

PROCESSO KLS

Adriano Francisco Siqueira

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU

DE

DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes**

-São Paulo, Novembro de 2003-

PROCESSO KLS

Este exemplar corresponde à
redação final da tese
devidamente corrigida e defendida
por Adriano Francisco Siqueira
aprovada pela comissão julgadora

São Paulo, 21 de novembro de 2003

Banca examinadora:

- Prof.Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes (Orientador)-IME-USP
- Prof.Dr. Pablo Augusto Ferrari- IME-USP
- Prof.Dr. Mário José de Oliveira- IF-USP
- Prof.Dr. Francisco Castilho Alcaraz-IFSC-USP
- Prof.Dr. Ronald Dickman-UFMG

” Todo dia um pequeno lema. ”

*Aos meus Pais,
e Ana Carolina*

Resumo

Nesta Tese nós estudamos o processo de Katz-Lebowitz-Spohn, resumindo, processo KLS. Este processo é um sistema de partículas em \mathbf{Z} onde cada partícula desenvolve passeio aleatório totalmente assimétrico, movendo-se somente para direita, com exclusão, com taxas de salto que dependem da configuração dos vizinhos anterior e dos dois vizinhos posteriores. Uma das principais dificuldades enfrentadas é que em geral o processo KLS não é atrativo. Outro aspecto relevante é que o fluxo em uma certa região do espaço paramétrico não é uma função nem côncava nem convexa. Neste trabalho nós caracterizamos as medidas invariantes e invariantes por translações. Obtemos uma lei dos grandes números para o fluxo de partículas. Além disto conseguimos provar a ocorrência de choques duplos microscópicos partindo-se e se afastando um do outro em um caso especial do processo KLS.

Abstract

In this Thesis we study the Katz-Lebowitz-Spohn process or short KLS process. This process is a jump 1, totally asymmetric exclusion process in \mathbf{Z} , with rates that depend on one neighbour back and two ahead. In general the KLS process is not attractive, and in this work we find the invariant measure and translation invariant. Another result is a law of large numbers for the flux. Finally, we prove the existence of picture of shocks splitting with resulting shocks moving away from each other in a particular case in the process.

Agradecimentos

Ao Professor Luiz Renato o meu muito obrigado pelo incentivo, orientação, pela paciência em escutar minhas dúvidas, pela pessoa e pelo profissional, pelos conselhos e pela nossa amizade.

Sou imensamente grato ao Professor Pablo Augusto Ferrari pela grande ajuda e pelo incentivo. Apoio fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos Professores Roberto H. Schonmann, Enrique Andjel, Herve Guiol, Gunter M. Schütz, agradeço as valiosas perguntas e sugestões.

Aos amigos do IME-USP.

Aos amigos da FAENQUIL.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	O processo	3
1.2	Processo misantropo	6
2	Medidas invariantes para o processo KLS	13
3	Choques duplos no modelo antiferromagnético em temperatura zero ($\epsilon = 1$)	49
4	Choques simples no processo antiferromagnético	56
	Referências Bibliográficas	74

Capítulo 1

Introdução

Introduzido em [1] o processo de KLS, ou $\text{KLS}(\epsilon)$, onde $\epsilon \in [-1, 1]$ é um parâmetro, é um sistema de partículas em \mathbf{Z} onde cada partícula desenvolve passeio aleatório totalmente assimétrico, movendo-se somente para direita, com exclusão. Inicialmente o que motivou o estudo deste processo foram os comportamentos de choques encontrados nas simulações feitas por Schütz et al em [2] e [3]. Nestas simulações um perfil inicial de choque se dividiu em dois choques, movendo-se em direções opostas. Uma das principais dificuldades enfrentadas é que em geral o processo KLS não é atrativo. Outro aspecto relevante é que o fluxo em uma certa região do espaço paramétrico não é uma função nem côncava nem convexa. Casos recentemente estudados de processos atrativos onde este último fenômeno ocorre foram estudados em grande amplitude em [7] e [8]. Para contornar este problema usamos o processo misantropo, descrito no trabalho de Coccozza em [5], como processo auxiliar. No Capítulo 1 nós descrevemos os processos KLS e Misantropo e estudamos a relação entre eles. No Capítulo 2 caracterizamos as medidas invariantes e invariantes por translação do processo KLS e obtemos uma Lei dos Grandes Números para o fluxo de partículas. No Capítulo 3 nós

estudamos o caso especial do processo quando $\epsilon = 1$. Neste capítulo nós conseguimos provar a ocorrência de choques duplos microscópicos partindo-se e se afastando um do outro. Finalmente no Capítulo 4 obtemos algumas propriedades para o processo KLS quando $0 < \epsilon < 1$ e obtemos uma Lei dos Grandes Números para uma posição macroscópica do choque em situação onde ele é simples, e não duplo. Muitas das ferramentas utilizadas foram emprestadas ou estendidas do trabalho de Ferrari [4].

1.1 O processo

A cada inteiro pertencente a \mathbf{Z} , chamado de sítio, associamos um número 0 ou 1. O número 0 representará um sítio vazio e 1 um sítio ocupado com uma partícula. A cada sítio associamos um relógio aleatório que toca a intervalos iid exponenciais. O instante em que o relógio toca para x representa a intenção de salto da partícula, se houver alguma, no sítio $x \in \mathbf{Z}$ para o sítio vizinho $x + 1$. O salto irá ocorrer com as taxas mostradas na Figura 1.1.

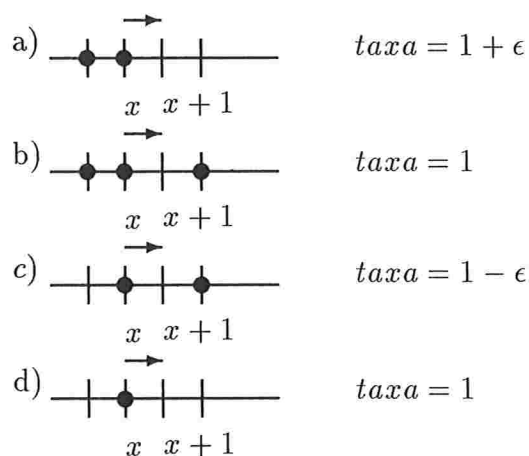


Figura 1.1: Taxas do Processo KLS

Na construção gráfica do processo, a cada sítio associaremos 3 processos de Poisson independentes, um com taxa $1 - \epsilon$ e os outros dois com taxa ϵ cada. Vamos dizer que as marcas do processo de Poisson com taxa $1 - \epsilon$ são amarelas, as de uma processo de Poisson com taxa ϵ são verdes e a do outro processo de Poisson com taxa ϵ são brancas. As marcas dos processo de Poisson indicaram o instante do salto de uma

partícula. Na situação a) da figura (1.1) a partícula pode usar as marcas dos três processo de Poisson, na b) a partícula pode usar apenas as marcas amarelas e verdes, na c) a partícula pode usar somente as marcas amarelas e na situação d) a partícula pode usar as marcas amarelas e brancas.

O espaço de estados do processo é $E := \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}$. Os elementos de E são funções que associam um número 0 ou 1 para cada sítio. Chamamos estes elementos de configurações, denotadas pelas letras gregas como: η, ξ, σ, \dots

Usaremos a notação η_t^ξ para representar a configuração no tempo t partindo da configuração ξ . Assim $\eta_0^\xi = \xi$. O sítio x está ocupado com uma partícula no instante t se $\eta_t^\xi(x) = 1$. Se $\eta_t^\xi(x) = 0$, dizemos que o sítio está desocupado, no instante t .

O gerador do processo é dado por:

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} c(x, \eta)[f(\eta^{x, x+1}) - f(\eta)] \quad (1.1)$$

com:

$$c(x, \eta) = \mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=1, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=1\}}(\eta) + \mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=0\}}(\eta) \\ + (1+\epsilon)\mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=1, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=0\}}(\eta) + (1-\epsilon)(\eta)\mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=1\}}(\eta)$$

onde $\mathbf{I}_{\{\cdot\}}$ é a função indicadora e $\eta^{x, x+1}$ é definido da seguinte maneira:

$$\eta^{x, x+1}(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } y \neq x, x+1 \\ \eta(x+1) & \text{se } y = x \\ \eta(x) & \text{se } y = x+1 \end{cases}$$

Neste trabalho, suporemos que $\epsilon \in (-1, 1]$. Como veremos em mais detalhes no Cap.2, o parâmetro ϵ está associado à temperatura e caráter ferromagnético do processo KLS. $|\epsilon|$ próximo de 1 corresponde a temperatura baixa, $|\epsilon| = 1$ a temperatura

zero, $|\epsilon| = 0$ a temperatura infinita. $\epsilon < 0$ corresponde ao caso ferromagnético e $\epsilon > 0$ ao caso anti ferromagnético.

Como $\sup_{x \in \mathbb{Z}} c(x, \eta) = 1 + \epsilon < \infty$, pela Proposição 3.2 de Liggett(1985), o processo definido formalmente por (1.1) está bem definido.

O processo KLS não é atrativo, se $\epsilon \neq 0$, o que pode ser visto no exemplo abaixo, para $\epsilon > 0$. Sejam ξ, ξ' às configurações ilustradas abaixo:

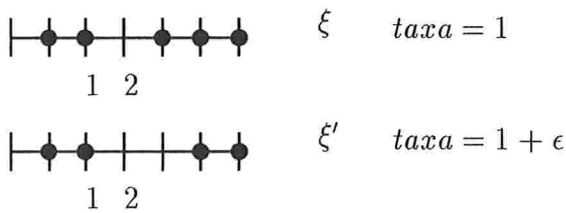


Figura 1.2: Quebra da monotonicidade.

Isto é,

$$\xi(x) = \xi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, 1 \text{ ou } x \geq 4 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

e $\xi(3) = 1 - \xi'(3) = 1$. Então $\xi > \xi'$ (i.e., $\xi(x) \geq \xi'(x)$ para todo x , e existe x tal que $\xi(x) > \xi'(x)$). Porém as probabilidades:

$$P(\eta_t^{\xi'}(2) = 1) = (1 + \epsilon)t + o(t) > P(\eta_t^\xi(2) = 1) = t + o(t),$$

para $t > 0$ suficientemente próximo de zero. Podemos obter também um contra exemplo semelhante no caso em que $\epsilon < 0$.

A seguir, descrevemos o processo misantropo, que será auxiliar na análise do processo KLS.

1.2 Processo misantropo

O processo misantropo é um sistema de partículas em \mathbf{Z} onde em cada sítio podemos colocar uma ou mais partículas e as taxas de salto de uma partícula no sítio x para y depende do número de partículas em x e y . O gerador formal deste processo é dado por:

$$Lf(\eta) = \sum_{x,y} b(\eta(x), \eta(y))p(x,y)[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)], \eta \in Z, \quad (1.2)$$

onde $b : N^2 \rightarrow R_+$ é tal que $b(0, \cdot) = 0$ e $p(x, \cdot)$ é uma probabilidade em Z . Vamos supor adicionalmente que b é limitada, de forma que Lf está bem definido.

O processo KLS visto de uma partícula, ou de um buraco, pode ser descrito como um particular processo misantropo. O processo misantropo irá ajudar a caracterizar as medidas invariantes extremas do processo KLS. Seja ζ uma configuração do processo misantropo, então $\zeta(y)$ representa o número de partículas no sítio y e $b(\zeta(x), \zeta(y))$ representará a taxa de salto de uma partícula do sítio x para o sítio y . Usaremos dois tipos particulares de processos misantropos, que chamaremos misantropo direto e reverso, cujas as taxas são ilustradas na Figura 1.3, e podem ser escritas como:


Para o misantropo direto,

$$\begin{aligned} b(\zeta(x), \zeta(x+1)) &= \mathbf{I}_{\{\zeta(x) > 1, \zeta(x+1) > 1\}}(\zeta) + \mathbf{I}_{\{\zeta(x) > 1, \zeta(x+1) = 1\}}(\zeta) + (1 + \epsilon) \mathbf{I}_{\{\zeta(x) > 1, \zeta(x+1) = 0\}}(\zeta) \\ &\quad + \mathbf{I}_{\{\zeta(x) = 1, \zeta(x+1) = 0\}} + (1 - \epsilon) \mathbf{I}_{\{\zeta(x) = 1, \zeta(x+1) \geq 1\}}(\zeta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

e $p(x, x+1) = 1$. E para o misantropo reverso:

$$\begin{aligned} b(\zeta'(x+1), \zeta'(x)) &= \mathbf{I}_{\{\zeta'(x+1) > 1, \zeta'(x) > 1\}}(\zeta') + \mathbf{I}_{\{\zeta'(x+1) > 1, \zeta'(x) = 1\}}(\zeta') + (1 + \epsilon) \mathbf{I}_{\{\zeta'(x+1) \geq 1, \zeta'(x) = 0\}}(\zeta') \\ &\quad + \mathbf{I}_{\{\zeta'(x+1) = 1, \zeta'(x) = 0\}}(\zeta') + (1 - \epsilon) \mathbf{I}_{\{\zeta'(x+1) = 1, \zeta'(x) \geq 1\}}(\zeta'), \end{aligned} \quad (1.4)$$

e $p(x + 1, x) = 1$.

 = Pelo menos duas partículas

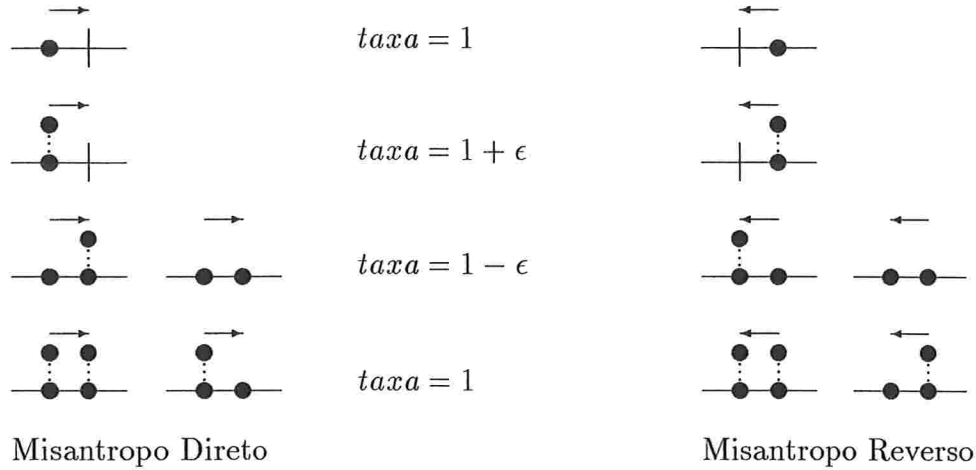


Figura 1.3: Taxas do processo misantropo, onde $-1 < \epsilon \leq 1$

Estas taxas são obtidas através da relação entre o misantropo e KLS, que veremos a seguir.

Chamaremos de processo misantropo direto aquele obtido de uma configuração do KLS visto de um buraco de referência, contando-se o número de partículas entre buracos. Desta maneira contamos o número de partículas à direita do buraco de referência até o próximo buraco e o resultado representará o número de partículas que colocaremos na origem do processo misantropo. Vamos supor que η tem infinitos buracos à esquerda e à direita da origem e que na origem temos um buraco, que é o buraco de referência. Defina:

$$\tau_0 = \inf\{n > 0 : \eta(n) = 0\}$$

então:

$$\zeta(0) = \tau_0 - 1$$

Analogamente:

$$\tau_i = \inf\{n > \tau_{i-1} : \eta(n) = 0\} \text{ e } \zeta(i) = \tau_i - 1, \quad i > 0$$

$$\tau_i = \sup\{n < \tau_{i+1} : \eta(n) = 0\} \text{ e } \zeta(i) = \tau_i - 1, \quad i < 0$$

Por outro lado, dada uma configuração do misantropo ξ , o número de partículas na origem representa o número de partículas à direita da posição do buraco de referência, denotada x_{b_0} , até o próximo buraco na configuração do KLS. Ou seja:

$$\eta(x_{b_0} + 1) = \eta(x_{b_0} + 2) = \dots = \eta(x_{b_0} + \zeta(0)) = 1, \eta(x_{b_r} + \zeta(0) + 1) = 0.$$

Analogamente o número de partículas $\zeta(y) > 0$, $y > 0$, indica:

$$\eta(x_{b_y} + 1) = \dots = \eta(x_{b_y} + \zeta(y)) = 1$$

onde $x_{b_y} := x_{b_0} + \sum_{j=0}^{y-1} (\zeta(j) + 1)$ é a posição do y -ésimo buraco na configuração KLS.

Se $\zeta(y) = 0$, então $\eta(x_{b_y} + 1) = 0$ e $x_{b_{(y+1)}} = x_{b_y} + 1$. Para $y < 0$, a representação é análoga.

Com isto vemos que há uma função φ que faz a bijeção entre o processo misantropo e o processo KLS visto de um buraco de referência. Notamos que não há uma bijeção com o processo KLS, pois não há como obter a posição do buraco de referência a partir do misantropo.

Chamaremos de processo misantropo reverso, ζ' aquele obtido de uma configuração do KLS visto de uma partícula de referência, contando-se o número de buracos entre partículas. Com isto contamos o número de buracos à direita da partícula de referência até a próxima partícula e o resultado representará o número de partículas que iremos colocar na origem do processo misantropo. Suponha que $\eta(0) = 1$ e defina:

$$\tau'_0 = \inf\{n > 0 : \eta(n) = 1\}$$

então:

$$\zeta'(0) = \tau'_0 - 1.$$

Analogamente:

$$\tau'_i = \inf\{n > \tau'_{i-1} : \eta(n) = 1\} \text{ e } \zeta'(i) = \tau'_i - 1, i > 0$$

$$\tau'_i = \sup\{n < \tau'_{i-1} : \eta(n) = 1\} \text{ e } \zeta'(i) = \tau'_i - 1, i < 0,$$

ou seja, usamos a mesma regra para preencher os demais sítios do processo misantropo. Observe que no processo misantropo reverso as partículas saltam da direita para esquerda. Isto é natural, pois as partículas no misantropo reverso representam os buracos no KLS. Dada uma configuração do misantropo reverso, podemos obter a configuração respectiva no KLS visto da partícula de referência da seguinte maneira: o número de partículas na origem do processo misantropo representa o número de buracos entre a posição x_{p0} da partícula de referência e a primeira partícula à direita dela. Ou seja, temos:

$$\eta(x_{p0} + 1) = \eta(x_{p0} + 2) = \dots = \eta(x_{p0} + \zeta'(0)) = 0, \quad \eta(x_{p0} + \zeta'(0) + 1) = 1$$

Analogamente o número de partículas $\zeta'(y)$ $y > 0$, indica:

$$\eta(x_{py} + 1) = \dots = \eta(x_{py} + \zeta'(y)) = 0$$

onde $x_{py} = x_{p0} + \sum_{j=0}^{y-1} (\zeta'(j) + 1)$ é a posição da y -ésima partícula à direita da partícula de referência.

