**Testes de hipóteses em modelos de regressão linear simples funcionais**

Izabel Cristina Pereira Costa

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de concentração: **Estatística**

Orientadora: **Profa. Dra. Denise Aparecida Botter**

- São Paulo, março de 2006 -

Testes de Hipóteses em modelos de regressão linear simples funcionais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Izabel Cristina Pereira Costa e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 30 de março de 2006.

**Banca Examinadora:**

- **Profa. Dra. Denise Aparecida Botter (orientadora) - IME/USP**
- **Prof. Dr. Heleno Bolfarine - IME/USP**
- **Profa. Dra. Reiko Aoki - ICMC/USP**

# Resumo

Gimenez (1997) desenvolveu uma metodologia para corrigir a função escore de modo que estimadores consistentes e assintoticamente normais possam ser obtidos. Neste trabalho consideramos o modelo de regressão linear simples funcional. Com base nos resultados de Gimenez (1997) apresentamos expressões para os estimadores dos parâmetros do modelo e para a respectiva matriz de covariâncias nas situações em que a variância do erro de medida e a razão das variâncias dos erros são conhecidas. Aplicamos esses resultados para obter as estatísticas da razão de verossimilhanças, escore e Wald com base na função escore corrigida e a estatística de Wald com base na função escore usual para testar hipóteses sobre o coeficiente angular. Além disso, realizamos estudos de simulações para avaliar algumas propriedades dos estimadores e o desempenho dos testes propostos.

# Abstract

Gimenez (1997) developed a methodology to correct the score function so that consistent and asymptotically normal estimators can be obtained. In this work we consider the functional simple linear regression model. Based on the results of Gimenez (1997) we present expressions for the estimators of the parameters of the model and for the respective covariance matrix in the situations where the measure error variance and the errors variances ratio are known. We apply those results to obtain the likelihood ratio, score and Wald statistics based on the corrected score function and the Wald statistic based on the usual score function in order to test hypothesis on the angular coefficient. Moreover, we carry out simulation studies to evaluate some properties of the estimators and the behavior of the proposed tests.

# Agradecimentos

- Aos meus pais Abel e Maria Guilhermina pelo apoio, carinho e incentivo neste importante passo de minha vida.

- À minha irmã Rosemery e ao seu namorado Reginaldo pelo apoio que tive todo este tempo.

- Ao meu namorado Roched pelo companheirismo, compreensão e ajuda nas horas difíceis.

- Aos meus professores e colegas do IME-USP pela atenção e incentivo.

- A Denise Aparecida Botter e Mônica Carneiro Sandoval, pela excelente orientação e paciência que tiveram comigo.

# Índice

CAPÍTULO 1

# Introdução

Os modelos lineares com erros nas variáveis são importantes pelas suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, como por exemplo, ciências médicas ou ciências sociais, onde encontramos problemas envolvendo relações entre duas ou mais variáveis. Apesar dos avanços tecnológicos terem tornado cada vez mais precisos os procedimentos de mensuração, não é realista supor que tais variáveis sejam medidas sem erros e, o mais comum, é não termos acesso aos seus verdadeiros valores. Um modelo que leva em conta o erro de medida pode ser definido por:

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta z_i + \epsilon_i, \\ x_i &= z_i + u_i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$i = 1, \ldots, n$, onde $\alpha$ e $\beta$ são parâmetros estruturais desconhecidos. A quantidade $z$ não é observada diretamente, ou seja os valores observados são $y$ e $x$, com $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, u_1, \ldots, u_n$ sendo os erros de observação.

A literatura muitas vezes se refere ao modelo em (1.1) como sendo um modelo de regressão com erros nas variáveis. Mas, alguns autores utilizam atualmente somente a nomenclatura: modelo funcional e modelo estrutural (Kendall e Stuart, 1979, e Fuller, 1987). O modelo definido em (1.1) será chamado de modelo de regressão linear simples funcional com erro nas variáveis ou simplesmente modelo linear simples funcional quando assumimos que os verdadeiros valores da covariável $z_i$, são constantes fixas e desconhecidas. Quando as $z_i's$ são uma amostra aleatória de uma população com média $\mu$ e variância $\sigma_z^2$, não correlacionadas com os $\epsilon_i$, o modelo (1.1) é denominado modelo linear simples estrutural. Neste trabalho consideramos o modelo de regressão linear simples funcional.

No modelo funcional, os $z_i's$ são parâmetros fixos e portanto o número de parâmetros incidentais cresce com o tamanho $n$ da amostra. Solari (1969) mostrou que não existe solução de máxima verossimilhança para $\beta$ no modelo de regressão funcional normal, sendo que a raiz da equação da primeira derivada com respeito ao parâmetro estrutural é um ponto de sela e não de máximo.

Suposições adicionais são requeridas para realizar inferências no modelo funcional: $\sigma_u^2$ (variância de $u_i$) conhecida e a razão de variâncias $\lambda = \sigma_\epsilon^2/\sigma_u^2$ conhecida, onde $\sigma_\epsilon^2$ é a variância de $\epsilon_i$.

O problema de estimação dos parâmetros estruturais na presença de um grande número de parâmetros incidentais foi considerado por Neyman e Scott (1948). Eles mostraram que os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros estruturais podem ser inconsistentes. Por outro lado, a matriz de covariâncias assintótica não é necessariamente dada pela inversa da matriz de informação de Fisher, como mostrado por Patefield (1977, 1978).

O fracasso do método de máxima verossimilhança em modelos funcionais para se obter estimadores consistentes motivou a busca de enfoques alternativos para estimação dos parâmetros estruturais.

Uma técnica de estimação que usaremos é baseada na função escore corrigida. A vantagem desta técnica é sua aplicação tanto em modelos funcionais quanto estruturais. Particularmente é apropriada para modelos funcionais, pois não envolve as verdadeiras covariáveis desconhecidas que não precisam ser estimadas para a obtenção de estimadores dos parâmetros estruturais do modelo.

Nesse sentido temos dois enfoques:

- Nakamura (1990) define escore corrigido como a derivada do logaritmo da função de verossimilhança corrigido, desde que a diferenciação e a esperança condicional $E[\cdot|z, y]$ sejam operações permutáveis. No entanto, no modelo de regressão linear simples normal, com razão de variâncias conhecida, é fácil ver que a função escore corrigida não pode ser obtida como a derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido, mesmo existindo esta função.

- Gimenez (1997) supõe a existência de uma função escore corrigida baseada diretamente na função escore usual. Esta técnica é mais geral do que a proposta por Nakamura e estabelece condições de regularidade para a consistência e normalidade assintótica dos estimadores obtidos a partir da função escore corrigida.

Considerando a função escore usual, só é possível implementar o teste de Wald, pois os testes escore e razão de verossimilhanças não podem ser construídos devido ao fato de que no modelo funcional o número de parâmetros cresce com o tamanho da amostra. O objetivo deste trabalho é construir testes de hipóteses baseados na função escore corrigida (Gimenez, 1997), para modelos de regressão linear simples funcionais e compará-los ao teste de Wald baseado na função escore usual.

Este trabalho é composto por cinco capítulos. No Capítulo 2, apresentamos a idéia básica da metodologia de estimação e de construção de testes de hipóteses baseados na função escore corrigida. Os Capítulos 3 e 4 são dedicados, ao estudo do modelo de regressão linear simples funcional quando consideramos, respectivamente, a variância do erro de medida e a razão das variâncias dos erros conhecidas. Nestes capítulos, apresentamos expressões para os estimadores dos parâmetros estruturais do modelo e para a matriz de covariâncias, com base nos resultados obtidos por Gimenez (1997). Aplicamos esses resultados para obter as estatísticas de razão de verossimilhanças, Wald e escore baseadas na função escore corrigida para testar hipóteses sobre o coeficiente angular. Construímos também a estatística de Wald baseada na função escore usual. Além disso, realizamos estudos de simulação para avaliar algumas propriedades dos estimadores e o desempenho dos testes propostos. No Capítulo 5, estabelecemos alguns comentários finais.

Capítulo 2

# Metodologia do escore corrigido e testes de hipóteses

## 2.1 Metodologia do escore corrigido

Consideremos $y$ um vetor $n \times 1$ de valores da variável resposta, $z$ um vetor $n \times 1$ de valores da covariável e $\theta$ um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos que desejamos estimar, pertencente ao espaço paramétrico $\Theta$. A inferência será baseada numa amostra de $n$ observações independentes.

Seja

$$\ell(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\theta; z_i, y_i),$$

o logaritmo da função de verossimilhança de $\theta$, dados $z$ e $y$.

Desde que as derivadas existam, definimos a função escore e a matriz de informação observada, respectivamente, por

$$U(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta; z_i, y_i) \tag{2.1}$$

onde, $$U_i(\theta; z_i, y_i) = \frac{\partial \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta_p} \right]' \text{ e}$$

$$I(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\theta; z_i, y_i)$$

sendo, $$I_i(\theta; z_i, y_i) = -\frac{\partial U_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial^2 \theta_1^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial \theta_p \partial \theta_1} & \cdots & -\frac{\partial^2 \ell_i(\theta; z_i, y_i)}{\partial^2 \theta_p^2} \end{bmatrix}.$$

Sob condições de regularidade apropriadas (Serfling, 1980) entre as quais

$$E[U(\theta; z, y)] = 0, \tag{2.2}$$

o estimador de máxima verossimilhança de $\theta$, $\theta_z$, solução da equação de estimação $U(\theta_z; z, y) = 0$ é consistente e assintoticamente normal com vetor de médias $\theta$ e matriz de covariâncias assintótica $\{E[I(\theta; z, y)]\}^{-1}$.

Consideremos que $z$ não possa ser observada diretamente por estar sujeita a um erro de medida e que $x$ seja o valor observado de $z$. Podemos escrever um modelo com erros aditivos

$$x_i = z_i + u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

onde, $u_i$, o erro de medida associado a i-ésima unidade experimental, é independente de $z_i$ e tem média zero e variância $\sigma_u^2$.

Quando em (2.3), as covariáveis $z_i^{\prime}s$ são constantes desconhecidas, temos um modelo funcional. A função de verossimilhança envolve um vetor desconhecido de parâmetros de pertubação $z = (z_1, \ldots, z_n)'$ cuja dimensão cresce com o tamanho da amostra, o que em geral, impede a obtenção de estimadores consistentes dos parâmetros de interesse. Uma alternativa seria utilizarmos a técnica da função escore corrigida como uma forma de eliminar estes parâmetros indesejáveis.

A função escore naive $U(\theta; x, y)$ é obtida substituindo-se $z$ por $x$ na função escore dada em (2.1). O estimador de máxima verossimilhança naive $\theta_x$ de $\theta$, solução da equação de estimação

$$U(\theta; x, y) = 0$$

não é necessariamente um estimador consistente de $\theta$.

Nakamura (1990), introduziu a técnica de estimação baseada na função escore corrigida que depende somente das covariáveis observadas e dos parâmetros estruturais do modelo.

A idéia da metodologia de Nakamura (1990) é encontrar uma função $\ell^*$ das variáveis observadas $x's$ e $y's$ e do parâmetro desconhecido $\theta$, tal que

$$E[\ell^*(\theta; x, y|z, y)] = \ell(\theta; z, y).$$

Aqui $\ell^*(\theta; x, y)$ é denominado logaritmo da função de verossimilhança corrigido.

A função escore corrigida é definida por

$$\begin{aligned} U^*(\theta) = U^*(\theta; x, y) = \frac{\partial \ell^*(\theta; x, y)}{\partial \theta} &= \left[\frac{\partial \ell^*(\theta; x, y)}{\partial \theta_1}, ..., \frac{\partial \ell^*(\theta; x, y)}{\partial \theta_p}\right]' \\ &= \left[U_1^*(\theta; x, y), ..., U_p^*(\theta; x, y)\right]' \\ &= \left[U_1^*(\theta), ..., U_p^*(\theta)\right]'. \end{aligned}$$

Se $E[\cdot|z, y]$ e $\partial/\partial\theta$ forem permutáveis, temos que

$$\begin{aligned} E[U^*(\theta; x, y)|z, y] &= \frac{\partial E[\ell^*(\theta; x, y)|z, y]}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial \ell(\theta; z, y)}{\partial \theta} \\ &= U(\theta; z, y). \end{aligned} \qquad (2.4)$$

A matriz de informação observada é dada por

$$I^*(\theta) = I^*(\theta; x, y) = -\frac{\partial U^*(\theta; x, y)}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U_1^*(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & -\frac{\partial U_1^*(\theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial U_p^*(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & -\frac{\partial U_p^*(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

e se $E[\cdot|z, y]$ e $\partial/\partial\theta$ forem permutáveis, segue que

$$E[I^*(\theta; x, y)] = I(\theta; z, y).$$

O valor $\hat{\theta}$ tal que $U^*(\hat{\theta}; x, y) = 0$ é chamado de estimador corrigido de $\theta$.

De (2.2) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned} E[U^*(\theta; x, y)] &= E\{E[U^*(\theta; x, y)|z, y]\} \\ &= E[U(\theta; z, y)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é $U^*(\theta; x, y)$ é uma função escore não viciada. A propriedade (2.4) e condições de regularidade apropriadas (Gimenez, 1997) garantem a consistência e a normalidade assintótica dos estimadores baseados na função escore corrigida. No entanto, note que se $E[\cdot|z, y]$ e $\partial/\partial\theta$ não forem operações permutáveis, a propriedade (2.4) não será obtida e, conseqüentemente, $U^*(\theta; x, y)$ não será necessariamente não viciada.

Por exemplo, no modelo de regressão linear simples funcional normal, com razão de variâncias conhecida, é fácil ver que a função escore corrigida obtida como a derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido é viciada. Esta situação será ilustrada mais adiante no Capítulo 4. Para contornar esse problema, Gimenez (1997) propôs que a função escore corrigida fosse construída sem fazer referência ao logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido, mas baseada diretamente na função escore dada em (2.1). Desta forma, esta técnica é mais geral do que a proposta por Nakamura (1990).

Gimenez (1997) definiu a função escore corrigida como uma função $U^*(\theta; x, y)$ tal que

$$E[U^*(\theta; x, y)|z, y] = U(\theta; z, y), \tag{2.5}$$

onde $x$ é um vetor $n \times 1$ de covariáveis observadas.

Podemos reescrever $U^*(\theta)$ e $I^*(\theta)$ como

$U^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} U_i^*(\theta; x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} U_i^*(\theta)$, onde

$$U_i^*(\theta) = \left[ \begin{array}{c} U_{i1}^*(\theta), ..., U_{ip}^*(\theta) \end{array} \right]'$$

e $I^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_i^*(\theta; x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} I_i^*(\theta)$, onde

$$I_i^*(\theta) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial U_{i1}^*(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & -\dfrac{\partial U_{i1}^*(\theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial U_{ip}^*(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & -\dfrac{\partial U_{ip}^*(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}.$$

Definimos, agora,

$$\overline{U}_n^*(\theta) = \frac{1}{n} U^*(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^*(\theta), \tag{2.6}$$

$$\overline{I}_n^*(\theta) = \frac{1}{n} I^*(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_i^*(\theta), \tag{2.7}$$

$$\overline{\Lambda}_n(\theta) = \frac{1}{n} E[I^*(\theta)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[I_i^*(\theta)], \tag{2.8}$$

$$\overline{\Gamma}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[U_i^*(\theta) U_i^*(\theta)']. \tag{2.9}$$

A seguir apresentamos o resultado de que, sob condições de regularidade, a equação $U^*(\theta) = 0$ tem uma raiz consistente e assintoticamente normal (Gimenez, 1997).

