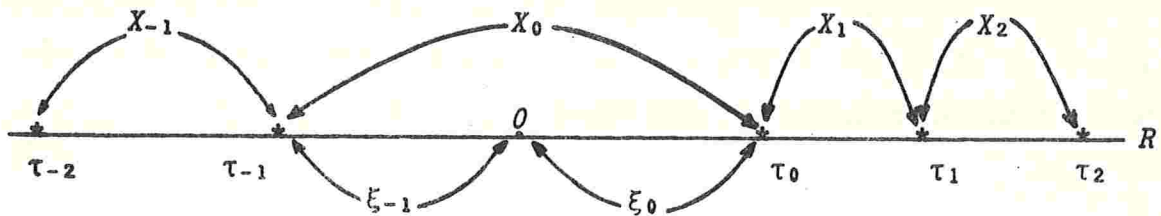


Figura 2.1

2.2 - ALGUNS EXEMPLOS DE PROCESSOS PONTUAIS

EXEMPLO 2.1 - O processo de renovação

Usualmente é definido em R_+ (conjunto dos números reais não negativos) pondo-se $\xi_0 = 0$ com probabilidade 1 e $X_j, j = 1, 2, 3, \dots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $P\{X_j \leq x\} = F(x)$ para todo j e para alguma função distribuição $F(\cdot)$ em R_+ . O processo de renovação pode ser definido em R estendendo-se essas definições para todo $j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Um processo ligeiramente diferente pode ser definido em R_+ considerando-se ξ_0 uma variável aleatória não degenerada, independente de $X_j, j = 1, 2, \dots$, e com função distribuição não necessariamente igual a F . Em tal caso teremos o *processo geral de renovação* denominado por alguns autores, (Feller, por exemplo), de *processo de renovação com retardo*. O processo geral de renovação pode ser definido em R espe

cificando-se a distribuição conjunta $H(u, v) = P\{\xi_0 \leq u, \xi_{-1} \leq v\}$ e pon-
do-se $P\{X_j \leq x\} = F(x)$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, esses X_j sendo mutuamente inde-
pendentes de ξ_i , $i = 0, -1$ (ver Daley e Vere Jones (1972)).

EXEMPLO 2.2 - O processo de Poisson não homogêneo

Suponha que eventos ocorrem de uma maneira aleatória no tem-
po. Seja $M(t)$ uma função não decrescente, não negativa e contínua à di-
reita. Um processo de Poisson não homogêneo com parâmetro $M(t)$ é carac-
terizado pela propriedade que para toda coleção finita de intervalos
disjuntos $(\alpha_1, \beta_1], \dots, (\alpha_k, \beta_k]$, as variáveis aleatórias $N(\alpha_1, \beta_1], \dots,$
 $N(\alpha_k, \beta_k]$ são independentemente distribuídas Poisson com parâmetros
 $M(\beta_1) - M(\alpha_1), \dots, M(\beta_k) - M(\alpha_k)$, respectivamente. Portanto, as distri-
buições finito dimensionais (2.4) podem ser imediatamente escritas, ou
seja,

$$(2.6) \quad P\{N(\alpha_1, \beta_1] = n_1, \dots, N(\alpha_k, \beta_k] = n_k\} = \\ = \prod_{j=1}^k \left(\frac{[M(\beta_j) - M(\alpha_j)]^{n_j}}{n_j!} \cdot e^{-[M(\beta_j) - M(\alpha_j)]} \right).$$

Se $M(t)$ é diferenciável e

$$(2.7) \quad \mu(t) = \frac{dM(t)}{dt}$$

então $\mu(t)$ é denominada a *função intensidade* do processo. Um caso espe-
cial importante é quando $\mu(t) = \mu$. Neste caso temos o *processo de*
Poisson homogêneo ou, simplesmente, o processo de Poisson e μ é denomi-
nada a *intensidade* do processo.

EXEMPLO 2.3 - O processo de Poisson duplamente estocástico

É uma generalização do processo de Poisson não homogêneo,
obtido pela consideração de $M(t)$ como um processo estocástico. Assim,

dada uma realização do processo $M(t)$, o processo pontual é um processo de Poisson não homogêneo. Este processo foi postulado por Cox (1955) para descrever a série de paradas de um tear. Cox observou que a série de paradas formava aproximadamente um processo de Poisson mas, variações aleatórias na qualidade do material fornecido ao tear causava variações na razão de paradas do tear. Este tipo de variações na razão média de ocorrência (ou intensidade) de eventos, denominado por Cox de variações estocásticas, é provavelmente comum em situações onde as séries de eventos formam aproximadamente um processo de Poisson. Outro exemplo como os processos pontuais de falhas de computadores, dependem de alguma forma de fatores como a temperatura, umidade, etc., que podem produzir variações estocásticas na razão média de paradas. Esses exemplos nos mostram que o mecanismo duplamente estocástico em um processo pontual é bastante real e provavelmente muito comum.

EXEMPLO 2.4 - Processo de Agrupamentos ("Cluster Process")

Neste processo há um processo pontual de eventos primários ou principais (núcleos ou centros de agrupamento) ocorrendo, por exemplo, nos instantes ... $\tau_{-1}, \tau_{-2}, \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ e cada evento primário gera um processo pontual subsidiário formando um agrupamento. O número de eventos em cada processo pontual subsidiário é uma variável aleatória. O processo pontual final considerado é a superposição do primário e dos subsidiários.

Um caso especial muito útil desse modelo é quando o processo pontual primário é um processo de Poisson e os processos pontuais subsidiários são processos de renovação. Bartlett (1963) utilizou esse modelo no estudo de problemas de tráfego e Lewis (1964) utilizou-o como um modelo para certo tipo de falhas de computadores sujeitos a reparos imperfeitos. Neste caso, uma falha primária é a primeira falha do sistema causada por um componente que falhou e as falhas subsidiárias são repetições das falhas do sistema que ocorrem porque o componente que falhou nem sempre é localizado e removido.

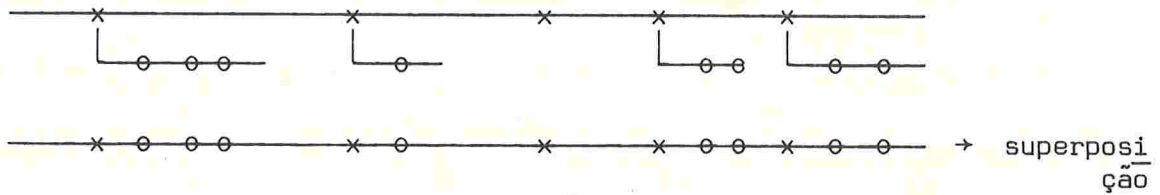


Figura 2.2

x : evento primário.
o : evento subsidiário.

2.3 - RESULTADOS BÁSICOS

SUPosição 2.1: O processo $N(\Delta)$ possui momentos de todas as ordens e existe uma função $M_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$ de variação limitada em intervalos finitos tal que

$$(2.8) \quad E\{N_{a_1}(\alpha_1, \beta_1] \dots N_{a_k}(\alpha_k, \beta_k]\} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dM_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$$

para $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots$ e $-\infty < t_1, \dots, t_k < \infty$, consistente com a aditividade (2.3).

Usando a notação diferencial introduzida na seção 2.1 podemos escrever (2.8) como

$$(2.9) \quad E\{dN_{a_1}(t_1) \dots dN_{a_k}(t_k)\} = d_{t_1} \dots d_{t_k} M_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) \\ = M_{a_1, \dots, a_k}(dt_1, \dots, dt_k).$$

Como uma consequência da suposição 2.1 e usando a fórmula expressando momentos em termos de cumulantes, segue que existe uma função $C_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$ de variação limitada em intervalos finitos tal que

$$(2.10) \quad cum\{N_{a_1}(\alpha_1, \beta_1], \dots, N_{a_k}(\alpha_k, \beta_k]\} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dC_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$$

ou em notação diferencial,

$$(2.11) \quad \text{cum}\{dN_{a_1}(t_1), \dots, dN_{a_k}(t_k)\} = d_{t_1} \dots d_{t_k} C_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) \\ = C_{a_1, \dots, a_k}(dt_1, \dots, dt_k).$$

As integrais em (2.8) e (2.10) são integrais de Riemann-Stieltjes (ver Rudin (1971), pg. 139).

Em vista de (2.9) e (2.11) e das propriedades de cumulantes (ver Brillinger (1975c)), as seguintes expressões são úteis, relacionando as funções introduzidas. Essas são,

$$(2.12) \quad E\{dN_a(t)\} = C_a(dt) = M_a(dt)$$

e

$$\text{cov}\{dN_a(t_1), dN_b(t_2)\} = C_{a,b}(dt_1, dt_2) \\ = M_{a,b}(dt_1, dt_2) - M_a(dt_1)M_b(dt_2).$$

Concluimos agora esta seção dizendo que se $\underline{N}(\Delta)$ satisfaz a suposição 2.1 e $\phi_a(t)$ é uma função limitada e contínua com suporte finito, nós podemos definir *integrais estocásticas* da forma

$$(2.13) \quad \int \phi_a(t) dN_a(t).$$

Maiores detalhes sobre essas integrais são encontrados em Cramer e Leadbetter (1967). Essas integrais têm a propriedade

$$(2.14) \quad E\left\{ \int \phi_{a_1}(t_1) dN_{a_1}(t_1) \dots \int \phi_{a_k}(t_k) dN_{a_k}(t_k) \right\} = \\ = \int \dots \int \phi_{a_1}(t_1) \dots \phi_{a_k}(t_k) M_{a_1, \dots, a_k}(dt_1, \dots, dt_k).$$

Em particular temos

$$(2.15) \quad E\left\{ \int \phi(t) dN(t) \right\} = \int \phi(t) M(dt).$$

Ainda sobre essas integrais temos que se τ_1, \dots, τ_n denotam os instantes de ocorrência de eventos do tipo a no intervalo Δ , então

$$(2.16) \quad \int_{\Delta} \phi_a(t) dN_a(t) = \sum_{j=1}^n \phi_a(\tau_j).$$

A consideração de integrais estocásticas da forma (2.13) torna claro o significado da notação diferencial, $dN_\alpha(t)$, introduzida na seção 2.1.

2.4 - ORDEM E DENSIDADE PRODUTO

Nós introduzimos agora a noção de *ordem* ou *regularidade*. Este conceito aparece naturalmente em problemas de cruzamentos de níveis (ver Leadbetter (1972)). Em muitas aplicações o processo pontual é ordenado.

Um processo pontual é dito *regular* ou *ordenado* se os eventos não tendem a ocorrer simultaneamente. Tal noção de ordem será usada para o processo pontual multivariado ($r \geq 1$) onde consideraremos indistinguíveis os eventos dos r tipos ocorrendo no tempo. Para tal processo pontual a noção de ordem ou regularidade é traduzida pela expressão

$$(2.17) \quad P\left\{ \sum_{\alpha=1}^r N_\alpha(\Delta) > 1 \right\} = o(|\Delta|^2).$$

O processo pontual de eventos de um particular tipo α , $\alpha = 1, \dots, r$, denominaremos de *processo pontual marginal* (tal denominação é empregada por Srinivasan (1974)). Diremos que o processo multivariado é *marginalmente regular* se os processos pontuais marginais são regulares. Para cada processo pontual marginal a noção de ordem é traduzida pela expressão

$$(2.18) \quad P\{N_\alpha(\Delta) > 1\} = o(|\Delta|^2).$$

Estabelecidos estes conceitos, é fácil de ver que regularidade implica em regularidade marginal, sendo que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Se denotarmos por $\underline{1}_\alpha$ o vetor r -dimensional com 1 como sua α -ésima componente e 0 (zero) para as demais nós podemos então apresentar a suposição seguinte, estabelecida por Brillinger (1972).

SUPosição 2.2: O processo $\underline{N}(\Delta)$ possui momentos de todas as ordens e é tal que se $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ são intervalos finitos disjuntos com

$|\Delta_1|, \dots, |\Delta_k| \leq \delta$, δ um número real positivo, $\delta < \infty$,

$$(2.19) \quad P\{\underline{N}(\Delta_1) = \underline{n}_1, \dots, \underline{N}(\Delta_k) = \underline{n}_k\} < K_\delta |\Delta_1|^{|\underline{n}_1|} \dots |\Delta_k|^{|\underline{n}_k|}$$

para algum número real finito K_δ e para $\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k$ tendo coordenadas inteiras não negativas. Também, se $t_j \in \Delta_j$ para tais $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ existe uma função $p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$, limitada em intervalos finitos, tal que

$$(2.20) \quad \lim_{\substack{|\Delta_1| \rightarrow 0 \\ \vdots \\ |\Delta_k| \rightarrow 0}} |\Delta_1|^{-1} \dots |\Delta_k|^{-1} P\{\underline{N}(\Delta_1) = \underline{1}_{a_1}, \dots, \underline{N}(\Delta_k) = \underline{1}_{a_k}\} = \\ = p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$$

para $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots$, uniformemente em t_1, \dots, t_k .