Se $\zeta'(y) = 0$, então $\eta(x_{py} + 1) = 1$ e $x_{p(y+1)} = x_{py} + 1$. Para $y < 0$, a representação é analoga.

Neste processo a relação de bijeção entre os dois processos é construída a partir da partícula de referência no KLS com a origem do misantropo.

Em [5] o conjunto de medidas e invariantes extremais para um processo misantropo geral é caracterizado da seguinte forma.

Teorema 1 [Cocozza(1985)] *Suponha que as taxas $b(\eta(x), \eta(y))$ de um processo misantropo satisfazem :*

1. $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)}$ para $i \geq 1, j \geq 0$,
2. $b(i,j) - b(j,i) = b(i,0) - b(j,0)$ para $i \geq 0, j \geq 0$,

e que a distribuição inicial do processo δ é invariante por translações. Então $\delta S(t)$ converge para δ_∞ dada por:

$$\delta_\infty = \int \alpha_\rho \lambda(d\rho),$$

onde $\alpha_\rho := \otimes \theta_\rho$ com θ_ρ satisfazendo a seguinte condição:

$$\frac{\theta_\rho(i+1)}{\theta_\rho(i)} = \frac{\theta_\rho(1)}{\theta_\rho(0)} \frac{b(1,i)}{b(i+1,0)} \quad (1.5)$$

Vamos mostrar que o processo misantropo direto e reverso com taxas (1.3) e (1.4) satisfazem às condições 1 e 2 .

Lema 1.1 *Se $|\epsilon| < 1$, então os processos misantropos direto e reverso com taxas dadas por (1.3) e (1.4) satisfazem as condições 1 e 2.*

Prova

Temos as seguintes taxas para o processo misantropo direto e reverso:

- $b(0, i) = 0, \quad i \geq 0$
- $b(1, i) = 1 - \epsilon, \quad i \geq 1$

- $b(1, 0) = 1$
- $b(i, 0) = 1 + \epsilon, \quad i \geq 2$
- $b(i, j) = 1, \quad i \geq 2, j \geq 1$

Vamos verificar a primeira condição: $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)}$

- Para $i, j \geq 2$ temos:

$$\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{1}{1} \text{ e } , \frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)} = \frac{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}$$

- Para $i \geq 2$ e $j = 1$ $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{1}{1}$ e , $\frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)} = \frac{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}$
- Para $i \geq 2$ e $j = 0$ $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$ e , $\frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)} = \frac{(1+\epsilon)(1)}{(1)(1-\epsilon)}$
- Para $i = 1$ e $j \geq 2$ $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ e , $\frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)} = \frac{(1-\epsilon)(1)}{(1)(1+\epsilon)}$
- Para $i = 0$ e qualquer j $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = 0$ e , $\frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)} = 0$

Vamos agora mostrar a condição: $b(i, j) - b(j, i) = b(i, 0) - b(j, 0)$ para $i \geq 0, j \geq 0$

- $i \geq 2, j \geq 2$ $b(i, j) - b(j, i) = 1 - 1$ e , $b(i, 0) - b(j, 0) = (1 - \epsilon) - (1 - \epsilon)$
- Para $i \geq 2$ e $j = 1$ $b(i, j) - b(j, i) = 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon$ e , $b(i, 0) - b(j, 0) = (1 + \epsilon) - 1 = \epsilon$
- Para $i \geq 2$ e $j = 0$
- Para $i = 1$ e $j \geq 2$ $b(i, j) - b(j, i) = (1 - \epsilon) - 1 = -\epsilon$ e , $b(i, 0) - b(j, 0) = 1 - (1 + \epsilon) = -\epsilon$
- Para $i = 0$ e qualquer j $b(i, j) - b(j, i) = -b(j, 0)$ e , $b(i, 0) - b(j, 0) = -b(j, 0)$



Iremos usar a bijeção do KLS visto de uma partícula de referência com o misantropo para caracterizar as medidas invariantes do KLS no próximo capítulo.

Capítulo 2

Medidas invariantes para o processo KLS

Neste capítulo descrevemos uma família de medidas invariantes para o processo KLS, que sera o Teorema 2, e obtemos como consequência uma Lei dos Grandes Números para o fluxo de partículas para o processo KLS.

Uma família de medidas invariante para o processo KLS é obtida da seguinte forma: Dados $p, q \in [0, 1]$, com $p + q > 0$, seja $\lambda = p/(p + q)$ e seja \mathcal{M}_λ uma cadeia de Markov estacionária dada pela seguinte matriz de transição:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{matrix}; \quad (2.1)$$

Esta cadeia tem a (única) medida de equilíbrio π dada por;

$$\pi(1) = \frac{p}{p+q} = \lambda \quad \pi(0) = 1 - \pi(1) = 1 - \lambda \quad (2.2)$$

Teorema 2 *Suponha que, dados $\lambda \in (0, 1)$ e $\epsilon \in (-1, 1]$, p, q satisfaçam:*

$$p, q \in [0, 1], p + q > 0, \frac{p}{p+q} = \lambda \text{ e } \frac{(1-p)(1-q)}{pq} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \quad (2.3)$$

Então \mathcal{M}_λ é uma medida invariante para o processo $KLS(\epsilon)$. Além disto, toda medida invariante e invariante por translação é uma combinação convexa de \mathcal{M}_λ , i.e, \mathcal{M}_λ é extremal no conjunto de medidas invariantes e invariantes por translações.

Observação 1: o parâmetro $\lambda \in (0, 1)$ é a densidade de partículas sob \mathcal{M}_λ . O parâmetro $\beta := \beta(\epsilon) = \left| \log\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right) \right|$ pode ser interpretado como o *inverso* da temperatura e o sinal s de $\log\left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)$ indica que o modelo é *ferromagnético*, se for positivo, e *anti-ferromagnético*, se for negativo. De fato, na representação de \mathcal{M}_λ como modelo de Ising, β será o inverso da temperatura, $s > 0$ corresponde a modelo ferromagnético e $s < 0$ o modelo anti-ferromagnético. Nesta representação de modelo de Ising, λ está associado ao campo externo.

Observação 2. Nas condições do Teorema 2 podemos escrever p e q em função de λ e ϵ :

$$p = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{(1-2\lambda)^2 + 4\lambda(1-\lambda)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}}$$

$$q = \frac{2(1-\lambda)}{1 + \sqrt{(1-2\lambda)^2 + 4\lambda(1-\lambda)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}}$$

para o processo $KLS(\epsilon)$.

Observação 3 p é uma função crescente em λ .

Prova do Teorema 2

A prova será dividida em duas partes; primeiro mostraremos que \mathcal{M}_λ é invariante e depois invariante extremal.

Para mostrar que \mathcal{M}_λ é invariante, construiremos o processo reverso do processo KLS. Seja o processo η_t^* o processo onde as partículas saltam da direita para esquerda e seguem as taxas de salto "refletidas" do processo KLS isto é,

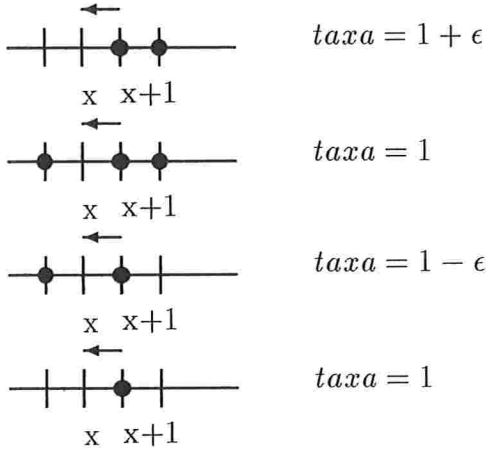


Figura 2.1: Taxas do Processo η_t^* , onde $|\epsilon| \leq 1$ e 0 em todos os demais casos.

O gerador do processo η_t^* é dado por:

$$L^* f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} c^*(x, \eta) [f(\eta^{x, x-1}) - f(\eta)] \quad (2.4)$$

com:

$$c^*(x, \eta) = \mathbf{I}_{\{\eta(x-2)=1, \eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=1\}}(\eta) + \mathbf{I}_{\{\eta(x-2)=0, \eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0\}}(\eta) \\ + (1 + \epsilon) \mathbf{I}_{\{\eta(x-2)=0, \eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=1\}}(\eta)$$

$$+(1 - \epsilon)\mathbf{I}_{\{\eta(x-2)=1, \eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0\}}(\eta)$$

Para mostrar que o processo η_t definido por (2.4) é o processo reverso do KLS mostraremos o seguinte lema :

Lema 2.1 *Para o processo direto e reverso valem a seguinte relação:*

$$\mathcal{M}_\lambda(fLg) = \mathcal{M}_\lambda(gL^*f) \quad (2.5)$$

para f, g cilíndricas arbitrárias.

Para mostrar (2.5) consideraremos o processo direto e o processo reverso em um toro com $2N + 1$ sítios, onde N é grande o suficiente para que $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subset \{-N + 2, \dots, N - 2\}$, onde $\text{supp}(h)$ indica o suporte de uma função $h : E \rightarrow R$ arbitrária. Desta maneira: $Lf = L^N f$, e $L^*f = L^{*N} f$ onde L^N e L^{*N} são os geradores formais dos respectivos processos . Para não carregar ainda mais a notação não representaremos o N no gerador dos processos no toro.

Podemos desmembrar cada lado de (2.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda(fLg) &= \\ \int \sum_{x=-N+1}^N c(x, \eta^{x, x+1}) f(\eta) g(\eta^{x, x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) &- \int \sum_{x=-N+1}^N c(x, \eta^{x, x+1}) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\ \mathcal{M}_\lambda(gL^*f) &= \int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1, x}) g(\eta) f(\eta^{x+1, x}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) - \\ &\int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1, x}) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta), \end{aligned}$$

onde c e c^* são respectivamente as taxas no processo direto e reverso do KLS.

Assim (2.5) ocorre se tivermos as seguintes igualdades:

$$\int \sum_{x=-N+1}^N c(x, \eta^{x,x+1}) f(\eta) g(\eta^{x,x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1,x}) g(\eta) f(\eta^{x+1,x}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) \quad (2.6)$$

$$\int \sum_{x=-N+1}^N c(x, \eta^{x,x+1}) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1,x}) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) \quad (2.7)$$

A igualdade em (2.6) ocorre se para cada x no toro $\{-N, \dots, N\}$, for verdadeira a seguinte igualdade:

$$\int c(x, \eta^{x,x+1}) f(\eta) g(\eta^{x,x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int c^*(x+1, \eta^{x+1,x}) g(\eta) f(\eta^{x+1,x}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) \quad (2.8)$$

Lema 2.2 *Se p, q satisfazem (2.3) então (2.8) é verdadeira para toda f, g cilíndrica.*

Prova

Escolha um x fixo no toro $\{-N, \dots, N\}$, então temos 4 possíveis taxas de salto, $c(x, \eta^{x,x+1})$ e $c^*(x+1, \eta^{x+1,x})$ dependendo das configurações no processo direto e reverso, como mostrado na figura(2.2).

Assim cada uma das integrais em (2.8) podem ser desmembradas em:

$$\int c(x, \eta^{x,x+1}) f(\eta) g(\eta^{x,x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int (1 + \epsilon) \eta(x-1) \eta(x) (1 - \eta(x+1)) (1 - \eta(x+2)) f(\eta) g(\eta^{x,x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

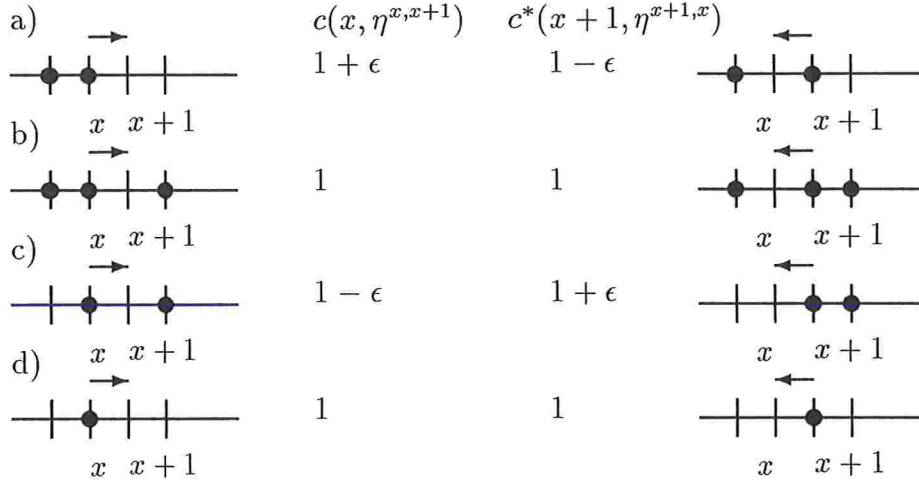


Figura 2.2: Taxas do processo

$$\begin{aligned}
& + \int (1)\eta(x-1)\eta(x)(1-\eta(x+1))\eta(x+2)f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\
& + \int (1-\epsilon)(1-\eta(x-1))\eta(x)(1-\eta(x+1))\eta(x+2)f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\
& + \int (1)(1-\eta(x-1))\eta(x)(1-\eta(x+1))(1-\eta(x+2))f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta)
\end{aligned}$$

Da mesma forma temos:

$$\begin{aligned}
& \int c^*(x+1, \eta^{x+1,x})g(\eta)f(\eta^{x+1,x})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \\
& \int (1-\epsilon)\eta(x-1)(1-\eta(x))\eta(x+1)(1-\eta(x+2))f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\
& + \int (1)\eta(x-1)(1-\eta(x))\eta(x+1)(1-\eta(x+2))f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\
& + \int (1+\epsilon)(1-\eta(x-1))(1-\eta(x))\eta(x+1)\eta(x+2)f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta) \\
& + \int (1)\eta(x-1)(1-\eta(x))\eta(x+1)\eta(x+2)f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que se as condições do Teorema 2 estiverem satisfeitas, então são validas as igualdades:

$$\int (1 + \epsilon)\eta(x-1)\eta(x)(1-\eta(x+1))(1-\eta(x+2))f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \quad (2.9)$$

$$\int (1 - \epsilon)\eta(x-1)(1-\eta(x))\eta(x+1)(1-\eta(x+2))f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

$$\int \eta(x-1)\eta(x)(1-\eta(x+1))\eta(x+2)f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \quad (2.10)$$

$$\int \eta(x-1)(1-\eta(x))\eta(x+1)\eta(x+2)f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

$$\int (1 - \epsilon)(1-\eta(x-1))\eta(x)(1-\eta(x+1))\eta(x+2)f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \quad (2.11)$$

$$\int (1 + \epsilon)(1-\eta(x-1))(1-\eta(x))\eta(x+1)\eta(x+2)f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

$$\int (1-\eta(x-1))\eta(x)(1-\eta(x+1))(1-\eta(x+2))f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \quad (2.12)$$

$$\int (1-\eta(x-1))(1-\eta(x))\eta(x+1)(1-\eta(x+2))f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

Como f, g são cilíndricas temos que os produtos $h(\eta) := f(\eta)g(\eta^{x,x+1})$ e $h^*(\eta) := f(\eta^{x+1,x})g(\eta)$ assumem um conjunto finitos de valores a_i . Observe que $h(\eta) = h^*(\eta^{x,x+1})$ e por isso sejam os conjuntos de configurações A_i, A_i^* definidos por:

$$A_i = \{(\eta : h(\eta) = a_i) \cap (\eta : \eta(x-1) = 1, \eta(x) = 1, \eta(x+1) = 0, \eta(x+2) = 0)\}$$

$$A_i^* = \{(\eta : h^*(\eta) = a_i) \cap (\eta : \eta(x-1) = 1, \eta(x) = 0, \eta(x+1) = 1, \eta(x+2) = 0)\}$$

Desto maneira a integral a esquerda de (2.9) pode ser escrita:

$$\int (1 + \epsilon)\eta(x-1)\eta(x)(1 - \eta(x+1))(1 - \eta(x+2))f(\eta)g(\eta^{x,x+1})\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = (1 + \epsilon) \sum_i a_i \mathcal{M}_\lambda\{A_i\}$$

E a integral direita fica:

$$\int (1 - \epsilon)\eta(x-2)(1 - \eta(x-1))\eta(x)(1 - \eta(x+1))f(\eta^{x+1,x})g(\eta)\mathcal{M}_\lambda(d\eta) = (1 - \epsilon) \sum_i a_i \mathcal{M}_\lambda\{A_i^*\}$$

Assim teremos a igualdade de (2.9) se para cada a_i tivermos:

$$(1 + \epsilon)a_i \mathcal{M}_\lambda\{A_i\} = (1 - \epsilon)a_i \mathcal{M}_\lambda\{A_i^*\} \quad (2.13)$$

Sejam os sítios z_1, z_2, \dots, z_n , o suporte de h . Então temos as seguintes igualdades:

$$\mathcal{M}_\lambda(\{\eta : h(\eta) = a_i\}) = \sum_{i_1, \dots, i_n : h(i_1, \dots, i_n) = a_i} \mathcal{M}_\lambda(\eta(z_1) = i_1, \dots, \eta(z_n) = i_n), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{M}_\lambda(\{\eta : h^*(\eta) = a_i\}) = \sum_{i_1, \dots, i_n : h^*(i_1, \dots, i_n) = a_i} \mathcal{M}_\lambda(\eta(z_1) = i_1, \dots, \eta(z_n) = i_n), \quad (2.15)$$

onde $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ e são os mesmos estados para o processo direto e reverso pois $h(\eta) = h^*(\eta) = a_i$.

