

AVALIAÇÃO DA INDISPONIBILIDADE DE
EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS
DETECTADAS EM DEMANDA OU EM INSPEÇÃO

Patrícia da Silva Pagetti

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Teoria da Confiabilidade
Orientador: Prof. Dr. WAGNER DE SOUZA BORGES

-São Paulo, Dezembro de 1988-

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com a colaboração do

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - IPEN - CNEN/SP

Departamento de Tecnologia de Reatores

Em especial, desejo agradecer :

a ORIENTAÇÃO de WAGNER DE SOUZA BORGES, cuja dedicação e experiência foram fundamentais na realização deste trabalho.

ao incentivo constante de meus pais DINO PAGETTI e EMÍLIA SILVA PAGETTI, meus irmãos CLÁUDIA, VALÉRIA e FAUSTO e de RUY FRANCISCO DE OLIVEIRA.

MUITO OBRIGADO.

Dezembro, 1988.

Notação

$A(t)$, $t \geq 0$: disponibilidade do equipamento no instante t

$U(t) = 1 - A(t)$, $t \geq 0$: indisponibilidade do equipamento no instante t

$AM(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds$: disponibilidade média do equipamento em $(0, t]$

$UM(t) = 1 - AM(t)$: indisponibilidade média do equipamento em $(0, t]$

$AM = \lim_{t \rightarrow \infty} AM(t)$ (se existir) : disponibilidade média assintótica do equipamento

$UM = 1 - AM$: indisponibilidade média assintótica do equipamento

$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ (se existir) : disponibilidade intrínseca do equipamento

$U = 1 - A$: indisponibilidade intrínseca do equipamento

$D_1 < D_2 < \dots < D_{n-1} < D_n < \dots$: Processo de Renovação dos instantes aleatórios de demanda do equipamento

$H(t)$, $t \geq 0$: função de distribuição do tempo entre duas demandas consecutivas

$h(t) = \frac{dH}{dt}$: função densidade de probabilidade do tempo entre duas demandas consecutivas

$\nu_D > 0$: intensidade do processo de demandas (caso Poissoniano)

L : variável aleatória que representa o tempo em estado de capacidade operacional (vida) do equipamento

$F(t)$, $t \geq 0$: função de distribuição do tempo de vida do equipamento

$f(t) = \frac{dF}{dt}$: função densidade de probabilidade do tempo de vida do equipamento

$m_L > 0$: tempo médio de vida do equipamento

$\lambda_L > 0$: taxa de falha (constante) do equipamento

$V(t)$, $t \geq 0$: variável aleatória que representa a vida residual do equipamento em estado de capacidade operacional no instante t

R : variável aleatória que representa o tempo de reparo do equipamento

$G(t)$, $t \geq 0$: função de distribuição do tempo de reparo do equipamento

$g(t) = \frac{dG}{dt}$: função densidade de probabilidade do tempo de reparo do equipamento

$m_R > 0$: tempo médio de reparo do equipamento

$\mu_R > 0$: taxa de reparo (constante) do equipamento

$i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n < \dots$: instantes conhecidos de inspeção do equipamento

I : variável aleatória que representa o tempo de inspeção do equipamento

$J(t)$, $t \geq 0$: função de distribuição do tempo de inspeção do equipamento

$m_I > 0$: tempo médio de inspeção do equipamento

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO E SUMÁRIO

1.1 Introdução	1
1.2 Medidas de Desempenho para Equipamentos com Reparo e Inspeção	3
1.2.1 Políticas de Manutenção	4
1.2.1.1 Equipamentos reparáveis com falhas monitoradas	4
1.2.1.1-1 Manutenção Preventiva	4
1.2.1.1-2 Manutenção Preventiva em Bloco	4
1.2.1.2 Equipamentos reparáveis com falhas não monitoradas	4
1.2.1.2-1 Equipamentos Reparáveis com falhas detectadas em demanda	5
1.2.1.2-2 Equipamentos Reparáveis com falhas detectadas na inspeção	5
1.2.2 Medidas de Desempenho Baseadas na Noção de Disponibilidade	7

CAPÍTULO 2: INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS DETECTADAS EM DEMANDA

2.1 Introdução	13
2.2 O Modelo de Caldarola	15
2.3 Modelo Alternativo	21
2.3.1 Casos Especiais	26
2.4 Comparação dos Modelos Apresentados	29

**CAPÍTULO 3: INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS
COM FALHAS DETECTADAS EM INSPEÇÃO**

3.1 Introdução	31
3.2 O Modelo do Vaurio	33
3.3 Abordagem Alternativa	38

**CAPÍTULO 4: INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS
COM FALHAS DETECTADAS EM INSPEÇÃO - CASO ESPECIAL**

4.1 Introdução	47
4.2 Aplicação do Modelo do Vaurio	49
4.3 Modelo Alternativo	53
4.4 Comparações Numéricas	56

CAPÍTULO 5: COMENTÁRIOS FINAIS 58

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 60

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO E SUMÁRIO

1.1 INTRODUÇÃO

O estudo do desempenho de equipamentos utilizados em instalações industriais ou de pesquisa tem despertado grande interesse em áreas científicas e tecnológicas. Como o funcionamento ou avaria destes equipamentos determinam, em geral, o funcionamento ou avaria dos sistemas aos quais pertencem, é de grande importância obter-se medidas do desempenho dos equipamentos e, em função destas, medidas do desempenho global do sistema. Neste sentido, a Teoria dos Processos Estocásticos fornece um conjunto de idéias e modelos que têm sido utilizados por vários pesquisadores no cálculo destas medidas. Assim, vários modelos estocásticos têm sido desenvolvidos, no contexto da Teoria Matemática da Confiabilidade, para descrever o comportamento de equipamentos, levando-se em consideração fatores tais como : a origem destas falhas, as ações de manutenção previstas e as condições de solicitação e monitoração dos equipamentos.

De uma maneira geral, os modelos encontrados na literatura ou são construídos com base em suposições que podem restringir sua aplicação prática, ou não são fundamentados nos resultados mais adequados da Teoria dos Processos Estocásticos, que poderiam produzir soluções mais gerais para os problemas de confiabilidade abordados.

Este trabalho, onde procura-se ressaltar os aspectos mencionados no parágrafo anterior, surgiu da necessidade de se obter resultados mais precisos e gerais sobre a confiabi-

lidade de equipamentos cujo desempenho é regulado por ações de manutenção tais como inspeção e reparo. No entanto, trata-se apenas o caso específico de equipamentos cuja falha, se ocorrer, somente será detectada em instantes aleatórios de demanda do equipamento ou nos instantes programados para sua inspeção. Certamente, são resultados importantes para o aprimoramento de programas computacionais [10] para análise de confiabilidade, uma vez que os que se encontram disponíveis tratam satisfatoriamente apenas o caso mais simples em que a falha é monitorada, ou seja, é detectada imediatamente.

1.2 MEDIDAS DE DESEMPENHO PARA EQUIPAMENTOS COM REPARO OU INSPEÇÃO

Nos casos em que um equipamento deve estar em estado de capacidade operacional ininterruptamente durante um período de tempo fixado, a medida de desempenho mais adequada é sem dúvida dada por sua função de confiabilidade, que é definida pela função de distribuição do tempo de vida do equipamento, isto é , do tempo de espera até a ocorrência de sua primeira falha (ou um evento que o retire do estado de capacidade operacional).

Por outro lado, se ao equipamento são permitidas ações de manutenção tais como inspeção e reparo, este passa por períodos de tempo fora de serviço, voltando em seguida ao estado de capacidade operacional. Deste modo, ao longo do tempo, seu estado se alterna entre o estado de capacidade operacional e o estado de avaria ou ociosidade.

Evidentemente, o efeito destas ações de manutenção não é considerado em sua função de confiabilidade, fazendo-se necessária uma medida de desempenho para avaliar o comportamento deste equipamento ao longo do tempo, levando-se em conta os ciclos de inspeção e reparo. Neste sentido, as medidas de desempenho mais adequadas estão baseadas na noção de disponibilidade, isto é , se o equipamento está ou não no estado de capacidade operacional quando assim se deseja.

1.2.1 POLÍTICAS DE MANUTENÇÃO

1.2.1.1 Equipamentos reparáveis com falhas monitoradas

Para o caso em que a falha do equipamento é monitorada (detectada imediatamente), é comum adotar as seguintes políticas de manutenção :

1.2.1.1 - 1 **manutenção preventiva** - o equipamento é submetido à uma ação de manutenção sempre que falha ou completa T unidades de tempo em serviço.

1.2.1.1 - 2 **manutenção preventiva em bloco** - o equipamento é submetido à ação de manutenção sempre que falha e em instantes de tempo pré-estabelecidos.

Estas duas políticas de manutenção são clássicas na Teoria da Confiabilidade e a hipótese normalmente feita é a de que a ação de manutenção restitui o equipamento à condição de novo (“as good as new”), o que equivale a um reparo completo ou a uma substituição. Nestes casos, a *Teoria da Renovação* fornece os fundamentos teóricos para o cálculo das medidas de desempenho, e um estudo detalhado dessas políticas pode ser encontrado em Borges - 1979 - [3].

Outros modelos para ações de manutenção que não são do tipo “as good as new” podem ser encontrados em Block, Borges & Savits - 1985 - [2].

1.2.1.2 Equipamentos reparáveis com falhas não monitoradas

Para o caso em que a falha do equipamento não é monitorada, é comum adotar uma política de manutenção que permita a detecção da falha, seguida por uma ação que restabeleça a capacidade operacional do equipamento.

Dois modelos para situações deste tipo, que serão objeto de estudo do presente trabalho são os seguintes :

1.2.1.2 - 1 equipamentos reparáveis com falhas detectadas em demanda - trata-se de equipamentos que são solicitados a cumprir uma determinada tarefa instantânea em instantes aleatórios de demanda. Se não responder satisfatoriamente a qualquer demanda, o equipamento é submetido a reparo, que o restaura à condição de novo. Além disso, entre duas demandas consecutivas o equipamento permanece em serviço, podendo, neste intervalo, ocorrer uma avaria a ser detectada apenas na próxima demanda. Supõe-se ainda que durante o reparo o processo de demandas é interrompido, sendo restabelecido após seu término.

Caldarola - 1977 - [4] desenvolveu um modelo para descrever o comportamento desses equipamentos ao longo do tempo, supondo que as demandas ocorrem segundo um Processo de Poisson.

No Capítulo 2 deste estudo será apresentado o modelo proposto em [4] e um modelo alternativo para avaliar o desempenho desses equipamentos, o qual admite uma distribuição genérica para o tempo de espera entre demandas consecutivas.

1.2.1.2 - 2 equipamentos reparáveis com falhas detectadas na inspeção - trata-se de equipamentos que são inspecionados em instantes pré-estabelecidos. Se durante a inspeção for detectada uma falha do equipamento, este é submetido a reparo, que o restaura à condição de novo. Durante o período em que não está em inspeção ou reparo, o equipamento está em serviço. No entanto, se ocorrer uma falha no equipamento durante este período, esta só será detectada na próxima inspeção.

Caldarola - 1977 - [4] estudou também este problema supondo conhecidos e constantes o tempo de inspeção e o tempo de reparo do equipamento. Vaurio - 1979 - [7] estendeu os resultados de [4] admitindo distribuições genéricas para o tempo de vida, tempo de inspeção e tempo de reparo do equipamento. Vesely & Goldberg - 1977 - [9] também estudaram este problema e Sim - 1985 - [11] desenvolveu um modelo para o caso de intervalos iguais entre inspeções sucessivas.

No Capítulo 3 deste trabalho será exposto o modelo desenvolvido em [7] e uma abordagem alternativa para avaliar o desempenho de equipamentos com este perfil de operação e manutenção.

Existe ainda uma outra forma de se programar a inspeção de equipamentos cuja falha não pode ser monitorada. Trata-se de um plano de manutenção no qual a próxima inspeção é marcada para iniciar T (constante) unidades de tempo após o término da última inspeção ou do término do reparo (caso uma falha tenha sido detectada na inspeção). Neste caso, os instantes de inspeção não são conhecidos previamente. Se durante seu período em serviço, o equipamento apresentar uma falha, esta será detectada somente no instante inicial da próxima inspeção. Neste instante, o serviço de reparo é iniciado e restaurará o equipamento à condição de novo. Durante a inspeção ou reparo, o equipamento permanece indisponível e durante o período de tempo entre o término de uma ação de manutenção e o próximo instante de inspeção, o equipamento está em serviço.

Heising - 1983 - [6], Vaurio - 1985 - [8] e Sim - 1985 - [11] desenvolveram modelos para abordar este problema.

No Capítulo 4 deste estudo será exposto o modelo desenvolvido em [8] e uma abordagem alternativa para avaliar o desempenho destes equipamentos, supondo constantes o tempo de inspeção e o tempo de reparo.

1.2.2 MEDIDAS DE DESEMPENHO BASEADAS NA NOÇÃO DE DISPONIBILIDADE

Para estudar o desempenho de um equipamento, baseado na noção de disponibilidade, é preciso construir um processo estocástico $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ onde $Y(t) = 1$ se o equipamento encontra-se disponível no instante t e $Y(t) = 0$ caso contrário. Define-se, então, a *função de disponibilidade no instante t* como sendo

$$A(t) = P\{Y(t) = 1\} = E[Y(t)] \quad , t \geq 0, \quad (1.2.2.1)$$

que dá a probabilidade de se encontrar o equipamento no estado de capacidade operacional no instante t . Note que, se não é permitido o reparo ou substituição do equipamento, então $A(t)$ equivale à sua *função de confiabilidade no instante t* , que é a probabilidade de que este opere sem falha em $[0, t]$.

