

ESTUDO DE ESTIMADORES DE MORTALIDADE  
E ABUNDÂNCIA ANIMAL, A PARTIR DE  
INFORMAÇÕES DE CAPTURA-ESFORÇO

Paul Gerhard Kinas

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM  
ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTATÍSTICA APLICADA  
ORIENTADOR: PROF. DR. WILTON DE OLIVEIRA BUSSAB

SÃO PAULO, DEZEMBRO, 1986

## SINOPSE

No presente trabalho são estudados modelos para estimação das taxas de mortalidade e da abundância de uma população animal, com base em informações de Captura-Esforço. A dinâmica do tamanho populacional no tempo é descrita como um processo puro de morte com taxa de morte dependente do tempo. A partir desta conceituação, são obtidos modelos de regressão, lineares e não lineares, para a estimação dos parâmetros envolvidos.

Os vários modelos são comparados entre si, bem como com a técnica de Análise de Coorte. É sugerida uma estratégia de análise, acompanhada por exemplos aplicados, para dois recursos pesqueiros da costa brasileira, com importância comercial: o Pargo (Lutyanus purpureus) e a Castanha (Umbrina canosai).

A meus pais,

Lonny e Roberto

# AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Wilton de Oliveira Bussab, pela compreensão quando da definição do tema de dissertação.

Ao Prof. Dr. Manuel Haimovici, pelas informações cedidas sobre a pesca da Castanha no Rio Grande do Sul.

Ao Prof. Dr. José Galvão Leite, pela valiosa colaboração.

Aos colegas Tabajara Lucas de Almeida e José Alberto Levy Sabaj, pelo apoio em momentos decisivos.

À minha esposa Carmen Luiza, cujo esforço e compreensão foram imprescindíveis e serão sempre impossíveis de recompensar.

A todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste trabalho, particularmente à Cármen Juliani, pela datilografia.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 - Resíduos em função dos valores estimados de  $z_{ij}$  para a regressão linear com  $(\lambda_{ij}=\lambda)$  sem ponderação, para o Pargo (L. purpureus) .. 136
- Figura 2 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para o Pargo (L. purpureus) para regressão linear com  $(\lambda_{ij}=\lambda)$  sem ponderação .. 137
- Figura 3 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com média por idade, para a regressão nº 2 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus) .... 138
- Figura 4 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com médias por idade, da regressão nº 3 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus) ..... 139
- Figura 5 - Estimativas dos coeficientes de capturabilidade  $(\lambda_j)$  com os respectivos erros padrão conforme Análise de Coorte e Regressão. Pargo (L. purpureus) ..... 140

- Figura 6 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão não-linear com  $\delta_8$ ,  $\delta_9$  e  $\delta_{11}$ . Pargo (L. purpureus) 141
- Figura 7 - Resíduos ponderados agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 2 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus) ..... 142
- Figura 8 - Resíduos ponderados agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão não-linear  $\delta_8$ ,  $\delta_9$  e  $\delta_{11}$ . Pargo (L. purpureus) ..... 143
- Figura 9 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão nº 1 da Tabela 8. Castanha (U. canosai) ..... 144
- Figura 10 - Resíduos agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 1 da Tabela 8. Castanha (U. canosai) ..... 145
- Figura 11 - Resíduos agrupados por ano, e média por idade, para a regressão nº 3 da Tabela 8. Castanha (U. canosai) ..... 146
- Figura 12 - Várias medidas do esforço anual para a pesca de Castanha (U. canosai) ..... 147

FIGURA 13 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão nº 4 onde utilizou-se o esforço em VIAGENS. Castanha (U. canosai) ..... 148

FIGURA 14 - Resíduos agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 4 com esforço medido em viagens. Castanha (U. canosai) .. 149

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 - Capturas estimadas para o Pargo (L. purpureus), em número de indivíduos, para as idades 6 a 14, juntamente com os esforços anuais (em mil anzóis/hora) para os anos 1967 a 1977 ..... 150
- Tabela 2 - Estimativas de  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $\delta_j$  ( $j=6,7,\dots,13$ ) através de vários modelos de regressão, para os dados do Pargo (L. purpureus) .. 151
- Tabela 3 - Estimativas para os coeficientes de capturabilidade por idade através de Análise de Coorte (A.C.) e pelo Modelo de Regressão (3.31), Pargo (L. purpureus) .. 152
- Tabela 4 - Estimativas de  $N_1(C)$  e dos respectivos desvios padrão, para algumas coortes de Pargo (L. purpureus) em dois modelos de regressão considerados ..... 153

<u>Tabela 5</u> - Correlações entre as estimativas $\hat{N}_1(.)$ para algumas coortes de Pargo ( <u>L. purpureus</u> ) no modelo de regressão ponderada	154
<u>Tabela 6</u> - Correlações estimadas entre alguns parâmetros de interesse para os diferentes modelos considerados na Tabela 2 para o Pargo ( <u>L. purpureus</u> )	155
<u>Tabela 7</u> - Capturas estimadas para a Castanha ( <u>Umbri- brina canosai</u> ) em número de indivíduos, para as idades 3 a 14, juntamente com diferentes medidas de esforço anual para o período de 1976 a 1983	156
<u>Tabela 8</u> - Estimativas de $\mu$ , $\lambda$ e $\delta_j$ ( $j=3,4,\dots,12$ ) através de vários modelos de regressão, para os dados da Castanha ( <u>U. Canosai</u> )	157
<u>Tabela 9</u> - Estimativas de $\hat{N}_1(C)$ e dos respectivos desvios padrão, para algumas coortes de Castanha ( <u>U. canosai</u> ) a partir da regressão nº 4 da Tabela 7	158
<u>Tabela 10</u> - Correlações estimadas entre as estimativas $\hat{N}_1(.)$ para algumas coortes de Castanha ( <u>U. canosai</u> ) no modelo de regressão nº 4 da Tabela 7	159

## S U M Á R I O

SINOPSE .....	4
LISTA DE FIGURAS .....	5
LISTA DE TABELAS .....	8
INTRODUÇÃO .....	13
1 - MODELO ESTOCÁSTICO .....	19
1.1 - Introdução .....	19
1.2 - Processo Puro de Morte (P.P.M.) .....	20
1.3 - Modelo populacional .....	23
2 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS POPULACIONAIS PARA PO- PULAÇÕES FECHADAS .....	33
2.1 - Introdução .....	33
2.2 - Estimação de $\mu$ e $\lambda$ .....	35
2.2.1 - O modelo .....	35
2.2.2 - Solução iterativa .....	40
2.2.3 - Solução com aproximação para $\ln(c_i)$ .....	41
2.2.4 - Matrizes de covariância associadas a $\underline{Y}$ ...	43
2.3 - Estimação de $N_1$ , $\mu$ e $\lambda$ .....	46
2.3.1 - O modelo .....	46

2.3.2 - Matriz de covariância associada a $\tilde{z}$ .....	49
2.3.3 - Estimaco de $N_1$ .....	51
2.4 - Comparaco entre os modelos das seoes 2.2 e 2.3 .....	52
3 - ESTIMACO DOS PARÂMETROS POPULACIONAIS PARA PO- PULAOES ABERTAS .....	55
3.1 - Introduco .....	55
3.2 - Estimaco das taxas de mortalidade .....	60
3.2.1 - Coeficiente de capturabilidade constante ..	62
3.2.2 - Coeficiente de capturabilidade variável ..	63
3.2.3 - Matriz de covariância para $\tilde{\varepsilon}_{ij}^*$ .....	64
3.3 - Estimaco de $N_1(c)$ , $\mu$ e $\lambda$ .....	68
3.3.1 - Coeficiente de capturabilidade constante .	71
3.3.2 - Coeficiente de capturabilidade variável ..	72
3.3.3 - Matriz de covariância para $\tilde{\varepsilon}^*$ .....	73
3.3.4 - Estimaco dos $N_1(c)$ .....	73
3.3.5 - Linearizaco dos modelos (3.24) e (3.25) .	74
3.4 - Os métodos de regresso e a análise de coorte	75
3.4.1 - Algoritmo para utilizaco do MR e AC ....	77
3.4.2 - Resumo das vantagens e limitacoes do MR ..	79
4 - EXEMPLOS DE APLICACO .....	81
4.1 - Introduco .....	81
4.2 - O Pargo ( <u>Lutyanus purpureus</u> , Poey) .....	82
4.3 - A Castanha ( <u>Umbrina canosai</u> ) .....	87
4.4 - Proposta de estratégia de análise .....	92

CONCLUSÃO .....	95
BIBLIOGRAFIA .....	98
ANEXOS .....	101

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos estudar alguns aspectos importantes relacionados com a dinâmica de populações animais. Particularmente, populações sujeitas à exploração pelo homem e, portanto, de interesse econômico. Os recursos pesqueiros se constituem num importante exemplo deste tipo de população. Os modelos desenvolvidos para o estudo de populações exploradas (recursos renováveis) dão ênfase à determinação dos níveis ótimos de captura sustentável, tanto do ponto de vista biológico quanto econômico (CLARK, 1976-1985; GULLAND, 1983).

A captura, por sua vez, resulta de vários fatores: (i) o tamanho inicial da população; (ii) as taxas de morte natural, crescimento, recrutamento, etc., que, em conjunto, atuam sobre a dinâmica do tamanho populacional ao longo do tempo; e (iii) o esforço empreendido na captura, bem como a eficiência deste esforço.

A formulação de modelos de avaliação das capturas exige o conhecimento de parâmetros relacionados aos fatores acima descritos. Como na prática estes parâmetros são

geralmente desconhecidos, eles precisam ser estimados por amostragem, experimentos de laboratório e informações gerais disponíveis sobre a atividade econômica de exploração do recurso; como, por exemplo, as estatísticas de pesca.

Entre os parâmetros mais importantes para o estudo da dinâmica de populações exploradas, estão:

- a) a taxa instantânea de morte natural ( $\mu$ ), definida aqui como a resultante de todas as causas de morte (predação, parasitismo, etc.), exceto a captura;
- b) a taxa instantânea de morte por captura ( $\phi$ ), resultante do esforço empreendido ( $f$ ), bem como a sua "eficiência" na captura da população de interesse ( $\lambda$ );
- c) o tamanho da população ( $N$ ) no instante em que se inicia um esforço de captura sobre a mesma.

Técnicas conhecidas por Marcação-Recaptura e Transect são freqüentemente utilizadas na estimação destes parâmetros (OTIS et alii, 1978; BURNHAM et alii, 1980).

Porém, para populações de peixes com interesse comercial, as técnicas de "Marcação-Recaptura" são, em geral, economicamente inviáveis (RICKER, 1975), enquanto as técnicas "Transect" não têm satisfeitas suposi-

ções inerentes aos modelos. Uma alternativa importante às técnicas anteriormente citadas são as técnicas Captura-Esforço (SEBER, 1973). No estudo de populações marinhas exploradas, o uso mais freqüente das informações de captura e de esforço está nos modelos de produção (GULLAND, 1983; CLARK, 1985), associados à administração de recursos renováveis, e cujo objetivo é a determinação de níveis de esforço que otimizam, por algum critério, a capacidade da produção de biomassa por uma população de interesse. No presente trabalho estudaremos modelos de "Captura-Esforço" com o objetivo de estimação de parâmetros relacionados com a dinâmica da população explorada; especificamente, a taxa de morte natural ( $\mu$ ), a eficiência do esforço ( $\lambda$ ) e, conseqüentemente, a taxa de captura,  $\phi$  e ainda o tamanho da população ( $N$ ).

Nos modelos propostos, as seguintes informações serão supostamente conhecidas:

- A) As capturas (em número de indivíduos) por estrutura etária, que representamos pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1p} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{s1} & n_{s2} & \dots & n_{sp} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{A período} \\ \text{= valores} \end{array}$$

onde  $n_{ij}$ ;  $i=1, 2, \dots, s$  e  $j=1, 2, \dots, p$  representa o número de indivíduos com idade  $j$  cap-

turados no período  $i$ ; sendo  $p$  e  $s$  o total de idades e de períodos considerados, respectivamente.

- B) Os esforços de captura para os diferentes períodos e idades, que representamos pela matriz:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{s1} & f_{s2} & \dots & f_{sp} \end{bmatrix}$$

onde  $f_{ij}$ ;  $i=1, 2, \dots, s$  e  $j=1, 2, \dots, p$  representa o esforço aplicado sobre a idade  $j$  no período  $i$ .

Considerando-se apenas a matriz de capturas  $C$ , pode ser utilizada a Análise de Coorte (VPA: Virtual Population Analysis) (POPE, 1972), que consiste num procedimento determinístico para estimar  $N_{ij}$  e  $\phi_{ij}$  (ver Anexo 6) e que é uma técnica bastante comum em Biologia Pesqueira. Doubleday (1976) propôs um método de mínimos quadrados utilizando igualmente a matriz  $C$ , para estimar os mesmos parâmetros. Tanto a análise de Coorte como o método de mínimos quadrados de Doubleday exigem o conhecimento prévio da taxa instantânea de morte natural ( $\mu$ ). No entanto, para os modelos aqui analisados, a inclusão da matriz de

esforços  $F$  permite que a taxa de morte natural ( $\mu$ ) seja um parâmetro a mais a ser estimado nos modelos.

O desenvolvimento do trabalho seguirá etapas distintas, divididas em capítulos e obedecendo à seguinte sequência:

No primeiro capítulo, apresentamos a revisão de alguns conceitos e resultados de Processos Estocásticos que serão importantes na construção dos modelos. A partir dessas propriedades, deduzimos algumas relações importantes na dinâmica de populações, para aproveitamento posterior. É interessante, neste capítulo, estabelecer-se a equivalência entre algumas expressões determinísticas, comuns no estudo da dinâmica de populações (por exemplo: equação de captura de Beverton e Holt) e sua formulação em termos de esperanças matemáticas. Conforme Chapman (1961), a formulação estocástica, embora seja mais realista que a formulação determinística — do ponto de vista teórico e de interpretação — na prática haverá pouca diferença quando houver utilização de amostras muito grandes.

No segundo capítulo, trataremos dos modelos para populações simplificadas que denominamos populações fechadas, definindo-as como populações que, partindo de um tamanho inicial  $N$ , estarão sujeitas unicamente aos fenômenos de mortalidade e de captura ao longo do estudo. Isto equivale, por exemplo, a considerar-se na matriz de

capturas  $C$  apenas uma diagonal como sendo as capturas da população; ou seja, fixados  $i=a$  e  $j=b$ , consideramos como capturas sobre uma população fechada com tamanho inicial  $N_{ab}$ , os elementos  $n_{ab}$ ,  $n_{a+1, b+1}$ ,  $n_{a+2, b+2}$ , etc. Em biologia pesqueira, esta particular população fechada será denominada de coorte ou classe anual quando os intervalos de tempo considerados são de um ano.

No terceiro capítulo ampliaremos os modelos do capítulo 2 para populações mais gerais constituídas pela sobreposição de várias coortes ou classes anuais.

No quarto capítulo, trataremos de algumas aplicações para duas populações de peixes marinhos com interesse comercial. Procuraremos também propor uma estratégia de análise de dados em função dos vários modelos disponíveis.

No quinto e último capítulo, seguem considerações gerais e conclusões sobre o presente trabalho, bem como sugestões para futura investigação.

## 1 - MODELO ESTOCÁSTICO

### 1.1 - Introdução

Um processo estocástico  $[X(t); t [0, \infty)]$  é uma família de variáveis aleatórias descrevendo um processo empírico cuja evolução é governada por leis probabilísticas.

Para o nosso propósito de estudar o tamanho de uma população, 't' será um parâmetro contínuo representando o tempo, e  $X(t)$ , uma variável aleatória discreta assumindo valores inteiros e não negativos. Portanto, nos restringimos aos processos estocásticos a parâmetro contínuo com espaço de estados discreto. A distribuição de probabilidade associada a  $X(t)$  será indicada por:

$$P(X(t) = k) = p_k(t); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e } t \geq 0$$

Chamamos atenção para o fato de que consideraremos apenas valores para t tais que  $t \geq 0$ . Frequentemente omitiremos esta informação por considerá-la conhecida e permanente a partir deste ponto.

Entre os processos estocásticos a parâmetro contí-

nuo com espaço de estados discreto incluem-se, por exemplo, os processos de nascimento e morte e os processos de Poisson, que são classes de processos estocásticos muito estudados devido às inúmeras possibilidades de aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento. No presente trabalho, trataremos de processos de nascimento e morte específicos, conhecidos por processos puros de morte, que abreviaremos por P.P.M. Passaremos à descrição mais detalhada de algumas propriedades dos P.P.M. que serão importantes no modelo populacional que proporemos adiante.

Chiang (1980) pode ser consultado para estudos mais abrangentes dos processos de nascimento e morte.

## 1.2 - Processo Puro de Morte (P.P.M.)

### Definição

Denominamos P.P.M. um processo estocástico

$$[X(t); t \in [0, \infty)]$$

cujo espaço de estados é o conjunto dos números inteiros não negativos e que verifique:

- (a)  $X(t)$  é uma função não crescente em  $t$ .
- (b) Se num instante ' $t$ ' qualquer,  $X(t) = k$  representa o número de indivíduos presentes na população no instante  $t$ , então fazemos a suposição de que estes ' $k$ ' indivíduos estão sujeitos in-

dependentemente à taxa instantânea de morte ou risco de morte  $\zeta(t)$ .

(c) Para todo  $t \in [0, \infty)$  e para todo  $h > 0$ , valem as propriedades:

$$(c.1) \quad P[X(t) - X(t+h) = 1 \mid X(t) = k] = k\zeta(t)h + o(h)$$

$$(c.2) \quad P[X(t) - X(t+h) \geq 2 \mid X(t) = k] = o(h)$$

$$(c.3) \quad P[X(t) - X(t+h) = 0 \mid X(t) = k] = 1 - k\zeta(t)h - o(h)$$

onde  $o(h)$  é uma função de  $h$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Algumas observações sobre a definição de P.P.M. que apresentamos:

(i) Os textos introdutórios sobre processos de nascimento e morte geralmente apresentam como "taxa instantânea de morte" um parâmetro  $\zeta(k)$  dependente apenas do estado ocupado pelo processo no instante  $k$ . Em casos mais gerais tratados, por exemplo, em Chiang (1980), admite-se uma taxa instantânea de morte do tipo  $\zeta(t, k)$ , ou seja, uma taxa dependente tanto do estado  $k$  ocupado pelo processo no instante  $t$ , quanto do instante  $t$  considerado.

(ii) A suposição de que os  $k$  indivíduos estão sujeitos independentemente à "taxa instantânea de morte"  $\zeta(t)$  é uma particularização dos P.P.M. de forma que  $\zeta(t, k)$

seja dado por  $k \cdot \zeta(t)$ . Isto é, no instante  $t$  a taxa de morte é proporcional ao número de indivíduos presentes na população. No caso mais simples, onde  $\zeta(t) = \zeta$ , este processo pode ser interpretado como um processo em que os indivíduos morrem independentemente uns dos outros, tal que para cada indivíduo o tempo de espera para a ocorrência da morte (a partir do instante  $t$ ) tem distribuição exponencial com parâmetro  $\zeta$ . Se no instante  $t$  houver  $k$  elementos na população, o tempo de espera para a ocorrência da próxima morte na população será dado pelo mínimo de  $k$  variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com distribuição exponencial de parâmetro  $\zeta$ . Pela propriedade E1 descrita abaixo, segue que este tempo de espera será exponencial com parâmetro  $k\zeta$ .

Apresentamos agora duas propriedades importantes para distribuições exponenciais. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em Hoel, Port e Stone (1972, p.90):

Sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  variáveis aleatórias independentes distribuídas exponencialmente tal que

$Y_i: \exp(\zeta_i)$ , ou seja:

para  $Y_i$ :

$$f_i(y) = \begin{cases} \zeta_i e^{-\zeta_i y} & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases}$$

Se definirmos a variável aleatória  $X = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ ;

onde  $X$  representa os mínimos dos valores assumidos pelas  $k$  variáveis  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ , então valem as seguintes propriedades:

$$\underline{E1} \rightarrow X: \exp\left(\sum_{i=1}^k \zeta_i\right)$$

$$\underline{E2} \rightarrow P(X = Y_j) = \frac{\zeta_j}{\sum_{i=1}^k \zeta_i}$$

Voltando ao estudo dos P.P.M., tem-se, conforme Chiang (1980) a seguinte propriedade:

Propriedade 1: Seja  $X(t)$  um P.P.M. com taxa instantânea de morte  $\zeta(t)$  e seja  $X(0)=k$  o número de indivíduos presentes no início do processo; então  $[X(t)|X(0)=K]$  terá distribuição binomial com parâmetros  $k$  e

$\exp[-\int_0^t \zeta(s) ds]$ ; ou seja:

$$P(X(t) = x | X(0) = k) = \begin{cases} \binom{k}{x} \exp[-\int_0^t \zeta(s) ds] [1 - \exp(-\int_0^t \zeta(s) ds)]^{k-x} ; \\ \quad \quad \quad x = 0, 1, \dots, k \\ 0 ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

### 1.3 - Modelo populacional

O número de indivíduos de uma população em uma área fixada será determinado pelos fatores aditivos: imigração

e recrutamento; e pelos subtrativos: emigração e mortalidade. Por recrutamento entendemos aqui o nascimento de indivíduos na população; ou, no caso de populações exploradas (por exemplo, pesca comercial), a entrada de indivíduos jovens no grupo "disponível" à atividade exploratória.

Definimos como "População Fechada" uma população que não está sujeita aos fatores de entrada e saída de indivíduos durante o período de investigação. Isto equivale à suposição de que os efeitos de migração, recrutamento e mortalidade sejam desprezíveis no período considerado. Caso contrário, trata-se de "População Aberta". Convém observar que o tamanho de uma população fechada se modifica apenas em função da captura de indivíduos quando estes não são devolvidos à população. Em experimentos de marcação, por exemplo, em que os indivíduos capturados são marcados e devolvidos à população, supostamente nada modifica o tamanho da população fechada.

No modelo populacional que será proposto aqui, consideraremos populações que sejam abertas unicamente para mortalidade. Podem ser exemplos deste tipo de população: (i) um grupo de indivíduos que foi marcado antes de iniciar-se o experimento; ii) uma "classe anual" ou "coorte" (grupo de indivíduos recrutados ao longo de determinado ano) que esteja presente nas capturas por vários anos sucessivos.

Tratando de populações exploradas, é razoável supor que indivíduos uma vez capturados não sejam mais devolvidos à população, pois serão comercializados. Por isto a captura nestes casos pode ser entendida como uma forma de mortalidade, ao lado da mortalidade natural resultante das demais causas de morte, como predação, doenças, condição ambiental, etc. Por isso trataremos de modelos estocásticos onde imaginamos que a população estará sujeita a dois tipos de morte: captura e morte natural; e que conjuntamente denominamos simplesmente de mortalidade total.

Definimos  $N(t)$  como o número de indivíduos presentes na população no instante  $t > 0$ , onde  $N(0) = N$ . Faremos a seguinte suposição sobre  $N(t)$ :

S1  $\rightarrow N(t)$  é um P.P.M. dependente do tempo com taxa de morte  $\zeta(t) = \mu + \phi(t)$ , onde  $\mu$  representa a taxa instantânea de morte natural e  $\phi(t)$  é a taxa instantânea de captura no instante  $t$ .

Consideraremos ainda que a taxa  $\phi(t)$  seja diretamente proporcional à intensidade de esforço de captura no instante  $t$ ; ou seja, definimos

$$\phi(t) = \lambda \cdot \dot{f}(t)$$

onde  $\dot{f}(t)$  representa o esforço aplicado no instante  $t$ . A constante de proporcionalidade  $\lambda$ , que denominaremos COE-

ficiente de capturabilidade pode ser interpretado como sendo a eficiência de captura associada ao esforço empreendido.

Pela Propriedade 1, segue o seguinte resultado:

Fato 1: Para qualquer  $t \geq 0$ , a variável aleatória

$$[N(t) | N(0) = N]$$

terá distribuição binomial com parâmetros  $N$  e  $\exp[-(\mu t + \lambda \int_0^t \hat{f}(s) ds)]$ , ou seja:

$$[N(t) | N(0) = N] : B(N; \exp[-(\mu t + \lambda \int_0^t \hat{f}(s) ds)])$$

Por propriedades conhecidas da distribuição binomial, tem-se então:

$$E [N(t) | N(0) = N] = N e^{-\theta(t)} \quad (1.1)$$

$$\text{Var}[N(t) | N(0) = N] = N e^{-\theta(t)} (1 - e^{-\theta(t)}) \quad (1.2)$$

onde

$$\theta(t) = \int_0^t \zeta(s) ds = \mu t + \lambda \int_0^t \hat{f}(s) ds \quad (1.3)$$

Vamos supor agora que o período de investigação possa ser subdividido em intervalos tais que:

$$\underline{S2} \Rightarrow \hat{f}(t) = \hat{f}_i \quad \text{se } t_{i-1} \leq t \leq t_i; \quad i = 1, 2, \dots$$

onde  $t_0 = 0$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = +\infty$ ; ou seja, o esforço passa

a ser considerado constante nos intervalos:

$$[t_{i-1}, t_i).$$

S3  $\rightarrow d_i = t_i - t_{i-1}$ , denota a amplitude do  $i$ -ésimo intervalo.

S4  $\rightarrow \zeta_i = \mu + \lambda \hat{f}_i$ , denota a taxa instantânea de mortalidade total no  $i$ -ésimo intervalo.

S5  $\rightarrow X(d_i) = N(t_{i-1}) - N(t_i)$ , é a variável aleatória que representa o número de indivíduos "retirados" da população (por captura e morte natural) no  $i$ -ésimo intervalo.

Definimos o esforço acumulado até o fim do  $i$ -ésimo intervalo por

$$F_i = \int_0^{t_i} f(s) ds \quad (1.4)$$

que, pelas suposições S2 e S3, será

$$F_i = \sum_{j=1}^i \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j ds \right) = \sum_{j=1}^i f_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^i \hat{f}_j d_j \quad (1.5)$$

Para uma simplificação da notação, substituiremos  $N(t_{i-1})$  por  $N_i$ , que representa o número de indivíduos na população no início do  $i$ -ésimo período. Portanto o tamanho da população no instante  $t = 0$  será representado por  $N_1$ , pois  $N = N(t_0) = N_1$ .

Por S5, podemos escrever:

$$E[X(d_i) | N_1] = E[N_i | N_1] - E[N_{i+1} | N_1] \quad (1.6)$$

E de (1.1) e (1.5), segue que:

$$E(X(d_i) | N_1) = N_1 [e^{-(\mu t_{i-1} + \lambda F_i)} - e^{-(\mu t_i + \lambda F_i)}] \quad (1.7)$$

Observando que  $F_i = F_{i-1} + d_i \overset{\circ}{f}_i$  e que

$t_i = t_{i-1} + d_i$ , podemos reescrever (1.7) pelas seguintes expressões:

$$E[X(d_i) | N_1] = N_1 e^{-(\mu t_{i-1} + \lambda F_{i-1})} (1 - e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_i) d_i}) \quad (1.8)$$

$$E[X(d_i) | N_1] = N_1 e^{-\sum_{j=1}^{i-1} \zeta_j d_j} (1 - e^{-\zeta_i d_i}) \quad (1.9)$$

Definindo  $n_i$  como o número de indivíduos capturados em  $d_i$ , podemos escrever  $n_i$  da seguinte forma:

$$n_i = \sum_{j=1}^{x(d_i)} Y_j$$

onde  $Y_j$  é uma função indicadora associada aos  $X(d_i)$  indivíduos retirados da população no período  $d_i$ , ou seja:

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o } j\text{-ésimo indivíduo tiver sido} \\ & \text{capturado} \\ 0, & \text{se o } j\text{-ésimo indivíduo tiver sofrido} \\ & \text{morte natural} \end{cases}$$

e  $j = 1, 2, \dots, X(d_i)$ .

Lembremo-nos agora que, conforme o modelo proposto, os  $N_i$  indivíduos presentes no início do  $i$ -ésimo intervalo estão sujeitos independentemente à taxa de morte

total  $\zeta_i = \mu + \phi_i$ . Vimos também que isto significa que o tempo de espera até a morte para cada indivíduo a partir de  $t_{i-1}$  até  $t_i$ , tem distribuição exponencial com parâmetro  $\zeta_i = \mu + \phi_i$ . Se representarmos por  $T$  a variável aleatória do tempo de espera, podemos escrever utilizando as propriedades E1 e E2 da distribuição exponencial:

$$T = T_M + T_C$$

onde:

$$T: \exp(\mu + \phi_i)$$

$$T_M: \exp(\mu)$$

$$T_C: \exp(\phi_i)$$

$T_M$  e  $T_C$  são independentes.