**Teorema 2.1** *Se condições de regularidade são satisfeitas, então com probabilidade tendendo a um quando $n \to \infty$, $\overline{U}_n^*(\theta) = 0$ tem uma raiz consistente $\hat{\theta}_n$. $\hat{\theta}_n$ é única no sentido de que, se $\tilde{\theta}_n$ é outra raiz consistente, então $\hat{\theta}_n = \tilde{\theta}_n$ com probabilidade tendendo a um quando $n \to \infty$.*

**Teorema 2.2** *Seja $\hat{\theta}_n$ uma raiz consistente da equação $\overline{U}_n^*(\theta) = 0$. Então, sob condições de regularidade, $\hat{\theta}_n$ é assintoticamente normal com vetor de médias $\theta$ e matriz de covariância assintótica dada por $n^{-1}\Omega_n$, onde*

$$\Omega_n = \{\overline{\Lambda}_n(\theta)\}^{-1}\overline{\Gamma}_n(\theta)\{\overline{\Lambda}_n(\theta)'\}^{-1}.$$

## 2.2 Testes de hipóteses

Estamos interessados em testar hipóteses sobre os parâmetros estruturais baseados nas propriedades assintóticas dos estimadores (Gimenez, 1997). Suponha que o vetor de parâmetros $\theta$ de dimensão $p$ é particionado como $\theta = (\lambda', \psi')'$, onde $\psi$ e $\lambda$ são, respectivamente, os parâmetros de interesse e de pertubação com dimensões $q$ e $p-q$. Queremos testar a hipótese nula $H_0 : \psi = \psi_0$ na presença do parâmetro de pertubação $\lambda$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \psi \neq \psi_0$ . Sejam $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}', \hat{\psi}')'$ o estimador de $\theta$ obtido do escore corrigido sob o modelo irrestrito, $\theta_0 = (\lambda', \psi_0')'$ e $\hat{\theta}_0 = (\hat{\lambda}_0', \hat{\psi}_0')'$ o estimador restrito a $H_0$. Assumimos que quando $n$ cresce as matrizes $\overline{\Lambda}_n(\theta)$ e $\overline{\Gamma}_n(\theta)$ definidas em (2.8) e (2.9) convergem para as matrizes positivas definidas $\Lambda(\theta)$ e $\Gamma(\theta)$, respectivamente. Usamos a seguinte notação para as matrizes particionadas segundo as dimensões de $\lambda$ e $\psi$:

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\lambda\lambda}(\theta) & \Lambda_{\lambda\psi}(\theta) \\ \Lambda_{\psi\lambda}(\theta) & \Lambda_{\psi\psi}(\theta) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} \Gamma_{\lambda\lambda}(\theta) & \Gamma_{\lambda\psi}(\theta) \\ \Gamma_{\psi\lambda}(\theta) & \Gamma_{\psi\psi}(\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Analogamente a função escore corrigida $U^*(\theta)$ pode ser particionada como

$$U^*(\theta) = \begin{bmatrix} U^*_\lambda(\theta) \\ U^*_\psi(\theta) \end{bmatrix}.$$

Assumindo que o método do escore corrigido apresentado na Seção 2.1 pode ser aplicado produzindo estimadores consistentes e assintoticamente normais para os parâmetros do modelo, testes do tipo razão de verossimilhanças, escore e Wald podem ser construídos a partir dos estimadores e de sua distribuição assintótica.

Para testar a hipótese nula $H_0 : \psi = \psi_0$ consideramos as estatísticas de Wald, Wald modificada, escore e escore modificada definidas por Gimenez (1997) dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
W_I^* &= n(\hat{\psi} - \psi_0)'\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta})(\hat{\psi} - \psi_0), && (2.11)\\
W_R^* &= n(\hat{\psi} - \psi_0)'\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)(\hat{\psi} - \psi_0), && (2.12)\\
W_{mI}^* &= n(\hat{\psi} - \psi_0)'\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta})(\hat{\psi} - \psi_0), && (2.13)\\
W_{mR}^* &= n(\hat{\psi} - \psi_0)'\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)(\hat{\psi} - \psi_0), && (2.14)\\
Q^* &= n^{-1}U^*_\psi(\hat{\theta}_0)'\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)U^*_\psi(\hat{\theta}_0), && (2.15)\\
Q^*_m &= n^{-1}U^*_\psi(\hat{\theta}_0)'\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)U^*_\psi(\hat{\theta}_0), && (2.16)
\end{aligned}$$

onde, $\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)$ e $\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)$ são estimadores consistentes das matrizes $\Lambda_{\psi\psi.\lambda}(\theta_0)$ e $\Omega_{\psi\psi}(\theta_0)$ dados respectivamente por

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\psi\psi.\lambda}(\theta_0) &= \Lambda_{\psi\psi}(\theta_0) - \Lambda_{\psi\lambda}(\theta_0)\Lambda^{-1}_{\lambda\lambda}(\theta_0)\Lambda_{\lambda\psi}(\theta_0), && (2.17)\\
\Omega_{\psi\psi}(\theta_0) &= (\Lambda^{-1}(\theta_0)\Gamma(\theta_0)\Lambda^{-1}(\theta_0)')_{\psi\psi}. && (2.18)
\end{aligned}$$

Quando a função escore corrigida corresponde à derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido, isto é

$$U^*(\theta; x, y) = \frac{\partial \ell^*(\theta; x, y)}{\partial \theta} \qquad (2.19)$$

é possível definir um teste de razão de verossimilhanças.

A estatística da razão de verossimilhanças é definida por

$$L^* = 2\{\ell^*(\hat{\theta}) - \ell^*(\hat{\theta}_0)\}. \quad (2.20)$$

No modelo linear simples funcional com razão de variâncias $\lambda = \sigma_\epsilon^2/\sigma_u^2$ conhecida, que vamos abordar no Capítulo 4, veremos que a função escore corrigida não pode ser obtida como a derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido, mesmo existindo esta função. Neste caso, não podemos definir um teste de razão de verossimilhanças.

As estatísticas $W_R^*$, $W_I^*$, $Q^*$ e $L^*$ têm a mesma distribuição assintótica sob a hipótese nula. As estatísticas $W_{mR}^*$, $W_{mI}^*$ e $Q_m^*$ também são assintoticamente equivalentes. Esses resultados são apresentados no Teorema 2.3 (Gimenez, 1997).

**Teorema 2.3** *Se as condições do Teorema 2.2 são satisfeitas, então:*

(a)

$$W_R^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{q} \mu_i V_i,$$

*onde* $V_1, \ldots, V_q$ *são variáveis aleatórias independentes com distribuição* $\chi_1^2$ *e* $\mu_1, \ldots, \mu_q$ *são autovalores da matriz*

$$\Lambda_{\psi\psi.\lambda}(\theta_0)\Omega_{\psi\psi}(\theta_0).$$

*Além disso,* $W_R^*$ *é assintoticamente equivalente a* $W_I^*$*, a* $Q^*$ *e, no caso em que (2.19) é válido, a* $L^*$ .

(b)

$$W_{mR}^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_q^2,$$

*com* $W_{mR}^*$ *assintoticamente equivalente a* $W_{mI}^*$ *e a* $Q_m^*$.

CAPÍTULO 3

# Modelo linear simples funcional com variância $\sigma_u^2$ conhecida

Consideremos o modelo definido por

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta z_i + \epsilon_i, \\ x_i &= z_i + u_i, \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que a cada unidade experimental $i$ associamos $y_i$, valor da variável resposta; $x_i$, valor observado de uma covariável $z_i$, constante desconhecida ou parâmetro incidental; $\epsilon_i$ e $u_i$, erros aleatórios, $i = 1, \ldots, n$. Assumimos que $\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e que $u_i$ tem média igual a zero, variância igual a $\sigma_u^2$ conhecida e quarto momento finito. Além disso, vamos definir $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_\epsilon^2)'$ como o vetor de parâmetros estruturais e supor que $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ são independentes, $u_1, \ldots, u_n$ são independentes e $\epsilon_i$ e $u_i$ são independentes.

## 3.1 O estimador do escore corrigido

O logaritmo da função de verossimilhança "não observada" (baseada nos verdadeiros valores das covariáveis $z_i$) é dado por

$$\ell(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\theta; z_i, y_i),$$

onde

$$\ell_i(\theta; z_i, y_i) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}(y_i - \alpha - \beta z_i)^2,$$

$i = 1, \ldots, n$. Portanto, a função escore "não observada" é dada por

$$U(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\theta; z_i, y_i),$$

onde $U_i(\theta; z_i, y_i) = (U_{i\alpha}, U_{i\beta}, U_{i\sigma_\epsilon^2})'$,

$$U_{i\alpha}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}(y_i - \alpha - \beta z_i),$$

$$U_{i\beta}(\beta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}(y_i - \alpha - \beta z_i)z_i \text{ e}$$

$$U_{i\sigma_\epsilon^2}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \sigma_\epsilon^2} = -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4}(y_i - \alpha - \beta z_i)^2.$$

Considerando $U_i^*(\theta; x_i, y_i) = (U_{i\alpha}^*, U_{i\beta}^*, U_{i\sigma_\epsilon^2}^*)'$, onde

$$U_{i\alpha}^*(\theta) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}(y_i - \alpha - \beta x_i),$$

$$U_{i\beta}^*(\theta) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}[(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i + \beta\sigma_u^2],$$

$$U_{i\sigma_\epsilon^2}^*(\theta) = -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4}[(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 - \beta^2\sigma_u^2],$$

segue que

$$E[U_i^*(\theta; x_i, y_i)|z_i, y_i] = U_i(\theta; z_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, segundo (2.5),

$$U^*(\theta; x, y) = \sum_{i=1}^{n} U_i^*(\theta; x_i, y_i)$$

é uma função escore corrigida.

Por outro lado, se tomarmos o logaritmo da função de verossimilhança corrigido,

$$\ell_i^*(\theta; x_i, y_i) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\sigma_\epsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 + \frac{\beta^2\sigma_u^2}{2\sigma_\epsilon^2},$$

segue que,

$$E[\ell_i^*(\theta; x_i, y_i)|z_i, y_i] = \ell_i(\theta; z_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ell_i^*(\theta) = U_{i\alpha}^*(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\ell_i^*(\theta) = U_{i\beta}^*(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial\sigma_\epsilon^2}\ell_i^*(\theta) = U_{i\sigma_\epsilon^2}^*(\theta), \quad i = 1, \ldots, n$$

conforme mencionado por Nakamura (1990).

Neste caso, concluímos que a metodologia da função escore corrigida pode ser aplicada usando a proposta de Nakamura.

Resolvendo a equação $U^*(\theta; x, y) = 0$, obtemos os estimadores,

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_u^2}, \quad se\ S_{xx} > \sigma_u^2, \\ \widehat{\alpha} &= \overline{y} - \widehat{\beta}\overline{x}, \\ \widehat{\sigma}_\epsilon^2 &= S_{yy} - \widehat{\beta}S_{xy}, \quad se\ S_{yy} \geq \tfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}-\sigma_u^2}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \quad S_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Cheng e Van Ness (1991) mostraram que para o modelo funcional (3.1) e $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$ independentes, os estimadores de máxima verossimilhança de $(\alpha, \beta, \sigma_\epsilon^2)'$ são inconsistentes. Porém, os estimadores corrigidos dados por (3.2) são consistentes e assintoticamente normais e coincidem com os estimadores obtidos pelo método dos momentos para o modelo em (3.1).

Depois de alguma álgebra, as matrizes $\overline{\Lambda}_n(\theta)$ e $\overline{\Gamma}_n(\theta)$ definidas em (2.8) e (2.9), respectivamente, são dadas por:

$$\overline{\Lambda}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} & \frac{\overline{z}}{\sigma_\epsilon^2} & 0 \\ \frac{\overline{z}}{\sigma_\epsilon^2} & \frac{S_{zz}+\overline{z}^2}{\sigma_\epsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4} \end{bmatrix} \text{ e } \overline{\Gamma}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$\gamma_{11} = \frac{\beta^2\sigma_u^2}{\sigma_\epsilon^4} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\overline{z}}{\sigma_\epsilon^2} + \frac{(\mu_3+\overline{z}\sigma_u^2)\beta^2}{\sigma_\epsilon^4}, \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = -\frac{\beta^3\mu_3}{2\sigma_\epsilon^6},$$

$$\gamma_{22} = \frac{\beta^2[\sigma_u^2(S_{zz}+\overline{z}^2)+\mu_4+2\overline{z}\mu_3-\sigma_u^4]}{\sigma_\epsilon^4} + \frac{S_{zz}+\overline{z}^2+\sigma_u^2}{\sigma_\epsilon^2},$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = -\frac{\beta^3(\overline{z}\mu_3+\mu_4-\sigma_u^4)}{2\sigma_\epsilon^6} - \frac{\beta\sigma_u^2}{\sigma_\epsilon^4},$$

$$\gamma_{33} = \frac{\beta^4(\mu_4-\sigma_u^4)}{4\sigma_\epsilon^8} + \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4} + \frac{\beta^2\sigma_u^2}{\sigma_\epsilon^6},$$

com $\mu_3 = E[u_i^3]$, $\mu_4 = E[u_i^4]$, $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$ e $S_{zz} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (z_i - \overline{z})^2$.

Calculando a inversa da matriz $\overline{\Lambda}_n$, obtemos a seguinte matriz:

$$\{\overline{\Lambda}_n(\theta)\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_\epsilon^2(S_{zz}+\overline{z}^2)}{S_{zz}} & -\frac{\overline{z}\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}} & 0 \\ -\frac{\overline{z}\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}} & \frac{\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_\epsilon^4 \end{bmatrix}.$$

Supondo $E[u_i^4] < \infty$, a matriz de covariância assintótica dos estimadores para o modelo funcional é dada por $n^{-1}\Omega_n$ (Teorema 2.2), onde

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix},$$

com

$\omega_{11} = \frac{\beta^2}{S_{zz}^2}(S_{zz}^2\sigma_u^2 + \overline{z}^2 a - 2\overline{z}S_{zz}\mu_3) + \frac{\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}^2}[S_{zz}^2 + \overline{z}^2(S_{zz} + \sigma_u^2)]$,

$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{\beta^2}{S_{zz}^2}(-\overline{z}a + S_{zz}\mu_3) - \frac{\overline{z}\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}^2}(S_{zz} + \sigma_u^2)$,

$\omega_{13} = \omega_{31} = \frac{\beta^3}{S_{zz}}[-S_{zz}\mu_3 + \overline{z}(\mu_4 - \sigma_u^4)] + \frac{2\overline{z}\sigma_u^2\beta\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}}$,

$\omega_{22} = \frac{a\beta^2}{S_{zz}^2} + \frac{\sigma_\epsilon^2}{S_{zz}^2}(S_{zz} + \sigma_u^2)$,

$\omega_{23} = \omega_{32} = -\frac{\beta}{S_{zz}}[2\sigma_u^2(\beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2) + \beta^2(\mu_4 - 3\sigma_u^4)]$,

$\omega_{33} = \beta^4(\mu_4 - \sigma_u^4) + 2\sigma_\epsilon^4 + 4\sigma_\epsilon^2\beta^2\sigma_u^2$,

$a = S_{zz}\sigma_u^2 + \mu_4 - \sigma_u^4$.

Depois de alguma álgebra, podemos escrever

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} \delta + \overline{z}^2\phi - 2\overline{z}\gamma & -\overline{z}\phi + \gamma & -\overline{z}\rho - \beta S_{zz}\gamma \\ -\overline{z}\phi + \gamma & \phi & \rho \\ -\overline{z}\rho - \beta S_{zz}\gamma & \rho & \beta^2\tau + 2\delta^2 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

onde

$\tau = \beta^2(\mu_4 - 3\sigma_u^4)$, $\quad \delta = \beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2$, $\quad \phi = \frac{1}{S_{zz}^2}[(S_{zz} + \sigma_u^2)\delta + \beta^2\sigma_u^4 + \tau]$,

$\gamma = \frac{\beta^2\mu_3}{S_{zz}}$ e $\rho = -\frac{\beta}{S_{zz}}(2\sigma_u^2\delta + \tau)$.

