Grandes Desvios no Modelo de Percolação para o Número de Aglomerados por Vértice

Fábio Prates Machado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Roberto H. Schonmann**

–São Paulo, Dezembro de 1989–

AGRADECIMENTOS

Orientação na medida certa e camaradagem de sobra

⋆ **Roberto Schonmann**

Discussoẽs intermináveis sobre infinitos temas

⋆ **Adilso~~m~~n Simonis**

⋆ **Márcia Branco**

⋆ **Olga Satomi**

Incentivo, Críticas, Cursos, Seminários, Bate-Papos ...

⋆ **Grupo de Sistemas Markovianos de Partículas**

em especial :**Antônio Galves**

⋆ **Professores e Alunos da Pós-graduação do MAE**

em especial :**Carlinhos, Cláudia, Dario e Galvão**

Apoio em horas difíceis

⋆ **Chico, Tarsis**

Auxílio Computacional

⋆ **Antônio Carlos Pedroso de Lima**

⋆ **Donald E. Knuth**

O que quer dizer, diz.
Não fica fazendo
o que, um dia, eu sempre fiz.
Não fica só querendo, querendo,
coisa que eu nunca quis.
O que quer dizer, diz.
Só se dizendo num outro
o que, um dia, se disse,
um dia, vai ser feliz.

eu ontem tive a impressão
que deus quis falar comigo
não lhe dei ouvidos

quem sou eu para falar com deus ?
ele que cuide dos seus assuntos
eu cuido dos meus

Paulo Leminski

para

Wanda

Alexandre **Ubirajara**

Sa

Neste trabalho definimos alguns estimadores para a função $\kappa(p)$: número de aglomerados por vértice no modelo de percolação de elos. Baseados em caixas centradas na origem de $\mathbb{Z}^d$ com raio n e considerando de maneiras distintas o que acontece no exterior e na sua borda, estes estimadores convergem quase certamente e em $\mathcal{L}_1$ com relação à medida produto. Numa segunda parte mostraremos um decaimento exponencial da ordem do volume das caixas em que estão baseados os estimadores, para probabilidades de que as estimativas estejam em intervalos que não contenham $\kappa(p)$ em seu interior. A correspondente taxa de decaimento exponencial não depende das condições de fronteira.

ÍNDICE

Capítulo 1. Introdução 1

Capítulo 2. Lei dos Grandes Números para o N$^{\underline{o}}$ de Aglomerados por Vértice 8

Capítulo 3. Resultados Obtidos por Monotonia 14

Capítulo 4. Estimativas de Grandes Desvios para o N$^{\underline{o}}$ de Aglomerados por Vértice . 24

Referências Bibliográficas 39

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 O MODELO DE PERCOLAÇÃO

O modelo de percolação foi introduzido em 1957 por Broadbent e Hammersley [4] para descrever o escoamento de um fluido através de um meio poroso.

A partir de então, uma quantidade enorme de trabalhos tem sido publicados com considerações extremamente interessantes envolvendo desde simples (e engenhosos) argumentos até elementos requintados de matemática sobre este modelo, que tem por características a simplicidade à primeira vista. O fato de existir um valor $p_c \in]0;1[$ que divide as questões relevantes ao modelo de percolação em dois mundos , (i.e., um fenômeno crítico), torna mais intrigante seu estudo e o relacionamento com vários outros modelos da Mecânica Estatística.

1.2 PERCOLAÇÃO DE ELOS EM $\mathbb{Z}^d$

1.2.1 DEFINIÇÃO

• $E_d = \{\ [x,y] : x, y \in \mathbb{Z}^d, ||x-y||_1 = 1\}$

onde $||x||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \ :\ x = (x_1, x_2, ..., x_d)$

E_d : conjunto de elos de $\mathbb{Z}^d$

• $\Omega = \{0,1\}^{E_d}$

Ω : conjunto das configurações de E_d

• $\mathcal{F} = \sigma\big\{\{\omega \in \Omega : \omega|_A = \zeta\},\ A \subset E_d,\ A$ finito , $\zeta \in \{0,1\}^A\big\}$

$\mathcal{F}$: σ-álgebra gerada pelo conjunto de configurações em regiões finitas de $\mathbb{Z}^d$

• $P_p(\{\omega : \omega|_A = \zeta\}) = p^{|\{x \in A : \zeta(x)=1\}|}(1-p)^{|\{x\in A:\zeta(x)=0\}|}$

onde $|A|$ = cardinalidade do conjunto A, $p \in [0,1]$

P_p : medida produto de probabilidade

• Para $\omega \in \Omega$ representaremos o estado do elo $i \in E_d$ na configuração ω por $\omega(i)$

Neste e no próximo capítulo procuraremos sempre que possível, apresentar em palavras o significado das variáveis, na medida em que estas vão sendo definidas. Para fazer isto usaremos a palavra configuração para falar sobre uma determinada disposição de 0's e 1's associada ao conjunto de elos. Também aparecerão expressões como "elo aberto na configuração ω" quando para $\omega \in \Omega, e \in E_d$ tivermos $\omega(e) = 1$, ou ainda "elo fechado na configuração ω" quando $\omega(e) = 0$. Diremos que "existe um caminho entre x e y na configuração ω " ou ainda "x se comunica com y na configuração ω" quando na configuração $\omega \in \Omega$ existir um conjunto de elos abertos conectados, começando em x e terminando em y. Usaremos a expressão "aglomerado que toca a borda da caixa Λ_n" para fazer referência a um aglomerado que contém pelo menos um ponto que pertence a borda da caixa Λ_n. Diremos que "existe um caminho interno a caixa Λ_n" quando em determinada configuração existir um conjunto de elos abertos conectados cujas extremidades estão em Λ_n.

1.2.2 CARACTERÍSTICAS

As principais características do modelo de percolação são :

a) Probabilidade de Percolação :

$$\theta(p) = P_p(\{\omega : |C_\omega^\infty(0)| = \infty\})$$

onde $C_\omega^\infty(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} y\}$: aglomerado de x

(conjunto de pontos de $\mathbb{Z}^d$ que estão ligados a x na configuração ω)

e $x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} y$: x se comunica com y na configuração ω,

ou seja : dado $\omega \in \Omega$, $\exists$ $\{ x_1, x_2, ..., x_k \}$ com $x_i \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\omega([x_i, x_{i+1}]) = 1$ $\forall$ i com $x_1 = x$, $x_k = y$ para algum $k \in I\!N$.

Apresentaremos a seguir 3 fatos associados à probabilidade de percolação que são de grande utilidade no entendimento e provas dos resultados que veremos mais adiante. Antes disto, duas pequenas definições :

a1)Translação em E_d: Seja $j \in \mathbb{Z}^d$.ω^j é uma translação de ω ($\omega^j, \omega \in \Omega$) se : centerline $\omega^j(x) = \omega(x - j)$ $\forall$ $x \in E_d$.

a2)Invariância por Translação: Dizemos que a medida de probabilidade P sobre o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é invariante por translação se $\forall$ $A \in \mathcal{F}$:

$$P(A) = P(A^j) \quad \text{onde} \quad A^j = \{\omega : \omega^{-j} \in A\} \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d.$$

Os fatos são os seguintes : (para provas veja Grimmett [8])

1) $P_p(\{\omega : |C_\omega^\infty(x)| = \infty\}) = P_p(\{\omega : |C_\omega^\infty(y)| = \infty\})$ $\forall$ $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

2) Para $p_c = \sup\{p \in [0,1] : P_p(\{\omega : |C_\omega^\infty(0)| = \infty\}) = 0\}$

temos:

$$\text{se } d \geq 2 \Rightarrow 0 < p_c(d) < 1.$$

3) $P_p(\{\omega : \exists$ $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $|C_\omega^\infty(x)| = \infty\}) = \mathbf{1}_{\{p > p_c\}}$.

Continuando na apresentação das características do modelo de percolação, temos :

b) O Tamanho Médio dos Aglomerados da Origem

$$\chi(p) \;=\; I\!E_p(|C_\omega^\infty(0)\;|)$$

c) O Tamanho Médio dos Aglomerados Finitos da Origem

$$\chi^f(p) \;=\; I\!E_p(|C_\omega^\infty(0)\;|; C_\omega^\infty(0) < \infty)$$

d) O Número de Aglomerados por Vértice

$$\kappa(p) \;=\; I\!E_p(|C_\omega^\infty(0)|^{-1}) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_p(\{\omega : |C_\omega^\infty(0)| = n\})$$

As analogias entre o modelo de ising e o modelo de percolação são várias e muito úteis para solução de problemas de um lado utilizando-se conhecimentos do outro. O objetivo deste trabalho não é o de avaliar tais analogias, mas podemos observar que a função $\theta(p)$ corresponde à magnetização, $\chi^f(p)$ à suscetibilidade e a função $\kappa(p)$ à energia livre por vértice.

1.3 GRANDES DESVIOS PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

Estimativas de Grandes Desvios são resultados para o comportamento assintótico da probabilidade de "eventos raros" em uma sequência de variáveis aleatórias.

Os primeiros resultados nesta área foram apresentados por Cramèr (1937), tratando de Grandes Desvios com relação a Lei dos Grandes Números. No contexto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, as Estimativas de Grandes Desvios juntamente com o Teorema Central do Limite e a Lei dos Grandes Números são o suporte básico para o desenvolvimento de métodos assintóticos em Estatística. Em situações apresentadas na Mecânica Estatística, onde um número muito grande de componentes interagem de maneira complicada, Lanford (1961) apresentou idéias básicas para a extensão (entre elas a perda da independência) dos resultados de Cramèr e Chernoff. Mais tarde Bahadur e Zabell (1979) desenvolveram estas idéias favorecendo um melhor entendimento do papel da entropia na teoria dos Grandes Desvios e suas consequentes aplicações.