Ou seja, imaginamos que há dois processos de morte atuando independentemente e ao mesmo tempo sobre cada indivíduo.  $T_M$  representa o tempo de espera até ocorrer morte natural e  $T_C$  representa o tempo de espera até haver captura. Neste caso,  $Y_i = \min(T_M, T_C)$ , ou seja,

$$P(Y_i=1) = P(\min(T_M, T_C) = T_C)$$

$$P(Y_i=0) = P(\min(T_M, T_C) = T_M)$$

Por E2, temos,

$$P(Y_i=1) = \frac{\phi_i}{\zeta_i} \quad \text{e} \quad P(Y_i=0) = \frac{\mu}{\zeta_i}$$

Conseqüentemente:

$$E[Y_i] = \frac{\phi_i}{\zeta_i}$$

Lembrando que  $\phi_i = \lambda \overset{\circ}{f}_i$  e voltando à variável aleatória  $n_i$ , podemos escrever:

$$E[n_i] = E\left[\sum_{j=1}^{x(d_i)} Y_j\right] = E\left[E\left(\sum_{j=1}^{x(d_i)} Y_j \mid X(d_i)\right)\right] = E\left[\sum_{j=1}^{x(d_i)} E[Y_j \mid X(d_i)]\right]$$

Supondo independência entre  $Y_j$  e  $X(d_i)$ , temos:

$$E[Y_j \mid X(d_i)] = E[Y_j] = \frac{\phi_i}{\zeta_i} = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i}$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, x(d_i)$ .

Finalmente,

$$E[n_i] = E\left[\frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} X(d_i)\right] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} E[X(d_i)] \quad (1.10)$$

Fixado um valor  $N_1$  e utilizando a expressão (1.9) em (1.10), podemos escrever:

$$E[n_i \mid N_1] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} e^{-\sum_{j=1}^{i-1} \zeta_j d_j} (1 - e^{-\zeta_i d_i}) N_1 \quad (1.11)$$

Valendo as suposições S1 a S5, podemos generalizar (1.1) e (1.2) para obter

$$E[N_{i+1} \mid N_i] = N_i e^{-\zeta_i d_i} \quad (1.12)$$

$$\text{Var}[N_{i+1} \mid N_i] = N_i e^{-\zeta_i d_i} (1 - e^{-\zeta_i d_i}) \quad (1.13)$$

Podemos reescrever (1.10) por

$$E[n_i] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} E[E[X(d_i) \mid N_i]] \quad (1.14)$$

Mas,

$$E [ X(d_i) | N_i ] = E[N_i | N_i] - E[N_{i+1} | N_i]$$

e por (1.12), resulta:

$$E [ X(d_i) | N_i ] = N_i (1 - e^{-\zeta_i d_i}) \quad (1.15)$$

Utilizando (1.15) em (1.14), teremos a importante expressão

$$E[n_i] = \frac{\lambda f_i}{\zeta_i} (1 - e^{-\zeta_i d_i}) E[N_i] \quad (1.16)$$

A formulação determinística para (1.16) com  $E[n_i]$  e  $E[N_i]$  substituídos por  $n_i$  e  $N_i$ , respectivamente, é conhecida em biologia pesqueira pelo nome de equação de captura (BEVERTON & HOLT, 1957; RICKER, 1975). Com base na equação de captura se derivaram, por exemplo, os procedimentos de Análise de População Virtual e Análise de Coorte, que são técnicas muito utilizadas em biologia pesqueira. Os modelos de regressão que discutiremos nos capítulos seguintes também serão baseados em (1.16).

Antes de finalizarmos este capítulo, pretendemos relacionar o modelo populacional descrito, com suposições e notação comumente utilizadas em biologia pesqueira (notação adotada pela F.A.O. - Food and Agriculture Organization). Na maior parte da literatura sobre o assunto, o tempo é medido em períodos fixos de um ano ( $d_i=1$ );  $\mu$ , a taxa instantânea de morte natural é igualmente suposta

constante e denotada por  $M$ ; a taxa instantânea de captura  $\phi_i = \lambda \bar{f}_i$  é denotada por  $F_i$  e denominada taxa de mortalidade por pesca;  $\bar{f}_i$  corresponde ao esforço médio por unidade de tempo no período  $i$ ;  $\lambda$  é conhecido como coeficiente de capturabilidade e denotado por  $q$ ; e, finalmente,  $\zeta_i = \mu + \phi_i$  é a taxa de mortalidade total e denotada por  $Z_i = M + F_i$ .

## 2 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS POPULACIONAIS PARA POPULAÇÕES FECHADAS

### 2.1 - Introdução

Neste capítulo denominaremos população fechada a qualquer população sujeita apenas ao processo de mortalidade conforme descrito no modelo populacional do capítulo anterior, considerando também satisfeitas as suposições S1 a S5.

Apresentaremos neste capítulo vários modelos de regressão para estimar parâmetros destas populações: a taxa instantânea de morte natural ( $\mu$ ), o coeficiente de capturabilidade ( $\lambda$ ) e o tamanho inicial da população ( $N_1$ ).

Seja  $p_i$  a fração de  $d_i$  que indica, no início do  $i$ -ésimo período, a ocorrência de morte por captura, onde  $i=1, 2, 3, \dots, s$  e  $s$  é o total de períodos considerados. A inclusão de  $p_i$  permite considerar também aquelas situações em que a captura não se processa continuamente; como ocorre, por exemplo, nas pescarias sazonais que efetuam capturas somente ao longo de alguns meses do ano. Por

tanto, temos

$$d_i = t_i - t_{i-1} = p_i d_i + (1-p_i) d_i \quad (2.1)$$

onde

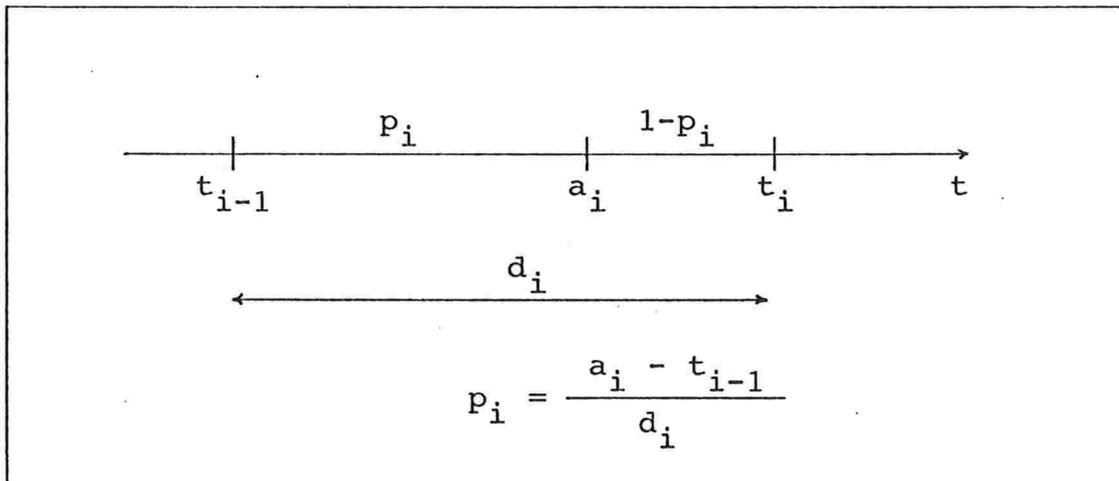
$$0 \leq p_i \leq 1$$

Definimos também  $a_i$  como o instante em que a captura é suspensa no  $i$ -ésimo período. Então,

$$a_i = t_{i-1} + p_i d_i \quad (2.2)$$

Representamos na Figura 1 as afirmações (2.1) e (2.2):

Figura 1



Na seqüência deste capítulo nós vamos supor também que sejam conhecidos os seguintes valores:

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_s)'$ , número de indivíduos capturados nos diversos intervalos de tempo;

$\underline{\dot{f}} = (\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dots, \dot{f}_s)'$ , os esforços médios por unidade de tempo nos diferentes intervalos;

$\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)'$ , as frações dos intervalos, em que houve ação do esforço de captura;

$\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_s)'$ , as amplitudes dos diferentes intervalos de tempo.

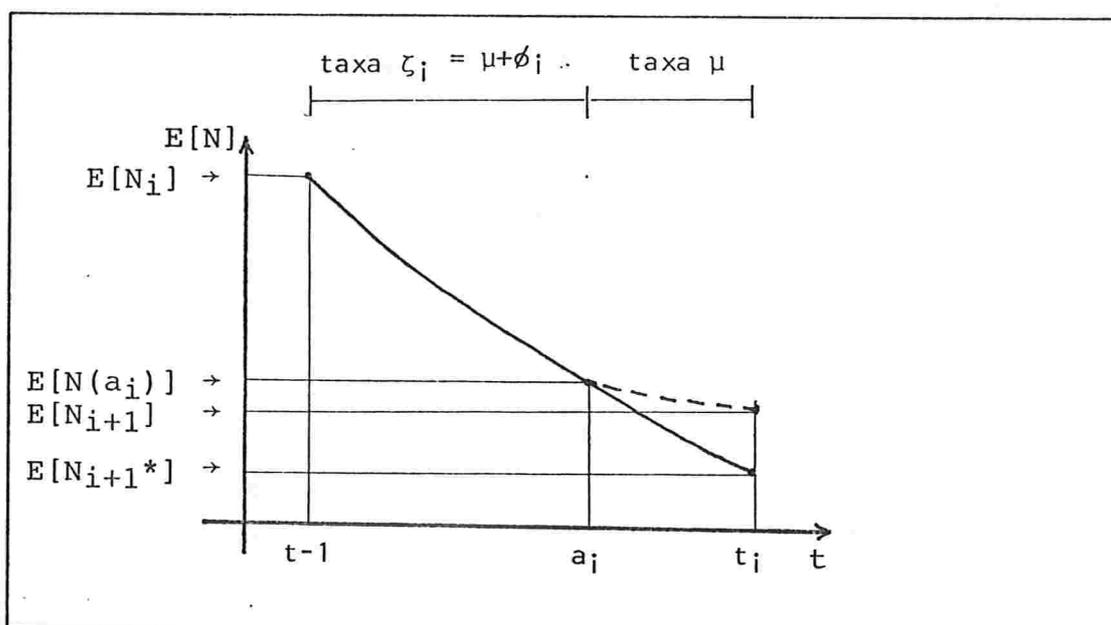
## 2.2 - Estimação de $\mu$ e $\lambda$

### 2.2.1 - O modelo

Observe-se que, ao considerarmos um valor de  $p_i$  menor que 1, o intervalo  $[t_{i-1}; t_i)$  pode ser subdividido em sub-intervalos que tenham taxas instantâneas de morte total distintas (ver figura 2). No primeiro sub-intervalo  $[t_{i-1}; a_i)$  a taxa instantânea de morte total é  $\zeta_i = \mu + \phi_i$  enquanto no segundo sub-intervalo  $[a_i; t_i)$  a taxa instantânea de morte é dada por  $\mu$  apenas. Conseqüentemente, o

número esperado de indivíduos presentes na população em  $t_i$  (dado por  $E[N_{i+1}]$ ) é superior ao número esperado para o caso  $p_i = 1$  (dado por  $E[N_{i+1}^*]$ ), quando o esforço de captura é aplicado ao longo de todo o  $i$ -ésimo intervalo.

Figura 2



Utilizando a esperança da expressão (1.12), podemos escrever as seguintes relações:

$$E[N(a_i)] = E[n_i] e^{-\zeta_i p_i d_i} = E[N_i] e^{-(\mu + \lambda \hat{f}_i) p_i d_i} \quad (2.3)$$

$$E[N_{i+1}] = E[N(a_i)] e^{-\mu(1-p_i)d_i} \quad (2.4)$$

Substituindo  $E[n(a_i)]$  em (2.4) pela expressão (2.3)

resulta,

$$E[N_{i+1}] = E[N_i] e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_i p_i) d_i} \quad (2.5)$$

Por outro lado, podemos reescrever (1.10) por

$$E[n_i] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} E[X(p_i d_i)] \quad (2.6)$$

Mas,

$$E[X(p_i d_i)] = E[N_i - N(a_i)] = E[N_i] - E[N(a_i)]$$

Resultando, por (2.3), que

$$E[X(p_i d_i)] = E[N_i] (1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}) \quad (2.7)$$

E, finalmente, temos:

$$E[n_i] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} (1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}) E[N_i] \quad (2.8)$$

Observe que a expressão (2.8) é uma generalização da "equação de captura" (1.16) deduzida no capítulo 1, através da inclusão de  $p_i$ .

Reescrevendo (2.8) para o intervalo  $(i+1)$  e substituindo  $E[N_{i+1}]$  conforme (2.5), resulta:

$$E[n_{i+1}] = \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_{i+1}}{\zeta_{i+1}} (1 - e^{-\zeta_{i+1} p_{i+1} d_{i+1}}) \cdot e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_i p_i) d_i} E[N_i] \quad (2.9)$$

Dividindo  $E[n_{i+1}]$  por  $E[n_i]$ , segue de (2.8) e (2.9)

$$\frac{E[n_{i+1}]}{E[n_i]} = \frac{\overset{\circ}{f}_{i+1} k_{i+1}}{\overset{\circ}{f}_i k_i} e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_i p_i d_i) d_i} \quad (2.10)$$

onde

$$k_i = \frac{1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}}{\zeta_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.11)$$

Definimos  $f_i$  como o esforço total aplicado no  $i$ -ésimo período; logo,

$$f_i = \overset{\circ}{f}_i p_i d_i ; \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.12)$$

pois  $\overset{\circ}{f}_i$  representa o esforço por unidade de tempo no período  $i$  enquanto  $p_i d_i$  representa a duração de tempo ao longo do qual este esforço é aplicado.

Se agora substituirmos  $\overset{\circ}{f}_i$  e  $\overset{\circ}{f}_{i+1}$  em (2.10) de acordo com a expressão (2.12), segue

$$\frac{E[n_{i+1}]}{E[n_i]} = \frac{f_{i+1}}{f_i} \frac{k_{i+1}}{p_{i+1} d_{i+1}} \frac{p_i d_i}{k_i} e^{-(\mu d_i + \lambda f_i)} \quad (2.13)$$

Sejam:

$Y_i = \frac{n_i}{f_i} ; \quad i=1, 2, \dots, s$  as capturas por unidade de esforço nos diferentes intervalos; e

$$C_i = \frac{k_{i+1}}{p_{i+1} d_{i+1}} \cdot \frac{p_i d_i}{k_i} ; \quad i=1, 2, \dots, s-1 \quad (2.14)$$

então (2.13) pode ser escrito

$$\frac{E[n_{i+1}/f_{i+1}]}{E[n_i/f_i]} = \frac{E[Y_{i+1}]}{E[Y_i]} = C_i e^{-(\mu d_i + \lambda f_i)} \quad (2.15)$$

o que sugere considerarmos o seguinte modelo

$$\frac{Y_{i+1}}{Y_i} = e^{-(\mu d_i + \lambda f_i)} \cdot C_i \cdot \varepsilon_i ; i=1, 2, \dots, s-1 \quad (2.16)$$

onde  $\varepsilon_i$  é o erro aleatório com distribuição supostamente log-normal.

Pelos logaritmos, chegamos ao modelo

$$y_i + \ln(C_i) = \mu d_i + \lambda f_i + \varepsilon_i^* ; i=1, 2, \dots, s-1 \quad (2.17)$$

onde:

$$y_i = \ln(Y_i) - \ln(Y_{i+1})$$

$\varepsilon_i^* = \ln(\varepsilon_i)$ , é o erro aleatório com distribuição supostamente normal com média zero e variância  $\sigma^2$ .

A utilização do modelo (2.17) para estimar os parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$ , é dificultada pelo termo  $\ln(C_i)$  que depende dos próprios parâmetros  $\mu$  e  $\lambda$ , de forma não linear pois

$$C_i = \frac{(1 - e^{-(\mu p_{i+1} d_{i+1} + \lambda f_{i+1})})}{(\mu p_{i+1} d_{i+1} + \lambda f_{i+1})} \cdot \frac{(\mu p_i d_i + \lambda f_i)}{(1 - e^{-(\mu p_i d_i + \lambda f_i)})}$$

A seguir apresentaremos algumas propostas para contornar este problema.

### 2.2.2 - Solução Iterativa

O algoritmo para solução de (2.17) mantendo  $\ln(c_i)$  no modelo, foi proposto por Beverton e Holt (1957) e consiste no seguinte procedimento:

(i) Considerar  $\ln(c_i) = 0$  e obter os estimadores de mínimos quadrados  $\hat{\mu}_{(1)}$  e  $\hat{\lambda}_{(1)}$  de  $\mu$  e  $\lambda$ , respectivamente.

(ii) Seja  $y_i + \ln(c_i) = Q(n_i, n_{i+1}, f_i, f_{i+1}, \mu, \lambda) = Q_i$

Então, utilizando  $\hat{\mu}_{(1)}$  e  $\hat{\lambda}_{(1)}$ , calcular

$$Q_i^{(1)} = Q(n_i, n_{i+1}, f_i, f_{i+1}, \hat{\mu}_{(1)}, \hat{\lambda}_{(1)})$$

(iii) Utilizar o modelo  $Q_i^{(1)} = \mu d_i + \lambda f_i + \varepsilon_i^*$  para obter novos estimadores de mínimos quadrados:

$$\hat{\mu}_{(2)} \text{ e } \hat{\lambda}_{(2)}.$$

- (iv) Calcular  $Q_i^{(2)}$  utilizando  $\hat{\mu}_{(2)}$  e  $\hat{\lambda}_{(2)}$ , procedendo iterativamente até haver convergência.

### 2.2.3 - Solução com aproximação para $\ln(C_i)$

Este procedimento foi proposto independentemente por Chapman (1961) e Paloheimo (1961), e consiste em eliminar o termo  $\ln(C_i)$  do modelo, por meio de uma aproximação.

#### Propriedade 2:

A função  $f(x) = \ln((1 - e^{-x})/x)$  para  $x \geq 0$  pode ser aproximada por  $-x/2$  para valores de  $x$  próximos de zero. (Ver demonstração no Anexo 1.)

Supondo que no modelo (2.17) seja válida a afirmação  $\zeta_i p_i d_i \stackrel{\circ}{=} 0$ ,  $\forall i=1, 2, \dots, s$ . Então segue da Propriedade 2:

$$\ln(C_i) \stackrel{\circ}{=} -\frac{1}{2} (\zeta_{i+1} p_{i+1} d_{i+1} - \zeta_i p_i d_i) \quad (2.18)$$

Paloheimo (1961) mostra numericamente que, para efeito prático, esta aproximação é bastante satisfatória para  $0,10 \leq \zeta_i p_i d_i \leq 1,00$ . Este intervalo é bastante razoável para aplicações em biologia pesqueira, onde geralmente consideramos períodos anuais ( $d_i=1$ ) e, nestes casos, o produto entre a

taxa de morte total ( $\zeta_i$ ) e o valor  $p_i$ , freqüentemente se situam no intervalo citado. Para as duas situações práticas estudadas no capítulo 4, por exemplo, este valor está em torno de 0,78.

Utilizando (2.18) no modelo (2.17), chega-se ao seguinte modelo linear

$$y_i \doteq \left( d_i + \frac{1}{2}(p_{i+1}d_{i+1} - p_id_i) \right) \mu + \frac{1}{2} \cdot (f_i + f_{i+1}) \lambda + \varepsilon_i^* \quad (2.19)$$

para  $i = 1, 2, \dots, s-1$

Paloheimo (1961) demonstra que o modelo linear aproximado produz estimadores parecidos com aqueles obtidos no procedimento iterativo de Beverton e Holt (quando neste último houver convergência). Porém as variâncias dos estimadores obtidos em (2.19) são menores que no procedimento iterativo.

Consideremos ainda alguns casos particulares importantes de (2.19):

- (i) Se  $p_i = d_i = 1, \forall i=1, 2, \dots, s$ ; ou seja, consideramos períodos unitários (por exemplo, períodos anuais), nos quais o esforço é aplicado todo o tempo:

$$y_i = \mu + \frac{1}{2}(f_i^\circ + f_{i+1}^\circ) \lambda + \varepsilon_i^* ; i=1, 2, \dots, s-1 \quad (2.20)$$

(ii) Se  $\overset{\circ}{f}_i = \overset{\circ}{f}$  constante para todo  $i$ ; ou seja, o esforço por unidade de tempo é o mesmo ao longo de todo o experimento.

$$y_i = d_i \mu + \frac{1}{2}(p_{i+1}d_{i+1} - p_i d_i) \zeta + \varepsilon_i^* \quad (2.21)$$

onde  $\zeta = \mu + \lambda \overset{\circ}{f}$ . Pode-se obter estimativa de  $\lambda$  indiretamente, através dos estimadores de  $\mu$  e  $\zeta$ .

(iii) Se  $f_i = \overset{\circ}{f}$  constante e  $p_i = 1$  para todo  $i$ ; ou seja, o esforço por unidade de tempo é constante ao longo do experimento, e ainda é aplicado todo o tempo.

$$y_i = \left( \frac{d_{i+1} + d_i}{2} \right) \zeta + \varepsilon_i^* \quad (2.22)$$

onde será possível apenas obter uma estimativa da taxa instantânea de mortalidade total.

#### 2.2.4 - Matrizes de covariância associadas a $\underline{y}$

Ao analisarmos os modelos (2.17) e (2.19), precisamos ter em mente que os  $y_i$  serão correlacionados mesmo sob suposição de independência entre os  $n_i$ .

Se os  $n_i$  são relativamente "grandes" em relação a  $N_1$ , então, conforme sugere Seber (1973), é razoável supor que  $\underline{n}' = (n_1, n_2, \dots, n_s)$  tenha distribuição multinomial,

e utilizar a expansão em série de Taylor para derivar a matriz de covariância para  $\underline{y}$ . Conforme o desenvolvimento nos Anexos 2 e 3, isto leva à seguinte matriz de covariância:

$$\Sigma_1 \equiv \sigma_1^2 \begin{matrix} \text{((s-1)x(s-1))} \\ \left[ \begin{array}{ccccccc} \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} & -\frac{1}{\eta_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\eta_2} & \frac{\eta_2 + \eta_3}{\eta_2 \eta_3} & -\frac{1}{\eta_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\eta_3} & \frac{\eta_3 + \eta_4}{\eta_3 \eta_4} & -\frac{1}{\eta_4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\eta_{s-1}} & \frac{\eta_{s-1} + \eta_s}{\eta_{s-1} \eta_s} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\text{onde: } \sigma_1^2 = \frac{1}{N_1}$$

$$\eta_i = \frac{\lambda \hat{f}_i}{\zeta_i} \exp[-(\mu t + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} \hat{f}_j p_j d_j)] \cdot [1 - \exp(-\zeta_i p_i d_i)];$$

$$i = 1, 2, \dots, s$$

A matriz  $\Sigma_1$  depende dos parâmetros do modelo. Por

tanto, sugerimos um procedimento iterativo para sua utilização:

- (i) Considerar  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_s = \frac{1}{s}$ . Neste caso, a matriz de covariância será

$$\Sigma_1^{(0)} = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} 2s & -s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -s & 2s & -s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -s & 2s & -s & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s & 2s \end{bmatrix} = \sigma^2 \omega^{(0)}$$

- (ii) Fazer a regressão linear ponderada utilizando  $\omega^{(0)}$  e obter os estimadores  $\hat{\mu}_{(1)}, \hat{\lambda}_{(1)}$ .
- (iii) Calcular  $\omega^{(1)}$ , utilizando os parâmetros estimados.
- (iv) Fazer nova regressão linear ponderada, agora utilizando  $\omega^{(1)}$  e obter  $\hat{\mu}_{(2)}, \hat{\lambda}_{(2)}$ ; procedendo assim iterativamente até convergência.

Se os  $n_i$  forem "pequenos" com relação aos respectivos  $N_i$ , é razoável supor que os  $n_i$  sejam independentes, e conforme Chapman (1961), supor que  $\ln(n_i)$  tenham distribuição normal com variância comum  $\sigma^2$ ; ou seja,

$\ln(n_i) : N(0, \sigma^2); i=1, 2, \dots, s$ . Neste caso (ver desenvolvimento no Anexo 3) a matriz de covariância de  $\underline{y}$  será:

$$\Sigma_2 \sim_{((s-1) \times (s-1))} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 2.3 - Estimação de $N_1, \mu$ e $\lambda$

#### 2.3.1 - 0 modelo

Utilizando a expressão (2.5) recursivamente a partir de  $E[N_i]$ , temos, para  $i \geq 2$ :

$$E[N_i] = E[N_{i-1}] e^{-(\mu + \lambda \bar{f}_{i-1}^0 p_{i-1}) d_{i-1}}, \text{ ou}$$

$$E[N_i] = E[N_{i-1}] \prod_{j=1}^2 e^{-(\mu + \lambda \bar{f}_{i-j}^0 p_{i-j}) d_{i-j}}, \text{ ou}$$

$$E[N_i] = E[N_{i-3}] \prod_{j=1}^3 e^{-(\mu + \lambda \bar{f}_{i-j}^0 p_{i-j}) d_{i-j}}, \text{ etc.}$$

Podemos proceder assim até chegarmos em  $N_1$ , quando teremos, para  $i \geq 2$ :

$$E[N_i] = N_1 \prod_{j=1}^{i-1} e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_{i-j} p_{i-j}) d_{i-j}}$$

ou simplesmente,

$$E[N_i] = N_1 \prod_{j=1}^{i-1} e^{-(\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_j p_j) d_j} \quad (2.23)$$

Finalmente, para qualquer  $i=1, 2, \dots, s$  podemos escrever:

$$E[N_i] = \begin{cases} N_1 ; & i = 1 \\ N_1 \cdot \exp\left[\sum_{j=1}^{i-1} (\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_j p_j) d_j\right]; & i=2, 3, \dots, s \end{cases} \quad (2.24)$$

Utilizando (2.23) em (2.8):

$$E[n_i] = \begin{cases} \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_1}{\zeta_1} (1 - e^{-\zeta_1 p_1 d_1}) N_1 ; & i=1 \\ \frac{\lambda \overset{\circ}{f}_i}{\zeta_i} (1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}) \exp\left[-\sum_{j=1}^{i-1} (\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_j p_j) d_j\right] N_1 & \\ & i = 2, 3, \dots, s \end{cases} \quad (2.25)$$

Multiplicando e dividindo (2.25) por  $p_i d_i$  e utilizando a notação  $k_i$  já definida anteriormente:

$$E[n_i] = \begin{cases} \lambda f_1 \frac{k_1}{p_1 d_1} N_1 ; & i=1 \\ \lambda f_i \frac{k_i}{p_i d_i} \exp\left[-\sum_{j=1}^{i-1} (\mu + \lambda \overset{\circ}{f}_j p_j) d_j\right] N_1; & \\ & i=2, \dots, s \end{cases} \quad (2.26)$$

Isto sugere considerarmos o seguinte modelo:

$$Y_i = \begin{cases} \frac{k_1}{p_1 d_1} \lambda N_1 \cdot \varepsilon_1 & ; i=1 \\ \frac{k_i}{p_i d_i} \lambda \exp\left[-\sum_{j=1}^{i-1} (\mu + \lambda f_j p_j) d_j\right] N_1 \cdot \varepsilon_i & \\ & i=2, \dots, s \end{cases} \quad (2.27)$$

onde:

$$Y_i = n_i / f_i$$

$\varepsilon_i$  = erro aleatório com distribuição supostamente log-normal.

$$z_i - \ln\left(\frac{k_i}{p_i d_i}\right) = \begin{cases} \ln(N_1 \lambda) + \varepsilon_1^* & ; i=1 \\ \ln(N_1 \lambda) - \left(\sum_{j=1}^{i-1} d_j\right) \mu - \left(\sum_{j=1}^{i-1} f_j\right) \lambda + \varepsilon_i^* & \\ & i=2, \dots, s \end{cases} \quad (2.28)$$

onde:

$$z_i = \ln(Y_i)$$

$\varepsilon_i^*$  = erro aleatório com distribuição supostamente normal com média 0 e variância  $\sigma^2$ .