## 3.2 Testes de hipóteses baseados na função escore corrigida

Usando os resultados da Seção 2.2, implementamos testes assintóticos para testar a hipótese nula $H_0 : \beta = 0$.

Na notação da Seção 2.2, $\psi = \beta$ é o parâmetro de interesse e $\lambda = (\alpha, \sigma_\epsilon^2)'$ é o parâmetro de pertubação. Seja $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_\epsilon^2)'$, dado por (3.2), o estimador de $\theta$ sob o modelo irrestrito e $\hat{\theta}_0 = (\hat{\alpha}_0, 0, \hat{\sigma}_{\epsilon 0}^2)'$ o estimador restrito a $H_0$, onde

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{y} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{\epsilon 0}^2 = S_{yy}.$$

Gimenez (1997) mostrou que a suposição da normalidade do erro de medida permite obter condições suficientes para a existência e a unicidade da função escore corrigida.

Usando o resultado (3.3) e supondo que $u_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$ segue que $\tau = \gamma = 0$, $\delta = \beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2$, $\phi = \frac{1}{S_{zz}^2}[(S_{zz} + \sigma_u^2)\delta + \beta^2\sigma_u^4]$ e $\rho = -\frac{2\beta\sigma_u^2\delta}{S_{zz}}$. Deste modo, podemos escrever de acordo com a partição $\theta = (\lambda', \psi')'$

$$\Omega_n(\theta) = \begin{bmatrix} \delta + \overline{z}^2\phi & -\overline{z}\rho & -\overline{z}\phi \\ -\overline{z}\rho & 2\delta^2 & \rho \\ -\overline{z}\phi & \rho & \phi \end{bmatrix} \text{ e } \overline{\Lambda}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} & 0 & \frac{\overline{z}}{\sigma_\epsilon^2} \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4} & 0 \\ \frac{\overline{z}}{\sigma_\epsilon^2} & 0 & \frac{S_{zz}+\overline{z}^2}{\sigma_\epsilon^2} \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

onde

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \quad \text{e} \quad S_{zz} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2.$$

Na literatura, todos os resultados assintóticos obtidos no modelo funcional impõem algum tipo de restrição na seqüência dos parâmetros incidentais. A restrição mais adotada é a existência dos limites $\mu \in R$ e $\nu^2 \in R_+$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{z} = \mu \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_{zz} = \nu^2. \tag{3.5}$$

Sob a suposição (3.5), $\Omega_n$ e $\overline{\Lambda}_n$ em (3.4) convergem, respectivamente, para as matrizes

$$\Omega = \begin{bmatrix} \delta + \mu^2\phi & -\mu\rho & -\mu\phi \\ -\mu\rho & 2\delta^2 & \rho \\ -\mu\phi & \rho & \phi \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

com $\delta = \beta^2\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2$, $\phi = \frac{1}{\nu^4}[(\nu^2 + \sigma_u^2)\delta + \beta^2\sigma_u^4]$ e $\rho = -\frac{2\beta\sigma_u^2\delta}{\nu^2}$, e

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} & 0 & \frac{\mu}{\sigma_\epsilon^2} \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_\epsilon^4} & 0 \\ \frac{\mu}{\sigma_\epsilon^2} & 0 & \frac{\nu^2+\mu^2}{\sigma_\epsilon^2} \end{bmatrix}.$$

Depois de alguma manipulação algébrica podemos escrever o inverso da matriz $\Lambda_{\lambda\lambda}(\theta)$ da seguinte maneira

$$\Lambda_{\lambda\lambda}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \sigma_\epsilon^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_\epsilon^4 \end{bmatrix}.$$

Para estimar a matriz de covariâncias assintótica consistentemente, basta estimar $\mu$ e $\nu^2$ consistentemente. Da lei fraca dos grandes números e da suposição (3.5), temos que

$$\bar{x} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu \text{ e } S_{xx} - \sigma_u^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} \nu^2, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.7}$$

### 3.2.1 Teste de Wald

Estamos interessados em testar a hipótese $H_0 : \beta = 0$.

A estatística de Wald dada em (2.11) assume a expressão

$$W_I^* = n\hat{\psi}^2\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}), \tag{3.8}$$

onde $\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}$ é um estimador consistente da matriz $\Lambda_{\psi\psi.\lambda}$ avaliado no modelo irrestrito, dada por (veja a expressão (2.17) e o resultado (3.5) e (3.7))

$$\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}) = \frac{S_{xx} - \sigma_u^2}{\hat{\sigma}_\epsilon^2}. \tag{3.9}$$

Finalmente, usando (3.9), a estatística de Wald dada em (3.8) pode ser escrita como

$$W_I^* = \frac{n\hat{\beta}^2(S_{xx} - \sigma_u^2)}{\hat{\sigma}_\epsilon^2},$$

onde $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx} - \sigma_u^2}$ e $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = S_{yy} - \hat{\beta} S_{xy}$.

Por outro lado, note que a estatística de Wald no modelo restrito é dada pela expressão (2.12). E, analogamente ao resultado (3.9) do teste de Wald no modelo irrestrito, temos que

$$\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0) = \frac{S_{xx} - \sigma_u^2}{S_{yy}}. \tag{3.10}$$

Substituindo o resultado de (3.10) em (2.12) podemos escrever a estatística de Wald no modelo restrito da seguinte maneira

$$W_R^* = \frac{nS_{xy}^2}{S_{yy}(S_{xx} - \sigma_u^2)}. \tag{3.11}$$

### 3.2.2 Teste de Wald modificado

Para testar a hipótese nula $H_0 : \beta = 0$, a estatística de Wald modificada dada em (2.13) assume a expressão

$$W_{mI}^* = n\hat{\psi}^2 \hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}), \tag{3.12}$$

onde $\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta})$ é um estimador consistente da matriz $\Omega_{\psi\psi}^{-1}(\theta)$ avaliada no modelo irrestrito dado por (veja a expressão (2.18) e os resultados (3.5) e (3.7))

$$\hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}) = \frac{(S_{xx} - \sigma_u^2)^2}{\hat{\beta}^2 \sigma_u^2 (S_{xx} + \sigma_u^2) + \hat{\sigma}_\epsilon^2 S_{xx}}. \tag{3.13}$$

Substituindo (3.13) em (3.12) temos que a estatística de Wald modificada no modelo irrestrito pode ser escrita como

$$W^*_{mI} = \frac{n\hat{\beta}^2(S_{xx} - \sigma^2_u)^2}{\hat{\beta}^2\sigma^2_u(S_{xx} + \sigma^2_u) + \hat{\sigma}^2_\epsilon S_{xx}}. \tag{3.14}$$

Analogamente ao resultado (3.13) do teste de Wald modificado no modelo irrestrito, para o modelo restrito

$$\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{(S_{xx} - \sigma^2_u)^2}{S_{xx}S_{yy}}. \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (2.14) temos que a estatística de Wald modificada no modelo restrito é dada por

$$W^*_{mR} = \frac{nS^2_{xy}}{S_{xx}S_{yy}}. \tag{3.16}$$

### 3.2.3 Teste escore

Da mesma forma que na Subseção 3.3.1, redefinimos o vetor escore em função do parâmetro de interesse e dos parâmetros de pertubação: $U^*(\theta) = (U^*_\psi(\theta), U^*_\lambda(\theta))'$, sendo $U^*_\psi(\theta)$ a função escore corrigida relativa ao parâmetro de interesse e $U^*_\lambda(\theta)$ a função escore corrigida relativa aos parâmetros de pertubação. Semelhantemente aos testes de Wald e Wald modificado, o interesse é testar $H_0 : \beta = 0$. Portanto, vamos utilizar a estatística escore dada em (2.15).

A função escore corrigida sob o modelo restrito relativa ao parâmetro de interesse é dada por

$$U^*_\psi(\theta_0) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} U^*_{i\psi}(\theta_0).$$

Depois de alguma álgebra, escrevemos o estimador da função escore corrigida da seguinte forma

$$U^*_\psi(\hat{\theta}_0) = \frac{nS_{xy}}{S_{yy}}. \tag{3.17}$$

De (3.10) vem que um estimador consistente de $\Lambda^{-1}_{\psi\psi.\lambda}(\theta_0)$ dado por

$$\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0) = \frac{S_{yy}}{S_{xx} - \sigma_u^2}. \tag{3.18}$$

Logo, substituindo (3.17) e (3.18) na expressão (2.15) podemos escrever a estatística escore como

$$Q^* = \frac{nS_{xy}^2}{S_{yy}(S_{xx} - \sigma_u^2)}. \tag{3.19}$$

Note que a estatística escore em (3.19) coincide com a estatística de Wald (ver expressão $W_R^*$ em (3.11)) no modelo restrito.

### 3.2.4 Teste escore modificado

Para testar $H_0 : \beta = 0$, vamos utilizar a estatística escore modificada dada em (2.16).

Sob o modelo restrito, um estimador consistente de $\Omega^{-1}_{\psi\psi}(\theta_0)$ é dado por

$$\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{(S_{xx} - \sigma_u^2)^2}{\hat{\sigma}^2_{\epsilon 0} S_{xx}}, \tag{3.20}$$

onde $\hat{\sigma}^2_{\epsilon 0} = S_{yy}$.

Logo, substituindo (3.17), (3.18) e (3.20) na expressão (2.16) podemos escrever a estatística escore modificada como

$$Q_m^* = \frac{nS_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}}. \tag{3.21}$$

Note que a estatística escore modificada em (3.21) coincide com a estatística de Wald modificada (ver expressão $W_{mR}^*$ em (3.16)) no modelo restrito.

### 3.2.5 Teste de razão de verossimilhanças

Vimos na Seção 3.2 que a função escore corrigida no modelo de regressão linear simples, normal, com variância $\sigma_u^2$ conhecida, pode ser obtida como a derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido. Desta maneira, podemos definir um teste de razão de verossimilhanças.

Sejam, respectivamente, os logaritmos da funções de verossimilhanças corrigidos aplicados nos estimadores corrigidos de $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_\epsilon^2)'$ sob o modelo irrestrito e restrito dados por

$$\begin{aligned} \ell^*(\hat{\theta}) &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\hat{\sigma}_\epsilon^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}_\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2 + \frac{n\hat{\beta}^2\sigma_u^2}{2\hat{\sigma}_\epsilon^2}, \\ \ell^*(\hat{\theta}_0) &= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\hat{\sigma}_{\epsilon 0}^2 - \frac{1}{2\hat{\sigma}_{\epsilon 0}^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha}_0)^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) na expressão (2.20) e depois de alguma manipulação algébrica escrevemos a estatística de razão de verossimilhanças da seguinte maneira

$$L^* = n\{\log\frac{S_{yy}}{\hat{\sigma}_\epsilon^2} + S_{yy}(\frac{1}{S_{yy}} - \frac{1}{\hat{\sigma}_\epsilon^2}) + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_\epsilon^2}(2S_{xy} - \hat{\beta}S_{xx} + \hat{\beta}\sigma_u^2)\}. \tag{3.23}$$

### 3.2.6 Distribuição assintótica das estatísticas dos testes

Como $\psi = \beta$ é o parâmetro de interesse de dimensão $q = 1$, temos pelo Teorema 2.3,

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{S_{xx}}{S_{xx} - \sigma_u^2}$$

e

$$\begin{aligned} W_R^{**} &= \frac{W_R^*}{\hat{\mu}_1} = \frac{n\hat{\psi}^2}{\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)} = W_{mR}^*, \\ W_I^{**} &= \frac{W_I^*}{\hat{\mu}_1} = \frac{n\hat{\psi}^2\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta})}{\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)}, \\ Q^{**} &= \frac{Q^*}{\hat{\mu}_1} = \frac{n^{-1}U_\psi^*(\hat{\theta}_0)^2}{\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)} = Q_m^*, \\ L^{**} &= \frac{L^*}{\hat{\mu}_1} = \frac{2\{\ell^*(\hat{\theta}) - \ell^*(\hat{\theta}_0)\}}{\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)}, \end{aligned}$$

sendo que $W_R^{**}$, $W_I^{**}$, $Q^{**}$ e $L^{**}$ têm distribuição assintótica $\chi_1^2$.

## 3.3 Teste de Wald na função escore não corrigida

Cheng e Van Ness (1991) mostraram que no modelo funcional definido em (3.1), os estimadores de máxima verossimilhança de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_\epsilon^2$ não são consistentes. Desta forma, obtiveram os estimadores através do método dos momentos no modelo estrutural e estudaram seus comportamentos no modelo funcional. Os estimadores obtidos pelo método dos momentos coincidem com os estimadores obtidos em (3.2) que são consistentes e assintoticamente normais. A matriz dada em (3.6) coincide com a matriz de covariâncias assintótica, para os estimadores obtidos pelo método dos momentos no modelo (3.1).

Desta forma, a estatística de Wald sob o modelo irrestrito, de uma função escore não corrigida coincide com a estatística de Wald modificada (ver expressão $W_{mI}^*$ em (3.14)).

Analogamente, a estatística de Wald sob o modelo restrito, de uma função escore não corrigida coincide com a estatística de Wald modificada (ver expressão $W_{mR}^*$ em (3.16)).

## 3.4 Simulações

Apresentamos estudos de simulações para avaliar algumas propriedades dos estimadores e o tamanho dos testes baseados nas estatísticas obtidas nas Seções 3.2 e 3.3 deste capítulo. As simulações foram feitas no programa S-Plus 4.5 (Venables e Ripley, 1999).

Mostramos o comportamento dos estimadores obtidos a partir da função escore corrigida, simulando os valores (fixos) da covariável $z_i$ a partir de diferentes distribuições de probabilidades. Apresentamos também um estudo de simulação com algumas violações nas distribuições dos erros para avaliar o comportamento dos estimadores.

O comportamento das estatísticas de Wald, Wald modificada, escore modificada e razão de verossimilhanças é verificado na segunda parte desta seção. Avaliamos o tamanho observado desses testes para diferentes distribuições da covariável, distribuições dos erros aleatórios, diferentes valores de $n$ e tamanhos nominais.

### 3.4.1 Estimação dos parâmetros

Foram geradas 10.000 amostras do modelo de regressão linear simples funcional definido em (3.1). Em todas as amostras os valores usados para os parâmetros foram $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. As amostras foram geradas com $n$, o número de observações, igual a 20, 50 e 100. O componente do erro da variável resposta ($\epsilon_i$) foi gerado de acordo com uma distribuição normal de média zero e variância $\sigma_\epsilon^2$ igual a 1 e 5. O componente do erro da covariável $u_i$ foi gerado de uma normal de média também zero, mas com variância $\sigma_u^2$ igual a 0,1; 1,0 e 1,25.

Verificamos o comportamento dos estimadores corrigidos de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_\epsilon^2$ através dos vícios médios e erros quadráticos médios. Os vícios médios e os erros quadráticos médios são respectivamente, dados por

$$\sum_{t=1}^{10.000} \frac{(\hat{\psi}_t - \psi)}{10.000} \quad \text{e} \quad \sum_{t=1}^{10.000} \frac{(\hat{\psi}_t - \psi)^2}{10.000}$$

em que, $\hat{\psi}$ é um estimador de $\psi$ e $\psi = \alpha, \beta, \sigma_\epsilon^2$.

Nas Tabelas 3.1 a 3.6 apresentamos os vícios médios e os erros quadráticos médios (EQM) dos estimadores corrigidos de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_\epsilon^2$, respectivamente fixando $\sigma_\epsilon^2 = 1$ (Tabelas 3.1 a 3.3) e $\sigma_\epsilon^2 = 5$ (Tabelas 3.4 a 3.6) para as seguintes distribuições da covariável: U(0,5), U(0,10), N(0,1), N(0,10) e lognormal LN(0,1).