1.3.1 DEFINIÇÃO

Seja μ uma probabilidade em $I\!R$ e $\hat{\mu} : I\!R \to (0, +\infty]$ sua Função Geradora de Momentos, isto é:

$$\hat{\mu}(t) = \int_{I\!R} e^{tx} \mu(dx)$$

A tranformada de Cramèr de μ é a função $\lambda_\mu : I\!R \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\lambda_\mu(a) = \sup_{t \in I\!R}(ta - \log \hat{\mu}(t)) \quad \forall\, a \in I\!R$$

1.3.2 TEOREMA (Cramèr (1937), Chernoff (1952))

Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Seja μ a distribuição comum e seja

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad n \geq 1$$

então :

a) se $I\!E|X_1| < +\infty$ tem-se para todo $n \geq 1$

$$P(\bar{X}_n \leq a) \leq \exp^{-n\lambda_\mu(a)} \text{ quando } a \leq I\!E(X_1)$$

$$P(\bar{X}_n \geq a) \leq \exp^{-n\lambda_\mu(a)} \text{ quando } a \geq I\!E(X_1)$$

b) para todo $a \in I\!R$

$$-\lambda_\mu(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a)$$

$$-\lambda_\mu(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a)$$

Combinando as partes a) e b) deste teorema temos que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \leq a) = -\lambda_\mu(a) \quad \text{quando} \quad a \leq I\!E(X_1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{X}_n \geq a) = -\lambda_\mu(a) \quad \text{quando} \quad a \geq I\!E(X_1)$$

1.4 O TEOREMA ERGÓDICO DE BIRKHOFF

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e T uma transformação de Ω sobre si mesmo.

1.4.1 DEFINIÇÃO

Uma transformação mensurável $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ é dita preservadora de medida ($p.m.$) se $P(T^{-1}(A)) = P(A)$, $\forall\ A \in \mathcal{F}$.

1.4.2 DEFINIÇÃO

Um conjunto $A \in \mathcal{F}$ é dito $T-invariante$ se $T^{-1}(A) = A$.

1.4.3 DEFINIÇÃO

Seja a transformação T $p.m.$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. T é dita ergódica se $\forall\ A, T-invariante$, $P(A) = 0$ ou 1.

1.4.4 TEOREMA (Birkhoff (1931))

Seja T uma transformação $p.m.$ e ergódica sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então, para qualquer variável aleatória X tal que $\mathbb{E}|X| < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k(\omega)) = \mathbb{E}(X) \qquad P - q.c.$$

No contexto de probabilidade, este mesmo resultado é encontrado como a famosa Lei Forte dos Grandes Números. Observe aqui que os teoremas 1.3.2 e 1.4.4 são ferramentas muito fortes para compreendermos o comportamento da sequência de variáveis aleatórias $\bar{X}_n$. É interessante notar como os dois resultados se completam e nos informam para onde converge $\bar{X}_n$ e qual a velocidade desta convergência.

1.5 RESUMO DO TRABALHO

Neste trabalho apresentaremos, baseado em Grimmett [8], sequências de variáveis aleatórias definidas em caixas de lado n em $\mathbb{Z}^d$, com diferentes condições de fronteira, que convergem $P_p-q.c.$ para a função $\kappa(p)$. Em seguida, baseado em Lebowitz e Schonmann [9], desenvolveremos a parte mais importante, que trata das Estimativas de Grandes Desvios correspondentes.

CAPÍTULO 2

LEI DOS GRANDES NÚMEROS PARA O NÚMERO DE AGLOMERADOS POR VÉRTICE

Em 1976 Grimmett [7] demonstrou a existência do limite da sequência de funções $K_{m,n}$: número de aglomerados de ω restrito a $\{x \in \mathbb{Z}^2 : -m \leq x_1 \leq m, -n \leq x_2 \leq n\}$ como uma justificativa parcial aos métodos usados por Sykes e Essam [11] para calcular valores exatos de probabilidades para percolação em redes não-triviais de duas dimensões. Posteriormente Wierman [14] identificou este limite como a função $\kappa(p)$. Apresentaremos a seguir a prova dada por Grimmett [8].

2.1 NOTAÇÕES

- $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : ||x||_\infty \leq n\}$: caixa de raio n

onde $||x||_\infty = max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_d|\}$.

- $x \overset{\omega}{\underset{\Lambda_n}{-}} y$: x se comunica com y na configuracão ω em Λ_n

isto é, dado $\omega \in \Omega$, $\exists \; \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $x_i \in \Lambda_n$ para $i = 1, ..., k$

tal que $\omega([x_i, x_{i+1}]) = 1 \; \forall \; i \; e \; x_1 = x, x_k = y$ para algum $k \in I\!N$.

2.2 DEFINIÇÕES

- $C_\omega^{l,n}(x) \; = \; \{ \; y \; \in \; \Lambda_n : x \overset{\omega}{\underset{\Lambda_n}{-}} y \; \}$

$C_\omega^{l,n}(x)$ conjunto de pontos de Λ_n que estão conectados ao ponto x , na configuração ω , por um caminho interno a Λ_n .

- $\Gamma_\omega^{l,n}(x) \; = \; |C_\omega^{l,n}(x)|^{-1}$
- $\Gamma_\omega^{\infty}(x) \; = \; |C_\omega^{\infty}(x)|^{-1}$
- $N_{\Lambda_n}^l(\omega) \; = \; \sum_{x \in \Lambda_n} \Gamma_\omega^{l,n}(x)$

Onde $N_{\Lambda_n}^l(\omega)$ representa o número de aglomerados livres (no sentido de não utilizar $(\Lambda_n)^c \cap \mathbb{Z}^d$) da configuração ω na caixa Λ_n . Observe aqui que se o ponto $x, (x \in \Lambda_n)$, em uma particular configuração ω, está em um aglomerado de tamanho n, cada um de seus pares irá contribuir com $\frac{1}{n}$, totalizando 1 quando somarmos para cada ponto deste aglomerado.

- $N_{\Lambda_n}^{\infty}(\omega) \; = \; \sum_{x \in \Lambda_n} \Gamma_\omega^{\infty}(x)$
- $X_{\Lambda_n}^{\circ}(\omega) \; = \; N_{\Lambda_n}^{\circ}(\omega)/|\Lambda_n|$ onde $\circ = \infty, l$

2.3 TEOREMA (Grimmett [8])

Suponha $0 \leq p \leq 1$. O número $N_{\Lambda_n}^l(\omega)$ de aglomerados livres de Λ_n satisfaz

$$\frac{N_{\Lambda_n}^l(\omega)}{|\Lambda_n|} \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{P_p - qc} \kappa(p) \quad \text{quando } n \to \infty$$

Prova :

Observe que $\Gamma_\omega^\infty(x) \leq \Gamma_\omega^{l,n}(x)\ \forall\ \omega \in \Omega,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}^d,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

dai temos

$$\frac{N^l_{\Lambda_n}(\omega)}{|\Lambda_n|} \geq \frac{\sum_{i\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x)}{|\Lambda_n|}$$

e como translações são transformações ergódicas quando trabalhamos com a medida produto temos que :

$$\frac{\sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x)}{|\Lambda_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{P_p-qc} \mathbb{E}_p(\Gamma_\omega^\infty(0))$$

pelo teorema ergódico de Birkhoff.

Por outro lado temos

$$\sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^{l,n}(x) = \sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x) + \sum_{x\in\Lambda_n}(\Gamma_\omega^{l,n}(x) - \Gamma_\omega^\infty(x)) = (I)$$

e observando que $(\Gamma_\omega^{l,n}(x) - \Gamma_\omega^\infty(x)) = 0$ sempre que $x \overset{\omega}{\not\leftrightarrow} \delta(\Lambda_n)$

onde $\delta(\Lambda_n) = \{x \in\ \mathbb{Z}^d : ||x||_\infty = n\}$, temos:

$$(I)\ \leq\ \sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x)\ +\ \sum_{x\leftrightarrow\delta(\Lambda_n)}\Gamma_\omega^{l,n}(x)\ \leq\ \sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x)\ +\ |\delta(\Lambda_n)|$$

logo

$$\frac{\sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^{l,n}(x)}{|\Lambda_n|} \leq \frac{\sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma_\omega^\infty(x)}{|\Lambda_n|} + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \xrightarrow{P_p-qc} \mathbb{E}_p(\Gamma_\omega^\infty(0))$$

$$\text{pois}\quad \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Para verificar a convergência em $\mathcal{L}_1$ observe que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\frac{N^l_{\Lambda_n}(\omega)}{|\Lambda_n|} - I\!E_p(\Gamma^\infty_\omega(0))\right|dP_p(\omega) \;=$$

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty}\left|\frac{N^l_{\Lambda_n}(\omega)}{|\Lambda_n|} - I\!E_p(\Gamma^\infty_\omega(0))\right|dP_p(\omega) \;=\; 0$$

Onde a primeira igualdade é justificada pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue , já que :

$$\left|\frac{N^l_{\Lambda_n}(\omega)}{|\Lambda_n|} - I\!E_p(\Gamma^\infty_\omega(0))\right| \;\in\; [0,1]$$

Analisando a demonstração do teorema 2.3 podemos observar a importância menor do que está sendo definido para as bordas da caixa Λ_n. A seguir vamos apresentar algumas variáveis aleatórias que consideram de maneira diferente o que está acontecendo na borda e no exterior das caixas Λ_n mas que satisfazem a convergência encontrada no teorema 2.3.