Portanto $\mathcal{M}_\lambda\{A_i\}$ pode ser escrito como:

$$\sum_{i_1, \dots, i_n : h^*(i_1, \dots, i_n) = a_i} \mathcal{M}_\lambda\{(\eta(z_1) = i_1, \dots, \eta(z_n) = i_n, \eta(x-1) = 1, \eta(x) = 1, \eta(x+1) = 0, \eta(x+2) = 0)\} \quad (2.16)$$

Como \mathcal{M}_λ é uma cadeia de Markov temos que cada termo da soma (2.16) pode ser escrito como:

$$\mathcal{M}_\lambda\{\eta(z) = i, z < x-1 | \eta(x-1) = 1\} Q(\eta(x) = 1 | \eta(x-1) = 1) Q(\eta(x+1) = 0 | \eta(x) = 1) \cdot Q(\eta(x+2) = 0 | \eta(x+1) = 0) \mathcal{M}_\lambda\{\eta(z) = i, z > x+2 | \eta(x+2) = 0\}$$

Da mesma forma para $\mathcal{M}_\lambda\{A_{i*}\}$ temos que para cada sequência de estados i em (2.15):

$\mathcal{M}_\lambda\{\eta(z) = i, z < x - 1 | \eta(x - 1) = 1\}Q(\eta(x) = 0 | \eta(x - 1) = 1)Q(\eta(x + 1) = 1 | \eta(x) = 0)$.
 $Q(\eta(x + 2) = 0 | \eta(x + 1) = 1)\mathcal{M}_\lambda\{\eta(z) = i, z > x + 2 | \eta(x + 2) = 0\}$ Assim para que a igualdade em (2.13) seja verdadeira devemos ter:

$$(1 + \epsilon)Q(\eta(x) = 1 | \eta(x - 1) = 1)Q(\eta(x + 1) = 0 | \eta(x) = 1)Q(\eta(x + 2) = 0 | \eta(x + 1) = 0) =$$

$$(1 - \epsilon)Q(\eta(x) = 0 | \eta(x - 1) = 1)Q(\eta(x + 1) = 1 | \eta(x) = 0)Q(\eta(x + 2) = 0 | \eta(x + 1) = 1)$$

O que resulta em: $(1 + \epsilon)(1 - q)(1 - p) = (1 - \epsilon)pq$, que é a igualdade (2.3). Portanto temos que a igualdade em (2.9) é verdadeira se p, q satisfazem (2.3). De modo análogo a (2.9) podemos desenvolver as igualdades em (2.10), (2.11) e (2.12) para obter a seguinte condição sobre p, q :

Para (2.10), chegamos a:

$$Q(\eta(x) = 1 | \eta(x - 1) = 1)Q(\eta(x + 1) = 0 | \eta(x) = 1)Q(\eta(x + 2) = 1 | \eta(x + 1) = 0) =$$

$$Q(\eta(x) = 0 | \eta(x - 1) = 1)Q(\eta(x + 1) = 1 | \eta(x) = 0)Q(\eta(x + 2) = 1 | \eta(x + 1) = 1),$$

o que resulta em: $(1 - q)qp = qp(1 - p)$, que é verdadeira para todo p, q .

Para (2.11), chegamos a:

$$(1 - \epsilon)Q(\eta(x) = 1 | \eta(x - 1) = 0)Q(\eta(x + 1) = 0 | \eta(x) = 1)Q(\eta(x + 2) = 1 | \eta(x + 1) = 0) =$$

$$(1 + \epsilon)Q(\eta(x) = 0 | \eta(x - 1) = 0)Q(\eta(x + 1) = 1 | \eta(x) = 0)Q(\eta(x + 2) = 1 | \eta(x + 1) = 1)$$

que resulta em: $(1 - \epsilon)pq = (1 + \epsilon)(1 - p)(1 - q)$, que é novamente a igualdade (2.3).

E finalmente para (2.12) chegaremos a:

$$Q(\eta(x) = 1 | \eta(x-1) = 0)Q(\eta(x+1) = 0 | \eta(x) = 1)Q(\eta(x+2) = 0 | \eta(x+1) = 0) =$$

$$Q(\eta(x) = 0 | \eta(x-1) = 0)Q(\eta(x+1) = 1 | \eta(x) = 0)Q(\eta(x+2) = 0 | \eta(x+1) = 1)$$

que resulta em $pq(1-p) = (1-p)pq$, que é verdadeira para todo p, q . ♠

Assim pelo Lema 2.2, temos a seguinte igualdade:

$$\int \sum_{x=-N+1}^N c(x, \eta^{x, x+1}) f(\eta) g(\eta^{x, x+1}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1, x}) g(\eta) f(\eta^{x+1, x}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

Para demonstrarmos que η^* é o processo reverso de η , falta demonstrar ainda a igualdade (1.10). Para isto é suficiente estabelecer o seguinte lema:

Lema 2.3 *Considere o toro $C = \{-N, \dots, N\}$, com $-N$ e N identificados. Então:*

$$\sum_{x \in C} c(x, \eta) = \sum_{x \in C} c^*(x, \eta) \quad \forall \eta \in \{0, 1\}^C \quad (2.17)$$

A prova de (2.17) será feita por indução. Primeiro vamos mostrar (2.17) para toda configuração η em um toro 5 pontos. Nas figuras(2.3) e (2.4) mostramos todas as possíveis configurações η para um toro de tamanho 5. Para cada η , indicamos todas as partículas que podem saltar com as seguintes marcas: três pontos, para indicar a taxa $1 - \epsilon$, uma seta para a taxa 1 e duas setas para taxa $1 + \epsilon$. As marcas acima da configuração são as do processo direto; as abaixo são, do processo reverso. Desta maneira indicamos para cada η todas as taxas c , c^* e configurações que podemos obter com um único salto a partir de η . Marcamos o começo e o final do toro com um quadrado, que indica a origem para sinalizar que estes dois sítios são os mesmos e assim devem possuir a mesma configuração.

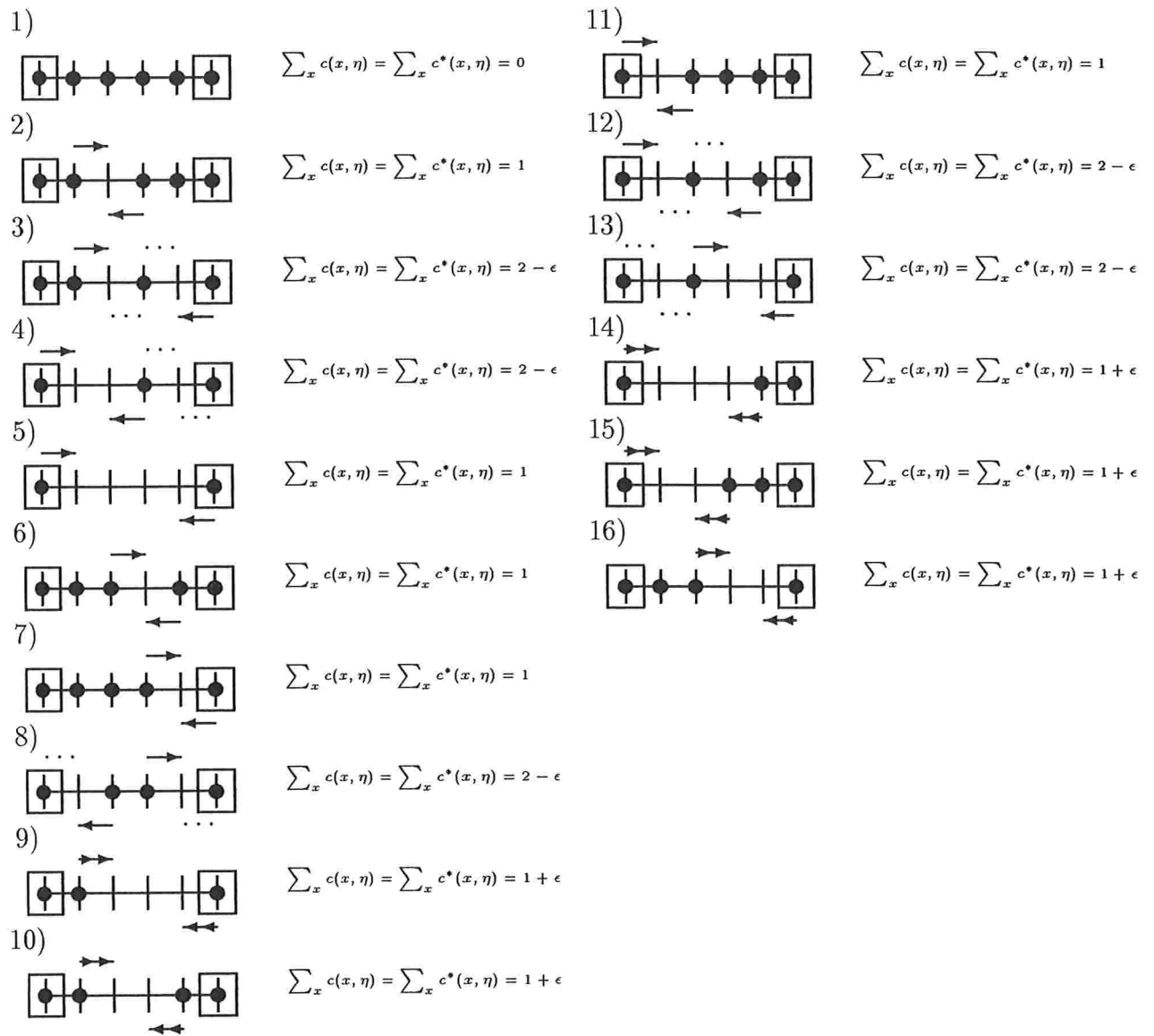


Figura 2.3: Soma das taxas de realização do processo no toro de tamanho 5, com uma partícula na origem

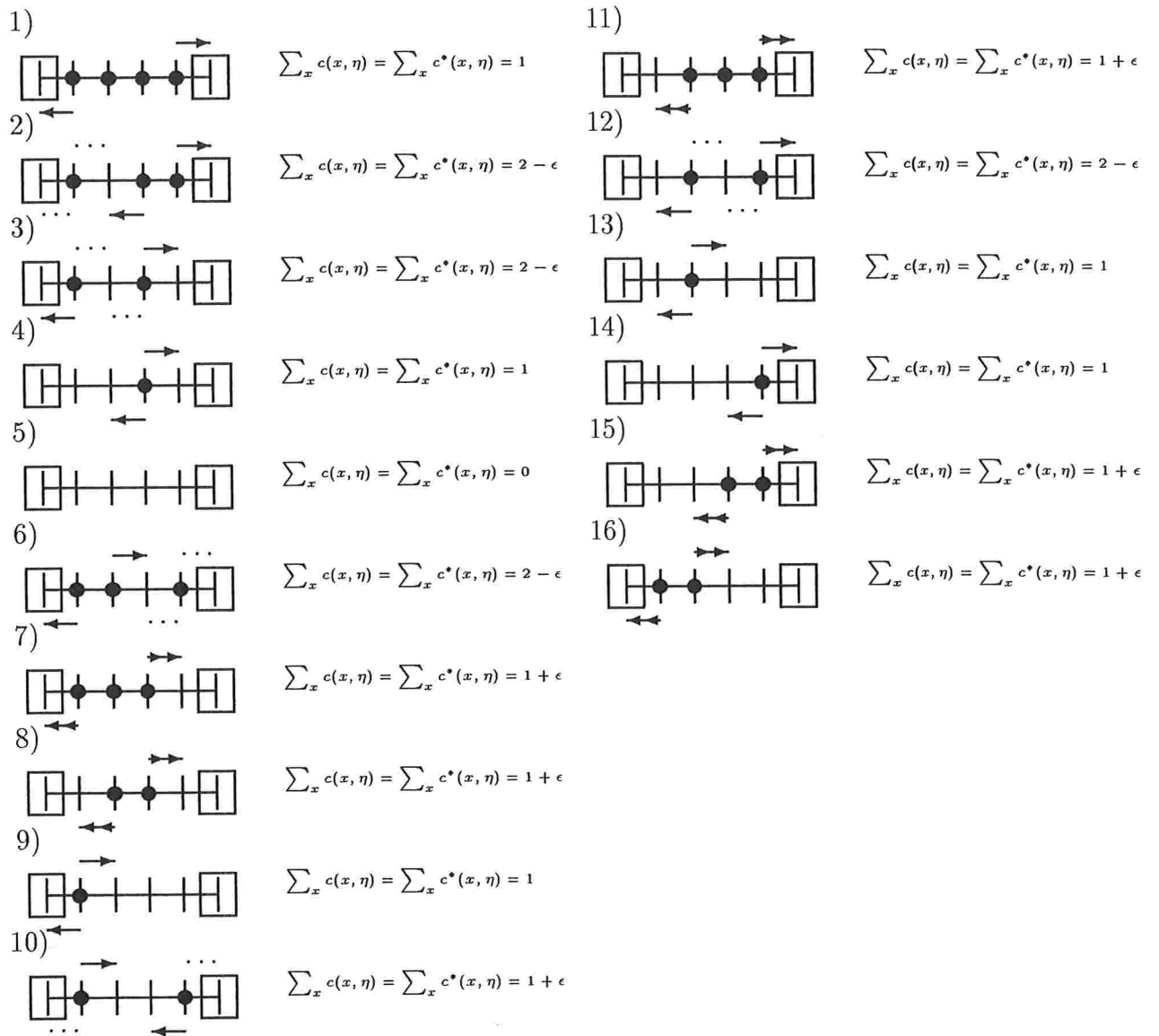


Figura 2.4: Soma das taxas de realização do processo no toro de tamanho 5, sem uma partícula na origem

Agora supomos que $\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)$ para $|C| = n$ e provaremos que isto vale para $|C| = n + 1$

Na figura abaixo iremos verificar a influência de um novo sítio nas somas das taxas, para cada configuração $\eta \in \{0, 1\}^C$. O novo sítio é adicionado à esquerda do sítio marcado pela caixa direita.

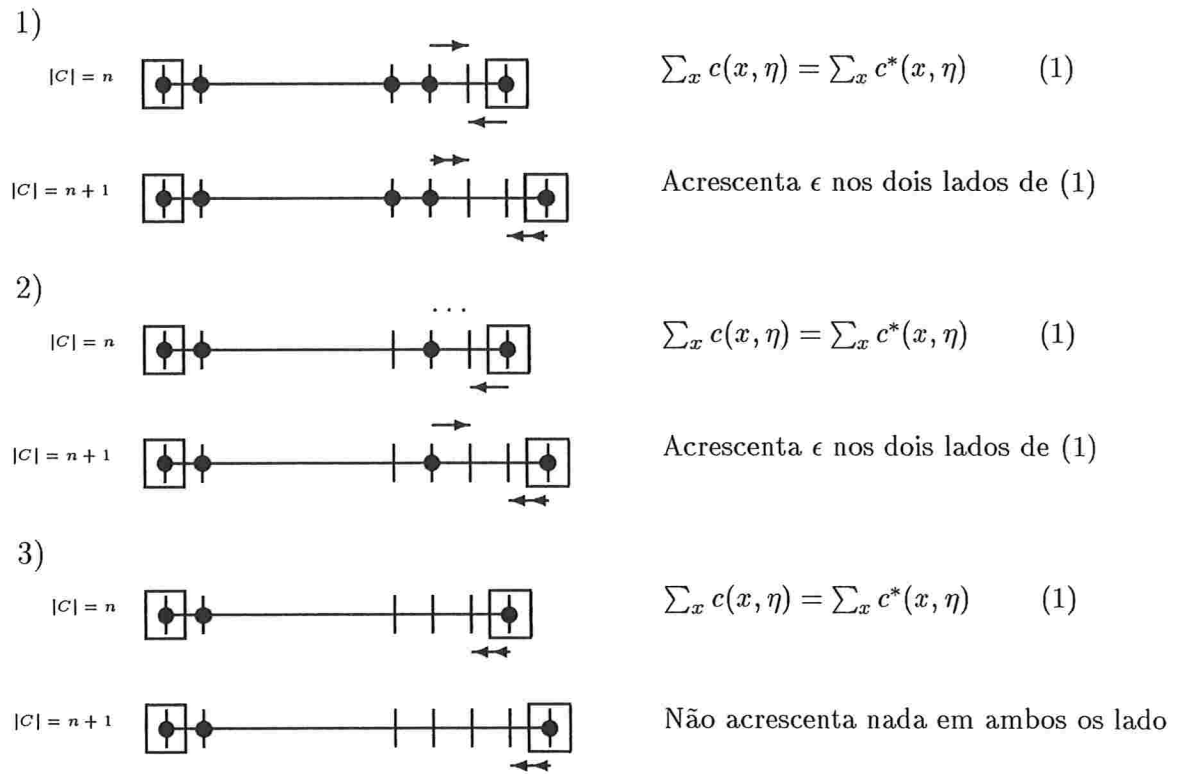


Figura 2.5: Caso com uma partícula na origem e uma no sítio 1

4)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



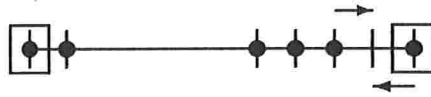
Não acrescenta nada em ambos os lados

5)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



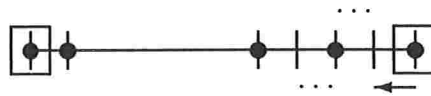
Acrescenta 1 em ambos os lados

6)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



Acrescenta $1 - \epsilon$ em ambos os lados de (1)

Figura 2.6: Caso com uma partícula na origem e no sítio 1

7)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



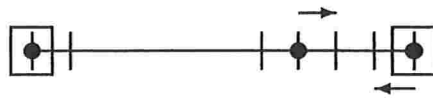
Acrescenta ϵ nos dois lados de (1)

8)



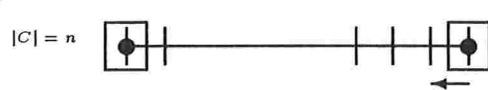
$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



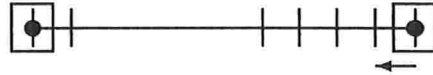
Acrescenta ϵ nos dois lados de (1)

9)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



Não acrescenta nada em ambos os lados

Figura 2.7: Caso com uma partícula na origem e o sítio 1 vazio

10)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



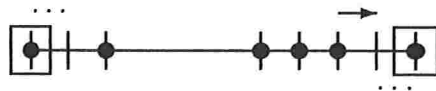
Não acrescenta nada em (1)

11)



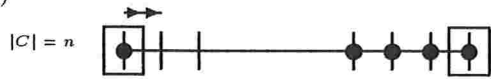
$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



Acrescenta $1 - \epsilon$ nos dois lados de (1)

12)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta) \quad (1)$$

$|C| = n + 1$



Acrescenta $1 - \epsilon$ em ambos os lados de (1)

Figura 2.8: Caso com uma partícula na origem e o sítio um vazio

13)



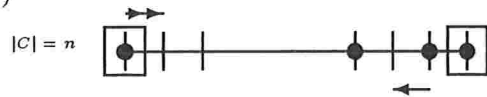
$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)(1)$$

$|C| = n + 1$



Acrescenta $1 - 2\epsilon$ nos dois lados de (1)

14)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)(1)$$

$|C| = n + 1$



Acrescenta $1 - 2\epsilon$ em ambos os lados de (1)

Figura 2.9: Caso com uma partícula na origem e o sítio 1 vazio

Nas figuras anteriores vimos o que aconteceria para toda η quando introduzimos um sítio a mais no toro. As figuras a seguir mostram o que acontece quando introduzimos uma partícula no toro.