A função $p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$ é denominada função densidade produto de ordem k. Casos particulares dessa função incluem a densidade produto de ordem 1

$$(2.21) \quad p_a(t) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} (|\Delta|)^{-1} P\{\underline{N}(\Delta) = \underline{1}_a\}$$

também denominada função intensidade de primeira ordem, que mede a intensidade com a qual os eventos do tipo a , $a = 1, \dots, r$, ocorrem próximo de t e

$$(2.22) \quad p_{a,b}(t_1, t_2) = \lim_{\substack{|\Delta_1| \rightarrow 0 \\ |\Delta_2| \rightarrow 0}} (|\Delta_1| |\Delta_2|)^{-1} P\{\underline{N}(\Delta_1) = \underline{1}_a, \underline{N}(\Delta_2) = \underline{1}_b\}$$

denominada função densidade produto de ordem dois que é uma medida da intensidade com a qual os eventos do tipo a , $a = 1, \dots, r$, ocorrem próximo de t_1 e, simultaneamente, eventos do tipo b , $b = 1, \dots, r$, ocorrem próximo de t_2 .

A suposição 2.2 tem algumas consequências interessantes que agora mencionamos. De (2.19) temos

$$(2.23) \quad P\left\{ \sum_{\alpha=1}^r N_{\alpha}(\Delta) > 1 \right\} = o(|\Delta|^2)$$

estabelecendo que se o processo pontual multivariado é tal que $N(\Delta)$ satisfaz a suposição 2.2 então é regular. É fácil de ver de (2.23) que

$$(2.24) \quad P\{N_{\alpha}(\Delta) = 1\} = o(|\Delta|^2), \quad \alpha = 1, \dots, r$$

justificando a afirmação de que a regularidade do processo pontual multivariado implica em regularidade marginal. Temos ainda

$$(2.25) \quad P\{N_{\alpha}(\Delta) = 1\} = p_{\alpha}(t)|\Delta| + o(|\Delta|),$$

$$(2.26) \quad P\{N_{\alpha}(\Delta_1) = 1, N_{\beta}(\Delta_2) = 1\} = p_{\alpha, \beta}(t_1, t_2)|\Delta_1||\Delta_2| + o(|\Delta_1||\Delta_2|)$$

com $t_1 \neq t_2$,

$$(2.27) \quad E\{N_{\alpha}(\Delta)\} = p_{\alpha}(t)|\Delta| + o(|\Delta|), \quad \text{Var}\{N_{\alpha}(\Delta)\} = p_{\alpha}(t)|\Delta| + o(|\Delta|)$$

$$\text{e} \quad E\{[N_{\alpha}(\Delta)]^2\} = p_{\alpha}(t)|\Delta| + o(|\Delta|).$$

As conseqüências indicadas por (2.25) e (2.26) permitem novas interpretações para as funções definidas por (2.21) e (2.22), a saber,

$$(2.28) \quad p_{\alpha}(t) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} (|\Delta|)^{-1} P\{N_{\alpha}(\Delta) = 1\}$$

e

$$(2.29) \quad p_{\alpha, \beta}(t_1, t_2) = \lim_{\substack{|\Delta_1| \rightarrow 0 \\ |\Delta_2| \rightarrow 0}} (|\Delta_1||\Delta_2|)^{-1} P\{N_{\alpha}(\Delta_1) = 1, N_{\beta}(\Delta_2) = 1\}.$$

Além disso, se lembrarmos que num processo pontual regular a probabilidade de ocorrer mais de um evento num intervalo Δ é $o(|\Delta|)$, as expressões (2.28) e (2.29) podem ser escritas como

$$(2.30) \quad p_{\alpha}(t) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} (|\Delta|)^{-1} P\{\text{eventos do tipo } \alpha \text{ em } \Delta\}$$

e, para $t_1 \neq t_2$,

$$(2.31) \quad p_{a,b}(t_1, t_2) = \lim_{\substack{|\Delta_1| \rightarrow 0 \\ |\Delta_2| \rightarrow 0}} (|\Delta_1| |\Delta_2|)^{-1} P\{\text{eventos do tipo } a \text{ em } \Delta_1 \text{ e} \\ \text{eventos do tipo } b \text{ em } \Delta_2\}$$

onde a expressão "eventos do tipo ..." significa, obviamente, "um ou mais eventos do tipo ...".

Consideremos agora um intervalo real Δ e façamos $|\Delta| \rightarrow 0$. Então, se o processo pontual é tal que $\tilde{N}(\Delta)$ satisfaz a suposição 2.2, teremos essencialmente $N_a(\Delta) = 0$ ou 1 . Nas expressões (2.25), (2.26) e (2.27) as parcelas $o(|\Delta|)$ e $o(|\Delta_1| |\Delta_2|)$ tornam-se desprezíveis à medida que $|\Delta| \rightarrow 0$, $|\Delta_1| \rightarrow 0$ e $|\Delta_2| \rightarrow 0$. Usando então a notação diferencial introduzida na seção 2.1 as consequências dadas por (2.25), (2.26) e (2.27) podem ser colocadas como

$$(2.32) \quad P\{dN_a(t) = 1\} = p_a(t)dt$$

$$(2.33) \quad P\{dN_a(t_1) = 1, dN_b(t_2) = 1\} = p_{a,b}(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

com $t_1 \neq t_2$, e

$$(2.34) \quad E\{dN_a(t)\} = \text{Var}\{dN_a(t)\} = p_a(t)dt = E\{[dN_a(t)]^2\}.$$

Esta última expressão mostra, dentre outras coisas, que a função intensidade de primeira ordem, $p_a(t)$, pode ser interpretada como a derivada, em relação à t , do número esperado de eventos do tipo a , $a = 1, \dots, r$, no intervalo real $(0, t]$. De (2.33) e do fato que $dN_a(t) = 0$ ou 1 , $a = 1, \dots, r$, segue que

$$(2.35) \quad E\{dN_a(t_1)dN_b(t_2)\} = p_{a,b}(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

para $t_1 \neq t_2$. Se $t_1 = t_2 = t$ tal valor esperado é nulo para $a \neq b$ pois, o processo pontual multivariado sendo regular, temos $P\{dN_a(t) = 1, dN_b(t) = 1\} = 0$.

Nesta seção tivemos o nosso interesse concentrado nas funções densidade produto de ordens um e dois e, nesse sentido, apresenta

mos alguns resultados úteis. Para uma ordem qualquer k , $k = 1, 2, \dots$, nós podemos escrever de uma forma geral que

$$(2.36) E\{dN_{a_1}(t_1) \dots dN_{a_k}(t_k)\} = p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$$

para t_1, \dots, t_k distintos, usando o mesmo argumento empregado para se concluir (2.35).

Certas funções que também são úteis são dadas por

$$(2.37) \quad q_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) = \\ = \sum (-1)^{l-1} (l-1)! p_{a_j; j \in v_1}(t_j; j \in v_1) \dots p_{a_j; j \in v_l}(t_j; j \in v_l)$$

onde o somatório se estende sobre todas as partições (v_1, \dots, v_l) de $\{1, \dots, k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Essas funções têm a propriedade de tender à zero quando $|t_i - t_j| \rightarrow \infty$, no caso que os incrementos de $N(t)$ tendem a se tornarem independentes conforme vão sendo bem separados no tempo.

A função $q_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$ é denominada função densidade de cumulante de ordem k e alguns casos particulares incluem, para $k = 1$, a função intensidade

$$q_a(t) = p_a(t)$$

e, para $k = 2$, a função densidade de covariância cruzada do processo $N_a(t)$ com o processo $N_b(t)$

$$q_{a,b}(t_1, t_2) = p_{a,b}(t_1, t_2) - p_a(t_1)p_b(t_2)$$

No caso particular de $a = b$ temos a função $q_{a,a}(t_1, t_2)$ que é denominada função densidade de covariância do processo $N_a(t)$. Brillinger (1972) mostra que

$$(2.38) \text{cum}\{dN_{a_1}(t_1), \dots, dN_{a_k}(t_k)\} = q_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$$

De fato, esta última relação pode ser obtida usando a fórmula expressando os momentos em termos de cumulantes e depois usando (2.36) e (2.37). Também, utilizando a função densidade produto de ordem k , Brillinger

(1972) encontra expressão para o momento

$$E\{N_{a_1}(\Delta_1) \dots N_{a_k}(\Delta_k)\}$$

e, utilizando a função densidade cumulante de ordem k , encontra expressão para o cumulante

$$\text{cum}\{N_{a_1}(\Delta_1), \dots, N_{a_k}(\Delta_k)\}.$$

Concluimos esta seção definindo a função (ver Brillinger (1975a))

$$(2.39) \quad m_{a,b}(t_1, t_2) = \lim_{|\Delta_1| \rightarrow 0} (|\Delta_1|)^{-1} P\{\text{eventos do tipo } a \text{ em } \Delta_1 \mid \text{eventos do tipo } b \text{ em } t_2\}$$

para $t_1 \in \Delta_1$, $t_1 \neq t_2$ e $a, b = 1, \dots, r$. Tal quantidade, denominada função intensidade de segunda ordem de eventos do tipo a dado eventos do tipo b , é de interesse em muitas aplicações. É fácil de ver que

$$(2.40) \quad m_{a,b}(t_1, t_2) = \frac{p_{a,b}(t_1, t_2)}{p_b(t_2)}$$

A razão $p_{a,b}(t_1, t_2)/p_b(t_2)$ fornece uma medida da intensidade com a qual os eventos do tipo a ocorrem próximo de t_1 , dado que ocorreu um evento do tipo b no instante t_2 . No caso em que os eventos do tipo a são distribuídos independentemente dos eventos do tipo b , $p_{a,b}(t_1, t_2) = p_a(t_1)p_b(t_2)$ e a razão torna-se simplesmente $p_a(t_1)$, ou seja, a função intensidade de primeira ordem.

CAPÍTULO 3

PROCESSOS PONTUAIS ESTACIONÁRIOS

3.1 - ESTACIONARIDADE E ESPECTRO CUMULANTE DE ORDEM k

O processo pontual estacionário generaliza certos aspectos do processo de renovação; em particular, os intervalos entre eventos não necessitam ser independentes e nem identicamente distribuídos (ver Beutler e Lenemann (1966)). Tal processo não é somente de interesse para seu próprio fim, mas também aplica-se a situações para as quais o processo de renovação é um modelo inadequado.

Seja $\underline{N}(\Delta)$ o processo definido na seção 2.1. Dizemos que $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário se

$$(3.1) \quad P\{N_{a_1}(\Delta_1 + t) = n_1, \dots, N_{a_k}(\Delta_k + t) = n_k\}$$

$$a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n_1, \dots, n_k = 0, 1, \dots, \quad -\infty < t < \infty$$

não depende de t , onde $\Delta + t$ denota o intervalo real $(\alpha + t, \beta + t]$ se $\Delta = (\alpha, \beta]$. Um processo pontual será dito *estacionário* se o correspondente processo contador $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário. No caso em que $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário e satisfaz a suposição 2.1, Brillinger (1972) estabelece a proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 3.1: Se $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário satisfazendo a suposição 2.1, então para $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$ e $k = 1, 2, \dots$,

$$(3.2) \quad E\{N_{a_1}(\Delta_1) \dots N_{a_k}(\Delta_k)\} = \\ = \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dM'_{a_1, \dots, a_k}(t_1 - t_k, \dots, t_{k-1} - t_k) dt_k$$

para alguma função $M'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$, $-\infty < u_j < \infty$, de variação limitada em intervalos finitos.