Tabela 3.1: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma_u^2$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | -0,003(0,235) | -0,000(0,153) | -0,001(0,060) | 0,001(0,048) | -0,005(0,106) |
| | 1 | -0,008(0,435) | -0,001(0,168) | -0,001(0,130) | 0,001(0,049) | -0,004(0,125) |
| | 1,25 | 0,005(0,538) | 0,001(0,171) | 0,002(0,157) | 0,001(0,049) | -0,006(0,131) |
| 50 | 0,1 | 0,000(0,093) | -0,001(0,087) | 0,002(0,020) | -0,001(0,019) | -0,001(0,032) |
| | 1 | 0,000(0,143) | 0,000(0,095) | 0,002(0,021) | -0,001(0,019) | -0,000(0,036) |
| | 1,25 | 0,002(0,162) | -0,000(0,097) | 0,002(0,021) | -0,001(0,020) | -0,001(0,037) |
| 100 | 0,1 | 0,002(0,051) | 0,001(0,036) | 0,000(0,010) | 0,000(0,010) | 0,002(0,020) |
| | 1 | 0,003(0,074) | 0,002(0,039) | 0,000(0,010) | 0,000(0,010) | 0,003(0,023) |
| | 1,25 | 0,003(0,081) | 0,001(0,040) | 0,000(0,010) | 0,000(0,010) | 0,002(0,024) |

Analisando as Tabelas 3.1 e 3.4 observamos que, para o estimador $\hat{\alpha}$, os EQM para as distribuições U(0,5), U(0,10) e LN(0,1) são maiores do que para as distribuições N(0,1) e N(0,10), independentemente do tamanho da amostra e do valor adotado para $\sigma_u^2$. Quando $\sigma_\epsilon^2 = 1$ ou 5, os vícios médios são pequenos para todas as distribuições adotadas para a covariável, todo tamanho de amostra e valor de $\sigma_u^2$.

Nas Tabelas 3.2 e 3.5 vemos que, para o estimador $\hat{\beta}$, os EQM para as distribuições U(0,5) e N(0,1) são maiores do que para as distribuições U(0,10), N(0,10) e LN(0,1), para todo valor de $n$ e de $\sigma_u^2$. Já, os vícios médios, em geral se apresentam pequenos para todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra e do valor adotado para $\sigma_u^2$.

Tabela 3.2: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\beta}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma_u^2$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | 0,001(0,026) | 0,000(0,005) | 0,002(0,071) | -0,001(0,005) | 0,002(0,012) |
| | 1 | 0,002(0,054) | 0,000(0,006) | 0,002(0,442) | -0,000(0,006) | 0,001(0,016) |
| | 1,25 | -0,002(0,068) | -0,000(0,006) | -0,001(0,561) | -0,000(0,006) | 0,002(0,018) |
| 50 | 0,1 | 0,000(0,011) | 0,000(0,002) | -0,001(0,016) | -0,001(0,001) | 0,000(0,005) |
| | 1 | 0,000(0,019) | 0,000(0,002) | -0,001(0,032) | -0,001(0,002) | 0,000(0,007) |
| | 1,25 | -0,000(0,022) | 0,000(0,002) | -0,002(0,039) | -0,001(0,002) | 0,000(0,008) |
| 100 | 0,1 | -0,001(0,005) | -0,000(0,001) | -0,001(0,012) | -0,000(0,001) | -0,001(0,003) |
| | 1 | -0,001(0,008) | -0,000(0,001) | -0,004(0,028) | -0,000(0,001) | -0,001(0,005) |
| | 1,25 | -0,001(0,009) | -0,000(0,001) | -0,001(0,036) | -0,000(0,001) | -0,001(0,005) |

Nas Tabelas 3.3 e 3.6 observamos que, para o estimador $\hat{\sigma}_\epsilon^2$, não há interferência da distribuição da covariável, pois os vícios médios e os EQM, em geral, se apresentam próximos em todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra e do valor adotado para $\sigma_u^2$. Observamos também que os vícios médios diminuem à medida que aumentamos o tamanho da amostra, independentemente do valor adotado para $\sigma_u^2$ e da distribuição da covariável.

As Tabelas 3.1 a 3.6 mostram também que os vícios médios e os EQM dos três estimadores para $\sigma_\epsilon^2 = 5$ são maiores do que para $\sigma_\epsilon^2 = 1$. Além disto, os EQM dos três estimadores diminuem quando $n$ aumenta, para todas as distribuições da covariável, para os dois valores de $\sigma_\epsilon^2$ e valores de $\sigma_u^2$. Nota-se também que os EQM dos três estimadores não se alteram, em geral, quando o valor de $\sigma_u^2$ aumenta.

Tabela 3.3: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\sigma}^2_\epsilon$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma^2_\epsilon = 1$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma^2_u$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | -0,107(0,102) | -0,103(0,099) | -0,105(0,102) | -0,099(0,099) | -0,102(0,097) |
| | 1 | -0,134(0,111) | -0,108(0,100) | -0,177(0,138) | -0,103(0,100) | -0,115(0,100) |
| | 1,25 | -0,143(0,114) | -0,109(0,100) | -0,189(0,142) | -0,105(0,100) | -0,117(0,101) |
| 50 | 0,1 | -0,038(0,041) | -0,041(0,039) | -0,043(0,040) | -0,041(0,040) | -0,039(0,040) |
| | 1 | -0,049(0,042) | -0,043(0,039) | -0,058(0,042) | -0,043(0,040) | -0,045(0,041) |
| | 1,25 | -0,052(0,043) | -0,044(0,039) | -0,062(0,043) | -0,044(0,040) | -0,046(0,041) |
| 100 | 0,1 | -0,023(0,019) | -0,019(0,020) | -0,020(0,019) | -0,019(0,019) | -0,020(0,019) |
| | 1 | -0,028(0,020) | -0,021(0,020) | -0,031(0,020) | -0,020(0,019) | -0,023(0,019) |
| | 1,25 | -0,029(0,020) | -0,021(0,020) | -0,035(0,020) | -0,021(0,019) | -0,024(0,019) |

Os estimadores dos parâmetros $\alpha$, $\beta$ e $\sigma^2_\epsilon$ obtidos na Seção 3.2 supõem distribuição normal para os erros $\epsilon$ e $u$. Na Tabela 3.7, avaliamos o vício médio e o EQM destes estimadores sob a suposição de normalidade dos erros e também violando esta suposição. Nas duas primeiras colunas da Tabela 3.7, as distribuições dos erros variam segundo uma distribuição N(0,2), t-Student com 4 graus de liberdade ($t_4$), U(-2,4;2,4) e Qui-quadrado com 1 grau de liberdade ($\chi^2_1$) ($\sigma^2_\epsilon = \sigma^2_u = 2$). Geramos a covariável $z$ segundo uma distribuição N(0,10) e consideramos $n$=20, 50 e 100.

A análise da Tabela 3.7 mostra que, para o estimador $\hat{\alpha}$, quando a distribuição do erro $\epsilon_i$ é Qui-quadrado, os vícios médios e os EQM são grandes se compararmos com os vícios médios e os EQM quando as distribuições dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ são Normais, para todo $n$. Para as demais situações, ou seja, quando a distribuição de $\epsilon_i$ é simétrica, os

Tabela 3.4: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma_u^2$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | 0,014(0,990) | 0,007(0,980) | -0,002(0,245) | 0,001(0,263) | -0,007(0,380) |
| | 1 | 0,024(1,533) | 0,007(1,107) | -0,003(0,291) | 0,000(0,267) | -0,008(0,426) |
| | 1,25 | 0,019(1,852) | 0,011(1,148) | -0,005(0,332) | 0,001(0,269) | -0,007(0,439) |
| 50 | 0,1 | -0,007(0,434) | -0,007(0,364) | -0,002(0,109) | 0,004(0,099) | 0,006(0,141) |
| | 1 | -0,006(0,616) | -0,008(0,393) | -0,004(0,139) | 0,004(0,099) | 0,006(0,144) |
| | 1,25 | -0,005(0,693) | -0,007(0,402) | -0,000(0,163) | 0,004(0,100) | 0,008(0,144) |
| 100 | 0,1 | -0,003(0,215) | -0,002(0,209) | -0,000(0,050) | -0,000(0,050) | -0,000(0,100) |
| | 1 | -0,001(0,290) | -0,001(0,226) | -0,000(0,052) | -0,000(0,050) | -0,002(0,123) |
| | 1,25 | -0,005(0,316) | -0,003(0,232) | -0,000(0,053) | -0,000(0,050) | -0,001(0,130) |

vícios médios e os EQM são parecidos com os do caso em que $\epsilon_i$ e $u_i$ têm distribuição Normal.

Para o estimador $\hat{\beta}$, a violação da suposição de normalidade para as distribuições dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ não parece afetar o vício médio e o EQM, para todo tamanho de amostra.

Para o estimador $\hat{\sigma}_\epsilon^2$, a mudança na distribuição dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ não afeta o vício médio. O EQM aumenta quando a distribuição do erro $\epsilon_i$ não é Normal ou Uniforme, independentemente do tamanho da amostra.

Tabela 3.5: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\beta}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma_u^2$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | -0,004(0,109) | -0,002(0,032) | 0,002(0,230) | 0,002(0,032) | 0,000(0,055) |
| | 1 | -0,009(0,187) | -0,002(0,037) | -0,000(0,978) | 0,001(0,037) | 0,000(0,071) |
| | 1,25 | -0,006(0,228) | -0,002(0,039) | 0,000(1,744) | 0,002(0,040) | 0,000(0,078) |
| 50 | 0,1 | 0,003(0,051) | 0,001(0,010) | -0,003(0,133) | -0,000(0,012) | -0,001(0,007) |
| | 1 | 0,003(0,080) | 0,001(0,012) | 0,007(0,486) | -0,000(0,014) | -0,001(0,007) |
| | 1,25 | 0,002(0,092) | 0,001(0,012) | -0,000(0,809) | -0,000(0,014) | -0,002(0,007) |
| 100 | 0,1 | 0,001(0,024) | 0,000(0,005) | 0,003(0,061) | 0,000(0,005) | 0,001(0,024) |
| | 1 | 0,000(0,036) | 0,000(0,006) | 0,002(0,143) | 0,000(0,006) | 0,002(0,035) |
| | 1,25 | 0,002(0,040) | 0,000(0,006) | 0,006(0,201) | 0,001(0,006) | 0,002(0,037) |

### 3.4.2 Testes de hipóteses

Nesta subseção avaliamos o tamanho observado dos testes de Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças apresentados nas Seções 3.2 e 3.3 para o modelo dado em (3.1) por meio de algumas simulações. A hipótese nula de interesse é $H_0 : \beta = 0$.

Foram geradas 10.000 amostras do modelo funcional normal definido em (3.1) fixando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Nas Tabelas 3.8 a 3.25 exibimos os tamanhos observados, em porcentagem, dos testes de Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças

Tabela 3.6: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\sigma_u^2$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,1 | -0,502(2,497) | -0,492(2,492) | -0,502(2,496) | -0,494(2,533) | -0,489(2,536) |
| | 1 | -0,614(2,654) | -0,523(2,526) | -0,753(3,018) | -0,522(2,564) | -0,543(2,584) |
| | 1,25 | -0,640(2,724) | -0,531(2,525) | -0,815(3,177) | -0,535(2,575) | -0,560(2,599) |
| 50 | 0,1 | -0,196(0,981) | -0,212(1,012) | -0,221(0,993) | -0,202(1,000) | -0,201(1,017) |
| | 1 | -0,243(1,011) | -0,221(1,021) | -0,352(1,141) | -0,214(1,007) | -0,207(1,021) |
| | 1,25 | -0,260(1,014) | -0,224(1,017) | -0,408(1,226) | -0,216(1,005) | -0,209(1,023) |
| 100 | 0,1 | -0,099(0,499) | -0,097(0,498) | -0,106(0,497) | -0,099(0,498) | -0,095(0,491) |
| | 1 | -0,121(0,505) | -0,102(0,500) | -0,162(0,523) | -0,104(0,500) | -0,116(0,495) |
| | 1,25 | -0,127(0,507) | -0,104(0,500) | -0,179(0,537) | -0,105(0,500) | -0,121(0,499) |

fixando $\sigma_\epsilon^2 = 1$ (Tabelas 3.8 a 3.16) e $\sigma_\epsilon^2 = 5$ (Tabelas 3.17 a 3.25), $\sigma_u^2 = 0{,}1$; 1,0 e 1,25 e diferentes distribuições para a covariável: U(0,5), U(0,10), N(0,1), N(0,10) e LN(0,1). O número $n$ de observações foi fixado como no início da Subseção 3.5.1. O tamanho nominal foi fixado em 1%, 5% e 10%.

O tamanho observado dos testes de Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças é a proporção de rejeições de $H_0$ dentre as 10.000 amostras geradas.

Nas Tabelas 3.8 a 3.16 verificamos que, para todas as distribuições da covariável, os tamanhos observados dos testes de Wald e razão de verossimilhanças são quase sempre maiores do que os nominais, aumentam quando $\sigma_u^2$ aumenta para $n = 20$ e se aproximam do tamanho nominal quando $n$ aumenta para todo valor de $\sigma_u^2$. Para $n = 20$, quando consideramos a distribuição N(0,1) para a covariável, os tamanhos observados dos testes de Wald e razão de verossimilhanças distanciam-se do tamanho nominal quando a variância $\sigma_u^2$ é igual a 1,0 e 1,25. À medida que o tamanho da amostra aumenta, o tamanho observado destes testes se aproximam do tamanho nominal para todas as distribuições da covariável e valores de $\sigma_u^2$.

O tamanho observado do teste de Wald modificado não parece sofrer grandes alterações quando $\sigma_u^2$ aumenta, mas se aproxima do nível nominal quando $n$ aumenta, para todas as distribuições da covariável. Para $n = 20$, quando a distribuição da covariável é N(0,1) e $\sigma_u^2$=1,0 e 1,25, o tamanho observado é sempre menor que o tamanho nominal. Mas, quando $n$ aumenta para $\sigma_u^2$=1,0 e 1,25, o tamanho observado para a distribuição da covariável N(0,1) aumenta, mas é menor que o tamanho nominal.

O tamanho observado do teste escore modificado é o que mais se aproxima do tamanho nominal para todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra e da variância $\sigma_u^2$.

Analisando as Tabelas 3.17 a 3.25, em que consideramos $\sigma_\epsilon^2 = 5$, obtemos as mesmas conclusões do caso em que $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

Analisando as Tabelas 3.8 a 3.25, notamos que, fixados os valores de $n$ e de $\sigma_u^2$, os tamanhos observados dos testes para $\sigma_\epsilon^2 = 1$ estão próximos dos respectivos tamanhos observados quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$, para todas as distribuições da covariável, exceto para a distribuição N(0,1) quando $n = 20$ e $\sigma_u^2 = 1,0$ e 1,25.

Nas Tabelas 3.26 a 3.28 temos os tamanhos observados dos testes quando o pressuposto de normalidade de um dos erros não está satisfeito. Os parâmetros das distribuições foram escolhidos de modo que $\sigma_\epsilon^2 = 2$ e $\sigma_u^2 = 2$. Os erros foram gerados segundo uma N(0,2), $t_4$, U(-2,4;2,4) e $\chi_1^2$. A covariável foi gerada segundo uma distribuição N(0,10), o tamanho amostral foi igual a 20, 50 e 100 e os tamanhos nominais adotados foram de 1%, 5% e 10%. Observamos que em geral, a violação nos pressupostos de pelo menos um dos erros não parece afetar os tamanhos observados dos testes quando comparados aos tamanhos observados dos respectivos testes no caso em que os dois erros são normais.

Tabela 3.7: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$).