O termo não-linear  $\ln\left(\frac{k_i}{p_i d_i}\right)$  dificulta a solução

para obter estimadores dos parâmetros:  $N_1, \mu$  e  $\lambda$ . Uma possibilidade de solução seria utilizar um processo iterativo semelhante ao descrito em 2.2.2. Outra possibilidade consiste em obter uma aproximação para  $\ln\left(\frac{k_i}{p_i d_i}\right)$ , utilizando a Propriedade 2, ou seja:

Supondo  $\zeta_i p_i d_i \stackrel{\circ}{=} 0$ , temos

$$\ln\left(\frac{k_i}{p_i d_i}\right) \stackrel{\circ}{=} -\frac{1}{2} \zeta_i p_i d_i$$

Utilizando esta aproximação em (2.28), chega-se ao modelo proposto por Chapman (1961):

$$z_i = \begin{cases} \ln(N_1 \lambda) - \frac{p_1 d_1}{2} \mu - \frac{f_1}{2} \lambda + \varepsilon_1^* ; & i=1 \\ \ln(N_1 \lambda) - \left(\frac{p_i d_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} d_j\right) \mu - \left(\frac{f_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} f_j\right) \lambda + \varepsilon_i^* ; & \\ i = 2, \dots, s & \end{cases} \quad (2.29)$$

### 2.3.2 - Matriz de covariância associada a $\underline{z}$

Para o modelo (2.29) podem ser feitas as suposições de  $\underline{n}$  em relação a  $\underline{N}' = (N_1, N_2, \dots, N_s)$  como no modelo (2.19).

Considerando que o vetor  $\underline{n}$  tem distribuição multinomial, segue diretamente do Anexo 2 que a matriz de covariância de  $\underline{z}$  será dada por:

$$\Sigma_{\sim 3}^{(sxs)} \stackrel{\circ}{=} \sigma_1^2 \begin{bmatrix} \frac{1-\eta_1}{\eta_1} & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1-\eta_2}{\eta_2} & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1-\eta_3}{\eta_3} & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \frac{1-\eta_s}{\eta_s} \end{bmatrix}$$

onde:

$\eta_i$  e  $\sigma_1^2$  estão definidos como em 2.2.4.

Aqui também se faz necessário um processo iterativo como o descrito em 2.2.4 para  $\Sigma_{\sim 1}$ ; no caso, partindo-se da matriz

$$\Sigma_{\sim 3}^{(0)} = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} (s-1) & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (s-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & (s-1) & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & (s-1) \end{bmatrix}$$

Quando os  $n_i$  forem "pequenos" em relação a  $N_i$ , e considerando  $\ln(n_i)$  independentes com distribuição normal

e variância comum  $\sigma^2$ , então dado que  $\text{Cov}(z_i, z_j) = \text{Cov}(\ln(n_i), \ln(n_j))$ , segue a seguinte matriz de covariância para  $\underline{z}$ :

$$\underline{\Sigma}_4 (\underline{SXS}) = \sigma^2 \underline{I}_S$$

onde:

$\underline{I}_S$  é a matriz identidade de ordem  $s$ .

### 2.3.3 - Estimação de $N_1$

No modelo (2.29) o intercept da regressão linear ( $\beta_0$ ) está dado por:

$$\beta_0 = \ln(N_1 \lambda) \quad (2.30)$$

donde segue que

$$N_1 = \frac{e^{\beta_0}}{\lambda} \quad (2.31)$$

Sejam  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\lambda}$  os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_0$  e  $\lambda$ , respectivamente. Então

$$\hat{N}_1 = \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{\hat{\lambda}} \quad (2.32)$$

é um estimados para  $N_1$ .

Valores aproximados para  $E[\hat{N}_1]$  e  $\text{Var}[\hat{N}_1]$  podem ser obtidos por expansão em série de Taylor. Conforme desen-

volvido no Anexo 4, chega-se aos seguintes resultados, considerando  $E[\tilde{\beta}_0] = \beta_0$  e  $E[\tilde{\lambda}] = \lambda$ :

$$E[\hat{N}_1] = \frac{e^{\beta_0}}{\lambda} (1 + B) \quad (2.33)$$

onde:

$$B = \frac{\text{Var}(\tilde{\beta}_0)}{2} - \frac{\text{Cov}(\tilde{\beta}_0, \tilde{\lambda})}{\lambda} + \frac{\text{Var}(\tilde{\lambda})}{\lambda^2}$$

Supondo  $B \doteq 0$ , então a variância aproximada para  $\hat{N}_1$  será:

$$\text{Var}[\hat{N}_1] \doteq \left(\frac{\beta_0}{\lambda}\right)^2 \left[ \text{Var}(\tilde{\beta}_0) - \frac{2\text{Cov}(\tilde{\beta}_0, \tilde{\lambda})}{\lambda} + \frac{\text{Var}(\tilde{\lambda})}{\lambda^2} \right] \quad (2.34)$$

#### 2.4 - Comparação entre os modelos das seções 2.2 e 2.3

Se simbolizarmos por  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{s-1})'$  e  $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_s)'$  os valores correspondentes às variáveis dependentes, bem como por E e H as matrizes de covariância dos erros nos modelos das seções 2.2 e 2.3, respectivamente, observamos que, dada a matriz

$$A_{((s-1) \times s)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

podemos escrever

$$(i) \quad \underline{y} = A \underline{z}$$

$$(ii) \quad E = A H A'$$

Isto vale tanto para os modelos não lineares (2.17) e (2.28) quanto para os modelos linearizados correspondentes, (2.19) e (2.29).

De acordo com o desenvolvimento do Anexo 9 para os modelos linearizados, temos que  $\underline{\hat{y}} = A \underline{\hat{z}}$  se entre as matrizes de covariância E e H houver a seguinte relação:

$$H^{-1} = A' E^{-1} A$$

onde:

$$\underline{\hat{y}} = Z \underline{\hat{\theta}}, \text{ vetor estimado no modelo (2.19)}$$

$$\underline{\hat{z}} = X \underline{\hat{\beta}}, \text{ vetor estimado no modelo (2.29)}$$

Z e X são as matrizes definidas com mesmo nome no Anexo 9.

$\underline{\hat{\theta}}$ , vetor dos estimadores de mínimos quadrados para  $\underline{\theta} = (\mu, \lambda)'$  em (2.19).

$\underline{\hat{\beta}}$ , vetor dos estimadores de mínimos quadrados para  $\underline{\beta} = (\beta_0, \mu, \lambda)'$  em (2.29) com  $\beta_0 = \ln(N_1 \lambda)$ .

Verificamos, portanto, uma equivalência entre os

dois modelos propostos. A preferência pelos modelos da seção 2.3 se justifica por dois motivos:

- (i) A possibilidade de estimação do tamanho inicial da população ( $N_1$ ), conforme o desenvolvimento descrito em 2.3.3.
- (ii) A existência de uma matriz de covariância diagonal para os erros (=erros não-correlacionados), nos casos — comuns em biologia pesqueira — em que as capturas do  $i$ -ésimo período ( $n_i$ ) são supostamente pequenas em relação ao tamanho da população no início do período ( $N_i$ ).

Isto torna a utilização dos modelos de 2.3 mais simples que os modelos de 2.2.

### 3 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS POPULACIONAIS PARA POPULAÇÕES ABERTAS

#### 3.1 - Introdução

No capítulo 2 consideramos modelos para populações que estivessem sujeitas apenas ao processo de saída de indivíduos, por morte natural ou por captura. Neste terceiro capítulo, pretendemos considerar populações mais gerais, resultantes da sobreposição de vários sub-grupos, que seguem isoladamente as características do modelo populacional descrito no capítulo anterior. Na prática, este tipo de população pode ser encontrado, por exemplo, em espécies aquáticas economicamente exploradas, nos casos em que os dados de captura possibilitam a classificação em grupos de idade. Nestas populações procura-se acompanhar as diversas "classes anuais" (ou "coortes") ao longo dos anos, com base nas capturas discriminadas em função das idades. Cada coorte corresponde a um sub-grupo que obedece às suposições do modelo populacional utilizado no capítulo 2, onde  $N_1(c)$  representa o tamanho desta coorte no início do primeiro período em que aparece nas

capturas. Populações que podem ser vistas como a sobreposição de várias coortes serão o objetivo de estudos no presente capítulo.

A identificação dos sub-grupos (coortes) através da composição etária nas capturas, faz com que consideremos todos os períodos iguais à unidade (períodos de um ano); isto é,  $d_i=1$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ . As idades (em anos) estão numeradas de 1 a  $p$ , onde  $j=1$  representa a primeira idade encontrada nas capturas e  $p$  a maior idade encontrada nas capturas. As informações de captura podem ser dispostas na seguinte tabela:

Ano(i)	IDADE (j)						f	p
	1	2	...	j	...	p		
1	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1p}$	$f_1$	$P_1$
2	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2j}$	...	$n_{2p}$	$f_2$	$P_2$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
i	$n_{i1}$	$n_{i2}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{ip}$	$f_i$	$P_i$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮
s	$n_{s1}$	$n_{s2}$	...	$n_{sj}$	...	$n_{sp}$	$f_s$	$P_s$
r	$r_1$	$r_2$	...	$r_j$	...	$r_p$		

onde temos:

$n_{ij}$ : número de indivíduos de idade  $j$  capturados no ano  $i$ .

$f_i$ : esforço por unidade de tempo no ano  $i$ .

$p_i$ : fração de tempo no início do  $i$ -ésimo ano dedicado à exploração.

$r_j$ : probabilidade de captura para um indivíduo com a idade  $j$ . Este valor pode estar relacionado com a seletividade do aparelho de captura. Temos  $0 \leq r_j \leq 1$ , onde  $r_j=0$  para aquelas idades que não são capturadas, e portanto não serão consideradas na tabela 3.1;  $0 < r_j < 1$  para idades parcialmente disponíveis e  $r_j=1$  para as idades totalmente disponíveis à captura. Observa-se que imaginamos a captura para cada indivíduo de idade  $j$ , como um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $r_j$ ; consequentemente  $\sum_j r_j \neq 1$ .

Para os modelos que serão estudados, estaremos supondo que:

- (i) todas as informações apresentadas na tabela 3.1 estejam disponíveis;
- (ii) o esforço por unidade de tempo aplicado no ano

$i$  sobre a idade  $j$  é proporcional à probabilidade de captura dos indivíduos desta idade ( $r_j$ ) e ao esforço por unidade de tempo no ano  $i$  ( $\overset{\circ}{f}_i$ ). Isto é,

$$\overset{\circ}{f}_{ij} = r_j \overset{\circ}{f}_i$$

Será útil também a relação:

$$f_{ij} = \overset{\circ}{f}_{ij} p_i = r_j \overset{\circ}{f}_i p_i = r_j \overset{\circ}{f}_i$$

onde  $f_{ij}$  representa o esforço total aplicado durante o  $i$ -ésimo ano, para a idade  $j$ .

São parâmetros desconhecidos deste população os seguintes:

$\mu_{ij}$ ; a taxa instantânea de mortalidade natural para a idade  $j$  no ano  $i$ .

$\lambda_{ij}$ ; coeficiente de capturabilidade para a idade  $j$  no ano  $i$ .

$N_{ij}$ ; número de indivíduos presentes na população com idade  $j$  no início do  $i$ -ésimo ano.

Quando dispomos as capturas na forma da tabela 3.1, dois elementos quaisquer  $n_{ab}$  e  $n_{cd}$  pertencem à mesma coorte se eles estiverem dispostos na diagonal tal que  $(a-b) = (c-d)$ . Por exemplo, a diagonal assinalada na tabela 3.1 corresponde a uma coorte, pois  $1-1 = 2-2 = 3-3 = \dots = 0$ .

Identificaremos as coortes pela letra  $c$ , que será calculada por:

$$c = i - j + p - 1 \quad (3.1)$$

Portanto, na tabela 3.1 estarão representadas  $s+p-1$  coortes numeradas de  $c=0$  até  $c=p+s-2$ . Por exemplo, os elementos  $n_{12}$ ,  $n_{23}$ ,  $n_{34}$ , etc. pertencem à coorte  $c=p-2$ , enquanto a coorte assinalada na tabela é  $c=p-1$ .

Utilizaremos a notação  $N_1(c)$  para identificar o parâmetro do número de indivíduos da coorte  $c$  presentes no início do primeiro ano em que esta coorte se encontra nas capturas amostradas. De (3.1) segue que  $N_1(c)$  corresponde aos seguintes valores  $N_{ij}$ :

$$N_1(c) = \begin{cases} N_{1, p-c} & ; \quad c \leq p-1 \\ N_{c-p+2, 1} & ; \quad c \geq p \end{cases}$$

onde:

$$c = 0, 1, 2, \dots, p+s-2.$$

Genericamente podemos escrever

$$N_1(c) = N_{i-m+1, j-m+1} \quad (3.2)$$

com  $m = \min(i, j)$ .

### 3.2 - Estimação das taxas de mortalidade

Nesta seção adaptaremos o modelo populacional desenvolvido na seção 2.2 aos dados de captura com estrutura etária. Para isso, consideraremos  $\mu_{ij} = \mu$  para todo  $(i, j)$ ; ou seja, a taxa instantânea de mortalidade natural é constante para todas as idades e anos considerados. Desse modo podemos escrever a taxa  $\zeta_{ij}$  de mortalidade total no ano  $i$  para idade  $j$  como  $\zeta_{ij} = \mu + \phi_{ij}$ , onde  $\phi_{ij}$  é proporcional ao coeficiente de capturabilidade e ao esforço, isto é,  $\phi_{ij} = \lambda_{ij} \overset{\circ}{f}_{ij}$ . Para uma dada coorte pode-se reescrever as esperanças (2.5), (2.8) e (2.9), respectivamente, por:

$$E[N_{i+1, j+1}] = E[N_{i, j}] e^{-(\mu + \phi_{ij} p_i)} \quad (3.3)$$

$$E[n_{i, j}] = \frac{\phi_{ij}}{\zeta_{ij}} (1 - e^{-\zeta_{ij} p_i}) \cdot E[N_{i, j}] \quad (3.4)$$

$$E[n_{i+1, j+1}] = \frac{\phi_{i+1, j+1}}{\zeta_{i+1, j+1}} \cdot (1 - e^{-\zeta_{i+1, j+1} \cdot p_{i+1}}) \cdot (1 - e^{-(\mu + \phi_{ij} p_i)}) \cdot E[N_{i, j}] \quad (3.5)$$

$$\text{com } \zeta_{ij} = \mu + \phi_{ij} = \mu + \lambda_{ij} \overset{\circ}{f}_{ij}.$$

E, utilizando procedimentos análogos aos descritos para a obtenção de (2.17) (ver o desenvolvimento no Anexo 8), chega-se ao seguinte modelo:

$$Y_{i,j} + \ln(C_{i,j}) = \mu - \ln\left(\frac{\lambda_{i+1, j+1}}{\lambda_{i,j}}\right) + \lambda_{ij} f_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \quad (3.6)$$

onde:

$$i = 1, 2, \dots, s-1;$$

$$j = 1, 2, \dots, p-1;$$

$$C_{ij} = \frac{(1 - e^{-\zeta_{i+1, j+1} p_{i+1}})}{\zeta_{i+1, j+1} p_{i+1}} \cdot \frac{\zeta_{ij} p_i}{(1 - e^{-\zeta_{ij} p_i})};$$

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \ln\left(\frac{n_{ij}}{f_{ij}}\right) - \ln\left(\frac{n_{i+1, j+1}}{f_{i+1, j+1}}\right) = \\ &= \ln(Y_{ij}) - \ln(Y_{i+1, j+1}) \end{aligned}$$

Supondo  $\zeta_{ij} p_i \cong 0$  para todo  $(i, j)$ ;  $i=1, 2, \dots, s$  e  $j=1, 2, \dots, p$ ; segue pela Propriedade 2 que:

$$\ln(C_{ij}) \cong -\frac{1}{2}((p_{i+1} - p_i) \mu + \phi_{i+1, j+1} p_{i+1} - \phi_{ij} p_i) \quad (3.7)$$

Uma vez que  $\phi_{ij} = \lambda_{ij} \frac{f_{ij}}{p_i}$  para todo  $(i, j)$ . Esta aproximação resulta no seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \left(1 + \frac{p_{i+1} - p_i}{2}\right) \mu - \ln\left(\frac{\lambda_{i+1, j+1}}{\lambda_{ij}}\right) + \\ &+ \frac{f_{i+1, j+1}}{2} \lambda_{i+1, j+1} + \frac{f_{ij}}{2} \lambda_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde:

$$i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ e } j = 1, 2, \dots, p-1.$$

As coortes  $c=0$  e  $c=s+p-2$  serão excluídas da análise porque não possibilitam o cálculo de  $y_{ij}$ , pois são observadas num único período. Isto significa que o total de pontos amostrais será  $k = (s-1)(p-1)$ , enquanto o modelo (3.8) terá  $(sp - 1)$  parâmetros; portanto, mais parâmetros que observações. Isto nos obriga a fazer suposições adicionais que possibilitem reduzir o número de parâmetros; isto será tratado nos itens 3.2.1 e 3.2.2. Chamamos atenção também para a matriz de covariância  $\text{Cov}(\epsilon_{ij}^*)$  que discutiremos em 3.2.3.

### 3.2.1 - Coefficiente de capturabilidade constante

A suposição  $\lambda_{ij} = \lambda$  para todo  $(i,j)$ , ou seja, o coeficiente de capturabilidade é o mesmo para toda idade e ano, simplifica bastante o modelo (3.8), resultando num modelo linear:

$$y_{ij} = \left(1 + \frac{p_{i+1} - p_i}{2}\right) \mu + \left(\frac{f_{ij} + f_{i+1, j+1}}{2}\right) \lambda + \epsilon_{ij}^* \quad (3.9)$$

No Anexo 5 (a) apresentamos um exemplo simples de como escrever convenientemente as matrizes associadas a este modelo, para o uso das técnicas habituais de regressão.

### 3.2.2 - Coeficiente de capturabilidade variável

Supõe-se agora que  $\lambda_{ij} = \lambda_j$  para qualquer  $i = 1, 2, \dots, s$ ; ou seja, o coeficiente de capturabilidade é dependente apenas da idade. Esta suposição é razoável quando se considera que eventuais variações entre os períodos estejam eliminadas pela medida conveniente do esforço. Podemos escrever  $\lambda_j = \lambda + \delta_j$ , onde  $\delta_j = 0$  para pelo menos uma das  $p$  idades consideradas ou  $\sum \delta_j = 0$ . Tem-se então a partir de (3.8):

$$\begin{aligned}
 Y_{ij} = & \left(1 + \frac{P_{i+1} - P_i}{2}\right) \mu - \ln\left(\frac{\lambda + \delta_{j+1}}{\lambda + \delta_j}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot (f_{ij} + f_{i+1, j+1}) \lambda + \frac{1}{2} f_{ij} \cdot \delta_{ij} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot f_{i+1, j+1} \delta_{j+1} + \varepsilon_{ij}^* \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Neste modelo tem-se um máximo de  $(p+1)$  parâmetros. E, como o total de pontos é  $k = (s-1)(p-1)$ , segue que o modelo tem solução se  $s \geq \frac{2p}{p-1}$ .

A utilização de (3.10) é extremamente complicada, pois, além de ser não-linear, exige também o método dos mínimos quadrados ponderados, já que a matriz de covariância  $\text{Cov}(\varepsilon_{ij}^*)$  não é a matriz identidade.

Uma possibilidade de simplificação consiste na obtenção de estimativas independentes para a razão

$$v_j = \lambda_{j+1} / \lambda_j,$$

que entrariam no modelo como constantes conhecidas. Obteríamos com isto uma linearização do modelo (3.10), resultando em

$$Y_{ij} - \ln(v_j) = \left(1 + \frac{P_{i+1} - P_i}{2}\right) \mu + \frac{1}{2} (v_j^{f_{i+1, j+1} + f_{ij}}) \cdot \lambda_j + \varepsilon_{ij}^* \quad (3.11)$$

onde:

$$v_j = \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}, \text{ são valores supostamente conhecidos.}$$

Este modelo tem  $p$  parâmetros  $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1})$  a serem estimados. Portanto, tem solução sempre que

$$s \geq \frac{2p-1}{p-1}.$$

### 3.2.3 - Matriz de covariância para $\varepsilon_{ij}^*$

Para populações sujeitas à exploração comercial, é bastante razoável supor que estas populações sejam muito grandes. Por isso trataremos apenas da covariância estabelecida em 2.2.4 para populações em que  $N_i$  seja muito grande em relação ao respectivo  $n_i$ .

Fixada uma coorte  $c$  qualquer, temos:

$$\Sigma_{\sim 2} (g_c \times g_c) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde:

$g_c = n_c - 1$  e  $n_c$  representa o número de períodos para os quais a coorte  $c$  está presente nas capturas.

Supondo independência entre as coortes, segue a matriz:

$$\text{Cov}(\tilde{\xi})^*_{(k+k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \Sigma_{\sim 2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{\sim 2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{\sim 2}^{s+p-3} \end{bmatrix} = \sigma^2 \cdot \underline{D}$$

cuja ordem será  $k = (s-1)(p-1)$ .

No Anexo 5 (a) apresentamos a forma de matriz  $\underline{D}$  para um exemplo simples.

Como a matriz  $\underline{D}$  não é identidade, precisa-se recorrer ao método dos mínimos quadrados ponderados; exceção feita para o caso  $p=2$ , quando se tem que  $g_c = 2 - 1 = 1$  para todas as coortes incluídas no modelo, e portanto,

$$\frac{\Sigma C}{\sim 2} = 2\sigma^2$$

para todas as coortes. Isto resulta em que a matriz de covariância seja

$$\sigma^2 \cdot \underline{D} = 2\sigma^2 \cdot \underline{I}, \text{ onde } \underline{I} \text{ é a matriz identidade.}$$

No caso em que  $p > 2$  uma aproximação possível consiste na redução artificial do número de idades para  $p=2$ . Isto pode ser conseguido agrupando as idades convenientemente. Se denominarmos por  $j = x$  à primeira idade totalmente recrutada ( $x = \min(r_j=1)$ ) e efetuarmos a análise para as idades de  $x$  até um  $z$  que será escolhido conforme critérios discutidos em Seber (1973, p.333), e tal que  $z \leq p-1$ . Podemos então criar os seguintes grupos de idade nas capturas:

$n_{i1}^*$ : número de indivíduos capturados no ano  $i$  com idades de  $x$  a  $z$ .

$n_{i+1,2}^*$ : número de indivíduos capturados no ano  $i+1$  com idades de  $x+1$  a  $z+1$ .

$$n_{i1}^* = \sum_{j=x}^z n_{ij} \quad (3.12)$$

$$n_{i+1,2}^* = \sum_{j=x+1}^{z+1} n_{i+1,j} \quad (3.13)$$

Os esforços associados a  $n_{i1}^*$  e  $n_{i+1,2}^*$  serão  $f_{i1}^*$  e  $f_{i+1,2}^*$ , respectivamente, onde:

$$f_{i,1}^* = \sum_{j=x}^z f_{ij} = \overset{\circ}{f}_i p_i \sum_{j=x}^z r_j \quad (3.14)$$

$$f_{i+1,2}^* = \sum_{j=x+1}^{z+1} f_{i+1,j} = \overset{\circ}{f}_{i+1} p_{i+1} \sum_{j=x+1}^{z+1} r_j \quad (3.15)$$

Observe-se que sendo  $r_j = 1$  para todo  $j \geq x$ , segue que

$$f_{i,1}^* = f_i \cdot (z-x+1)$$

$$f_{i+1,2}^* = f_{i+1} \cdot (z-x+1)$$

Como uma medida relativa do esforço é suficiente para nossos propósitos, pode-se desconsiderar o termo constante  $(z-x+1)$  utilizando como medida de esforço simplesmente:

$$f_{i1}^* = f_i$$

e 
$$f_{i+1,2}^* = f_{i+1}$$

Desta forma criamos um novo conjunto de dados com

apenas dois grupos de idades ( $p=2$ ). Observe-se que para  $z=x$  tem-se o modelo com  $\sigma^2 \cdot D = 2\sigma^2 \underline{I}$ . Para  $z > x$  esta igualdade não mais se verifica. Seber (1973) comenta que sendo  $n_{ix}$  grande em relação a  $(n_{i1}^* - n_{ix})$ , a matriz de covariância  $2\sigma^2 \underline{I}$  continua sendo uma aproximação razoável para  $\text{Cov}(\underline{\varepsilon}^*)$ .

Em Muir (1964) encontra-se um exemplo aplicado, utilizando as aproximações por (3.12) e (3.13). O argumento dado por Muir para agrupar várias idades é a tentativa de estabilização dos dados.

### 3.3. - Estimação de $N_1(c)$ , $\mu$ e $\lambda$

O modelo que descreveremos foi proposto por Palohermo (1980), estendendo o modelo descrito na seção (3.3). Utilizando (3.3) recursivamente a partir de  $E[N_{ij}]$ , temos para  $\min(i, j)$  maior que 1,

$$E[N_{ij}] = E[N_{i-1, j-1}] e^{-(\mu + \phi_{i-1, j-1}^p i-1)}; \text{ ou}$$

$$E[N_{ij}] = E[N_{i-2, j-2}] \cdot \prod_{v=1}^2 e^{-(\mu + \phi_{i-v, j-v}^p i-v)}; \text{ ou}$$

$$E[N_{ij}] = E[N_{i-3, j-3}] \cdot \prod_{v=1}^3 e^{-(\mu + \phi_{i-v, j-v}^p i-v)}; \text{ etc.}$$

Procedendo assim até chegarmos a  $N_1(c) = N_{i-m+1, j-m+1}$  com  $m = \min(i, j)$ , segue que

$$E[N_{ij}] = N_1(c) \cdot \prod_{v=1}^{m-1} e^{-(\mu + \phi_{i-v, j-v} P_{i-v})} \quad (3.16)$$

que pode ser reescrito por:

$$E[N_{ij}] = N_1(c) \cdot e^{-((m-1)\mu + T_{ij})} \quad (3.17)$$

onde:

$$T_{ij} = \begin{cases} \sum_{v=1}^{m-1} \phi_{i-v, j-v} P_{i-v} = \sum_{v=1}^{m-1} \lambda_{i-v, j-v} f_{i-v, j-v}; m \geq 2 \\ 0 ; m = 1 \end{cases}$$

Substituindo  $E[N_{ij}]$  em (3.4) pela expressão (3.17) e considerando  $\phi_{ij} = \lambda_{ij} \cdot \frac{f_{ij}}{p_i}$ , pode-se reescrever (3.4) por

$$E[Y_{ij}] = E\left[\frac{n_{ij}}{f_{ij}}\right] = \lambda_{ij} \left(\frac{1 - e^{-\zeta_{ij} P_i}}{\zeta_{ij} P_i}\right) e^{-((m-1)\mu + T_{ij})} \cdot N_1(c) \quad (3.18)$$

onde:

$$Y_{ij} = \frac{n_{ij}}{f_{ij}}, \text{ representa a captura por unidade de esforço no período } i \text{ para a idade } j.$$

A expressão (3.18) nos sugere o seguinte modelo:

$$Y_{ij} = \lambda_{ij} K_{ij} e^{-((m-1)\mu + T_{ij})} N_1(c) \varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

onde:

$$i = 1, 2, \dots, s;$$

$$j = 1, 2, \dots, p;$$

$$K_{ij} = \frac{(1 - e^{-\zeta_{ij} p_i})}{\zeta_{ij} p_i};$$

$\varepsilon_{ij}$  = erro aleatório com distribuição supostamente log-normal.

Utilizando logaritmos naturais podemos reescrever o modelo (3.19):

$$z_{ij} = \ln(\lambda_{ij} N_1(c)) + \ln(K_{ij}) - (m-1)\mu - T_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \quad (3.20)$$

onde:

$$z_{ij} = \ln(Y_{ij})$$

$\varepsilon_{ij}^*$  = erro aleatório com distribuição supostamente normal de média zero e variância  $\sigma^2$ .

Supondo  $\zeta_{ij} p_i \stackrel{\circ}{=} 0$  e utilizando a Propriedade 2 do capítulo 2 para aproximação do termo não-linear, segue:

$$z_{ij} \stackrel{\circ}{=} \ln(\lambda_{ij} N_1(\ )) - (m - \frac{2 - p_i}{2})\mu - \frac{f_{ij}}{2} \lambda_{ij} - T_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \quad (3.21)$$

Com a exclusão das coortes  $c=0$  e  $c=s+p-2$  que estão representadas nas capturas por  $n_{1p}$  e  $n_{s1}$ , respectivamente,

permanecem no modelo (sp-2) pontos amostrais para estimar um total de (sp-2) + s+p-2 parâmetros. O excesso de parâmetros no modelo exigirá suposições adicionais que levem a sua redução. Nos itens 3.3.1 e 3.3.2, veremos formas de eliminar o excesso de parâmetros.