Prova

Sejam $M_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$ e $N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k)$ as medidas determinadas pelas coordenadas t_1, \dots, t_k e $u_1 = t_1 - t_k, \dots, u_{k-1} = t_{k-1} - t_k, t_k$, respectivamente. Utilizando a hipótese de $\tilde{N}(\Delta)$ ser estacionário e substituindo t_i por $t_i + t$, $i = 1, \dots, k$ temos que

$$M_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) = M_{a_1, \dots, a_k}(t_1 + t, \dots, t_k + t)$$

e então,

$$\begin{aligned} N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k) &= \\ &= N_{a_1, \dots, a_k}(t_1 + t - t_k - t, \dots, t_{k-1} + t - t_k - t, t_k + t) = \\ &= N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k + t) \end{aligned}$$

ou seja, se a primeira medida é invariante sob a transformação

$$t_1, \dots, t_k \rightarrow t_1 + t, \dots, t_k + t$$

então a segunda medida é invariante sob a transformação

$$t_k \rightarrow t_k + t$$

Nós vemos então que

$$\begin{aligned} N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k) - N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0) &= \\ = N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k + t) - N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t) \end{aligned}$$

Suprimindo $a_1, \dots, a_k, u_1, \dots, u_{k-1}$, esta última relação pode ser escrita como

$$N(t_k + t) = N(t_k) + N(t) - N(0).$$

Sob as condições dadas, todas as soluções desta equação funcional tem a forma

$$N(t_k) = M't_k + N(0)$$

de onde temos

$$dN_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k) = dM'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) dt_k.$$

Usando a relação (2.8) e mais uma vez a hipótese de que $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário, temos

$$\begin{aligned} E\{N_{a_1}(\Delta_1) \dots N_{a_k}(\Delta_k)\} &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dM_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) = \\ &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dM_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0). \end{aligned}$$

Mas, $N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k)$ sendo invariante sob a transformação $t_k \rightarrow t_k + t$, temos

$$\begin{aligned} N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k) &= N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k - t) = \\ &= N_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0) \text{ pondo } t = t_k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E\{N_{a_1}(\Delta_1) \dots N_{a_k}(\Delta_k)\} &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dM_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, t_k) = \\ &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dM'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) dt_k \end{aligned}$$



CONSEQUÊNCIA:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{cum}\{N_{a_1}(\Delta_1), \dots, N_{a_k}(\Delta_k)\} &= \\ &= \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_k} dC'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) dt_k \end{aligned}$$

para alguma função $C'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$ de variação limitada em intervalos finitos.

Usando a notação diferencial introduzida na seção 2.1 e os resultados (3.2) e (3.3) nós podemos escrever que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} E\{dN_{a_1}(u_1+t) \dots dN_{a_{k-1}}(u_{k-1}+t)dN_{a_k}(t)\} &= \\ &= M'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})dt \end{aligned}$$

e

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \text{cum}\{dN_{a_1}(u_1+t), \dots, dN_{a_{k-1}}(u_{k-1}+t), dN_{a_k}(t)\} &= \\ &= C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})dt. \end{aligned}$$

As relações (3.4) e (3.5) são as correspondentes à (2.9) e (2.11), respectivamente, sob a suposição de que o processo $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário. Em particular temos

$$(3.6) \quad E\{dN_a(t)\} = M'_a dt = C'_a dt$$

e

$$(3.7) \quad \text{cov}\{dN_a(t+u), dN_b(t)\} = C'_{a,b}(du)dt.$$

Os valores M'_a e C'_a representam, igualmente, o que denominamos *intensidade* (ou intensidade média, ou razão média) do processo pontual de eventos do tipo a , $a = 1, \dots, r$. Da relação (3.6) vemos que M'_a como C'_a representam a derivada, em relação a t , do número esperado de eventos.

SUPosição 3.1: O processo $\tilde{N}(\Delta)$ é estacionário satisfazendo a suposição 2.1 e $C'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$ de (3.5) satisfaz

$$(3.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (|u_1| + \dots + |u_{k-1}|) |C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})| < \infty$$

para $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$ e $k = 2, 3, \dots$.

Esta suposição tem a natureza de uma condição "mixing" nos incrementos de $\tilde{N}(t)$, isto é, incrementos que são bem separados no tempo são somente fracamente dependentes. Tal suposição nos permite definir importantes parâmetros de um processo pontual e implica que várias estatísticas de interesse são assintoticamente Gaussianas na maneira do teorema do limite central (ver Brillinger (1975c)). Definimos agora o espectro cumulante de ordem k do processo $\tilde{N}(\Delta)$ como a transformada de Fourier da função $C'_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})$ de (3.5), ou seja,

$$(3.9) \quad f_{a_1, \dots, a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})$$

para $-\infty < \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} < \infty$, $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$, $k = 2, 3, \dots$. Para completar nós colocamos, para $k=1$,

$$(3.10) \quad f_a = C'_a = M'_a$$

onde M'_a e C'_a são dados por (3.4) e (3.5). Tal como denominamos anteriormente, f_a representa a intensidade do processo pontual de eventos do tipo a . No caso particular de $k=2$ temos

$$(3.11) \quad f_{a,b}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} C'_{a,b}(du)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$ e $a, b = 1, \dots, r$, denominado o espectro de segunda or

dem. No caso especial de $a=b$ nós temos o chamado *espectro de potência*. Os espectros cumulantes de segunda ordem serão para nós de particular importância. É conveniente, por isso, colocá-los juntos, dispondo-os na forma de uma matriz de ordem $r \times r$

$$(3.12) \quad \underline{f}_{N,N}(\lambda) = [f_{a,b}(\lambda)]$$

$a, b = 1, \dots, r$, denominada *matriz densidade espectral*. Também podemos dispor os espectros de primeira ordem (ou intensidades) na forma de um vetor $r \times 1$

$$\underline{f}_N = [f_a]$$

$a = 1, \dots, r$.

3.2 - REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL

Para a representação espectral do processo $\underline{N}(\Delta)$ nós apresentamos o que é dado por Brillinger (1972). Nessa direção temos que se $\underline{N}(\Delta)$ tem *incrementos estacionários*, esse processo tem uma *representação espectral* da forma

$$(3.13) \quad \underline{N}(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\Delta} \exp\{i\lambda t\} dt \right] d\underline{z}_N(\lambda)$$

onde $\underline{z}_N(\lambda)$ satisfaz

$$(3.14) \quad E\{dZ_a(\lambda)\} = \delta(\lambda) f_a d\lambda \quad ,$$

$$(3.15) \quad cov\{dZ_a(\lambda), dZ_b(\eta)\} = \delta(\lambda-\eta) f_{a,b}(\lambda) d\lambda d\eta \quad e$$

$$(3.16) \quad cum\{dZ_{a_1}(\lambda_1), \dots, dZ_{a_k}(\lambda_k)\} = \\ = \delta(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) f_{a_1, \dots, a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \cdot d\lambda_1 \quad \dots \quad d\lambda_k.$$

Nas expressões (3.14), (3.15) e (3.16), δ é a função delta de Dirac. Se consideramos $\Delta = (0, t]$ a expressão (3.13) toma a forma

$$(3.17) \quad \underline{\underline{N}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i\lambda t} - 1}{i\lambda} \right] d\underline{\underline{Z}}_N(\lambda).$$

A representação espectral dada por (3.13) é especialmente útil para indicar o efeito de operações lineares invariantes no tempo (filtros) no processo $\underline{\underline{N}}(\Delta)$. De fato, suponha que a matriz $s \times r$, $\underline{\underline{a}}(\Delta)$, é uma função de intervalo de variação limitada, satisfazendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| |d\underline{\underline{a}}(t)| < \infty$$

e seja

$$\underline{\underline{A}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\lambda t\} d\underline{\underline{a}}(t)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. O vetor $s \times 1$, $\underline{\underline{Y}}(\Delta)$, dado por

$$\underline{\underline{Y}}(\Delta) = \underline{\underline{a}} * \underline{\underline{N}}(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{a}}(\Delta - u) d\underline{\underline{N}}(u)$$

é uma função de intervalo satisfazendo a suposição 3.1. Também, o processo $\underline{\underline{Z}}_Y(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, da representação espectral de $\underline{\underline{Y}}(\Delta)$, satisfaz

$$(3.18) \quad d\underline{\underline{Z}}_Y(\lambda) = \underline{\underline{A}}(\lambda) d\underline{\underline{Z}}_N(\lambda)$$

e, como consequência, temos que as matrizes densidade espectral de $\underline{\underline{N}}(\Delta)$ e $\underline{\underline{Y}}(\Delta)$ estão relacionadas pela expressão

$$(3.19) \quad \underline{\underline{f}}_{Y,Y}(\lambda) = \underline{\underline{A}}(\lambda) \underline{\underline{f}}_{N,N}(\lambda) \overline{\underline{\underline{A}}(\lambda)}^t.$$

Esta última relação tem forma idêntica àquela que mostra o efeito de operações lineares invariantes no tempo em matrizes densidade espectral de séries de tempo (ver Brillinger (1975c), cap. 4).

3.3 - PROCESSO PONTUAL REGULAR

Nesta seção assumimos que o processo pontual é regular, ou

seja, os eventos não tendem a ocorrer simultaneamente. Também considere as funções introduzidas na seção 2.4 e estudamos o comportamento destas quando o processo pontual é estacionário. Finalmente, obtemos o espectro de segunda ordem do processo contador e, em particular, o espectro de potência.

No processo pontual regular temos $dN(t) = 0$ ou 1 e então, de (2.9) e (2.36), podemos escrever

$$\begin{aligned} M_{a_1, \dots, a_k}^{(dt_1, \dots, dt_k)} &= E\{dN_{a_1}(t_1) \dots dN_{a_k}(t_k)\} = \\ &= p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

para t_1, \dots, t_k distintos e $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$.

No caso em que $\tilde{N}(\Delta)$ é estacionário a função densidade produto de ordem k , definida por (2.20), satisfaz

$$\begin{aligned} p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) &= p_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0) \\ &= p_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}). \end{aligned}$$

Então $p_a(t) = p_a(0)$, $a = 1, \dots, r$, ou seja, a função intensidade, que denotaremos por p_a , é constante e a função densidade produto de ordem dois, $p_{a,b}(t_1, t_2)$, depende do tempo somente através da diferença $t_1 - t_2$. Também temos (ver Brillinger (1975b))

$$\begin{aligned} M'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) dt &= \\ &= E\{dN_{a_1}(t + u_1) \dots dN_{a_{k-1}}(t + u_{k-1}) dN_{a_k}(t)\} \\ &= p_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) du_1 \dots du_{k-1} dt \end{aligned}$$

para $u_1, \dots, u_{k-1}, 0$ distintos e $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$. Alguns casos particulares desta relação incluem, para $k=1$,

$$M'_a dt = E\{dN_a(t)\} = p_a dt$$

mostrando p_a como uma outra representação da *intensidade média* do processo pontual de eventos do tipo a e, para $k=2$,

$$\begin{aligned} M'_{a,b}(du)dt &= E\{dN_a(t+u)dN_b(t)\} \\ &= p_{a,b}(u)dudt \end{aligned}$$

para $u \neq 0$ e $a, b = 1, \dots, r$.

Por outro lado, de (2.11) e (2.38), podemos escrever

$$\begin{aligned} C_{a_1, \dots, a_k}(dt_1, \dots, dt_k) &= cum\{dN_{a_1}(t_1), \dots, dN_{a_k}(t_k)\} = \\ &= q_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

para t_1, \dots, t_k distintos e $a_1, \dots, a_k = 1, \dots, r$. No caso em que $\underline{N}(\Delta)$ é estacionário, a função densidade cumulante de ordem k , dada por (2.37), é invariante no tempo e então,

$$\begin{aligned} q_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) &= q_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}, 0) \\ &= q_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}) \end{aligned}$$

para $u_1, \dots, u_{k-1}, 0$ distintos. Também temos (ver Brillinger (1975b))

$$\begin{aligned} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})dt &= \\ &= cum\{dN_{a_1}(t+u_1) \dots dN_{a_{k-1}}(t+u_{k-1})dN_{a_k}(t)\} = \\ &= q_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})du_1 \dots du_{k-1}dt. \end{aligned}$$