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | $n$ | Estimadores $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 20 | -0,006(0,125) | 0,003(0,016) | -0,228(0,404) |
| | | 50 | 0,001(0,044) | -0,001(0,006) | -0,088(0,160) |
| | | 100 | -0,000(0,020) | -0,000(0,001) | -0,042(0,079) |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 20 | 0,001(0,104) | -0,001(0,018) | -0,220(0,418) |
| | | 50 | 0,002(0,040) | -0,000(0,006) | -0,092(0,164) |
| | | 100 | -0,000(0,020) | -0,000(0,002) | -0,044(0,081) |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 20 | -0,000(0,103) | -0,000(0,032) | -0,248(0,426) |
| | | 50 | 0,000(0,044) | -0,000(0,006) | -0,081(0,160) |
| | | 100 | 0,002(0,020) | 0,000(0,002) | -0,041(0,080) |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 20 | 0,001(0,145) | 0,000(0,028) | -0,235(0,410) |
| | | 50 | 0,001(0,043) | 0,000(0,006) | -0,084(0,158) |
| | | 100 | -0,000(0,021) | -0,000(0,001) | -0,042(0,079) |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 20 | -0,000(0,105) | -0,000(0,017) | -0,227(2,010) |
| | | 50 | 0,003(0,041) | 0,000(0,004) | -0,085(1,337) |
| | | 100 | -0,000(0,020) | 0,000(0,002) | -0,035(0,598) |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 20 | -0,001(0,115) | 0,000(0,011) | -0,289(0,241) |
| | | 50 | 0,000(0,039) | 0,000(0,004) | -0,165(0,088) |
| | | 100 | -0,000(0,019) | -0,000(0,001) | -0,121(0,045) |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 20 | 0,997(1,117) | 0,000(0,016) | -0,240(2,167) |
| | | 50 | 0,999(1,041) | -0,000(0,004) | -0,096(1,031) |
| | | 100 | 1,002(1,024) | -0,000(0,002) | -0,032(0,542) |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 20 | -0,004(0,110) | 0,000(0,009) | -0,195(2,583) |
| | | 50 | 0,004(0,055) | -0,001(0,006) | -0,087(1,345) |
| | | 100 | 0,001(0,026) | -0,001(0,002) | -0,037(0,597) |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 20 | 1,005(1,114) | 0,002(0,018) | -0,205(2,274) |
| | | 50 | 1,002(1,046) | 0,000(0,008) | -0,078(1,072) |
| | | 100 | 0,999(1,019) | 0,000(0,002) | -0,045(0,544) |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 20 | 1,003(1,149) | -0,001(0,029) | -0,245(2,296) |
| | | 50 | 0,999(1,050) | 0,000(0,005) | -0,090(1,042) |
| | | 100 | 1,002(1,027) | -0,000(0,002) | -0,044(0,544) |

Tabela 3.8: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 2,49 | 2,74 | 3,51 | 2,45 | 2,49 |
| | 5 | 7,87 | 8,43 | 9,24 | 7,75 | 8,24 |
| | 10 | 13,44 | 14,20 | 14,60 | 13,41 | 13,63 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 2,37 | 2,73 | 2,90 | 2,41 | 2,39 |
| | 5 | 7,82 | 8,38 | 8,65 | 7,70 | 8,17 |
| | 10 | 13,32 | 14,14 | 14,01 | 13,38 | 13,57 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,73 | 0,90 | 1,17 | 0,71 | 0,68 |
| | 5 | 5,39 | 5,75 | 6,10 | 5,25 | 5,26 |
| | 10 | 10,92 | 11,63 | 11,76 | 10,90 | 11,00 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,57 | 1,73 | 2,28 | 1,40 | 1,56 |
| | 5 | 6,69 | 7,09 | 7,75 | 6,69 | 6,95 |
| | 10 | 12,26 | 12,83 | 13,18 | 12,16 | 12,26 |

Tabela 3.9: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 3,60 | 3,01 | 6,66 | 2,59 | 3,30 |
| | 5 | 9,37 | 8,85 | 12,10 | 8,15 | 8,77 |
| | 10 | 14,70 | 14,37 | 16,99 | 13,84 | 14,38 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 2,00 | 2,53 | 0,08 | 2,39 | 1,84 |
| | 5 | 6,84 | 8,29 | 1,15 | 7,92 | 6,84 |
| | 10 | 12,67 | 13,89 | 3,41 | 13,59 | 12,70 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,87 | 0,77 | 0,58 | 0,82 | 0,83 |
| | 5 | 5,48 | 5,77 | 4,51 | 5,15 | 5,22 |
| | 10 | 11,26 | 11,55 | 9,65 | 11,26 | 10,86 |
| $L^{**}$ | 1 | 2,23 | 1,74 | 3,20 | 1,60 | 1,98 |
| | 5 | 7,34 | 7,37 | 8,29 | 6,80 | 7,06 |
| | 10 | 13,08 | 12,92 | 13,75 | 12,72 | 12,85 |

Tabela 3.10: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 3,80 | 3,15 | 6,61 | 2,70 | 3,67 |
| | 5 | 9,68 | 8,77 | 12,06 | 7,98 | 9,39 |
| | 10 | 14,74 | 14,26 | 17,28 | 13,77 | 14,44 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,35 | 2,51 | 0,10 | 2,43 | 1,61 |
| | 5 | 6,21 | 8,02 | 0,77 | 7,72 | 6,75 |
| | 10 | 11,60 | 13,58 | 2,44 | 13,45 | 11,90 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,61 | 0,86 | 0,35 | 0,76 | 0,90 |
| | 5 | 5,38 | 5,59 | 3,47 | 5,13 | 5,67 |
| | 10 | 11,14 | 11,30 | 8,18 | 10,93 | 11,02 |
| $L^{**}$ | 1 | 2,16 | 1,86 | 2,95 | 1,65 | 2,13 |
| | 5 | 7,53 | 7,19 | 7,95 | 6,62 | 7,81 |
| | 10 | 13,07 | 12,82 | 13,36 | 12,40 | 12,85 |

Tabela 3.11: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,34 | 1,51 | 1,57 | 1,67 | 1,66 |
| | 5 | 5,72 | 6,05 | 6,60 | 6,36 | 6,11 |
| | 10 | 10,80 | 11,32 | 11,82 | 11,76 | 10,95 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,31 | 1,50 | 1,50 | 1,67 | 1,63 |
| | 5 | 5,67 | 6,04 | 6,51 | 6,34 | 6,07 |
| | 10 | 10,73 | 11,28 | 11,72 | 11,73 | 10,93 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,79 | 1,05 | 0,97 | 1,06 | 0,96 |
| | 5 | 4,90 | 5,18 | 5,54 | 5,35 | 5,09 |
| | 10 | 9,82 | 10,41 | 10,82 | 10,93 | 10,05 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,01 | 1,28 | 1,27 | 1,34 | 1,35 |
| | 5 | 5,31 | 5,59 | 6,17 | 5,85 | 5,55 |
| | 10 | 10,35 | 10,86 | 11,36 | 11,35 | 10,45 |

Tabela 3.12: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,75 | 1,64 | 2,24 | 1,84 | 1,72 |
| | 5 | 6,71 | 6,10 | 7,16 | 6,64 | 6,22 |
| | 10 | 11,57 | 11,35 | 12,54 | 12,16 | 11,68 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 0,97 | 1,56 | 0,61 | 1,77 | 1,41 |
| | 5 | 5,53 | 5,95 | 4,24 | 6,44 | 5,73 |
| | 10 | 10,44 | 11,18 | 9,43 | 11,98 | 11,12 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,82 | 1,05 | 0,95 | 1,07 | 0,95 |
| | 5 | 5,23 | 5,13 | 5,30 | 5,48 | 4,95 |
| | 10 | 10,17 | 10,29 | 10,44 | 11,00 | 10,39 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,24 | 1,33 | 1,49 | 1,48 | 1,38 |
| | 5 | 5,99 | 5,64 | 6,22 | 6,09 | 5,67 |
| | 10 | 10,95 | 10,80 | 11,37 | 11,65 | 11,02 |

Tabela 3.13: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| Teste | Tamanho Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,94 | 1,52 | 2,52 | 1,63 | 2,11 |
| | 5 | 6,30 | 6,06 | 7,55 | 5,97 | 6,66 |
| | 10 | 11,56 | 11,32 | 12,94 | 11,19 | 11,91 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 0,77 | 1,42 | 0,46 | 1,48 | 1,38 |
| | 5 | 4,69 | 5,88 | 3,56 | 5,84 | 5,89 |
| | 10 | 9,67 | 11,14 | 8,05 | 10,93 | 11,06 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,88 | 0,91 | 0,86 | 0,95 | 0,98 |
| | 5 | 4,74 | 5,00 | 5,31 | 5,10 | 5,26 |
| | 10 | 9,90 | 10,23 | 10,77 | 10,01 | 10,32 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,38 | 1,24 | 1,67 | 1,28 | 1,52 |
| | 5 | 5,49 | 5,61 | 6,44 | 5,51 | 5,96 |
| | 10 | 10,72 | 10,83 | 11,79 | 10,53 | 11,18 |

Distribuição da covariável: U(0,5), U(0,10), N(0,1), N(0,10), LN(0,1).

Tabela 3.14: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,23 | 1,19 | 1,28 | 1,28 | 1,19 |
| | 5 | 5,70 | 5,32 | 5,44 | 5,45 | 5,65 |
| | 10 | 10,65 | 10,32 | 11,15 | 10,79 | 10,51 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,22 | 1,19 | 1,26 | 1,28 | 1,18 |
| | 5 | 5,67 | 5,32 | 5,39 | 5,45 | 5,64 |
| | 10 | 10,64 | 10,31 | 11,07 | 10,78 | 10,50 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,97 | 0,95 | 1,01 | 1,03 | 0,85 |
| | 5 | 5,31 | 4,95 | 4,99 | 4,98 | 5,10 |
| | 10 | 10,17 | 9,88 | 10,63 | 10,31 | 10,17 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,10 | 1,11 | 1,21 | 1,19 | 1,02 |
| | 5 | 5,55 | 5,11 | 5,20 | 5,29 | 5,34 |
| | 10 | 10,41 | 10,12 | 10,91 | 10,56 | 10,34 |

Tabela 3.15: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,31 | 1,50 | 1,52 | 1,30 | 1,22 |
| | 5 | 5,60 | 5,55 | 6,34 | 5,63 | 5,41 |
| | 10 | 10,54 | 10,65 | 11,54 | 10,60 | 10,83 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,05 | 1,43 | 0,56 | 1,29 | 1,13 |
| | 5 | 5,11 | 5,52 | 4,28 | 5,52 | 5,26 |
| | 10 | 10,04 | 10,55 | 9,48 | 10,49 | 10,72 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,91 | 1,11 | 0,89 | 1,04 | 1,01 |
| | 5 | 4,92 | 5,13 | 5,22 | 5,12 | 4,87 |
| | 10 | 9,87 | 10,13 | 10,53 | 10,10 | 10,22 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,13 | 1,34 | 1,24 | 1,16 | 1,09 |
| | 5 | 5,28 | 5,34 | 5,90 | 5,32 | 5,17 |
| | 10 | 10,18 | 10,32 | 11,05 | 10,36 | 10,54 |

Tabela 3.16: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,39 | 1,25 | 1,83 | 1,20 | 1,30 |
| | 5 | 5,76 | 5,61 | 6,43 | 5,47 | 5,61 |
| | 10 | 10,86 | 10,67 | 11,51 | 10,54 | 10,56 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 0,97 | 1,22 | 0,35 | 1,15 | 1,18 |
| | 5 | 4,98 | 5,48 | 3,55 | 5,40 | 5,43 |
| | 10 | 10,18 | 10,57 | 8,13 | 10,44 | 10,37 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,93 | 0,93 | 1,08 | 0,91 | 1,04 |
| | 5 | 4,90 | 4,98 | 5,20 | 4,97 | 5,02 |
| | 10 | 10,13 | 10,13 | 10,33 | 10,00 | 10,05 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,08 | 1,07 | 1,48 | 1,04 | 1,16 |
| | 5 | 5,31 | 5,23 | 5,78 | 5,19 | 5,30 |
| | 10 | 10,48 | 10,38 | 10,96 | 10,27 | 10,28 |

Tabela 3.17: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 2,82 | 2,83 | 3,10 | 2,66 | 2,57 |
| | 5 | 8,26 | 8,18 | 8,43 | 8,02 | 7,99 |
| | 10 | 13,87 | 13,79 | 14,09 | 14,01 | 13,32 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 2,73 | 2,81 | 2,83 | 2,62 | 2,56 |
| | 5 | 8,16 | 8,10 | 8,00 | 7,98 | 7,93 |
| | 10 | 13,78 | 13,76 | 13,76 | 13,99 | 13,29 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,86 | 1,03 | 1,06 | 0,91 | 0,95 |
| | 5 | 5,71 | 5,58 | 5,58 | 5,60 | 5,34 |
| | 10 | 11,46 | 11,28 | 11,32 | 11,30 | 10,88 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,77 | 1,69 | 1,93 | 1,77 | 1,70 |
| | 5 | 7,06 | 6,82 | 6,95 | 6,80 | 6,59 |
| | 10 | 12,67 | 12,47 | 12,91 | 12,69 | 12,21 |

Tabela 3.18: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 3,71 | 3,00 | 5,80 | 2,70 | 3,13 |
| | 5 | 9,02 | 8,61 | 11,23 | 8,41 | 8,61 |
| | 10 | 14,68 | 13,80 | 15,90 | 14,29 | 14,14 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,58 | 2,52 | 0,36 | 2,31 | 2,65 |
| | 5 | 6,44 | 7,99 | 2,53 | 8,01 | 8,07 |
| | 10 | 11,91 | 13,32 | 6,28 | 13,72 | 13,59 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,89 | 0,98 | 0,73 | 0,85 | 0,99 |
| | 5 | 5,26 | 5,52 | 4,96 | 5,30 | 5,51 |
| | 10 | 10,87 | 11,25 | 10,45 | 11,16 | 11,25 |
| $L^{**}$ | 1 | 2,10 | 1,90 | 2,99 | 1,77 | 1,92 |
| | 5 | 7,21 | 6,99 | 8,47 | 7,10 | 7,11 |
| | 10 | 12,86 | 12,55 | 13,57 | 12,65 | 12,79 |

Tabela 3.19: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 4,32 | 3,12 | 5,93 | 2,99 | 2,86 |
| | 5 | 10,16 | 8,71 | 11,08 | 8,70 | 8,57 |
| | 10 | 15,37 | 14,17 | 16,42 | 14,35 | 14,28 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,22 | 2,40 | 0,17 | 2,41 | 2,24 |
| | 5 | 5,85 | 7,90 | 1,62 | 8,00 | 7,78 |
| | 10 | 11,53 | 13,40 | 4,65 | 13,68 | 13,58 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,85 | 0,96 | 0,61 | 0,74 | 0,97 |
| | 5 | 5,51 | 5,42 | 4,40 | 5,44 | 5,30 |
| | 10 | 11,57 | 11,11 | 9,45 | 11,41 | 11,20 |
| $L^{**}$ | 1 | 2,52 | 1,85 | 2,99 | 1,84 | 1,76 |
| | 5 | 7,80 | 7,09 | 8,09 | 7,14 | 7,08 |
| | 10 | 13,85 | 12,78 | 13,27 | 12,92 | 12,79 |