### 3.3.1 - Coeficiente de capturabilidade constante

Podemos escolher as idades  $j=1, 2, \dots, p$  convenientemente, de forma que seja razoável supor  $\lambda_{ij} = \lambda$ , ou seja, coeficiente de capturabilidade constante por ano e idade. O total de parâmetros no modelo (3.21) será reduzido a s+p-1. Portanto, há solução sempre que  $s \geq (p+1)/(p-1)$ . Neste caso, o modelo (3.21) resultará em:

$$z_{ij} = \ln(\lambda N_1(c)) - (m - \frac{2-p_i}{2}) \mu - (\frac{f_{ij}}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v, j-v}) \lambda + \epsilon_{ij}^* \quad (3.22)$$

que, para o caso mais comum na prática, em que  $p_i=1$ , para todo  $i$  e  $r_j = 1$ , para todo  $j$ , se reduz a:

$$z_{ij} = \ln(\lambda N_1(c)) - (m - \frac{1}{2}) \mu - (\frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}) \lambda + \epsilon_{ij}^* \quad (3.23)$$

No Anexo 5 (b) apresentamos um exemplo simples de como adaptar este modelo para o uso das técnicas comuns de regressão.

### 3.3.2 - Coeficiente de capturabilidade variável

Uma situação mais geral do que aquela apresentada em 3.3.1 consiste em supor que o coeficiente de capturabilidade seja variável em função da idade; ou seja:

$$\lambda_{ij} = \lambda_j$$

Supomos que o esforço nos períodos considerados seja medido de forma que incorpore eventuais variações anuais de capturabilidade, que podem se dar em função de novos equipamentos, alteração de legislação, habilidade do pessoal, etc.

Denotamos  $\lambda_j$  por  $\lambda + \delta_j$  onde  $\delta_j = 0$  para, pelo menos, uma das  $p$  idades consideradas. O total de parâmetros no modelo agora será de  $s+2p-2$ ; que serão estimáveis sempre que  $s \geq 2p/(p-1)$  e (3.20) agora estará dada por:

$$\begin{aligned} z_{ij} = & \ln(\lambda N_1(c)) - (m - \frac{2-p_i}{2}) \mu - (\frac{f_{ij}}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v, j-v}) \lambda + \\ & + \ln(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}) - \frac{f_{ij}}{2} \delta_j - \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v, j-v} \delta_{j-v} + \epsilon_{ij}^* \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou, no caso mais comum ( $p_i=1$  e  $r_j=1$ ;  $\forall_{i,j}$ ):

$$\begin{aligned} z_{ij} = & \ln(\lambda N_1(c)) - (m - \frac{1}{2}) \mu - (\frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}) \lambda + \\ & + \ln(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}) - \frac{f_i}{2} \delta_j - \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v} \delta_{j-v} + \epsilon_{ij}^* \end{aligned} \quad (3.25)$$

Os modelos (3.24) ou (3.25) são não-lineares em função do termo

$$\ln\left(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}\right).$$

No item 3.3.5 sugerimos uma aproximação linearizada para estes modelos.

### 3.3.3 - Matriz de covariância para $\tilde{\epsilon}^*$

Utilizando os mesmos argumentos de 3.2.3, consideramos que os  $n_{ij}$  são pequenos em relação aos respectivos  $N_{ij}$ . Supondo ainda a independência entre as cortes segue pelo item 2.3.2 do capítulo 2 que

$$\text{Cov}(\tilde{\epsilon}^*) = \sigma^2 \cdot \tilde{I}_{(sp-2)}$$

onde  $\tilde{I}_{(sp-2)}$  é a matriz identidade de ordem  $sp-2$ .

### 3.3.4 - Estimação dos $N_1(c)$

Seja  $\beta_0(c) = \ln(\lambda N_1(c))$ . Então segue que

$$N_1(c) = \frac{e^{\beta_0(c)}}{\lambda} ; \quad c=1, 2, \dots, s+p-3 \quad (3.26)$$

E, por raciocínio idêntico ao desenvolvido no item 2.3.3 do capítulo 2, chegamos ao estimador de  $N_1(c)$ :

(i) Estimador de  $N_1(c)$ :

$$\hat{N}_1(c) = \frac{e^{\hat{\beta}_0(c)}}{\hat{\lambda}} ; c = 1, 2, \dots, s+p-3 \quad (3.27)$$

onde  $\hat{\beta}_0(c)$  e  $\hat{\lambda}$  são estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_0(c)$  e  $\lambda$ , respectivamente.

(ii) Variância de  $\hat{N}_1(c)$ :

Supondo  $E[\hat{\beta}_0(c)] = \beta_0(c)$  e  $E[\hat{\lambda}] = \lambda$ , a variância de  $\hat{N}_1(c)$  pode ser aproximada, utilizando expansão de Taylor. Retendo apenas os termos de primeira ordem na expansão, a variância será dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{N}_1(c)] = & \left( \frac{e^{\hat{\beta}_0(c)}}{\hat{\lambda}} \right)^2 \cdot [\text{Var}\hat{\beta}_0(c) - \frac{2\text{Cov}(\hat{\beta}_0(c), \hat{\lambda})}{\lambda} + \\ & + \frac{\text{Var}(\hat{\lambda})}{\lambda^2}] \quad (3.28) \end{aligned}$$

### 3.3.5 - Linearização dos modelos (3.24) e (3.25)

Na tentativa de simplificar os modelos não-lineares descritos em 3.3.2, procuramos obter um modelo linearizado em função da expansão em série de Taylor para

$$\ln\left(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}\right)$$

com relação a valores genéricos fixados:  $\lambda$  e  $\delta_j$ .

Um desenvolvimento mais detalhado desta lineariza-

ção está no Anexo 7. A seguir descreveremos apenas os resultados principais. A expansão, retendo-se somente os termos de 1ª ordem, leva ao seguinte:

$$\ln\left(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}\right) \cong \ln\left(\frac{\lambda^0 + \delta_j^0}{\lambda^0}\right) - \frac{\delta_j^0}{\lambda^0(\lambda^0 + \delta_j^0)} - \frac{\delta_j^0}{\lambda^0(\lambda^0 + \delta_j^0)} \cdot \lambda +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda^0 + \delta_j^0}\right) \delta_j \quad (3.29)$$

Escolhendo  $\delta_j^0 = 0$  para todo  $j$ , o que seria razoável quando supomos que as variações de coeficiente de capturabilidade em função dos anos são desprezíveis, esta aproximação simplifica-se muito:

$$\ln\left(\frac{\lambda + \delta_j}{\lambda}\right) \cong \frac{1}{\lambda^0} \cdot \delta_j \quad (3.30)$$

Substituindo-se o termo não-linear em (3.24) e em (3.25) pela aproximação (3.30), resulta o modelo linearizado, que para (3.25) será

$$z_{ij} \cong \ln(\lambda N_1(c)) - \left(m - \frac{1}{2}\right) \mu - \left(\frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}\right) \lambda +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda^0} + \frac{f_i}{2}\right) \delta_j - \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v} \delta_{j-v} + \epsilon_{ij}^* \quad (3.31)$$

### 3.4 - Os métodos de regressão e a análise de coorte

Paloheimo (1980) comenta, com base nos modelos considerados em 3.3, que o método de regressão (MR) é muito

sensível a eventuais padrões na capturabilidade. Estes padrões podem ser consequência da inabilidade em padronizar as medidas de esforço convenientemente, para que incorporem mudanças nos aparelhos e/ou nas técnicas de captura, bem como possíveis alterações na habilidade dos executores ou mudanças de legislação (para o caso de exploração comercial). Conclui dizendo que a existência dos padrões na capturabilidade não pode ser evitada por meio de técnicas estatísticas específicas, mas somente por um exame detalhado da validade dos dados, de forma que eventuais padrões ou vícios sejam corrigidos sempre que for possível.

Um recurso sugerido por Paloheimo (1980) para detectar padrões na capturabilidade e eventualmente possibilitar sua correção, é a técnica de Análise de Coorte (AC) ou Análise de População Virtual (VPA), descrita no Anexo 6. Os métodos MR e AC (ou VPA) são técnicas complementares em alguns aspectos:

- (i) AC pressupõe a existência de valores conhecidos para  $\mu$ ;  $\phi_{ip}$ ,  $i=1, 2, \dots, s$  e  $\phi_{sj}$ ,  $j=2, \dots, p-1$ . O MR pode fornecer as estimativas para estes parâmetros.
- (ii) O MR é muito sensível a padrões na capturabilidade. A AC, por não ser sensível a estes padrões, pode ser utilizada para detectá-los e

eventualmente incluí-los no modelo.

Portanto, uma utilização conjunta dos dois métodos pode levar a uma compreensão mais detalhada dos dados bem como a conclusões sobre a adequação do modelo teórico suposto.

### 3.4.1 - Algoritmo para utilização do MR e AC

Com base nos comentários da seção anterior, sugerimos o seguinte procedimento para a análise dos dados:

- (i) Fazer a regressão considerando apenas as idades totalmente recrutadas ( $r_j = 1$ ) e utilizando algum dos modelos que supõe  $\lambda$  constante. Obter desta forma os estimadores de mínimos quadrados  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\lambda}$ .
- (ii) Utilizar  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\phi}_{ip} = \hat{\lambda}f_i$  ( $i=2,3, \dots, s$ ) e  $\hat{\phi}_{sj} = \hat{\lambda}f_s$  ( $j=2, \dots, p-1$ ) como estimativas iniciais na análise de coorte.
- (iii) Lembrando que  $\phi_{ij} = \lambda_{ij} \frac{f_{ij}}{p_i} = \lambda_{ij} \frac{f_i r_j}{p_i}$ , podemos utilizar as informações de esforço e os  $\phi_{ij}$  estimados pela AC para obter estimativas dos respectivos  $\lambda_{ij}$ , a fim de que se avalie o

comportamento do coeficiente de capturabilidade em função da idade e do tempo. Esta análise também possibilita a obtenção de estimativas iniciais para os  $\delta_j$  numa eventual regressão não-linear.

Convém observar que, quando  $r_j$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) forem desconhecidos, a única saída será utilizar as estimativas de  $\lambda_{ij}r_j$ , pois:

$$\frac{\phi_{ij}}{f_i} = \lambda_{ij}r_j$$

Portanto, estaremos estimando  $\lambda_{ij}$  somente para as idades totalmente recrutadas ( $r_j = 1$ ). Para as demais idades o fator seletividade estará incorporado à estimativa. Por esta razão é mais conveniente utilizar apenas as idades totalmente recrutadas (item (i)) no MR. Na prática, a escolha destas idades pode ser feita utilizando como primeira idade no modelo aquela que apresentar a maior captura média, e considerando que a partir dela as demais idades estejam totalmente disponíveis à captura (recrutadas). Muitas vezes será conveniente eliminar dados relativos às idades muito avançadas, por serem pouco confiáveis.

### 3.4.2 - Resumo das vantagens e limitações do MR

Como vantagens do MR sobre AC (ou VPA), citamos:

- (i) O MR permite a obtenção de resíduos que possibilitam verificar a adequação dos dados considerados ao modelo suposto, o que não é possível fazer com a AC.
- (ii) Podemos utilizar técnicas de diagnóstico em regressão para detectar eventuais pontos amostrais suspeitos (outliers). Se necessário, podem ser utilizadas técnicas para substituir estes valores por outros mais convenientes e desta forma melhorar o ajuste do modelo.
- (iii) Os parâmetros estimados no MR vêm acompanhados das estimativas de suas variâncias, o que possibilita fazer testes estatísticos, bem como avaliar a quantidade de informação contida nos dados.

Como limitações do MR, citamos:

- (i) Quando da necessidade de recorrer a modelos não-lineares, não há garantias de uma solução única, já que esta solução pode variar em função dos valores pelos quais o procedimento iterativo se inicia.

- (ii) A necessidade de trabalhar com boas estimativas de esforço pode ser um fator limitante a um bom ajuste do modelo.
  
- (iii) Os cálculos envolvem multiplicação e inversão de matrizes muito grandes; daí a necessidade do suporte de computadores e programas adequados para sua execução.

## 4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 4.1 - Introdução

Neste capítulo mostraremos aplicações para alguns dos modelos propostos no capítulo anterior. Utilizaremos informações disponíveis sobre duas populações de peixes exploradas comercialmente:

- (i) o Pargo (Lutyanus purpureus), importante recurso pesqueiro do nordeste brasileiro; e
- (ii) a Castanha (Umbrina canosai), que é muito pescada no extremo sul da costa brasileira.

No estudo de ambas as populações já foi utilizada a técnica de Análise de Coorte, comentada no capítulo 3 e resumida no Anexo 6. Tomando os dados que foram utilizados na Análise de Coorte e acrescentando as informações disponíveis sobre o esforço de pesca, pode-se tentar o ajuste dos modelos anteriormente descritos.

Restringiremos nossas aplicações aos modelos lineares

res descritos em 3.3 por serem mais simples, e portanto de maior interesse prático, já que exigem apenas uma matriz diagonal para os erros.

No final do capítulo, apresentaremos uma sugestão de seqüência de procedimentos que pode ser adotada na escolha do modelo mais adequado aos dados em estudo.

#### 4.2 - O Pargo (Lutyanus purpureus, Poey)

Os dados sobre a pesca de Pargo foram extraídos de Alves, T. T. e outros (1985). Na Tabela 1 apresentamos as capturas estimadas (em número de indivíduos) por ano e por idade, juntamente com os esforços anuais de pesca (em mil anzóis/hora). A análise subsequente está restrita às idades 6 a 14. Consideramos a idade 6 como aquela idade a partir da qual o recrutamento é completo ( $r_j = 1; j \geq 6$ ).

Os diversos modelos tentados têm seus principais resultados descritos na Tabela 2. O primeiro modelo que foi aplicado é o modelo (3.23), que supõe um coeficiente de capturabilidade constante para todas as idades e anos ( $\lambda_{ij} = \lambda$ , para todo  $(i, j)$ ). A regressão nº 1 da Tabela 2 fornece as estimativas para a taxa de morte natural ( $\mu$ ), o coeficiente de capturabilidade ( $\lambda$ ), juntamente com os respectivos erros padrão, e ainda o erro quadrático médio (EQM). A análise dos resíduos para este modelo foi feita primeiramente plotando-

se os resíduos  $(z_{ij} - \hat{z}_{ij})$  em função dos valores estimados pelo modelo,  $\hat{z}_{ij}$ . Estes resultados, na Figura 1, não sugerem qualquer inadequação do modelo utilizado. Plotamos então os resíduos em função das idades juntamente com o valor médio destes resíduos por idade (Figura 2). Através do teste de Levene, rejeitamos a hipótese de igualdade de variâncias ( $F_{(8,88)} = 2,90$ ;  $ND = 0,0065$ ) entre os grupos de idade. Optamos então por um modelo de regressão ponderado em que a matriz  $Cov(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 \cdot \underline{I}$  foi substituída por  $Cov(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 \cdot \underline{V}$ , com  $\underline{V}$  sendo uma matriz diagonal de forma que aos elementos  $\epsilon_{ij}$  estivesse associada a variância  $\sigma^2 \cdot v_{ij}$  tal que para as ponderações  $\omega_{ij} = (v_{ij})^{-1}$  se verificassem as seguintes propriedades:

- (1)  $\omega_{ij} \propto 1/\sigma_j^2$ ; isto é, o peso associado ao elemento  $(i,j)$  é inversamente proporcional à variância dos resíduos para a idade  $j$ . Em outras palavras isto equivale dizer que a variância associada ao elemento  $\epsilon_{ij}$  é proporcional à variância dos resíduos para a idade  $j$ .
- (2)  $[\sum_i \sum_j \omega_{ij} / (s+p-2)] = \bar{\omega} = 1$ ; o peso médio considerando todas as  $s+p-2$  observações é igual a 1. Isto permite compararmos os erros quadráticos médios (EQM) dos modelos não-ponderado e ponderado.

Os pesos utilizados para as idades  $j=6, 7, 8, \dots, 14$  foram, respectivamente: 0,54; 1,52; 1,91; 1,99; 0,70;

1,12; 0,36; 0,32 e 0,34. A regressão nº 2 da Tabela 2 fornece os principais resultados associados ao ajuste deste modelo. Houve uma pequena melhoria na precisão das estimativas de  $\mu$  e  $\lambda$ , quando analisadas isoladamente. Mas, através do EQM verificamos uma sensível melhora no ajuste do modelo, já que a ponderação reduziu seu valor em 31%. Na Figura 3 estão representados os resíduos ponderados

$$\sqrt{w_{ij}} (z_{ij} - \tilde{z}_{ij}),$$

com as respectivas médias por idade. O teste de Levene leva à aceitação da igualdade das variâncias para os grupos de idade

$$(F_{(8,88)} = 0,97; \text{ND} = 0,4639).$$

Nos demais modelos que consideramos, a regressão ponderada sempre foi superior à não-ponderada, no sentido de apresentar menor EQM. Por esta razão trataremos apenas dos modelos ponderados na seqüência da análise.

Observando as médias dos resíduos por idade nas Figuras 2 e 3, podemos verificar o mesmo padrão nos dois modelos. Isto nos levou à utilização do modelo mais geral, onde  $\lambda_j = \lambda + \delta_j$ ; ou seja, admitimos que o coeficiente de capturabilidade varie com a idade. Na regressão nº 3 da Tabela 2 consideramos o modelo linearizado (3.31), conforme descrito na seção 3.3.5, onde impusemos  $\delta_{14} = 0$  e portanto  $\lambda = \lambda_{14}$ , ou seja, a estimativa de  $\lambda$  refere-se ao coeficiente de capturabilidade para a idade 14. Utilizamos ainda para

$\lambda_0$  o valor  $\lambda_0 = 0,39 \cdot 10^{-4}$ , que é a melhor estimativa disponível para  $\lambda$ , conforme a regressão nº 2.

O teste estatístico que descreveremos na etapa 5 da seção 4.4, quando baseado nas somas de quadrados residuais (SQR) das regressões 2 e 3, mostra que o vetor  $\underline{\delta} = (\delta_6, \delta_7, \dots, \delta_{13})'$  é significativamente distinto de zero ( $F_{(8,70)} = 5,17$ ; ND = 0,00004); ou seja, a capturabilidade não é a mesma para todas as idades consideradas no modelo.

Os resíduos ponderados agrupados por idade, para a regressão nº 3 estão graficados na Figura 4, onde podemos observar o desaparecimento no padrão entre as médias que havia para os modelos anteriormente considerados.

Num outro tipo de análise, comparamos as estimativas  $\bar{\lambda}_j$  (= coeficiente de capturabilidade médio para a idade j) obtidas a partir da Análise de Coorte através do procedimento descrito em (iii) da seção 3.4.1, com as estimativas de mínimos quadrados  $\hat{\lambda}_j = \hat{\lambda} + \hat{\delta}_j$ , obtidas no modelo de regressão nº 3 da Tabela 2. Estes resultados estão na Tabela 3 e na Figura 5. O comportamento semelhante dos dois conjuntos de estimativas são uma indicação da consistência dos dados. É interessante notar também que o padrão para os resíduos, observados nas Figuras 2 e 3 é muito semelhante ao padrão nos coeficientes de capturabilidade na Figura 5.

Procuramos, na seqüência, determinar os parâmetros  $\delta_j$  que efetivamente fossem distintos de zero. Utilizamos pa-

ra isto um procedimento "stepwise" para a inclusão dos parâmetros delta ( $\delta$ ) no modelo linearizado (3.31). O resultado na regressão nº 4 da Tabela 2 indica que apenas os deltas para as idades 8, 9 e 11 são significativos no modelo.

Com base nestas informações, passamos ao ajuste do modelo não-linear (3.25), onde consideramos os deltas ( $\delta$ ) para as idades 8, 9 e 11. O procedimento iterativo foi iniciado com as estimativas da regressão nº 4. A convergência ocorreu após seis iterações com estimativas muito próximas dos valores iniciais, conforme regressão nº 5 da Tabela 2. Na Figura 6 representamos os resíduos agrupados por idade para esta regressão, onde o padrão em função das idades se mantém praticamente eliminado como no caso da regressão nº 3 com todos os deltas.

Nas Figuras 7 e 8 apresentamos os resíduos ponderados para as regressões 2 e 5, respectivamente, agrupados por ano. Podemos verificar um padrão para as médias por ano muito semelhante para os dois modelos; uma indicação de que a eliminação dos padrões no coeficiente de capturabilidade por idade não agiu sobre possíveis padrões em função dos anos.

Na Tabela 4 apresentamos estimativas de  $N_1(c)$  juntamente com estimativas dos respectivos erros padrão, para algumas das coortes nas regressões nºs 2 e 4. Na Tabela 5 está a matriz das correlações estimadas entre estes mesmos

$\hat{N}_1(c)$ , para a regressão nº 2. Isto nos dá uma indicação de que os erros padrão da Tabela 4 são sobreestimativas para a real variação dos estimadores, quando estes são estimados conjuntamente, já que os erros padrão fornecem informações sobre a variação marginal destas variáveis isoladamente, e não sua variação conjunta.

Igualmente, as estimativas de  $\mu$  e  $\lambda$  nos modelos apresentados estão associadas a erros padrão aparentemente grandes. Porém, na Tabela 6, verificamos que estas estimativas são muito correlacionadas negativamente. Pelas razões acima expostas, também aqui a estimativa conjunta de  $\mu$  e  $\lambda$  será bem mais precisa do que sugerem os respectivos erros padrão.

#### 4.3 - A Castanha (Umbrina canosai)

Os dados de captura e de esforço anual de pesca para a Castanha, apresentados na Tabela 7, foram cedidos pelo Prof. Manuel Haimovici, do Departamento de Oceanografia da Fundação Universidade do Rio Grande. Incluíram-se na análise as idades 3 a 14 anos, para o período de 1976 a 1983. Os critérios utilizados para a seleção das idades consistem na inclusão de idades totalmente recrutadas, evitando as idades muito altas em função de pouca confiabilidade na sua determinação. Várias medidas de esforço foram consideradas:

- (i) dias no mar ( $f$ );
- (ii) número de viagens ( $v$ ); e
- (iii) "esforço corrigido" ( $f_c$ ), estabelecido em função de modificações em  $f$ , conforme considerações descritas abaixo.

Procuramos ajustar vários modelos, cujos principais resultados apresentamos na Tabela 8. Inicialmente, ajustamos o modelo linear (3.23), utilizando o esforço "dias no mar" ( $f$ ). Os resultados correspondentes à regressão nº 1 da Tabela 8 não foram satisfatórios por apresentarem uma taxa de morte natural excessivamente elevada ( $\hat{\mu} = 1,59$ ) e um coeficiente de capturabilidade negativo ( $\hat{\lambda} = -1,25 \cdot 10^{-4}$ ). Os resíduos para este modelo agrupados por idade e por ano estão nas Figuras 9 e 10, respectivamente. Os resíduos agrupados por ano apresentam um padrão acentuado, sugerindo problemas na medida de esforço utilizado, não incorporando convenientemente as possíveis variações de capturabilidade em função dos anos. Procuramos ajustar modelos ponderados utilizando vários critérios de ponderação (idade, ano, coorte). Também tentamos melhorar o ajuste através da exclusão de possíveis elementos "outliers", como por exemplo, a captura para a idade 14 e ano 1978 ( $n = 27$ ), cujo resíduo está assinalado na Figura 10. Todas essas tentativas foram improdutivas, mantendo estimativas negativas para o coeficiente de capturabilidade ( $\lambda$ ) e taxas de mortalidade natural ( $\mu$ ) muito elevadas.

A partir das estimativas de  $\phi_{ij}$  pela Análise de Coorte, que, recordamos, não é sensível a padrões em  $\lambda$ ; e utilizando as medidas de esforço ( $f$ ), foi possível calcular valores estimados de  $\lambda_{ij}$  através da seguinte relação:

$$\lambda_{ij}^* = \frac{F_{ij}}{f_i}$$

onde os valores  $F_{ij}$  são estimativas para  $\phi_{ij}$  pela Análise de Coorte.

A partir dos valores  $\lambda_{ij}^*$ , calculamos uma nova medida de esforço, que denominamos "esforço corrigido" ( $f_c$ ), procurando compensar as eventuais variações anuais de capturabilidade, criando assim uma medida de esforço mais adequada às suposições dos modelos utilizados. Obtivemos o esforço corrigido para o  $i$ -ésimo ano através da relação:

$$f_{c_i} = \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda} \cdot f_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, s$$

onde:

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \lambda_{ij}^* \quad \text{para:}$$

$$\left[ \begin{array}{l} q = p-1 \quad \text{para } i = 1 \text{ ou } s \\ q = p \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, s-1 \end{array} \right.$$

e

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \bar{\lambda}_i$$

Utilizando os "esforços corrigidos" ( $f_c$ ), voltamos a aplicar o modelo (3.23), inicialmente com as idades 3 a 14, e depois para as idades 3 a 13. Na regressão nº 2 da Tabela 8, apresentamos as principais estimativas para o modelo com idades 3 a 13, com valores bem mais razoáveis que os anteriormente obtidos. A preferência em trabalhar com as idades 3 a 13 na seqüência da análise deve-se ao melhor ajuste destes modelos, uma vez que, nas análises de resíduos, candidatos a possíveis "outliers", se concentravam sobre a idade 14, principalmente a captura para o ano 1978 ( $n = 27$ ), já comentada anteriormente.

Uma comparação visual entre as várias medidas de esforço na Figura 12 indicam uma evolução muito semelhante para o esforço corrigido ( $f_c$ ) e o esforço medido em viagens ( $v$ ), enquanto o padrão seguido pelo esforço em dias no mar ( $f$ ) é distinto destes. Esta observação nos levou à suspeita de que o esforço em viagens ( $v$ ) se adequasse melhor às suposições do modelo do que o esforço em dias no mar ( $f$ ). Efeituamos então um novo ajuste do modelo (3.23), considerando o esforço em viagens ( $v$ ) para as idades 3 a 13. Os principais resultados apresentados na regressão nº 3 da Tabela 8 fornecem como estimativas para a taxa de morte natural  $\hat{\mu} = 0,34$ , um valor muito elevado, conforme Haimovici (1983), que apresenta como estimativa para  $\zeta = \mu + \phi$ , a partir das curvas de captura, o valor  $\hat{\zeta} = 0,33$ . Para as técnicas de Análise de Coorte, Haimovici (comunicação pessoal) tem utilizado  $\mu = 0,20$  como provável valor para a taxa de morte natural. Os resíduos agrupados por idade e por ano

estão representados graficamente nas Figuras 13 e 14, respectivamente.

Procuramos eliminar um eventual efeito da idade permitindo coeficientes de capturabilidade variáveis com a idade, utilizando o modelo linearizado (3.13) impondo  $\delta_{13} = 0$  e  $\lambda_0 = 4,63 \cdot 10^{-4}$ , em função da estimativa de  $\lambda$  na regressão nº 3. Através do teste da etapa 5, seção 4.4, não há evidências para a rejeição da hipótese de que  $\underline{\delta} = (\delta_3, \delta_4, \delta_5, \dots, \delta_{12})'$  fosse igual a zero ( $F_{(10,48)} = 0,84$ ; ND = 0,5949). As variâncias dos resíduos agrupados por idade podem ser consideradas iguais, não justificando uma ponderação nos moldes em que foi feita para o Pargo. Desta maneira acreditamos que a regressão nº 3 foi o melhor ajuste que obtivemos a partir dos dados da Castanha.

Na Tabela 9 apresentamos estimativas para alguns valores  $N_1(c)$  na regressão nº 3. Na Tabela 10, a matriz das correlações estimadas entre as estimativas  $\hat{N}_1(c)$  indicam que, em função das altas correlações, os valores dos desvios padrão da tabela anterior não refletem a precisão destas estimativas quando consideradas conjuntamente, uma vez que representam a variabilidade marginal. Para a regressão 3 a correlação entre  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\lambda}$  é  $r_{\hat{\mu}, \hat{\lambda}} = -0,997$ , novamente uma indicação de que a estimação conjunta desses dois parâmetros,  $\mu$  e  $\lambda$ , é bem mais precisa do que fazem supor os respectivos desvios padrão, isoladamente.

#### 4.4 - Proposta de estratégia de análise

O propósito nesta seção é apresentar uma estratégia de análise para a utilização dos modelos desenvolvidos em 3.3 e utilizados nos exemplos aplicados deste quarto capítulo.

Resumiremos a estratégia proposta em 7 etapas, que são as seguintes:

Etapa 1 - Aplicação do modelo linear (3.23) em que se considera o coeficiente de capturabilidade constante ( $\lambda_{ij} = \lambda$ ).

Etapa 2 - Análise de resíduos ( $z_{ij} - \bar{z}_{ij}$ ) para detectar eventuais "outliers" e/ou verificar a adequação do modelo considerado.

Etapa 3 - Repetir a aplicação do modelo (3.23) com as possíveis modificações resultantes da análise efetuada na Etapa 2.

Etapa 4 - Aplicação do modelo linearizado (3.31) com  $\lambda_j = \lambda + \delta_j$ ; ou seja, coeficientes de capturabilidade variáveis em função das idades. Se  $j^*$  representa a máxima idade considerada na análise, então convém estabelecer  $\lambda_{j^*} = \lambda$ ; isto é,  $\delta_{j^*} = 0$  (ver co-

mentário a respeito no Anexo 7). O valor  $\lambda$  a ser utilizado neste modelo pode ser o estimador de  $\lambda$  obtido na Etapa 3.