O nosso objetivo, agora, é obter o espectro de segunda ordem do processo e, em particular, o espectro de potência. Em vista de (3.9) e particularmente de (3.11), nós necessitamos determinar $C'_{a,b}(du)$. Suponhamos então, primeiramente, $a \neq b$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad C'_{a,b}(du)dt &= \text{cov}\{dN_a(t+u), dN_b(t)\} \\
 &= E\{dN_a(t+u)dN_b(t)\} - E\{dN_a(t+u)\} E\{dN_b(t)\} \\
 &= [p_{a,b}(u) - p_a(t+u)p_b(t)] du dt \\
 &= [p_{a,b}(u) - p_a p_b] du dt \\
 &= q_{a,b}(u) du dt
 \end{aligned}$$

para $u \neq 0$. Para $u = 0$ temos $C'_{a,b}(du)dt = 0$ porque o processo pontual multivariado é regular. Para o caso $a = b$ temos

$$(3.21) \quad C'_{a,a}(du)dt = q_{a,a}(u) du dt$$

para $u \neq 0$. No entanto, para $u = 0$ notemos que

$$(3.22) \quad C'_{a,a}(du)dt = \text{Var}\{dN_a(t)\} = p_a dt = q_a dt$$

em vista de (2.34). Para estender (3.21) para $u = 0$ de uma maneira consistente com (3.22), Bartlett (1963), Cox e Lewis (1966) e Lewis (1970) adicionam uma componente $\delta(u)p_a$ à função densidade de covariância $q_{a,a}(u)$, onde δ é a função delta de Dirac, e então, em vista disso, nós consideramos

$$(3.23) \quad C'_{a,a}(du)dt = [\delta(u)p_a + q_{a,a}(u)] du dt.$$

Suponhamos agora que a função $q_{a,b}(u)$ satisfaz a suposição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| |q_{a,b}(u)| du < \infty$$

para $a, b = 1, \dots, r$. Esta suposição é análoga à suposição 3.1 e, da mesma forma, tem o caráter de uma suposição "mixing" nos incrementos, ou seja, estes vão se tornando cada vez menos dependentes à medida que $|u|$ aumenta. Se o processo $\tilde{N}(\Delta)$ satisfaz essa suposição, então, de acordo com (3.9), o espectro de segunda ordem ou o espectro cumulante de ordem

dois é dado por

$$(3.24) \quad f_{a,b}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{a,b}(u) du$$

para $a \neq b$. Usando (3.23) segue também, de acordo com (3.9), que o espectro de potência é dado por

$$f_{a,a}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} [\delta(u)p_a + q_{a,a}(u)] du$$

para $a = 1, \dots, r$, ou

$$(3.25) \quad f_{a,a}(\lambda) = \frac{p_a}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{a,a}(u) du$$

para $a = 1, \dots, r$. Para o caso $k=1$ temos

$$f_a = p_a = q_a$$

representando, igualmente, a intensidade média do processo pontual de eventos do tipo a , $a = 1, \dots, r$. A real importância da componente $\delta(u)p_a$ adicionada à função densidade de covariância $q_{a,a}(u)$ é sua contribuição do termo constante $\frac{p_a}{2\pi}$ em todas as frequências em $f_{a,a}(\lambda)$ (ver Lewis (1970)).

O espectro de segunda ordem do processo, $f_{a,b}(\lambda)$, possui muitas das propriedades do espectro das séries de tempo ordinárias. Há entretanto algumas diferenças e, dentre essas, nós mencionamos em particular que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f_{a,a}(\lambda) = \frac{p_a}{2\pi}$$

para processos pontuais "mixing", em vez de limite zero que ocorre nas séries de tempo ordinárias "mixing", pois

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{a,a}(u) du = 0$$

pelo lema de Riemann - Lebesgue (ver Bochner e Chandrasekharan (1953), pg. 3).

3.4 - EXEMPLOS DE ESPECTROS DE PROCESSOS PONTUAIS

Consideramos aqui dois exemplos de processos pontuais e procuramos encontrar, para cada um deles, o espectro correspondente. Estes exemplos servem também para ilustrar os conceitos e definições introduzidas nas seções anteriores e, antes de apresentá-las, vamos reunir aqui alguns resultados úteis dados nessas seções.

Seja então, $\tilde{N}(t)$, $-\infty < t < \infty$, o processo definido na seção 2.1. Nas notações introduzidas na seção 2.3 temos de (2.9) e (2.11) que

$$E\{dN_a(t)\} = M_a(dt) = C_a(dt)$$

e

$$\text{cov}\{dN_a(t_1), dN_b(t_2)\} = C_{a,b}(dt_1, dt_2)$$

que no caso estacionário ficam

$$E\{dN_a(t)\} = M'_a dt = C'_a dt$$

e

$$\text{cov}\{dN_a(t+u), dN_b(t)\} = C'_{a,b}(du)dt$$

como estabelecem as relações (3.4) e (3.5) da seção 3.1. Assumindo agora que a suposição 3.1 é satisfeita nós temos de (3.9) que o espectro de segunda ordem é dado por

$$f_{a,b}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} C'_{a,b}(du)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$ e $a, b = 1, \dots, r$.

Na seção 2.4 introduzimos a noção de ordem ou regularidade e definimos pela relação (2.20) a função densidade produto de ordem k e por (2.37) a função densidade cumulante de ordem k . Nas notações introduzidas temos de (2.36) e (2.38) que

$$E\{dN_a(t)\} = p_a(t) = q_a(t)$$

e

$$\text{cov}\{dN_a(t_1), dN_b(t_2)\} = q_{a,b}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

que no caso de $\tilde{N}(\Delta)$ ser estacionário ficam

$$E\{dN_a(t)\} = p_a dt = q_a dt$$

e

$$\text{cov}\{dN_a(t+u), dN_b(t)\} = q_{a,b}(u) du dt$$

como foi visto na seção 3.3. Nas condições assumidas nessa seção, o espectro de segunda ordem é dado por

$$f_{a,b}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{a,b}(u) du$$

para $a \neq b$. O espectro de potência, que corresponde ao caso $a = b$, é dado por

$$f_{a,a}(\lambda) = \frac{p_a}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{a,a}(u) du$$

para $a = 1, \dots, r$ e $-\infty < \lambda < \infty$. Para o caso $k = 1$ colocamos

$$f_a = p_a = q_a.$$

EXEMPLO 3.1 - Processo de Poisson com intensidade μ .

Consideremos o processo de Poisson não homogêneo de parâmetro $M(t)$ do exemplo 2.2. Se $M(t)$ é diferenciável e

$$\mu(t) = \frac{dM(t)}{dt}$$

então $\mu(t)$ é a *função intensidade* do processo. O momento de k -ésima ordem do processo $dN(t)$ é

$$\begin{aligned} E\{dN(t_1) \dots dN(t_k)\} &= E\{dN(t_1)\} \dots E\{dN(t_k)\} \\ &= [M(t_1 + dt_1) - M(t_1)] \dots [M(t_k + dt_k) - M(t_k)] \\ &= dM(t_1) \dots dM(t_k) \end{aligned}$$

para t_1, \dots, t_k distintos. No caso de $M(t)$ ser diferenciável

$$E\{dN(t_1) \dots dN(t_k)\} = \mu(t_1) \dots \mu(t_k) dt_1 \dots dt_k$$

e, em particular,

$$E\{dN(t)\} = \mu(t)dt.$$

Similarmente, o cumulante de ordem k é

$$\text{cum}\{dN(t_1), \dots, dN(t_k)\} = 0$$

se algum dos t_j , $j = 1, \dots, k$, diferem. Se $t_j = t$, $j = 1, \dots, k$, então

$$\text{cum}\{dN(t_1), \dots, dN(t_k)\} = dM(t) = \mu(t)dt$$

se $M(t)$ é diferenciável.

Como vimos no exemplo 2.2, o processo de Poisson com intensidade μ corresponde ao caso onde $\mu(t) = \mu$, sendo μ uma constante. O processo de Poisson com intensidade μ é um processo estacionário regular e portanto temos $dN(t) = 0$ ou 1 . Usando então (3.25), o espectro de potência é dado por

$$\begin{aligned} f_{N,N}(\lambda) &= \frac{\mu}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} q_{N,N}(u) du \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \end{aligned}$$

pois $q_{N,N}(u) = 0$ para $u \neq 0$. Este resultado estabelece que o processo de Poisson com intensidade μ tem espectro constante. Este caso é o análogo do "ruído branco" do caso estacionário usual.

Antes de passarmos para o próximo exemplo, é instrutivo ob

servar que no caso do processo de Poisson com intensidade μ temos

$$C'_{N,N}(du)dt = cov\{dN(t+u), dN(t)\} = 0$$

para $u \neq 0$. Quando $u = 0$ temos

$$C'_{N,N}(du)dt = Var\{dN(t)\} = \mu dt$$

e da mesma forma que foi feito na seção 3.3 para se obter a expressão (3.23) temos, para todo u ,

$$C'_{N,N}(du)dt = \delta(u) \mu du dt.$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\mu(t)$.

EXEMPLO 3.2 - Processo de Poisson duplamente estocástico.

Como já vimos no exemplo 2.3, este processo é uma generalização do processo de Poisson não homogêneo, obtido pela consideração de $\mu(t)$ (quando $M(t)$ é diferenciável) como um processo estocástico. Dada uma realização do processo $\mu(t)$, o processo pontual é um processo de Poisson não homogêneo com função intensidade $\mu(t)$. Infelizmente, as propriedades analíticas desse processo são muito difíceis de serem deduzidas (ver Lawrence (1972)). Contudo, se $\mu(t)$ é um processo estocástico estacionário com média C_μ e função de autocovariância $C_{\mu,\mu}(u)$, então vários resultados podem ser obtidos. Temos

$$E\{dN(t)\} = E_\mu[E\{dN(t) \mid \mu(t)\}] = E_\mu[\mu(t)dt] = C_\mu dt.$$

Também,

$$\begin{aligned} cov\{dN(t+u), dN(t)\} &= E_\mu[cov\{dN(t+u), dN(t) \mid \mu(t)\}] + \\ &+ cov_\mu[E\{dN(t+u) \mid \mu(t)\}, E\{dN(t) \mid \mu(t)\}] = \\ &= E_\mu\{\delta(u)\mu(t)du dt\} + cov_\mu\{\mu(t+u)du, \mu(t)dt\} = \\ &= \delta(u)C_\mu du dt + C_{\mu,\mu}(u)du dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$C'_{N,N}(du)dt = \delta(u)C_{\mu}du dt + C_{\mu,\mu}(u)du dt.$$

Usando (3.9) o espectro de potência é dado por

$$f_{N,N}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} \delta(u)C_{\mu}du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} C_{\mu,\mu}(u)du$$

ou seja,

$$f_{N,N}(\lambda) = \frac{C_{\mu}}{2\pi} + f_{\mu,\mu}(\lambda)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$.

A diferença entre este resultado e o espectro obtido no exemplo anterior é o termo $f_{\mu,\mu}(\lambda)$. Aqui, $f_{N,N}(\lambda) \rightarrow \frac{C_{\mu}}{2\pi}$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$ pois, neste caso, $f_{\mu,\mu}(\lambda) \rightarrow 0$.

CAPÍTULO 4

ESTIMAÇÃO

4.1 - PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos várias propriedades assintóticas da estatística

$$\underline{d}_N^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} d\underline{N}(t)$$

baseada em um intervalo real, finito, $(0, T]$, no qual é observado um processo pontual estacionário. Tal estatística, denominada *transformada de Fourier finita*, constitui-se no elemento básico do qual serão formadas as outras estatísticas de interesse, como por exemplo, o *periodograma*. Discutimos também a estimação da intensidade do processo e do espectro de segunda ordem, em particular do espectro de potência. Na seção 4.6 assumimos que o processo é regular ou ordenado e discutimos a estimação da função densidade produto de ordem dois e da função intensidade de segunda ordem.

Em todas as nossas discussões consideraremos *processos pontuais bivariados unidimensionais*, ou seja, processos pontuais de eventos de dois tipos ocorrendo no tempo que no nosso caso é a reta real. Os resultados obtidos aqui podem ser generalizados para o caso de mais de dois tipos de eventos.

4.2 - TRANSFORMADA DE FOURIER FINITA

Suponhamos que um processo pontual bivariado é observado por um período de tempo finito, correspondente ao intervalo $(0, T]$. Definimos a *transformada de Fourier finita* como a quantidade

$$(4.1) \quad \underline{d}_N^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} d\underline{N}(t)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Para o processo pontual de um particular tipo α , $\alpha = 1, 2$, correspondente às componentes do vetor $\underline{d}_N^{(T)}(\lambda)$, temos

$$(4.2) \quad d_\alpha^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} dN_\alpha(t)$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Se os instantes de ocorrência dos eventos do tipo α , $\alpha = 1, 2$, são tais que $0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N(T)} \leq T$, então

$$(4.3) \quad d_\alpha^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} dN_\alpha(t) = \sum_{j=1}^{N(T)} \exp\{-i\lambda \tau_j\}$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Casos particulares de (4.1) e (4.2) incluem

$$(4.4) \quad \underline{d}_N^{(T)}(0) = \int_0^T d\underline{N}(t) = \underline{N}(T) \quad \text{e} \quad d_\alpha^{(T)}(0) = \int_0^T dN_\alpha(t) = N_\alpha(T).$$

Nós também definimos a quantidade

$$(4.5) \quad \delta^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} dt = \frac{\text{sen}(\lambda T/2)}{\lambda/2} \exp\{-i\lambda T/2\}$$

para $-\infty < \lambda < \infty$. Esta quantidade $\delta^{(T)}(\lambda)$ é tal que $\delta^{(T)}(\lambda) = T$ para $\lambda = 0$ e $\delta^{(T)}(2\pi s/T) = 0$ para s um inteiro diferente de zero. Ainda,

$$(4.6) \quad |\delta^{(T)}(\lambda)|^2 = \left(\frac{\text{sen}(\lambda T/2)}{\lambda/2} \right)^2$$

e então, para grandes valores de T , a quantidade $\delta^{(T)}(\lambda)$ tem considerá

vel magnitude se λ é próximo de zero e diminui quando $|\lambda|$ aumenta. Algumas propriedades estocásticas da transformada de Fourier finita são agora estudadas.