2.4 NOTAÇÃO

- $x \underset{\square_n}{\overset{\omega}{-}} y$: x se comunica com y na configuração ω'_n com a condição de borda fechada onde $\omega'_n([x_a, x_b]) = \mathbf{1}_{\{\{x_a,x_b\}\cap\Lambda_{n-1}\neq\emptyset\}}\omega([x_a, x_b])$
ficando a configuração ω modificada (fechada) na borda e no exterior da caixa Λ_n

2.5 DEFINIÇÃO

- $C^{f,n}_\omega(x) \;=\; \{y \in \Lambda_n : x \underset{\square_n}{\overset{\omega}{-}} y\}$

$C^{f,n}_\omega(x)$: conjunto de pontos da caixa Λ_n que estão ligados ao ponto x na configuração ω através de um caminho sem elos da borda ou do exterior da caixa Λ_n.

- $C^{\star,n}_\omega(x) \;=\; \{y \in \Lambda_n : x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} y\}$

$C^{\star,n}_\omega(x)$: conjunto de pontos da caixa Λ_n que estão ligados a x.

- $\Gamma^{\circ,n}_\omega = |C^\circ_\omega(x)|^{-1}$
- $N^\circ_{\Lambda_n}(\omega) = \sum_{x\in\Lambda_n}\Gamma^\circ_\omega(x)$
- $X^\circ_{\Lambda_n}(\omega) = N^\circ_{\Lambda_n}(\omega)/|\Lambda_n|$ onde $\circ = f, \star$

$\bullet N^i_{\Lambda_n}(\omega) = \sum_{\substack{x\in\Lambda_n \\ x\not\leftrightarrow\delta(\Lambda_n)}} \Gamma^{l,n}_\omega(x)$ $\qquad\bullet\ X^i_{\Lambda_n}(\omega) = N^i_{\Lambda_n}(\omega)/|\Lambda_n|$

$N^i_{\Lambda_n}(\omega)$: número de aglomerados internos (que não tocam na borda) de Λ_n na configuração ω.

Temos a seguinte relação :

$$X^i_{\Lambda_n}(\omega) \ \leq\ X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \ \leq\ X^\star_{\Lambda_n}(\omega) \ \leq\ X^l_{\Lambda_n}(\omega) \ \leq\ X^f_{\Lambda_n}(\omega)$$

Sobre as desigualdades acima, cabe aqui um comentário. A primeira desigualdade $(X^i_{\Lambda_n}(\omega) \leq X^\infty_{\Lambda_n}(\omega))$ é devida ao fato de que para os pontos cujos aglomerados não tocam na borda, os "pesos" $\Gamma^{l,n}_\omega(x)$ e $\Gamma^\infty_\omega(x)$ são iguais mas a variável $X^i_{\Lambda_n}(\omega)$, ao contrário de $X^\infty_{\Lambda_n}(\omega)$, não considera aqueles pontos cujos aglomerados tocam a borda. A segunda desigualdade deve-se ao fato de que as duas variáveis "olham" a situação de todos elos de E_d para definir os aglomerados mas $\Gamma^\star_\omega(x)$ é o inverso apenas do número de pontos que estão dentro da caixa Λ_n, enquanto que $\Gamma^\infty_\omega(x)$ é o inverso do número total de pontos do aglomerado de x. A terceira desigualdade se verifica pois $\Gamma^{l,n}_\omega(x)$ considera apenas a configuração dos elos dentro da caixa Λ_n, podendo colocar dois pontos que estão no mesmo aglomerado originalmente, em aglomerados diferentes bastando esta ligação se dar no exterior da caixa Λ_n. A última desigualdade acontece porque $X^f_{\Lambda_n}(\omega)$ além de não considerar a configuração no exterior da caixa, não considera o que está acontecendo na sua borda.

2.6 PROPOSIÇÃO

Suponha $0 \leq p \leq 1$. Então, o número $X^\circ_{\Lambda_n}(\omega)$ satisfaz :

$$\frac{N^\circ_{\Lambda_n}(\omega)}{|\Lambda_n|} \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{P_p-qc} \kappa(p) \quad \text{quando } n \to \infty$$

onde $\circ = \star, i, f$

Prova :

Basta observar a veracidade das relações:

(i) $N^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{l}_{\Lambda_n}(\omega) \qquad \forall\, \omega \in \Omega$

$$\Longrightarrow \quad X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{P_p - qc} \kappa(p) \quad \text{quando } n \to \infty$$

(ii) $N^{l}_{\Lambda_n}(\omega) - |\delta(\Lambda_n)| \leq N^{i}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{l}_{\Lambda_n}(\omega) - 1 \qquad \forall\, \omega \in \Omega$

$$\Longrightarrow \quad X^{i}_{\Lambda_n}(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{P_p - qc} \kappa(p) \quad \text{quando } n \to \infty$$

(iii) $N^{i}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{f}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{i}_{\Lambda_n}(\omega) + |\delta(\Lambda_n)| \qquad \forall\, \omega \in \Omega$

$$\Longrightarrow \quad X^{f}_{\Lambda_n}(\omega) \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{P_p - qc} \kappa(p) \quad \text{quando } n \to \infty$$

CAPÍTULO 3

RESULTADOS OBTIDOS POR MONOTONIA

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados com aplicações em Probabilidade e Estatística que dependem de características como invariância translacional e monotonia.

3.1 DEFINIÇÃO

Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$,

dizemos que $\omega_1 \geq \omega_2$ se $\forall\ e \in E_d$ tivermos $\omega_1(e) \geq \omega_2(e)$.

Definimos assim uma ordem parcial em Ω.

3.2 DEFINIÇÃO

Seja $f : \Omega \to I\!R$,

se $f(\omega_1) \geq f(\omega_2)$ $\forall\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ com $\omega_1 \geq \omega_2$ então f é dita não decrescente,

se $f(\omega_1) \leq f(\omega_2)$ $\forall\ \omega_1, \omega_2 \in \Omega$ com $\omega_1 \geq \omega_2$ então f é dita não crescente.

3.3 PROPOSIÇÃO Desigualdade de Harris-F.K.G.

Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias não decrescentes, limitadas, definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$

então :

$$I\!E_p(X_1(\omega) \times \cdots \times X_n(\omega)) \geq I\!E_p(X_1(\omega)) \times \cdots \times I\!E_p(X_n(\omega))$$

Prova :

Primeiro vamos usar indução finita para provar o resultado para variáveis aleatórias que dependem de um número finito de elos. A prova geral vai ser feita usando o teorema da convergência de martingais.

Suponha X_1, X_2 variáveis aleatórias não-decrescentes que dependem apenas de um elo de E_d.

$$X_1 : \{0,1\} \to \{a, b\} \qquad\qquad X_2 : \{0,1\} \to \{c, d\}$$

e

$$\omega(e_1) \mapsto X_1(\omega(e_1)) \qquad\qquad \omega(e_1) \mapsto X_2(\omega(e_1))$$

onde $e_1 \in E_d \quad a \leq b, \quad c \leq d \in I\!R$.

Assim temos

$$I\!E_p(X_1(\omega)X_2(\omega)) - I\!E_p(X_1(\omega))I\!E(X_2(\omega)) =$$

$$= p(1-p)[X_1(0)X_2(0) - X_1(1)X_2(0) - X_1(0)X_2(1) + X_1(1)X_2(1)]$$

$$= \{X_1(0) - X_1(1)\}\{X_2(0) - X_2(1)\}p(1-p) \geq 0$$

pois X_1 e X_2 são funções não decrescentes.

$$\Rightarrow \qquad I\!E_p(X_1(\omega)X_2(\omega)) \geq I\!E_p(X_1(\omega))I\!E_p(X_2(\omega))$$

No caso $\Omega = \{0,1\}^{E_d}$ temos mais do que isto quando $a < b, \quad c < d$:

$\{X_1(\omega(e_1)) = a \Leftrightarrow X_2(\omega(e_1)) = b\} P_p - q.c. \Leftrightarrow Corr(X_1(\omega), X_2(\omega)) = 1.$

Suponha que X_1, X_2 são variáveis aleatórias não decrescentes que dependem de $k < \infty$ elos de E_d. Assim usando o resultado para $k = 1$, temos que:

$$I\!E_p(X_1(\omega)X_2(\omega)) = I\!E_p[I\!E_p(X_1(\omega)X_2(\omega) \mid \omega(e_1), \cdots, \omega(e_{k-1}))]$$

$$\geq I\!E_p[I\!E_p(X_1(\omega) \mid \omega(e_1), \cdots, \omega(e_{k-1}))I\!E_p(X_2(\omega) \mid \omega(e_1), \cdots, \omega(e_{k-1}))] = (II)$$

agora observe que:

$$I\!E_p[X_1(\omega) \mid \omega(e_1) = a_1, ..., \omega(e_{k-1}) = a_{k-1}] =$$

$$= \sum_j X_1(a_1, \cdots, a_{k-1}, j) P_p(\omega(e_k) = j \mid \omega(e_1) = a_1, \cdots, \omega(e_{k-1}) = a_{k-1})$$

$$= \sum_j X_1(a_1, \cdots, a_{k-1}, j) P_p(\omega(e_1) = j) \geq \sum_j X_1(a'_1, \cdots, a'_{k-1}, j) P_p(\omega(e_1) = j)$$

$$= I\!E_p[X_1(\omega) \mid \omega(e_1) = a'_1, \cdots, \omega(e_{k-1}) = a'_{k-1}]$$

se $(a_1, \cdots, a_{k-1}) \geq (a'_1, \cdots, a'_{k-1})$, o que nos permite aplicar a desigualdade no caso de $k-1$ elos, pois aquelas variáveis aleatórias são não decrescentes.

$$\Rightarrow (II) \geq I\!E_p[I\!E_p(X_1(\omega) \mid \omega(e_1), \cdots, \omega(e_{k-1}))] \times I\!E_p[I\!E_p(X_2(\omega) \mid \omega(e_1), \cdots, \omega(e_{k-1}))]$$

$$= I\!E_p[X_1] I\!E_p[X_2]$$

Vamos passar agora para o caso geral. Suponha inicialmente alguma enumeração dos elos de E_d.