A *função de disponibilidade média* ou apenas *disponibilidade média* é definida por

$$AM(t) = \frac{1}{t} \int_0^t A(x) dx \quad , t > 0. \quad (1.2.2.2)$$

Não é difícil ver que $AM(t)$ dá a fração média de tempo em que o equipamento está em estado de capacidade operacional durante o intervalo de tempo $(0, t]$ e que vale ainda o seguinte resultado (Barlow & Proschan - [1]):

Lema 1 . Se $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A$ existe, então

$$AM = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(x) dx = A \quad (1.2.2.3)$$

Assim, se $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ existe, diz-se que A é a *disponibilidade intrínseca* do equipamento e, pelo Lema 1, a *disponibilidade média assintótica* do equipamento é dada por sua disponibilidade intrínseca, quando esta existe. Além disso, a disponibilidade

intrínseca de um equipamento pode ser interpretada como a proporção do tempo em que este permanece em estado de capacidade operacional.

Neste trabalho, o interesse está no cálculo da medida de desempenho comumente usada em aplicações à engenharia, que é a *indisponibilidade média assintótica* do equipamento, dada por

$$UM = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} AM(t) = 1 - AM. \quad (1.2.2.4)$$

A evolução do processo Υ é em geral determinada por dados mais elementares sobre o tempo de vida do equipamento, os tempos das ações de manutenção e as dependências entre estas características, induzidas pela política de manutenção. Para dar uma idéia de como estes dados determinam a evolução, possibilitando a construção, do processo Υ em alguns casos típicos, considere as políticas de manutenção descritas no **Item 1.2.1**.

Para um equipamento submetido a uma política de manutenção preventiva (**Item 1.2.1.1 - 1**), conhecidos os tempos de vida do equipamento após manutenção e os tempos das ações de manutenção, uma realização típica do processo Υ é dada pela **Figura 1.2.2-A**.

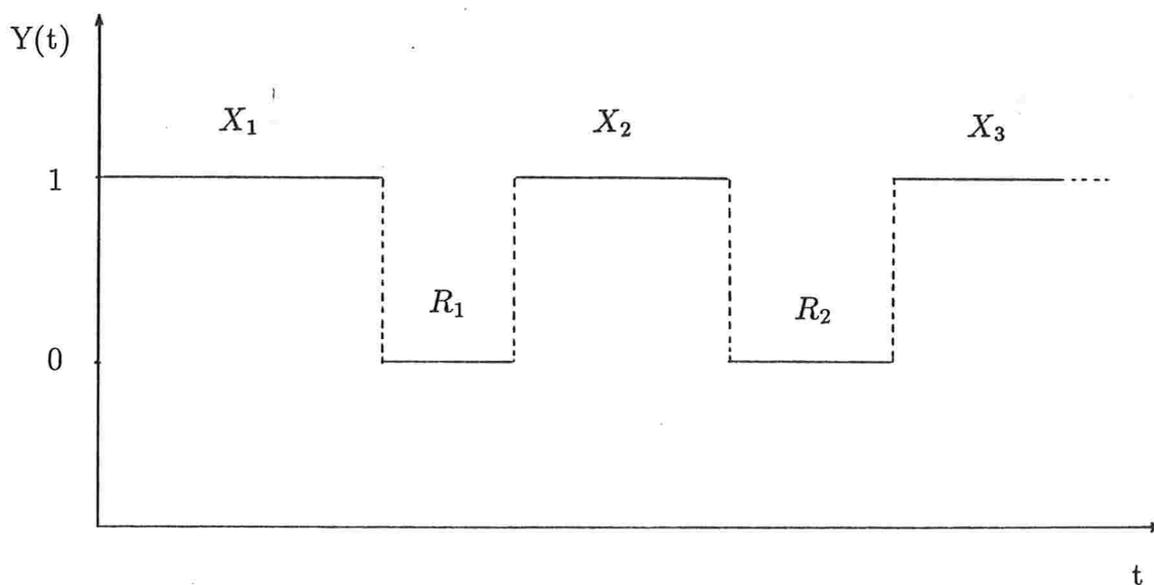


Figura 1.2.2-A Realização típica do processo Υ para a política de manutenção do Item 1.2.1.1 - 1.

onde $X_k = \min\{L_k, T\}$, $\{L_k; k \geq 1\}$ são os tempos de vida do equipamento e $\{R_k; k \geq 1\}$ são os tempos de reparo. Se os reparos restauram o equipamento à condição de novo, então $\{X_k + R_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d e $\{Y(t); t \geq 0\}$ é um Processo de Renovação.

A **Figura 1.2.2-B** ilustra uma realização típica de Υ para um equipamento submetido a uma política de manutenção preventiva em bloco (**Item 1.2.1.1 - 2**).

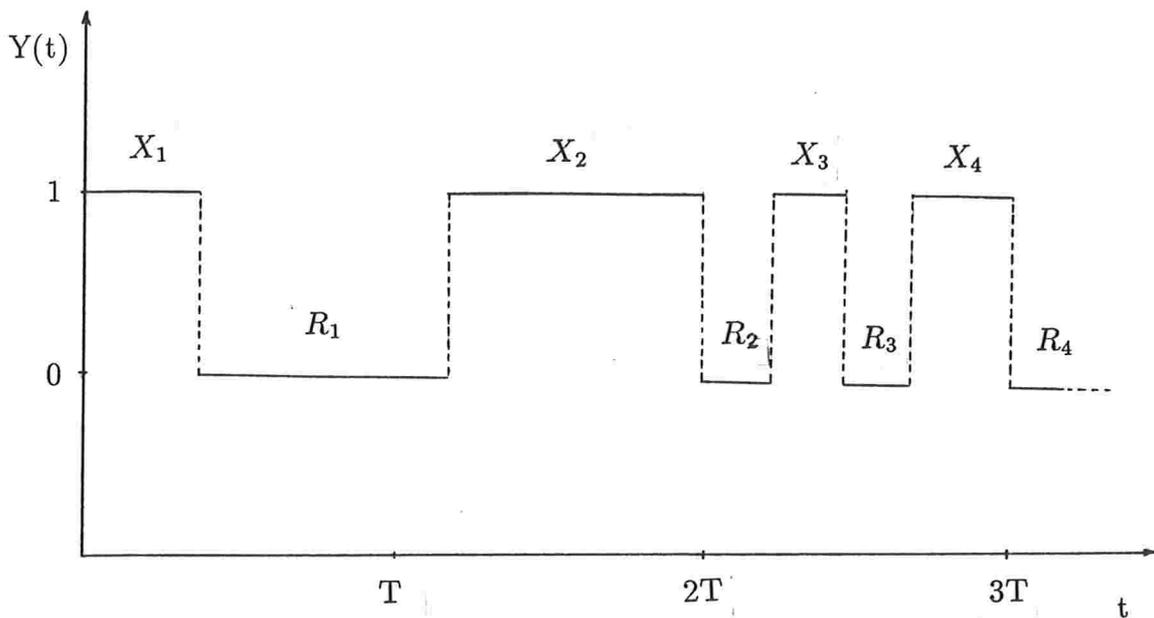


Figura 1.2.2-B Realização típica do processo Υ para a política de manutenção do Item 1.2.1.1 - 2.

onde os tempos $\{X_k; k \geq 1\}$ em estado de capacidade operacional do equipamento, após os sucessivos reparos, são definidos a partir dos tempos de vida $\{L_k; k \geq 1\}$ e dos tempos de reparo $\{R_k; k \geq 1\}$ da seguinte maneira :

$$X_1 = \min\{L_1, T\} \text{ e } X_{n+1} = \min\{L_{n+1}, ([W_n/T] + 1)T - W_n\} \text{ , com}$$

$W_n = X_1 + R_1 + \dots + X_n + R_n$, $n \geq 1$. Assim, $Y(t) = 1$ se $W_n \leq t < W_n + X_{n+1}$ para $n \geq 0$ ($W_0 = 0$) e $Y(t) = 0$ caso contrário.

Para equipamentos com falhas detectadas em demanda, que é a política de manutenção descrita no **Item 1.2.1.2 - 1**, uma realização típica do processo Υ está representada na **Figura 1.2.2-C**.

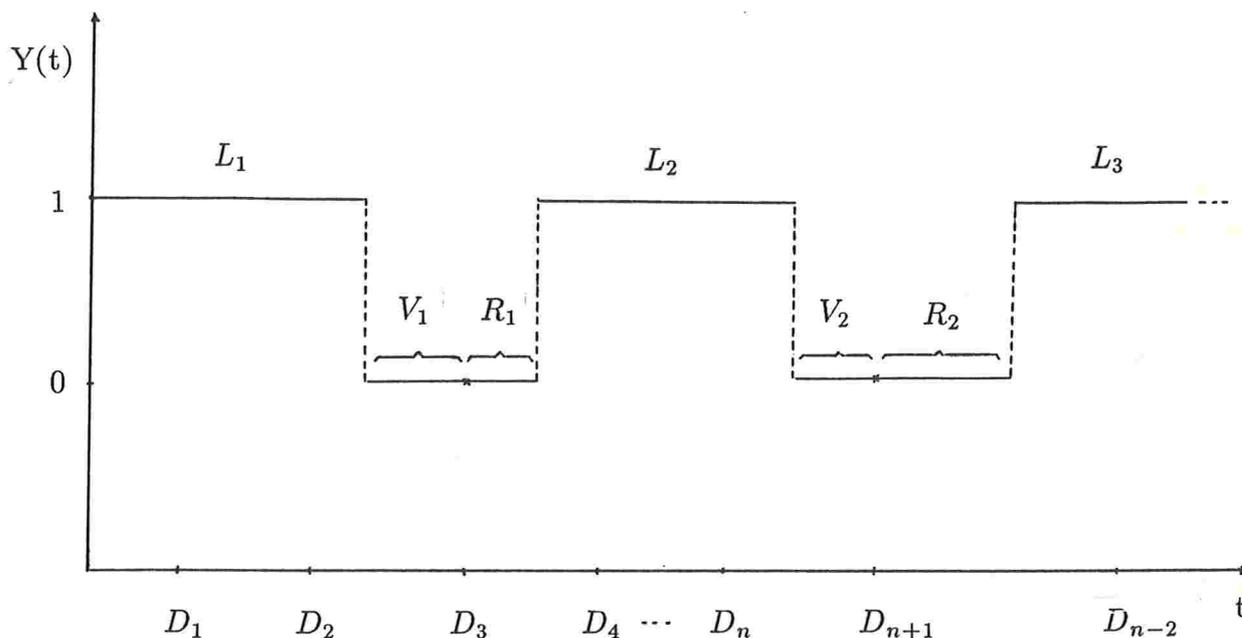


Figura 1.2.2-C Realização típica do processo Υ para a política de manutenção do Item 1.2.1.2 - 1.

onde $\{L_k; k \geq 1\}$ representam os tempos de vida do equipamento, $(D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n, D_{n+1}, \dots)$ os instantes de demanda e $\{V_k + R_k; k \geq 1\}$ os tempos em que uma falha permanece não detectada adicionados aos tempos de reparo.

Uma forma alternativa de se construir o processo $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ para o caso específico de equipamentos reparáveis com falhas detectadas em demanda será tratada

com detalhes no Capítulo 2 deste estudo.

A Figura 1.2.2-D apresenta o processo Y para a política de manutenção descrita no Item 1.2.1.2 - 2, referente a equipamentos reparáveis com falhas detectadas em inspeção.

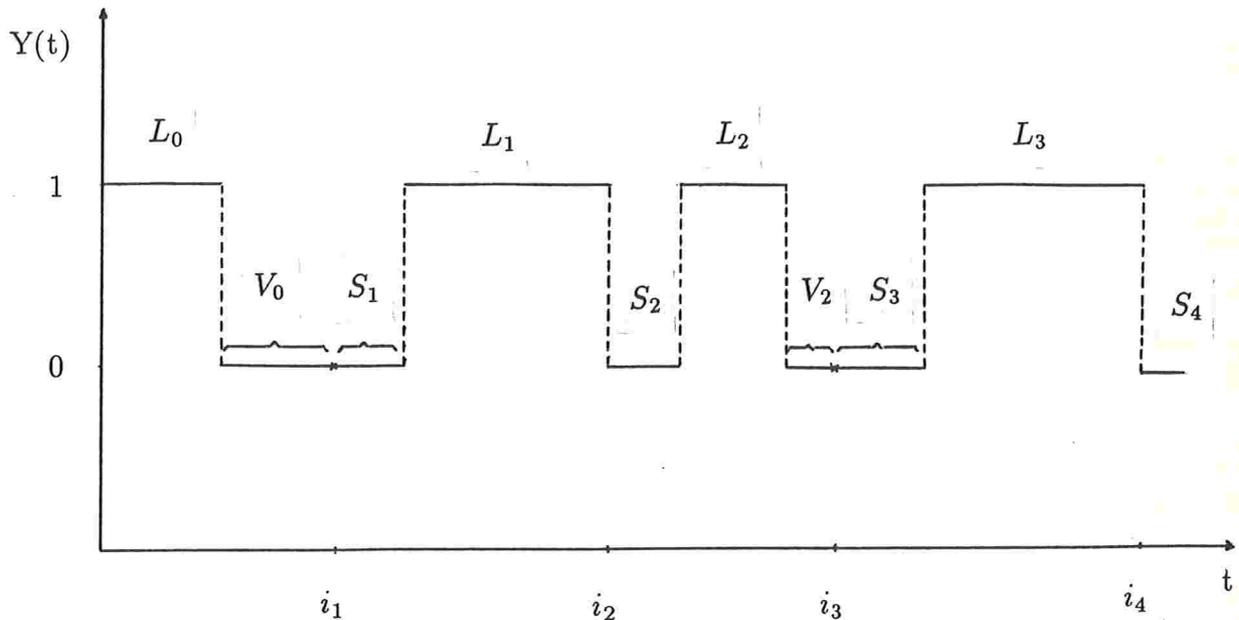


Figura 1.2.2-D Realização típica do processo Y para a política de manutenção do Item 1.2.1.2 - 2.

onde $\{L_k; k \geq 0\}$ são os tempos de vida do equipamento, $\{V_k; k \geq 0\}$ são os tempos em que uma falha permanece não detectada, $(i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots)$ são os instantes conhecidos de inspeção e $S_k = I_k + R_k 1\{V_{k-1} = 0\}, k \geq 1$, com $\{I_k; k \geq 1\}$ tempos de inspeção e $\{R_k; k \geq 1\}$ tempos de reparo.