TEOREMA 4.1 - Seja $\tilde{N}(t)$ satisfazendo a suposição 3.1. Então,

a) para $a = 1, 2,$

$$(4.7) \quad E\{d_a^{(T)}(\lambda)\} = f_a \delta^{(T)}(\lambda)$$

b) para $a, b = 1, 2,$

$$(4.8) \quad \text{cov}\{d_a^{(T)}(\lambda_1), d_b^{(T)}(\lambda_2)\} = 2\pi f_{a,b}(\lambda_1) \delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) + O(1)$$

com $O(1)$ uniforme em λ_1, λ_2 quando $T \rightarrow \infty$ e

c) para $a_1, \dots, a_k = 1, 2$ e $k = 3, 4, \dots,$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \text{cum}\{d_{a_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_{a_k}^{(T)}(\lambda_k)\} = \\ = (2\pi)^{k-1} f_{a_1, \dots, a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \delta^{(T)}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + O(1) \end{aligned}$$

com $O(1)$ uniforme em $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ quando $T \rightarrow \infty$.

Prova

a) Usando (2.14) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} E\{d_a^{(T)}(\lambda)\} &= \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} E\{dN_a(t)\} = \int_0^T \exp\{-i\lambda t\} c'_a dt = \\ &= c'_a \delta^{(T)}(\lambda) = f_a \delta^{(T)}(\lambda). \end{aligned}$$

b) De (2.14) vem

$$\begin{aligned} \text{cov}\{d_a^{(T)}(\lambda_1), d_b^{(T)}(\lambda_2)\} = \\ = \int_0^T \int_0^T \exp\{-i\lambda_1 t_1\} \exp\{i\lambda_2 t_2\} \text{cov}\{dN_a(t_1), dN_b(t_2)\}. \end{aligned}$$

Usando agora (3.5) e fazendo a mudança de variáveis $u = t_1 - t_2$, $t = t_2$, temos

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad \text{cov}\{d_{\alpha}^{(T)}(\lambda_1), d_b^{(T)}(\lambda_2)\} &= \\
 &= \int_{-T}^0 \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) \int_{-u}^T \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt + \\
 &+ \int_0^T \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) \int_0^{T-u} \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt = \\
 &= \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) \int_{-\min\{u, 0\}}^{T-\max\{u, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt.
 \end{aligned}$$

Na igualdade acima, a região de integração relativa às variáveis u e t é dada pelas inequações $0 < t < T$ e $-t < u < T-t$ que, graficamente, corresponde à figura 4.1.

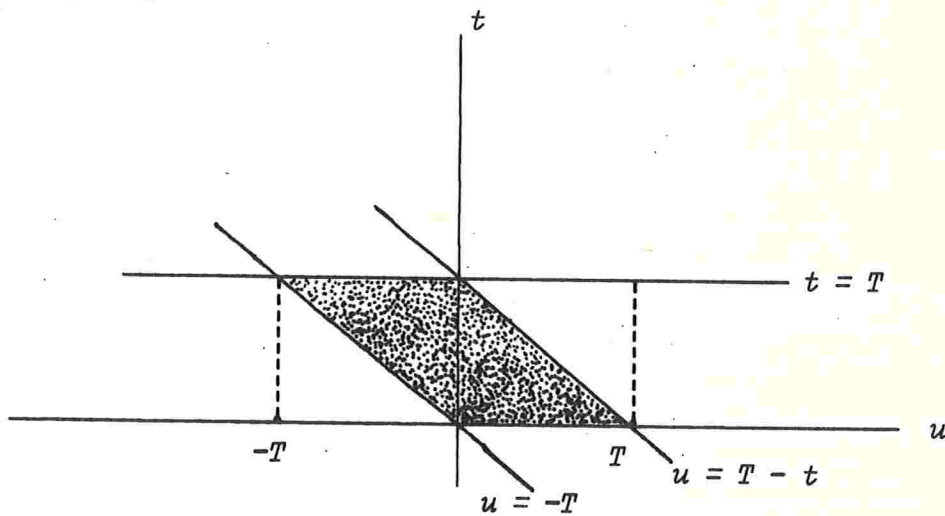


Figura 4.1

Mas

$$\left| \int_0^{-\min\{u, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt \right| \leq |u|$$

e

$$\left| \int_{T-\max\{u, 0\}}^T \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt \right| \leq |u|$$

ou seja, estas duas integrais são iguais à $O(|u|)$. Por outro lado, temos também que

$$\int_0^T \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt = \delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

e então,

$$\int_{-\min\{u, 0\}}^{T-\max\{u, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 - \lambda_2)t\} dt = \delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) + O(|u|)$$

que substituído em (4.10) nos dá

$$(4.11) \quad \text{cov}\{d_a^{(T)}(\lambda_1), d_b^{(T)}(\lambda_2)\} = \delta^{(T)}(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) + \\ + \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} O(|u|) C'_{a,b}(du).$$

Agora,

$$\left| \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} O(|u|) C'_{a,b}(du) \right| \leq \\ \leq \int_{-T}^T O(|u|) |C'_{a,b}(du)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} O(|u|) |C'_{a,b}(du)|$$

e então, pela suposição 3.1, temos

$$(4.12) \quad \left| \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} O(|u|) C'_{a,b}(du) \right| = O(1).$$

Também

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{-T} \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) + \int_T^{\infty} \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) \right| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{-T} |C'_{a,b}(du)| + \int_T^{\infty} |C'_{a,b}(du)| \leq \int_{-\infty}^{-T} T^{-1} |u| |C'_{a,b}(du)| + \\ & + \int_T^{\infty} T^{-1} |u| |C'_{a,b}(du)| \leq T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |u| |C'_{a,b}(du)| = O(T^{-1}) \end{aligned}$$

usando novamente a suposição 3.1, e então,

$$(4.13) \quad \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u\} C'_{a,b}(du) = 2\pi f_{a,b}(\lambda_1) + O(T^{-1}).$$

Finalmente, substituindo (4.12) e (4.13) em (4.11) nós obtemos (4.8).

c) Pela mesma técnica usada em (b), nós temos

$$\begin{aligned} & cum\{d_{a_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_{a_k}^{(T)}(\lambda_k)\} = \\ & = \int_0^T \dots \int_0^T \exp\{-i \sum_{j=1}^k \lambda_j t_j\} cum\{dN_{a_1}(t_1), \dots, dN_{a_k}(t_k)\}. \end{aligned}$$

Usando agora (3.5) e colocando $u_j = t_j - t_k$, $j = 1, \dots, k-1$, $t = t_k$, nós temos

$$\begin{aligned} (4.14) \quad & cum\{d_{a_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_{a_k}^{(T)}(\lambda_k)\} = \\ & = \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \exp\{-i\lambda_1 u_1 - \dots - i\lambda_{k-1} u_{k-1}\} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) \cdot \\ & \quad \cdot \int_{-\min\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}}^{T-\max\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t\} dt. \end{aligned}$$

Mas

$$\left| \int_0^{-\min\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t\} dt \right| \leq |u_1| + \dots + |u_{k-1}|$$

e

$$\left| \int_{T-\max\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}}^T \exp\{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t\} dt \right| \leq |u_1| + \dots + |u_{k-1}|$$

e então,

$$\begin{aligned} & \int_{-\min\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}}^{T-\max\{u_1, \dots, u_{k-1}, 0\}} \exp\{-i(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t\} dt = \\ & = \delta^{(T)}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) + O(|u_1| + \dots + |u_{k-1}|). \end{aligned}$$

Substituindo este último resultado em (4.14), nós temos

$$\begin{aligned} (4.15) \quad \text{cum}\{d_{a_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, d_{a_k}^{(T)}(\lambda_k)\} &= \\ &= \delta^{(T)} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) + \\ &+ \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} O\left(\sum_{j=1}^{k-1} |u_j|\right) C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}). \end{aligned}$$

Agora,


$$\begin{aligned} (4.16) \quad & \left| \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} O\left(\sum_{j=1}^{k-1} |u_j|\right) C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) \right| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} O\left(\sum_{j=1}^{k-1} |u_j|\right) |C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})| = O(1) \end{aligned}$$

pela suposição 3.1. Também

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} \dots \int_{-\infty}^{-T} \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) + \int_T^{\infty} \dots \int_T^{\infty} \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} T^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |u_j| \right) |C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1})| = O(T^{-1})$$

usando novamente a suposição 3.1, e então,

$$(4.17) \quad \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \exp\{-i \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j u_j\} C'_{a_1, \dots, a_k}(du_1, \dots, du_{k-1}) = (2\pi)^{k-1} f_{a_1, \dots, a_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) + O(T^{-1}).$$

Agora, substituindo (4.16) e (4.17) em (4.15), nós obtemos (4.9). 

Estudaremos agora a distribuição assintótica da transformada de Fourier finita. Vamos então denotar por $N_2^C(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ a distribuição normal complexa bivariada com média $\underline{\mu}$ e matriz de covariância $\underline{\Sigma} = [\Sigma_{jk}]$ (ver Brillinger (1975c)).

TEOREMA 4.2 - *Seja $\tilde{N}(t)$ satisfazendo a suposição 3.1 e suponhamos que $\lambda_j, \lambda_j \pm \lambda_k \neq 0, 1 \leq j \leq k \leq m, m$ um inteiro, $m \geq 1$. Então $\tilde{d}_N^{(T)}(\lambda_j), j = 1, \dots, m$ são variáveis aleatórias assintoticamente independentes $N_2^C(0, 2\pi T f_{\tilde{N}, N}(\lambda_j))$. Também $\tilde{d}_N^{(T)}(0)$ é assintoticamente*

$$N_2(T f_{\tilde{N}, N}, 2\pi T f_{\tilde{N}, N}^c(0)),$$

independentemente das variáveis anteriores.

Prova

Vamos mostrar que os cumulantes das transformadas de Fourier finitas, apropriadamente normalizadas, tendem para os cumulantes da

distribuição normal em questão.

De (4.7) temos

$$(4.18) \quad E\{T^{-1/2} \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j)\} = T^{-1/2} f_N \delta^{(T)}(\lambda_j).$$

Quando $T \rightarrow \infty$, tal quantidade tende a zero se $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$. Na sequência, de (4.8) temos

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \text{cov}\{T^{-1/2} \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j), T^{-1/2} \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_k)\} &= \\ &= T^{-1} \text{cov}\{\underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j), \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_k)\} = \\ &= T^{-1} 2\pi f_{N,N}(\lambda_j) \delta^{(T)}(\lambda_j - \lambda_k) + O(T^{-1}) \end{aligned}$$

que para $T \rightarrow \infty$ isto tende para zero se $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$ e, para $2\pi f_{N,N}(\lambda_j)$ se $\lambda_j = \lambda_k$ pois $\delta^{(T)}(0) = T$. Também,

$$T^{-1} \text{cov}\{\underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j), \underline{d}_N^{(T)}(-\lambda_k)\} \rightarrow 0$$

se $\lambda_j + \lambda_k \neq 0$. Finalmente, de (4.9) temos

$$\begin{aligned} T^{-\frac{m}{2}} \text{cum}\{\underline{d}_N^{(T)}(\lambda_1), \dots, \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_m)\} &= \\ &= T^{-\frac{m}{2}} (2\pi)^{m-1} f_{N, \dots, N}(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \delta^{(T)}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) + O(T^{-\frac{m}{2}}) \end{aligned}$$

que tende para zero quando $T \rightarrow \infty$ se $m > 2$ porque $\delta^{(T)}(\lambda) = O(T)$.

Provamos assim que, nas condições dadas, as variáveis aleatórias $T^{-1/2} \underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, são assintoticamente independentes $N_2^C(0, 2\pi f_{N,N}(\lambda_j))$ e conseqüentemente $\underline{d}_N^{(T)}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, são assintoticamente $N_2^C(0, 2\pi T f_{N,N}(\lambda_j))$. A independência assintótica segue de (4.19). Por um procedimento similar prova-se a segunda parte do teorema.



OBSERVAÇÃO: O teorema também é verdadeiro se os λ_j são substituídos por $\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, onde $s_j(T)$ são inteiros tais que $\lambda_j(T) \rightarrow \lambda_j$ quando $T \rightarrow \infty$.