Seja $\mathcal{F}_n = \sigma(\omega(e_1), \cdots, \omega(e_n))$.

Definimos então:

$X_1^n = I\!E_p(X_1 \mid \mathcal{F}_n)$

$X_2^n = I\!E_p(X_2 \mid \mathcal{F}_n)$

X_1^n e X_2^n são funções uniformemente limitadas pois $X_1(\omega), X_2(\omega)$ são limitadas. Estas variáveis aleatórias convergem $P_p - q.c.$ para X_1 e X_2 por dois motivos :

1) $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}$ e sendo X_1^n um martingal, temos que $I\!E_p(X_1 \mid \mathcal{F}_n) \stackrel{P_p-q.c}{\longrightarrow} I\!E_p(X_1 \mid \mathcal{F})$ pelo teorema da convergência de martingais (para prova veja Billingsley [2]),

2) $I\!E_p(X_1 \mid \mathcal{F}) = X_1$ pois X_1 é $\mathcal{F}$-mensurável.

Veremos agora que X_1^n e X_2^n são não decrescentes em ω:

Sejam as configurações ω_0 e $\omega_1 \in \Omega$ onde $\omega_0(e_1) = a_1, \cdots, \omega_0(e_n) = a_n$ e $\omega_1(e_1) = a'_1, \cdots, \omega_1(e_n) = a'_n$ com $(a_1, \cdots, a_n) \geq (a'_1, \cdots, a'_n)$.

Seja $P_{p|a}$ a medida de probabilidade P_p condicionada aos ω tais que as configurações nos elos $e_1, \cdots, e_n$ seja $a_1, \cdots, a_n$ o mesmo valendo para $P_{p|a'}$ com relação à configuração $(a'_1, \cdots, a'_n)$.

Sejam $A = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) = \omega_0(e_i)\ i = 1, ..., n\}$

e $B = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) = \omega_1(e_i)\ i = 1, ..., n\}$

Observe que, dado $\omega \in A$ se definirmos $\omega' = (a'_1, \cdots, a'_n, \omega(e_{n+1}), \cdots)$ teremos que $\omega' \in B$ e a relação $\omega \longmapsto \omega'$ é $1-1$. Sobre as medidas $P_{p|a}$ e $P_{p|a'}$ temos que dado $C \subset A, C \in \mathcal{F}, D = \{\omega' : \omega \in C\} \Rightarrow D \subset B, D \in \mathcal{F}$ e $P_{p|a}(C) = P_{p|a'}(D)$. Finalmente, temos que dado $\omega \in A$

$$X_1^n(\omega) = X(a_1, \cdots, a_n, \omega(e_{n+1}), \cdots) \geq X(a'_1, \cdots, a'_n, \omega(e_{n+1}), \cdots) = X_1^n(\omega')$$

então

$$X_1^n(\omega_0) = \int_A X_1(\omega) P_{p|a}(\omega) \geq \int_B X_1(\omega) P_{p|a}(\omega) = X_1^n(\omega_1)$$

O mesmo vale para $X_2^n(\omega)$. Desta forma $X_1^n(\omega)$ e $X_2^n(\omega)$ são também não decrescentes em ω.

Para concluir a prova usaremos a desigualdade entre esperanças já garantida para variáveis aleatórias que dependem de um número finito de elos.

$$\mathbb{E}_p[X_1^n(\omega)X_2^n(\omega)] \geq \mathbb{E}_p[X_1^n(\omega)]\mathbb{E}_p[X_2^n(\omega)]$$

Tomando o limite dos dois lados da desigualdade, estes podem ser aplicados dentro do símbolo da esperança pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (as variáveis X_1^n e X_2^n são uniformemente limitadas), daí concluímos a prova obtendo:

$$\mathbb{E}_p[X_1(\omega)X_2(\omega)] \geq \mathbb{E}_p[X_1(\omega)]\mathbb{E}_p[X_2(\omega)]$$

Para ver que o resultado vale também para uma quantidade finita de variáveis aleatórias basta observar que se X_1 e X_2 são não-decrescentes e limitadas, o mesmo acontecerá com X_1X_2.

3.4 PROPOSIÇÃO (Convergência de funções super e sub-aditivas)

Seja f função com domínio em $\mathbb{Z}_d$.

Então temos que:

a) se $f(\ell_1,\cdots,\ell_k,\cdots,\ell_d) \geq f(\ell_1,\cdots,a_k,\cdots,\ell_d) + f(\ell_1,\cdots,b_k,\cdots,\ell_d)$ $\forall\, k=1,\cdots,d$ onde $\ell_k = a_k + b_k$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,n,\cdots,n)}{n^d} = \sup_m \left[\frac{f(m,m,\cdots,m)}{m^d}\right]$$

b) se $f(\ell_1,\cdots,\ell_k,\cdots,\ell_d) \leq f(\ell_1,\cdots,a_k,\cdots,\ell_d) + f(\ell_1,\cdots,b_k,\cdots,\ell_d)$ $\forall\, k=1,\cdots,d$ onde $\ell_k = a_k + b_k$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n,n,\cdots,n)}{n^d} = \inf_m \left[\frac{f(m,m,\cdots,m)}{m^d}\right]$$

Prova de a):

Fixados $n, m \in I\!N$ onde $n = k_n m + r_n$ com $k_n \in I\!N$ e $r_n = 0, 1, \cdots, n-1$, temos:

$$\frac{f(n, n, \cdots, n)}{n^d} = \frac{f(k_n m + r_n, k_n m + r_n, \cdots, k_n m + r_n)}{(k_n m + r_n)^d} \geq$$

$$\geq \frac{k_n f(m, k_n m + r_n, \cdots, k_n m + r_n) + f(r_n, k_n m + r_n, \cdots, k_n m + r_n)}{(k_n m + r_n)^d}$$

$$\geq \frac{k_n^d f(m, m, ., m) + k_n^{d-1}[f(r_n, m, ., m) + ... + f(m, m, ., r_n)] + ... + f(r_n, r_n, ., r_n)}{(k_n m + r_n)^d}$$

Tomando o $\liminf_n$ nos dois lados da desigualdade acima, teremos:

$$\liminf_n \frac{f(n, n, \cdots, n)}{n^d} \geq \frac{f(m, m, \cdots, m)}{m^d} \qquad \forall\, m$$

logo

$$\liminf_n \frac{f(n, n, \cdots, n)}{n^d} \geq \sup_m \left[\frac{f(m, m, \cdots, m)}{m^d}\right]$$

e como

$$\limsup_n \frac{f(n, n, \cdots, n)}{n^d} \leq \sup_m \left[\frac{f(m, m, \cdots, m)}{m^d}\right]$$

temos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n, n, \cdots, n)}{n^d} = \sup_m \left[\frac{f(m, m, \cdots, m)}{m^d}\right]$$

Prova de b): Análoga à prova de a).

3.5 DEFINIÇÃO Relação Harris-F.K.G.

Seja a função $\Gamma_\omega(i) : \Omega \times \mathbb{Z}^d \to I\!R$.

Dizemos que ela satisfaz a relação Harris-F.K.G. para a medida P se :

$\forall\, n$, $\forall\, f, g : I\!R^n \to I\!R$ não decrescentes em relação a ω, limitadas $\forall\, x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{E}_P[f(\Gamma_\omega(x_1),...,\Gamma_\omega(x_n)) \times g(\Gamma_\omega(x_1),...,\Gamma_\omega(x_n))]$$

$$\geq \mathbb{E}_P[f(\Gamma_\omega(x_1),...,\Gamma_\omega(x_n))] \times \mathbb{E}_P[g(\Gamma_\omega(x_1),...,\Gamma_\omega(x_n))].$$

3.6 TEOREMA (Lebowitz & Schonmann [9])

Sejam

$\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de cubos em $\mathbb{Z}^d$ tais que $\Lambda_n \xrightarrow[n]{} \mathbb{Z}^d$,

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de variáveis aleatórias da forma

$$X_n(\omega) = \frac{1}{\mid \Lambda_n \mid} \sum_{i\in\Lambda_n} \Gamma_\omega(i)$$

onde $\Gamma_\omega(i)$ satisfaz a relação Harris-F.K.G para a medida P

e P é uma medida de probabilidade sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ invariante por translação.

Então, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

a)
$$\frac{-\log P(\{\omega : X_n(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_+(x)$$

onde $\lambda_+(x)$ é função real, não negativa, convexa e não decrescente.

b)
$$\frac{-\log P(\{\omega : X_n(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_-(x)$$

onde $\lambda_-(x)$ é função real, não negativa, convexa e não crescente.