É importante observar que, se a inspeção do equipamento é efetuada instantaneamente, este permanece indisponível apenas durante os tempos em que a falha permanece não detectada e durante os tempos de reparo. Este fato pode ser verificado através

da Figura 1.2.2-C, considerando-se que uma demanda pode ser interpretada como uma inspeção instantânea do equipamento.

A construção do processo $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ para equipamentos sujeitos às políticas de manutenção descritas no **Item 1.2.1.2** será estudada com mais detalhes nos capítulos que seguem.

CAPÍTULO 2

INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS DETECTADAS EM DEMANDA

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta modelos que tratam da avaliação da indisponibilidade de equipamentos reparáveis sujeitos a falhas estocásticas detectadas em demanda. Especificamente, tratam de equipamentos que são solicitados a produzir uma determinada tarefa em instantes aleatórios de demanda $D_1 < D_2 < \dots < D_{n-1} < D_n < \dots$ e que são submetidos a reparo caso não respondam satisfatoriamente a qualquer demanda. É importante salientar que entre duas demandas consecutivas, o equipamento permanece em regime de espera (“stand-by”) podendo entrar em estado de incapacidade operacional a ser detectado apenas na próxima demanda. Durante o reparo o processo de demandas é interrompido e o equipamento permanece indisponível, voltando em seguida ao seu estado de capacidade operacional. Supõe-se também que os reparos são perfeitos e restauram o equipamento à condição de novo.

Um modelo para descrever o comportamento desses equipamentos ao longo do tempo foi estudado por Caldarola - 1977 - [4], introduzindo uma classe especial de processos denominados *Processos de Renovação com Cadeia Fechada* (“Closed Chain Renewal Processes”). Através deste modelo, que será exposto no **Item 2.2** deste capítulo, desenvolveu-se um conjunto extenso de equações de indisponibilidade no *domínio de frequência* (Trans-

formada de Laplace), supondo que os tempos de espera entre demandas consecutivas é exponencial.

Uma forma alternativa de se modelar esta situação, baseando-se em noções básicas da Teoria dos Processos de Renovação, será apresentada no **Item 2.3** deste capítulo. Esta modelagem alternativa deixa de lado as suposições mais restritivas consideradas em outros estudos e fixa-se no desenvolvimento de uma expressão exata para o cálculo da indisponibilidade média assintótica do equipamento.

É importante citar que os modelos apresentados neste capítulo também se ajustam a falhas detectadas em inspeção para o caso especial de inspeção instantânea, ou seja, a inspeção instantânea de equipamentos em “stand-by” pode ser interpretada como uma demanda deste equipamento. Neste sentido, esta abordagem é mais genérica do que a que será apresentada no Capítulo 3 pois, neste último, os instantes de inspeção devem ser previamente conhecidos, enquanto que, nos modelos aqui discutidos, os instantes de inspeção podem ser aleatórios.

2.2 O MODELO DE CALDAROLA

Caldarola -1977 - [4] procurou obter a expressão analítica para o cálculo da *indisponibilidade pontual* $U(t)$ e da *indisponibilidade intrínseca* $U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$ de um equipamento que é solicitado a operar em instantes aleatórios $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n, \dots$ (instantes de demanda) e que é submetido a reparo caso seja encontrado no estado de incapacidade operacional. Além disso, faz as seguintes suposições adicionais :

(i) os intervalos de tempo entre duas demandas consecutivas ($D_1, D_2 - D_1, D_3 - D_2, \dots, D_n - D_{n-1}, D_{n+1} - D_n, \dots$) são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e identicamente distribuídas segundo uma exponencial com parâmetro $\nu_D > 0$;

(ii) se o equipamento apresentar falha na demanda, será considerado novo após seu reparo;

(iii) no instante inicial ($t = 0$), o equipamento está novo ou apresenta uma falha ainda não detectada.

Para descrever o comportamento deste equipamento ao longo do tempo, aplicou-se os resultados da *Teoria de Processos de Renovação com Cadeia Fechada* para o caso específico em que o espaço de estados é $E = \{1, 2, 3\}$, onde **1** representa *incapacidade operacional*, **2** representa *reparo* e **3** representa *capacidade operacional*. As transições de estado, dada a natureza do equipamento, ocorrem segundo o diagrama de transição da **Figura 2.2-A**.

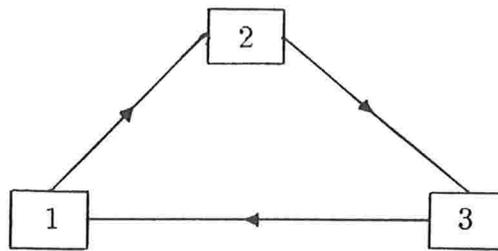


Figura 2.2-A Diagrama de transição do modelo de Caldarola

Este modelo é um caso particular de um *Processo M-R* (“Markov-Renewal Process”) $\{(X_n, T_n); n \geq 0\}$ com o espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ descrito acima. O processo $\{Y(t); t \geq 0\}$ definido por

$$Y(t) = X_n \quad \text{se } T_n \leq t < T_{n+1}$$

é o processo *semi-regenerativo* associado a $\{(X_n, T_n); n \geq 0\}$. Assim, a *indisponibilidade pontual* do equipamento é dada por

$$U(t) = 1 - P\{Y(t) = 3\} \quad , t \geq 0.$$

Uma apresentação detalhada a respeito da Teoria de Processos M-R e semi-regenerativos pode ser encontrada em Çinlar - 1975 - [5].

Caldarola [4], no entanto, faz uma abordagem distinta ao apresentar a *Teoria de Processos de Renovação com Cadeia Fechada* e os principais resultados, aplicados ao processo que descreve o comportamento de equipamentos reparáveis com falhas detectadas em demanda, serão mostrados a seguir.

Inicialmente considere a probabilidade $U_j(t)$ de que o equipamento, entrando na cadeia fechada no estado j , não esteja no estado 3 no instante t . $U_j(t)$ é a *indisponibilidade* do equipamento no instante $t > 0$, que depende do estado j em que o equipamento se encontra no instante inicial ($t = 0$) do processo.

Em virtude da suposição (iii), supõe-se que o instante inicial ($t = 0$) do processo não é um instante de demanda do equipamento, e que, em $t = 0$, o equipamento pode estar no estado 1 (incapacidade operacional) ou no estado 3 (capacidade operacional). Caldarola [4] obtém então as expressões de $U_1(t)$ e $U_3(t)$, a partir das quais a *indisponibilidade do equipamento no instante $t > 0$* é obtida através da expressão

$$U(t) = (1 - U_0)U_3(t) + U_0U_1(t).$$

onde U_0 é a indisponibilidade do equipamento no instante $t = 0$.

Neste caso, o *Processo de Renovação com Cadeia Fechada* é caracterizado por um estado inicial “in” e por 3 estados ligados um ao outro de acordo com o diagrama ilustrado na **Figura 2.2-A**. O estado inicial “in” pode ser interpretado como o estado no qual o equipamento se encontra antes de entrar na *cadeia fechada* formada pelos estados 1, 2 e 3.

Seja, T_i o tempo de permanência no estado i , com função densidade de probabilidade $\phi_i(t)$ e T_{in} o tempo de permanência no estado inicial, com função densidade de probabilidade $\phi_{in}(t)$.

Considerando que, durante o processo, ocorre uma renovação toda vez que o equipamento entra no estado 3, pode-se definir:

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i \tag{2.2.1}$$

como o intervalo de tempo entre duas renovações sucessivas e

$$T_{jin} = T_{in} + \sum_{i=j}^3 T_i \tag{2.2.2}$$

como o tempo até ocorrer a 1^a renovação.

Se $\omega(t)$ é a função densidade de probabilidade de T e $\omega_{in}(t)$ a função densidade de probabilidade de T_{jin} , então,

$$\omega^*(s) = \prod_{i=1}^3 \phi_i^*(s) \tag{2.2.3}$$

e

$$\omega_{in}^*(s) = \phi_{in}^*(s) \prod_{i=j}^3 \phi_i^*(s) \quad (2.2.4)$$

onde “ * ” indica a transformação para o domínio de frequência (Transformada de Laplace).

Evidentemente, as equações (2.2.3) e (2.2.4) são verdadeiras apenas no caso em que as variáveis aleatórias T_{in} , T_1 , T_2 e T_3 são independentes.

A partir da definição de $U_j(t)$ e das equações (2.2.1) a (2.2.4), deduz-se que :

$$U_j^*(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \phi_{in}^*(s) \prod_{i=j}^2 \phi_i^*(s) \frac{[1 - \phi_3^*(s)]}{1 - \prod_{i=1}^3 \phi_i^*(s)} \right\} \quad (2.2.5)$$

que pode ser escrita em uma forma mais conveniente como:

$$U_j^*(s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \psi_j^*(s) \frac{1 - \phi_3^*(s)}{1 - \prod_{i=1}^3 \phi_i^*(s)} \right\} \quad (2.2.6)$$

onde

$$\psi_j^*(s) = \phi_{in}^*(s) \prod_{i=j}^2 \phi_i^*(s) \quad (2.2.7)$$

Neste caso, se $f(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de vida do equipamento, $h(t)$ a função densidade de probabilidade do tempo de permanência no estado de incapacidade operacional e $g(t)$ a função densidade de probabilidade do tempo de reparo, então:

$$\phi_1(t) = h(t) \quad , \quad (2.2.8)$$

$$\phi_2(t) = g(t) \quad e \quad (2.2.9)$$

$$\phi_3(t) = f(t) \quad , t \geq 0. \quad (2.2.10)$$

A partir da suposição (i), pode-se mostrar que o tempo de permanência no estado 1, que é o tempo decorrido desde a ocorrência de uma falha até a próxima demanda, é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com parâmetro ν_D , ou seja,

$$\phi_1(t) = h(t) = \nu_D \exp^{-\nu_D t} \quad , t \geq 0 \quad (2.2.11)$$

e

$$\phi_1^*(s) = \frac{\nu_D}{s + \nu_D}. \quad (2.2.12)$$

Além disso, supõe-se que, neste caso, o tempo de permanência T_{in} no estado inicial do processo é nulo. Isto equivale a supor que o processo entra diretamente na cadeia fechada no estado \mathbf{j} ($\mathbf{j} = 1$ ou 3) e que

$$\phi_{in}^*(s) = 1. \quad (2.2.13)$$

Deste modo, substituindo-se (2.2.9), (2.2.12) e (2.2.13) em (2.2.7), tem-se:

$$\psi_1^*(s) = g^*(s)\nu_D/s + \nu_D \quad (2.2.14)$$

$$\psi_3^*(s) = 1 \quad (2.2.15)$$

e, portanto, baseando-se em (2.2.6),

$$U_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left[1 - g^*(s) \frac{\nu_D}{s + \nu_D} \left(\frac{1 - f^*(s)}{1 - f^*(s)g^*(s)\nu_D/(s + \nu_D)} \right) \right] \right\} \quad (2.2.16)$$

e

$$U_3(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left[1 - \frac{1 - f^*(s)}{1 - f^*(s)g^*(s)\nu_D/(s + \nu_D)} \right] \right\} \quad (2.2.17)$$

onde L^{-1} indica a operação inversa da Transformada de Laplace.

Finalmente, para se obter a expressão para a indisponibilidade intrínseca do equipamento

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{(1 - U_0)U_3(t) + U_0U_1(t)\} \quad (2.2.18)$$

basta calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t)$ ou $\lim_{t \rightarrow \infty} U_3(t)$ pois estes limites não dependem do estado inicial do processo.

Deste modo, pode-se mostrar que

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_3(t) = \frac{\bar{T}_1 + \bar{T}_2}{\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3} \quad (2.2.19)$$

onde \bar{T}_1 é o tempo médio decorrido desde a ocorrência da falha até a próxima demanda ($\bar{T}_1 = 1/\nu_D$), \bar{T}_2 é o tempo médio de reparo e \bar{T}_3 o tempo médio de vida do equipamento.

Pelo **Lema 1** do **Item 1.2.2**, a expressão em (2.2.19) coincide com a expressão para a *indisponibilidade média assintótica* do equipamento.

No caso particular em que o tempo de vida e o tempo de reparo do equipamento são variáveis aleatórias *exponencialmente distribuídas* com parâmetros λ_L e μ_R , respectivamente, as equações (2.2.16) e (2.2.17) podem ser escritas como:

$$U_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{(s + \lambda_L)(s + \mu_R + \lambda_L)}{s[s^2 + s(\lambda_L + \mu_R + \nu_D) + \lambda_L\mu_R + \lambda_L\nu_D + \mu_R\nu_D]} \right\} \quad (2.2.20)$$

e

$$U_3(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\lambda_L(s + \mu_R + \nu_D)}{s[s^2 + s(\lambda_L + \mu_R + \nu_D) + \lambda_L\mu_R + \lambda_L\nu_D + \mu_R\nu_D]} \right\} \quad (2.2.21)$$

onde L^{-1} indica a operação inversa da Transformada de Laplace.

2.3 MODELO ALTERNATIVO

Este modelo alternativo foi elaborado com o objetivo de se obter uma expressão exata da *indisponibilidade média assintótica* do equipamento a partir de noções elementares da Teoria da Renovação. Neste caso, foram feitas as seguintes suposições:

(i) o equipamento está no estado de capacidade operacional em $t = 0$ e é solicitado a realizar uma determinada tarefa em instantes aleatórios $D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n \leq \dots$ (instantes de demanda);

(ii) os tempos de espera entre demandas consecutivas $(D_1, D_2 - D_1, D_3 - D_2, \dots, D_n - D_{n-1}, \dots)$ são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas;

(iii) se o equipamento falha num instante aleatório L , permanece indisponível no intervalo $[L, D_i)$, onde i é o único inteiro tal que $D_{i-1} < L \leq D_i$. No instante D_i a falha é detectada, o reparo é iniciado imediatamente e não ocorrem demandas durante o reparo;

(iv) durante o reparo, o equipamento permanece indisponível e após o reparo volta à condição de novo, reiniciando o processo independentemente.