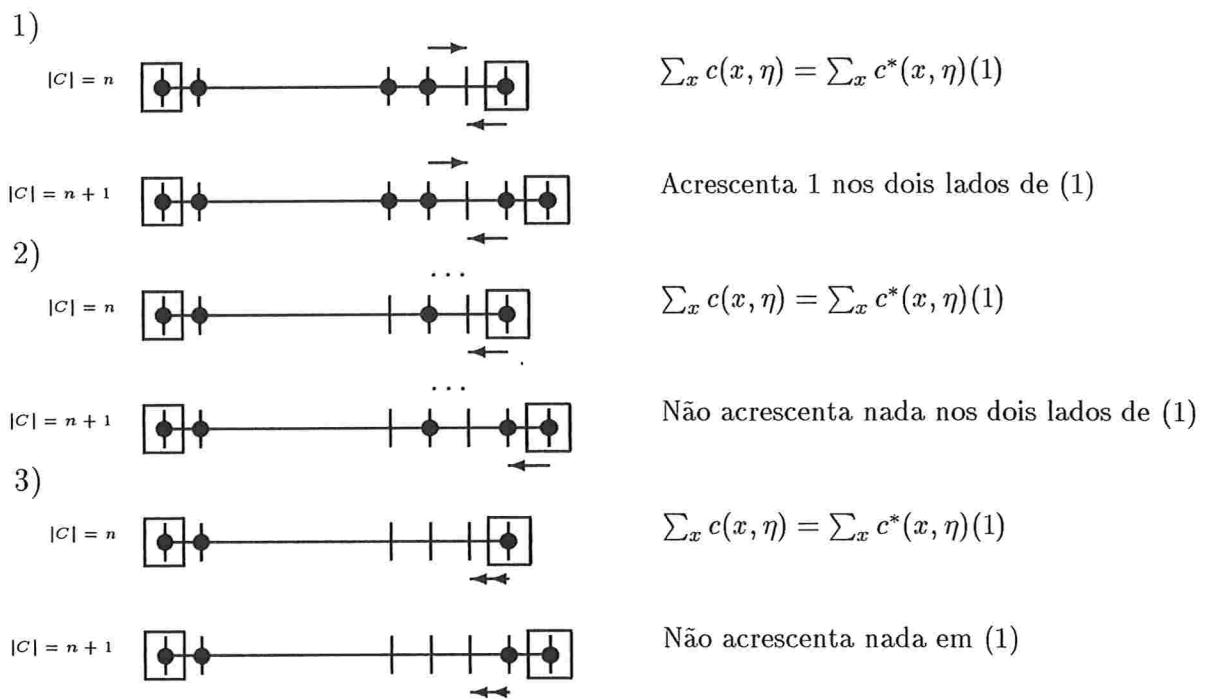


Figura 2.10: Caso com uma partícula na origem e uma no sítio 1, introduzindo uma partícula

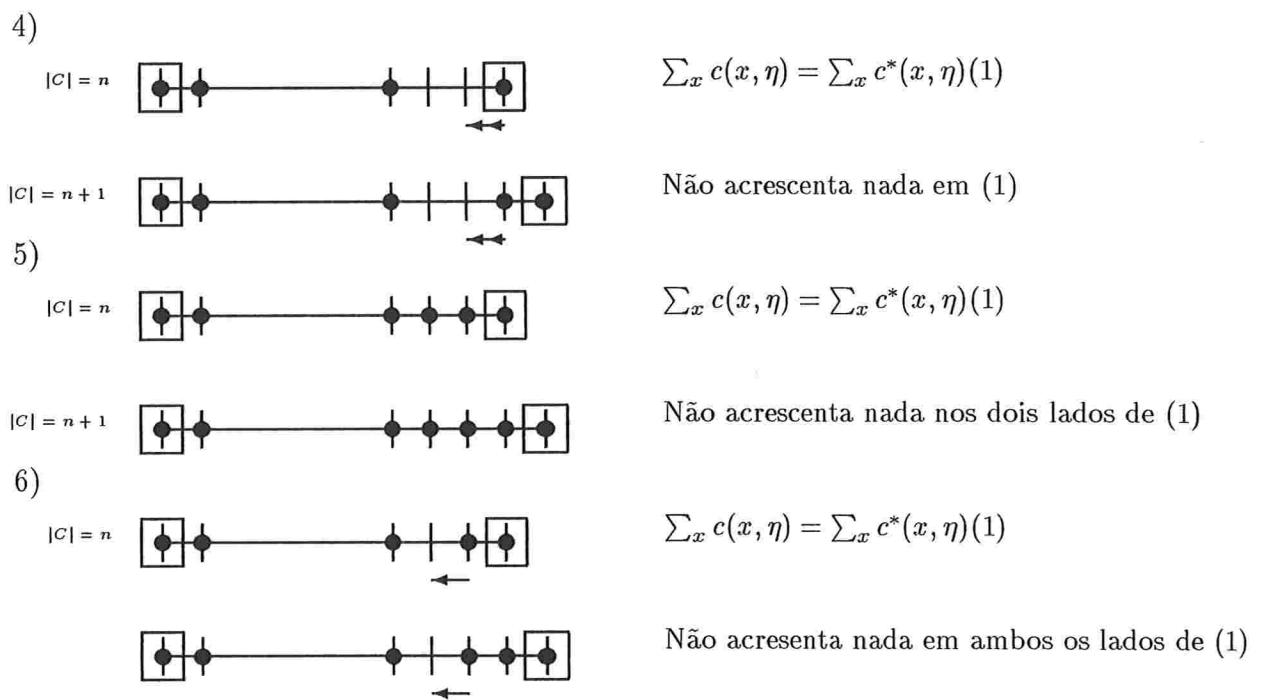


Figura 2.11: Caso com uma partícula na origem e no sítio 1, introduzindo uma partícula

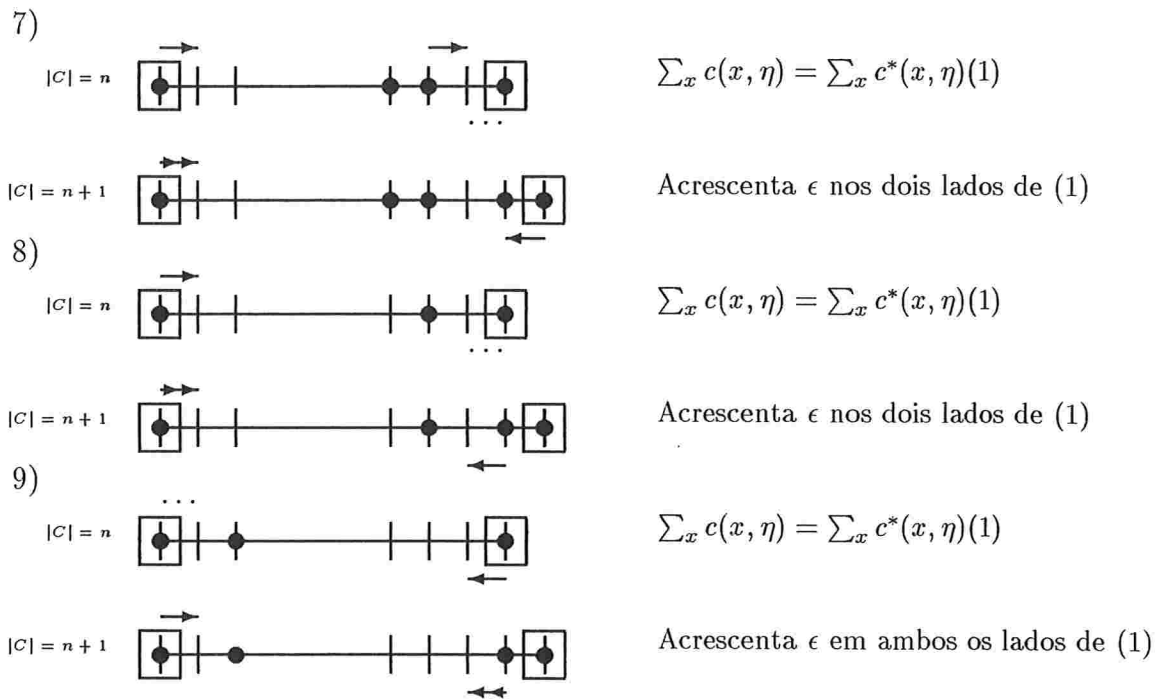


Figura 2.12: Caso com uma partícula na origem e o sítio 1 vazio, introduzindo uma partícula

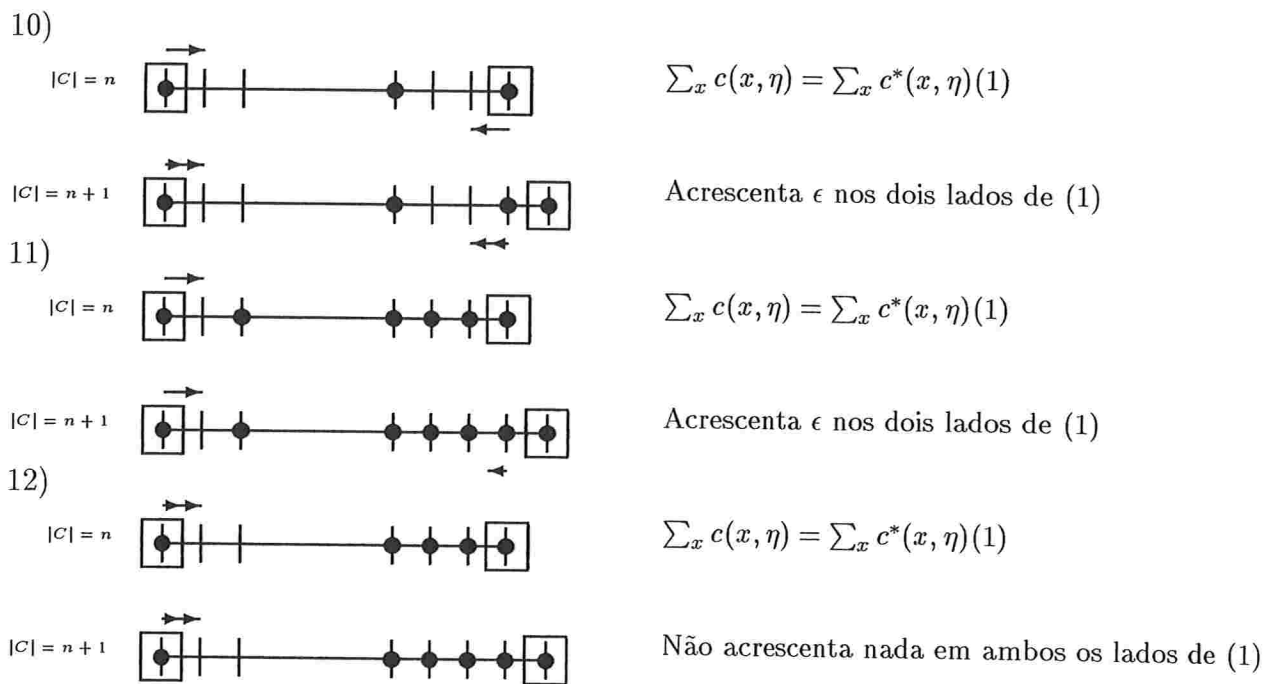


Figura 2.13: Caso com uma partícula na origem e o sítio um vazio, introduzindo uma partícula

13)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)(1)$$

$|C| = n + 1$



Não acrescenta nada nos dois lados de (1)

14)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)(1)$$

$|C| = n + 1$



Não acrescenta nada nos dois lados de (1)

15)



$$\sum_x c(x, \eta) = \sum_x c^*(x, \eta)(1)$$

$|C| = n + 1$



Não acrescenta nada em ambos os lados de (1)

Figura 2.14: Caso com uma partícula na origem e o sítio 1 vazio, introduzindo uma partícula

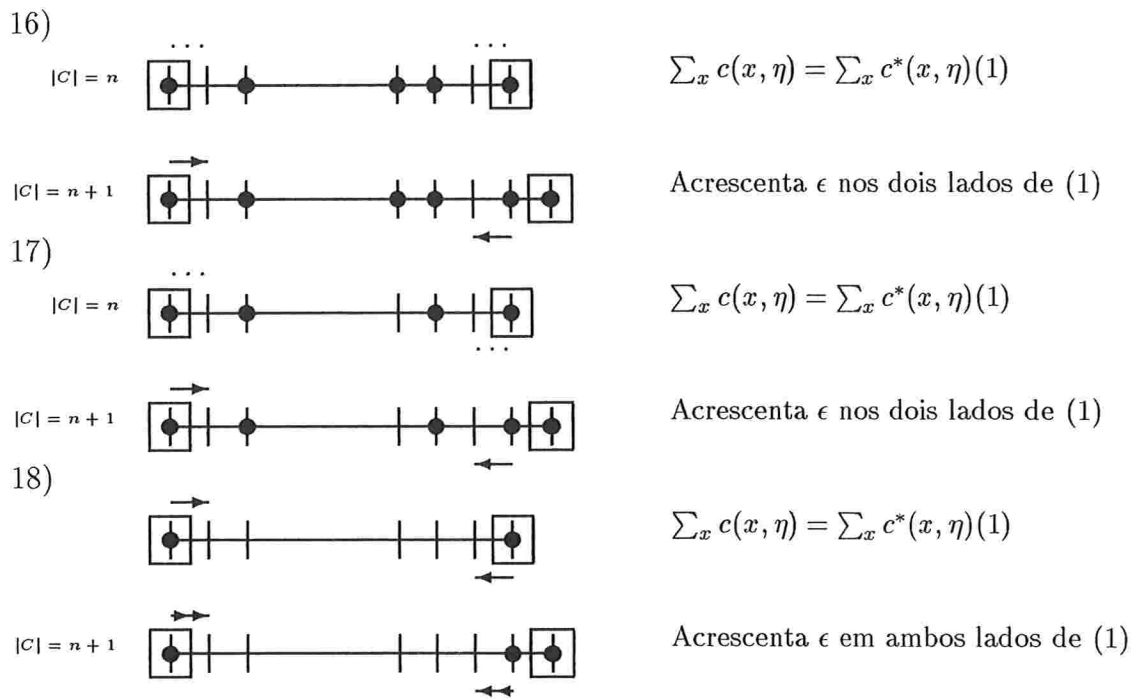


Figura 2.15: Caso com uma partícula na origem e o sítio 1 vazio, introduzindo uma partícula

Com isto mostramos que (2.17) é verdadeira para qualquer tamanho de toro e portanto temos como verdadeira a seguinte igualdade:

$$\int \sum_x c(x, \eta) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int \sum_x c^*(x, \eta) f(\eta) g(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

Do Lema 1.3 temos:

$$\int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x, \eta) g(\eta) f(\eta^{x+1, x}) \mathcal{M}_\lambda(d\eta) = \int \sum_{x=-N+1}^N c^*(x+1, \eta^{x+1, x}) g(\eta^{x+1, x}) f(\eta) \mathcal{M}_\lambda(d\eta)$$

E com isto temos que: $\mathcal{M}_\lambda(fLg) = \mathcal{M}_\lambda(gL^*f)$ é verdadeira e isto prova o Lema 1 e invariância de \mathcal{M}_λ segue ♠.

Para terminarmos a demonstração do Teorema 2 vamos mostrar que \mathcal{M}_λ é invariante extremal. Para isto vamos definir:

$$\tau_x \eta_t(y) := \eta_t(y + x)$$

$$\tau_x f(\eta_t) := f(\tau_x \eta_t)$$

$$\tau_x \mu f := \mu(\tau_x f)$$

E dizemos que uma medida é invariante por translações se:

$$\mu = \tau_x \mu \quad \forall x \in Z$$

Vamos estudar o processo visto de uma partícula marcada. Para isto vamos definir $\mathcal{M}'_\lambda := \mathcal{M}_\lambda(\cdot | \eta(0) = 1)$. Vamos chamar de $X(t)$ a posição no tempo t da partícula que inicialmente esta na origem. Desta maneira vamos considerar o processo $\eta'_t := \tau_{X(t)} \eta_t$. Este processo tem o seguinte gerador:

$$\begin{aligned} L'f(\eta) &= \sum_{x, x+1 \neq 0} c_1(x, \eta) [f(\eta^{x, x+1}) - f(\eta)] \\ &\quad + c_2(x, \eta) [f(\tau_1 \eta^{0, 1}) - f(\eta)] \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde:

$$\begin{aligned}
c_1(x, \eta) &= \mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=1, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=1\}}(\eta) + \mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=0\}}(\eta) \\
&+ (1+\epsilon)\mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=1, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=0\}}(\eta) + (1-\epsilon)(\eta)\mathbf{I}_{\{\eta(x-1)=0, \eta(x)=1, \eta(x+1)=0, \eta(x+2)=1\}}(\eta) \\
c_2(x, \eta) &= \mathbf{I}_{\{\eta(-1)=1, \eta(1)=0, \eta(2)=1\}}(\eta) + \mathbf{I}_{\{\eta(-1)=0, \eta(1)=0, \eta(2)=0\}}(\eta) \\
&+ (1+\epsilon)\mathbf{I}_{\{\eta(-1)=1, \eta(1)=0, \eta(2)=0\}}(\eta) + (1-\epsilon)(\eta)\mathbf{I}_{\{\eta(-1)=0, \eta(1)=0, \eta(2)=1\}}(\eta)
\end{aligned}$$

Seja $S'(t)$ o semi grupo definido através de (2.18), isto é, o semi grupo do processo que evolui condicionado a ter uma partícula na origem. Em [4] temos o seguinte teorema.