Concluimos agora esta seção supondo que $T = JU$, J um inteiro positivo, e consideremos as quantidades

$$(4.20) \quad d_a^J(\lambda, j) = \int_{jU}^{(j+1)U} \exp\{-i\lambda t\} dN_a(t), \quad j = 0, \dots, J-1$$

$$= \sum_{jU < \tau_\alpha \leq (j+1)U} \exp\{-i\lambda \tau_\alpha\}$$

onde os τ_α representam os instantes de ocorrência dos eventos do tipo α , $\alpha = 1, 2$, no intervalo $(0, T]$. No caso em que $J = 1$ temos $U = T$ e então temos $d_a^{(T)}(\lambda)$. As quantidades $d_a^U(\lambda, j)$ são as transformadas de Fourier finitas consideradas nos subintervalos disjuntos de comprimento U do intervalo $(0, T]$.

TEOREMA 4.3 - *Seja o processo $N(t)$ satisfazendo a suposição 3.1 e suponhamos que $\lambda \neq 0$. Então $d_a^J(\lambda, j)$, $j = 0, \dots, J-1$ são variáveis aleatórias assintoticamente independentes $N_2^U(0, 2\pi U f_{N,N}(\lambda))$ quando $T \rightarrow \infty$. Também, essas variáveis nas frequências da forma $\frac{2\pi u}{U}$, são assintoticamente independentes para inteiros positivos u distintos.*

A distribuição assintótica dada neste teorema é um resultado esperado pois, para cada j , $d_a^U(\lambda, j)$ é uma transformada de Fourier finita num intervalo de comprimento U no qual o processo pontual é observado. Como tal, o comportamento assintótico dessa variável deve necessariamente ser o mesmo de $d_a^{(T)}(\lambda)$. Um fato novo que o teorema 4.3 mostra é que transformadas de Fourier finitas de mesma frequência, mas baseadas em intervalos de observação disjuntos, são assintoticamente independentes. A prova do teorema não apresenta grandes complicações.

4.3 - ESTIMAÇÃO DA INTENSIDADE DO PROCESSO

Na seção 2.4 nós introduzimos a função intensidade de primeira ordem de um processo pontual. No caso do processo pontual ser estacionário vimos, nas seções 3.1 e 3.4, que tal função é uma constante e, nesse caso, denominamos simplesmente por *intensidade* ou *intensidade média* ou *razão média de ocorrência*. Além disso, vimos também que tal parâmetro é interpretado como a derivada do número esperado de eventos no intervalo $(0, t]$. Nesta seção o nosso interesse é discutir a estimação desse parâmetro.

Suponha que no intervalo $(0, T]$ são observados $N_a(T)$ eventos do tipo a , $a = 1, 2$. De (4.1), (4.5) e (4.7) temos que

$$(4.21) \quad E\{N_a(T)\} = E\{d_a^{(T)}(0)\} = f_a \delta^{(T)}(0) = f_a T$$

sugerindo estimar $f_a = C'_a$ pela estatística

$$f_a^{(T)} = \frac{N_a(T)}{T}$$

$a = 1, 2$.

TEOREMA 4.4 - Seja $\tilde{N}(t)$ satisfazendo a suposição 3.1. Então,

a) para $a = 1, 2$,

$$(4.22) \quad E\{f_a^{(T)}\} = f_a ;$$

b) para $a, b = 1, 2$,

$$(4.23) \quad \text{cov}\{f_a^{(T)}, f_b^{(T)}\} = 2\pi T^{-1} f_{a,b}(0) + O(T^{-2}) \quad e$$

c) para $a_1, \dots, a_k = 1, 2$ e $k = 3, 4, \dots$,

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \text{cum}\{f_{a_1}^{(T)}, \dots, f_{a_k}^{(T)}\} &= \\ &= (2\pi)^{k-1} T^{-k+1} f_{a_1, \dots, a_k}(0, \dots, 0) + O(T^{-k}). \end{aligned}$$

Prova

Segue diretamente do teorema 4.1. ▨

O teorema seguinte dá a distribuição assintótica da estatística $f_N^{(T)}$.

TEOREMA 4.5 - Nas condições do teorema anterior, $f_N^{(T)}$ é assintoticamente $N_2(f_N, 2\pi T^{-1} f_{N,N}(0))$.

Prova

Segue diretamente do teorema 4.2. ▨

4.4 - O PERIODOGRAMA DE SEGUNDA ORDEM

Suponhamos que um processo pontual bivariado é observado num intervalo real $(0, T]$. O teorema 4.2 estabelece que a transformada de Fourier finita $d_N^{(T)}(\lambda)$ é assintoticamente $N_2^C(0, 2\pi T f_{N,N}(\lambda))$ para $\lambda \neq 0$ e assintoticamente $N_2(T f_N, 2\pi T f_{N,N}(\lambda))$ para $\lambda = 0$. Essas distribuições assintóticas sugerem que podemos basear estimadores de $f_{a,b}(\lambda)$, $a, b = 1, 2$, na estatística

$$(4.25) \quad I_{a,b}^{(T)}(\lambda) = (2\pi T)^{-1} d_a^{(T)}(\lambda) \overline{d_b^{(T)}(\lambda)}$$

onde $\lambda \neq 0$ e a "barra" denota o complexo conjugado. A estatística $I_{a,b}^{(T)}(\lambda)$, $a, b = 1, 2$, é denominada o *periodograma de segunda ordem*. No caso particular de $a = b$ nós temos a estatística

$$(4.26) \quad I_{a,a}^{(T)}(\lambda) = (2\pi T)^{-1} |d_a^{(T)}(\lambda)|^2$$

para $a = 1, 2$ e $\lambda \neq 0$, na qual podemos basear estimadores de $f_{a,a}(\lambda)$, $a = 1, 2$. Neste caso particular tal estatística é simplesmente denominada *periodograma*.

Apresentamos agora algumas propriedades estocásticas do periodograma de segunda ordem e, para esse fim, suponhamos que o processo $\tilde{N}(t)$ satisfaz a suposição 3.1. Nessas condições, Torres Melo (1974)

mostra que

a) para $a, b = 1, 2,$

$$(4.27) \quad E\{I_{a,b}^{(T)}(\lambda)\} = f_{a,b}(\lambda) + (2\pi T)^{-1} f_a f_b |\delta^{(T)}(\lambda)|^2 + O(T^{-1})$$

com $O(T^{-1})$ uniforme em λ .

Este resultado mostra que $I_{a,b}^{(T)}(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado para $f_{a,b}(\lambda)$, a menos que $\lambda = 0$. Torres Melo também mostra que

b) para $\lambda_j \pm \lambda_k \neq 0, \quad 1 \leq j < k \leq m,$ temos

$$(4.28) \quad \text{cum}\{I_{a_1,b_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, I_{a_m,b_m}^{(T)}(\lambda_m)\} \rightarrow 0$$

quando $T \rightarrow \infty$ e $m = 3, 4, \dots$ e

c) o periodograma não é um estimador consistente do espectro de potência $f_{a,a}(\lambda)$ pois, a variância de $I_{a,a}^{(T)}(\lambda)$, $a = 1, 2,$ não converge para zero quando T aumenta; em vez disso, tende para $f_{a,a}^2(\lambda)$.

O nosso próximo objetivo, agora, é estudar a distribuição assintótica do periodograma de segunda ordem. Entretanto, antes de fazermos isso nós definiremos um tipo de distribuição que foi introduzida por Goodman (1963).

DEFINIÇÃO 4.1 - Sejam $X_{\sim 1}, \dots, X_{\sim m}$, variáveis aleatórias independentes $N_2^C(O, \Sigma)$. Então a variável aleatória matricial 2×2

$$(4.29) \quad \underline{W} = \sum_{j=1}^m X_{\sim j} \overline{X_{\sim j}}^t$$


tem uma distribuição de Wishart complexa de dimensão 2 e m graus de liberdade que denotaremos por $W_2^C(m, \Sigma)$.

Como uma propriedade dessa distribuição pode ser mostrado que se a variável aleatória \underline{W} é distribuída como $W_2^C(m, \Sigma)$, então os elementos da diagonal principal, w_{jj} , da matriz \underline{W} são distribuídos como

$$\sum_{j,j} \chi_{2m/2}^2 \quad \text{onde } \Sigma = [\Sigma_{jk}].$$

TEOREMA 4.6 - Suponha que $\tilde{N}(t)$ satisfaz a suposição 3.1. Então $I_{\tilde{N},\tilde{N}}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, é assintoticamente $W_2^C(1, f_{\tilde{N},\tilde{N}}(\lambda))$. Além disso, se $\lambda_j \pm \lambda_k \neq 0$, $1 \leq j < k \leq m$, então $I_{\tilde{N},\tilde{N}}^{(T)}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, são assintoticamente independentes.

Prova

A primeira parte do teorema segue do teorema 4.2 e da definição 4.1. A segunda parte segue da independência assintótica dos $d_{\tilde{N}}^{(T)}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, m$, estabelecida pelo teorema 4.2. 

Em virtude da propriedade acima da distribuição de Wishart e do teorema 4.6 podemos concluir, em particular, que $I_{a,a}^{(T)}(\lambda)$ tem distribuição assintótica $f_{a,a}(\lambda) \chi_{2/2}^2$.

OBSERVAÇÃO: Este último resultado e o teorema 4.6 também são válidos para frequências $\lambda_j(T) = \frac{2\pi s_j(T)}{T} \neq 0$, $j = 1, \dots, m$, onde $s_j(T)$ é um inteiro com $\lambda_j(T) \rightarrow \lambda_j$ quando $T \rightarrow \infty$.

4.5 - ESTIMAÇÃO DO ESPECTRO DE SEGUNDA ORDEM

Vimos na seção anterior que o periodograma não é um estimador consistente do espectro de potência, a menos que $f_{a,a}(\lambda)$ seja igual a zero. O fato de a variância ser aproximadamente $f_{a,a}^2(\lambda)$, sob razoáveis condições de regularidade e mesmo quando baseado em um longo período de observação, representa uma desvantagem crítica no seu emprego como estimador do espectro de potência.

Para melhorarmos a estabilidade do periodograma e, dessa forma, construirmos um melhor estimador do espectro de potência, seguiremos os procedimentos dados por Brillinger (1972, 1974a e 1975a). Suponhamos então que um processo pontual bivariado é observado no intervalo $(0, T]$.

PROCEDIMENTO 1.

Seja

$$(4.30) \quad \tilde{I}_{N,N}^U(\lambda, j) = (2\pi U)^{-1} \frac{d_N^U(\lambda, j) \overline{d_N^U(\lambda, j)}}{t}$$

para $\lambda \neq 0$ onde $d_N^U(\lambda, j)$ tem suas componentes dadas por (4.20). Considere ramos como estimador da matriz densidade espectral, $\tilde{f}_{N,N}^U(\lambda)$, a estatística

$$(4.31) \quad \tilde{f}_{N,N}^U(\lambda) = J^{-1} \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{I}_{N,N}^U(\lambda, j).$$

Do teorema 4.3, $\tilde{f}_{N,N}^U(\lambda)$ é assintoticamente $J^{-1} W_2^C(J, \tilde{f}_{N,N}^U(\lambda))$ quando $T \rightarrow \infty$ e J permanece fixo.

Esta técnica de estimar o espectro de segunda ordem pela estatística (4.31) é mais conhecida como a *técnica de Bartlett*. Na construção de tal estatística nós consideramos os periodogramas de segunda ordem nas J subdivisões do intervalo $(0, T]$ e depois tomamos a média aritmética destes. A estatística dada por (4.31) oferece vantagem nos cálculos.

Em particular, usando (4.31), para estimarmos o espectro de potência, $f_{\alpha, \alpha}^U(\lambda)$, nós utilizamos a estatística

$$(4.32) \quad f_{\alpha, \alpha}^U(\lambda) = J^{-1} \sum_{j=0}^{J-1} I_{\alpha, \alpha}^U(\lambda, j)$$

onde $I_{\alpha, \alpha}^U(\lambda, j) = (2\pi U)^{-1} \frac{d_{\alpha}^U(\lambda, j) \overline{d_{\alpha}^U(\lambda, j)}}{t}$. A estatística $f_{\alpha, \alpha}^U(\lambda)$ é assintoticamente $f_{\alpha, \alpha}^U(\lambda) \chi_{2/2J}^2$ para J fixo quando $T \rightarrow \infty$ (ver a propriedade da distribuição de Wishart na seção 4.4). A estatística dada por (4.32), além de oferecer vantagem nos cálculos, tem também a vantagem de que suas componentes podem ser usadas para construir um teste de estacionaridade.

PROCEDIMENTO 2.