Partindo destas suposições, pode-se modelar o processo de falha-reparo do equipamento como um *processo regenerativo* $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ da seguinte forma:

Sejam $\{L_i; i \geq 1\}, \{R_i; i \geq 1\}$ e $\{D_{i,j}; i, j \geq 1\}$ famílias independentes de variáveis aleatórias i.i.d com funções de distribuição F para os tempos de vida do equipamento, G para os tempos de reparo e H para os tempos entre demandas consecutivas, respectivamente.

Fazendo $T_0 = L_0 = R_0 = V_0(0) = 0$ e para $k \geq 1$, tem-se:

$$T_{3k} = \sum_{i=0}^k (L_i + V_i(L_i) + R_i) \quad , \quad (2.3.1)$$

$$T_{3k-1} = \sum_{i=0}^k (L_i + V_i(L_i)) + \sum_{i=0}^{k-1} R_i, e \quad (2.3.2)$$

$$T_{3k-2} = \sum_{i=0}^k L_i + \sum_{i=0}^{k-1} (V_i(L_i) + R_i) \quad (2.3.3)$$

onde $V_i(t)$ é a vida residual do equipamento no instante t do processo de renovação gerado por $\{D_{i,j}; i, j \geq 1\}$.

Defina Υ por:

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } T_{3k-2} \leq t < T_{3k-1} \\ 2 & \text{se } T_{3k-1} \leq t < T_{3k} \\ 3 & \text{se } T_{3(k-1)} \leq t < T_{3k-2} \end{cases}$$

Os estados 1, 2 e 3 indicam:

- 1 - equipamento no estado de incapacidade operacional, aguardando reparo;
- 2 - equipamento em reparo; e
- 3 - equipamento no estado de capacidade operacional.

Segue da construção do modelo que, para $k \geq 1$, os instantes aleatórios $T_{3(k-1)}$ indicam os instantes de término de reparo e são pontos de regeneração de Υ ; T_{3k-1} indicam os instantes de demanda nos quais as falhas são detectadas e o equipamento entra em reparo; e T_{3k-2} são os instantes de falha (possivelmente não observáveis) do equipamento.

A **Figura 2.3-A** representa uma realização típica do processo Υ acoplado ao processo de demandas.

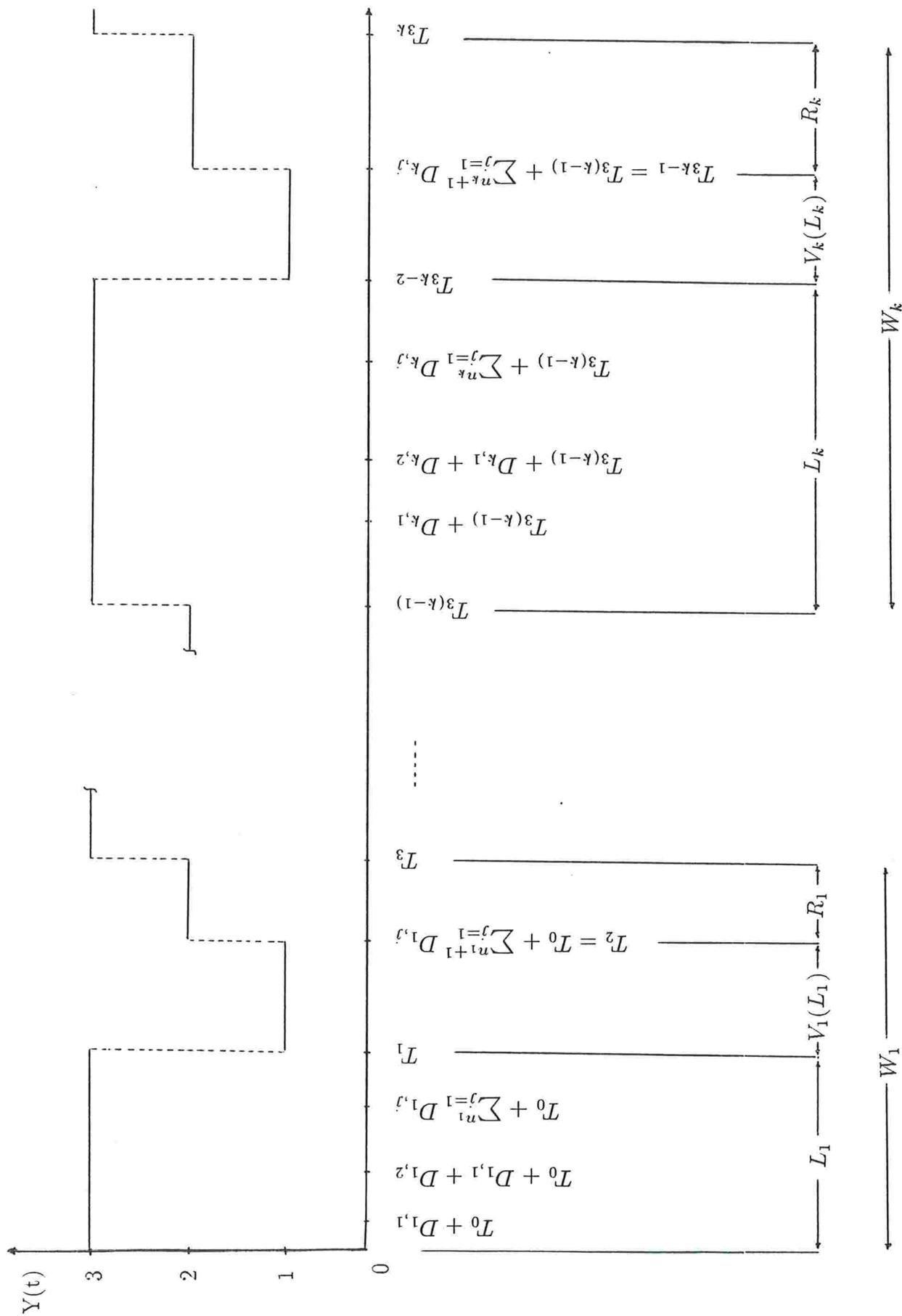


Figura 2.3-A Realização típica do processo Γ de falha-reparo do equipamento

Assim, $\{W_k; k \geq 1\}$ é um processo de renovação tal que $W_k = L_k + V_k(L_k) + R_k, k \geq 1$ e $A(t) = P\{Y(t) = 3\}$ satisfaz a seguinte equação de renovação

$$A(t) = P(L_1 > t) + \int_0^t A(t-x) P(W_1 \in dx) \quad (2.3.4)$$

Pelo Teorema da Renovação tem-se que a indisponibilidade média assintótica UM do equipamento é dada por:

$$\begin{aligned} UM = U &= 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) = 3\} \\ &= 1 - \frac{\int_0^\infty P(L_1 > x) dx}{\int_0^\infty P(L_1 + V_1(L_1) + R_1 > x) dx} \\ &= 1 - \frac{E(L_1)}{E(L_1 + V_1(L_1) + R_1)} \\ &= 1 - \frac{m_L}{m_L + E(V_1(L_1)) + m_R} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

onde m_L e m_R indicam tempo médio de vida e tempo médio de reparo, respectivamente.

Por outro lado, sabe-se que a vida residual $V_1(t)$, no instante $t \geq 0$, de um processo de renovação gerado por H satisfaz a seguinte equação de renovação

$$P\{V_1(t) > x\} = P(t, x) = 1 - H(t+x) + \int_0^t P(t-s, x) H(ds) \quad , x \geq 0 \quad (2.3.6)$$

e conseqüentemente

$$P(t, x) = \bar{H}(t+x) + \int_0^t \bar{H}(t+x-s) M(ds) \quad , x \geq 0 \quad (2.3.7)$$

onde $M(t) = \sum_{n=1}^\infty H^{(n)}(t) \quad , t \geq 0$, é a função de renovação correspondente a H.

Então,

$$\begin{aligned} E(V_1(L_1)) &= E[E(V_1(L_1)/L_1)] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(t, x) dx F(dt) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{H}(t+x-s) F(dt) + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \bar{H}(t+x-s) M(ds) F(dt) dx \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

e

$$UM = 1 - \frac{m_L}{m_L + m_R + \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{H}(t+x)F(dt)dx + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \bar{H}(t+x-s)M(ds)F(dt)dx} \quad (2.3.9)$$

que é a expressão exata para a indisponibilidade média assintótica no domínio do tempo, em termos de elementos básicos do modelo que especificam a distribuição de vida do equipamento (F), a natureza do processo de demandas (H) e a distribuição do tempo de reparo (G).

2.3.1 CASOS ESPECIAIS

Considere o caso especial em que a função de distribuição F do tempo de vida L do equipamento é *exponencial* com parâmetro $\lambda_L > 0$. Neste caso, ao invés de se calcular a indisponibilidade média assintótica diretamente de (2.3.9), pode-se utilizar um argumento alternativo.

Como o processo de demandas é independente do tempo de vida do equipamento, após cada demanda duas quantidades aleatórias são observadas: a *vida residual* V do equipamento, que também tem distribuição exponencial F com parâmetro $\lambda_L > 0$ e o *tempo de espera* Z até a próxima demanda, que tem distribuição H . Consequentemente, o comportamento estocástico de $V_1(L_1)$ é o mesmo de $Z - V$ condicionado ao evento $\{Z \geq V\}$. A **Figura 2.3.1-A** apresenta uma ilustração deste fato.

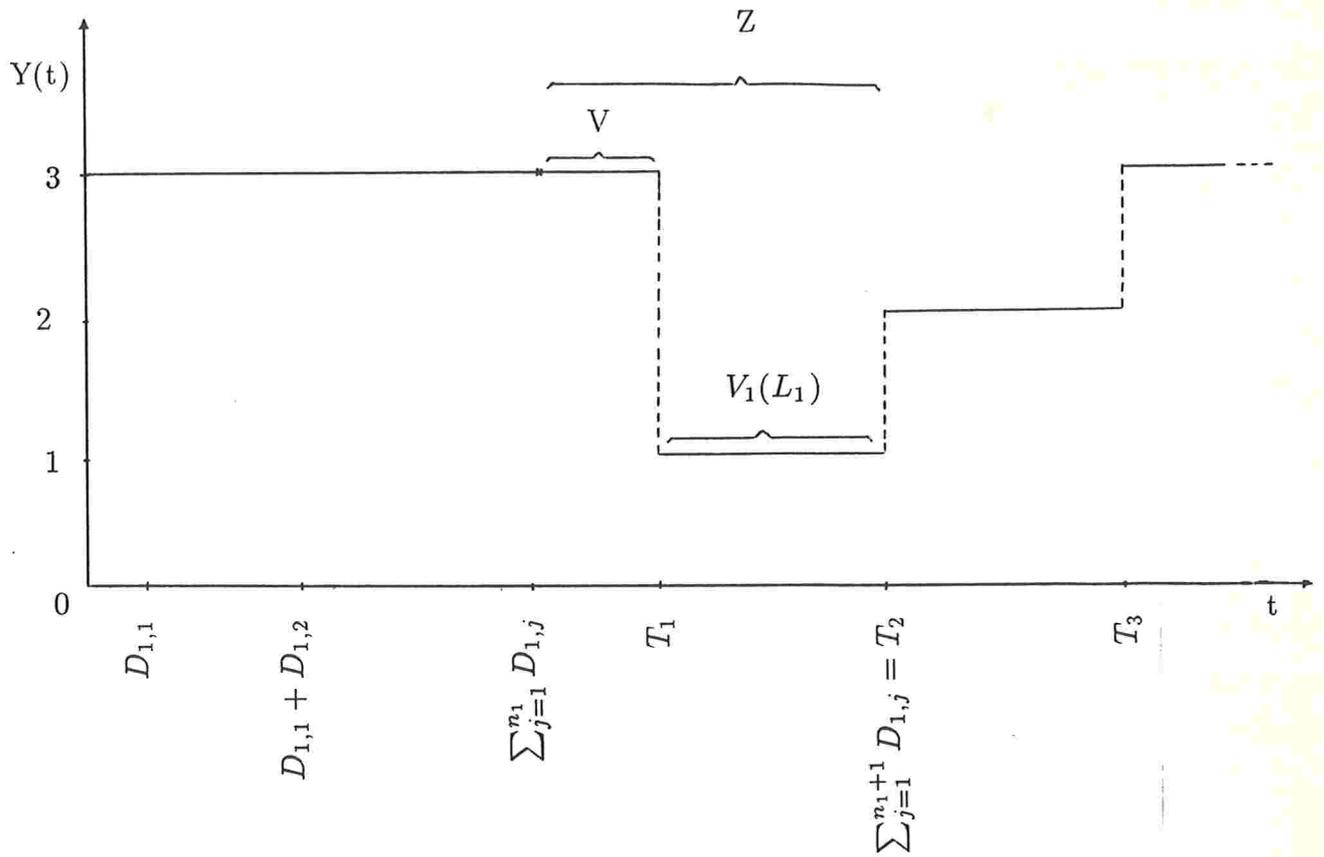


Figura 2.3.1-A Realização típica de $\{Y(t); t \geq 0\}$

Logo,

$$\begin{aligned}
 E(V_1(L_1)) &= E(Z - V/Z \geq V) \\
 &= \int_0^\infty P(Z - V > s/Z \geq V) ds \\
 &= \int_0^\infty \frac{P(Z - V > s, Z \geq V)}{P(Z \geq V)} ds \\
 &= \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty P(V \leq z - s)H(dz)}{\int_0^\infty P(V \leq z)H(dz)} \\
 &= \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty F(z - s)H(dz)}{\int_0^\infty F(z)H(dz)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{E(Z)}{1 - \psi_H(\lambda_L)} - \frac{1}{\lambda_L} \quad (2.3.1.1)$$

e

$$UM = 1 - \frac{\lambda_L^{-1}}{m_R + \frac{E(Z)}{1 - \psi_H(\lambda_L)}} \quad (2.3.1.2)$$

se a função geradora de momentos $\psi_H(t) = \int_0^\infty \exp^{-tz} H(dz)$, de H, estiver definida em $t = \lambda_L$. m_R é o tempo médio de reparo do equipamento.