Teorema 3 [Ferrari(1992)] *Seja μ invariante por translação e $\mu(\mu(0)) > 0$, então $\mu' S'(t) = (\mu S(t))'$, onde $()'$ é a medida condicionada a ter uma partícula na origem.*

Em palavras o Teorema 3 afirma que a medida μ' do processo que evolui com uma partícula na origem é a mesma da medida do processo que evolui de μ e depois é condicionada a ter uma partícula na origem. Como corolário do Teorema 2 temos que se μ é invariante temporal e por translações então μ' é invariante para $S'(t)$. Como $\mathcal{M}_\lambda(\eta(0)) = \lambda > 0$ e \mathcal{M}_λ é invariante por translação temos que \mathcal{M}_λ é invariante para o processo visto de uma partícula na origem. Vamos olhar a medida induzida no processo misantropo reverso obtida da configuração do KLS visto de uma partícula na origem, sob \mathcal{M}'_λ . Pela construção do processo misantropo reverso a partir do KLS, temos que em cada sítio do processo misantropo o número de partículas segue a distribuição de probabilidade μ_ρ construída da seguinte maneira:

- Com probabilidade q colocamos a primeira partícula e uma vez colocada a primeira partícula as demais partículas deste sítio serão colocadas sob uma lei

geométrica de parametro $1 - p$. Se a primeira partícula não é colocada então este sítio ficará vazio.

Esta medida surge de \mathcal{M}'_λ pois como temos uma partícula na origem iremos colocar um buraco no sítio 1 como probabilidade q e depois continuaremos a colocar buracos como uma distribuição geométrica de parâmetro $1 - p$. E assim como contamos o número de buracos entre partículas para obter a configuração do misantropo temos que o número de partículas em um sítio do KLS terá distribuição μ_ρ .

Desta maneira a distribuição do processo misantropo reverso obtido do KLS é uma distribuição produto de μ_ρ e será denotada por $\gamma_\rho := \otimes \mu_\rho$. Como a medida \mathcal{M}'_λ no KLS é invariante temporal, e pela bijeção do KLS-misantropo temos que γ_ρ também é invariante temporal para o processo misantropo. Em símbolos:

$$\gamma_\rho(A) = \mathcal{M}'_\lambda(A^{-1})$$

onde $A \in \mathcal{P}$, com \mathcal{P} sendo a sigma algebra gerada pelos eventos cilíndricos em $N^{\mathbb{Z}}$ e $A^{-1} = \{\eta \in \Omega'_{KLS} : \varphi(\eta) \in A\}$ onde: Ω'_{KLS} é o espaço das configurações do processo KLS com uma partícula na origem e $\varphi(\eta)$ é a função de bijeção do KLS-misantropo visto de uma partícula na origem, descrita na Seção 1.2.

As taxas do processo misantropo, foram definidas para que se tenha a todo instante a bijeção entre o KLS, visto de uma partícula na origem, e o misantropo, ou seja: se $\xi \sim \gamma_\rho S^m(t)$, onde $S^m(t)$ é o semi grupo para o processo misantropo definido por (1.2), então $\varphi^{-1}(\xi) \sim \mathcal{M}'_\lambda S'(t)$. Portanto:

$$\gamma_\rho S^m(t)(A) = \mathcal{M}'_\lambda S'(t)(A^{-1}),$$

Pelo fato de γ_ρ ser produto temos que ela é invariante por translações. Vamos usar agora o teorema 1, que caracteriza as medidas invariantes por translações para

o processo misantropo. Para comodidade do leitor reescrevemos aqui:

Teorema 1 [Cocozza(1985)] *Suponha que as taxas $b(\eta(x), \eta(y))$ satisfazem :*

1. $\frac{b(i,j)}{b(j+1,i-1)} = \frac{b(i,0)b(1,j)}{b(j+1,0)b(1,i-1)}$ para $i \geq 1, j \geq 0$,
2. $b(i,j) - b(j,i) = b(i,0) - b(j,0)$ para $i \geq 0, j \geq 0$,

e que a distribuição inicial do processo δ é invariante por translações então $\delta S(t)$ converge para δ_∞ dada por:

$$\delta_\infty = \int \alpha_\rho \lambda(d\rho),$$

onde $\alpha_\rho := \otimes \theta_\rho$ com θ_ρ satisfazendo a seguinte condição:

$$\frac{\theta_\rho(i+1)}{\theta_\rho(i)} = \frac{\theta_\rho(1)}{\theta_\rho(0)} \frac{b(1,i)}{b(i+1,0)} \quad (2.19)$$

Pela invariância temporal e invariância por translações de γ_ρ , temos que esta medida é igual a medida α_ρ do Teorema 1. Assim, $\delta_\infty = \gamma_\rho S(t) = \gamma_\rho$ temos que:

$$\gamma_\rho = \int \gamma_\sigma \lambda(d\sigma),$$

o que implica que $\lambda(\rho) = 1$ e que portanto γ_ρ é invariante extremal, e portanto se a medida induzida por \mathcal{M}'_λ , pela bijeção KLS-misantropo, é extremal, temos que \mathcal{M}'_λ também é invariante extremal.

Finalmente se \mathcal{M}'_λ é invariante extremal isto implica que \mathcal{M}_λ também é. Para provar esta afirmação faremos primeiro a seguinte observação:

Vamos considerar o movimento do ponto de vista do buraco, isto é quando uma partícula salta de x para $x+1$ veremos um buraco saltando do sítio $x+1$ para o sítio x . Chamaremos este ponto de vista de simetria partícula buraco e sob este ponto de

vista estaremos vendo o movimento de partículas saltando da esquerda para direita com as taxas do processo KLS reverso. Estas partículas são na verdade buracos. E como provamos que para o KLS reverso \mathcal{M}_λ é invariante temporal e por translações temos que pelo Teorema 2, para o KLS reverso, que $\mathcal{M}''_\lambda := \mathcal{M}_\lambda\{.\mid\eta(0) = 0\}$ é invariante temporal e, pelo Teorema 1 \mathcal{M}'' é extremal.

Vamos provar agora a afirmação que \mathcal{M}'_λ extremal entre as medidas invariantes por translações implica que \mathcal{M}_λ é extremal. Para isto suponhamos que \mathcal{M}_λ não seja extremal. Portanto devem existir duas medidas diferentes μ_1 e μ_2 invariantes, e invariantes por translações tais que:

$$\mathcal{M}_\lambda = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \quad (2.20)$$

Então temos também que $\mu'_1 = \mu'_2 = \mathcal{M}'_\lambda$ e $\mu''_1 = \mu''_2 = \mathcal{M}''_\lambda$, pois se isto não ocorrer basta usar a equação (2.20), condicionar a ter uma partícula na origem ou um buraco e chegaremos a conclusão que \mathcal{M}'_λ ou \mathcal{M}''_λ não são extremais. Além disto a igualdade de μ'_1, μ'_2 com \mathcal{M}'_λ implica que estas medidas são invariantes por translações e da mesma forma, μ''_1, μ''_2 também são invariantes por translações. Com tudo isto chegamos em:

$$\mu_1 = \mu'_1\mu_1(\eta(0) = 1) + \mu''_1(1 - \mu_1(\eta(0) = 1)) = \mu_2$$

Pois como como μ_1 e μ_2 são invariantes por translação isto implica que elas possuem a mesma densidade, isto é, pela igualdade de μ'_1 com \mathcal{M}'_λ temos a seguinte convergência:

$$\frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x) \mid \eta(0) = 1) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1)$$

portanto:

$$\frac{1}{\mu_1(\eta(0) = 1)} \frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x), \eta(0) = 1) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1)$$

e;

$$\frac{1}{\mu_1(\eta(0) = 0)} \frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x), \eta(0) = 0) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1)$$

logo

$$\frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x), \eta(0) = 1) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1) \mu_1(\eta(0) = 1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x), \eta(0) = 0) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1) \mu_1(\eta(0) = 0)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{x=n}^{2n} \mu_1(\eta(x)) \rightarrow \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1) \quad (2.21)$$

Como μ_1 é invariante por translações o lado esquerdo de (2.21) é igual: $\mu_1(\eta(0) = 1)$ e portanto: $\mu_1(\eta(0) = 1) = \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1)$. Podemos repetir o argumento para mostrar que: $\mu_2(\eta(0) = 1) = \mathcal{M}_\lambda(\eta(0) = 1)$. Com isto terminamos a prova do Teorema 2. ♠

Observação: Existe uma outra maneira de mostrar que \mathcal{M}_λ é invariante para o processo $KLS(\epsilon)$ quando $|\epsilon| < 1$. Para isto, vamos mostrar o Lema 2.4 em que a μ_ρ , obtida da cadeia de Markov \mathcal{M}'_λ , é a marginal que satisfaz a relação (2.19) no processo misantropo e que portanto a medida induzida por \mathcal{M}'_λ , $\gamma_\rho := \otimes \mu_\rho$ é invariante temporal para o processo misantropo. Assim devido a bijeção entre o processo misantropo e o KLS visto de uma partícula concluímos que \mathcal{M}'_λ é invariante temporal para o processo KLS visto de uma partícula. Podemos também repetir o argumento para \mathcal{M}''_λ e mostrar que esta medida é invariante temporal. Devido à invariância por translações da medida \mathcal{M}_λ temos que a densidade de partícula se preserva temporalmente, isto é: $\mathcal{M}_\lambda(\eta_t^\eta(x) = 1) = \lambda$ com $\eta \sim \mathcal{M}_\lambda$. Para mostrar isto, vamos definir X_t^y como sendo a posição da partícula no instante t , que inicialmente

estava no sítio x . Assim :

$$\eta_t(x) = \sum_{y \in Z} \eta(y) I\{X_t^y = x\}$$

$$E(\eta_t(x)) = \sum_{y \in Z} E(\eta(y) I\{X_t^y = x\}) = \sum_{y \in Z} E(\eta(0) I\{X_t^0 = x\}) = E(\eta(0) \sum_{y \in Z} I\{X_t^0 = x\}) = \lambda$$

Na equação anterior, a segunda igualdade é justificada pela invariância por translações da medida \mathcal{M}_λ . Também usamos o fato de $\sum_{y \in Z} I\{X_t^0 = x\} = 1$ pois o sistema de partículas é conservativo. Finalmente pelo Teorema 3 temos que:

$$(\mathcal{M}_\lambda S(t))'(\cdot) = \mathcal{M}'_\lambda S'(t)(\cdot) = \mathcal{M}'_\lambda(\cdot)$$

$$(\mathcal{M}_\lambda S(t))''(\cdot) = \mathcal{M}''_\lambda S''(t)(\cdot) = \mathcal{M}''_\lambda(\cdot)$$

Logo:

$$\mathcal{M}_\lambda S(t)(\cdot, \eta(0) = 1) = \mathcal{M}_\lambda S(t)(\eta(0) = 1) \mathcal{M}'_\lambda(\cdot)$$

$$\mathcal{M}_\lambda S(t)(\cdot, \eta(0) = 0) = \mathcal{M}_\lambda S(t)(\eta(0) = 0) \mathcal{M}''_\lambda(\cdot).$$

Portanto:

$$\mathcal{M}_\lambda S(t)(\cdot) = \mathcal{M}_\lambda(\cdot)$$

Lema 2.4 Se $|\epsilon| < 1$, μ_ρ satisfaz a seguinte condição:

$$\frac{\theta_\rho(i+1)}{\theta_\rho(i)} = \frac{\theta_\rho(1)}{\theta_\rho(0)} \frac{b(1,i)}{b(i+1,0)} \quad (2.22)$$

Prova:

Considere primeiramente: $i > 1$ então,

$$\frac{\mu_\rho(i+1)}{\mu_\rho(i)} = \frac{q(1-p)^{i-1}p}{q(1-p)^{i-2}p} = (1-p)$$

e

$$\frac{\mu_\rho(1) b(1, i)}{\mu_\rho(0) b(i + 1, 0)} = \frac{qp}{1 - q} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

a igualdade das duas relações acima ocorre se:

$$\frac{(1 - p)(1 - q)}{pq} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (2.23)$$

que é a condição para que a medida \mathcal{M}_λ seja invariante.

Para $i = 1$ então,

$$\frac{\mu_\rho(2)}{\mu_\rho(1)} = \frac{q(1 - p)p}{qp} = (1 - p)$$

e

$$\frac{\mu_\rho(1) b(1, i)}{\mu_\rho(0) b(i + 1, 0)} = \frac{qp}{1 - q} \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

novamente a igualdade entre as relações acima ocorre se (2.23) é satisfeita .

Por último $i = 0$,

$$\frac{\mu_\rho(1)}{\mu_\rho(0)} = \frac{\mu_\rho(1) b(1, 0)}{\mu_\rho(0) b(1, 0)}$$

que claramente é verdadeira.♠

Com base na extremalidade da medida \mathcal{M}_λ no conjunto das medidas invariantes por translações, obtemos uma Lei dos Grandes Números para o fluxo de partícula através da origem para o processo KLS.

Vamos chamar de $x_i(0)$ a posição da i -ésima partículas de η e para fixar a representação seja $x_0(0)$ a primeira partícula a direita da origem. Assim, $x_i(t)$ é a posição da i -ésima partícula no instante t . Seja o fluxo de partículas através da origem

definido da seguinte maneira: $F^\eta(t) := \#\{i : x_i(0) \leq 0 \text{ e } x_i(t) > 0\}$, isto é, $F^\eta(t)$ conta o número de partículas que no instante inicial esta a esquerda da origem e no instante t esta a direita da origem. Então temos o seguinte Teorema:

Teorema 4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} F^\eta(t) = \mathcal{M}_\lambda \psi \text{ } P_{\mathcal{M}_\lambda} \text{ } q.c. \quad (2.24)$$

onde ψ é definido por:

$$\psi(\eta) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_{P_{\mathcal{M}_\lambda}}(F^\eta(h))}{h}.$$

Alem disto:

$$\mathcal{M}_\lambda \psi = (1 + \epsilon)\lambda(1 - q)q(1 - p) + (1 - \epsilon)\lambda q^2 p + \lambda q^2(1 - p) + (1 - q)\lambda q p$$

Prova:

Considere o maior inteiro menor que t , $[t]$ e vamos escrever o limite em (2.24) da seguinte maneira:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{[t]} (F^\eta(i) - F^\eta(i-1)) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F^\eta(t) - F^\eta([t])}{t} \quad (2.25)$$

Vamos analisar o primeiro limite de (2.25), chamando este limite de $Z(\eta)$. $Z(\eta)$ existe pelo teorema ergódico de Birkhoff, pois como escolhemos a distribuição inicial das partículas sob a medida invariante, os $(F^\eta(i) - F^\eta(i-1))$ formam uma sequência estacionária, pois a distribuição inicial das partículas é invariante temporal e $(F^\eta(i) - F^\eta(i-1))|_{\eta_u, u \leq i-1} = (F^\eta(i) - F^\eta(i-1))|_{\eta_{i-1}}$ em lei e ainda, $\mathcal{M}_\lambda(F^\eta(1)) < \infty$, pois a distribuição de Poisson tem cauda fina, este argumento será usado novamente mais adiante de maneira mais explícita. Devido a existência do limite temos que:

$$Z(\eta) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{[t]} (F^\eta(i) - F^\eta(i-1)) = \theta_1 Z(\eta) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=2}^{[t]+1} (F^\eta(i) - F^\eta(i-1)), \quad (2.26)$$

isto é, Z é invariante temporal.

$Z(\eta)$ também é invariante por translações pois $Z(\eta) = \tau_1 Z(\eta)$, onde $\tau_1 Z(\eta) := Z(\tau_1 \eta)$ e τ é o operador de translação espacial, para $Z(\tau_1 \eta)$ podemos considerar o fluxo através do sítio 1. Desta maneira como:

$$\begin{aligned} |F([t]) - \tau_1 F([t])| &= |\#\{i : x_i(0) \leq 0 \text{ e } x_i([t]) > 0\} - \#\{i : x_i(0) \leq 1 \text{ e } x_i([t]) > 1\}| \\ &= \left| \sum_i (I_{\{x_i(0) < 0 \text{ e } x_i([t]) = 1\}} - I_{\{x_i(0) = 1 \text{ e } x_i([t]) > 1\}}) \right| \leq 2. \end{aligned}$$

Temos então que, ao dividir por t e tomando o limite para infinito, a diferença entre Z e $\tau_1 Z$ é nula.