Prova de a):

Seja $\sum = \sum_1 \cup \sum_2$ regiões de $\mathbb{Z}^d$ finitas com $\sum_1 \cap \sum_2 = \emptyset$

definimos : $X_\Sigma = \frac{1}{\mid \Sigma \mid} \sum_{i\in\Sigma} \Gamma_\omega(i)$

Então, como as funções $\Gamma_\omega(i)$ satisfazem a relação de Harris-F.K.G. temos :

$$P(\{\omega : X_\Sigma(\omega) \geq x\}) \geq P(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq x\} \cap \{\omega : X_{\Sigma_2}(\omega) \geq x\})$$
$$\geq P(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq x\})P(\{\omega : X_{\Sigma_2}(\omega) \geq x\})$$

(A relação Harris-F.K.G. nesta última desigualdade está sendo colocada da seguinte forma :

$f(\Gamma_\omega(x_1), \cdots, \Gamma_\omega(x_n)) = 1_{\{\omega : \frac{1}{|\Sigma_1|} \sum_{x_i \in \Sigma_1} \Gamma_\omega(x_i) \geq x\}}$

$g(\Gamma_\omega(x_1), \cdots, \Gamma_\omega(x_n)) = 1_{\{\omega : \frac{1}{|\Sigma_2|} \sum_{x_i \in \Sigma_2} \Gamma_\omega(x_i) \geq x\}}$

onde $\Sigma = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e usamos depois o fato de que se $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}(1_A) = P(A)$.)

Da proposição 3.2 e da invariância por translação de P temos :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-\log P(\{\omega : X_n(\omega) \geq x\})}{|\Lambda_n|} \quad \text{existe} \quad (\stackrel{def}{=} \lambda_+(x)).$$

A função $\lambda_+(x)$ é claramente não negativa já que:

$$0 \leq P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\}) \leq 1 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$$

e é não decrescente pois, dado $x \leq y \in \mathbb{R}$ temos que:

$$P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\}) \geq P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}(\omega) \geq y\}).$$

Convexidade de $\lambda_+(x)$:

$$\lambda_+(x) \text{é convexa} \Leftrightarrow \forall \; x, y \in [0,1] \text{ e } \alpha \in [0,1]$$

$$\lambda_+(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\lambda_+(x) + (1-\alpha)\lambda_+(y)$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$,

para 2^d caixas de lado n, $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_{2^d}$ em $\mathbb{Z}^d$ tais que $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Sigma_i = \Sigma$ caixa de lado $2n$ em $\mathbb{Z}^d$, temos:

$$P(\{\omega : X_\Sigma(\omega) \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\}) \geq$$

$$\geq P(\{\omega : X_{\Sigma_i}(\omega) \geq x \quad i = 1, ., 2^{d-1}\} \cap \{\omega : X_{\Sigma_i}(\omega) \geq y \quad i = 2^{d-1}+1, ., 2^d\})$$

$$\geq \prod_{i=1}^{2^{d-1}} P\left(\{\omega : X_{\Sigma_i}(\omega) \geq x\}\right) \prod_{i=2^{d-1}+1}^{2^d} P\left(\{\omega : X_{\Sigma_i}(\omega) \geq y\}\right)$$

$$= \left[P\left(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq x\}\right)\right]^{2^{d-1}} \left[P\left(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq y\}\right)\right]^{2^{d-1}}$$

Assim

$$\frac{-\log P\left(\{\omega : X_\Sigma(\omega) \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\}\right)}{\mid \Sigma \mid} \leq$$

$$\leq -\frac{2^{d-1} \log P\left(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq x\}\right) + 2^{d-1} \log P\left(\{\omega : X_{\Sigma_1}(\omega) \geq y\}\right)}{\mid \Sigma \mid}$$

ou $\lambda_-\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\lambda_+(x) + \frac{1}{2}\lambda_+(y)$ quando $n \to \infty$

Supondo que se $x < y \quad x, y \in [0,1] \quad p, q \in I\!N \quad 0 \leq p \leq 2^q$

vale :

$$\lambda_+\left(\frac{p}{2^q}x + \frac{2^q - p}{2^q}y\right) \leq \frac{p}{2^q}\lambda_+(x) + \frac{2^q - p}{2^q}\lambda_+(y)$$

vamos provar que: se $x < y \quad x, y \in [0,1] \quad p, q \in I\!N \quad 0 \leq p \leq 2^{q+1}$

vale:

$$\lambda_+\left(\frac{p}{2^{q+1}}x + \frac{2^{q+1} - p}{2^{q+1}}y\right) \leq \frac{p}{2^{q+1}}\lambda_+(x) + \frac{2^{q+1} - p}{2^{q+1}}\lambda_+(y)$$

(Observe que se $p = 2n$, $n \in I\!N$ e $n \leq 2^q$, a desigualdade vale por hipótese.)

Agora

$$\lambda_+\left(\frac{2p-1}{2^{q+1}}x + \frac{2^{q+1} - (2p-1)}{2^{q+1}}y\right) =$$

$$= \lambda_+ \left(\frac{1}{2} \left[\frac{p-1}{2^q} x + \frac{2^q - (p-1)}{2^q} y \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{p}{2^q} x + \frac{2^q - p}{2^q} y \right] \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \lambda_+ \left(\frac{p-1}{2^q} x + \frac{2^q - (p-1)}{2^q} y \right) + \frac{1}{2} \lambda_+ \left(\frac{p}{2^q} x + \frac{2^q - p}{2^q} y \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\frac{p-1}{2^q} \lambda_+(x) + \frac{2^q - (p-1)}{2^q} \lambda_+(y) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{p}{2^q} \lambda_+(x) + \frac{2^q - p}{2^q} \lambda_+(y) \right]$$

$$= \frac{2p-1}{2^{q+1}} \lambda_+(x) + \frac{2^{q+1} - (2p-1)}{2^{q+1}} \lambda_+(y)$$

Seja $\alpha \in [0,1]$, $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de racionais, com

$(\alpha_n = p_n/2^{q_n} \quad p_n, q_n \in I\!N \quad 0 \leq p_n \leq 2^{q_n}$ tal que $\alpha_n \uparrow \alpha$ e $x < y)$

$$\lambda_+(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \lambda_+(\alpha_n x + (1-\alpha_n)y)$$

pois $\lambda_+(x)$ é não decrescente.

Por outro lado

$$\lambda_+(\alpha_n x + (1-\alpha_r)y) \leq \alpha_n \lambda_+(x) + (1-\alpha_n)\lambda_+(y)$$

e $$\lim_{n \to \infty} \{\alpha_n \lambda_+(x) + (1-\alpha_n)\lambda_+(y)\} = \alpha \lambda_+(x) + (1-\alpha)\lambda_+(y)$$

logo

$$\lambda_+(\alpha x + (1-\alpha)(y)) \leq \alpha \lambda_+(x) + (1-\alpha)\lambda_+(y)$$

Se $x < y \in [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$

Prova de b): análoga a prova de a).

CAPÍTULO 4

ESTIMATIVAS DE GRANDES DESVIOS PARA O NÚMERO DE AGLOMERADOS POR VÉRTICE

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos estudar a velocidade das convergências apresentadas no capítulo 2. Estaremos sempre interessados em apresentar resultados de grandes desvios para $p \in]0,1[$. Os casos $p \in \{0,1\}$ são triviais. Quando $p = 0$, Ω tem uma única configuração com probabilidade positiva, que é aquela que apresenta todos os elos fechados. Neste caso teremos que as variáveis aleatórias $X^\circ_{\Lambda_n}(\omega) \geq |\Lambda_{n-1}|/|\Lambda_n|, \quad \forall\, n \in I\!N$ com $\circ = i, \infty, \star, l, f$. No caso $p = 1$ a configuração que possui probabilidade positiva é aquela em que todos os elos estão abertos, onde $X^\circ_{\Lambda_n}(\omega) \leq |\Lambda_n|^{-1}, \quad \forall\, n \in I\!N$. Em linhas gerais mostraremos um resultado similar ao encontrado no teorema 3.6, para as variáveis aleatórias $X^\circ_{\Lambda_n}(\omega)$.

Teremos que aquelas convergências independem do que está estabelecido para a borda da caixa Λ_n. Apresentaremos alguns comentários para $x \in \{0,1\}$ e $p \in \{0,1\}$ e iremos concluir que nestes casos os limites são diferentes para as várias definições. Por último apresentaremos um resultado que combina as duas funções limites $\lambda_-(x)$ e $\lambda_+(x)$ onde veremos que o que acontece quando $x \in \{0,1\}$ não é importante.

4.2 PROPOSIÇÃO

Seja a variável aleatória $X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega)$. Então $\forall\ x \in]0,1[$, $\forall\ p \in]0,1[$ temos

a)

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_+(x)$$

onde $\lambda_+(x)$ é função real, não-negativa, convexa e não decrescente com $\lambda_+(0) = 0$ e $\lambda + (1) < \infty$.

b)

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_-(x)$$

onde $\lambda_-(x)$ é função real, não negativa, convexa e não crescente com $\lambda_-(1) = 0$ e $\lambda_-(x)$ é limitada.

Prova de a):

A variável aleatória $\Gamma^{\infty}_{\omega}(x)$ satisfaz a relação Harris-F.K.G. pois naquelas condições podemos tomar $f(\Gamma^{\infty}_{\omega}(x_1), \cdots, \Gamma^{\infty}_{\omega}(x_n)) = -X_1(\omega)$ e $g(\Gamma^{\infty}_{\omega}(x_1), \cdots, \Gamma^{\infty}_{\omega}(x_n)) = -X_2(\omega)$ onde $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ são funções não decrescentes em ω. Imediatamente usamos a proposição 3.3 e feito isto podemos aplicar diretamente o teorema 3.6 para mostrar que $\lambda_+(x)$ é não negativa, convexa e não decrescente.