Consideremos a estatística

$$(4.33) \quad \underline{I}_{N,N}^{(T)}(\lambda) = (2\pi T)^{-1} \underline{d}_{N,N}^{(T)}(\lambda) \overline{\underline{d}_{N,N}^{(T)}(\lambda)}^t$$

e seja s_j um inteiro com $\lambda_j = 2\pi s_j/T$ distintos, diferentes de zero, não negativos e tal que $\lambda_j \rightarrow \lambda$, $j = 0, \dots, J-1$, quando $T \rightarrow \infty$. Como um estimador da matriz densidade espectral $\underline{f}_{N,N}(\lambda)$, nós consideramos a estatística

$$(4.34) \quad \underline{f}_{N,N}^{(T)}(\lambda) = J^{-1} \sum_{j=0}^{J-1} \underline{I}_{N,N}^{(T)}(2\pi s_j/T).$$

Sob as condições do teorema 4.2, a estatística $\underline{f}_{N,N}^{(T)}(\lambda)$ é assintoticamente $J^{-1} W_2^G(J, \underline{f}_{N,N}(\lambda))$.

Brillinger (1975a) observa que ambas as estatísticas sugeridas nos procedimentos 1 e 2 são assintoticamente normais se as condições limites são tais que $T \rightarrow \infty$ e $J \rightarrow \infty$, mas $J/T \rightarrow 0$.

PROCEDIMENTO 3.

O nosso objetivo aqui será construir um estimador consistente e assintoticamente normal do espectro de segunda ordem. Isso pode ser feito pela escolha de uma função peso apropriada e então, nos procedimentos anteriores, nós ponderamos de uma maneira desigual os periodogramas nas frequências consideradas.

Na construção de tal estimador, nós seguiremos o que é dado por Brillinger (1972 e 1974a) e, nesse sentido, nós começamos definindo W como uma *função peso* satisfazendo a suposição a seguir.

SUPOSIÇÃO 4.1 - A função peso $W(\alpha)$, $-\infty < \alpha < \infty$, é real, par, zero para $|\alpha| > \frac{1}{2}$, de variação limitada e tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha) d\alpha = 1.$$

Consideremos agora uma sequência de *parâmetros de escala* (ver Brillinger (1975c), seção 5.6) não negativos B_T , $T = 1, 2, \dots$, com

as propriedades de que quando $T \rightarrow \infty$ temos $B_T \rightarrow 0$ e $B_T T \rightarrow \infty$ e seja

$$(4.35) \quad W^{(T)}(\alpha) = B_T^{-1} W(B_T^{-1} \alpha).$$

Como um estimador do espectro de segunda ordem, Brillinger (1972 e 1975a) considera a estatística

$$(4.36) \quad f_{a,b}^{(T)}(\lambda) = 2\pi T^{-1} \sum_{s \neq 0} W^{(T)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{T}\right) I_{a,b}^{(T)}\left(\frac{2\pi s}{T}\right)$$

$a, b = 1, 2$. Brillinger (1974a) mostra que

a) para $a, b = 1, 2$,

$$(4.37) \quad E\{f_{a,b}^{(T)}(\lambda)\} = f_{a,b}(\lambda) + O(B_T^2) + O(B_T^{-1} T^{-1})$$

com os termos $O(\cdot)$ uniformes em λ .

Este resultado mostra que $f_{a,b}^{(T)}(\lambda)$ é um estimador assintoticamente não viciado de $f_{a,b}(\lambda)$. Brillinger também mostra que

b) para $|\lambda_1 \pm \lambda_2| \geq B_T$ e $a_1, b_1, a_2, b_2 = 1, 2$,

$$(4.38) \quad \begin{aligned} \text{cov}\{f_{a_1, b_1}^{(T)}(\lambda_1), f_{a_2, b_2}^{(T)}(\lambda_2)\} = \\ = \left[2\pi B_T^{-1} T^{-1} \int W^2(\alpha) d\alpha \right] \left[\delta\{\lambda_1 - \lambda_2\} f_{a_1, a_2}(\lambda_1) f_{b_1, b_2}(-\lambda_1) + \right. \\ \left. + \delta\{\lambda_1 + \lambda_2\} f_{a_1, b_2}(\lambda_1) f_{b_1, a_2}(-\lambda_1) \right] + 2\pi T^{-1} f_{a_1, b_1, a_2, b_2}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_2) + \\ + O(B_T^{-2} T^{-2}) + O(B_T T^{-1}) \end{aligned}$$

se $\lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0$, com os termos $O(\cdot)$ uniformes em λ_1 e λ_2 ;

c) para $m = 1, 2, \dots$ e $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m = 1, 2$,

$$(4.39) \quad \text{cum}\{f_{a_1, b_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, f_{a_m, b_m}^{(T)}(\lambda_m)\} = O(B_T^{-m+1} T^{-m+1})$$

com o termo $O(\cdot)$ uniforme em $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ e

d) sob condições de regularidade,

$$(f_{a_1, b_1}^{(T)}(\lambda_1), \dots, f_{a_m, b_m}^{(T)}(\lambda_m))$$

é assintoticamente normal com média $(f_{a_1, b_1}(\lambda_1), \dots, f_{a_m, b_m}(\lambda_m))$ e

$$(4.40) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} B_T^{-1} \text{cov}\{f_{a_1, b_1}^{(T)}(\lambda_1), f_{a_2, b_2}^{(T)}(\lambda_2)\} = \\ = 2\pi \int W^2(\alpha) d\alpha \left[\delta\{\lambda_1 - \lambda_2\} f_{a_1, a_2}(\lambda_1) f_{b_1, b_2}(-\lambda_1) + \right. \\ \left. + \delta\{\lambda_1 + \lambda_2\} f_{a_1, b_2}(\lambda_1) f_{b_1, a_2}(-\lambda_1) \right].$$

No caso de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, o resultado (4.40) indica que

$$(4.41) \quad \text{Var}\{f_{a, b}^{(T)}(\lambda)\} \cong B_T^{-1} T^{-1} 2\pi f_{a, a}(\lambda) f_{b, b}(-\lambda) \int W^2(\alpha) d\alpha \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

e

$$\cong B_T^{-1} T^{-1} 2\pi \left| f_{a, a}(\lambda) f_{b, b}(\lambda) + f_{a, b}(\lambda) f_{b, a}(-\lambda) \right| \int W^2(\alpha) d\alpha$$

se $\lambda = 0$.

Em ambos os casos a variância de $f_{a, b}^{(T)}(\lambda)$ tende a zero quando $B_T^{-1} T^{-1} \rightarrow 0$. Este fato e o resultado (4.37) mostram que a estatística dada por (4.36) tem a propriedade

$$(4.42) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E |f_{a, b}^{(T)}(\lambda) - f_{a, b}(\lambda)|^2 = 0$$

sob as condições assumidas por Brillinger (1974a). Uma estatística que satisfaz (4.42) é denominada *consistente* (em média quadrática).

4.6 - ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE PRODUTO DE ORDEM DOIS E DA FUNÇÃO INTENSIDADE DE SEGUNDA ORDEM

Nesta seção nós assumimos que o processo pontual bivariado é regular e apresentamos procedimentos de estimação da função densidade produto de ordem dois e da função intensidade de segunda ordem. Na cons

trução de tais estimadores nós seguiremos o que é dado por Brillinger (1975a, 1975b e 1976a).

Na seção 2.4 definimos por (2.20) a função densidade produto de ordem k , $p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k)$, que no caso de o processo pontual ser estacionário tal função satisfaz a relação

$$(4.43) \quad p_{a_1, \dots, a_k}(t_1, \dots, t_k) = p_{a_1, \dots, a_k}(t_1 - t_k, \dots, t_{k-1} - t_k, 0) \\ = p_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Obviamente, conforme a nomenclatura usada na seção 2.4, casos particulares de (4.43) incluem, para $k=1$, a intensidade p_a , que é constante e, para $k=2$, a densidade produto de ordem dois, $p_{a,b}(u)$, que depende somente da diferença de tempos $t_1 - t_2$. Temos, (ver Brillinger (1975a e 1976a))

$$(4.44) \quad p_{a,b}(u) \equiv \text{Prob}\{\text{eventos do tipo } a \text{ em } (t+u, t+u+h_1] \text{ e} \\ \text{eventos do tipo } b \text{ em } (t, t+h_2]\} / (h_1 h_2)$$

para h_1 e h_2 pequenos e $u \neq 0$ e

$$(4.45) \quad p_b \equiv \text{Prob}\{\text{eventos do tipo } b \text{ em } (t, t+h]\} / h$$

para h pequeno.

Na mesma seção 2.4 definimos por (2.39) a função intensidade de segunda ordem, $m_{a,b}(t_1, t_2)$, que no caso do processo pontual ser estacionário temos

$$(4.46) \quad m_{a,b}(t_1, t_2) = m_{a,b}(t_1 - t_2) = m_{a,b}(u),$$

ou seja, tal parâmetro depende somente da diferença de tempos $t_1 - t_2$. Temos também, (ver Brillinger (1975a e 1976a))

$$(4.47) \quad m_{a,b}(u) \equiv \text{Prob}\{\text{eventos do tipo } a \text{ em } (t+u, t+u+h] \mid \text{um} \\ \text{evento do tipo } b \text{ em } t\} / h$$

para h pequeno e $u \neq 0$.

As expressões (4.44), (4.45) e (4.47) são formas equivalentes das expressões (2.31), (2.30) e (2.39), respectivamente, sob a suposição de estacionaridade do processo pontual. Da mesma forma que (2.40), temos aqui

$$(4.48) \quad m_{a,b}(u) = \frac{p_{a,b}(u)}{p_b}$$

relacionando as expressões (4.44), (4.45) e (4.47). O nosso objetivo, agora, é construir estimadores de $p_{a,b}(u)$ e $m_{a,b}(u)$.

Suponhamos então que um processo pontual de eventos de dois tipos, 1 e 2, é observado no intervalo $(0, T]$ onde $\tau_1^a, \tau_2^a, \dots$ e $\tau_1^b, \tau_2^b, \dots$ denotam os instantes de ocorrência dos eventos dos tipos a e b , $a, b = 1, 2$, respectivamente. Como estimador de p_a , $a = 1, 2$, temos $\hat{p}_a = \frac{N_a(T)}{T}$, em conexão com os resultados apresentados na seção 4.3. Agora, seja $\beta > 0$ um parâmetro de escala e $\#A$ denotando o número de elementos em um conjunto A . Com essas notações, nós consideramos a estatística

$$(4.49) \quad J_{a,b}^T(u) = \# \{(j, k) \text{ tais que } u - \beta < \tau_j^a - \tau_k^b < u + \beta \text{ e } \tau_j^a \neq \tau_k^b\}.$$

Tal estatística, do tipo histograma, é uma variável contadora que "conta" o número de eventos do tipo a no intervalo $(0, T]$ que estão numa célula de comprimento 2β e ponto médio u unidades de tempo depois de um evento do tipo b . Para exemplificar, tomemos a figura abaixo representando uma realização de um tal processo pontual no intervalo $(0, T]$ e consideremos $u = 2$, $\beta = 0,5$ e $T = 15$.

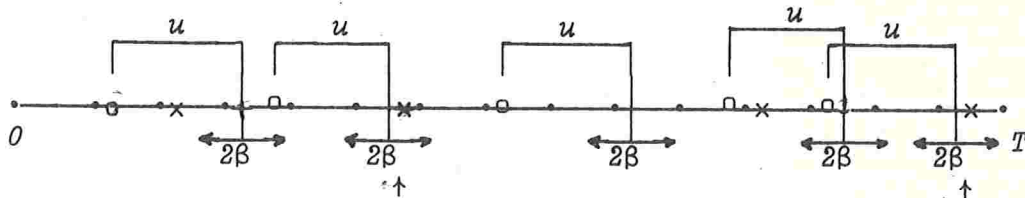


Figura 4.2

- x : evento tipo a
- o : evento tipo b

Para determinarmos o valor de $J_{a,b}^T(u)$ tomamos como origem um evento do tipo b , marcamos u unidades de tempo à direita de cada um desses eventos e o ponto obtido será o ponto médio de um intervalo de comprimento 2β . A seguir nós contamos o número de eventos do tipo a que estão nesses intervalos. Na figura 4.2 os eventos de interesse estão indicados por " \uparrow " em número de 2, e então, $J_{a,b}^T(u) = 2$.