Etapa 5 - Efetuar o teste de hipótese  $H_0: \underline{\delta} = \underline{0}$  contra  $H_1: \underline{\delta} \neq \underline{0}$ , onde  $\underline{\delta}$  é um vetor ( $r \times 1$ ), através da seguinte estatística:

$$F = \frac{(SQR(R) - SQR(C))/r}{SQR(C)/(n-p)} \sim F(r, n-p)$$

onde:

SQR(C) = soma de Quadrados dos resíduos no modelo "completo"  
(3.31)

SQR(R) = soma de Quadrados dos resíduos no modelo "reduzido"  
(3.23)

$n$  = número de observações

$p$  = número de parâmetros no modelo "completo"

$r$  = número de  $\delta_j$ 's constituindo o vetor  $\underline{\delta}$ .

Aceitando a hipótese  $H_0$ , o modelo da Etapa 3 pode ser considerado adequado. Se  $H_0$  não for aceito, passamos à etapa seguinte.

Etapa 6 - Determinar quais os  $\delta_j$ 's que seriam diferentes de zero. Isto poderá ser feito utilizando eventuais informações disponíveis sobre o comportamento da atividade pesqueira, criando grupos de idade com  $\delta_j$ 's iguais, por exemplo. Podem ser utilizadas técnicas estatísticas como "agrupamento monotônico" ou regressão "stepwise" para a inclusão dos parâmetros  $\delta_j$ .

Etapa 7 - Após a definição dos  $\delta_j$ 's diferentes de zero (ou grupos de idade com mesmo  $\delta$ ), passamos ao modelo não-linear (3.25) adaptado aos resultados da Etapa 6. Os parâmetros utilizados para iniciar o procedimento iterativo, podem ser estabelecidos em função das regressões anteriores.

## CONCLUSÃO

No presente trabalho procuramos apresentar, numa seqüência coerente, uma série de modelos que utilizam informações de captura e de esforço para estimar parâmetros relacionados com a dinâmica de populações animais; especificamente, a taxa de morte natural ( $\mu$ ), o coeficiente de capturabilidade ( $\lambda$ ) e o tamanho da população ( $N$ ). Mostramos detalhadamente a obtenção dos diversos modelos de regressão a partir de um modelo estocástico comum em estudos de populações animais. Obtivemos as expressões para as variâncias aproximadas da estimativa de  $N$ , bem como as matrizes de covariância para os erros aleatórios nos diversos modelos, seguindo sugestões de Seber (1973).

Nas aplicações efetuadas no capítulo 4, confirmamos a importância dos resíduos para verificarmos a adequação dos modelos propostos aos dados disponíveis, bem como auxiliar na procura de eventuais modelos alternativos. Isto é um fator importante a favor dos modelos desenvolvidos neste trabalho, uma vez que a maioria das técnicas comumente utilizadas na dinâmica de populações envol-

veu modelos determinísticos e que, portanto, não permitem este tipo de consideração.

Por outro lado, verificamos que a qualidade das medidas de esforço são um fator limitante para o sucesso dos modelos apresentados. Porém as considerações feitas nas aplicações para a Castanha indicam a possibilidade da utilização destes modelos para a avaliação e eventual melhoria das medidas de esforço disponíveis, o que, por sua vez, pode trazer benefícios em outros tipos de análise, onde as medidas de esforço são necessárias; por exemplo, os "modelos de produção".

Para uma utilização mais generalizada e eficiente dos modelos aqui considerados, são necessários estudos de simulação em populações com padrões específicos nos parâmetros  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $N$ , avaliando o comportamento dos estimadores nas diferentes situações. Braaten (1969) e Butler & McDonald (1979) apresentam estudos simulados para algumas formas simplificadas dos modelos tratados no presente trabalho. A extensão desses estudos para os modelos mais gerais seriam convenientes.

Acreditamos ainda que uma importante contribuição do presente trabalho está nos modelos linearizados apresentados na secção 3.3.5 e desenvolvidos no Anexo 7. Estes modelos se mostraram bastante úteis em substituição aos modelos não-lineares originais, com resultados numéricos muito semelhantes. Através desta aproximação, evi-

tamos a utilização dos modelos não-lineares, que envolvem procedimentos mais complexos.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 - ALVES, T. T.; SILVA; A. L. N. da & MELO, A.A. de. Relatório do grupo de trabalho da pesca do Pargo. SU-DEPE - Série Documentos Técnicos nº 34, 1985. p.168-200.
- 2 - BEVERTON, R. J. H. & HOLT, S. J. On the dynamics of exploited fish populations. London, Her Majesty's Stationery Office, 1957.
- 3 - BRAATEN, D. O. Robustness of the De Lury population estimator. J. Fish. Res. Bd. Canada, 1969. v. 26: 339-55.
- 4 - BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. & LAAKE, J. L. Estimation of density from line transect sampling of biological populations. U.S.A., Wildlife Monographs, 1980, nº 72.
- 5 - BUTLER, S. A. & McDONALD, L. L. A simulation study of catch-effort model for estimating mortality rates. Trans. of the American Fish. Soc., 1979. v. 108:353-57.
- 6 - CHAPMAN, D. G. Statistical problems in the dynamics of exploited fish populations. Proc. 4th Berkeley Symp. 1960, 1961. v. 4:153-68.
- 7 - CHIANG, C. L. An introduction to stochastic processes and their applications. New York, Huntington, Robert & Krieger Publishing, 1980.
- 8 - CLARK, Colin W. Mathematical bioeconomics the optimal management of renewable resources. New York, John Wiley & Sons, 1976.
- 9 - CLARK, Colin W. Bioeconomic modelling and fisheries management. New York, John Wiley & Sons, 1985.

- 10 - DIXON, W. J. BMD biomedical computers programs. Berkeley, Univ. of California Press - Centro de Computação Eletrônica da Universidade de São Paulo, 1974.
- 11 - DOUBLEDAY, W. G. A least squares approach to analysing catch at age data. ICNAF Research Bulletin, 1976. nº 12:69-81.
- 12 - DUPONT, W. D. A stochastic catch-effort method for estimating animal abundance. Biometrics, 1983. v. 35(4):1.021-33.
- 13 - GRAYBILL, F. A. Theory and application of the linear models. Duxbury Press, 1976.
- 14 - GULLAND, J. A. Estimation of mortality rates. Annex to Arctic Fisheries Working Group Report. ICES CM Gadoid Fish Comm., 1965. (3):1-9. (mimeo)
- 15 - GULLAND, J. A. Fish stock assessment. A manual of basic methods v.1. New York, John Wiley & Sons, 1983.
- 16 - HAIMOVICI, M. Elementos para o manejo de Castanha Umbrina canosai (PISCES: SCIANIDAE) no Rio Grande do Sul. Montevideo, Anais do VIII Simpósio Latino-americano sobre Oceanografia Biológica, 1983. (no prelo)
- 17 - HOEL, P. G. PORT, S. C. & STONE, C. J. Introduction to stochastic processes. Boston, Houghton Mifflin Company, 1972.
- 18 - MUIR, B. S. Vital statistics of Esox masquinongy in Nogies Creek, Ontario. II. Population Size, natural mortality, and the effect of fishing. J. Fish. Res. Bd. Canada, 1964. v. 21(4):727-46.
- 19 - OTIS, D. L.; BURNHAM, K. P.; WHITE, G. C. & ANDERSON, D. R. Statistical inference from capture data on closed animal populations. U.S.A., Wildlife Monographs, 1978. nº 62.
- 20 - PALOHEIMO, J. E. Studies on estimation of mortalities. I. Comparison of a method described by Beverton and Holt and a New Linear Formula. J. Fish. Res. Bd. Canada, 1961. v. 18(5)-645:62.
- 21 - PALOHEIMO, J. E. Estimation of mortality rates in fish populations. Trans. of the American Fish. Soc., 1980. v. 109:378-86.
- 22 - POPE, J. G. An investigation of the accuracy of virtual population analysis using Cohort Analysis. ICNAF Research Bulletin, 1972. nº 9:65-74.

- 23 - RICKER, W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. Bulletin of the Fisheries Research Board of Canada, 1975. n<sup>o</sup> 191.
- 24 - SEBER, G. A. F. The estimation of animal abundance and related parameters. London, Griffin, 1973.
- 25 - ULLTANG, Ø. Sources of errors in and limitations of virtual populations analysis (Cohort Analysis). J. Cons. Int. Explor. Mer., 1977. v.37(3):249-60.

A N E X O S

## A N E X O     1

### "APROXIMAÇÃO PARA $\ln((1-e^{-x})/x)$ "

Proposição:

Seja  $x \geq 0$  e  $f(x) = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)$ . Então se  $x \stackrel{\circ}{=} 0$ ,  
 $f(x)$  pode ser aproximado por  $f(x) \stackrel{\circ}{=} -\frac{x}{2}$ .

Prova:

A expansão em série de MacLaurin para  $e^{-x}$  está da da por:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Donde segue:

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \dots$$

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \dots$$

E, portanto:

$$\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \dots\right)$$

Se  $x \stackrel{\circ}{=} 0$ , pode-se escrever:

$$\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) \doteq \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Se efetuarmos expansão em série de MacLaurin para  $g(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ , retendo apenas o 1º termo de série, temos:

$$g(x) \doteq - \frac{x}{2}$$

Portanto:

$$\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) \doteq - \frac{x}{2}$$

## A N E X O      2

### 1) A distribuição multinomial

A forma de distribuição multinomial para

$$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_s)'$$

será dada por (adaptado de DUPONT, 1983):

$$P(n|\theta) = \frac{N_1!}{(N_1 - \sum_{j=1}^s n_j)! \prod_{j=1}^s (n_j!)} \cdot T^{N_1 - \sum_{j=1}^s n_j} \prod_{j=1}^s \theta_j^{n_j} \quad (A2.1)$$

onde:  $\underline{\theta} = (N_1, \lambda, \mu)$  e  $T = 1 - \sum_{j=1}^s \theta_j$

E onde temos:

(i)  $r(t) = \exp[-\int_0^t (\mu + \lambda f(x)) dx]$  - probabilidade de que um particular indivíduo sobreviva até o instante  $t$ .

$$\text{Mas } \int_0^t (\mu + \lambda f(x)) dx = \mu t + \lambda \int_0^t f(x) dx.$$

Considerando as suposições S1 a S5 do capítulo 1, e  $p_i \leq 1$  para todo  $i$ , segue:

$$\int_0^t f(x) dx = \int_0^{a_{10}} f_1 \cdot dx + \int_{t_1}^{a_{20}} f_2 \cdot dx + \dots +$$

$$+ \int_{t_m}^{t_m^o} f_m^o dx = \sum_{j=1}^{m-1} f_j^o (a_j - t_{j-1}) + f_m^o g_m$$

$$\text{onde: } a_i = p_i d_i + t_{i-1}$$

$$m = \min\{j: t_j > t\}$$

$$g_m = \begin{cases} (t - t_{m-1}) & \text{se } t \leq a_m \\ (a_m - t_{m-1}) & \text{se } t > a_m \end{cases}$$

Finalmente,  $r(t)$  pode ser escrito como:

$$r(t) = \exp[-(\mu t + \lambda (f_m^o g_m + \sum_{j=1}^{m-1} f_j^o p_j d_j))] \quad (\text{A2.2})$$

(ii)  $\mathbb{P}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i^o} \lambda f_i^o(x) r(x) dx$  — probabilidade de que o indivíduo seja capturado no  $i$ -ésimo intervalo.

Novamente, pelas suposições S1 a S5 do capítulo 1, e  $p_i < 1$  para todo  $i$ , segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i &= \lambda \int_{t_{i-1}}^{a_i} f_i^o(x) r(x) dx = \lambda \int_{t_{i-1}}^{a_i} f_i^o \exp[-(\mu x + \lambda f_i^o(x - t_{i-1}) + \\ &\quad + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} f_j^o p_j d_j)] dx \end{aligned}$$

Calculando esta integral chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbb{P}_i = \frac{\lambda f_i^o}{\zeta_i} e^{-(\mu t_{i-1} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} f_j^o p_j d_j)} (1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}) \quad (\text{A2.3})$$

ou

$$\mathbb{P}_i = \frac{\lambda f_i^o}{\zeta_i} r(t_{i-1}) \cdot (1 - e^{-\zeta_i p_i d_i}) \quad (\text{A2.4})$$

(iii)  $\mathbb{P} = \sum_{i=1}^s \mathbb{P}_i$  — probabilidade de que o indivíduo seja capturado ao longo do experimento, isto é, entre 0 (zero) e  $t_s$ .

(iv)  $T = 1 - \mathbb{P}$  — probabilidade de que o indivíduo não seja capturado ao longo do experimento.

## 2) Variâncias e covariâncias aproximadas para $\ln(n_i)$

Para a distribuição multinomial descrita acima, valem as propriedades:

$$E[n_i] = N_1 \mathbb{P}_i \quad (\text{A2.5})$$

$$\text{Var}[n_i] = N_1 \mathbb{P}_i (1 - \mathbb{P}_i) \quad (\text{A2.6})$$

$$\text{Cov}[n_i, n_j] = - N_1 \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j \text{ para todo } i \neq j \quad (\text{A2.7})$$

Tomando a função  $g(n_i) = \ln(n_i)$  e expandindo em série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} g(n_i) &\cong g(E[n_i]) + \frac{(n_i - E[n_i])}{1!} g^{(1)}(E[n_i]) + \\ &+ \frac{(n_i - E[n_i])^2}{2!} g^{(2)}(E[n_i]) \end{aligned}$$

onde:

$$g^{(n)}(E[n_i]) = \frac{\partial^n g(n_i)}{\partial n_i^n} \Big|_{n_i = E[n_i]}$$

cuja esperança será:

$$E[g(n_i)] \doteq g(E[n_i]) + \frac{g^{(2)}(E[n_i])}{2!} \text{Var}[n_i]$$

E por (A2.5) e (A2.6), segue:

$$E[\ln(n_i)] \doteq \ln(N_1 \eta_i) + B_i \quad (\text{A2.8})$$

onde:

$$B_i = \frac{\eta_i - 1}{2N_1 \eta_i} \quad \text{é o vício do estimador.}$$

Supondo  $B_i \doteq 0$ , pode-se escrever para a variância de  $g(n_i)$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(n_i)] &= E(g(n_i) - E[g(n_i)])^2 \doteq \\ &\doteq E[g(n_i) - \ln(N_1 \eta_i)]^2 \end{aligned}$$

Utilizando novamente a expansão em série de Taylor, mantendo apenas o 1º termo de expansão, segue:

$$g(n_i) - \ln(N_1 \eta_i) \doteq (n_i - N_1 \eta_i) g^{(1)}(N_1 \eta_i)$$

Elevando esta expansão ao quadrado e calculando sua esperança, segue:

$$\text{Var}[\ln(n_i)] \doteq \frac{1}{(N_1 \eta_i)^2} \text{Var}[n_i] \quad (\text{A2.9})$$

E por (A2.6) segue:

$$\text{Var}[\ln(n_i)] \doteq \frac{1 - \eta_i}{N_1 \eta_i} \quad (\text{A2.10})$$

Finalmente notando que

$$\text{Cov}[g(n_i), g(n_j)] = E[(g(n_i) - E[g(n_i)]) \cdot (g(n_j) - E[g(n_j)])]$$

E, procedendo-se de forma análoga como para o cálculo da variância, segue que:

$$\text{Cov}(g(n_i), g(n_j)) \doteq \frac{1}{N_1^2 \eta_i \eta_j} \text{Cov}(n_i, n_j) \quad (\text{A2.11})$$

E de (A2.7), segue o resultado:

$$\text{Cov}[\ln(n_i), \ln(n_j)] \doteq - \frac{1}{N_1} \quad (\text{A2.12})$$

## A N E X O      3

"MATRIZES DE COVARIÂNCIA APROXIMADAS PARA

$$y_i = \ln\left(\frac{n_i}{f_i}\right) - \ln\left(\frac{n_{i+1}}{f_{i+1}}\right)"$$

### 1) Resultado geral

Para simplificação da notação, seja  $x_i = \ln(n_i)$ .  
Então é fácil verificar que:

$$(y_i - E[y_i]) = x_i - x_{i+1} - E[x_i] + E[x_{i+1}] \quad (A3.1)$$

E, portanto, de

$$\text{Cov}(y_i, y_j) = E[(y_i - E[y_i]) (y_j - E[y_j])]$$

segue:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_i, y_j) &= \text{Cov}(x_i, x_j) + \text{Cov}(x_{i+1}, x_{j+1}) - \\ &- \text{Cov}(x_i, x_{j+1}) - \text{Cov}(x_{i+1}, x_j) \end{aligned} \quad (A3.2)$$

### 2) □ com distribuição multinomial

Utilizando os resultados (A2.10) e (A2.12) do Anexo 2 na expressão (A3.2) dada acima, segue:

$$\text{Var}[y_i] \doteq \text{Cov}[y_i, y_i] = \frac{n_i + n_{i+1}}{N_1 n_i n_{i+1}} ;$$

$$i = 1, 2, \dots, s-1$$

$$\text{Cov}[y_i, y_{i+1}] \doteq - \frac{1}{N_1 n_{i+1}} ; \quad i = 1, 2, \dots, s-1$$

$$\text{Cov}[y_i, y_j] = 0 \quad \text{se } j \geq i+2 \text{ e } i = 1, 2, \dots, s-2.$$

### 3) $\ln(n_i)$ independentes com distribuição normal

Além da distribuição normal, supõe-se a seguinte estrutura de covariância para os  $x_i = \ln(n_i)$ :

$$\text{Cov}(x_i, x_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Nestas condições, utilizando (A3.2) chega-se à seguinte estrutura de covariância para  $\underline{y}' = (y_1, y_2, \dots, y_{s-1})$ :

$$\text{Var}(y_i) \doteq 2\sigma^2 ; \quad i = 1, 2, \dots, s-1$$

$$\text{Cov}(y_i, y_{i+1}) \doteq -\sigma^2 ; \quad i = 1, 2, \dots, s-1$$

$$\text{Cov}(y_i, y_j) \doteq 0 ; \quad j \geq i+2 \text{ e } i = 1, 2, \dots, s-2$$

A N E X O      4

"ESPERANÇA VARIÂNCIA E CORRELAÇÕES  
APROXIMADAS PARA  $\hat{N}_1$ "

No modelo considerado em (2.29),  $N_1$  é uma função do intercept ( $\beta_0$ ) e do coeficiente de capturabilidade ( $\lambda$ ), ou seja:

$$N_1 = f(\beta_0, \lambda) = \frac{e^{\beta_0}}{\lambda} \quad (\text{A4.1})$$

Sejam ainda  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)' = (E[\hat{\beta}_0], E[\hat{\lambda}])'$ . Então pode-se escrever a função  $f(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda})$  como expansão em série de Taylor. Retendo na expansão apenas até os termos quadráticos, segue:

$$\begin{aligned} f(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda}) = & f(\theta_1, \theta_2) + (\hat{\beta}_0 - \theta_1) \frac{\partial f(\underline{\theta})}{\partial \theta_1} + (\hat{\lambda} - \theta_2) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial f(\underline{\theta})}{\partial \theta_2} + \frac{(\hat{\beta}_0 - \theta_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(\underline{\theta})}{\partial \theta_1^2} + \\ & + \frac{(\hat{\lambda} - \theta_2)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(\underline{\theta})}{\partial \theta_2^2} + (\hat{\beta}_0 - \theta_1)(\hat{\lambda} - \theta_2) \frac{\partial^2 f(\underline{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

1 - Esperança

A esperança da função  $f(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda})$  está dada por:

$$E[f(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda})] \doteq \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} + \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \left[ \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_0)}{2} - \frac{\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda})}{\theta_2} + \frac{\text{Var}(\hat{\lambda})}{\theta_2^2} \right] \quad (\text{A4.3})$$

O estimador natural para  $N_1$ , conforme (A4.1) será:

$$N_1 = \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{\hat{\lambda}} \quad (\text{A4.4})$$

cuja esperança, conforme (A4.3) está dada por:

$$E[\hat{N}_1] \doteq \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} (1 + B) \quad (\text{A4.5})$$

onde:

$$B = \left[ \frac{\text{Var}(\hat{\beta}_0)}{2} - \frac{\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda})}{\theta_2} + \frac{\text{Var}(\hat{\lambda})}{\theta_2^2} \right] \quad (\text{A4.6})$$

## 2 - Variância

Supondo  $B \doteq 0$ , segue que:

$$\text{Var}[\hat{N}_1] \doteq E(f(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda}) - f(\theta_1, \theta_2))^2$$

Utilizando a expansão (A4.2) e mantendo apenas os termos de primeira ordem, chegamos ao seguinte resultado:

$$\text{Var}[\hat{N}_1] = \left( \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \right)^2 \left[ \text{Var}(\hat{\beta}_0) - \frac{2}{\theta_2} \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\lambda}) + \frac{1}{\theta_2^2} \text{Var}(\hat{\lambda}) \right] \quad (\text{A4.7})$$

3 - Correlação

Para duas coortes "x" e "y" quaisquer, temos a partir de (A4.5):

$$E[\hat{N}_1(x)] = \frac{e^{\theta_1(x)}}{\theta_2} (1+B(x)) \quad (A4.8)$$

$$E[\hat{N}_1(y)] = \frac{e^{\theta_1(y)}}{\theta_2} (1+B(y)) \quad (A4.8)$$

onde:

$$\theta_1(x) = E[\hat{\beta}_0(x)] \text{ e } \theta_2(y) = E[\hat{\beta}_0(y)] \quad \text{e}$$

$B(x)$ ,  $B(y)$  as modificações adequadas da expressão (A4.6).

Por outro lado, utilizando novamente a expansão em série de Taylor, com aproximação até os termos de segunda ordem, temos que

$$E[\hat{N}_1(x)\hat{N}_1(y)] = \frac{\exp(\theta_1(x) + \theta_1(y))}{(\theta_2)^2} (1+B^*) \quad (A4.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} B^* &= B(x) + B(y) + \frac{\text{Var}(\hat{\lambda})}{(\theta_2)^2} - \frac{\text{Cov}(\hat{\beta}_0(x), \hat{\lambda})}{\theta_2} - \\ &\quad - \frac{\text{Cov}(\hat{\beta}_0(y), \hat{\lambda})}{\theta_2} + \text{Cov}(\hat{\beta}_0(x), \hat{\beta}_0(y)) = \\ &= B(x) + B(y) + K \end{aligned} \quad (A4.10)$$

Supondo que  $B(x) = B(y) = 0$ , segue que:

$$\text{Cov}(\hat{N}_1(x), \hat{N}_1(y)) \stackrel{\circ}{=} \frac{\exp(\theta_1(x) + \theta_1(y))}{(\theta_2)^2} (1+k) \quad (\text{A4.11})$$

E, finalmente, segue de (A4.11) e (A4.7) a correlação aproximada:

$$\rho_{\hat{N}_1(x), \hat{N}_1(y)} \stackrel{\circ}{=} \frac{\text{Cov}(\hat{N}_1(x), \hat{N}_1(y))}{[\text{Var}(\hat{N}_1(x))]^{\frac{1}{2}} \cdot [\text{Var}(\hat{N}_1(y))]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A4.12})$$

Utilizando os estimadores para os valores de (A4.12) tem-se uma forma aproximada de cálculo para a estimativa do coeficiente de correlação entre  $\hat{N}_1(x)$  e  $\hat{N}_1(y)$ .

A N E X O      5

"EXEMPLOS APLICATIVOS PARA DOIS  
MODELOS DO CAPÍTULO 3"

Os dados:

Consideramos um caso simples com  $s=4$  e  $p=3$ ; e também  $r_j=1$ ;  $j=1, 2, 3$  e  $p_i=1$ ;  $i=1, 2, 3, 4$ . Tabelaando estes dados, temos:

Ano (i)	Idade (j)			f	p
	1	2	3		
1	$n_{11}$	$n_{12}$	.	$f_1$	1
2	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$f_2$	1
3	$n_{31}$	$n_{32}$	$n_{33}$	$f_3$	1
4	.	$n_{42}$	$n_{43}$	$f_4$	1
r	1	1	1		

(a) Ajuste do modelo (3.9)

O modelo de regressão está dado por

$$\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

onde:

$$\underline{y} = (y_{12}, y_{11}, y_{22}, y_{21}, y_{32}, y_{31})'$$

$$e \quad y_{ij} = \ln\left(\frac{n_{ij}}{f_i} \cdot \frac{f_{i+1}}{n_{i+1, j+1}}\right) ;$$

$$i = 1, 2, 3 \quad e \quad j = 1, 2$$

$$\underline{\beta} = (\mu, \lambda)'$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 & \bar{f}_3 \end{bmatrix}'$$

$$e \quad \bar{f}_i = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{21}^*, \varepsilon_{32}^*, \varepsilon_{31}^*)'$$

$$\text{Cov}(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Ajuste do modelo (3.23)

As matrizes e vetores do modelo  $\underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$  agora serão dadas por:

$$\underline{y} = (z_{12}, z_{23}, z_{11}, z_{22}, z_{33}, z_{21}, z_{32}, z_{43}, z_{31}, z_{42})'$$

$$e \quad z_{ij} = \ln\left(\frac{n_{ij}}{f_i}\right); \quad i=1, \dots, 4 \quad e \quad j=1, 2, 3$$

$$\underline{\beta} = [\beta_{\circ}(1), \beta_{\circ}(2), \beta_{\circ}(3), \beta_{\circ}(4), \mu, \lambda]$$

$$\beta_{\circ}(i) = \ln[N_1(i)\lambda]; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & q_{12} & k_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & q_{23} & k_{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{11} & k_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{22} & k_{22} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_{33} & k_{33} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q_{21} & k_{21} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q_{32} & k_{32} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q_{43} & k_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_{31} & k_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_{42} & k_{42} \end{bmatrix}$$

onde:

$$q_{ij} = \left(m - \frac{1}{2}\right)$$

$$k_{ij} = -\left(\frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}\right)$$

$$m = \min(i, j)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$j = 1, 2, 3$$

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{12}^*, \varepsilon_{23}^*, \varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, \varepsilon_{33}^*, \varepsilon_{21}^*, \varepsilon_{32}^*, \varepsilon_{43}^*, \varepsilon_{31}^*, \varepsilon_{42}^*)'$$

$$\text{Cov}(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 \cdot \underline{I}_{10}$$

## A N E X O      6

### "ANÁLISE DE COORTE"

#### A6.1 - Introdução

Denominamos Análise de Coorte (C.A.) à solução aproximada de Pope (1972) ao Método de Análise de População Virtual (VPA) de Gulland (1965).

Para sua utilização são feitas as seguintes suposições:

- a) Cada coorte segue o modelo populacional descrito nos capítulos 1 e 2.
- b) As capturas  $n_{ij}$ ;  $i=1, 2, \dots, s$  e  $j=1, 2, \dots, p$ , são conhecidas e  $d_i=p_i=1$  para todo  $i$ .
- c) A taxa instantânea de mortalidade natural é constante e conhecida, isto é:  $\mu_{ij} = \mu$ .

#### A6.2 - Análise de População Virtual (V.P.A.)

Neste procedimento, os esforços de pesca não são utilizados. Em função disto, trabalha-se apenas com os pa-

râmetros  $\phi_{ij}$  sem desmembrá-los em  $\lambda_{ij} \overset{o}{f}_{ij}$ .

Reescrevendo (3.3) temos:

$$E[N_{i+1, j+1}] = e^{-(\mu + \phi_{ij})} E[N_{ij}] \quad (\text{A6.1})$$

Reescrevendo também a expressão de (3.4) e dividindo o resultado pela expressão (A6.1) acima, segue:

$$\frac{E[N_{i+1, j+1}]}{E[n_{ij}]} = \frac{(\mu + \phi_{ij}) e^{-(\mu + \phi_{ij})}}{\phi_{ij} (1 - e^{-(\mu + \phi_{ij})})} \quad (\text{A6.2})$$

A análise de coorte, por ser um procedimento determinístico utiliza as expressões (A6.1) e (A6.2) sem no entanto expressá-las em termos de esperança, ou seja:

$$N_{i+1, j+1} = e^{-(\mu + \phi_{ij})} \cdot N_{ij} \quad (\text{A6.1}^*)$$

$$\frac{N_{i+1, j+1}}{n_{ij}} = \frac{(\mu + \phi_{ij}) e^{-(\mu + \phi_{ij})}}{\phi_{ij} (1 - e^{-(\mu + \phi_{ij})})} \quad (\text{A6.2}^*)$$

Estabelecendo em (A6.2\*) valores para  $\mu$  e  $\phi_{ij}$ , pode-se calcular  $N_{i+1, j+1}$ , já que  $n_{ij}$  é conhecido. Com este resultado e (A6.1\*), pode-se obter um valor para  $N_{ij}$ . Retornando a (A6.2\*) e utilizando o valor de  $N_{ij}$ , encontra-se  $\phi_{i-1, j-1}$ , o que, por sua vez, possibilita calcular  $N_{i-1, j-1}$  em (A6.1\*). Proceda-se desta forma até obter os valores desejados.