Sobre $\lambda_+(0)$:

$$\lambda_+(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq 0\})}{\mid \Lambda_n \mid} = \inf_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq 0\})}{\mid \Lambda_n \mid}$$

pois $-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\}$ é uma função sub-aditiva (proposição 3.4).

e como $P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq 0\}) = 1 \quad \forall\, n$ temos que $\lambda_+(0) = 0$.

Sobre $\lambda_+(1)$:

$P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq 1\}) = P_p(\bigcap_{i\in\Lambda_n}\{\omega : \Gamma^{\infty}_{\omega}(i) = 1\}) \geq \prod_{i\in\Lambda_n} P_p(\{\omega : \Gamma^{\infty}_{\omega}(i) = 1\})$

$= \left[P_p(\{\omega : \Gamma^{\infty}_{\omega}(0) = 1\})\right]^{|\Lambda_n|} = \left[(1-p)^{2d}\right]^{|\Lambda_n|} > 0$ pois $p < 1$.

$$\Rightarrow \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq 1\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq -2d\log(1-p),\ \forall\, n \in I\!N$$

logo $\lambda_+(1) < \infty$.

Observe aqui que $\lambda_+(x)$ é limitada já que $\lambda_+(x)$ é não decrescente.

Prova de b):

Aqui também podemos aplicar diretamente o teorema 3.6 para mostrar que $\lambda_-(x)$ é não negativa, convexa e não crescente.

Sobre $\lambda_-(1)$:

$$\lambda_-(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq 1\})}{\mid \Lambda_n \mid} = \inf_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq 1\})}{\mid \Lambda_n \mid}$$

pois $-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})$ é uma função sub-aditiva (teorema 3.4).

e como $P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq 1\}) = 1 \quad \forall\, n$ temos que $\lambda_-(1) = 0$.

Sobre $\lambda_-(\epsilon) \quad \epsilon > 0$

Observe que $\forall\ \epsilon\ \exists\ n(\epsilon)$ tal que $\forall\ n > n(\epsilon)$

$$P_p(\{\omega : X^l_{\Lambda_n}(\omega) \leq \epsilon\}) \geq P_p(\{\omega : X^l_{\Lambda_n}(\omega) = |\Lambda_n|^{-1}\})$$

onde $n(\epsilon)$ é tal que $\epsilon > |\Lambda_{n(\epsilon)}|$

e por sua vez

$$P_p(\{\omega : X^l_{\Lambda_n}(\omega) = |\Lambda_n|^{-1}\}) \geq p^{2d|\Lambda_n|}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^l_{\Lambda_n}(\omega) = |\Lambda|^{-1}\})}{|\ \Lambda_n\ |} \leq -2d\log p$$

ou seja $\lambda_-(x)$ é função limitada em $]0,1[$.

4.3 PROPOSIÇÃO

Seja a variável aleatória $X^\star_{\Lambda_n}(n)$. Então $\forall\ x \in\ ]0,1[,\ \forall\ p \in\ ]0,1[$ vale:

a)

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^\star_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{|\ \Lambda_n\ |} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_-(x)$$

b)

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^\star_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{|\ \Lambda_n\ |} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_+(x)$$

Prova de a):

Da relação $X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \leq X^\star_{\Lambda_n}(\omega) \leq X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|}$

temos:

$$\frac{\log P_p\left(\left\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \leq x\right\}\right)}{|\ \Lambda_n\ |} \leq \frac{\log P_p(\{\omega : X^\star_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{|\ \Lambda_n\ |}$$

$$\leq \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \qquad (D1)$$

mas $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0(\epsilon)$ tal que $\frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \leq \epsilon \quad \forall\, n \geq n_0(\epsilon)$.

$$\Rightarrow \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq (x-\epsilon)\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq \frac{\log P_p\left(\left\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \leq x\right\}\right)}{\mid \Lambda_n \mid}$$

Assim, adicionando a desigualdade acima em D1 e tomando o $\liminf_{n\to\infty}$ e o $\limsup_{n\to\infty}$ temos:

$$-\lambda_-(x-\epsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq -\lambda_-(x)$$

Do fato que $\lambda_-(x)$ é convexa em $]0,1[$ temos a sua continuidade em $]0,1[$ (para provas veja Roberts & Varberg [12]). Disto mais da arbitrariedade de ϵ, obtemos :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} = -\lambda_-(x)$$

concluindo assim a prova.

Prova de b):

Da relação $X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|}$

temos:

$$\frac{\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid}$$

$$\leq \frac{\log P_p\left(\left\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \geq x\right\}\right)}{\mid \Lambda_n \mid} \qquad (D2)$$

e novamente $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0(\epsilon)$ tal que $\frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \leq \epsilon \quad \forall\ n \geq n_0(\epsilon)$. Logo

$$\frac{\log P_p\big(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) + \frac{|\delta(\Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \geq x\}\big)}{\mid \Lambda_n \mid} \leq \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq (x - \epsilon)\})}{\mid \Lambda_n \mid}.$$

Do mesmo modo como fizemos em a), adicionamos esta igualdade a D2 e tomamos o $\liminf_{n\to\infty}$ e o $\limsup_{n\to\infty}$, obtendo

$$-\lambda_+(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \leq -\lambda_+(x - \epsilon).$$

Como a relação vale para todo $\epsilon > 0$ e a função $\lambda_+(x)$ é continua no intervalo $]0,1[$ (lembre-se de que $\lambda_+(x)$ é convexa em $]0,1[$), obtemos :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log P_p(\{\omega : X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} = -\lambda_+(x)$$

concluindo a prova.

4.4 PROPOSIÇÃO

Sejam as variáveis aleatórias $X^{\ell}_{\Lambda_n}, X^{f}_{\Lambda_n}, X^{i}_{\Lambda_n}$, então $\forall\ x \in\ ]0,1[,\ \forall\ p \in\ ]0,1[$, temos:

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_-(x)$$

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid} \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_+(x)$$

onde $\circ = \ell, f, b$

Prova: basta lembrar que:

(i) $N^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) + \mid \delta(\Lambda_n) \mid$

(ii) $N^{i}_{\Lambda_n}(\omega) + 1 \leq N^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{i}_{\Lambda_n}(\omega) + \mid \delta(\Lambda_n) \mid$

(iii) $N^{f}_{\Lambda_n}(\omega) - \mid \delta(\Lambda_n) \mid \leq N^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \leq N^{f}_{\Lambda_n}(\omega)$

e proceder analogamente a proposição 4.4.

A seguir faremos alguns comentários sobre os casos em que $p \in \{0,1\}$ e $x \in \{0,1\}$.

Observe que no caso $p = 1$ temos $\kappa(p) = 0$, pois em toda a rede $\mathbb{Z}^d$ existe apenas um aglomerado (esta é a única configuração com probabilidade positiva). Desta forma $X^{i}_{\Lambda_n}(\omega) = X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) = X^{\star}_{\Lambda_n}(\omega) = 0$ enquanto $X^{l}_{\Lambda_n}(\omega) = X^{f}_{\Lambda_n}(\omega) = |\Lambda_n|^{-1}$.

Se definirmos :

$$\lambda^{\circ}_{-}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})}{\mid \Lambda_n \mid}$$

$$\lambda^{\circ}_{+}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})}{\mid \Lambda_n \mid}$$

teremos :

(i) $\lambda^{\circ}_{-}(0) = 0$ se $\circ = i, \infty, \star$ e $\lambda^{\circ}_{-}(0) = \infty$ se $\circ = l, f$ enquanto $\lambda^{\circ}_{-}(x) = 0$ se $x \in]0,1]$ e $\circ = i, \infty, \star, l, f$.

(ii) $\lambda^{\circ}_{+}(x) = \infty$ se $\circ = i, \infty, \star, l, f$ e $x \in]0,1]$ enquanto $\lambda^{\circ}_{+}(0) = 0$ se $\circ = i, \infty, \star, l, f$.

No caso $p = 0$ temos que $\kappa(p) = 1$ já que o único aglomerado que possui probabilidade positiva é aquele em que todos os elos estão fechados. Assim, temos cada ponto de $\mathbb{Z}^d$ sendo seu próprio aglomerado, logo $X^{i}_{\Lambda_n}(\omega) = |\Lambda_{n-1}|/|\Lambda_n|$ e $X^{\circ}_{\Lambda_n} = 1$ se $\circ = \infty, \star, l, f$.

Neste caso teremos :

(i) $\lambda^{\circ}_{-}(x) = \infty$ se $x \in [0,1[$ enquanto $\lambda^{\circ}_{-}(1) = 0$ se $\circ = i, \infty, \star, l, f$.

(ii) $\lambda_+^\circ(x) = 0$ se $\circ = i, \infty, \star, l, f$ e $x \in [0,1[$ enquanto $\lambda_+^i(1) = \infty$ e $\lambda_+^\circ(1) = 0$ se $\circ = \infty, \star, l, f$.