Suponha agora que Z não seja constante. Então deve existir uma constante c tal que: $\mathcal{M}_\lambda(A) = \alpha \in (0, 1)$, onde $A := \{\eta : Z(\eta) > c\}$. Como $\alpha < 1$ podemos escrever que:

$$\mathcal{M}_\lambda(B) = \alpha \mathcal{M}_\lambda(B|A) + (1 - \alpha) \mathcal{M}_\lambda(B|A^c) \quad \text{para todo evento } B$$

Mas isto é uma contradição pois devido a invariância temporal e por translações de Z , temos que $\mathcal{M}_\lambda(B|A)$ e $\mathcal{M}_\lambda(B|A^c)$ são invariantes e invariantes por translações e portanto isto implica que \mathcal{M}_λ não é extremal no conjunto das medidas invariantes e invariantes por translações. Para ver porque $\mathcal{M}_\lambda(B|A)$ e $\mathcal{M}_\lambda(B|A^c)$ são invariantes e invariantes por translações considere:

$$\tau_1 \mathcal{M}_\lambda(B|A) = \frac{\mathcal{M}_\lambda(\tau_1 B, A)}{\mathcal{M}_\lambda(A)} = \frac{\mathcal{M}_\lambda(\tau_1 B, \tau_1 A)}{\mathcal{M}_\lambda(A)} = \frac{\mathcal{M}_\lambda(\tau_1(B, A))}{\mathcal{M}_\lambda(A)} = \mathcal{M}_\lambda(B|A) \quad (2.27)$$

A segunda igualdade em (2.27) é justificada pois Z é invariante por translações, e a última igualdade é devida ao fato de \mathcal{M}_λ ser invariante por translações. Podemos repetir o mesmo argumento em (2.27) para o operador θ_1 e concluir que $\mathcal{M}_\lambda(B|A)$ é invariante temporal, pois $\mathcal{M}_\lambda(\eta_t^\eta \in A) = 1, \forall \eta \in A$ e isto decorre de (2.26). Desta maneira com $Z(\eta)$ é constante o teorema ergódico mostra que $Z(\eta) = E(F(1))$ onde E é a esperança com relação ao medida $P_{\mathcal{M}_\lambda}$.

O segundo limite de (2.25) converge a zero $P_{\mathcal{M}_\lambda}$ q.c. Para isto temos que mostrar que,

$$P_{\mathcal{M}_\lambda}(F^\eta([t] + 1) - F^\eta([t]) > \epsilon_1 t \text{ infinitas vezes.}) = 0.$$

Mas podemos fazer a seguinte majoração,

$$P_{\mathcal{M}_\lambda}(F^\eta([t] + 1) - F^\eta([t]) > ct) < P(S([t]))$$

onde $P(S([t]))$ é a probabilidade de que no intervalo de tempo $([t] + 1) - [t]$ existam pelo menos $[\epsilon_1 t] + 1$ setas. Da construção gráfica do processo, temos que setas são sorteadas de acordo com três processos de Poisson, um com taxa $1 - \epsilon$ e os outros dois com taxa ϵ cada um. Portanto como a soma de processos de Poisson é um processo de Poisson com a soma das taxas temos que:

$$P(S([t])) = \sum_{j=[\epsilon_1 t]}^{\infty} \frac{e^{-(1+\epsilon)}(1+\epsilon)^j}{j!} < e^{-c[\epsilon_1 t]}, \quad \forall c, 0 < c < \infty$$

Ou seja $P(S([t]))$ é a cauda da distribuição de Poisson. Assim temos que $\sum_{[t]} P(S([t])) < \infty$ e portanto, por Borel Cantelli, temos que: $P_{\mathcal{M}_\lambda}(F^\eta(t) - F^\eta([t]) > \epsilon_1 t \text{ inf.vezes}) = 0$

Vamos agora identificar o limite (2.24). Para isto vamos dividir o intervalo de tempo $[0, 1]$ em partes de comprimento h , $h > 0$. Desta maneira:

$$\begin{aligned} E(F^\eta(1)) &= \sum_{i=1}^{[1/h]} E(F^\eta(ih) - F^\eta((i-1)h)) + E(F^\eta(h)) - E(F^\eta([1/h]h)) \\ &= \frac{1}{h} E(F^\eta(h)) + E(F^\eta(1)) - E(F^\eta([1/h]h)), \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade da equação anterior é justificada novamente pela estacionariedade dos incrementos de fluxo $F(ih) - F((i-1)h)$. Assim tomando o limite

$h \rightarrow 0$ obtemos:

$$E(F^\eta(1)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E(F^\eta(h)) \quad (2.28)$$

Para identificar o limite em (2.28), usaremos o fato de que a probabilidade de aparecer mais de uma marca do processo de Poisson em um intervalo de tempo h é da ordem de $o(h)$. Portanto:

$$E_{P_{\mathcal{M}_\lambda}}(F^\eta(1)) = \mathcal{M}_\lambda \psi$$



Observação: Podemos substituir as formulas de p, q em função de λ, ϵ em $\mathcal{M}_\lambda \psi$ e obter o seguinte resultado, que chamaremos de F_λ

$$F_\lambda = \frac{\theta - \epsilon \sqrt{4\lambda(1-\lambda)}}{\theta^3} P_{\mathcal{M}_\lambda} \text{ q.c.}$$

onde:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{4\lambda(1-\lambda)}} + \sqrt{\frac{1}{4\lambda(1-\lambda)} - 1 + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}$$

Podemos também estabelecer como corolário ao teorema 3 a Lei dos grandes números para o fluxo de partículas através de uma posição aleatória, independente da configuração.

Teorema 5 *Seja $U(t)$ um processo de nascimento com taxa w independente de η_t , isto é $P(U(t) = k) = \exp(-wt)(wt)^k/k!$, $P(U(0) = 0) = 1$. Seja $F_U(t) := \#\{i : x_i(0) \leq 0 \text{ e } x_i(t) > 0\} - \#\{i : x_i(0) > 0 \text{ e } x_i(t) \leq U(t)\}$ então:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_U(t)}{t} = F_\lambda - w\lambda \quad P_{\mathcal{M}_\lambda} \text{ q.c.}$$

Prova:

A demonstração é análoga à do Teorema 4 para o processo $\tilde{\eta}_t := \tau_{U(t)}\eta_t$. Mas para isto temos que mostrar que \mathcal{M}_λ é invariante extremal na classe das medidas invariantes por translações para o processo $\tau_{U(t)}\eta_t$ (neste caso todas as medidas invariantes são invariantes por translações e o mesmo argumento encontrado na prova do Corolário 9.6 de [4] funciona neste caso). Este processo tem gerador $\tilde{L}f(\eta)$ definido por:

$$\tilde{L}f(\eta) = \sum_x c(x, \eta)[f(\eta^{x, x+1}) - f(\eta)] + w(f(\tau_1\eta) - f(\eta)) \quad (2.29)$$

Aplicando a medida \mathcal{M}_λ em $\tilde{L}f(\eta)$, a primeira parte de (2.29) é zero e como esta medida é invariante por translações temos que $\mathcal{M}_\lambda(f(\tau_1\eta)) = \mathcal{M}_\lambda(f(\eta))$ e portanto a segunda parte também é nula. ♠

Capítulo 3

Choques duplos no modelo antiferromagnético em temperatura zero ($\epsilon = 1$)

Schütz et al em [2] e [3] estudaram os choques para o processo KLS e obtiveram um quadro com um choque se quebrando em dois choques que se afastam um do outro. Dizemos que este é um caso em que há choques duplos. Com o objetivo de estabelecer a ocorrência de choques duplos rigorosamente iremos considerar o caso extremo $\epsilon = 1$ e estudaremos o choque e o fluxo de partículas neste caso. Choques duplos também ocorrem quando $\epsilon < 1$.

Se $\epsilon = 1$, nós obtemos um caso especial de Q para $\lambda \geq \frac{1}{2}$

$$Q = \begin{matrix} & & 0 & 1 \\ & 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \\ & 1 & & \end{matrix}, \quad (3.1)$$

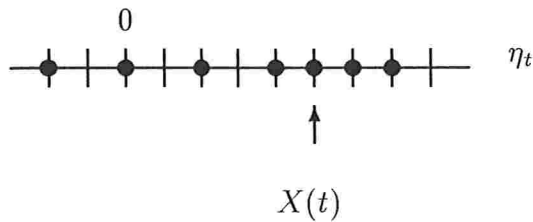
e $\lambda \leq \frac{1}{2}$,

$$Q = \begin{matrix} & & 0 & 1 \\ & 0 & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & 1 & & \end{matrix}, \quad (3.2)$$

Note que $\mathcal{M}_{1/2}$ para $\epsilon = 1$ corresponde a uma mistura de duas configurações invariantes que são partículas e buracos alternados, e as partículas não se movem.

Para $0 \leq \rho \leq \lambda \leq 1$ denote por $\mathcal{M}_{\rho,\lambda}$ a medida \mathcal{M}_ρ a esquerda da origem e \mathcal{M}_λ a direita da origem, construída da seguinte maneira: sejam $\eta_1 \sim \mathcal{M}_\lambda$, $\eta_2 \sim \mathcal{M}_\rho$ então dizemos que $\eta_3 \sim \mathcal{M}_{\rho,\lambda}$ se $\eta_3(x) = \eta_1(x)I(x \geq 0) + \eta_2(x)I(x < 0)$.

Consideraremos o caso $\rho = \frac{1}{2}, \lambda > \frac{1}{2}$. Seja $X(t)$ a posição da primeira partícula a direita da origem que possui uma partícula a sua esquerda. Note que $X(t)$ esta definido $P_{\mathcal{M}_\lambda}$ q.c. Devido à definição, $X(t)$ muda a passo dois na rede Z .



Estamos interessados em estudar o processo visto de $X(t)$.

Podemos acompanhar a posição da partícula marcada olhando o processo $(\eta_t, X(t)) \in \{(\eta, z) : \eta \in \{0, 1\}^{\mathbf{Z}}, z \in \mathbf{Z} \eta(z) = 1\}$ que possui o seguinte gerador:

$$\begin{aligned}\bar{L}f(\eta) &= \sum_{x,x+1 \neq z} \eta(x-1)\eta(x)(1-\eta(x+1))[f(\eta^{x,x+1}, z) - f(\eta, z)] \\ &= +(1-\eta(z+2))[f(\eta^{z,z+2}, z+2) - f(\eta, z)]\end{aligned}$$

Vamos considerar o processo $\eta'_t := \tau_{X(t)}\eta_t$, ou seja $\eta'_t(y) = \eta_t(y + X(t))$.

Este processo possui o seguinte gerador:

$$\begin{aligned}L'f(\eta) &= \sum_{x,x+1 \neq z} \eta(x-1)\eta(x)(1-\eta(x+1))[f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)] \\ &\quad +(1-\eta(2))[f(\tau_2\eta^{1,2}) - f(\eta)]\end{aligned}$$

Por conveniência supomos que $X(0) = 1$ e definimos: $\mathcal{M}'_{1/2,\lambda} = \mathcal{M}_{1/2,\lambda}(\cdot | \eta(-1) = 0, \eta(0) = 1, \eta(1) = 1)$

Teorema 6 *A medida $\mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$ é invariante para o processo $\tau_{X(t)}\eta_t$. E ainda se a distribuição inicial de partículas é $\mathcal{M}_{\frac{1}{2},\lambda}$ então $\tau_{X(t)}\eta_t$ e $X(t)$ são independentes. Além disto, $X(t)$ é um Processo de Poisson com salto 2 e taxa q .*

Prova :

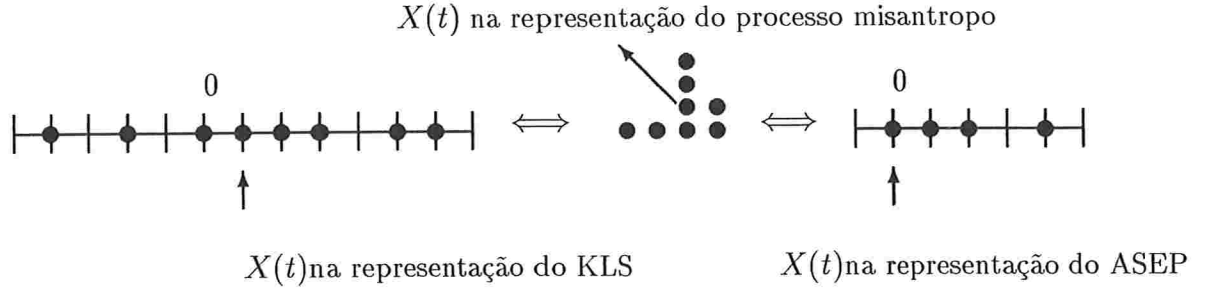
A idéia principal da prova é a bijeção entre o processo KLS, na condição particular do teorema, com o processo misantropo. Dada uma configuração inicial η do KLS sob a distribuição $\mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$ $\lambda > \frac{1}{2}$ obtemos a configuração correspondente do processo misantropo, contando o número de partículas entre buracos. Com isto um bloco de partículas consecutivas no KLS são representados por uma coluna em um único sítio no processo misantropo. É importante observar que para toda $\eta \sim \mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$ o sítio -1 estará sempre vazio e teremos uma partícula na origem e no sítio 1. Isto

permite construir uma única configuração no processo misantropo com as seguintes características:

- Na origem do sistema temos duas partículas, sendo que a de cima é a partícula marcada.
- Em todos os sítios à esquerda da origem temos uma única partícula.
- Em todos os sítios à direita da origem temos pelo menos uma partícula.

Como todas as partículas menos a marcada podem ser consideradas indistinguíveis e a partícula marcada salta a passo 2 podemos fazer a seguinte descrição do processo misantropo obtido do KLS(1) começando com $\eta \sim \mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$, $\lambda > 1/2$.

As partículas inicialmente em baixo, uma em cada sítio sob $\mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$, são declaradas inativas e nunca se movimentam. As demais partículas são declaradas ativas. Quando houver partículas ativas no sítio x , a taxa 1 uma delas salta para $x + 1$, por posicionando-se sob as demais partículas daquele sítio. É obvio que o processo das partículas ativas é o processo de alcance nulo de taxa 1, totalmente assimétrico para a direita, começando sem nenhuma partícula (ativa) em $\{\dots, -3, -2, -1\}$ e com produto de geométricas(q), (onde q é a probabilidade de colocar duas partículas consecutivas no KLS(1)), $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ mais uma partícula em $\{0\}$, por baixo das demais, se houver, que será a partícula marcada. É claro também, que a relação entre o KLS(1) e o processo de alcance nulo assim descrita é 1 a 1 (quando a medida inicial do KLS(1) é $\mathcal{M}'_{1/2,\lambda}$). Seja X'_t a posição da partícula marcada no tempo t para o processo de alcance nulo. De [6], Teorema VII.4.7 e Corolário VII.4.9, concluímos que $X'_t \sim Po(q)$, é independente de $\tau_{X'_t}\zeta_t$ onde ζ_t é o processo de alcance nulo descrito acima, e $\tau_{X'_t}\zeta_t \sim \zeta_0$. Traduzindo para o KLS(1), temos o resultado do Teorema 6.♠



Como corolário do Teorema 6 acima temos para $\epsilon = 1$:

Teorema 7 *Lei dos Grandes Números*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} = 2q = 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$$

Teorema 8 *Hidrodinâmica*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}'_{\frac{1}{2}, \lambda} S(\epsilon^{-1}t) \tau_{\epsilon^{-1}r} f = \begin{cases} \mathcal{M}'_{\frac{1}{2}} f & \text{se } r < 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \\ \mathcal{M}'_{\lambda} f & \text{se } r > 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \end{cases}$$

Prova :

Escreva:

$$\mathcal{M}'_{\frac{1}{2}, \lambda} S(\epsilon^{-1}t) \tau_{\epsilon^{-1}r} f = E_{\mathcal{M}'_{\frac{1}{2}, \lambda}} S(\epsilon^{-1}t) \tau_{\epsilon^{-1}r - X(\epsilon^{-1}t)} f(\tau_{X(\epsilon^{-1}t)} \eta)$$

Agora pelo teorema 1.2.1 vimos que $\tau_{X(t)} \eta_t$ tem distribuição $\nu'_{\frac{1}{2}, \lambda}$ independente de $X(t)$ portanto:

$$E_{\mathcal{M}'_{\frac{1}{2}, \lambda}} S(\epsilon^{-1}t) \tau_{\epsilon^{-1}r - X(\epsilon^{-1}t)} f(\tau_{X(\epsilon^{-1}t)} \eta) = E_{\mathcal{M}'_{\frac{1}{2}, \lambda}} \tau_{\epsilon^{-1}r - X(\epsilon^{-1}t)} f(\eta)$$

Por fim, pela Lei dos Grandes Números para $X(t)$, temos que: $\epsilon^{-1}r - X(\epsilon^{-1}t)$ converge quase certamente, quando $\epsilon \rightarrow 0$, para $-\infty$ se $r < 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$ e para $+\infty$ se $r > 2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$. Isto prova o corolário. ♣.

Pela simetria partícula-buraco, isto é, olhando o movimento do ponto de vista dos buracos, para $\rho < \frac{1}{2}$, defina: $X_b(0) = -2$, $\mathcal{M}''_{\rho,1/2} = \mathcal{M}_{\rho,1/2}(\cdot|\eta(-2) = 0, \eta(-1) = 0, \eta(0) = 1)$.