Quando H é *exponencial* com parâmetro $\nu_D > 0$,

$$UM = 1 - \frac{\lambda_L^{-1}}{m_R + \lambda_L^{-1} + \nu_D^{-1}} \quad (2.3.1.3)$$

e quando H está *centrada em C (constante)*,

$$UM = 1 - \frac{\lambda_L^{-1}}{m_R + \frac{C}{1 - \exp^{-\lambda_L C}}} \quad (2.3.1.4)$$

Observe que se $C \rightarrow 0$ na equação (2.3.1.4), então

$$UM \rightarrow \frac{m_R}{m_R - \lambda_L^{-1}} = \frac{MTTR}{MTTR + MTTF} \quad (2.3.1.5)$$

que é o resultado esperado para um processo de falha-reparo com falhas imediatamente detectadas.

2.4 COMPARAÇÃO DOS MODELOS APRESENTADOS

O modelo alternativo apresentado no **Item 2.3** é mais genérico do que o modelo proposto em [4], no sentido de que neste último o processo de demandas do equipamento está restrito a um Processo de Poisson. Na verdade, os resultados da Teoria de Processos de Renovação com Cadeia Fechada não poderiam ser aplicados ao processo descrito no **Item 2.2** se o processo de demandas não fosse um Processo de Poisson. Isto porque estes resultados são verdadeiros apenas quando os tempos de permanência nos estados que compõem a cadeia fechada são variáveis aleatórias independentes. Mais especificamente, sabe-se que T_2 , que é o tempo de permanência no estado de incapacidade operacional (quando o equipamento apresenta uma falha não detectada), é a vida residual, no instante de falha do equipamento, do processo de renovação gerado pelos instantes de demanda. Portanto, T_2 é independente de T_1 (tempo de vida do equipamento) somente quando o processo de demandas é um Processo de Poisson. Neste caso, pode-se mostrar que T_2 tem distribuição exponencial.

No modelo alternativo, supõe-se apenas que o processo de demandas é interrompido quando uma falha é detectada e reiniciado independentemente nos instantes em que o reparo está completo. Pode-se dizer que esta condição não restringe a aplicabilidade do modelo pois é uma situação encontrada com frequência na prática.

Além disso, Caldarola [4] aplicou-se na determinação de expressões analíticas para o cálculo da indisponibilidade pontual $U(t)$ do equipamento. Como pode ser observado em (2.2.20) e (2.2.21), estas expressões se tornam demasiadamente complexas até mesmo no caso em que as distribuições do tempo de vida, do tempo de reparo e do intervalo entre demandas consecutivas são *exponenciais*. Pelo modelo alternativo o cálculo da indisponibilidade média assintótica, que é a medida de desempenho de maior interesse em

aplicações à engenharia, pode ser efetuado a partir de noções mais elementares da Teoria da Renovação.

CAPÍTULO 3

INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS DETECTADAS EM INSPEÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será estudado o caso de equipamentos reparáveis que são inspecionados em instantes conhecidos $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n, \dots$ para que se possa verificar se estão avariados ou não. Estes equipamentos, quando em serviço, estão sujeitos a falhas que, se ocorrerem, os deixarão em estado de incapacidade operacional até que a falha seja detectada e removida. Como a detecção de uma falha do equipamento ocorrerá assim que for inspecionado, o equipamento permanecerá no estado de incapacidade operacional até que se termine o reparo que será iniciado imediatamente após a primeira (próxima) inspeção a que for submetido.

Caldarola - 1977 - [4] obteve expressões para o cálculo da indisponibilidade pontual e da indisponibilidade intrínseca destes equipamentos para o caso em que a taxa de falha do equipamento é constante e a inspeção e o reparo têm duração constante.

Vaurio - 1979 - [7] procurou desenvolver um modelo para o estudo da indisponibilidade pontual, que admitisse distribuições genéricas para o tempo de vida, tempo de inspeção e tempo de reparo do equipamento, tendo obtido resultados específicos para a indisponibilidade média assintótica no caso especial em que os intervalos entre inspeções têm a mesma duração. Esta abordagem será apresentada no **Item 3.2** deste capítulo.

Uma abordagem alternativa para tratar este problema será assunto do **Item 3.3** deste capítulo.

3.2 O MODELO DO VAURIO

Vaurio - 1979 - [7] baseou-se num argumento recursivo para modelar o comportamento de equipamentos reparáveis com falhas detectadas em inspeção. O problema estudado é , basicamente, o de um equipamento que é inspecionado nos instantes $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, \dots$, de tal forma que, se for encontrado no estado de incapacidade operacional entrará em reparo imediatamente após a inspeção. Além disso, na formulação geral do modelo, Vaurio [7] partiu das seguintes suposições :

- (i) os instantes $i_k, k \geq 1$, nos quais são iniciadas as inspeções, são conhecidos e denominados instantes de inspeção. Além disso, $\lim_{k \rightarrow \infty} i_k = +\infty$;
- (ii) o equipamento encontra-se indisponível durante a inspeção;
- (iii) se o equipamento for encontrado no estado de incapacidade operacional, entrará em reparo imediatamente após a inspeção;
- (iv) o equipamento permanece indisponível durante o reparo;
- (v) o equipamento volta à condição de novo após cada inspeção (caso não tenha apresentado nenhuma falha) e após cada reparo (caso tenha apresentado falha);
- (vi) as distribuições do tempo de reparo e do tempo de inspeção são iguais para todos os reparos e inspeções, respectivamente;
- (vii) as falhas são detectadas somente através da inspeção. As falhas podem ocorrer no intervalo entre inspeções consecutivas e permanecem não detectadas até a realização da próxima inspeção.

A medida de interesse neste estudo é a *indisponibilidade pontual* do equipamento denotada por $u(t)$ e definida por

$$u(t) = P\{Y(t) = 0\} \quad (3.2.1)$$

onde $\{Y(t); t \geq 0\}$ é o processo estocástico que descreve o estado do equipamento ao longo do tempo, isto é ,

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se o equipamento está no estado de capacidade operacional} \\ & \text{(disponível) no instante } t \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Define-se como U_0 a probabilidade do equipamento estar indisponível no instante $t = 0$, e supõe-se que o tempo de vida L , o tempo de inspeção I e o tempo de reparo R do equipamento são variáveis aleatórias com funções de distribuição F , J e G , respectivamente.

A partir da suposição (i) e tomando-se $i_0 = 0$, fixado $t > 0$ existem instantes consecutivos de inspeção i_k e i_{k+1} tais que

$$i_k < t \leq i_{k+1} \quad \text{para algum } k \geq 0.$$

Neste intervalo entre inspeções, a variável de tempo local é definida por $x_k = t - i_k$, e sua duração será denotada por $\eta_k = i_k - i_{k-1}$ para $k \geq 0$.

Assim, a indisponibilidade pontual $u(t)$ do equipamento, pode ser expressa por

$$u(t) = u_{k+1}(x_k) \quad \text{para } k \geq 0 \text{ e } i_k < t \leq i_{k+1} \quad (3.2.2)$$

onde $u_{k+1}(x_k)$ é a indisponibilidade pontual do equipamento no intervalo entre a k -ésima e a $(k - 1)$ -ésima inspeção.

$u_{k+1}(x_k)$ pode ser determinada para os intervalos de inspeção consecutivos, através das seguintes equações recursivas:

$$u_1(x) = (1 - U_0) F(x) + U_0 \quad , \text{ para } 0 < x \leq \eta_1 \quad (3.2.3)$$

e

$$u_k(x) = (1 - U_{k-1}) a(x) + U_{k-1} b(x) \quad , \text{ } k > 1 \text{ e } 0 < x \leq \eta_k \quad (3.2.4)$$

onde

$$U_{k-1} = u_{k-1}(\eta_{k-1}) \quad , \quad k > 1 \quad , \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= P\{I > x\} + \int_0^x P\{L \leq x - y\} J(dy) \\ &= 1 - J(x) + \int_0^x F(x - y) J(dy) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

e

$$\begin{aligned} b(x) &= P\{I > x\} + \int_0^x [P\{R > x - y\} + \int_0^{x-y} P\{L \leq x - y - z\} G(dz)] J(dy) \\ &= 1 - H(x) + \int_0^x [1 - G(x - y) + \int_0^{x-y} F(x - y - z) G(dz)] J(dy) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Não é difícil ver que U_0 representa a indisponibilidade do equipamento em $t = 0$ e que para $k > 1$, U_{k-1} representa a indisponibilidade do equipamento no final do $(k - 1)$ -ésimo intervalo de inspeção. Além disso, $a(x)$ representa a indisponibilidade pontual de um equipamento que se encontra com capacidade operacional em $x = 0$ e é substituído por um equipamento novo não-reparável em I unidades de tempo, e $b(x)$ representa a indisponibilidade pontual de um equipamento que, apresentando falha em $x = 0$, é substituído por um equipamento novo não-reparável em $I + R$ unidades de tempo. As funções $a(x)$ e $b(x)$ constituem assim, as contribuições mutuamente exclusivas para a indisponibilidade do equipamento.

A partir de (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) pode-se mostrar que

$$U_1 = (1 - U_0) F(\eta_1) + U_0 \quad (3.2.8)$$

e

$$U_k = a_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \prod_{n=j+1}^k (b_n - a_n) \quad , k > 1 \quad (3.2.9)$$

onde $a_1 = U_1$, $a_j = a(\eta_j)$ e $b_j = b(\eta_j)$, $j > 1$.

Para o caso em que os intervalos entre inspeções consecutivas têm a mesma duração, ou seja,

$$\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_k = \eta$$

tem-se

$$U_k = a(\eta) \prod_{j=2}^k [b(\eta) - a(\eta)]^{k-j} + U_1 [b(\eta) - a(\eta)]^{k-1} \quad , k > 1. \quad (3.2.10)$$

Quando $|b(\eta) - a(\eta)| \neq 1$, a equação (3.2.10) pode ser escrita como

$$U_k = a(\eta) \frac{1 - [b(\eta) - a(\eta)]^k}{1 - [b(\eta) - a(\eta)]} + [U_1 - a(\eta)] [b(\eta) - a(\eta)]^{k-1} \quad , k > 1. \quad (3.2.11)$$

Assim, como $|b(\eta) - a(\eta)| < 1$, tem-se:

$$U_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k = \frac{a(\eta)}{1 - [b(\eta) - a(\eta)]} \quad (3.2.12)$$

Vaurio [7] argumenta então que, “num intervalo de inspeção assintótico” a indisponibilidade pontual é dada por

$$u_\infty(x) = a(x) + U_\infty [b(x) - a(x)] \quad , 0 < x \leq \eta. \quad (3.2.13)$$

e prossegue seu raciocínio para concluir que a *indisponibilidade média assintótica* UM é dada por

$$UM = \bar{u}_\infty(\eta) = \bar{a} + \frac{a(\eta)}{1 + a(\eta) - b(\eta)} (\bar{b} - \bar{a}) \quad (3.2.14)$$

onde

$$\bar{a} = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta a(x) dx \quad (3.2.15)$$

e

$$\bar{b} = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} b(x) dx \quad (3.2.16)$$

uma vez que $U_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} u(i_k + \eta)$ e $UM = \bar{a} + U_{\infty}(\bar{b} - \bar{a})$.

É importante observar que o conceito de “intervalo de inspeção assintótico” não faz sentido físico, dificultando a interpretação do conceito de indisponibilidade pontual neste intervalo. Vaurio [7] parece confundir os conceitos de indisponibilidade média e indisponibilidade intrínseca.

3.3 ABORDAGEM ALTERNATIVA

O modelo a ser construído a seguir tem por objetivo descrever probabilisticamente o comportamento de equipamentos com as características de manutenção consideradas no **Item 3.2**, evitando o raciocínio heurístico envolvido no modelo do Vaurio [7]. Para tanto, as seguintes suposições são adotadas :

- (i) o equipamento é inspecionado em instantes conhecidos $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots$ sendo que $i_k = k\eta$, onde η é o comprimento do intervalo entre inspeções consecutivas;
- (ii) o equipamento fica indisponível durante a inspeção;
- (iii) se for detectada uma falha do equipamento, este será submetido a reparo imediatamente após o término da inspeção;
- (iv) o equipamento permanece indisponível durante o reparo;
- (v) o equipamento volta à condição de novo após cada inspeção (caso não tenha apresentado falha) e após cada reparo (caso tenha apresentado falha);
- (vi) as falhas são detectadas somente através da inspeção. As falhas que podem ocorrer quando o equipamento está em operação contínua ou em regime de espera, permanecem não detectadas até a realização da próxima inspeção.

Para construir o processo $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ que descreve o estado do equipamento ao longo do tempo, isto é ,

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{se o equipamento está disponível no instante } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

supõe-se que, no intervalo $[i_k, i_{k+1})$, $k \geq 1$, no qual se realiza a k -ésima inspeção do equipamento, as seguintes variáveis aleatórias são observadas :

$.I_k$: tempo de inspeção

$.R_k$: tempo de reparo

$.L_k$: tempo de vida

$\{I_k; k \geq 1\}$, $\{R_k; k \geq 1\}$ e $\{L_k; k \geq 1\}$ são famílias de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com funções de distribuição \mathbf{J} para os tempos de inspeção, \mathbf{G} para os tempos de reparo e \mathbf{F} para os tempos de vida do equipamento, respectivamente.

Como o instante $i_0 = 0$ não é um instante de inspeção do equipamento, em $[i_0, i_1)$ observa-se apenas a vida residual L_0 do equipamento em i_0 que, neste caso, pode ter distribuição F' , não necessariamente igual a F .