No caso $x = 0$ já vimos que $\lambda_+^\circ(0) = 0 \quad \circ = i, \infty, \star, l, f$. Sobre $\lambda_-^\circ(x)$ temos

$$P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}^i(\omega) \leq 0\}) = (1-p)^{2d|\Lambda_n|} \Rightarrow \lambda_-^i(0) \leq -2d(1-p)$$

por outro lado

$$P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}^\infty(\omega) \leq 0\}) = P_p(\bigcap_{i \in \Lambda_n} \{\omega : \Gamma_\omega^\infty(i) = 0\}) \geq$$

$$\geq \prod_{i \in \Lambda_n} P_p(\{\omega : \Gamma_\omega^\infty(i) = 0\}) = [\theta(p)]^{|\Lambda_n|}$$

$$\Rightarrow \lambda_-^\infty(0) \leq -\log \theta(p) < \infty \quad \text{se} \quad p > p_c.$$

enquanto $P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}^\infty(\omega) \leq 0\}) \leq P_p(\{\omega : \Gamma_\omega^\infty(0) = 0\}) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_-^\infty(0) = \infty \text{ se } p \leq p_c \quad \Rightarrow \quad \lambda_-^\circ(0) = \infty \text{ se } \circ = \star, l, f.$$

No caso $x = 1$ já vimos que $\lambda_-^\circ(1) = 0 \quad \circ = i, \infty, \star, l, f$

Sobre $\lambda_+^\circ(x)$ temos :

$P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}^i(\omega) \geq 1\}) = 0$ pois $X_{\Lambda_n}^i(\omega) \in \{0, |\Lambda_n|^{-1}, 2|\Lambda_n|^{-1}, \cdots, |\Lambda_{n-1}|/|\Lambda_n|\}$

$\Rightarrow \lambda_+^i(1) = \infty$

Por outro lado

$$P_p(\{\omega : X_{\Lambda_n}^\infty(\omega) \geq 1\}) \geq P_p(\bigcap_{i \in \Lambda_n} \{\omega : \Gamma_\omega^\infty(i) = 1\}) \geq$$

$$\geq \prod_{i \in \Lambda_n} P_p(\{\omega : \Gamma_\omega^\infty(i) = 1\}) = (1-p)^{2d|\Lambda_n|}$$

$$\Rightarrow \lambda_+^{\infty}(1) \leq -2d\log(1-p) \Rightarrow \lambda_+^{\circ}(1) < \infty \text{ se } \circ = \star, l, f$$

No capítulo 2, através do teorema ergódico de Birkhof e do teorema da convergência dominada (Breiman [ ]) obtivemos a convergência das variáveis $X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega)$ para a função $\kappa(p)$ $P_p - q.c.$ e em $\mathcal{L}_1$. As proposições 4.3, 4.4 e 4.5 nos garantem um decaimento exponencial de $P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \leq x\})$ e de $P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \geq x\})$ da ordem do volume da caixa $|\Lambda_n|$ para todo $x \in]0,1[$. Uma questão natural agora é estudar de forma mais global estas estimativas. Vamos mostrar que elas se mantém para $P_p(\{\omega : X^{\circ}_{\Lambda_n}(\omega) \in [a,b]\})$ $\forall\, a,b$ $0 \leq a < b \leq 1$. Com esta motivação, apresentamos o

4.5 TEOREMA

Seja $\lambda(x) = \max\{\lambda_-(x), \lambda_+(x)\}$. Então

$$\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = \kappa(p)$$

Prova :

$(\Leftarrow)$ se $x = \kappa(p)$

Observe primeiro que :

$$\lambda_+(\kappa(p) - \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq \kappa(p) - \epsilon\})}{|\Lambda_n|} = 0, \ \forall\, \epsilon > 0$$

pois, como $X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \stackrel{P_p - q.c.}{\longrightarrow} \kappa(p)$, temos que

$$P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq \kappa(p) - \epsilon\}) \stackrel{P_p - q.c.}{\longrightarrow} 1$$

por outro lado, temos :

$$\lambda_-(\kappa(p) + \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq \kappa(p) + \epsilon\})}{|\Lambda_n|} = 0 \ \forall\, \epsilon > 0$$

pelo mesmo motivo.

Da continuidade de $\lambda_+(x)$ e de $\lambda_-(x)$ e do fato de que $\lambda_+(\kappa(p)-\epsilon) = \lambda_-(\kappa(p)+\epsilon) = 0 \ \forall\ \epsilon > 0$, temos que $\lambda_+(\kappa(p)) = \lambda_-(\kappa(p)) = 0$ logo $\lambda(\kappa(p)) = 0$

($\Rightarrow$) É suficiente mostrar que, para $\epsilon > 0$, vale:

a) $P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \geq \kappa(p)+\epsilon\}) \leq \exp^{-\gamma_+(\epsilon)|\Lambda_n|}$ onde $\gamma_+(\epsilon) > 0, \ \forall\ n \in I\!N$,

b)$P_p(\{\omega : X^{i}_{\Lambda_n}(\omega) \leq \kappa(p)-\epsilon\}) \leq \exp^{-\gamma_-(\epsilon)|\Lambda_n|}$ onde , $\gamma_-(\epsilon) > 0, \forall\ n \in I\!N$.

pois desta forma $\dfrac{-\log P_p(\{\omega : X^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \geq \kappa(p)+\epsilon\})}{\mid \Lambda_n \mid} \geq \gamma_+(\epsilon) > 0$

logo, tomando $\lim_{n\to\infty}$ temos

$$\lambda(\kappa(p)+\epsilon) \geq \lambda_+(\kappa(p)+\epsilon) \geq \gamma_+(\epsilon) > 0$$

do mesmo modo que $\dfrac{-\log P_p(\{\omega : X^{i}_{\Lambda_n}(\omega) \leq \kappa(p)-\epsilon\})}{\mid \Lambda_n \mid} \geq \gamma_-(\epsilon) > 0$

e, tomando $\lim_{n\to\infty}$ temos

$$\lambda(\kappa(p)-\epsilon) \geq \lambda_-(\kappa(p)-\epsilon) \geq \gamma_-(\epsilon) > 0.$$

Prova de a):

Seja $y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{Z}^d, N \in I\!N$ fixado, suficientemente grande.

$$\Omega y = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \quad y_j N \leq x_j \leq (y_j+1)N \quad j = 1, \cdots, d\}$$

Observe que isto é equivalente a dividir $\mathbb{Z}^d$ em grandes caixas de tamanho $N \times N \times \cdots \times N$ e associar a cada uma delas um ponto do próprio $\mathbb{Z}^d$.

Seja Y^{ℓ}_y: número de aglomerados livres em Ωy.

$$Y^{\ell}_y(\omega) = \sum_{x \in \Omega y} \frac{1}{\mid \{i \in \Omega y : x \underset{\Omega y}{\overset{\omega}{-}} i\} \mid}$$

Observando que $\forall\ n = kN,\ \ k \in\ I\!N$

$$N^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \le \sum_{y:\Omega_y \subset \Lambda_n} Y^{\ell}_y(\omega)$$

temos

$$P_p(\{\omega : X^{\ell}_{\Lambda_n}(\omega) \ge \kappa(p) + \epsilon\}) \le P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega_y \subset \Lambda_n} Y^{\ell}_y(\omega)}{\mid \Lambda_n \mid} \ge \kappa(p) + \epsilon\}\big) =$$

$$= P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega_y \subset \Lambda_n} Y^{\ell}_y(\omega)}{\mid \Lambda_n \mid / \mid \Omega_0 \mid} \ge \kappa(p) \mid \Omega_0 \mid + \epsilon \mid \Omega_0 \mid\}\big) = (I)$$

e $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N(\epsilon)$ tal que $\ \forall\ N > N(\epsilon)$ temos que : $\mid \kappa(p) - \frac{I\!E_p[Y^{\ell}_0(\omega)]}{|\Omega_0|} \mid \le \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow I\!E_p[Y^{\ell}_0(\omega)] - \frac{\epsilon}{2} \mid \Omega_0 \mid \le\ \kappa(p) \mid \Omega_0 \mid \le\ I\!E_p[Y^{\ell}_0(\omega)] + \frac{\epsilon}{2} \mid \Omega_0 \mid$$

logo

$$(I) \le P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega_y \subset \Lambda_n} Y^{\ell}_y(\omega)}{\mid \Lambda_n \mid / \mid \Omega_0 \mid} \ge I\!E[Y^{\ell}_0(\omega)] + \frac{\epsilon}{2} \mid \Omega_0 \mid\}\big) \le$$

$$\le \exp^{-\gamma(\epsilon)\frac{|\Lambda_n|}{|\Lambda_0|}} = \exp^{-\gamma_+(\epsilon)|\Lambda_n|}$$

onde a última desigualdade é garantida pelo teorema de Cramèr-Chernoff já que $\{Y^{\ell}_y\}_{y \in \mathbb{Z}^d}$ é uma sequências de variáveis aleatórias independentes pela independência entre os elos das caixas Ω_y e onde $-\gamma_+(\epsilon) > 0$. É suficiente provar a desigualdade para a subsequência $\{kN\}_{k \in I\!N}$ pois $\lambda_+(\kappa(p) + \epsilon)$ está bem definida.