O procedimento iterativo descrito acima inicia-se no último par (ano x idade) em que cada uma das coortes se encontram nas capturas. Isto equivale a dizer que para as coortes  $c = 1, 2, \dots, p-1$  o processo se inicia no ponto  $(i^*, p)$  onde  $i^* = c+1$  e para as coortes  $c = p, p+1, \dots, p+s-3$  o processo se inicia no ponto  $(s, j^*)$  onde  $j^* = s+p-c-1$ . As coortes  $c = 0$  e  $C = s+p-2$  não são consideradas na análise. Portanto, são necessárias estimativas independentes de  $\mu$  e

$$\phi_* = (\phi_{2p}, \phi_{3p}, \dots, \phi_{sp}, \phi_{s, p-1}, \dots, \phi_{s, 2})'$$

### A6.3 - Análise de Coorte

Pope (1972) comenta que o uso de (A6.2\*) para obter estimativas de  $\phi_{ij}$  exige um procedimento iterativo. Sugere então uma solução aproximada, mais simples em termos computacionais.

A expressão (A6.1\*) pode ser reescrita como

$$N_{i+1, j+1} \cdot e^{\mu} = N_{ij} \cdot e^{-\phi_{ij}} \quad (\text{A6.3})$$

Somando e subtraindo  $N_{ij}$  à direita da igualdade de (A6.3):

$$N_{i+1, j+1} \cdot e^{\mu} = N_{i,j} - N_{i,j} (1 - e^{-\phi_{ij}}) \quad (\text{A6.4})$$

Por outro lado, segue da esperança de (3.3), a relação aqui colocada de forma determinística.

$$N_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{1 - e^{-\zeta_{ij}}} \cdot \frac{n_{ij}}{\phi_{ij}} \quad (\text{A6.5})$$

E, finalmente, utilizando (A6.5) em (A6.4)

$$N_{i+1, j+1} \cdot e^{\mu} = N_{ij} - n_{ij} \cdot B_{ij} \quad (\text{A6.6})$$

onde

$$B_{ij} = \left( \frac{\zeta_{ij}}{1 - e^{-\zeta_{ij}}} \cdot \frac{(1 - e^{-\phi_{ij}})}{\phi_{ij}} \right)$$

Supondo  $\zeta_{ij} \stackrel{\circ}{=} 0$  e  $\phi_{ij} \stackrel{\circ}{=} 0$ , e utilizando a Propriedade 2 do Capítulo 2, segue que  $B_j \stackrel{\circ}{=} \mu/2$ .

E, com a aproximação para  $B_{ij}$ , a expressão (A6.6) se reduz a:

$$N_{ij} \stackrel{\circ}{=} e^{\mu} \cdot N_{i+1, j+1} + e^{\mu/2} \cdot n_{ij} \quad (\text{A6.7})$$

que pode ser utilizada para a estimativa de  $N_{ij}$  conhecendo-se as estimativas de  $N_{i+1, j+1}$  e  $\mu$ . Uma vez obtida a estimativa  $N_{ij}$ , vamos à expressão (A6.3) para a estimação de  $\phi_{ij}$ , ou seja:

$$\phi_{ij} = \ln \left( \frac{N_{ij}}{N_{i+1, j+1}} \right) - \mu \quad (\text{A6.8})$$

Pope (1972) considera o procedimento aproximado com bons resultados para  $\mu \leq 0,3$  e  $\phi_{ij} \leq 1,2$ . Resumimos o procedimento nas seguintes etapas:

- 1ª) Partindo de valores conhecidos de  $\mu$  e  $\phi^*$ , utilizar (A6.5) para o cálculo dos  $N_{ij}$ .
- 2ª) A partir do conhecimento de valores para  $N_{ij}$ , chegar a valores para  $N_{i-1, j-1}$  por (A6.7).
- 3ª) Finalmente, através de (A6.8) encontrar valores para  $\phi_{i-1, j-1}$ , a partir dos quais retorna-se à etapa inicial; procedendo desta forma até obter todos os valores de  $N_{ij}$  e  $\phi_{ij}$ .

#### A6.4 - Erros na Análise de Coorte

Pope (1972) comenta que existem 3 fontes de erro influenciando nas estimativas  $\phi_{ij}$  e  $N_{ij}$ : (i) escolha incorreta de  $\phi^*$ ; (ii) erro amostral nas observações  $n_{ij}$  e (iii) escolha incorreta de  $\mu$ .

Os erros (i) e (ii) foram analisados por Pope (1972) e Doubleday (1976), e (iii) por Ulltang (1977). Seguem as principais conclusões:

(i) Escolha incorreta de  $\phi^*$

(i.1) - Subestimativas em  $\phi^*$  resultam em subestimati

vas dos  $\phi_{ij}$  e superestimativas de  $N_{ij}$  e vice-versa.

(i.2) - Superestimativas de  $\phi^*$  são preferidas às subestimativas, pois sugerem menor erro nas estimativas  $N_{ij}$ .

(i.3) - Com maior número de iterações, as estimativas de  $N_{ij}$  e  $\phi_{ij}$  vão se tornando mais precisas, tendendo a uma estabilização em sua variância.

(i.4) - Limitação do método: para uma coorte 'c' qualquer, o método não será indicado se

$$\sum_{((i,j):c=i-j+p-1)} \phi_{ij} < 2.$$

(ii) - Erro amostral nas observações  $n_{ij}$

Havendo boa escolha das estimativas de  $\phi^*$ , a A.C. estima os  $\phi_{ij}$  com erro aproximadamente igual ao erro contido em  $n_{ij}$ , e estima os  $N_{ij}$  com erro um pouco menor.

Uma má escolha das estimativas de  $\phi^*$ , por sua vez, pode levar a sérios erros, principalmente para as idades mais avançadas.

(iii) Erro na escolha de  $\mu$

(iii.1) - Erros na escolha do valor de  $\mu$ :

- a) causam erros nas estimativas de  $\phi_{ij}$ , com aproximadamente a mesma amplitude mas com sinal contrário, se  $\zeta_{ij}$  variar moderadamente de ano para ano e  $\mu$  for constante.
- b) fazem com que os  $N_{ij}$  serão sub ou superestimativas dependendo do  $\mu$  utilizado ser uma sub ou superestimativa, respectivamente, do verdadeiro valor de taxa de mortalidade natural. Mas, a estimação da variação relativa do tamanho de população de um ano para outro será pouco afetada.

(iii.2) - Flutuação em  $\zeta_{ij}$  decorrentes de variações aleatórias em  $\mu$  de ano para ano, desaparecem quase totalmente ao considerar-se o  $\mu$  constante na A.C.

(iii.3) - Um padrão para  $\mu$  em função dos períodos ou da idade serão convertidos a um padrão nas estimativas de  $\phi_{ij}$ .

## A N E X O      7

### "LINEARIZAÇÃO DE ALGUNS MODELOS"

A linearização dos modelos (3.24) e (3.25) do capítulo 3 equivale à linearização de  $\ln[(\lambda + \delta_j)/\lambda]$ . Utilizaremos a expansão em série de Taylor para obter uma expressão linear aproximada desta função.

Consideremos o vetor  $\underline{x} = (x, y)'$  e a função  $g(\underline{x}) = \ln[(x+y)/x]$ . Façamos a expansão em torno de um vetor genérico  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$ . Escrevendo a expressão em série de Taylor apenas com os termos de 1ª ordem, temos:

$$g(\underline{x}) \stackrel{0}{=} g(\underline{\theta}) + (x - \theta_1) \frac{\partial g}{\partial x} + (y - \theta_2) \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{A7.1})$$

Onde as derivadas  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  são avaliadas em  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente.

Segue de (A7.1) que

$$\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \stackrel{0}{=} \ln\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1}\right) - \frac{\theta_2}{\theta_1(\theta_1 + \theta_2)} - \frac{\theta_2}{\theta_1(\theta_1 + \theta_2)}x + \left(\frac{1}{\theta_1 + \theta_2}\right)y \quad (\text{A7.2})$$

No modelo considerado, tem-se que  $x = \lambda$  e  $y = \delta_j$ . Simbolizamos por  $\lambda^0$  e  $\delta_j^0$  os valores para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente. Substituindo  $g(\lambda, \delta_j)$  do modelo não-linear

pela aproximação (A7.2), tem-se para (3.24)

$$\begin{aligned}
 & [z_{ij} - \ln\left(\frac{\lambda^0 + \delta_j^0}{\lambda}\right) + \frac{\delta_j^0}{\lambda^0(\lambda^0 + \delta_j^0)}] \doteq \\
 & \doteq \ln(N_1(c)\lambda) - \left(m - \frac{(2-p_i)}{2}\right) \mu - \left(\frac{\delta_j^0}{\lambda^0(\lambda^0 + \delta_j^0)} + \frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}\right) \lambda + \\
 & + \left(\frac{1}{\lambda^0 + \delta_j^0} - \frac{f_i}{2}\right) \delta_j - \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v} \cdot \delta_{j-v} + \varepsilon_{ij}^* \quad (\text{A7.3})
 \end{aligned}$$

A questão que se coloca é: quais os valores de  $\lambda^0$  e  $\delta_j^0$  a serem utilizados? Uma possível solução seria a utilização dos valores com os quais se iniciaria o processo iterativo no modelo não-linear original. Uma escolha conveniente para  $\lambda^0$  e  $\delta_j^0$  que propomos é a seguinte:

- (i) utilizar para  $\lambda^0$  a melhor estimativa disponível de  $\lambda$  em função da regressão linear em que se considera  $\lambda_j = \lambda$  para todo  $j=1, 2, \dots, p$ ;
- (ii) supor  $\delta_j^0 = 0$  para todo  $j=1, 2, \dots, p-1$  e fixando que  $\delta_p^0 = 0$ , ou seja,  $\lambda_p = \lambda$ . Com isso o coeficiente de capturabilidade no modelo corresponderá ao coeficiente de capturabilidade da maior idade presente na análise.

Nestas condições, a expressão (A7.3) seria reduzida ao seguinte modelo:

$$z_{ij} = \ln(N_i(C) \cdot \lambda) - \left(m - \frac{2-p_i}{2}\right) \mu - \left(\frac{f_i}{2} + \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v}\right) \lambda +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{f_i}{2}\right) \delta_j - \sum_{v=1}^{m-1} f_{i-v} \delta_{j-v} + \varepsilon_{ij}^* \quad (A7.4)$$

Observe-se em (A7.4) que os parâmetros  $\delta_j$  entram no modelo somente para idades iguais ou superiores a  $j$ . Por esta razão, sugeriu-se fixar o  $\delta$  da última idade ( $\delta_p$ ) igual a zero, já que este seria o parâmetro estimado com o menor número de dados:  $(s - 1)$ .

A N E X O      8

"OBTENÇÃO DO MODELO DE REGRESSÃO (3.6)"

Dividindo-se a expressão (3.5) por (3.4), segue

$$\frac{E[n_{i+1, j+1}]}{E[n_{ij}]} = \frac{\phi_{i+1, j+1} \cdot k_{i+1, j+1}}{\phi_{ij} \cdot k_{ij}} (1 - e^{-(\mu + \phi_{ij} \cdot p_i)}) \quad (\text{A8.1})$$

onde  $k_{ij} = \frac{1 - e^{-\zeta_{ij} \cdot p_i}}{\zeta_{ij}}$  ;  $i=1, 2, \dots, s$  e

$j=1, 2, \dots, p$ .

Definimos:

(a)  $f_{ij} = \overset{\circ}{f}_{ij} \cdot p_i$ ; o esforço total no período  $i$  sobre a idade  $j$  (ver suposição (ii) à página 57 do capítulo 3).

(b)  $Y_{ij} = \frac{n_{ij}}{f_{ij}}$  ; a captura por unidade de esforço no período  $i$  para a idade  $j$ .

(c)  $C_{ij} = \frac{k_{i+1, j+1}}{p_{i+1}} \cdot \frac{p_i}{k_{ij}}$  ;  $i=1, 2, \dots, s-1$  e  $j=1, 2, \dots, p-1$ .

Lembrando que  $\phi_{ij} = \lambda_{ij} \frac{f_{ij}}{p_i} = \lambda_{ij} \frac{f_{ij}}{p_i}$ , podemos reescrever (A8.1) por

$$\left(E\left[\frac{n_{ij}}{f_{ij}}\right]\right)^{-1} E\left[\frac{n_{i+1, j+1}}{f_{i+1, j+1}}\right] = \frac{E[Y_{i+1, j+1}]}{E[Y_{ij}]} = \frac{\lambda_{i+1, j+1}}{\lambda_{ij}} \cdot C_{ij} \cdot e^{-(\mu + \lambda_{ij} f_{ij})} \quad (\text{A8.2})$$

Esta expressão (A8.2) sugere considerar-se o seguinte modelo:

$$\frac{Y_{i+1, j+1}}{Y_{ij}} = \frac{\lambda_{i+1, j+1}}{\lambda_{ij}} \cdot C_{ij} \cdot e^{-(\mu + \lambda_{ij} f_{ij})} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (\text{A8.3})$$

com:  $i = 1, 2, \dots, s-1$

$j = 1, 2, \dots, p-1$

$\varepsilon_{ij}$ : erro aleatório com distribuição supostamente log-normal.

Aplicando-se os logaritmos naturais em (A8.3) resulta então o modelo (3.6) descrito no capítulo 3, ou seja:

$$y_{ij} + \ln(C_{ij}) = \mu - \ln\left(\frac{\lambda_{i+1, j+1}}{\lambda_{ij}}\right) + \lambda_{ij} f_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \quad (\text{A8.4})$$

Com:  $i = 1, 2, \dots, s-1$

$j = 1, 2, \dots, p-1$

$\varepsilon_{ij}^* = \ln(\varepsilon_{ij})$ : erro aleatório com distribuição supostamente normal, com média zero e variância  $\sigma^2$ .

$$y_{ij} = \ln(Y_{ij}) - \ln(Y_{i+1, j+1})$$

A N E X O      9

"COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS (2.19) E (2.29)"

(a) Colocando o modelo (2.19) em forma matricial, temos

$$\underline{y} = Z \underline{\theta} + \underline{\varepsilon} \quad (A9.1)$$

$$\underline{y} ((s-1) \times 1) = (y_1, y_2, \dots, y_{s-1})'$$

$$\underline{\theta} (2 \times 1) = (\mu, \lambda)'$$

$$\underline{\varepsilon} ((s-1) \times 1) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{s-1})'$$

$$Z ((s-1) \times 2) = \begin{bmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_{s-1} & h_{s-1} \end{bmatrix}$$

onde:

$$g_i = \frac{1}{2}(p_{i+1}d_{i+1} - p_i d_i) + d_i$$

$$h_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$\text{Cov}(\underline{\varepsilon}) = E((s-1) \times (s-1))$$

O modelo (2.29) em forma matricial está dado por:

$$\underline{z} = X \underline{\beta} + \underline{\eta} \quad (\text{A9.2})$$

$$\underline{z}_{(s \times 1)} = (z_1, z_2, \dots, z_s)'$$

$$\underline{\beta}_{(3 \times 1)} = (\beta_0, \mu, \lambda) \quad \text{onde } \beta_0 = \ln(N_1 \lambda)$$

$$\underline{\eta}_{(s \times 1)} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)'$$

$$X_{(s \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & t_1 \\ 1 & q_2 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & q_s & t_s \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \\ \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{p_1 d_1}{2} ; i = 1 \\ \\ \\ -\left(\frac{p_i d_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} d_j\right) ; i = 2, \dots, s \\ \\ \\ -\frac{f_1}{2} ; i = 1 \\ \\ \\ -\left(\frac{f_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} f_j\right) ; i = 2, \dots, s \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov}(\underline{\eta}) = H_{(s \times s)}$$

(b) Seja a matriz A definida por

$$A_{((s-1) \times s)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que

$$\underline{y} = A \underline{z} \quad (\text{A9.3})$$

$$[0Z] = AX \quad (\text{A9.4})$$

onde:

$$\underline{0}_{((s-1) \times 1)} = (0, 0, \dots, 0)'$$

$$E = AHA' \quad (\text{A9.5})$$

(c) Podemos verificar também que a expressão (A9.1) é uma reparametrização para o modelo de posto incompleto dado por:

$$\underline{y} = [0Z] \underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (\text{A9.6})$$

tal que

$$\underline{\theta} = L' \underline{\beta} \quad \text{e} \quad L' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) As soluções de mínimos quadrados para (A9.1), (A9.2) e (A9.6) serão, respectivamente:

$$\hat{\underline{\theta}} = (\underline{Z}' \underline{E}^{-1} \underline{Z})^{-1} \underline{Z}' \underline{E}^{-1} \underline{y} \quad (\text{A9.7})$$

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}' \underline{H}^{-1} \underline{X})^{-1} \underline{X}' \underline{H}^{-1} \underline{z} \quad (\text{A9.8})$$

$$\hat{\underline{\beta}}^* = ([\underline{0Z}]' \underline{E}^{-1} [\underline{0Z}])^{-1} [\underline{0Z}]' \underline{E}^{-1} \underline{y} \quad (\text{A9.9})$$

Chamamos atenção para o fato de que  $\hat{\underline{\theta}}$  e  $\hat{\underline{\beta}}$  apresentam soluções únicas, já que provêm de modelos de posto completo.  $\hat{\underline{\beta}}^*$ , no entanto, não tem solução única, pois resulta de um modelo de posto incompleto.

(e) Seja  $(L')^*$  uma g-inversa de  $L'$ , onde  $\underline{\theta} = L' \underline{\beta}$  é a reparametrização descrita para (A9.6). Então valem as seguintes propriedades (GRAYBILL, 1976):

$$P_1: [\underline{0Z}] (L')^* L' = [\underline{0Z}]$$

$$P_2: \hat{\underline{\theta}} = L' \hat{\underline{\beta}}$$

Utilizando estas propriedades, podemos escrever:

$$\hat{\underline{y}} = [\underline{0Z}] \hat{\underline{\beta}}^* = [\underline{0Z}] (L')^* L' \hat{\underline{\beta}}^* = \underline{Z} \hat{\underline{\theta}} \quad (\text{A9.10})$$

já que  $[\underline{0Z}] (L')^* = \underline{Z}$  para

$$(L')^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que  $\hat{\underline{y}}$  é invariante com  $\hat{\underline{\beta}}^*$ .

Utilizando o fato de que  $[\underline{0Z}] = AX$ , podemos reescrever (A9.10) como

$$\hat{\underline{y}} = [\underline{0Z}] \hat{\underline{\beta}}^* = AX(X'A'E^{-1}AX)^{-1} X'A'E^{-1} A\underline{z}$$

ou seja

$$\hat{\underline{y}} = A \hat{\underline{z}} = A x \hat{\underline{\beta}} \quad (\text{A9.11})$$

se considerarmos que

$$H^{-1} = A' E^{-1} A \quad (\text{A9.12})$$

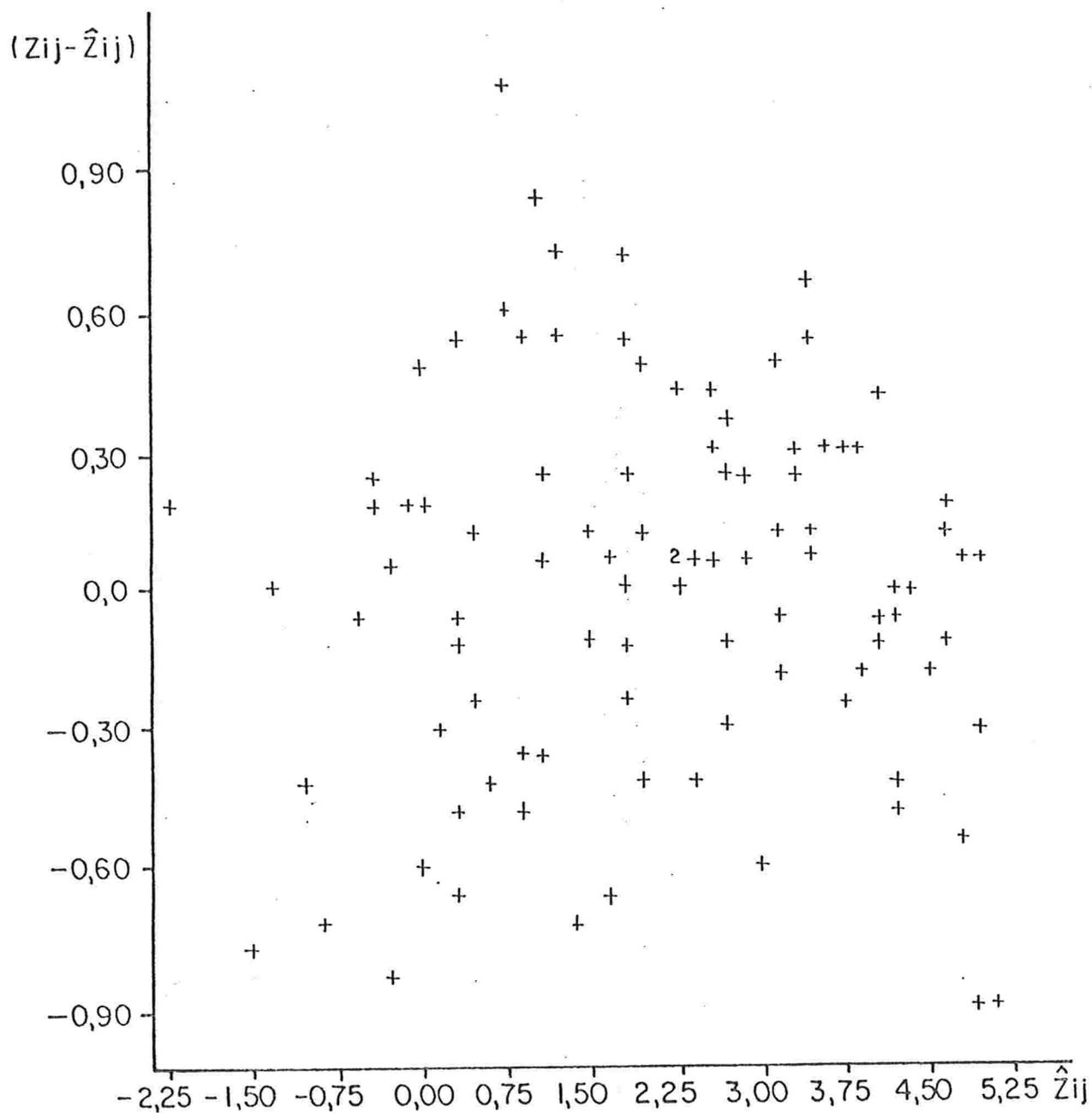


FIGURA 1 - Resíduos em função dos valores estimados de  $z_{ij}$  para a regressão linear com  $(\lambda_{ij} = \lambda)$  sem ponderação, para o Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2,3,4 → dois, três e quatro resíduos  
 0 → média por idade

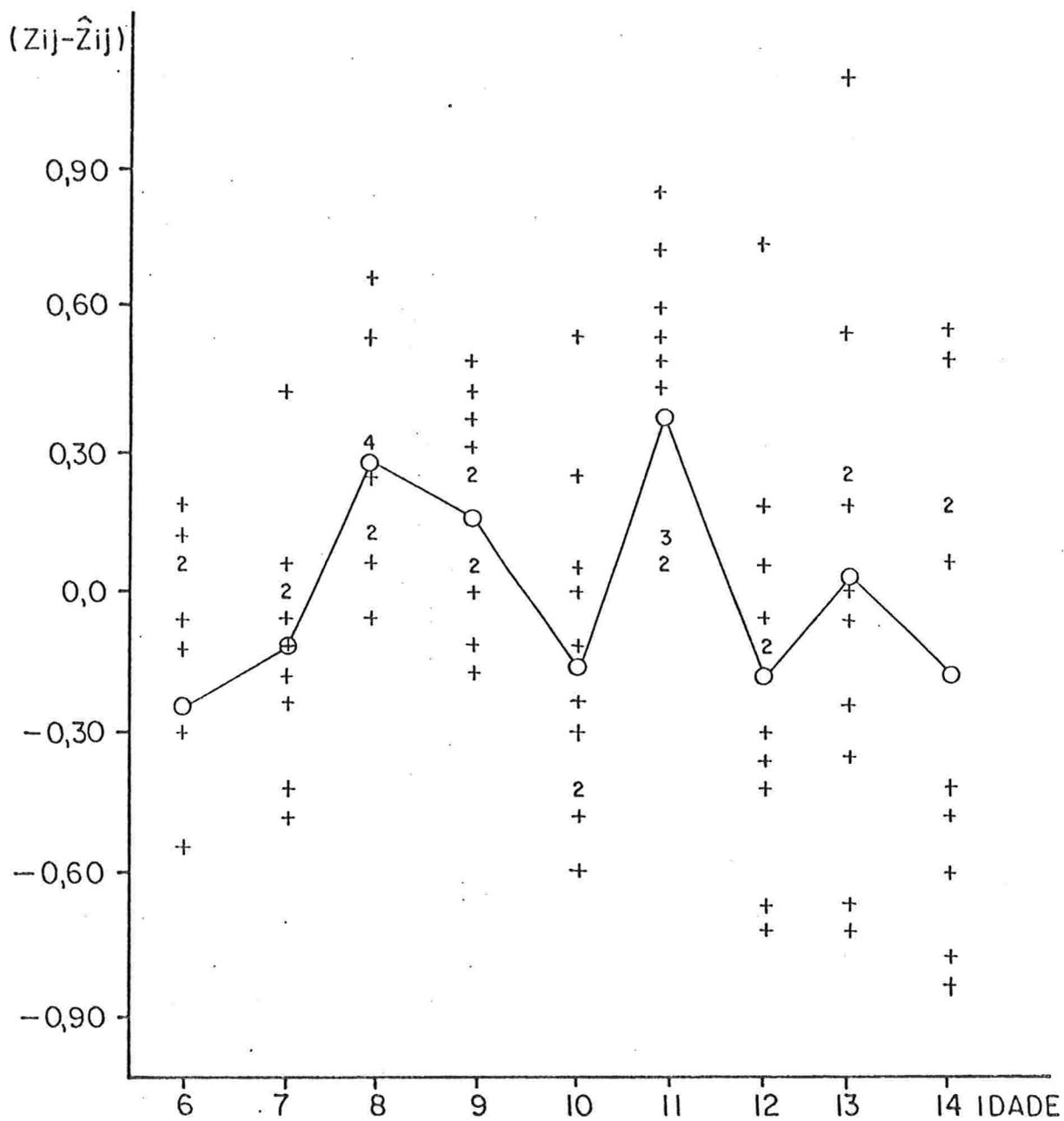


FIGURA 2 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para o Pargo (*L. purpureus*), para regressão linear com  $(\lambda_{ij} = \lambda)$  sem ponderação.