O nosso propósito agora é apresentar a distribuição assintótica de $J_{a,b}^T(u)$ quando $T \rightarrow \infty$. Suponhamos então que o processo contador bivariado $\tilde{N}(t)$ satisfaz a condição "mixing"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |q_{a_1, \dots, a_k}(u_1, \dots, u_{k-1})| du_1 \dots du_{k-1} < \infty$$

para $a_1, \dots, a_k = 1, 2$, $k = 2, 3, \dots$, e que $p_{a,b}(\cdot)$ seja uma função contínua. Além disso, seja $J_{a,b}^T(u)$ dada por (4.49) com $\beta = \beta_T$ dependendo de T e suponhamos também que $u_k^T \rightarrow u_k$ com $|u_k^T - u_{k'}^T| \geq 2\beta_T$ para $1 \leq k < k' \leq K$. Então, quando $T \rightarrow \infty$, Brillinger (1975a) mostra que

a) se $\beta_T = \frac{L}{T}$, L fixo, as variáveis $J_{a_1, b_1}^T(u_1^T), \dots, J_{a_K, b_K}^T(u_K^T)$, $a_k, b_k = 1, 2$, são assintoticamente Poisson com médias $2\beta_T p_{a_k, b_k}(u_k)$, $k = 1, \dots, K$ e

b) se $\beta_T \rightarrow 0$, mas $\beta_T T \rightarrow \infty$, essas variáveis são assintoticamente independentes normais com variâncias $2\beta_T p_{a_k, b_k}(u_k)$, $k = 1, \dots, K$.

No resultado (a) acima, nós podemos tomar $k = 1$ e $u_1^T = u$ para vermos que $J_{a,b}^T(u)$ é assintoticamente Poisson com média $2L p_{a,b}(u)$ para $a, b = 1, 2$. As duas distribuições assintóticas dadas em (a) e (b) são consistentes para grandes valores de $\beta_T T$ porque uma variável aleatória Poisson com média suficientemente grande é aproximadamente normal. A distribuição assintótica em (a), embora interessante, não é surpreendente porque quando $\beta_T \rightarrow 0$ nós estamos contando eventos raros e, em muitas situações, variáveis que "contam" eventos raros são aproximadamente Poisson (ver, por exemplo, Feller (1968), pág. 282). A restrição

$|u_k^T - u_k^T| \geq 2\beta_T$ significa considerar $J_{a,b}^T(u)$ em celas distintas.

Os resultados (a) e (b) acima levam-nos a estimar $p_{a,b}(u)$ por

$$(4.50) \quad \hat{p}_{a,b}(u) = \frac{J_{a,b}^T(u)}{2\beta_T^T}$$

e aproximar a distribuição dessa variável por

$$(2\beta_T^T)^{-1} P(2\beta_T^T p_{a,b}(u)) \text{ ou } N(p_{a,b}(u); (2\beta_T^T)^{-1} p_{a,b}(u))$$

onde $P(\mu)$ denota a distribuição de Poisson com média μ . Ainda, com base nos resultados (a) e (b), Brillinger (1975a e 1976a) sugere estimar $m_{a,b}(u)$ por

$$(4.51) \quad \hat{m}_{a,b}(u) = \frac{J_{a,b}^T(u)}{2\beta_T N_b(T)}$$

e aproximar a distribuição dessa estatística por

$$(2\beta_T^T p_b)^{-1} P(2\beta_T^T p_{a,b}(u)) \text{ ou } N(p_{a,b}(u)/p_b; (2\beta_T^T p_b^2)^{-1} p_{a,b}(u)).$$

Podemos observar que a variável $J_{a,b}^T(u)$, envolvida nas estatísticas dadas por (4.50) e (4.51), torna-se próxima de zero para $|u|$ próximo de T , em contraste com o correspondente valor médio populacional em (a) que é próximo de $2\beta_T^T p_a p_b$ para $|u|$ grande. Este fato traz implicações de natureza semelhante para as estatísticas $\hat{p}_{a,b}(u)$ e $\hat{m}_{a,b}(u)$, sugerindo-nos considerar estimadores modificados de $p_{a,b}(u)$ e $m_{a,b}(u)$. Nesse sentido, Brillinger (1976a) apresenta, como alternativas, as estatísticas

$$(4.52) \quad \hat{p}'_{a,b}(u) = \hat{p}_{a,b}(u) + |u| N_a(T) N_b(T)/T^3$$

e

$$(4.53) \quad \hat{m}'_{a,b}(u) = \hat{m}_{a,b}(u) + |u| N_a(T)/T^2$$

para $|u| \leq T$. Para processos pontuais "mixing" as estatísticas $\hat{p}'_{a,b}(u)$ e $\hat{m}'_{a,b}(u)$ têm menor erro médio quadrático do que as estatísticas dadas por (4.50) e (4.51). O uso das estatísticas dadas por (4.52) e (4.53) é sugerido pela maneira usual de se estimar a função de covariância de um processo estacionário bivariado ordinário (ver Brillinger (1976a), seção 3).

As distribuições assintóticas das estatísticas (4.50) e (4.51) não são afetadas pela modificação para (4.52) e (4.53), respectivamente, porque os termos de correção convergem para zero em probabilidade. No entanto, em vista dos resultados (a) e (b), observamos em ambos os casos que a variância da distribuição assintótica é proporcional ao parâmetro que está sendo estimado. Essa ocorrência sugere a aplicação da *transformação raiz quadrada* para estabilizar a variância, técnica comumente empregada para variáveis contadoras.

Na aplicação da transformação raiz quadrada nós nos utilizamos do fato que se P é uma variável aleatória Poisson com média μ , então \sqrt{P} é uma variável aleatória aproximadamente normal com média $\sqrt{\mu}$ e desvio padrão $1/2$. Com esse resultado é fácil de ver que as estatísticas

$$\sqrt{\hat{p}_{a,b}(u)} \quad \text{e} \quad \sqrt{\hat{p}'_{a,b}(u)}$$

tem variâncias estáveis aproximadamente iguais a $(8\beta_T T)^{-1}$ e as estatísticas

$$\sqrt{\hat{m}_{a,b}(u)} \quad \text{e} \quad \sqrt{\hat{m}'_{a,b}(u)}$$

tem variâncias estáveis aproximadamente iguais a $(8\beta_T N_b(T))^{-1}$. A aplicação da transformação raiz quadrada oferece duas grandes vantagens: a primeira delas é que podemos usar a tabela da distribuição normal, que é extremamente útil para a construção de intervalos de confiança, e a segunda vantagem é que o desvio padrão aproximado não depende do parâmetro desconhecido.

Os resultados acima podem ser usados para estabelecer intervalos de confiança aproximados para as estimativas. No caso que o in

cremento do processo N_a é independente do incremento do processo N_b , u unidades de tempo adiante, temos $p_{a,b}(u)/p_b = p_a$. Nós poderemos examinar essa hipótese colocando num mesmo gráfico, por exemplo, as quantidades

$$\sqrt{J_{a,b}^T(u)/(2\beta_T N_b(T))}, \quad \sqrt{\hat{p}_a} \quad \text{e}$$
$$\sqrt{J_{a,b}^T(u)/(2\beta_T N_b(T))} \pm (2\beta_T N_b(T))^{-\frac{1}{2}}.$$

Este tipo de gráfico é útil para verificar se há algum grau de associação entre o processo pontual de eventos do tipo a e o processo pontual de eventos do tipo b (ver Brillinger (1975a)).

REFERÊNCIAS

- BARTLETT, M.S. (1954). "Processus stochastiques ponctuels". *Ann. Inst. H. Poincaré*, 14, 35-60.
- BARTLETT, M.S. (1963). "The spectral analysis of point processes". *JRSS*, B 32, 1-62.
- BARTLETT, M.S. (1966). *An Introduction to Stochastic Processes* (2ª edição). Cambridge University Press.
- BEUTLER, F.J. e LENEMANN, O.A.Z. (1966). "The theory of stationary point processes". *Acta Math.*, 116, 159-197.
- BOCHNER e CHANDRASEKHARAN (1953). *Fourier Transforms*. Princeton University Press.
- BRILLINGER, D.R. (1972). "The spectral analysis of stationary interval functions". *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Univ. of California Press*, 1, 483-513.
- BRILLINGER, D.R. (1974a). "Cross-spectral analysis of processes with stationary increments including the stationary G/G/∞ queue". *Ann. Probab.*, 2, 815-827.
- BRILLINGER, D.R. (1974b). "The identification of point process systems". *Ann. Probab.* (1975), vol. 3, nº 6, 909-929.

- BRILLINGER, D.R. (1975a). "Statistical inference for stationary point process". *Stochastic Process and Related Topics*, vol. I.
- BRILLINGER, D.R. (1975b). "Estimation of product densities". *Proc. Computer Science of Statistics*, 8th Annual Symposium on the Interface Health Sciences Computing Facility, UCLA.
- BRILLINGER, D.R. (1975c). *Time Series: Data Analysis and Theory*. New York, Holt, Rinehart and Wiston.
- BRILLINGER, D.R. (1976a). "Estimation of the second order intensities of a bivariate stationary point process". *JRSS*, 38, 60-66.
- BRILLINGER, D.R. (1976b). "Measuring the association of point processes: a case history". *American Mathematical Monthly*, vol. 83, pg. 16-22.
- BRYANT JR., H.L., MARCOS, A.R. e SEGUNDO, J.P. (1973). "Correlations of neuronal spike discharges produced by monosynaptic connections and by common inputs". *J. Neurophysiol.*, 36, 205-225.
- COX, D.R. (1955). "Some statistical methods connected with series of events". *JRSS*, B 17, 129-164.
- COX, D.R. e LEWIS, P.A.W. (1966). *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuen, London.
- CRAMER, H. e LEADBETTER, M.R. (1967). *Stationary and Related Stochastic Processes*. New York, Wiley.
- DALEY, D.J. e VERE JONES (1972). "A summary of the theory of point processes". *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Wiley, editado por P.A.W. Lewis, pg. 299.

- DALEY, D.J. (1974). "Various concepts of ordeliness for point processes". *Stochastic Geometry*, Wiley, New York, editado por E.F. Harding e D.G. Kendall, pg. 148.
- FELLER, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. I, 3.^a edição, Wiley, New York.
- LAWRENCE, A.J. (1972). "Some models for stationary series of univariate events". *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Wiley, editado por P.A.W. Lewis, pg. 199.
- LEADBETTER, M.R. (1972). "Point processes generated by level crossings". *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Wiley, editado por P.A.W. Lewis, pg. 436.
- LEWIS, P.A.W. (1964). "A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns". *JRSS*, B26, 398-456.
- LEWIS, P.A.W. (1970). "Remarks on the theory, computation and application of the spectral analysis of series of events". *J. Sound Vib.*, 12(3), 353-375.
- LEWIS, P.A.W. (1972). *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, Wiley.
- MC FADDEN, J.A. (1962). "On the lengths of intervals in a stationary point process". *JRSS*, B24, 364-382.
- MOYAL, J.E. (1962). "The general theory of stochastic population processes". *Acta Math.*, 108, 1-31.
- RUDIN, W. (1971). *Princípios de Análise Matemática*. Editora Univ. de Brasília.

SRINIVASAN, S.K. (1974). *Stochastic Point Processes and their Applications*. Griffin, London.

TORRES MELO, L. (1974). "*Processos Estocásticos Pontuais*". PhD Thesis, University of California, Berkeley.

VERE JONES (1970). "Stochastic models for earthquake occurrence". *JRSS*, B32, 1-62.

Incluimos ainda outras referências citadas no texto que não foram utilizadas como material de consulta que são:

BHABHA, H.J. (1950). "On the stochastic theory of continuous parametric systems and its applications to electron-photon cascades". *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A202, 301-332.

GOODMAN, N.R. (1963). "Statistical analysis based upon a certain multivariate complex Gaussian distribution". *Ann. Math. Stat.*, 34, 152-177.

HARRIS, T.E. (1963). *The Theory of Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin.

JANOSSY, L. (1950). "On the absorption of a nucleon cascade". *Proc. Roy. Irish Acad. Sc.*, A53, 181-188.

KENDALL, D.G. (1949). "Stochastic processes and population growth". *JRSS*, B11, 230-264.

RAMAKRISHNAN, A. (1950). "Stochastic processes relating to particles distributed in an infinity of states". *Proc. Camb. Phil. Soc.* 46, 595-602.

RICE, S.O. (1945). "Mathematical analysis of random noise: III e IV".
Bell. Sys. Tech. J., 25, 46-156.

VON MISES, R. (1936). "Le lois de probabilité pour les fonctions sta
tistiques". *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6, 185-209.

WOLD, H. (1948). "Sur les processus stationnaires ponctuels". *Collo
ques Internationaux, CNRS*, 13, 75-86.

YVON, J. (1937). "Fluctuations en densité". *Actualités Scientifiques
et Industrielles*. Hermann et Cie, Paris.