Tabela 3.20: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,56 | 1,42 | 1,53 | 1,41 | 1,48 |
| | 5 | 5,86 | 6,46 | 6,51 | 6,24 | 5,91 |
| | 10 | 10,99 | 11,88 | 12,19 | 11,59 | 10,80 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,51 | 1,41 | 1,51 | 1,41 | 1,45 |
| | 5 | 5,82 | 6,45 | 6,39 | 6,23 | 5,90 |
| | 10 | 10,94 | 11,88 | 12,11 | 11,57 | 10,73 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,86 | 0,91 | 0,94 | 0,86 | 0,93 |
| | 5 | 4,90 | 5,46 | 5,29 | 5,15 | 5,02 |
| | 10 | 10,18 | 10,81 | 11,01 | 10,79 | 9,79 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,18 | 1,18 | 1,24 | 1,16 | 1,25 |
| | 5 | 5,32 | 6,01 | 5,92 | 5,73 | 5,54 |
| | 10 | 10,62 | 11,44 | 11,68 | 11,20 | 10,31 |

Tabela 3.21: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,92 | 1,70 | 2,17 | 1,42 | 1,89 |
| | 5 | 6,51 | 6,79 | 7,49 | 6,28 | 6,71 |
| | 10 | 11,41 | 12,30 | 12,93 | 11,69 | 12,16 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,37 | 1,62 | 0,72 | 1,31 | 0,89 |
| | 5 | 5,60 | 6,67 | 4,85 | 6,14 | 5,11 |
| | 10 | 10,65 | 12,16 | 10,25 | 11,57 | 10,51 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 1,03 | 1,01 | 0,88 | 0,87 | 0,84 |
| | 5 | 5,19 | 5,74 | 5,43 | 5,11 | 5,05 |
| | 10 | 10,21 | 11,21 | 11,15 | 10,66 | 10,49 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,48 | 1,43 | 1,53 | 1,10 | 1,39 |
| | 5 | 5,75 | 6,29 | 6,46 | 5,64 | 5,93 |
| | 10 | 10,75 | 11,75 | 11,99 | 11,23 | 11,32 |

Tabela 3.22: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,85 | 1,59 | 2,23 | 1,74 | 2,05 |
| | 5 | 6,58 | 6,33 | 7,14 | 6,25 | 6,94 |
| | 10 | 11,60 | 11,67 | 12,13 | 11,73 | 12,28 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,06 | 1,42 | 0,56 | 1,54 | 0,73 |
| | 5 | 5,47 | 6,12 | 3,82 | 6,06 | 4,70 |
| | 10 | 10,56 | 11,51 | 8,50 | 11,53 | 9,68 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,90 | 0,89 | 0,90 | 0,88 | 0,93 |
| | 5 | 5,12 | 5,31 | 5,25 | 5,09 | 5,18 |
| | 10 | 10,38 | 10,60 | 10,18 | 10,48 | 10,33 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,33 | 1,18 | 1,69 | 1,28 | 1,46 |
| | 5 | 5,81 | 5,77 | 6,20 | 5,73 | 6,01 |
| | 10 | 10,94 | 11,14 | 11,15 | 11,12 | 11,39 |

Tabela 3.23: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 0,1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,27 | 1,23 | 1,09 | 1,28 | 1,09 |
| | 5 | 5,64 | 5,44 | 5,08 | 5,42 | 5,36 |
| | 10 | 10,60 | 10,66 | 10,45 | 10,50 | 10,65 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,26 | 1,22 | 1,07 | 1,28 | 1,09 |
| | 5 | 5,59 | 5,43 | 5,03 | 5,42 | 5,35 |
| | 10 | 10,56 | 10,66 | 10,37 | 10,50 | 10,64 |
| $Q_m^*$ | 1 | 1,00 | 0,97 | 0,86 | 1,03 | 0,86 |
| | 5 | 5,18 | 5,03 | 4,45 | 4,98 | 4,86 |
| | 10 | 10,08 | 10,30 | 9,85 | 10,06 | 10,11 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,11 | 1,12 | 0,96 | 1,16 | 0,97 |
| | 5 | 5,48 | 5,23 | 4,71 | 5,23 | 5,10 |
| | 10 | 10,34 | 10,44 | 10,11 | 10,24 | 10,38 |

Tabela 3.24: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,33 | 1,04 | 1,29 | 1,21 | 1,26 |
| | 5 | 5,60 | 5,33 | 5,71 | 5,33 | 5,61 |
| | 10 | 10,32 | 10,46 | 10,84 | 10,35 | 10,79 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,05 | 1,00 | 0,65 | 1,16 | 1,19 |
| | 5 | 5,17 | 5,21 | 4,52 | 5,26 | 5,46 |
| | 10 | 10,02 | 10,42 | 9,48 | 10,30 | 10,67 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,87 | 0,75 | 0,83 | 0,95 | 0,95 |
| | 5 | 4,91 | 4,87 | 4,84 | 4,83 | 4,98 |
| | 10 | 9,76 | 10,01 | 9,81 | 9,99 | 10,20 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,11 | 0,90 | 1,08 | 1,11 | 1,11 |
| | 5 | 5,25 | 5,03 | 5,29 | 5,09 | 5,27 |
| | 10 | 10,04 | 10,25 | 10,35 | 10,17 | 10,49 |

Tabela 3.25: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado, escore modificado e razão de verossimilhanças em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\sigma_u^2 = 1,25$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,28 | 1,20 | 1,42 | 1,30 | 1,28 |
| | 5 | 5,80 | 5,55 | 5,66 | 5,58 | 5,58 |
| | 10 | 10,81 | 10,70 | 10,30 | 10,52 | 10,50 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 0,93 | 1,15 | 0,49 | 1,21 | 1,16 |
| | 5 | 5,13 | 5,42 | 3,89 | 5,50 | 5,41 |
| | 10 | 10,22 | 10,62 | 8,50 | 10,46 | 10,35 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,86 | 0,87 | 0,83 | 0,95 | 0,94 |
| | 5 | 5,02 | 5,09 | 4,71 | 5,10 | 5,10 |
| | 10 | 10,12 | 10,31 | 9,35 | 10,06 | 10,00 |
| $L^{**}$ | 1 | 1,07 | 1,00 | 1,04 | 1,13 | 1,15 |
| | 5 | 5,42 | 5,31 | 5,27 | 5,38 | 5,34 |
| | 10 | 10,42 | 10,47 | 9,77 | 10,23 | 10,23 |

Tabela 3.26: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 20$.

| Distribuição | Distribuição | Tamanho | Testes | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| de $\epsilon_i$ | de $u_i$ | Nominal (%) | $W_I^{**}$ | $W_{mI}^{*}$ | $Q_m^{*}$ | $L^{**}$ |
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,82 | 2,25 | 0,69 | 1,60 |
| | | 5 | 8,12 | 7,57 | 5,20 | 6,92 |
| | | 10 | 14,19 | 13,55 | 10,96 | 12,70 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 2,69 | 2,13 | 0,63 | 1,58 |
| | | 5 | 8,34 | 7,49 | 5,01 | 6,88 |
| | | 10 | 14,15 | 13,44 | 10,96 | 12,74 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 3,07 | 2,15 | 0,75 | 1,92 |
| | | 5 | 8,76 | 7,52 | 5,45 | 7,19 |
| | | 10 | 14,31 | 13,16 | 11,06 | 12,79 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 3,25 | 1,84 | 0,63 | 1,72 |
| | | 5 | 8,65 | 7,04 | 5,05 | 6,84 |
| | | 10 | 14,12 | 12,70 | 10,79 | 12,56 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 3,02 | 2,19 | 0,81 | 1,92 |
| | | 5 | 8,62 | 7,54 | 5,34 | 7,11 |
| | | 10 | 14,15 | 12,96 | 10,96 | 12,75 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 3,20 | 2,25 | 0,93 | 2,07 |
| | | 5 | 8,70 | 7,36 | 5,32 | 7,05 |
| | | 10 | 14,49 | 13,11 | 11,07 | 12,84 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,59 | 1,97 | 0,60 | 1,42 |
| | | 5 | 7,86 | 7,23 | 4,98 | 6,58 |
| | | 10 | 13,81 | 13,14 | 10,85 | 12,45 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 2,98 | 2,27 | 0,81 | 1,88 |
| | | 5 | 9,03 | 7,96 | 5,36 | 7,32 |
| | | 10 | 14,66 | 13,71 | 11,60 | 13,05 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 2,68 | 2,04 | 0,56 | 1,54 |
| | | 5 | 8,50 | 7,85 | 5,30 | 7,00 |
| | | 10 | 14,12 | 13,44 | 11,15 | 12,77 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 3,14 | 1,87 | 0,81 | 1,87 |
| | | 5 | 9,00 | 7,20 | 5,32 | 7,23 |
| | | 10 | 14,36 | 12,75 | 10,96 | 12,68 |

Tabela 3.27: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 50$.

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | Tamanho Nominal (%) | Testes $W_I^{**}$ | $W_{mI}^{*}$ | $Q_m^{*}$ | $L^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,66 | 1,41 | 0,92 | 1,25 |
| | | 5 | 6,30 | 5,98 | 5,18 | 5,72 |
| | | 10 | 11,22 | 10,87 | 10,10 | 10,74 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 1,56 | 1,34 | 0,75 | 1,09 |
| | | 5 | 6,21 | 5,86 | 5,09 | 5,62 |
| | | 10 | 11,61 | 11,36 | 10,49 | 11,11 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 1,57 | 1,44 | 0,91 | 1,20 |
| | | 5 | 6,60 | 6,34 | 5,39 | 5,99 |
| | | 10 | 11,49 | 11,30 | 10,50 | 10,93 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,60 | 1,33 | 0,91 | 1,20 |
| | | 5 | 6,07 | 5,73 | 4,93 | 5,45 |
| | | 10 | 11,35 | 11,09 | 10,22 | 10,80 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,54 | 1,28 | 0,81 | 1,12 |
| | | 5 | 6,39 | 5,94 | 5,18 | 5,70 |
| | | 10 | 11,93 | 11,63 | 10,72 | 11,43 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,75 | 1,46 | 0,97 | 1,34 |
| | | 5 | 6,11 | 5,72 | 4,88 | 5,52 |
| | | 10 | 11,56 | 11,20 | 10,23 | 10,91 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,51 | 1,39 | 0,95 | 1,21 |
| | | 5 | 5,97 | 5,71 | 4,74 | 5,34 |
| | | 10 | 11,07 | 10,83 | 9,98 | 10,61 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,75 | 1,46 | 0,91 | 1,24 |
| | | 5 | 6,39 | 6,22 | 5,30 | 5,89 |
| | | 10 | 11,57 | 11,36 | 10,56 | 11,03 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 1,73 | 1,54 | 1,06 | 1,35 |
| | | 5 | 6,24 | 5,95 | 5,05 | 5,67 |
| | | 10 | 11,33 | 11,08 | 10,18 | 10,83 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,49 | 1,32 | 0,88 | 1,13 |
| | | 5 | 6,17 | 5,91 | 5,12 | 5,60 |
| | | 10 | 11,21 | 11,02 | 10,16 | 10,78 |

Tabela 3.28: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 100$.

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | Tamanho Nominal (%) | Testes $W_I^{**}$ | $W_{mI}^{*}$ | $Q_m^{*}$ | $L^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,29 | 1,18 | 0,92 | 1,11 |
| | | 5 | 5,86 | 5,70 | 5,21 | 5,54 |
| | | 10 | 10,60 | 10,53 | 10,17 | 10,39 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 1,10 | 1,05 | 0,87 | 1,02 |
| | | 5 | 5,29 | 5,17 | 4,79 | 5,08 |
| | | 10 | 10,40 | 10,27 | 9,86 | 10,12 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 1,17 | 1,12 | 0,94 | 1,06 |
| | | 5 | 5,39 | 5,27 | 4,89 | 5,15 |
| | | 10 | 10,49 | 10,38 | 9,98 | 10,23 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,38 | 1,23 | 0,91 | 1,14 |
| | | 5 | 5,58 | 5,33 | 5,04 | 5,26 |
| | | 10 | 11,14 | 10,90 | 10,49 | 10,74 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,17 | 1,10 | 0,87 | 1,03 |
| | | 5 | 5,49 | 5,32 | 4,75 | 5,13 |
| | | 10 | 10,95 | 10,87 | 10,43 | 10,72 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,21 | 1,15 | 0,91 | 1,09 |
| | | 5 | 5,48 | 5,37 | 4,95 | 5,27 |
| | | 10 | 10,71 | 10,53 | 10,10 | 10,41 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,46 | 1,35 | 1,06 | 1,25 |
| | | 5 | 5,68 | 5,58 | 5,09 | 5,39 |
| | | 10 | 10,57 | 10,44 | 10,01 | 10,27 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,19 | 1,12 | 0,93 | 1,02 |
| | | 5 | 5,48 | 5,33 | 4,89 | 5,17 |
| | | 10 | 10,52 | 10,38 | 10,08 | 10,29 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 1,29 | 1,20 | 0,90 | 1,07 |
| | | 5 | 5,45 | 5,30 | 4,82 | 5,16 |
| | | 10 | 11,01 | 10,92 | 10,43 | 10,76 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,32 | 1,15 | 0,84 | 1,09 |
| | | 5 | 5,19 | 5,04 | 4,64 | 4,96 |
| | | 10 | 10,24 | 10,03 | 9,64 | 9,93 |

CAPÍTULO 4

# Modelo linear simples funcional com razão de variâncias conhecida

Consideremos o modelo definido por

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \beta z_i + \epsilon_i, \\ x_i &= z_i + u_i, \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que a cada unidade experimental $i$ associamos $y_i$, valor da variável resposta; $x_i$, valor observado de uma covariável $z_i$, constante desconhecida ou parâmetro incidental; $\epsilon_i$ e $u_i$, erros aleatórios, $i = 1, \ldots, n$. Assumimos que $\epsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$ e que $u_i$ tem média igual a zero, variância igual a $\sigma_u^2$ conhecida e quarto momento finito. Além disto, assumimos que $\sigma_\epsilon^2 = \lambda\sigma_u^2$, com $\lambda$ conhecido. Vamos definir $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_u^2)'$ como o vetor de parâmetros estruturais e supor que $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ são independentes, $u_1, \ldots, u_n$ são independentes e $\epsilon_i$ e $u_i$ são independentes.

## 4.1 O estimador do escore corrigido

O logaritmo da função de verossimilhança "não observada" pode ser escrito como

$$\ell(\theta; z, y) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\theta; z_i, y_i),$$

onde

$$\ell_i(\theta; z_i, y_i) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\lambda\sigma_u^2) - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta z_i)^2,$$

$i = 1, \ldots, n$. Seja $U_i(\theta, z_i, y_i) = (U_{i\alpha}(\theta), U_{i\beta}(\theta), U_{i\sigma_u^2}(\theta))'$ com

$$U_{i\alpha}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta z_i),$$

$$U_{i\beta}(\beta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \beta} = \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta z_i)z_i \text{ e}$$

$$U_{i\sigma_u^2}(\theta) = \frac{\partial \ell_i(\theta)}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4}(y_i - \alpha - \beta z_i)^2,\ i = 1, \ldots, n.$$

Considerando $U_i^*(\theta, x_i, y_i) = (U_{i\alpha}^*(\theta), U_{i\beta}^*(\theta), U_{i\sigma_u^2}^*(\theta))'$, com

$$\begin{aligned}
U_{i\alpha}^*(\theta) &= \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta x_i), \\
U_{i\beta}^*(\theta) &= \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i + \frac{\beta}{\lambda} \\
&\text{e} \\
U_{i\sigma_u^2}^*(\theta) &= \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2}(\beta^2 + \lambda),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

segue que $E[U_i^*(\theta; x_i, y_i)|z_i, y_i] = U_i(\theta; z_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto $U_i^*(\theta, x_i, y_i) = (U_{i\alpha}^*(\theta), U_{i\beta}^*(\theta), U_{i\sigma_u^2}^*(\theta))'$ em (4.2) é um escore corrigido conforme (2.5).

Notemos que

$$\ell_i^*(\theta; x_i, y_i) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\lambda\sigma_u^2) - \frac{1}{2\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 + \frac{\beta^2}{2\lambda},$$

é um logaritmo da função de verossimilhança corrigido.