Prova de b):

Seja P^i_y : número de aglomerados internos a Ωy.

$$P_y^i(\omega) = \sum_{\substack{x \in \Omega y \\ x \not\leftrightarrow \delta(\Omega y)}} \frac{1}{|\{i \in \Omega y : x \overset{\omega}{\underset{\Omega y}{\leftrightarrow}} i\}|}$$

Observando que $\forall\, n = kN,\ k \in N$:

$$N^i_{\Lambda_n}(\omega) \geq \sum_{y:\Omega y \subset \Lambda_n} P_y^i(\omega)$$

temos

$$P_p(\{\omega : X^i_{\Lambda_n}(\omega) \leq \kappa(p) - \frac{\epsilon}{2}\}) \leq P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega y \subset \Lambda_n} P_y^i(\omega)}{|\Lambda_n|} \leq \kappa(p) - \frac{\epsilon}{2}\}\big) =$$

$$= P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega y \subset \Lambda_n} P_y^i(\omega)}{|\Lambda_n| / |\Omega_0|} \leq \kappa(p) \,|\, \Omega_0 \,| - \frac{\epsilon}{2} \,|\, \Omega_0 \,|\}\big) = (II)$$

e novamente $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon)$ tal que $\forall\, N > N(\epsilon)$ temos que : $|\, \kappa(p) - \frac{\mathbb{E}_p[P_y^i(\omega)]}{|\Omega_0|} \,| \leq \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_p[P_y^i(\omega)] - \frac{\epsilon}{2} \,|\, \Omega_0 \,| \leq \kappa(p) \,|\, \Omega_0 \,| \leq \mathbb{E}[P_y^i(\omega)] + \frac{\epsilon}{2} \,|\, \Omega_0 \,|$$

logo

$$(II) \leq P_p\big(\{\omega : \frac{\sum_{y:\Omega y \subset \Lambda_n} P_y^i(\omega)}{|\Lambda_n| / |\Omega_0|} \leq \mathbb{E}[P_y^i(\omega)] + \epsilon \,|\, \Omega_0 \,|\}\big) \leq$$

$$\leq \exp^{-\gamma(\epsilon)\frac{|\Lambda_n|}{|\Lambda_0|}} = \exp^{-\gamma_-(\epsilon)|\Lambda_n|}$$

onde a independência entre os elos das caixas Ω_y implicou na independência da sequência de varivéis aleatórias $\{P_y^i\}_{y \in \mathbb{Z}^d}$ e aplicamos novamente o teorema de Cramèr-Chernoff para garantir a última desigualdade sendo $\gamma_-(\epsilon) > 0$. Da mesma forma que em a) basta mostra a desigualdade para a subsequência $\{kN\}_{k \in \mathbb{N}}$ pois $\lambda_-(\kappa(p) - \epsilon)$ está bem definida.

4.6 TEOREMA

Seja $\lambda(x) = \max\{\lambda_-(x), \lambda_+(x)\}$. Então

a) $\lambda : [0,1] \to I\!R^+$ é convexa.

b) $0 \leq a < b \leq 1$

$$\lim_{\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d} \frac{-\log P_p(\{\omega : X^\circ_{\Lambda_n}(\omega) \in [a,b]\})}{|\Lambda_n|} = \inf_{a \leq x \leq b} \lambda(x)$$

onde $\circ = \ell, f, \star, i, \infty$

Prova de a):

$\lambda(x)$ é convexa por ser o máximo de duas funções convexas.

$$\text{Sejam} \quad x < y \in [0,1] \quad \text{e} \quad \alpha \in [0,1]$$

$$A = \lambda_-(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\lambda_-(x) + (1-\alpha)\lambda_-(y) = C$$

$$B = \lambda_+(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\lambda_+(x) + (1-\alpha)\lambda_+(y) = D$$

$$\lambda(\alpha x + (1-\alpha)y) = \max(A, B) \leq \max(C, D) \leq$$

$$\leq \alpha \max(\lambda_-(x), \lambda_+(x)) + (1-\alpha)\max(\lambda_-(y), \lambda_-(x))$$

logo

$$\lambda(\alpha x + (1-\alpha)y)) \leq \alpha\lambda(x) + (1-\alpha)\lambda(y)$$

sendo $\lambda(x)$ função convexa.

Prova de b):

Vamos dividir a demonstração em três partes.

(i) $a < \kappa(p) < b$:

Podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que $[\kappa(p) - \epsilon, \kappa(p) + \epsilon] \subset [a, b]$. Desta forma

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \in [a,b]\})}{|\Lambda_n|} \leq \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \in [\kappa(p)-\epsilon, \kappa(p)+\epsilon]\})}{|\Lambda_n|} \to 0$$

pois $P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \in [\kappa(p)-\epsilon, \kappa(p)+\epsilon]\}) \longrightarrow 1$, quando $\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d$.

(ii) $b \leq \kappa(p)$:

Logo $\lambda(b) = \lambda_-(b)$ e $\lambda(a) = \lambda_-(a)$. Observe que

$$-\frac{\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \in [a,b]\})}{|\Lambda_n|} =$$

$$= \frac{-\log P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq b\})}{|\Lambda_n|} + \frac{-\log\left[1 - \frac{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) < a\})}{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq b\})}\right]}{|\Lambda_n|} = (I)$$

mas

$$0 \leq \frac{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) < a\})}{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq b\})} \leq \frac{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq a\})}{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq b\})} \leq$$

$$\leq \frac{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_-(a+\epsilon)}}{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_-(b-\epsilon)}} = \exp^{-|\Lambda_n|(\lambda_-(a+\epsilon) - \lambda_-(b-\epsilon))} = (II)$$

onde a última desigualdade vale para n suficientemente grande, já que:

$$\frac{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq a\})}{P_p(\{\omega : X^{\infty}_{\Lambda_n}(\omega) \leq b\})} \approx \frac{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_-(a)}}{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_-(b)}}$$

e $f(n,x) \approx g(n,x)$ significa que $\frac{1}{n}\log f(n,x) - \frac{1}{n}\log g(n,x) \longrightarrow 0$ com $n \to \infty$.

A convexidade da função $\lambda_-(x)$ junto com o fato de que $\lambda_-(x) > 0$ se $x < \kappa(p)$, nos diz que ela é contínua e estritamente decrescente no intervalo $[0, \kappa(p)]$ e isto nos garante que $\exists\ \epsilon$ tal que

$$\lambda_-(a+\epsilon) > \lambda_-(b-\epsilon)$$

Assim $\quad (II) \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} 0 \quad \Rightarrow \quad (I) \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_-(b)$

$$\text{onde } \lambda_-(b) = \inf_{a \le x \le b} \lambda_-(x) = \inf_{a \le x \le b} \lambda(x).$$

(iii) $a \geq \kappa(p)$

Logo $\lambda(a) = \lambda_+(a) \quad$ e $\quad \lambda(b) = \lambda_+(b)$. Observe que

$$\frac{-\log P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \in [a,b]\})}{\mid \Lambda_n \mid} =$$

$$= \frac{-\log P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \geq a\})}{\mid \Lambda_n \mid} + \frac{-\log\left[1 - \frac{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) > b\})}{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \geq a\})}\right]}{\mid \Lambda_n \mid} = (III)$$

mas

$$0 \leq \frac{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) > b\})}{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \geq a\})} \leq \frac{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \geq b\})}{P_p(\{\omega : X^\infty_{\Lambda_n}(\omega) \geq a\})}$$

$$\leq \frac{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_+(b-\epsilon)}}{\exp^{-|\Lambda_n|\lambda_+(a+\epsilon)}} = \exp^{-|\Lambda_n|(\lambda_+(b-\epsilon)-\lambda_+(a+\epsilon))} = (IV)$$

onde a desigualdade vale para n suficientemente grande e a convergência deve-se ao fato de se $\lambda(x) > 0$ e $x \geq \kappa(p)$, pela convexidade, temos que $\lambda(x)$ é contínua e estritamente crescente em $[\kappa(p), 1]$ devendo existir $\epsilon > 0$ tal que:

$$\lambda_+(b-\epsilon) > \lambda_+(a+\epsilon)$$

logo $(IV) \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} 0 \quad \Rightarrow \quad (III) \xrightarrow[\Lambda_n \to \mathbb{Z}^d]{} \lambda_+(a)$

$$\text{e} \quad \lambda_+(a) = \inf_{a \le x \le b} \lambda_+(x) = \inf_{a \le x \le b} \lambda(x).$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aizenman, M.: *General results in percolation theory*, Proceedings of Taniguchi Workshop and Symposium on Probabilistic Methods in Mathematical Physics, ed. N. Ikeda, Kataka and Kyoto (1987)

[2] Billingsley, P.: *Probability and measure*, Sec. ed. New York: John Wiley (1986)

[3] Breiman, L.: *Probability*, Reading, Mass.: Addison-Wesley (1968)

[4] Broadbent, S. R., Hammersley, J. M.: *Percolation processes i. crystals and mazes*, Proceedigs of the Cambridge Philosophical Society, **53**, 629-641 (1957)

[5] Chayes, J. T., Chayes, L.: *Percolation and randon media*, Critical Phenomena, Random Systems and Gauge Theories, Les Houches Session XLIII 1984, ed. K. Osterwalder and R. Stora, 1001-1142, Elsevier, Amsterdam (1986)

[6] Durrett, R.: *Lecture notes in interacting particle systems and Percolation*, Wadsworth and Brooks / Cole (1988)

[7] Grimmett, G. R.: *On the number of cluster in the percolation model*, J. London Math Soc. (2), **13** , 346-350 (1976)

[8] Grimmett, G. R.: *Percolation*, Springer-Verlag (1989)

[9] Lebowitz, J. L., Schonmann, R. H.: *Pseudo-freee energies and large deviation for non gibbsian fkg measures*, Probab. Th. Rel. Fields, **77** , 49-64 (1988)

[10] Newman, C. M.: *Percolation theory : a selective survey of rigorous results*, Advances in Multiphase Flow and Related Problems, ed. G. Papanicolaou, 146-167, SIAM, Philadelphia (1987)

[11] Sykes, M. F., Essam, J. W.:*Exact critical percolation for site and bond problems in two dimension*, Journal of Mathematical Physics, **5**, 1117-1127 (1900)

[12] Roberts, A. W., Varberg, D. E.: *Convex functions*, Academic Press (1973)

[13] Vares, M. E.: *Grandes desvios em processos markovianos*, XVI Colóquio Brasileiro de Matemática (1985)

[14] Wierman, J. C.: *On critical probabilities in percolation theory*, Journal of Mathematical Physics, **19**, 1979-1982 (1978)