Denotando-se por X_k , $k \geq 1$, a variável aleatória que indica o estado do equipamento no instante i_k de início da k -ésima inspeção, e por X_0 a variável aleatória que indica o estado do equipamento no instante inicial i_0 do processo, tem-se :

$$X_1 = 1\{L_0 > i_1 - i_0\}$$

e

(3.3.1)

$$X_k = 1\{I_{k-1} + R_{k-1} 1\{X_{k-1} = 0\} + L_{k-1} > i_k - i_{k-1}\} \quad k \geq 2$$

Assim,

no intervalo $[i_0, i_1)$ tem-se $Y(i_0) = X_0$, e

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } i_0 \leq t < \min\{L_0, i_1\} \cdot 1\{X_0 = 1\} \\ 0, & \text{para } \min\{L_0, i_1\} \cdot 1\{X_0 = 1\} \leq t < i_1, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

No intervalo $[i_k, i_{k+1})$, $k \geq 1$, tem-se

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \leq t < i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k \\ 0, & \text{para } i_k \leq t < i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \\ & \text{e } i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k \leq t < i_{k+1} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Assim, de acordo com (3.3.1), pode-se escrever que, para $k > 1$,

$$X_k = Y(i_k^-) \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 P\{X_k = 1\} = & P\{X_{k-1} = 1, I_{k-1} + L_{k-1} > i_k - i_{k-1}\} \\
 & + P\{X_{k-1} = 0, I_{k-1} + R_{k-1} + L_{k-1} > i_k - i_{k-1}\}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 P\{X_k = 0\} = & P\{X_{k-1} = 0, I_{k-1} + R_{k-1} + L_{k-1} \leq i_k - i_{k-1}\} \\
 & + P\{X_{k-1} = 1, I_{k-1} + L_{k-1} \leq i_k - i_{k-1}\}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6}$$

A **Figura 3.3-A** ilustra uma realização típica do processo $\Upsilon = \{Y(t); t \geq 0\}$ de falha-reparo do equipamento.

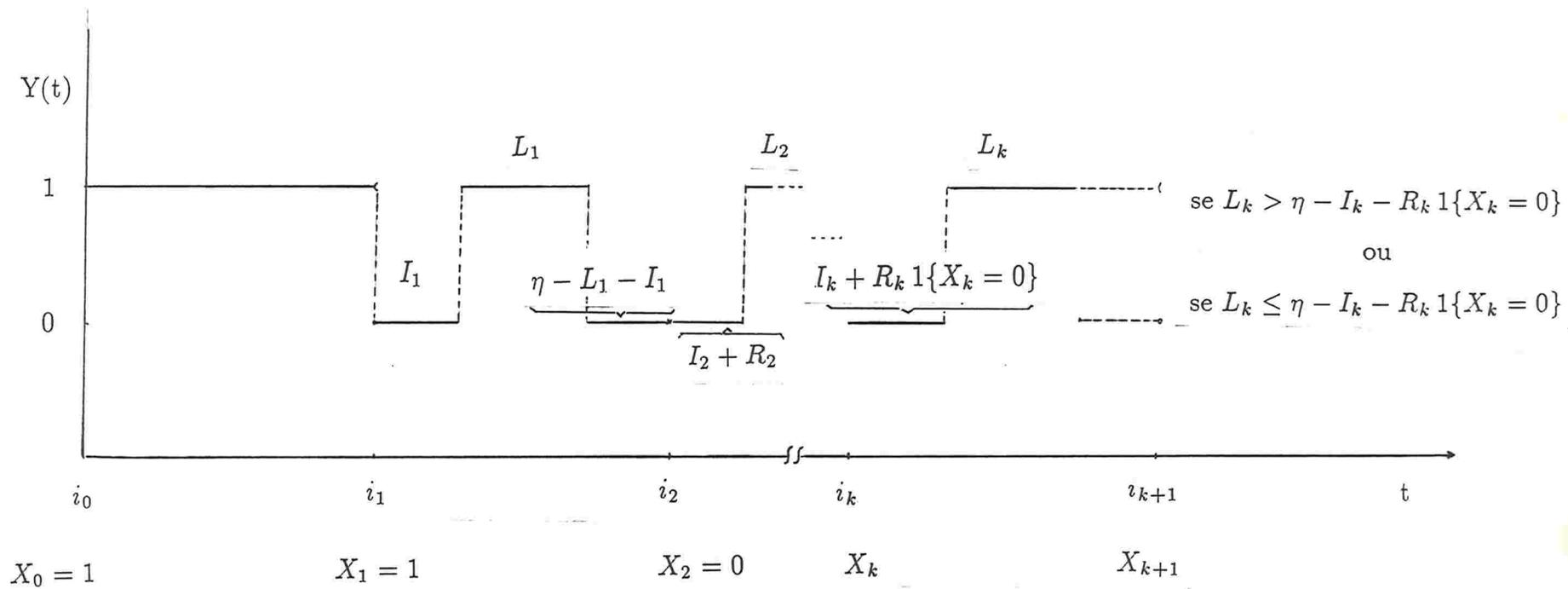


Figura 3.3-A Realização típica do processo Υ

Em virtude da suposição (i) do modelo, ou seja, como $i_k = k\eta$, pode-se mostrar que $\{X_k; k \geq 1\}$ é uma *Cadeia de Markov* estacionária com espaço de estados $E = \{0, 1\}$, distribuição inicial μ e matriz de transição P (notação: $\{X_k; k \geq 1\}$ C.M.E. (μ, P)), onde

μ é tal que :

$$\mu(1) = P\{X_1 = 1\} = P\{X_0 = 1, L_0 > i_1\} \quad (3.3.7)$$

$$\mu(0) = P\{X_1 = 0\} = P\{X_0 = 0\} + P\{X_0 = 1, L_0 \leq i_1\} \quad (3.3.8)$$

e os elementos

$$P(i, j) = P\{X_{k+1} = j / X_k = i\} \quad , \quad i, j \in \{0, 1\}. \quad (3.3.9)$$

de P , são dados por

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= P\{I_k + R_k + L_k \leq i_{k+1} - i_k\} \\ P(0, 1) &= P\{I_k + R_k + L_k > i_{k+1} - i_k\} \\ P(1, 0) &= P\{I_k + L_k \leq i_{k+1} - i_k\} \\ P(1, 1) &= P\{I_k + L_k > i_{k+1} - i_k\} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

A indisponibilidade do equipamento no instante t é dada por

$$U(t) = P\{Y(t) = 0\} = P\{X_0 = 0\} + P\{X_0 = 1\} P\{L_0 \leq t\} \quad \text{para } t \in [i_0, i_1), \quad (3.3.11)$$

e para $t \in [i_k, i_{k+1}), k \geq 1,$

$$\begin{aligned}
U(t) = P\{Y(t) = 0\} &= P\{X_k = 0\} P\{I_k + R_k > t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 0\} P\{I_k + R_k + L_k \leq t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 1\} P\{I_k > t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 1\} P\{I_k + L_k \leq t - k\eta\}
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

pois X_k , de acordo com (3.3.1), é independente de (I_k, R_k, L_k) , $k \geq 1$.

Sendo $\{I_k; k \geq 1\}$, $\{R_k; k \geq 1\}$ e $\{L_k; k \geq 1\}$ famílias de variáveis aleatórias i.i.d. com funções de distribuição J, G e F, respectivamente, pode-se escrever que,

$$\begin{aligned}
U(t) &= P\{X_k = 0\} P\{I + R > t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 0\} P\{I + R + L \leq t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 1\} P\{I > t - k\eta\} \\
&+ P\{X_k = 1\} P\{I + L \leq t - k\eta\}
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

onde I, R e L são v.a's com função de distribuição J, G e F, respectivamente.

Como k depende de t, pode-se verificar, através de (3.3.13), que não é possível se obter um valor para $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$, pois quando $t \rightarrow \infty$, tem-se que $k \rightarrow \infty$. Entretanto temos o seguinte resultado :

Teorema : A indisponibilidade média assintótica $UM = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(x) dx$ é dada por

$$\begin{aligned}
UM &= \frac{\pi(0)}{\eta} \int_0^\eta P\{I + R > x\} dx \\
&+ \frac{\pi(0)}{\eta} \int_0^\eta P\{I + R + L \leq x\} dx \\
&+ \frac{\pi(1)}{\eta} \int_0^\eta P\{I > x\} dx \\
&+ \frac{\pi(1)}{\eta} \int_0^\eta P\{I + L \leq x\} dx
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

onde π é a distribuição invariante associada a $\{X_k; k \geq 1\}$.

Prova :

Seja k tal que $k\eta \leq t < (k+1)\eta$. Então, através de (3.3.13),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t U(x) dx &\approx \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 0\} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
&+ \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 1\} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 0\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
&+ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 1\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Sabe-se que, quando $t \rightarrow \infty$, tem-se que $k \rightarrow \infty$ e, portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{X_k = i\} = \pi(i) \quad , i \in \{0, 1\} \tag{3.3.16}$$

onde π é a distribuição invariante associada a $\{X_k; k \geq 1\}$.

Além disso, se $P\{X_k = i\} \rightarrow \pi(i)$, pode-se mostrar que

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = i\} \rightarrow \pi(i). \tag{3.3.17}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(x) dx &= \frac{\pi(0)}{\eta} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\ &+ \frac{\pi(1)}{\eta} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

que é o resultado apresentado em (3.3.14).

(c.q.d.)

A distribuição invariante π é obtida resolvendo-se o sistema de equações :

$$\begin{cases} \pi(0) = \pi(0)P(0,0) + \pi(1)P(1,0) \\ \pi(1) = \pi(0)P(0,1) + \pi(1)P(1,1) \\ \pi(0) + \pi(1) = 1 \end{cases} \quad (3.3.19)$$

cuja solução é :

$$\pi(0) = \frac{P\{I + L \leq \eta\}}{1 - P\{I + R + L \leq \eta\} + P\{I + L \leq \eta\}} \quad (3.3.20)$$

e

$$\pi(1) = \frac{1 - P\{I + R + L \leq \eta\}}{1 - P\{I + R + L \leq \eta\} + P\{I + L \leq \eta\}} \quad (3.3.21)$$

Portanto,

$$\pi(0) = \frac{\int_0^\eta J(\eta - x) F(dx)}{1 - \int_0^\eta \left[\int_0^{\eta-x} J(\eta - x - y) G(dy) - J(\eta - x) \right] F(dx)} \quad (3.3.22)$$

e

$$\pi(1) = \frac{1 - \int_0^\eta \left[\int_0^{\eta-x} J(\eta - x - y) G(dy) \right] F(dx)}{1 - \int_0^\eta \left[\int_0^{\eta-x} J(\eta - x - y) G(dy) - J(\eta - x) \right] F(dx)} \quad (3.3.23)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 UM = & \frac{\pi(0)}{\eta} \left\{ \int_0^\eta \left[1 - \int_0^x J(x-y) G(dy) \right] dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^\eta \int_0^x \int_0^{x-y} J(x-y-z) G(dz) F(dy) dx \right\} \\
 & + \frac{\pi(1)}{\eta} \left\{ \int_0^\eta (1 - J(x)) dx + \int_0^x J(x-y) F(dy) dx \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

onde $\pi(0)$ e $\pi(1)$ podem ser calculados através de (3.3.22) e (3.3.23), respectivamente.

É importante observar que a expressão (3.3.24) da indisponibilidade média assintótica do equipamento é igual à expressão obtida por Vaurio [7], apresentada em (3.2.13). No entanto, (3.2.13) foi obtida através de uma modelagem menos formal, baseada em argumentos heurísticos.

CAPÍTULO 4

INDISPONIBILIDADE DE EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS DETECTADAS EM INSPEÇÃO : CASO ESPECIAL

4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior analisou-se o caso de equipamentos reparáveis sujeitos a falhas estocásticas e que são inspecionados em instantes conhecidos $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, \dots$. Apresentou-se um modelo geral desenvolvido por Vaurio - 1979 - [7] e propôs-se uma abordagem alternativa para este problema.

Neste capítulo será estudado um problema semelhante ao exposto no capítulo anterior. Trata-se de um equipamento reparável sujeito a falhas estocásticas e inspecionado periodicamente, de forma que o tempo decorrido desde sua última inspeção ou reparo é constante e fixado como T . Durante essas T unidades de tempo, o equipamento está em serviço e sujeito a falhas cuja detecção só é possível nos instantes em que se realizam inspeções. Caso uma falha seja detectada, o reparo será iniciado imediatamente e tem uma duração de m_R (constante) unidades de tempo. Caso contrário, apenas completa-se a inspeção, que tem uma duração de m_I (constante) unidades de tempo. Durante a inspeção ou reparo, o equipamento fica fora de serviço. Após o término da inspeção ou reparo, o equipamento volta ao estado de perfeita capacidade operacional e é colocado em serviço até o instante da próxima inspeção, isto é , após T unidades de tempo. O equipamento permanecerá neste estado até que a próxima inspeção seja iniciada, ou até que uma falha

se manifeste novamente dentro deste intervalo.

Heising - 1983 - [6] estudou este problema e obteve uma expressão aproximada para a indisponibilidade média assintótica do equipamento, no caso particular em que o tempo de vida é exponencial.

Comentando a solução de Heising [6], Vaurio - 1985 - [8] publicou um trabalho no qual fez uma aplicação dos resultados apresentados no **Item 3.2** do capítulo anterior. A solução proposta em [8] será exposta no **Item 4.2** deste capítulo.

Um modelo alternativo para descrever o comportamento de um equipamento com as características de operação e manutenção citadas inicialmente foi desenvolvido com base na *Teoria da Renovação* e será apresentado com detalhes no **Item 4.3** deste capítulo.

4.2 APLICAÇÃO DO MODELO DO VAURIO

Para que seu modelo geral pudesse ser aplicado ao caso especial considerado por Heising - 1983 - [6], que é o principal tópico deste capítulo, Vaurio - 1985 - [8] partiu das seguintes suposições para obter a *indisponibilidade média assintótica* do equipamento:

- (i) o equipamento é testado ao final de cada intervalo de comprimento T ;
- (ii) se o equipamento for encontrado com capacidade operacional, será retirado de serviço por m_I unidades de tempo (tempo de inspeção). Por outro lado, se apresentar falha, será retirado de serviço para reparo por m_R unidades de tempo (tempo de reparo);
- (iii) após a inpeção ou reparo, o equipamento volta à condição de novo.

A **Figura 4.2-A** ilustra o comportamento típico de um equipamento com o plano de manutenção considerado em [8].