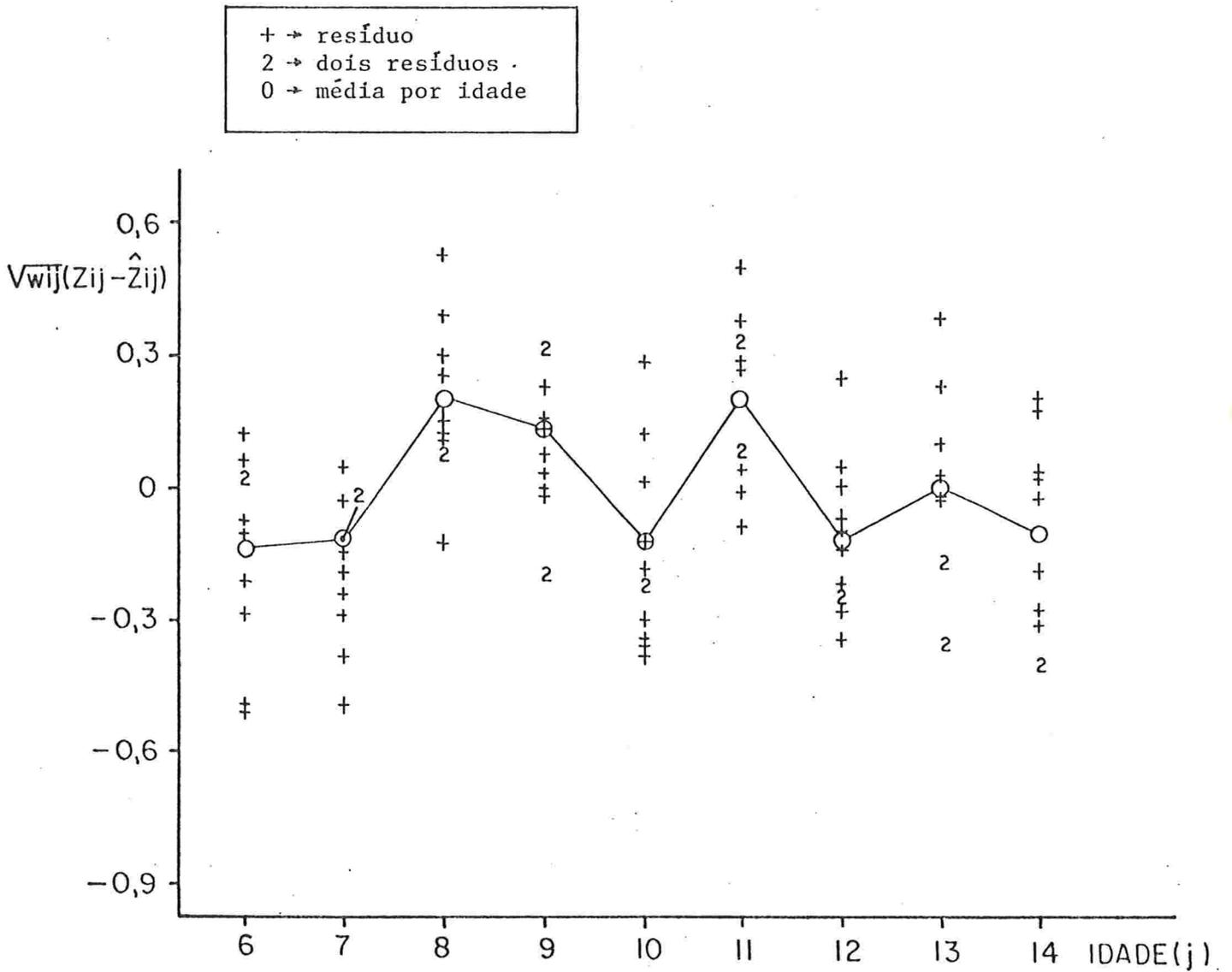


FIGURA 3 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com média por idade, para a regressão nº 2 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2 → dois resíduos  
 0 → média por idade

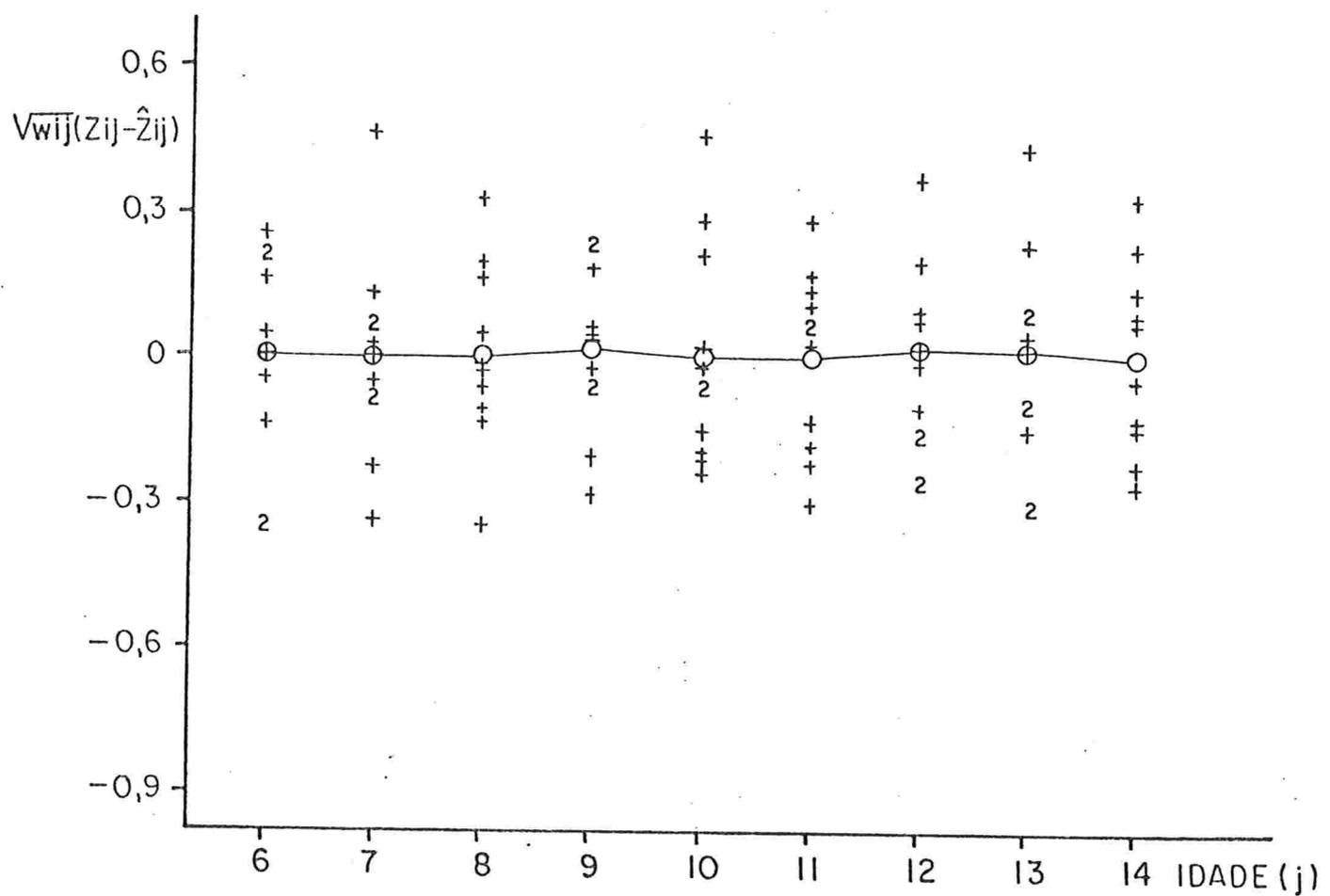


FIGURA 4 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com médias por idade, da regressão nº 3 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus).

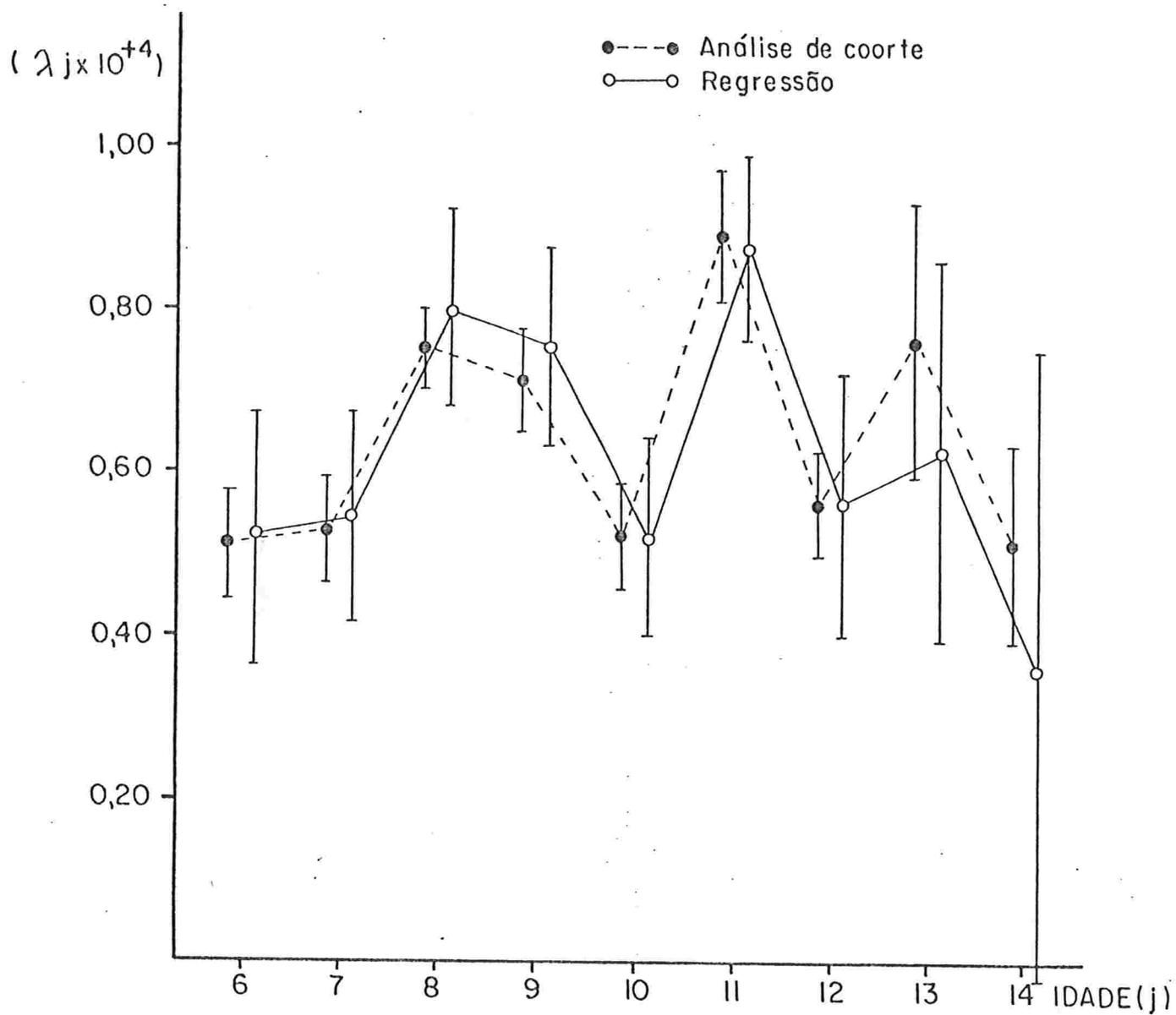


FIGURA 5 - Estimativas dos coeficientes de capturabilidade ( $\lambda_j$ ) com os respectivos erros padrão conforme Análise de Coorte e Regressão. Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2,4 → dois, quatro resíduos  
 0 → média por idade

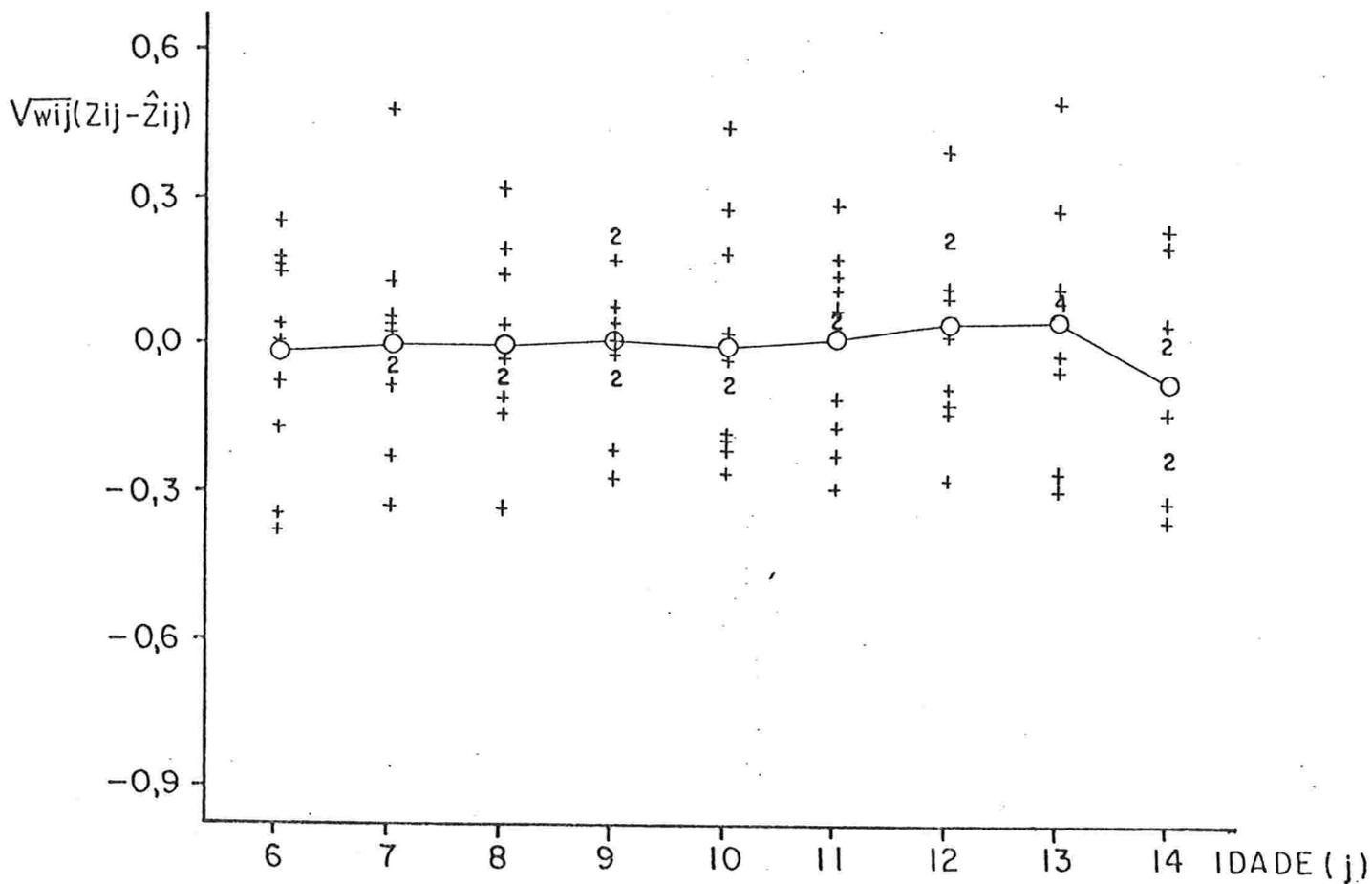


FIGURA 6 - Resíduos ponderados agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão não-linear com  $\delta_8$ ,  $\delta_9$  e  $\delta_{11}$ . Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2 → dois resíduos  
 0 → média por ano

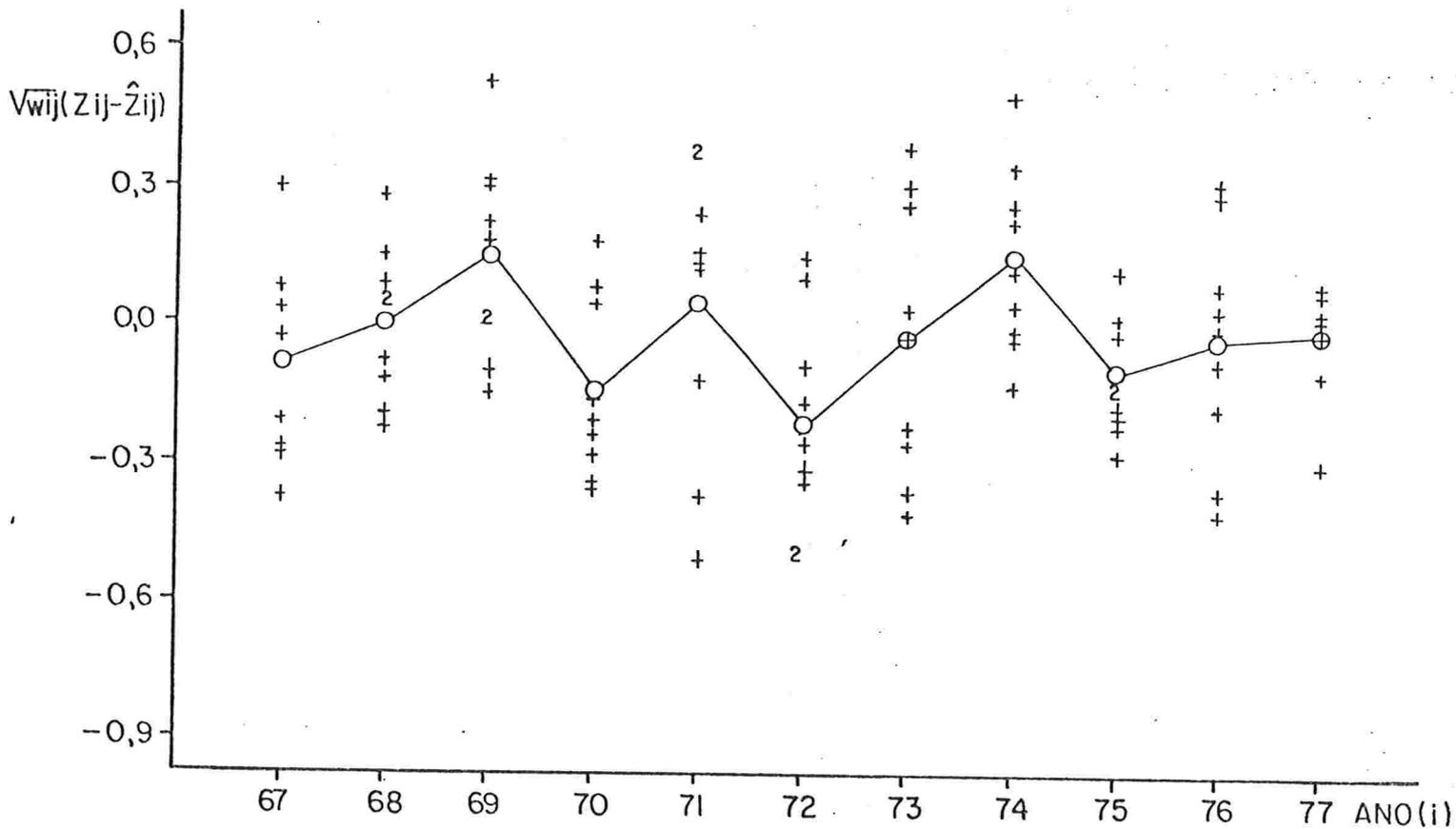


FIGURA 7 - Resíduos ponderados agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 2 da Tabela 2, para o Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2,3 → dois, três resíduos  
 0 → média por ano

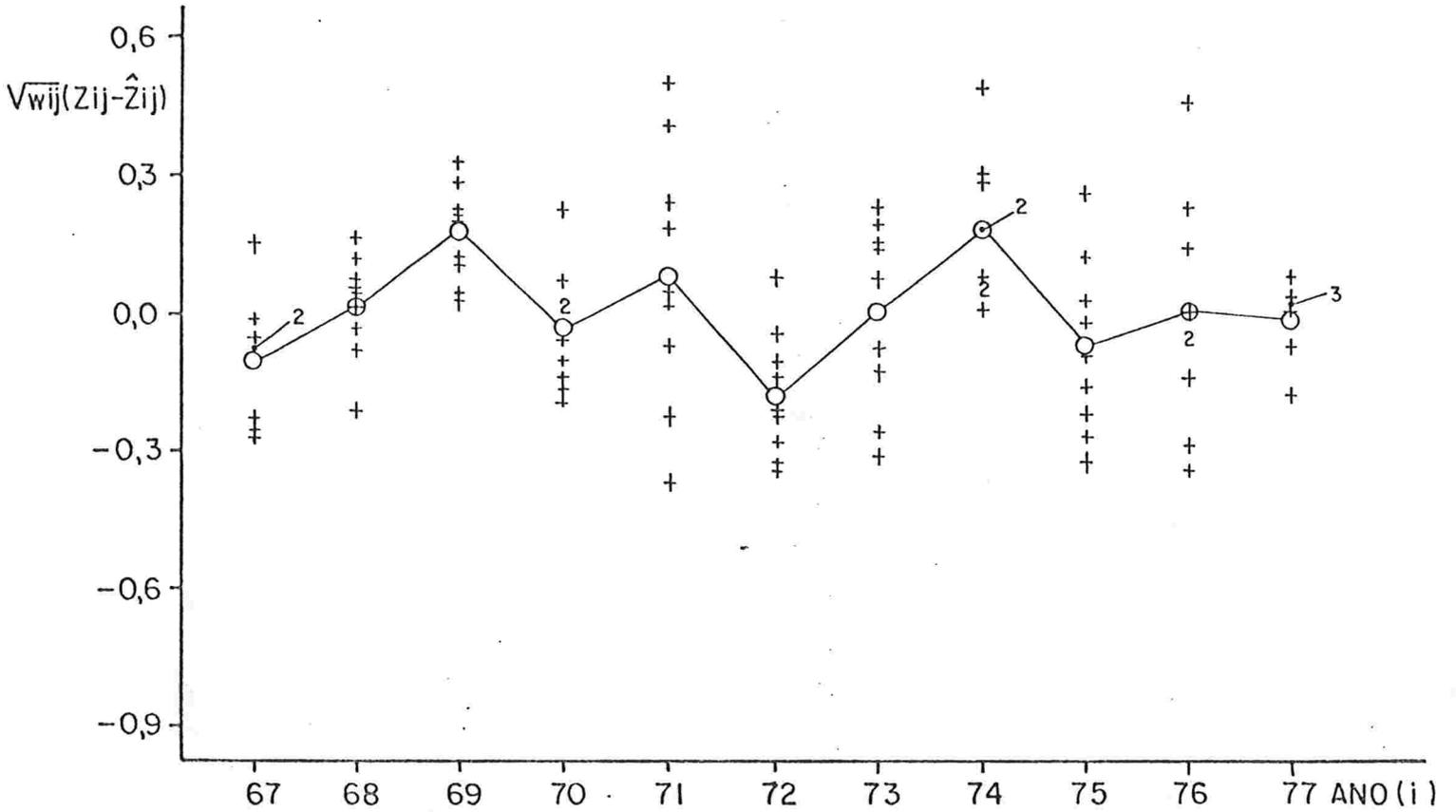


FIGURA 8 - Resíduos ponderados agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão não-linear  $\delta_8$ ,  $\delta_9$  e  $\delta_{11}$ . Pargo (L. purpureus).

+ → resíduo  
 2,3,4 → dois, três e quatro resíduos  
 0 → média por idade

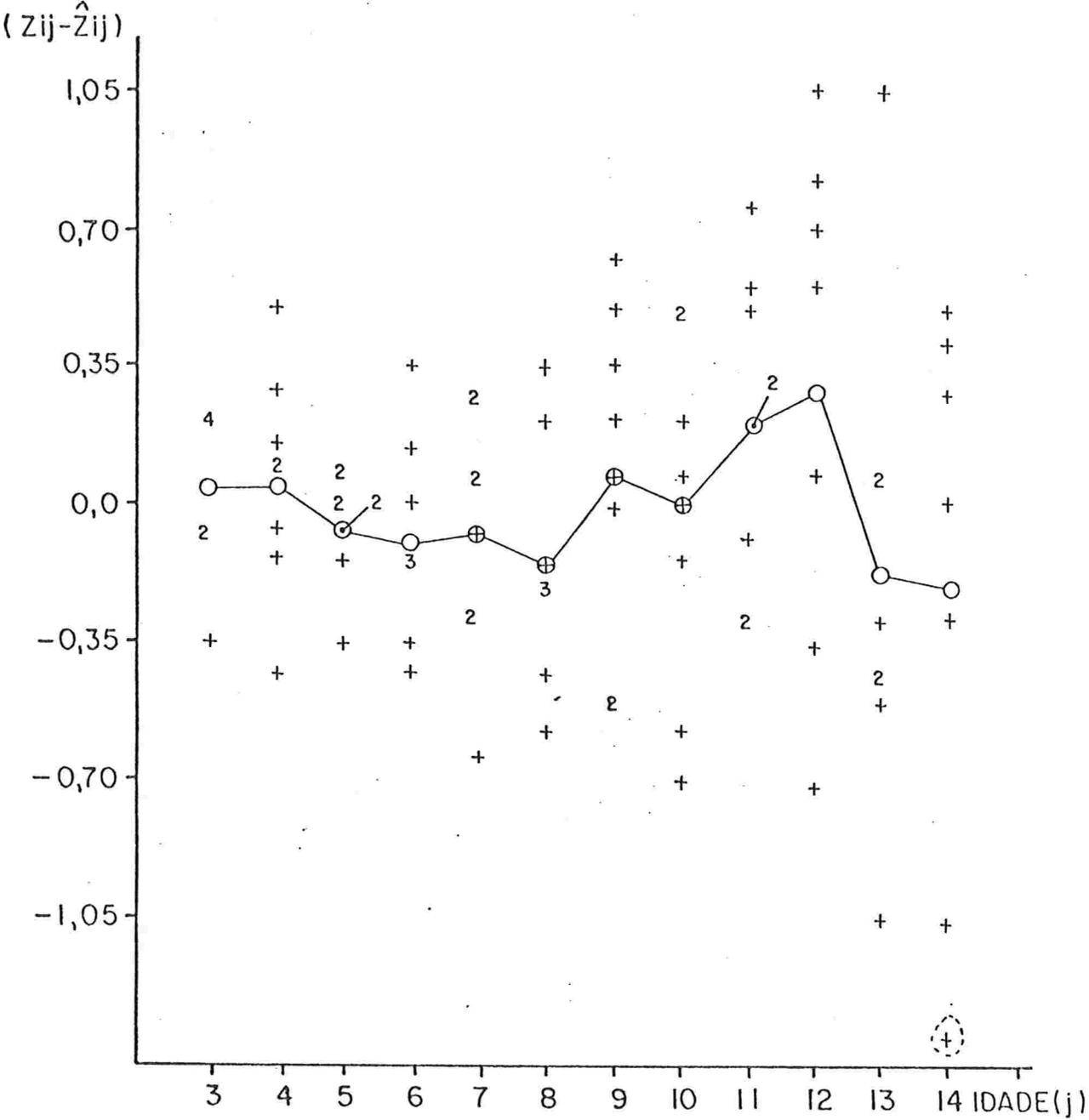


FIGURA 9 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão nº 1 da Tabela 8. Castanha (U. canosai).

+ → resíduo  
 2,3,4 → dois, três e quatro resíduos  
 0 → média por ano

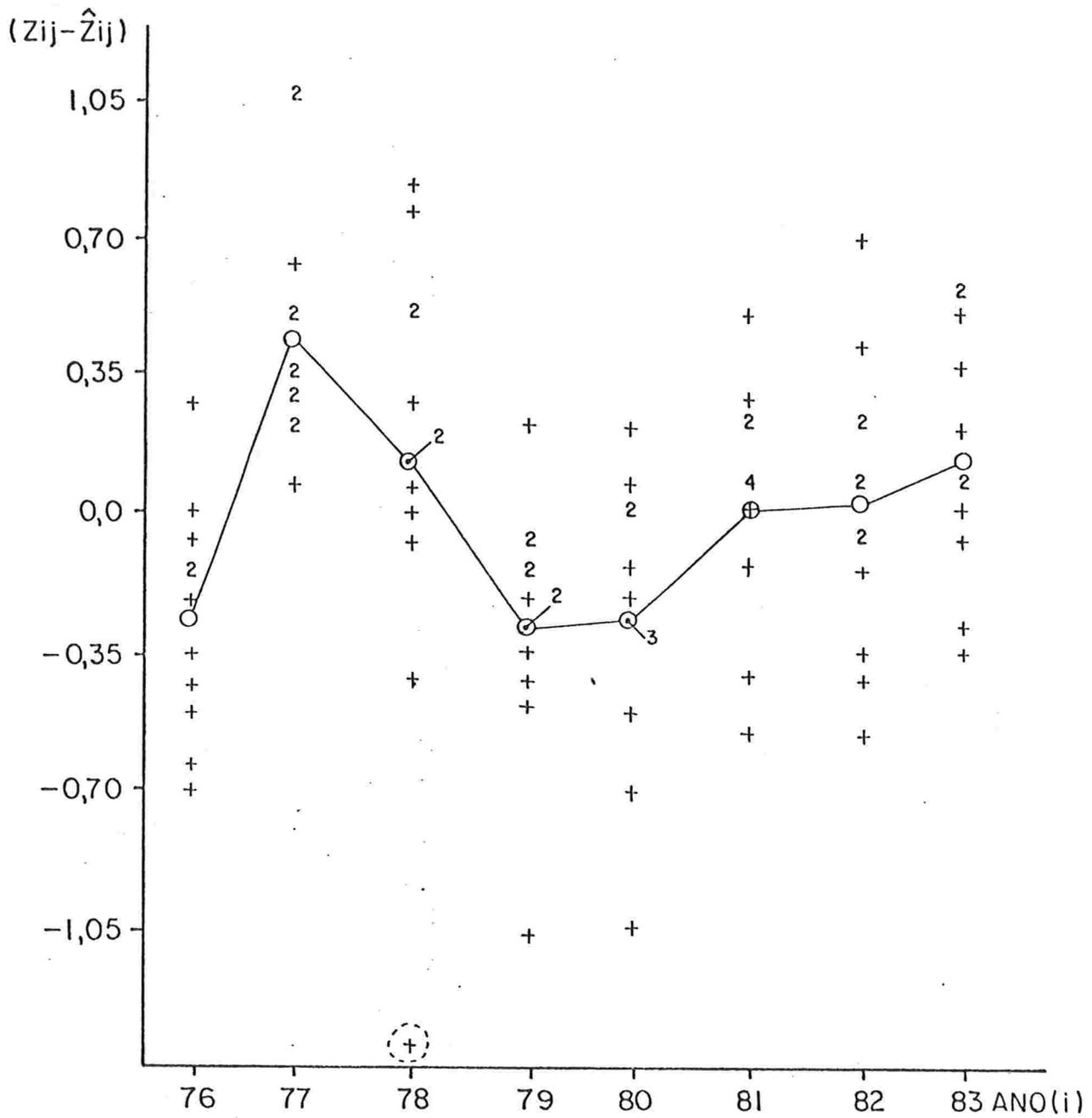


FIGURA 10 - Resíduos agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 1 da Tabela 8. Castanha (U. canosai).