Teorema 9 *Lei dos Grandes números*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_b(t)}{t} = 2 \left(1 - \frac{1}{1-\rho} \right)$$

Teorema 10 *Hidrodinâmica*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}''_{\rho,1/2} S(\varepsilon^{-1}t) \tau_{\varepsilon^{-1}r} f = \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho} f & \text{if } r < 2(1 - \frac{1}{1-\rho}) \\ \mathcal{M}_{\frac{1}{2}} f & \text{if } r > 2(1 - \frac{1}{1-\rho}) \end{cases}$$

Podemos usar os Teoremas 8 e 10 no seguintes casos: $\rho < \frac{1}{2} < \lambda$. Para isto defina: $X_b(0) = -2$, $X_p(0) = 1$ $\mathcal{M}'''_{\rho,\lambda} = \mathcal{M}_{\rho,\lambda}(\cdot|\eta(-2) = 0, \eta(-1) = 0, \eta(0) = 1, \eta(1) = 1)$

Teorema 11 *Hidrodinâmica*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}'''_{\rho,\lambda} S(\varepsilon^{-1}t) \tau_{\varepsilon^{-1}r} f = \begin{cases} \mathcal{M}_{\rho} f & \text{if } r < 2(1 - \frac{1}{1-\rho}) \\ \mathcal{M}_{[\frac{1}{2}]} f & \text{if } 2(1 - \frac{1}{1-\rho}) < r < 2(\frac{1}{\lambda} - 1) \\ \mathcal{M}_{\lambda} f & \text{if } r > 2(\frac{1}{\lambda} - 1) \end{cases}$$

Prova :

Vamos acoplar $\eta^1 \sim \mathcal{M}'_{\rho,\lambda}$ com $\eta^2 \sim \mathcal{M}'_{\frac{1}{2},\lambda}$ e $\eta^3 \sim \mathcal{M}''_{\rho,\frac{1}{2}}$ de maneira que: $\eta^1(x) = \eta^2(x), \forall x \geq 0$ e $\eta^1(x) = \eta^3(x), \forall x < 0$. Sejam $X_1(0)$, como definido anteriormente para configuração η^1 , isto é a posição da primeira partícula a direita da origem que possui uma partícula a sua esquerda. Analogamente defina $X_2(0)$ para η^2 . Então, $X_1(t) = X_2(t)$, pois pelo acoplamento a configuração à direita de $X_1(t), X_2(t)$ é

a mesma em todo instante de tempo t , e à esquerda teremos sempre a seguinte configuração nos dois sítios: $\eta_t^1(X_1(t) - 1) = \eta_t^2(X_2(t) - 1) = 1$ e $\eta_t^1(X_1(t) - 2) = \eta_t^2(X_2(t) - 2) = 0$. Isto é, devido a que $\epsilon = 1$ e, para $t = 0$, à esquerda de X_1, X_2 não existir um blocos de partículas. De acordo com o Teorema 8 a direita de $X_2(t)$ teremos um braço do choque com perfil de densidade λ . Para o lado esquerdo da origem podemos aplicar um raciocínio análogo usando a simetria partícula buraco para X_b . ♠

Intuitivamente podemos compreender a formação do patamar com densidade $1/2$ no teorema anterior da seguinte maneira: como a esquerda da origem temos densidade menor que $1/2$ a matriz de transição não permite o sorteio de duas partículas lado a lado. Isto implica na formação do patamar com densidade $1/2$ à esquerda da origem, à medida que as partículas saltem em direção da origem. Do lado direito da origem, o movimento de $X(t)$ também irá deixar uma configuração de partículas alternadas a sua esquerda até a origem, formando-se assim um patamar com densidade $1/2$. Assim temos duas ondas de choque, uma à esquerda da origem, que caminhará para $-\infty$ e outra a direita que caminhará para $+\infty$ e entre elas teremos o patamar com densidade $1/2$.

O Teorema 11 estabelece a ocorrência de choques duplos microscópicos partindo-se e se afastando-se um do outro, a não ser no caso em que $\rho = 1 - \lambda = 0$, onde podemos dizer que há um choque simples congelado.

Capítulo 4

Choques simples no processo antiferromagnético

Estudamos choques no processo KLS no Capítulo 3 para $\epsilon = 1$. O mecanismo que ajudou o estudo do choque naquele caso foi a formação da configuração congelada quando partimos com uma configuração inicial $0 < \rho < 1/2 < \lambda < 1$. Para estas condições nós provamos que $\mu' S'(t) = \nu_{\rho, \lambda}$ para todo tempo. Para $\epsilon < 1$ não temos este mecanismo e é necessário então uma abordagem diferente. Neste capítulo, vamos estudar o caso em que $0 < \epsilon < 1$ (modelo antiferromagnético) e há apenas choques simples. Isto, como discutiremos mais adiante, ocorre para certos valores ρ, λ , por exemplo, ρ suficientemente próximo de 0 e λ suficientemente próximo de 1. No caso $\epsilon = 1$, isto corresponde ao caso trivial $\rho = 0, \lambda = 1$ em que o choque é simples e congelado. Vamos obter alguns resultados parciais. O principal deles é uma Lei do Grandes Números para uma marcada aleatória que acompanha macroscopicamente o choque, isto é, a velocidade da marca, dada pela LGN é igual à do choque macroscópico. A abordagem será a mesma que a usada em [4]. A dificuldade adicional vem de que

discrepâncias em condições iniciais acopladas de forma básica não se conservam.

Vamos acoplar η e ξ e definir a seguinte nomenclatura:

- Se $\eta(x) = 1$ e $\xi(x) = 0$ dizemos que no sítio x temos uma partícula mais isolada, $+$;
- Se $\eta(x) = 0$ e $\xi(x) = 1$ dizemos que no sítio x temos uma partícula menos isolada, $-$;
- Se $\eta(x) = \xi(x) = 1$ dizemos que no sítio x temos uma partícula mais e uma partícula menos. Ou seja a partícula mais e a partícula menos estão acompanhadas uma pela outra neste sítio, \pm ;
- Se $\eta(x) = \xi(x) = 0$ dizemos que no sítio x temos um buraco.

Assim do acoplamento podemos construir uma configuração no espaço $E^3 = \{0, -, \pm, +\}^Z$ onde: 0 representa um sítio vazio, $-$ um sítio ocupado com uma partícula menos isolada, \pm um sítio ocupado com uma partícula que representa uma partícula mais e uma partícula menos juntas e $+$ um sítio com uma partícula mais isolada. A dinâmica entre as partículas mais e menos sera definida de maneira que as *marginais* sejam processos KLS, ou seja se olharmos as partículas $+$ sozinhas ou acompanhadas veremos um processo KLS com densidade λ , distribuído sob \mathcal{M}_λ e se olharmos as partículas $-$ veremos uma processo KLS com densidade ρ sob \mathcal{M}_ρ . Vamos definir nas figuras 4.1, 4.1 e 4.3 as taxas do processo em E^3 apenas para as transições $\pm |, \pm + e + |$. As demais podem ser obtidas destas por meio da simetria entre as partículas $+$ e partículas $-$ e também que em termos de taxas as transições $+ |$ e $+ -$ são as mesmas.

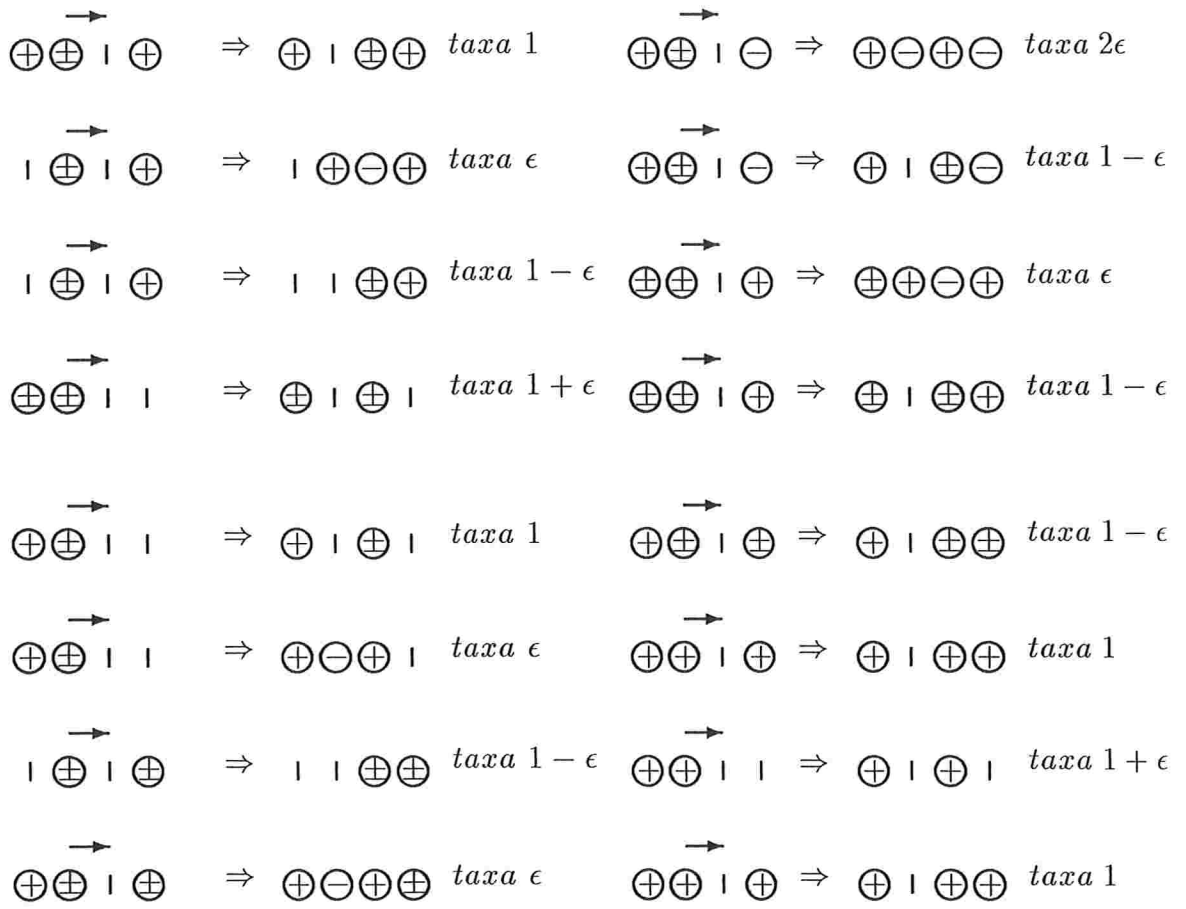


Figura 4.1: Taxas do processo em E^3 .

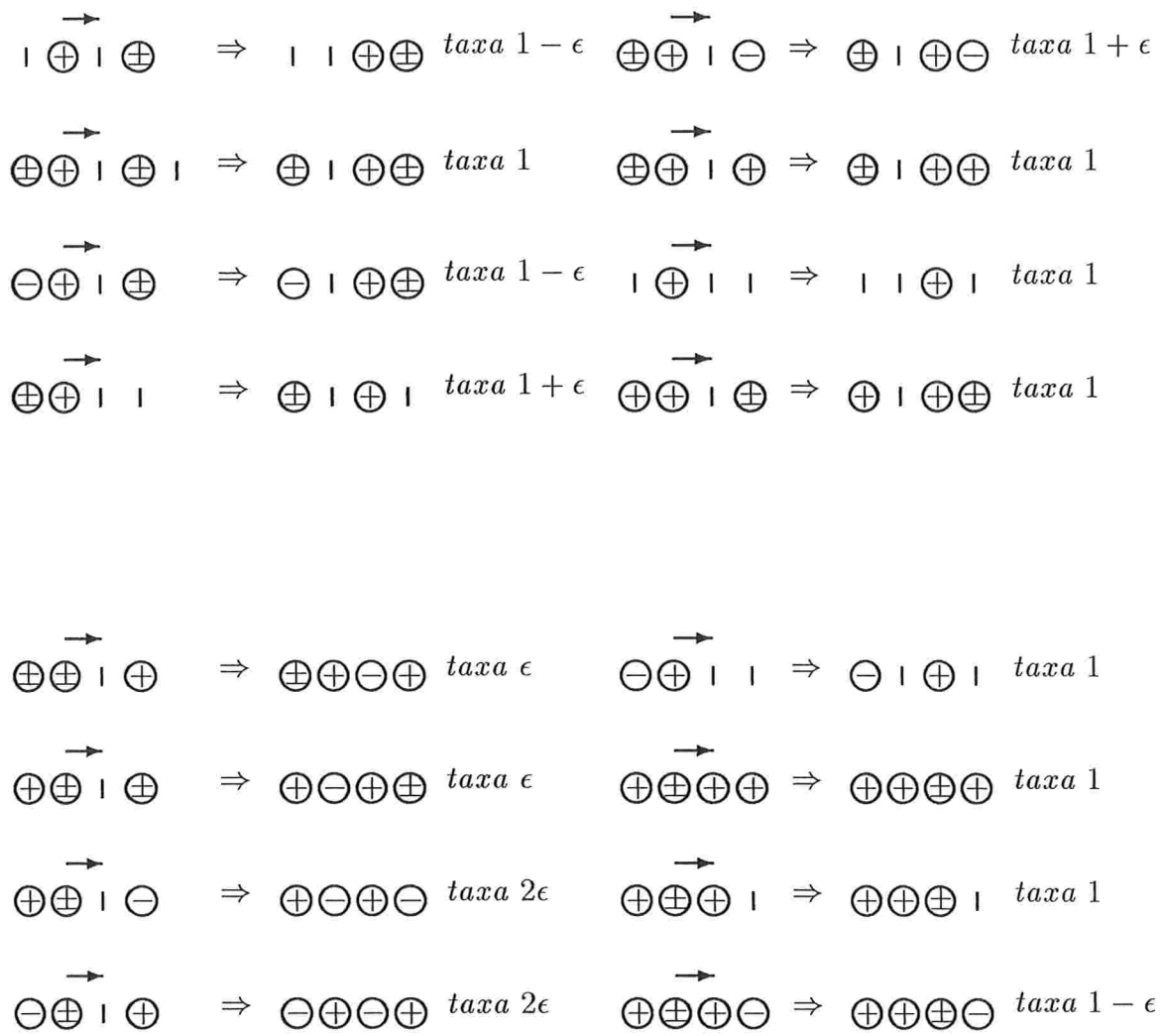


Figura 4.2: Taxas do processo em E^3 .

$$\begin{array}{lcl}
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \oplus \oplus \oplus \oplus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \oplus \oplus \oplus \ominus \\ \text{taxa } 1 - \epsilon \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \ominus \oplus \oplus \mid \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \ominus \oplus \oplus \mid \\ \text{taxa } 1 + \epsilon \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ominus \oplus \oplus \ominus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \ominus \oplus \oplus \ominus \\ \text{taxa } 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mid \oplus \oplus \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \mid \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ominus \oplus \oplus \oplus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \ominus \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mid \oplus \oplus \mid \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \mid \oplus \oplus \mid \\ \text{taxa } 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ominus \oplus \oplus \oplus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \ominus \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 + \epsilon \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \mid \oplus \oplus \oplus \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \mid \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 - \epsilon \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \mid \oplus \oplus \ominus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mid \oplus \oplus \ominus \\ \text{taxa } 1 - \epsilon \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \oplus \oplus \oplus \mid \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \oplus \oplus \oplus \mid \\ \text{taxa } 1 + \epsilon \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \oplus \oplus \oplus \ominus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \oplus \oplus \oplus \ominus \\ \text{taxa } 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \oplus \oplus \oplus \oplus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \oplus \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \oplus \oplus \oplus \oplus \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \oplus \oplus \oplus \oplus \\ \text{taxa } 1 + \epsilon \end{array}
\end{array}$$

Figura 4.3: Taxas do processo em E^3 .

Desta maneira, se temos inicialmente que $\eta(x) \geq \xi(x) \forall x \in Z$ no instante inicial, então temos uma configuração em E^3 somente com partículas mais e menos acompanhadas ou com partículas mais isoladas, não aparecendo portanto partículas menos isoladas. Porém isto não continuará assim em todo instante de tempo t .

Vamos acoplar $\eta \sim \mathcal{M}_\lambda$ com $\xi \sim \mathcal{M}_\rho$ com $\lambda > \rho$ de maneira que $\eta \geq \xi \forall x \in Z$ e deste acoplamento, construiremos uma medida π_2 em E^3 com as seguintes propriedades: as marginais de π_2 serão \mathcal{M}_λ e \mathcal{M}_ρ , π_2 é uma cadeia de Markov. Para isto sejam: p_1, q_1 os parâmetros da cadeia de Markov que gera \mathcal{M}_ρ e p_2, q_2 os parâmetros que geram ν_λ . Tais parâmetros devem satisfazer as condições da Teorema 2. Seja seguinte cadeia de Markov com dois tipos de partícula, Q_2 :

$$Q_2 = \begin{array}{c} 0 \quad \pm \quad + \\ 0 \left(\begin{array}{ccc} 1 - p_2 & p_1 & p_2 - p_1 \\ q_2 & 1 - q_1 & q_1 - q_2 \\ q_2 & p_1 & 1 - q_2 - p_1 \end{array} \right); \end{array} \quad (4.1)$$

Obeservação: Esta construção só faz sentido se $p_1 + q_2 \leq 1$. O espaço parametrico neste caso é não vazio pois das relações:

$$p = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{(1 - 2\lambda)^2 + 4\lambda(1 - \lambda)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}}$$

$$q = \frac{2(1 - \lambda)}{1 + \sqrt{(1 - 2\lambda)^2 + 4\lambda(1 - \lambda)\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}},$$

escolhendo $\rho = 1 - \lambda$ temos que $p_1 = q_2$ e portanto a relação $p_1 + q_2 \leq 1$ fica satisfeita para λ próximo de 1 e ρ próximo de zero.

Seja π_2 uma cadeia de Markov estacionária dada pela matriz Q_2 . Esta cadeia possui uma única medida de equilíbrio dada por:

$$\pi_2(0) = 1 - \lambda \quad (4.2)$$

$$\pi_2(\pm) = \rho \quad (4.3)$$

$$\pi_2(+)= \lambda - \rho \quad (4.4)$$

Lema 4.1 *As marginais de π_2 são μ_ρ e μ_λ*

Prova:

Vamos chamar de X_n a configuração obtida de π_2 , onde representaremos a partícula \pm por 1 e a partícula $+$ por 2. Defina as projeções Y_n, Z_n por :

- Se $X_n = 0$ ou 1 então $Y_n = Z_n = X_n$;
- Se $X_n = 2$ então $Y_n = 0, Z_n = 1$.

Alem disto vamos definir uma relação de compatibilidade: Dizemos que: $x_i \sim y_i$ se $x_i = 1$ e $y_i = 1$ ou se $x_i = 0$ ou 2 e $y_i = 0$.