Desde que $E[\ell_i^*(\theta; x_i, y_i)] = \ell_i(\theta; z_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha}\ell_i^*(\theta) &= \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta x_i) = U_{i\alpha}^*(\theta),\\
\frac{\partial}{\partial \beta}\ell_i^*(\theta) &= \frac{1}{\lambda\sigma_u^2}(y_i - \alpha - \beta x_i)x_i + \frac{\beta}{\lambda} = U_{i\beta}^*(\theta),\\
\frac{\partial}{\partial \sigma_u^2}\ell_i^*(\theta) &= -\frac{1}{2\sigma_u^2} + \frac{1}{2\lambda\sigma_u^4}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2 \neq U_{i\sigma_u^2}^*(\theta).
\end{aligned}$$

Portanto, a função escore corrigida $U^*(\theta; x, y) = \sum_{i=1}^n U_i^*(\theta; x_i, y_i)$ em (4.2) não pode ser obtida como a derivada do logaritmo de uma função de verossimilhança corrigido, mesmo existindo essa função.

A solução da equação $U^*(\theta; x, y) = 0$, conduz aos seguintes estimadores

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}, \tag{4.3}$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{yy} - \lambda S_{xx} + \sqrt{(S_{yy} - \lambda S_{xx})^2 + 4\lambda S_{xy}^2}}{2S_{xy}}, \quad se \quad S_{xy} \neq 0, \tag{4.4}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{\hat{\beta}^2 + \lambda}(S_{yy} - 2\hat{\beta}S_{xy} + \hat{\beta}^2 S_{xx}), \tag{4.5}$$

onde
$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $S_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, $S_{yy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2$ e $S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

O estimador de $\beta$ em (4.4), é uma das raizes da equação

$$S_{xy} - \hat{\beta}S_{xx} + \hat{\beta}\hat{\sigma}_u^2 = 0, \tag{4.6}$$

substituindo $\hat{\sigma}_u^2$ pela expressão em (4.5).

Como sugestão proposta por Stefanski e Carroll (1987), a raiz selecionada é a mais próxima do estimador naive $\hat{\beta} = S_{xy}/S_{xx}$, que na situação acima, corresponde à raiz positiva dada por (4.4), desde que a raiz tenha o mesmo sinal que $S_{xy}$.

Desta maneira, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ coincidem com os EMV para $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, no modelo funcional com $\lambda$ conhecido, sob normalidade de $u_i$. O estimador $\hat{\sigma}_u^2$ em (4.5) é consistente e Cheng e Van Ness (1994) mostraram que este estimador corresponde ao estimador obtido pelo método dos momentos no modelo funcional.

Calculando $-\dfrac{\partial}{\partial\theta}U^*(\theta; x, y)$, e tomando o valor esperado, obtemos de (2.8)

$$\overline{\Lambda}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} & \frac{\overline{z}}{\lambda\sigma_u^2} & 0 \\ \frac{\overline{z}}{\lambda\sigma_u^2} & \frac{S_{zz}+\overline{z}^2}{\lambda\sigma_u^2} & -\frac{\beta}{\lambda\sigma_u^2} \\ 0 & 0 & \frac{\beta^2+\lambda}{2\lambda\sigma_u^4} \end{bmatrix},$$

com $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$ e $S_{zz} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2$.

Calculando a inversa da matriz $\overline{\Lambda}_n(\theta)$, obtemos a seguinte matriz:

$$\{\overline{\Lambda}_n(\theta)\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda\sigma_u^2(S_{zz}+\overline{z}^2)}{S_{zz}} & -\frac{\lambda\sigma_u^2\overline{z}}{S_{zz}} & -\frac{2\lambda\sigma_u^4\beta\overline{z}}{(\beta^2+\lambda)S_{zz}} \\ -\frac{\lambda\sigma_u^2\overline{z}}{S_{zz}} & \frac{\lambda\sigma_u^2}{S_{zz}} & \frac{2\lambda\sigma_u^4\beta}{(\beta^2+\lambda)S_{zz}} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda\sigma_u^4}{\beta^2+\lambda} \end{bmatrix}.$$

Depois de alguma álgebra a matriz $\overline{\Gamma}_n(\theta)$ definida em (2.9) pode ser escrita como

$$\overline{\Gamma}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix},$$

com

$\gamma_{11} = \frac{\beta^2+\lambda}{\lambda^2\sigma_u^2}$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{(\beta^2+\lambda)\overline{z}}{\lambda^2\sigma_u^2} + \frac{\beta^2\mu_3}{\lambda^2\sigma_u^4}$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = -\frac{\beta^3\mu_3}{2\lambda^2\sigma_u^6}$,

$\gamma_{22} = \frac{(\beta^2+\lambda)(S_{zz}+\overline{z}^2)}{\lambda^2\sigma_u^2} + \frac{\beta^2\mu_4}{\lambda^2\sigma_u^4} + \frac{2\beta^2\overline{z}\mu_3}{\lambda^2\sigma_u^4} + \frac{1}{\lambda} - \frac{\beta^2}{\lambda^2}$,

$\gamma_{23} = \gamma_{32} = -\frac{\beta^3\overline{z}\mu_3}{2\lambda^2\sigma_u^6} - \frac{\beta^3\mu_4}{2\lambda^2\sigma_u^6} - \frac{\beta}{\lambda\sigma_u^2} + \frac{\beta^3}{2\lambda^2\sigma_u^2}$,

$\gamma_{33} = \frac{\beta^4\mu_4}{4\lambda^2\sigma_u^8} + \frac{3\lambda^2+6\lambda\beta^2-(\beta^2+\lambda)^2}{4\lambda^2\sigma_u^4}$,

sendo $\mu_3 = E[u_i^3]$, $\mu_4 = E[u_i^4]$, $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$ e $S_{zz} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2$.

Supondo $E[u_i^4] < \infty$ segue, do Teorema 2.2, que os estimadores dados por (4.3), (4.4) e (4.5) são consistentes e assintoticamente normais com matriz de covariância dada por $n^{-1}\Omega_n$, onde

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix},$$

com

$\omega_{11} = \frac{\beta^2}{S_{zz}^2 a^2}[a^2\sigma_u^2 S_{zz}(S_{zz} + \overline{z}^2) - 2\lambda\mu_3\overline{z}S_{zz}a + \lambda^2\overline{z}^2 b] + \frac{\lambda\sigma_u^2}{S_{zz}^2}[S_{zz}^2 + \overline{z}^2(S_{zz} + \sigma_u^2)]$,

$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{\beta^2}{S_{zz}^2 a^2}[-\overline{z}\sigma_u^2 S_{zz}a^2 + \mu_3\lambda S_{zz}a - \overline{z}\lambda^2 b] + \frac{\sigma_u^2}{S_{zz}^2}[-\overline{z}\lambda(S_{zz} + \sigma_u^2)]$,

$\omega_{13} = \omega_{31} = \frac{-\beta^3}{S_{zz}a^2}[\mu_3 S_{zz}a - \overline{z}\lambda b]$,

$\omega_{22} = \frac{\beta^2}{S_{zz}^2 a^2}[\sigma_u^2 S_{zz}a^2 + \lambda^2 b] + \frac{\lambda\sigma_u^2}{S_{zz}^2}(S_{zz} + \sigma_u^2)$,

$\omega_{23} = \omega_{32} = -\frac{\beta^3\lambda b}{S_{zz}a^2}$,

$\omega_{33} = \frac{1}{a^2}[\beta^4(\mu_4 - \sigma_u^4) + 4\lambda\beta^2\sigma_u^4 + 2\lambda^2\sigma_u^4]$,

onde $a = \beta^2 + \lambda$ e $b = \mu_4 - 3\sigma_u^4$.

Depois de alguma álgebra, podemos escrever

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} \delta + \overline{z}^2\phi - 2\overline{z}\gamma & -\overline{z}\phi + \gamma & -\frac{\beta^3\mu_3}{\beta^2+\lambda} - \overline{z}\rho \\ -\overline{z}\phi + \gamma & \phi & \rho \\ -\frac{\beta^3\mu_3}{\beta^2+\lambda} - \overline{z}\rho & \rho & \frac{\beta^4\tau+2\delta^2}{(\beta^2+\lambda)^2} \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

onde

$\tau = \mu_4 - 3\sigma_u^4$, $\delta = \sigma_u^2(\beta^2 + \lambda)$, $\phi = \frac{\delta}{S_{zz}} + \frac{\lambda^2\beta^2\tau+\lambda\delta^2}{S_{zz}^2(\beta^2+\lambda)^2}$, $\gamma = \frac{\beta^2\mu_3\lambda}{S_{zz}(\beta^2+\lambda)}$ e $\rho = -\frac{\lambda\beta^3\tau}{S_{zz}(\beta^2+\lambda)^2}$.

## 4.2 Testes de hipóteses baseados na função escore corrigida

Usando os resultados da Seção 2.2, implementamos testes assintóticos para testar a hipótese nula $H_0 : \beta = 0$.

Seja, $\psi = \beta$ o parâmetro de interesse e $\phi = (\alpha, \sigma_u^2)'$ o parâmetro de pertubação. Seja $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_u^2)'$, dado por (4.3), (4.4) e (4.5), o estimador de $\theta$ sob o modelo irrestrito e $\hat{\theta}_0 = (\hat{\alpha}_0, 0, \hat{\sigma}_{u0}^2)'$ o estimador restrito a $H_0$, onde

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{y} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_{u0}^2 = \frac{S_{yy}}{\lambda}.$$

Usando o resultado (4.7) e supondo que $u_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma_u^2)$ segue que $\tau = \rho = \gamma = 0$, $\delta = \sigma_u^2(\beta^2+\lambda)$ e $\psi = \sigma_u^2(\beta^2+\lambda)/S_{zz}+\sigma_u^4\lambda/S_{zz}^2$. De acordo com a partição $\theta = (\phi', \psi')'$ reescrevemos as matrizes $\Omega_n$ e $\overline{\Lambda}_n$ da seguinte maneira

$$\Omega_n(\theta) = \begin{bmatrix} \delta + \overline{z}^2\phi & 0 & -\overline{z}\phi \\ 0 & \frac{2\delta^2}{(\beta^2+\lambda)^2} & 0 \\ -\overline{z}\phi & 0 & \phi \end{bmatrix} \text{ e } \overline{\Lambda}_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} & 0 & \frac{\overline{z}}{\lambda\sigma_u^2} \\ 0 & \frac{\beta^2+\lambda}{2\lambda\sigma_u^4} & \frac{-\beta}{\lambda\sigma_u^2} \\ \frac{\overline{z}}{\lambda\sigma_u^2} & 0 & \frac{S_{zz}+\overline{z}^2}{\lambda\sigma_u^2} \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

com

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \;\text{ e }\; S_{zz} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2.$$

Sob a suposição (3.5), as matrizes $\Omega_n(\theta)$ e $\overline{\Lambda}_n(\theta)$ em (4.8) convergem para as matrizes $\Omega(\theta)$ e $\Lambda(\theta)$, definidas positivas, respectivamente

$$\Omega(\theta) = \begin{bmatrix} \delta + \mu^2\phi & 0 & -\mu\phi \\ 0 & \frac{2\delta^2}{(\beta^2+\lambda)^2} & 0 \\ -\mu\phi & 0 & \phi \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda\sigma_u^2} & 0 & \frac{\mu}{\lambda\sigma_u^2} \\ 0 & \frac{\beta^2+\lambda}{2\lambda\sigma_u^4} & \frac{-\beta}{\lambda\sigma_u^2} \\ \frac{\mu}{\lambda\sigma_u^2} & 0 & \frac{\nu^2+\mu^2}{\lambda\sigma_u^2} \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

com $\delta = \sigma_u^2(\beta^2 + \lambda)$ e $\phi = \dfrac{\sigma_u^2(\beta^2+\lambda)}{\nu^2} + \dfrac{\lambda\sigma_u^4}{\nu^4}$.

Depois de alguma manipulação algébrica podemos escrever o inverso da matriz $\Lambda_{\phi\phi}(\theta)$ da seguinte maneira

$$\Lambda_{\phi\phi}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \lambda\sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda\sigma_u^4}{\beta^2+\lambda} \end{bmatrix}.$$

### 4.2.1 Teste de Wald

Estamos interessados em testar a hipótese $H_0 : \beta = 0$.

A estatística de Wald dada em (2.11) assume a expressão

$$W_I^* = n\hat{\psi}^2\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}), \tag{4.10}$$

onde $\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\phi}$ é um estimador consistente da matriz $\Lambda_{\psi\psi.\phi}$ avaliado no modelo irrestrito, dada por (veja a expressão (2.17) e o resultado (3.5) e (3.7))

$$\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}) = \frac{S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2}{\lambda\hat{\sigma}_u^2}. \tag{4.11}$$

Finalmente, usando (4.11), a estatística de Wald dada em (4.10) pode ser escrita como

$$W_I^* = \frac{n\hat{\beta}^2(S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2)}{\lambda\hat{\sigma}_u^2},$$

onde

$$\hat{\beta} = \frac{S_{yy} - \lambda S_{xx} + \sqrt{(S_{yy} - \lambda S_{xx})^2 + 4\lambda S_{xy}^2}}{2S_{xy}}, \quad \text{se} \quad S_{xy} \neq 0$$

e

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{\hat{\beta}^2 + \lambda}(S_{yy} - 2\hat{\beta}S_{xy} + \hat{\beta}^2 S_{xx}).$$

Note que a estatística de Wald no modelo restrito é dada pela expressão (2.12). E, analogamente ao resultado (4.10) do teste de Wald no modelo irrestrito, temos que

$$\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}_0) = \frac{\lambda S_{xx} - S_{yy}}{\lambda S_{yy}}. \tag{4.12}$$

Substituindo o resultado de (4.12) em (2.12) podemos escrever a estatística de Wald no modelo restrito da seguinte maneira

$$W_R^* = \frac{n\hat{\beta}^2(\lambda S_{xx} - S_{yy})}{\lambda S_{yy}}. \tag{4.13}$$

### 4.2.2 Teste de Wald modificado

Para testar a hipótese nula $H_0 : \beta = 0$, a estatística de Wald modificada dada em (2.13) é dada pela expressão

$$W_{mI}^* = n\hat{\psi}^2\hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}), \tag{4.14}$$

onde $\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta})$ é um estimador consistente da matriz $\Omega_{\psi\psi}^{-1}(\theta)$ avaliada no modelo irrestrito dado por (veja a expressão (2.18) e os resultados (3.5) e (3.7))

$$\hat{\Omega}_{\psi\psi}^{-1}(\hat{\theta}) = \frac{(S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2)^2}{\hat{\sigma}_u^2(S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2)(\hat{\beta}^2 + \lambda) + \lambda\hat{\sigma}_u^4}. \tag{4.15}$$

Substituindo (4.15) em (4.14) temos que a estatística de Wald modificada no modelo irrestrito pode ser escrita como

$$W_{mI}^* = \frac{n\hat{\beta}^2(S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2)^2}{\hat{\sigma}_u^2(S_{xx} - \hat{\sigma}_u^2)(\hat{\beta}^2 + \lambda) + \lambda\hat{\sigma}_u^4}. \tag{4.16}$$

Analogamente ao resultado (4.15) do teste de Wald modificado no modelo irrestrito,

$$\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{(\lambda S_{xx} - S_{yy})^2}{\lambda^2 S_{xx} S_{yy}}. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (2.14) temos que a estatística de Wald modificada no modelo restrito é dada por

$$W^*_{mR} = \frac{n\hat{\beta}^2(\lambda S_{xx} - S_{yy})^2}{\lambda^2 S_{xx} S_{yy}}. \tag{4.18}$$

### 4.2.3 Teste escore

Da mesma forma que na Subseção 3.3.3, redefinimos o vetor escore em função do parâmetro de interesse e dos parâmetros de pertubação. O interesse é testar $H_0$ : $\beta = 0$.