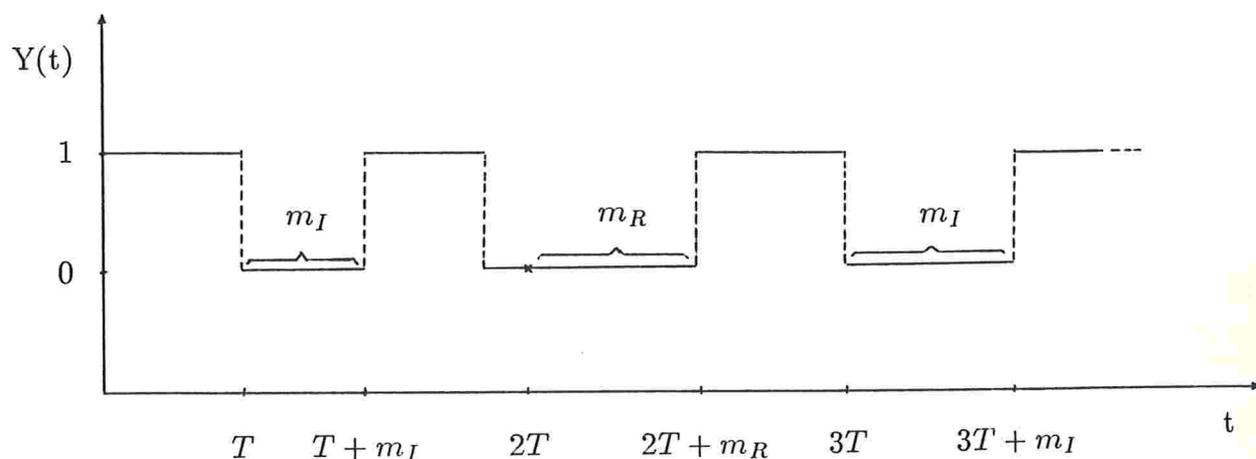


Figura 4.2-A

onde $Y(t) = 1$ se o equipamento está no estado de capacidade operacional e $Y(t) = 0$

caso contrário.

De acordo com Vaurio [8], a *indisponibilidade pontual* $u(t)$ do equipamento pode ser determinada para intervalos de inspeção I_k sucessivos, $I_k = (i_{k-1}, i_k]$, ($k=1,2,\dots$), através de equações recursivas do tipo

$$u_k(x) = (1 - U_{k-1})a(x) + U_{k-1}b(x) \quad , 0 < x \leq T \quad (4.2.1)$$

onde x é a variável de tempo local a partir do início do k -ésimo intervalo ($x = t - i_{k-1}$); U_{k-1} é a indisponibilidade pontual no final do $(k - 1)$ -ésimo intervalo ($U_{k-1} = u_{k-1}(T)$); $a(x)$ é a indisponibilidade pontual de um equipamento que se encontra com capacidade operacional em $x=0$ e é substituído por um equipamento novo não-reparável em m_I unidades de tempo, e $b(x)$ é a indisponibilidade pontual de um equipamento que, apresentando falha em $x = 0$, é substituído por um equipamento novo não-reparável em m_R unidades de tempo. Supondo que o equipamento tem taxa de falha constante $\lambda_L > 0$, tem-se:

$$a(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq m_I \\ 1 - e^{-\lambda_L(x-m_I)} & , x > m_I \end{cases} \quad (4.2.2)$$

e

$$b(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq m_R \\ 1 - e^{-\lambda_L(x-m_R)} & , x > m_R \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Vaurio [8] argumenta que, “após alguns intervalos, $u(t)$ se aproxima de uma função periódica tal que $U_k \cong U_{k-1}$ se aproxima de um valor U_∞ ”. Este valor é obtido fazendo-se

$$U_\infty = (1 - U_\infty)a(T) + U_\infty b(T) \quad , \quad (4.2.4)$$

e portanto

$$U_\infty = \frac{a(T)}{[1 + a(T) - b(T)]} \quad (4.2.5)$$

onde $a(T)$ e $b(T)$ são obtidos através de (4.2.2) e (4.2.3) respectivamente.

Vaurio [8] define então a “*indisponibilidade periódica do equipamento para um intervalo de teste assintótico*” como

$$u_{\infty}(x) = a(x) + U_{\infty} [b(x) - a(x)] \quad (4.2.6)$$

e argumenta que a *indisponibilidade média assintótica do equipamento* é dada por

$$\bar{u}_{\infty} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{\infty}(x) dx \quad (4.2.7)$$

Para equipamentos com taxa de falha constante $\lambda_L > 0$,

$$\bar{u}_{\infty} = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_L(T-m_I)}}{[1 + e^{-\lambda_L(T-m_R)} - e^{-\lambda_L(T-m_I)}] \lambda_L T} \quad (4.2.8)$$

Vaurio [8] observa ainda que a equação (4.2.8) satisfaz os seguintes requisitos “*intuitivos*” :

$$\bar{u}_{\infty} = 1 \quad \text{se } m_I = T \quad , \quad (4.2.9)$$

$$\bar{u}_{\infty} = \frac{m_I}{T} \quad \text{se } \lambda_L = 0 \quad . \quad (4.2.10)$$

Como foi mencionado anteriormente, a solução proposta em [8] para o caso de equipamentos reparáveis com falhas detectadas na inspeção está baseada num modelo geral cujas suposições básicas diferem um pouco das consideradas por Heising - 1983 - [6]. O modelo apresentado em [8] aplica-se à situação na qual os intervalos entre inspeções consecutivas possuem o mesmo comprimento T . Entretanto, nenhuma restrição é feita com relação à possibilidade da duração da inspeção ou do reparo ultrapassarem este valor. Neste sentido, se pelo menos uma destas condições não estiver satisfeita, ou seja, se a duração da inspeção ou a do reparo ultrapassarem o valor T , fixado como o intervalo entre inspeções consecutivas, verifica-se que a expressão (4.2.8) obtida para a indisponibilidade média assintótica não é válida.

Além disso, pode-se mostrar que os resultados apresentados em (4.2.9) e (4.2.10) não são verdadeiros quando calculados a partir das equações (4.2.2) a (4.2.7).

Se $m_I = T$ e $m_R < T$, a partir de (4.2.2) e (4.2.3) tem-se:

$$a(T) = 1 \quad (4.2.11)$$

e

$$b(T) = 1 - e^{-\lambda_L(T-m_R)} \quad (4.2.12)$$

Substituindo (4.2.11) e (4.2.12) em (4.2.5),

$$U_\infty = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_L(T-m_R)}} \quad (4.2.13)$$

e a partir de (4.2.6) e (4.2.7), verifica-se que

$$\bar{u}_\infty = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_L(T-m_R)}}{\lambda_L T (1 + e^{-\lambda_L(T-m_R)})} \quad (4.2.14)$$

que contraria o resultado de (4.2.9).

Finalmente, se $\lambda_L = 0$, a equação (4.2.8) fica indeterminada.

4.3 MODELO ALTERNATIVO

Este modelo foi construído para se obter uma expressão exata da *indisponibilidade média assintótica* de um equipamento com as seguintes características de manutenção:

(i) o equipamento em serviço é inspecionado a cada intervalo de comprimento T unidades de tempo, contado a partir do instante de término da última inspeção ou reparo;

(ii) no instante inicial da inspeção o equipamento pode ser encontrado com capacidade operacional ou apresentar uma falha. No primeiro caso, a inspeção é realizada e tem uma duração constante $m_I > 0$. Por outro lado, se o equipamento for encontrado no estado de incapacidade operacional, ficará em reparo por $m_R > 0$ unidades de tempo;

(iii) após a inspeção ou reparo, o equipamento volta à condição de novo.

Para descrever o modelo matemático formal, considere a situação ilustrada na **Figura 4.3-A** onde $\{Y(t); t \geq 0\}$ é um processo estocástico no qual $Y(t) = 1$ se o equipamento se encontra disponível no instante t e $Y(t) = 0$ caso contrário. Os tempos $T_1 - T_0, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$ entre as sucessivas observações do evento E caracterizado pela entrada do equipamento no estado de capacidade operacional são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Isto significa que os instantes de entrada neste estado formam um *Processo de Renovação* $\{T_n; n \geq 0\}$ onde os intervalos entre renovações são somas de duas variáveis aleatórias C_n e $A_n, n \geq 1$, que representam os tempos durante estes intervalos em que o equipamento permanece disponível e indisponível, respectivamente.

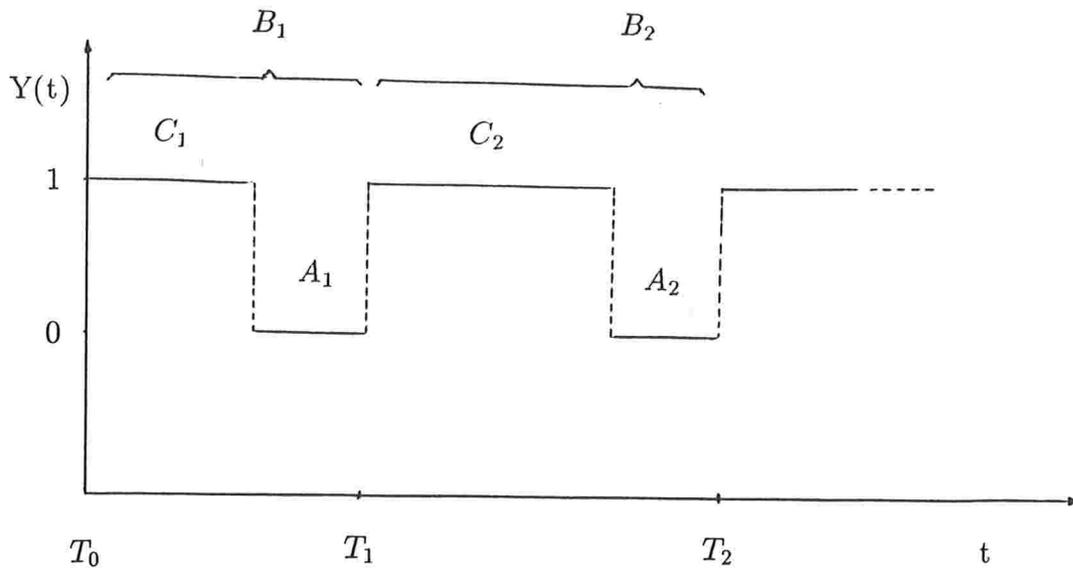


Figura 4.3-A Realização típica do Processo $\{Y(t); t \geq 0\}$

Seja $T_0 = 0$ e L_n o tempo de vida do equipamento no n -ésimo intervalo de renovação com função de distribuição F para $n \geq 1$.

De acordo com as suposições (i) e (ii),

$$C_n = \min\{L_n, T\} \quad (4.3.1)$$

e

$$A_n = \begin{cases} m_I & \text{se } \min\{L_n, T\} = T \\ T - L_n + m_R & \text{se } \min\{L_n, T\} = L_n \end{cases}, n \geq 1 \quad (4.3.2)$$

Deste modo, $\{B_n; n \geq 1\}$ é um processo de renovação tal que $B_n = C_n + A_n, n \geq 1$, e $A(t) = P\{Y(t) = 1\}$ satisfaz à seguinte equação de renovação

$$A(t) = P(C_1 > t) + \int_0^t A(t-x) P(T_1 \in dx) \quad (4.3.3)$$

Aplicando-se o Teorema da Renovação tem-se que a indisponibilidade média assintótica UM do equipamento é dada por:

$$UM = U = 1 - A = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\int_0^{\infty} P(C_1 > t) dt}{E(A_1) + E(C_1)} \\
&= \frac{E(A_1)}{E(A_1) + E(C_1)}
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Neste caso, de (4.3.1),

$$\begin{aligned}
E(C_1) &= \int_0^T P(\min\{L_1, T\} > s) ds \\
&= \int_0^T P(L_1 > s, T > s) ds \\
&= \int_0^T P(L_1 > s) ds \\
&= \int_0^T (1 - F(s)) ds
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

A partir de (4.3.2) tem-se:

$$\begin{aligned}
E(A_1) &= m_I P(\min\{L_1, T\} = T) + E(T - L_1 + m_R 1\{\min\{L_1, T\} = L_1\}) \\
&= m_I P(L_1 > T) + E(T - L_1 1\{\min\{L_1, T\} = L_1\}) + m_R P(L_1 \leq T) \\
&= m_I (1 - F(T)) + \int_0^T (T - s) F(ds) + m_R F(T) \\
&= m_I (1 - F(T)) + TF(T) - \int_0^T sF(ds) + m_R F(T)
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Substituindo-se (4.3.5) e (4.3.6) em (4.3.4),

$$UM = \frac{m_I \bar{F}(T) + TF(T) - \int_0^T sF(ds) + m_R F(T)}{m_I \bar{F}(T) + TF(T) - \int_0^T sF(ds) + m_R F(T) + \int_0^T \bar{F}(s) ds} \tag{4.3.7}$$

onde $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Para o caso particular no qual o tempo de vida do equipamento é *exponencial* com parâmetro $\lambda_L > 0$, obtem-se a seguinte expressão para a *indisponibilidade média assintótica UM*:

$$UM = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda_L T}}{\lambda_L [(m_I - m_R) e^{-\lambda_L T} + T + m_R]} \tag{4.3.8}$$

4.4 COMPARAÇÕES NUMÉRICAS

Apesar de tratarem de planos de manutenção distintos, os modelos apresentados neste capítulo geram resultados numéricos bem próximos no caso em que o tempo de vida do equipamento é exponencial. Estes valores se distanciam apenas em regiões de taxas de falha mais elevadas e em regiões de tempos de inspeção maiores. Estes resultados estão apresentados na **Tabela 4.4-A**.

De qualquer forma, o modelo alternativo adapta-se melhor aos problemas encontrados na prática pois permite que os instantes de inspeção sejam reprogramados quando a inspeção ou o reparo duram um tempo maior do que o normal para um equipamento.