Dados $Y_0, \dots, Y_{n-2} \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} & \pi_2(Y_n = 1, Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0) = \\ & \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_n = 1, X_{n-1} = 1, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\ & = \pi_2(X_n = 1 | X_{n-1} = 1) \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_{n-1} = 1, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\ & = (1 - q_1) \pi_2(Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0) \end{aligned}$$

Da mesma forma temos que para:

$$\begin{aligned}
& \pi_2(Y_n = 1, Y_{n-1} = 0, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0) = \\
& \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_n = 1, X_{n-1} = 0, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\
& \quad + \\
& \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_n = 1, X_{n-1} = 2, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\
& = \\
& p_1 \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_{n-1} = 1, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\
& \quad + \\
& p_1 \sum_{x_0, \dots, x_{n-2} \sim y_0, \dots, y_{n-2}} \pi_2(X_{n-1} = 2, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) \\
& = p_1 \pi_2(Y_{n-1} = 0, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0)
\end{aligned}$$

Podemos repetir o mesmo argumento para a projeção Z_n . Com isto concluímos que através das projeções obtemos Q_ρ e Q_λ de Q_2 e isto garante então que as marginais de π_2 são μ_λ e μ_ρ . ♠

Vamos definir agora o fluxo de partículas através de uma posição aleatória, $U(t) : R^+ \rightarrow Z$ constantes por partes. Seja $\eta \in E^3$, $\eta \sim \pi_2$. Vamos definir $p_i(0)$ como sendo a posição da i -ésima partícula mais no instante inicial e $p_i(t)$ a posição desta

partícula no instante t . Para fixar a representação vamos chamar de $p_0(0)$ a primeira partícula mais a direita da origem no instante inicial. Da mesma forma vamos definir $n_i(0)$ a posição da i -ésima partícula menos no instante inicial. Vamos definir os fluxos através de uma posição aleatória $U(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
F_U^+(s) &= \#\{i : p_i(t^-) \leq U(t^-); p_i(t) > U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
&\quad - \#\{i : p_i(t^-) \geq U(t^-); p_i(t) < U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
F_U^-(s) &= \#\{i : n_i(t^-) \leq U(t^-), n_i(t) > U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
&\quad - \#\{i : n_i(t^-) \geq U(t^-); n_i(t) < U(t), \text{ para algum } t \leq s\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Estamos interessados também em saber se a partícula mais (menos) que cruza a marca, faz isto sozinha ou acompanhada de uma partícula menos (mais). Para verificar isto vamos definir:

$$\begin{aligned}
FA(s) &= \#\{i, \exists j \in Z \text{ e } t \leq s : p_i(t^-) = n_j(t^-) \leq U(t^-); p_i(t) = n_j(t) > U(t)\} \\
&\quad - \#\{i, \exists j \in Z \text{ e } t \leq s : p_i(t^-) = n_j(t^-) \geq U(t^-); p_i(t) = n_j(t) < U(t)\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ou seja $FA(s)$ conta o número de partículas mais e menos que saltam acompanhadas pela marca menos o número de partículas acompanhadas sobre as quais a marca saltou sobre elas.

Vamos definir agora o fluxo de partículas através de U até o tempo s que pulam sozinhas:

$$\begin{aligned}
FS_+(s) &= \#\{i : p_i(t^-) \leq U(t^-), p_i(t^-) \neq n_j(t^-) \forall j; p_i(t) > U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
&+ \#\{i : p_i(t^-) \leq U(t^-), \exists j : p_i(t^-) = n_j(t^-); p_i(t) > U(t), p_i(t) \neq n_k(t) \forall k, \text{ para algum } t \leq s\} \\
&\quad - \#\{i : p_i(t^-) \geq U(t^-), p_i(t^-) \neq n_j(t^-) \forall j; p_i(t) < U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
&- \#\{i : p_i(t^-) \geq U(t^-), \exists j : p_i(t^-) = n_j(t^-); p_i(t) < U(t), p_i(t) \neq n_k(t) \forall k, \text{ para algum } t \leq s\}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
FS_-(s) &= \#\{i : n_i(t^-) \leq U(t^-), n_i(t^-) \neq p_j(t^-) \forall j; n_i(t) > U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
+\#\{i : n_i(t^-) \leq U(t^-), \exists j : n_i(t^-) = p_j(t^-); n_i(t) > U(t), p_j(t) \neq n_k(t) \forall k, \text{ para algum } t \leq s\} \\
&\quad -\#\{i : n_i(t^-) \geq U(t^-), n_i(t^-) \neq p_j(t^-) \forall j; n_i(t) < U(t), \text{ para algum } t \leq s\} \\
-\#\{i : n_i(t^-) \leq U(t^-), \exists j : n_i(t^-) = p_j(t^-); n_i(t) < U(t), n_i(t) \neq p_k(t) \forall k, \text{ para algum } t \leq s\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Claramente, todo salto de uma partícula $+$, $(-)$ é um salto ou acompanhado ou solitário. Logo temos:

$$F_U^+(s) = FA(s) + FS_+(s) \tag{4.9}$$

$$F_U^-(s) = FA(s) + FS_-(s) \tag{4.10}$$

De (4.9) e (4.10) obtemos a seguinte relação:

$$F_U^+(s) - F_U^-(s) = FS_+(s) - FS_-(s) \tag{4.11}$$

Vamos definir agora o movimento de uma marca $M(t) \in Z$ que depende da configuração $\eta \in E^3$, com $\eta \sim \pi_2$. Inicialmente esta marca está em cima de uma partícula mais isolada, digamos a primeira à direita da origem. A interação desta marca com as demais partículas se dá sob as seguintes regras:

- Regra 1: Se a partícula mais com a marca salta em cima de uma partícula menos, então a marca salta para a próxima partícula mais isolada à direita.

- Regra 2: Se uma partícula menos salta sobre a partícula mais com a marca então marca salta para a próxima partícula mais isolada à esquerda.

Decorre destas duas regras que:

- Fato 1: Se a partícula mais com a marca salta sobre uma partícula menos , temos uma partícula mais que está na marca e uma partícula menos que está à direita da marca que após o salto estarão à esquerda da marca e portanto contarão -1 para FS_+ e FS_- .
- Fato 2: Se uma partícula menos salta sobre a marca, temos uma partícula mais que esta na marca e uma partícula menos que está à esquerda da marca que após o salto estarão a direita da marca e portanto contarão $+1$ para FS_+ e FS_- .

Decorre de $\eta \sim \pi_2$ que para η_t^n temos:

- Fato 3: Será enunciado no lema a seguir e é uma propriedade importante para o processo KLS.

Lema 4.2 *Sob π_2 , entre duas partículas mais consecutivas pode existir no máximo uma partícula menos.*

Prova:

Se $\eta \sim \pi_2$ então inicialmente não temos nenhuma partícula menos isolada. Da maneira como foram definidas as regras de movimento das partículas mais e menos vemos que para criar uma partícula menos isolada os únicos mecanismos são os mostrados nas figuras abaixo:

- 1) $|\pm| + - - - > | + - +$ taxa ϵ
- 2) $+ \pm || - - - > + - + |$ taxa ϵ
- 3) $- \pm || - - - - > - + - ||$ taxa ϵ
- 4) $|\pm| - - - - > | - + -$ taxa ϵ
- 5) $+ \pm | - - - - > + - + -$ taxa 2ϵ
- 6) $- \pm | + - - - - > - + - +$ taxa 2ϵ

Por estes 6 mecanismos, cada partícula menos isolada criada ficará entre duas partículas mais isoladas. Vamos olhar agora o movimento das partículas mais e menos isoladas e verificar se é possível em geral configurações com partículas menos isoladas consecutivas sem uma partícula mais isolada entre elas. Para isto vamos considerar uma partícula menos isolada e chamar de *pse*, a primeira partícula mais isolada a sua esquerda, (e sempre existe uma pois a distribuição inicial é sob π_2 e os mecanismos 1 a 6 criam partículas menos isolada entre duas partículas mais isolada), e *psd* a primeira partícula mais isolada a direita. Sejam duas partículas menos isoladas, consecutivas quaisquer. Como toda partícula menos isolada foi criada por um dos mecanismos 1 a 6, cada uma delas, logo após terem sido criadas, possuem *pse,psd*. Se a *psd* de partícula menos isolada for a *pse* para a outra partícula menos isolada e se esta partícula mais isolada encontra a partícula menos isolada então as duas deixam de ser isolada e a *psd* da partícula mais isolada que sobrou passa ser a *psd* da antiga partícula menos isolada. Ou seja:

$$+ \dots - \dots + \dots - \dots + - - - - > + \dots - \dots \pm \dots +$$

Mesmo assim continuaremos a ter uma partícula menos isolada entre duas partículas mais isoladas.

Assim pelos mecanismos 1 a 6 e pelo movimento das partículas mais e menos isoladas nunca iremos gerar duas partículas menos isoladas consecutivas sem a presença de uma partícula mais isolada entre elas. ♠

Lema 4.3 *O fluxo de partícula mais isoladas através de M é igual ao fluxo de partículas menos isoladas através de M , ou seja: $FS_+(s) = FS_-(s)$, $\forall s$*

Prova:

Pela regra da exclusão entre partículas mais, uma partícula mais isolada não pode passar pela marca a não ser quando a marca deixa uma partícula mais isolada, o que ocorre quando esta encontra uma partícula menos, e salta para próxima partícula mais isolada à direita ou esquerda. Mas quando isto ocorre temos a seguinte situação:

Quando a marca abandona a partícula mais em que está e pula para próxima partícula mais ela salta sobre somente uma partícula mais isolada (justamente aquela na que estava) e uma partícula menos isolada (justamente aquela que a marca encontra e que a faz trocar de partícula mais isolada). Isto porquê não há outras partículas – isolada até a próxima partícula + isolada, como foi demonstrado pelo Lema 4.2. Neste caso a contribuição para ambos os fluxos é a mesma, como foi observado pelos fatos 1 e 2.

A marca não pode saltar por mais de uma partícula mais isolada, pois como definimos seu movimento, ela salta para próxima partícula mais isolada. ♠

Portanto a relação (4.11) para $M(s)$ fica:

$$F_M^+(s) - F_M^-(s) = 0 \quad (4.12)$$

Ao definir $F_U^+(s)$, por (4.5), precisamos olhar todas as trajetória das partículas

entre 0 e s . No entanto sejam os fluxos de partícula mais e menos definidos abaixo, olhando somente a posição inicial e no instante s das partículas:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_U^+(s) &= \#\{i : p_i(0) \leq U(0), p_i(t) > U(t), t \leq s\} \\
&\quad - \#\{i : p_i(0) \geq U(0), p_i(t) < U(t), t \leq s\} \\
\overline{F}_U^-(s) &= \#\{i : n_i(0) \leq U(0), n_i(t) > U(t), t \leq s\} \\
&\quad - \#\{i : n_i(0) \geq U(0), n_i(t) < U(t), t \leq s\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Podemos observar que: $F_U^+(s) = \overline{F}_U^+(s)$ e $F_U^-(s) = \overline{F}_U^-(s)$

Lema 4.4 *Se $U(t) \leq U'(t), \forall t$ então*

$$\overline{F}_U^+(t) - \overline{F}_U^-(t) - (\overline{F}_{U'}^+(t) - \overline{F}_{U'}^-(t)) \geq -1$$

Prova:

Pela definição:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_U^+(t) - \overline{F}_U^-(t) &= \#\{i : p_i(0) \leq U(0), p_i(t) > U(t)\} \\
&\quad - \#\{i : p_i(0) \geq U(0), p_i(t) < U(t)\} \\
&\quad - \#\{i : n_i(0) \leq U(0), n_i(t) > U(t)\} \\
&\quad + \#\{i : n_i(0) \geq U(0), n_i(t) < U(t)\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
-\overline{F}_{U'}^+(t) + \overline{F}_{U'}^-(t) &= -\#\{i : p_i(0) \leq U(0), p_i(t) > U'(t)\} \\
&\quad + \#\{i : p_i(0) \geq U(0), p_i(t) < U'(t)\} \\
&\quad + \#\{i : n_i(0) \leq U(0), n_i(t) > U'(t)\} \\
&\quad - \#\{i : n_i(0) \geq U(0), n_i(t) < U'(t)\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Somando as equações (4.14) e (4.15) e combinando os termos envolvendo p_i e n_i separadamente chegamos:

$$\begin{aligned} \overline{F}_U^+(t) - \overline{F}_U^-(t) - (\overline{F}_{U'}^+(t) - \overline{F}_{U'}^-(t)) &= \#\{i : U(t) \leq p_i(t) \leq U'(t)\} \\ &\quad - \#\{i : U(t) \leq n_i(t) \leq U'(t)\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sempre que tivermos uma partícula \pm entre $U(t)$ e $U'(t)$ esta partícula contara +1 para a soma de partículas positivas e +1 para a soma de partículas negativas (4.16). Portanto as partículas \pm não alteram o resultado de (4.16). Pelo Fato 3, cada partícula menos isolada deve estar entre duas partículas mais isolada ou entre duas partículas menos isoladas consecutivas deve sempre existir pelo menos uma partícula mais isolada. Assim podemos majorar (4.16) pelo número de partículas menos isoladas entre $U(t)$ e $U'(t)$. Se tivermos somente uma partícula menos isolada neste intervalo então o menor valor de (4.16) será -1 , ou seja não temos nenhuma partícula mais isoladas no intervalo. Mas caso tenhamos somente duas partículas menos isolada, no intervalo, então necessariamente teremos uma partícula mais isolada entre as duas partículas menos isoladas e neste caso o menor valor possível de (4.16) será -1 . Suponha agora que tenhamos n partículas menos isoladas entre $U(t)$ e $U'(t)$ então pelo Fato 3 deveremos ter pelo menos $n-1$ partículas mais isoladas neste intervalo e assim o menor valor possível de (4.16) será -1 . ♠

Teorema 12

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = v := \frac{F_\lambda - F_\rho}{\lambda - \rho} \quad P_{\pi_2} \text{ q.c.} \quad (4.17)$$

onde $F_{(\cdot)}$ é dado pelo Teorema 4 do Capítulo 2.

Observação: O lado direito de (4.17) coincide com a velocidade do choque macroscópico neste caso, vide [1], [2] e [3], o que torna $M(t)$ uma marca macroscópica do choque. A questão de se M também é uma marca microscópica do choque fica em aberto neste trabalho e será objeto de futuras investigações.

Prova:

Seja $U_1(t)$ com lei de Poisson(w), com $w = v - \delta$, $\delta > 0$, independente de $\eta \in E^3$, $\eta \sim \pi_2$. Então, $M(t) > U_1(t)$ para $\forall t$ grande. Para mostrar isto, suponha que não, isto é, $\exists t_1, t_2, \dots, t_n, t_n \rightarrow \infty$ tal que: $M(t_n) \leq U_1(t_n)$. Do lema (4.4) temos:

$$\overline{F}_M^+(t) - \overline{F}_M^-(t) - (\overline{F}_{U_1}^+(t) - \overline{F}_{U_1}^-(t)) \geq -1$$

Mas do lema (4.3), $\overline{F}_M^+(t) - \overline{F}_M^-(t) = 0$ portanto:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{U_1}^+(t) - \overline{F}_{U_1}^-(t) &\leq 1 \\ \frac{\overline{F}_{U_1}^+(t) - \overline{F}_{U_1}^-(t)}{t_n} &\leq \frac{1}{t_n} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_{U_1}^+(t) - \overline{F}_{U_1}^-(t)}{t_n} &\leq 0 \end{aligned}$$

Como a marginal das partículas $+$ é um processo KLS com densidade λ e das partículas $-$, com densidade ρ pelo teorema 5 temos então:

$$\begin{aligned} (F_\lambda - w\lambda) - (F_\rho - w\rho) &\leq 0 \\ w &\geq \frac{F_\lambda - F_\rho}{\lambda - \rho} = v \end{aligned}$$

o que é uma contradição pois $w < v$.

Seja $U_2(t)$ com lei de Poisson($v + \delta$), $\delta > 0$, independente de $\eta \in E^3$, $\eta \sim \pi_2$. Então, repetindo o argumento usado para U_1 , temos que $M(t) < U_2(t)$ para $\forall t$. Assim desta maneira, $U_1(t) < M(t) < U_2(t)$ para $\forall t$ grande. Tomando o limite em t , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_1(t)}{t} &< \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_2(t)}{t} \\ v - \delta &< \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} < v + \delta \quad P_{\pi_2} \text{ q.c.} \end{aligned}$$

O resultado segue fazendo $\delta \rightarrow 0$. ♠

Conclusões

A principal técnica usada nas demonstrações desta tese foi o acoplamento. Primeiramente acoplamos o processo KLS visto de uma partícula ou buraco de referência com o processo misantropo. Depois disto utilizamos o acoplamento em várias ocasiões como por exemplo nas demonstrações dos teoremas que envolvem choques duplos. Finalmente usamos o acoplamento para construir um processo com três tipos de partículas.

O processo com três tipos de partículas parece ser promissor para um estudo mais detalhado de suas propriedades, afim de verificar se ele pode ser usado para demonstrar a existência de choques para $0 < \epsilon < 1$.

Finalmente podemos usar o teorema 1 para caracterizar, através das taxas, uma classe bem maior de sistemas de partículas do que o processo KLS, (digamos processo KLS generalizado). Para estes processos nós teríamos então, já caracterizados, as medidas invariantes e invariantes por translações e resultados sobre o fluxo de partículas.

Referências Bibliográficas

- [1] S.Katz, J.L.Lebowitz and H.Spohn, Nonequilibrium Steady States of Stochastics Lattice Gas Models of Last Ionic Conductors, *J.Stat.Phys* **34**, 497 (1984).
- [2] T.Antal and G.M.Schütz, Asymmetric exclusion process with next-nearest-neighbor interaction: Some comments on traffic flow and a nonequilibrium reentrance transition, *Physical Review E* **62**, 83 (2000).
- [3] V.Popkov, J.Hager, J.Krug and G.M.Schütz, Minimal current phase and universal boundary layers in driven diffusive systems, preprint (2000).
- [4] P.Ferrari, Shocks in the Burgers equation and the asymmetric simple exclusion process, E.Goles and S.Martínez(eds.), *Automata Networks and Dynamical Systems*, 25-64 (1992)
- [5] C.T.Cocozza, Process des misanthropes, *Z.Wahrs. Verw. Gebiete* **70**: 509-523 (1985)
- [6] Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer(1985)
- [7] Bahadoran,C;Guiol,H;Ravishankar,K;Saada,E; A constructive approach to Euler hydrodynamics for attractive processes application to k - step exclusion. *Stochastics Process Appl.* 99 (2002) $n^{\circ}1,1-30$
- [8] Guiol,H;Ravishankar,K,Saada,E; Microscopic structure of a decreasing shocks for the asymmetric k -step exclusion process. Preprint