+ → resíduo  
 2,3 → dois e três resíduos  
 0 → média por ano

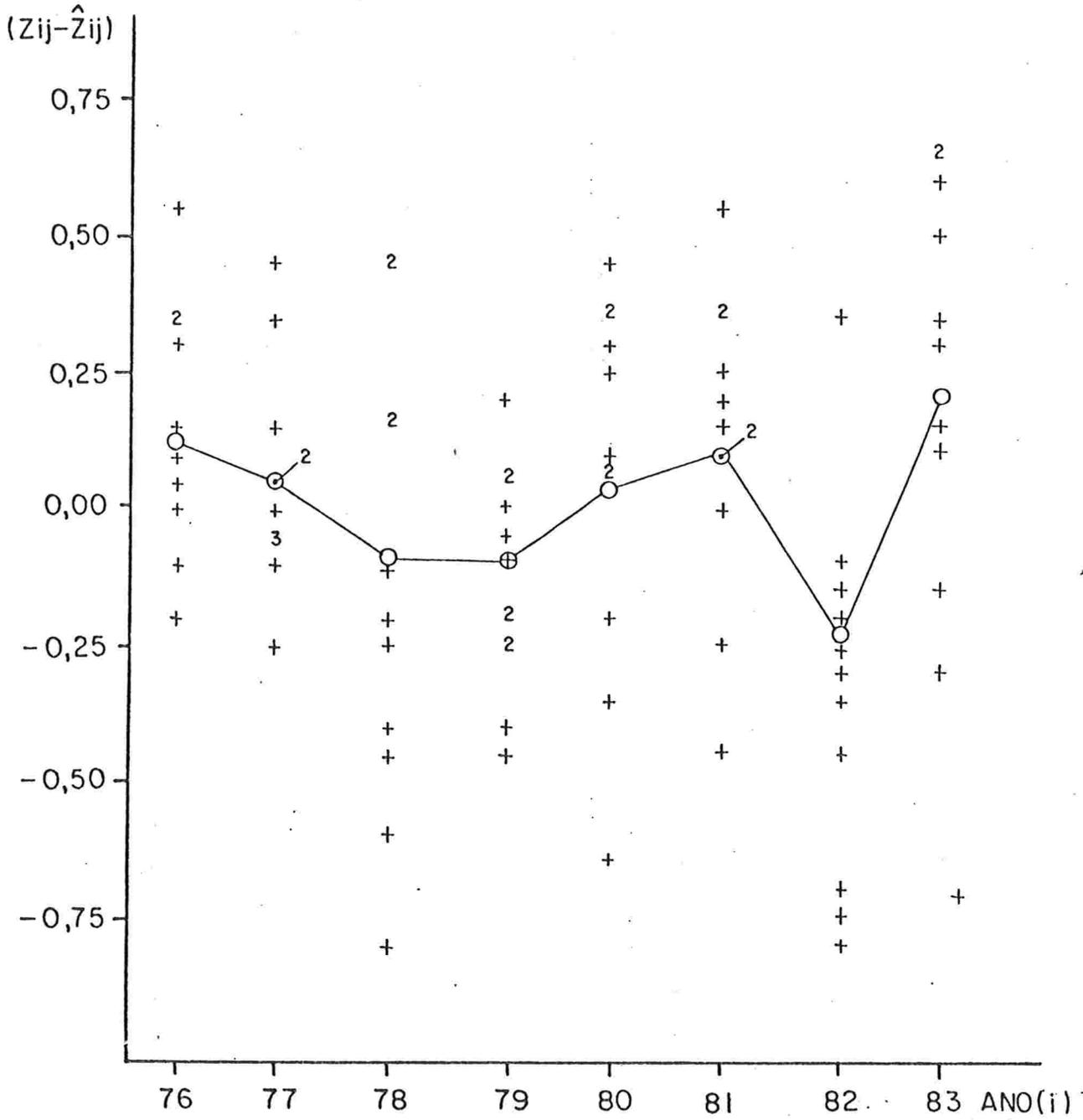


FIGURA 11 - Resíduos agrupados por ano, e média por ano, para a regressão nº 3 da Tabela 8. Castanha (U. canosai).

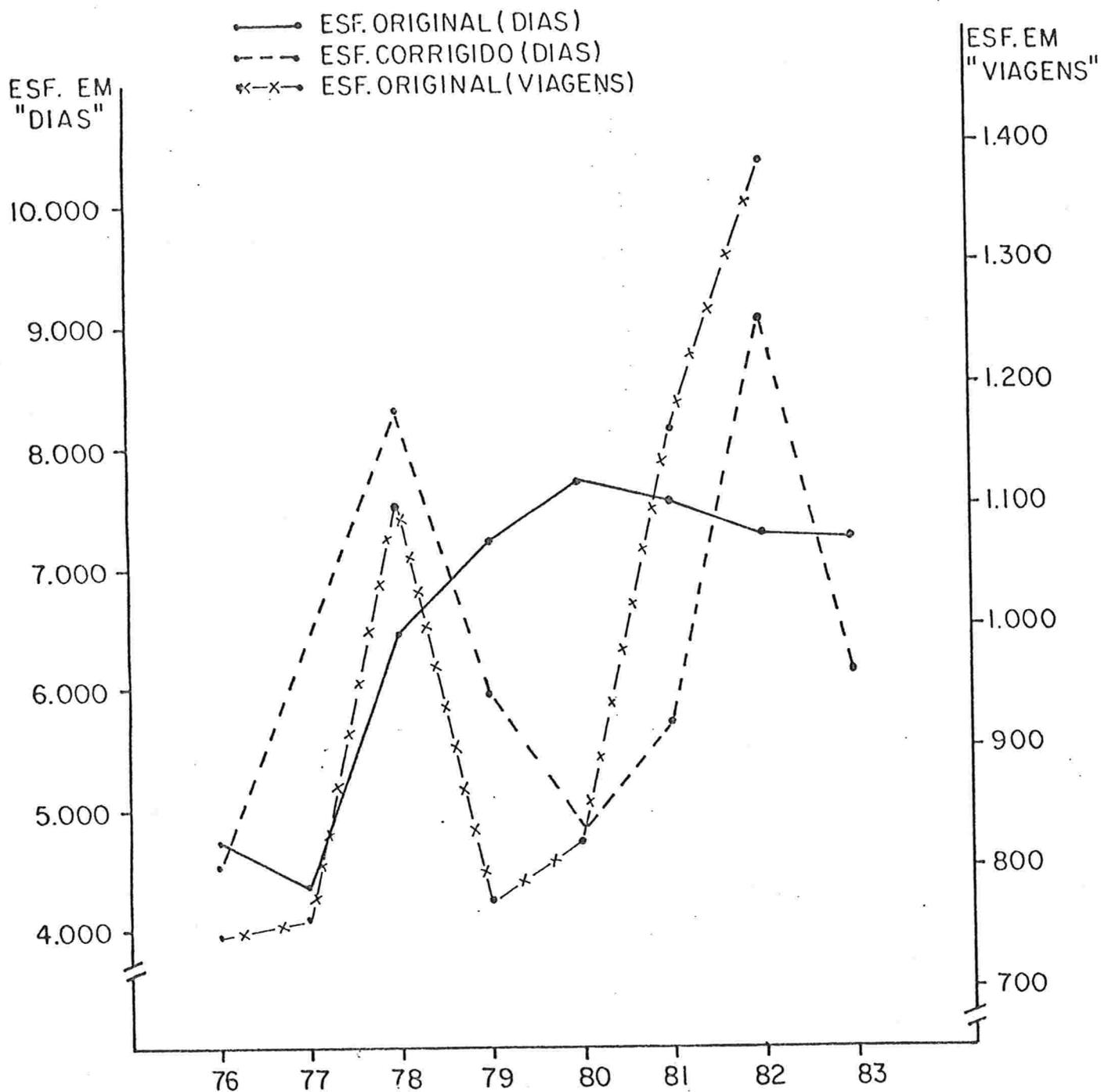


FIGURA 12 - Várias medidas do esforço anual para a pesca de Castanha (U. canosai).

+ → resíduo  
 2,3 → dois e três resíduos  
 0 → média por idade

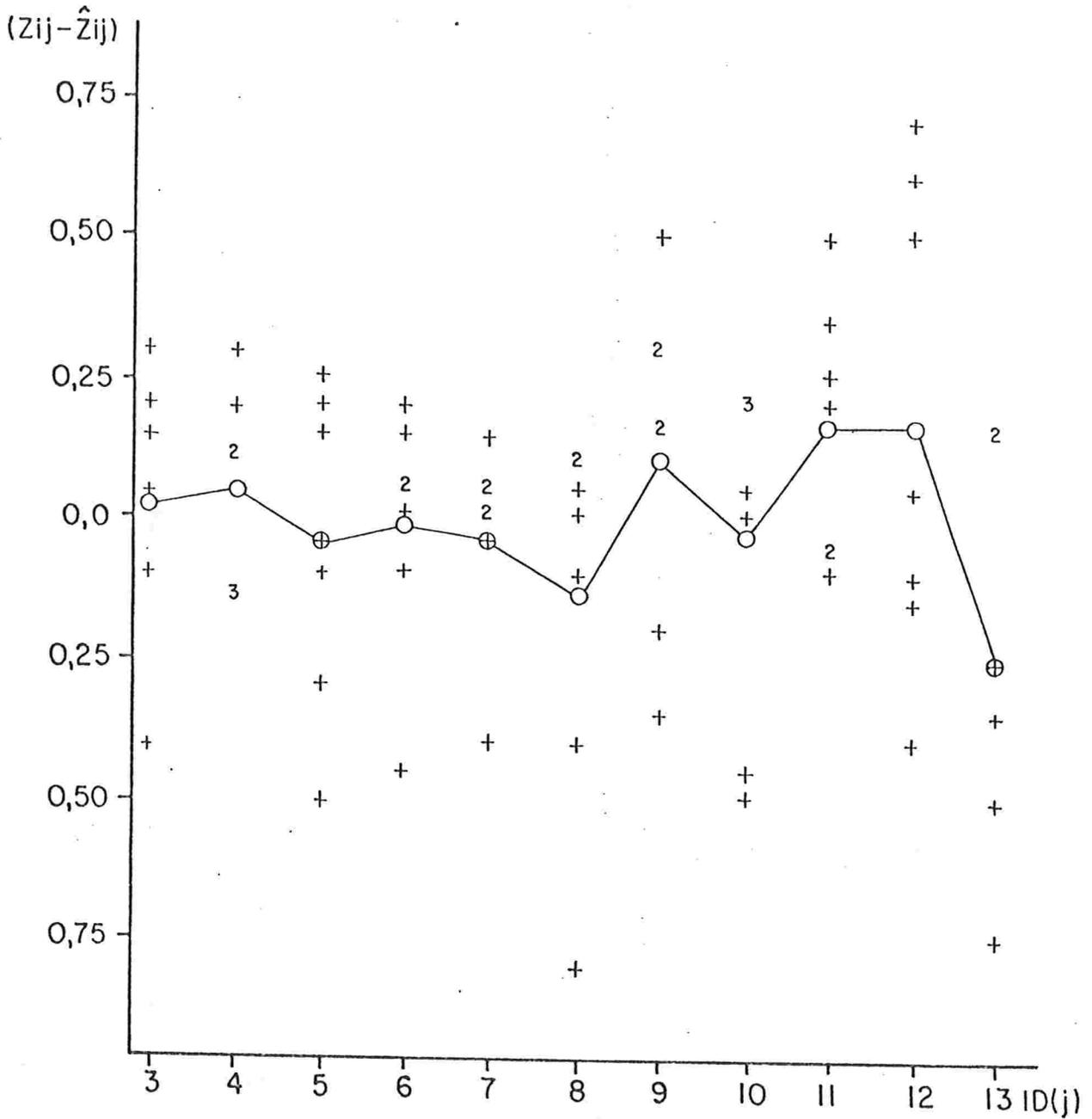


FIGURA 13 - Resíduos agrupados por idade, com médias por idade, para a regressão nº 4 onde utilizou-se o esforço em VIAGENS. Castanha (U. cano-sai).

+ → resíduo  
 2,3 → dois e três resíduos  
 0 → média por ano

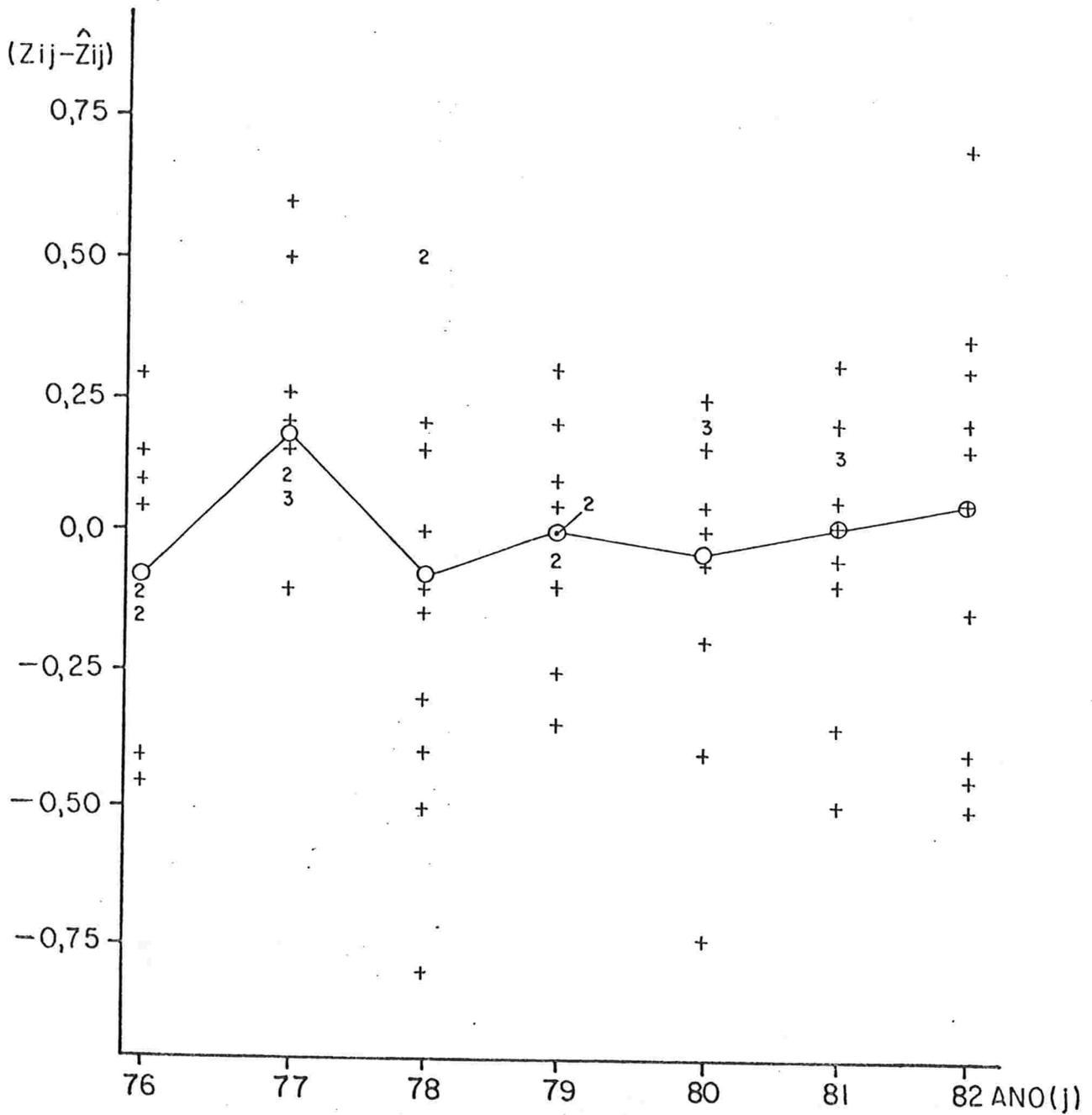


FIGURA 14 - Resíduos agrupados por ano, com médias por ano, para a regressão nº 4 com esforço medido em viagens. Castanha (U. canosai).

TABELA 1

Capturas estimadas para o Pargo (L. purpureus), em número de indivíduos, para as idades 6 a 14, juntamente com os esforços anuais (em mil anzóis/hora) para os anos de 1967 a 1977

ANO	ES-FORÇO	IDADE								
		6	7	8	9	10	11	12	13	14
1967	6.576	645.863	503.971	477.872	213.204	71.313	68.372	18.743	8.822	735
1968	4.105	486.622	258.284	245.353	87.797	42.877	59.892	17.355	13.612	3.063
1969	3.984	353.994	201.516	260.004	144.816	55.168	48.783	20.688	16.857	6.385
1970	3.659	255.469	160.785	137.723	79.256	28.584	28.097	6.821	6.659	2.923
1971	4.255	240.300	176.476	146.830	80.391	36.969	52.664	29.296	25.286	9.417
1972	5.888	413.110	246.250	205.040	102.621	26.463	27.675	11.919	7.474	3.030
1973	6.456	872.351	516.548	331.784	126.432	30.832	34.577	8.446	4.487	2.112
1974	5.682	875.697	500.670	284.792	114.602	47.192	35.028	7.234	6.092	4.118
1975	9.157	1.212.194	477.389	206.557	121.999	46.179	25.586	7.488	7.176	2.184
1976	8.900	565.033	291.862	225.726	85.785	91.536	35.464	11.023	1.917	958
1977	23.015	1.302.858	439.285	255.573	133.723	34.368	39.999	11.873	6.249	3.125

TABELA 2

Estimativas de  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $\delta_j$  ( $j = 6, 7, \dots, 13$ ) através de vários modelos de regressão, para os dados do Pargo (L. purpurus)

REGRESSÃO	$\bar{\mu}$	$\bar{\lambda}$ (1)	ep( $\bar{\mu}$ )	ep( $\bar{\lambda}$ ) (1)	$\bar{\delta}_6$ (1) (2)	$\bar{\delta}_7$ (1) (2)	$\bar{\delta}_8$ (1) (2)	$\bar{\delta}_9$ (1) (2)	$\bar{\delta}_{10}$ (1) (2)	$\bar{\delta}_{11}$ (1) (2)	$\bar{\delta}_{12}$ (1) (2)	$\bar{\delta}_{13}$ (1) (2)	EQM	g.l.
1. Regr. Linear ( $\lambda_{ij} = \lambda$ )	0,43	0,58	0,08	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-	0,205	78
2. Regr. Linear Pond. ( $\lambda_{ij} = \lambda$ ) (3)	0,39	0,62	0,07	0,11	-	-	-	-	-	-	-	-	0,142	78
3. Regr. Linear Pond. ( $\lambda_{ij} = \lambda + \delta_j$ )	0,37	0,36	0,09	0,38	0,16(0,46)	0,18(0,45)	0,43(0,44)	0,39(0,42)	0,16(0,40)	0,51(0,35)	0,19(0,30)	0,25(0,23)	0,100	78
4. Regr. Linear Pond. Stepwise para os $\delta_j$ 's	0,38	0,53	0,06	0,09	-	-	0,25(0,06)	0,22(0,06)	-	0,35(0,07)	-	-	0,096	75
5. Regr. Não-Linear Pond. com $\delta_j$ 's Conf. Stepwise	0,39	0,50	0,06	0,07	-	-	0,26(0,07)	0,21(0,07)	-	0,37(0,10)	-	-	0,097	75

(1) Estes valores devem ser multiplicados por  $10^{-4}$ .

(2) As estimativas de  $\delta_j$  vêm acompanhadas dos respectivos erros padrão entre parênteses.

(3) Os pesos  $\omega_{ij} = (v_{ij})^{-1}$  para as idades 6, 7, ..., 14 foram respectivamente: 0,54; 1,52; 1,91; 1,99; 0,70; 1,12; 0,36; 0,32; 0,34.

TABELA 3

Estimativas para os coeficientes de capturabilidade por idade através de Análise de Coorte (A.C.) e pelo Modelo de Regressão (3.31), Pargo (L. purpureus)

IDADE (j)	ANÁLISE DE COORTE		REG. LIN. Nº 3 ( $\lambda_j = \lambda + \delta_j$ )	
	$\bar{\lambda}_j \cdot 10^4$ (1)	$ep(\lambda_j) \cdot 10^4$	$\bar{\lambda}_j \cdot 10^4$ (2)	$ep(\bar{\lambda}_j) \cdot 10^4$ (3)
6	0,51	0,06	0,52	0,15
7	0,53	0,06	0,54	0,13
8	0,75	0,05	0,80	0,12
9	0,71	0,06	0,75	0,12
10	0,52	0,06	0,52	0,12
11	0,89	0,08	0,87	0,11
12	0,56	0,06	0,56	0,16
13	0,76	0,17	0,62	0,23
14	0,51	0,12	0,36	0,38

(1)  $\bar{\lambda}_j = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g \frac{F_{ij}}{F_i}$ ; onde  $F_{ij}$  são os valores estimados para  $\phi_{ij}$  pela A.C. e  $g$  é o número de anos em que  $F_{ij}$  foi observado.

(2)  $\bar{\lambda}_j = \lambda + \delta_j$

(3)  $ep(\bar{\lambda}_j) = \sqrt{\text{var}(\bar{\lambda}_j)}$ ; onde  $\text{var}(\bar{\lambda}_j) = \text{var}(\lambda) + \text{var}(\delta_j) + 2\text{cov}(\lambda, \delta_j)$

TABELA 4

Estimativas de  $N_1(C)$  e dos respectivos desvios padrão, para algumas coortes de Pargo (L. purpureus) em dois modelos de regressão considerados

COORTE (C)	REG. LIN. PONDERADA (2)		REG. LIN. "STEPWISE" (4)	
	$\hat{N}_1(C)$	$dp(\hat{N}_1(C))$	$\hat{N}_1(C)$	$dp(\hat{N}_1(C))$
1	35.217	15.463	38.087	16.022
4	455.783	139.677	445.546	119.040
7	2.323.030	619.307	2.274.784	533.065
10	2.258.006	623.533	2.149.628	536.399
13	4.257.032	962.557	3.739.362	732.413
16	2.669.636	624.258	2.454.848	456.538

(2) Corresponde à regressão nº 2 da Tabela 2.

(3) Corresponde à regressão nº 4 da Tabela 2.

(\*)  $CV = dp(\hat{N}_1(C)) / \hat{N}_1(C)$

TABELA 5

Correlações estimadas entre as estimativas  $\hat{N}_1(.)$  para algumas coortes de Pargo (L. purpureus) no modelo de regressão considerado

$(*) r[\hat{N}_1(a), \hat{N}_1(b)]$	1	4	7	10	13	16
1	1					
4	0,24	1				
7	0,31	0,57	1			
10	0,31	0,59	0,76	1		
13	0,26	0,50	0,65	0,62	1	
16	0,15	0,28	0,36	0,38	0,33	1

(\*) Calculado pela expressão (A4.12) do Anexo 4.

TABELA 6

Correlações estimadas entre alguns parâmetros de interesse para os diferentes modelos considerados na Tabela 2 para o Pargo (L. purpureus)

REGRESSÃO	$r_{\hat{\mu}, \hat{\lambda}}$	$r_{\hat{\mu}, \hat{\delta}_j}$	$r_{\hat{\lambda}, \hat{\delta}_j}$
Nº 1	-0,95	-	-
Nº 2	-0,94	-	-
Nº 3	0,56	< (-0,56)	< (-0,82)
Nº 4	-0,91	[-0,08; 0,05]	< (-0,11)
Nº 5	-0,89	< (-0,44)	> (0,26)

TABELA 7

Capturas estimadas para a Castanha (Umbrina canosai) em número de indivíduos,  
para as idades 3 a 14, juntamente com diferentes medidas de esforço anual  
para o período de 1976 a 1983

ANO	ESFORÇO			I D A D E													
	f (1)	f <sub>C</sub> (2)	v (3)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
1976	4.705	4.516	743	20.724	10.654	5.893	5.073	3.540	3.087	1.903	790	918	675	367	461		
1977	4.341	6.354	761	17.214	12.556	5.976	3.206	2.583	2.994	2.351	781	816	921	466	309		
1978	6.457	8.295	1.103	7.516	9.369	5.897	3.825	1.772	768	2.109	1.192	805	724	206	27		
1979	7.207	5.936	774	14.018	4.152	4.234	2.660	1.318	573	380	599	303	140	107	37		
1980	7.719	4.812	823	11.027	6.682	2.449	2.132	1.325	784	239	344	286	107	39	70		
1981	7.525	5.700	1.164	31.632	7.678	3.362	1.223	1.342	769	526	115	216	204	75	70		
1982	7.266	9.032	1.384	18.024	11.379	1.655	1.060	594	370	532	270	128	170	104	81		
1983	7.258	6.130	-	7.877	10.237	6.262	832	858	391	437	351	214	86	33	48		

(1) f: esforço em "dias no mar".

(2) f<sub>C</sub>: esforço corrigido em "dias no mar".

(3) v: esforço em "número de viagens".

TABELA 8

Estimativas de  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $\delta_j$  ( $j = 3, 4, \dots, 12$ ) através de vários modelos de regressão, para os dados da Castanha (U. canosai)

REGRESSÃO (1)	$\bar{\mu}$	$\bar{\lambda}$ (2)	dp ( $\bar{\mu}$ )	dp ( $\bar{\lambda}$ )	$\bar{\delta}_3$ (2)	$\bar{\delta}_4$ (2)	$\bar{\delta}_5$ (2)	$\bar{\delta}_6$ (2)	$\bar{\delta}_7$ (2)	$\bar{\delta}_8$ (2)	$\bar{\delta}_9$ (2)	$\bar{\delta}_{10}$ (2)	$\bar{\delta}_{11}$ (2)	$\bar{\delta}_{12}$ (2)	EQM	g.l.
1. Regr. Lin. ( $\lambda_{ij} = \lambda$ ) com f	1,59	-1,25	0,29	0,42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,216	75
2. Regr. Lin. ( $\lambda_{ij} = \lambda$ ) com f <sub>c</sub>	0,45	0,38	0,38	0,59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,145	68
3. Regr. Lin. ( $\lambda_{ij} = \lambda$ ) com v	0,34	4,63	0,28	3,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,108	58
4. Regr. Lin. ( $\lambda_j = \lambda + \delta_j$ ) com v	0,35	4,07	0,29	8,95	0,55	0,81	0,48	0,55	0,55	-0,14	1,06	0,66	1,28	1,68	0,111	48

(1) Regressão 1 para idades 3 a 14 e Regressões 2, 3 e 4 para idades 3 a 13.

(2) Os valores da Tabela devem ser multiplicados por  $10^{-4}$ .

TABELA 9

Estimativas de  $N_1(C)$  e dos respectivos desvios padrão, para algumas coortes de Castanha (U. canosai) a partir da regressão nº 4 da Tabela 7

COORTE (C)	$\hat{N}_1(C)$	$dp(\hat{N}_1(C))$	C.V. (*)
2	3.204	2.383	0,74
5	5.807	4.338	0,75
8	20.019	14.761	0,74
11	92.743	68.385	0,74
14	41.800	28.895	0,69

(\*)  $CV = dp(\hat{N}_1(C)) / \hat{N}_1(C)$

TABELA 10

Correlações estimadas entre as estimativas  $\hat{N}_1(.)$  para algumas  
coortes de Castanha (U. canosai) no modelo de regressão nº 4 da Tabela 7

$(*) r[\hat{N}_1(a), \hat{N}_1(b)]$	2	5	8	11	14
2	1				
5	0,93	1			
8	0,93	0,97	1		
11	0,93	0,97	0,97	1	
14	0,92	0,95	0,96	0,96	1

(\*) Calculado pela expressão (A4.12) do Anexo 4.