Tabela 4.4-A

λ_L (h^{-1})	m_I (h)	T (h)	m_R (h)	UM (eq.4.3.8)	\bar{u}_∞ (eq.4.2.8)
1.0E-005	7.2	720	24	0.0136	0.0137
1.0E-004	7.2	720	24	0.0462	0.0460
1.0E-003	7.2	720	24	0.3025	0.2979
1.0E-002	7.2	720	24	0.8657	0.8612
1.0E-001	7.2	720	24	0.9866	0.9861
1.0E-005	14.4	720	24	0.0232	0.0235
1.0E-005	21.6	720	24	0.0326	0.0334
1.0E-005	28.8	720	24	0.0419	0.0433
1.0E-005	36.0	720	24	0.0509	0.0531
1.0E-005	43.2	720	24	0.0598	0.0630
1.0E-005	7.2	180	24	0.0395	0.0410
1.0E-005	7.2	360	24	0.0215	0.0219
1.0E-005	7.2	540	24	0.0160	0.0161
1.0E-005	7.2	720	24	0.0136	0.0137
1.0E-005	7.2	900	24	0.0126	0.0126
1.0E-005	7.2	1080	24	0.0121	0.0121
1.0E-005	7.2	1260	24	0.0121	0.0121
1.0E-005	7.2	720	48	0.0139	0.0139
1.0E-005	7.2	720	72	0.0141	0.0142
1.0E-005	7.2	720	96	0.0143	0.0144
1.0E-005	7.2	720	120	0.0146	0.0146
1.0E-005	7.2	720	144	0.0148	0.0149

CAPÍTULO 5

COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho procurou-se desenvolver alguns tópicos ainda pouco estudados por pesquisadores na área de Teoria da Confiabilidade, porém, de grande interesse nas aplicações à engenharia.

Neste sentido, estudou-se modelos de manutenção que tratam especificamente de equipamentos que são submetidos a ações de manutenção tais como inspeção e reparo e que estão sujeitos a falhas estocásticas que não são detectadas imediatamente.

No Capítulo 2 tratou-se do caso em que a falha é detectada somente quando ocorre uma demanda do equipamento para que este possa, então, ser submetido a um reparo completo. Obteve-se a expressão exata para a indisponibilidade média assintótica do equipamento, generalizando-se um resultado para o caso especial em que os instantes de demanda constituem um Processo de Poisson.

Nos Capítulos 3 e 4 abordou-se o caso em que a falha é detectada somente mediante uma inspeção do equipamento, a qual deve indicar a necessidade ou não de um reparo. Neste caso, também, desenvolveu-se uma expressão exata para o cálculo da indisponibilidade média assintótica do equipamento, que foi comparada aos resultados encontrados na literatura.

Do ponto de vista da utilidade de alguns resultados originais contidos nesta dissertação, resta apenas o trabalho de implementação dos mesmos nos programas computacionais disponíveis na área de análise de confiabilidade.

Certamente, ficam ainda algumas sugestões para futuras pesquisas, pois os modelos apresentados neste estudo podem se tornar mais abrangentes se incluírem o efeito de reparos mínimos em equipamentos sujeitos a falhas estocásticas detectadas em demanda ou em inspeção. Além disso, outro problema de importância prática seria o de construir um modelo de manutenção para descrever o comportamento de equipamentos reparáveis com falhas detectadas em demanda e em inspeção.

Finalizo, portanto, agradecendo ao leitor pelo interesse dispensado e por compartilhar da satisfação que sinto em ter contribuído, mesmo que modestamente, à pesquisa no âmbito da Teoria da Confiabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - BARLOW, R.E. & PROSCHAN, F. *Statistical theory of reliability and life testing : probability models*. New York, Holt, c1975. 290p. (International Series in Decision Processes).
- [2] - BLOCK, H.W. , BORGES, W.S. & SAVITS, T.H. Age-dependent minimal repair. *J. Appl. Prob.* , 22 : 370-385, 1985.
- [3] - BORGES, W. S. *Modelos probabilísticos em confiabilidade*. Rio de Janeiro, IMPA, 1979. 123p.
- [4] - CALDAROLA, L. Unavailability and failure intensity of components. *Nuclear Engineering and Design*, 44 : 147-162, 1977.
- [5] - ÇINLAR, E. *Introduction to stochastic process*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, c1975, 402p.
- [6] - HEISING, C.D. Development of unavailability expressions for one- and two-component systems with periodic testing and common-cause failures. *Reliability Engineering*, 6 : 229-254, 1983.
- [7] - VAURIO, J.K. Unavailability of components with inspection and repair. *Nuclear Engineering and Design*, 54 : 309-324, 1979.
- [8] - VAURIO, J.K. On exact and asymptotic unavailability expressions for standby components and systems. *Reliability Engineering*, 10 : 151-173, 1985.
- [9] - VESELY, W.E. & GOLDBERG, F.F. Time dependent unavailability analysis of nuclear safety systems. *IEEE Transactions on Reliability*, R-26(4) : 257-260, 1977.

[10] - VIEIRA NETO, A.S. *Análise do sistema computacional RALLY e introdução de alguns aperfeiçoamentos*. São Paulo, 1988. Dissertação (Mestrado), IPEN / CNEN - SP.

[11] - SIM, S.H. Unavailability analysis of periodically tested components of dormant systems. *IEEE Transactions on Reliability*, R-34(1) : 88-91, 1985.

AVALIAÇÃO DA INDISPONIBILIDADE DE
EQUIPAMENTOS REPARÁVEIS COM FALHAS
DETECTADAS EM DEMANDA OU EM INSPEÇÃO

ERRATA

Capítulo 1 , página 9 , linha 3

onde está escrito “ novo, então $\{X_k + R_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d e $\{Y(t); t \geq 0\}$ é um Processo de Renovação. ”

lê-se “ novo, então $\{X_k + R_k; k \geq 1\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d e determina um Processo de Renovação. ”

Capítulo 1 , página 10 , FIGURA 1.2.2-C

onde está escrito D_{n-2}

lê-se D_{n+2}

Capítulo 1 , página 11 , linha 8

onde está escrito “ de inspeção e $S_k = I_k + R_k 1\{V_{k-1} = 0\}$, $k \geq 1$, com $\{I_k; k \geq 1\}$ tempos de inspeção e ”

lê-se “ de inspeção e $S_k = I_k + R_k 1\{V_{k-1} > 0\}$, $k \geq 1$, com $\{I_k; k \geq 1\}$ tempos de inspeção e ”

Capítulo 2 , página 20 , equação (2.2.20)

onde está escrito

$$U_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{(s + \lambda_L)(s + \mu_R + \lambda_L)}{s[s^2 + s(\lambda_L + \mu_R + \nu_D) + \lambda_L \mu_R + \lambda_L \nu_D + \mu_R \nu_D]} \right\} \quad (2.2.20)$$

lê-se

$$U_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{(s + \lambda_L)(s + \mu_R + \nu_D)}{s[s^2 + s(\lambda_L + \mu_R + \nu_D) + \lambda_L \mu_R + \lambda_L \nu_D + \mu_R \nu_D]} \right\} \quad (2.2.20)$$

Capítulo 2 , página 24 , equação (2.3.8)

onde está escrito

$$\begin{aligned}
 E(V_1(L_1)) &= E[E(V_1(L_1)/L_1)] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(t, x) dx F(dt) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{H}(t+x-s) F(dt) + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \bar{H}(t+x-s) M(ds) F(dt) dx
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

lê-se

$$\begin{aligned}
 E(V_1(L_1)) &= E[E(V_1(L_1)/L_1)] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(t, x) dx F(dt) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{H}(t+x) F(dt) dx + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \bar{H}(t+x-s) M(ds) F(dt) dx
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

Capítulo 2 , página 27 , equação (2.3.1.1)

onde está escrito

$$\begin{aligned}
 E(V_1(L_1)) &= E(Z - V/Z \geq V) \\
 &= \int_0^\infty P(Z - V > s/Z \geq V) ds \\
 &= \int_0^\infty \frac{P(Z - V > s, Z \geq V)}{P(Z \geq V)} ds \\
 &= \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty P(V \leq z - s)H(dz)}{\int_0^\infty P(V \leq z)H(dz)} \\
 &= \int_0^\infty \frac{\int_0^\infty F(z - s)H(dz)}{\int_0^\infty F(z)H(dz)} \\
 &= \frac{E(Z)}{1 - \psi_H(\lambda_L)} - \frac{1}{\lambda_L}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1.1}$$

lê-se

$$\begin{aligned} E(V_1(L_1)) &= E(Z - V/Z \geq V) \\ &= \int_0^\infty P(Z - V > s/Z \geq V) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{P(Z - V > s, Z \geq V)}{P(Z \geq V)} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{\int_s^\infty P(V \leq z - s)H(dz)}{\int_0^\infty P(V \leq z)H(dz)} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{\int_s^\infty F(z - s)H(dz)}{\int_0^\infty F(z)H(dz)} ds \\ &= \frac{E(Z)}{1 - \psi_H(\lambda_L)} - \frac{1}{\lambda_L} \end{aligned} \tag{2.3.1.1}$$

Capítulo 2 , página 28 , equação (2.3.1.5)

onde está escrito

$$UM \rightarrow \frac{m_R}{m_R - \lambda_L^{-1}} = \frac{MTTR}{MTTR + MTF} \tag{2.3.1.5}$$

lê-se

$$UM \rightarrow \frac{m_R}{m_R + \lambda_L^{-1}} = \frac{MTTR}{MTTR + MTF} \tag{2.3.1.5}$$

Capítulo 2 , página 29

linha 8 , onde está escrito “ sabe-se que T_2 , que é o tempo de permanência no estado de incapacidade operacional ”

lê-se “ sabe-se que T_1 , que é o tempo de permanência no estado de incapacidade operacional ”

linha 11 , onde está escrito “ Portanto, T_2 é independente de T_1 (tempo de vida do equipamento) somente quando o ”

lê-se “ Portanto, T_1 é independente de T_3 (tempo de vida do equipamento) somente quando o ”

linha 12 , onde está escrito “ processo de demandas é um Processo de Poisson. Neste caso, pode-se mostrar que T_2 tem ”

lê-se “ processo de demandas é um Processo de Poisson. Neste caso, pode-se mostrar que T_1 tem ”

Capítulo 3 , página 34, linha 3

onde está escrito

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se o equipamento está no estado de capacidade operacional} \\ & \text{(disponível) no instante } t \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

lê-se

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento está no estado de capacidade operacional} \\ & \text{(disponível) no instante } t \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Capítulo 3 , página 34, linha 12

onde está escrito “ Neste intervalo entre inspeções, a variável de tempo local é definida por $x_k = t - i_k$, e sua duração será denotada por $\eta_k = i_k - i_{k-1}$ para $k \geq 0$.”

lê-se “ Neste intervalo entre inspeções, a variável de tempo local é definida por $x_{k+1} = t - i_k$, e sua duração será denotada por $\eta_{k+1} = i_{k+1} - i_k$ para $k \geq 0$.”

Capítulo 3 , página 34, equação (3.2.2)

onde está escrito

$$u(t) = u_{k+1}(x_k) \quad \text{para } k \geq 0 \text{ e } i_k < t \leq i_{k+1} \quad (3.2.2)$$

lê-se

$$u(t) = u_k(x_k) \quad \text{para } k \geq 1 \text{ e } i_{k-1} < t \leq i_k \quad (3.2.2)$$

Capítulo 3 , página 34, linhas 16 e 17

onde está escrito “ onde $u_{k+1}(x_k)$ é a indisponibilidade pontual do equipamento no intervalo entre a k -ésima e a $(k - 1)$ -ésima inspeção. ”

lê-se “ onde $u_k(x_k)$ é a indisponibilidade pontual do equipamento no intervalo entre a $(k - 1)$ -ésima e a k -ésima inspeção. ”

Capítulo 3 , página 34, linha 18

onde está escrito “ $u_{k+1}(x_k)$ pode ser determinada para os intervalos de inspeção consecutivos, através ”

lê-se “ $u_k(x_k)$ pode ser determinada para os intervalos de inspeção consecutivos, através ”

Capítulo 3 , página 35 , equação (3.2.7)

onde está escrito

$$\begin{aligned} b(x) &= P\{I > x\} + \int_0^x [P\{R > x - y\} + \int_0^{x-y} P\{L \leq x - y - z\} G(dz)] J(dy) \\ &= 1 - H(x) + \int_0^x [1 - G(x - y) + \int_0^{x-y} F(x - y - z) G(dz)] J(dy) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

lê-se

$$\begin{aligned} b(x) &= P\{I > x\} + \int_0^x [P\{R > x - y\} + \int_0^{x-y} P\{L \leq x - y - z\} G(dz)] J(dy) \\ &= 1 - J(x) + \int_0^x [1 - G(x - y) + \int_0^{x-y} F(x - y - z) G(dz)] J(dy) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Capítulo 3 , página 38

incluir a suposição (vii)

“ (vii) com probabilidade 1, o tempo para inspeção e reparo é inferior ao tempo até a próxima inspeção.”

Capítulo 3 , página 39 , equação (3.3.4)

onde está escrito

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \leq t < i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k \\ 0, & \text{para } i_k \leq t < i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \\ & \text{e } i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k \leq t < i_{k+1} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

lê-se

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \leq t < \min\{i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k, i_{k+1}\} \\ 0, & \text{para } i_k \leq t < i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} \\ & \text{e } \min\{i_k + I_k + R_k 1\{X_k = 0\} + L_k, i_{k+1}\} \leq t < i_{k+1} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Capítulo 3 , página 39 , linha 24

onde está escrito “ Assim, de acordo com (3.3.1), pode-se escrever que, para $k > 1$, ”

lê-se “ Assim, de acordo com (3.3.1), pode-se escrever que, para $k \geq 1$,”

Capítulo 3 , página 44 , equação (3.3.15)

onde está escrito

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} \int_0^t U(x) dx &\approx \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 0\} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
 &+ \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 1\} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 0\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
 &+ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = 1\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

lê-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t} \int_0^t U(x) dx &\approx \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_j = 0\} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
 &+ \frac{1}{k\eta} \sum_{j=1}^k P\{X_j = 1\} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \\
 &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_j = 0\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I + R > x\} + P\{I + R + L \leq x\}] dx \\
 &+ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_j = 1\} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta [P\{I > x\} + P\{I + L \leq x\}] dx \quad (3.3.15)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3 , página 44 , equação (3.3.17)

onde está escrito

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_k = i\} \rightarrow \pi(i). \quad (3.3.17)$$

lê-se

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P\{X_j = i\} \rightarrow \pi(i). \quad (3.3.17)$$