A função escore corrigida sob o modelo restrito relativa ao parâmetro de interesse é dada por

$$U^*_{\psi}(\theta_0) \; = \; \sum_{i=1}^{n} U^*_{i\psi}(\theta_0).$$

Depois de alguma álgebra, escrevemos o estimador da função escore corrigida da seguinte forma

$$U^*_{\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{nS_{xy}}{S_{yy}}. \tag{4.19}$$

De (4.12) vem que um estimador consistente de $\Lambda^{-1}_{\psi\psi.\phi}(\theta_0)$ dado por

$$\hat{\Lambda}^{-1}_{\psi\psi.\phi}(\hat{\theta}_0) = \frac{\lambda S_{yy}}{\lambda S_{xx} - S_{yy}}. \tag{4.20}$$

Logo, substituindo (4.19) e (4.20) na expressão (2.15) podemos escrever a estatística escore como

$$Q^* = \frac{n\lambda S^2_{xy}}{S_{yy}(\lambda S_{xx} - S_{yy})}. \tag{4.21}$$

### 4.2.4 Teste escore modificado

Para testar $H_0 : \beta = 0$, vamos utilizar a estatística escore modificada dada em (2.16).

Sob o modelo restrito, $\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)$ é um estimador consistente de $\Omega^{-1}_{\psi\psi}(\theta_0)$ dado por

$$\hat{\Omega}^{-1}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{(\lambda S_{xx} - S_{yy})^2}{\lambda^2 S_{xx} S_{yy}}. \tag{4.22}$$

Logo, substituindo (4.19), (4.20) e (4.22) na expressão (2.16) podemos escrever a estatística escore modificada como

$$Q^*_m = \frac{n S^2_{xy}}{S_{xx} S_{yy}}. \tag{4.23}$$

### 4.2.5 Distribuição assintótica das estatísticas dos testes

Como $\psi = \beta$ é o parâmetro de interesse de dimensão $q = 1$ temos, pelo Teorema 2.3, que

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0) = \frac{\lambda S_{xx}}{\lambda S_{xx} - S_{yy}},$$

$$W^{**}_R = \frac{W^*_R}{\hat{\mu}_1} = \frac{n\hat{\psi}^2}{\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)} = W^*_{mR},$$

$$W^{**}_I = \frac{W^*_I}{\hat{\mu}_1} = \frac{n\hat{\psi}^2\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta})}{\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)},$$

$$Q^{**} = \frac{Q^*}{\hat{\mu}_1} = \frac{n^{-1}U^*_\psi(\hat{\theta}_0)^2}{\hat{\Lambda}_{\psi\psi.\lambda}(\hat{\theta}_0)\hat{\Omega}_{\psi\psi}(\hat{\theta}_0)} = Q^*_m,$$

sendo que $W^{**}_R$, $W^{**}_I$ e $Q^{**}$ têm distribuição assintótica $\chi^2_1$.

## 4.3 Testes de Wald na função escore não corrigida

Gleser (1985) mostrou que no modelo funcional definido em (4.1), os estimadores de máxima verossimilhança para $\alpha$ e $\beta$ coincidem com os estimadores obtidos em

(4.3) e (4.4), são consistentes e assintoticamente normais. O estimador de máxima verossimilhança de $\sigma_u^2$ dado por $\tilde{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_u^2/2$ com $\hat{\sigma}_u^2$ dado em (4.5) não é consistente. Um estimador consistente para $\sigma_u^2$ é $\tilde{\sigma}_u^{2*} = 2\tilde{\sigma}_u^2$. A matriz $\Omega$ dada em (4.9) coincide com a matriz de covariâncias assintótica obtida por Gleser (1985) no modelo funcional.

Desta forma, a estatística de Wald sob o modelo irrestrito, de uma função escore não corrigida coincide com a estatística de Wald modificada (ver expressão $W_{mI}^*$ em (4.16)).

Analogamente, a estatística de Wald sob o modelo restrito, de uma função escore não corrigida coincide com a estatística de Wald modificada (ver expressão $W_{mR}^*$ em (4.18)).

## 4.4 Simulações

Utilizando o pacote estatístico S-Plus fizemos algumas simulações para avaliar propriedades dos estimadores e o desempenho dos testes propostos neste capítulo, em amostras finitas.

Foram geradas 10.000 amostras do modelo de regressão linear simples funcional definido em (4.1) assumindo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Verificamos o comportamento dos estimadores de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_u^2$ simulando os valores fixos da covariável $z_i$ a partir de diferentes distribuições de probabilidades para diferentes valores de $n$ e $\lambda$. Fizemos ainda um estudo de simulação com algumas violações nas distribuições dos erros para avaliação do comportamento dos estimadores nestes casos, considerando diferentes valores de $n$.

O comportamento dos testes apresentados na Seção 4.2 é verificado na segunda parte desta seção. Avaliamos os tamanhos observados dos testes de Wald (modelo irrestrito), Wald modificado (modelo irrestrito e restrito) e escore modificado sob a hipótese nula, para diferentes distribuições da covariável, distribuições dos erros aleatórios, diferentes valores de $n$, $\lambda$ e tamanhos nominais.

### 4.4.1 Estimação dos parâmetros

Inicialmente o erro $\epsilon_i$ foi gerado de uma normal padrão e o erro $u_i$ foi gerado de uma normal de média zero e variância igual a 0,1; 1,0 e 1,25, de modo que $\lambda = 10$, 1 e 0,8; respectivamente. Posteriormente geramos o erro $\epsilon_i$ de uma distribuição normal de média zero e variância igual a 5 e o erro $u_i$ de uma normal de média zero e variância igual a 0,5; 5,0 e 6,25. Note que os valores de $\lambda$ se mantiveram iguais a 10, 1 e 0,8, respectivamente e consideramos $n = 20$, 50 e 100. A covariável foi gerada segundo as seguintes distribuições: U(0,5), U(0,10), N(0,1), N(0,10) e LN(0,1).

Verificamos o comportamento dos estimadores corrigidos de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_u^2$ através dos vícios médios e erros quadráticos médios. Os vícios médios e os erros quadráticos médios são, respectivamente, dados por

$$\sum_{t=1}^{10.000} \frac{(\hat{\psi}_t - \psi)}{10.000} \quad \text{e} \quad \sum_{t=1}^{10.000} \frac{(\hat{\psi}_t - \psi)^2}{10.000},$$

em que $\hat{\psi}$ é um estimador de $\psi$ e $\psi = \alpha, \beta, \sigma_u^2$.

Nas Tabelas 4.1 a 4.6 simulamos os vícios médios e os erros quadráticos médios dos estimadores corrigidos de $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_u^2$, respectivamente, obtidos do modelo definido em (4.1), fixando $\sigma_\epsilon^2 = 1$ (Tabelas 4.1 a 4.3) e $\sigma_\epsilon^2 = 5$ (Tabelas 4.4 a 4.6). Os valores de $n$ e de $\lambda$ foram citados no início desta seção.

Observamos nas Tabelas 4.1 e 4.4 que, para o estimador $\hat{\alpha}$, quando $\sigma_\epsilon^2 = 1$, os vícios médios são pequenos para todas as distribuições adotadas para a covariável, todo tamanho de amostra e valor de $\lambda$. Com relação aos valores dos EQM, estes não se alteram quando o valor de $\lambda$ aumenta, mas diminuem quando o valor de $n$ aumenta. Para $\sigma_\epsilon^2 = 5$, os vícios médios são pequenos para a distribuição N(0,10),

Tabela 4.1: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=1.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | 0,010(0,404) | 0,002(0,218) | -0,010(1,231) | -0,003(0,060) | -0,005(0,127) |
| | 1 | 0,003(0,308) | 0,001(0,216) | 0,004(0,151) | -0,002(0,060) | -0,004(0,121) |
| | 10 | 0,001(0,202) | 0,001(0,198) | -0,001(0,053) | -0,003(0,059) | -0,005(0,105) |
| 50 | 0,8 | 0,000(0,117) | -0,003(0,094) | 0,000(0,022) | -0,000(0,021) | 0,000(0,049) |
| | 1 | 0,003(0,105) | -0,002(0,091) | 0,001(0,021) | -0,000(0,021) | -0,001(0,047) |
| | 10 | 0,001(0,075) | -0,002(0,084) | 0,001(0,020) | -0,000(0,021) | -0,000(0,041) |
| 100 | 0,8 | -0,000(0,049) | -0,000(0,048) | 0,001(0,010) | 0,001(0,010) | 0,002(0,014) |
| | 1 | -0,001(0,047) | 0,000(0,047) | 0,001(0,010) | 0,001(0,010) | 0,001(0,015) |
| | 10 | -0,001(0,036) | -0,000(0,043) | 0,001(0,010) | 0,001(0,010) | 0,001(0,014) |

independentemente do tamanho da amostra e do valor adotado para $\lambda$. Em geral, os EQM diminuem quando $\lambda$ aumenta (fixado $n$) e quando $n$ aumenta (fixado $\lambda$).

Nas Tabelas 4.2 e 4.5, para o estimador $\hat{\beta}$, os EQM para as distribuições U(0,5) e N(0,1) são maiores do que nas demais distribuições, para todo $n$ e $\lambda$. Para $\sigma_\epsilon^2 = 1$, os vícios médios se apresentam pequenos para todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra e de $\lambda$. Quanto aos EQM, diminuem quando o valor de $\lambda$ e $n$ aumentam, para as distribuições U(0,5) e N(0,1). Para as demais distribuições, os EQM parecem não se alterar com o aumento do valor de $\lambda$, mas diminuem quando o valor de $n$ aumenta. Já, para $\sigma_\epsilon^2 = 5$, os vícios médios são pequenos somente para as distribuições U(0,10) e N(0,10). Para as demais distribuições da covariável, os vícios médios diminuem com o aumento de $\lambda$ e de $n$.

Tabela 4.2: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\beta}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=1.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | -0,003(0,050) | 0,000(0,006) | 0,010(7,744) | 0,001(0,007) | 0,001(0,017) |
| | 1 | -0,000(0,037) | 0,000(0,006) | -0,027(1,185) | 0,001(0,006) | 0,001(0,016) |
| | 10 | 0,000(0,022) | 0,000(0,005) | -0,002(0,043) | 0,001(0,006) | 0,002(0,012) |
| 50 | 0,8 | -0,000(0,019) | 0,000(0,002) | 0,008(0,253) | 0,000(0,002) | -0,000(0,007) |
| | 1 | -0,001(0,017) | 0,000(0,002) | 0,001(0,063) | 0,000(0,002) | 0,000(0,007) |
| | 10 | -0,000(0,011) | 0,000(0,002) | 0,000(0,017) | 0,000(0,002) | 0,000(0,005) |
| 100 | 0,8 | 0,000(0,006) | 0,000(0,001) | -0,002(0,014) | 0,000(0,001) | -0,000(0,001) |
| | 1 | 0,001(0,006) | 0,000(0,001) | -0,002(0,012) | 0,000(0,001) | -0,000(0,001) |
| | 10 | 0,000(0,004) | 0,000(0,001) | -0,001(0,007) | 0,000(0,001) | -0,000(0,000) |

Este resultado ocorre para os EQM para todas as distribuições.

As Tabelas 4.3 e 4.6 mostram que, para o estimador $\hat{\sigma}_u^2$, não há interferência da distribuição da covariável, pois os vícios médios e os EQM, em geral, se apresentam próximos em todas as distribuições da covariável, quando fixamos o valor de $\lambda$ e o tamanho da amostra. Observamos também que os vícios médios e os EQM diminuem à medida que aumentamos o tamanho da amostra independentemente do valor de $\lambda$ e quando aumentamos o valor de $\lambda$ (fixado o tamanho da amostra).

As Tabelas 4.1 a 4.6 mostram também que os vícios médios e os EQM dos três estimadores para $\sigma_\epsilon^2 = 5$ são maiores do que para $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

Tabela 4.3: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\sigma}_u^2$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=1.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | -0,151(0,1512) | -0,127(0,1536) | -0,192(0,1547) | -0,135(0,1532) | -0,144(0,1526) |
| | 1 | -0,117(0,0981) | -0,101(0,0986) | -0,143(0,0987) | -0,107(0,0980) | -0,113(0,0975) |
| | 10 | -0,009(0,0009) | -0,009(0,0009) | -0,010(0,0010) | -0,010(0,0009) | -0,010(0,0009) |
| 50 | 0,8 | -0,066(0,0613) | -0,051(0,0610) | -0,074(0,0615) | -0,054(0,0617) | -0,059(0,0615) |
| | 1 | -0,050(0,0393) | -0,040(0,0392) | -0,055(0,0395) | -0,042(0,0394) | -0,045(0,0392) |
| | 10 | -0,004(0,0003) | -0,003(0,0003) | -0,003(0,0004) | -0,004(0,0003) | -0,004(0,0003) |
| 100 | 0,8 | -0,031(0,0310) | -0,026(0,0312) | -0,037(0,0306) | -0,025(0,0313) | -0,028(0,0308) |
| | 1 | -0,024(0,0199) | -0,020(0,0200) | -0,028(0,0197) | -0,020(0,0200) | -0,022(0,0197) |
| | 10 | -0,002(0,0001) | -0,001(0,0002) | -0,002(0,0001) | -0,001(0,0002) | -0,002(0,0001) |

Os estimadores dos parâmetros $\alpha$, $\beta$ e $\sigma_u^2$ obtidos na Seção 4.2 supõem distribuição normal para os erros $\epsilon$ e $u$. Na Tabela 4.7, avaliamos o vício médio e o EQM destes estimadores sob a suposição de normalidade dos erros e também violando esta suposição. Nas duas primeiras colunas da Tabela 4.7, as distribuições dos erros variam segundo uma distribuição N(0,2), t-Student com 4 graus de liberdade ($t_4$), U(-2,4;2,4) e Qui-quadrado com 1 grau de liberdade ($\chi_1^2$) ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$). Geramos a covariável z segundo uma distribuição N(0,10) e consideramos $n$ = 20, 50 e 100.

A análise da Tabela 4.7 mostra que, para o estimador $\hat{\alpha}$, quando a distribuição do erro $\epsilon_i$ é Qui-quadrado os vícios médios e o EQM são grandes se compararmos com os vícios médios e os EQM quando as distribuições dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ são Normais para todo $n$. Para as demais situações, ou seja, quando a distribuição de $\epsilon_i$ é simétrica, os vícios

Tabela 4.4: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=5.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | 0,653(1881,3) | 0,077(30,95) | 0,154(1031,8) | 0,009(0,319) | -0,106(257,0) |
| | 1 | 0,063(418,6) | 0,010(2,406) | 0,055(210,2) | 0,003(0,258) | -0,193(225,6) |
| | 10 | 0,009(0,885) | -0,002(1,061) | -0,009(0,790) | 0,004(0,252) | 0,005(0,475) |
| 50 | 0,8 | -0,320(713,7) | -0,004(1,220) | 0,083(47,09) | -0,003(0,102) | -0,003(0,761) |
| | 1 | 0,022(470,7) | -0,003(0,695) | -0,026(18,93) | -0,001(0,101) | 0,050(22,40) |
| | 10 | -0,003(0,509) | -0,002(0,460) | -0,000(0,101) | -0,002(0,100) | -0,000(0,159) |
| 100 | 0,8 | -0,053(20,53) | 0,008(0,362) | 0,037(8,148) | -0,000(0,050) | 0,002(0,103) |
| | 1 | 0,008(38,73) | 0,012(0,321) | -0,078(110,9) | -0,000(0,050) | 0,001(0,089) |
| | 10 | 0,003(0,237) | 0,008(0,228) | 0,000(0,051) | -0,000(0,049) | 0,002(0,073) |

médios e os EQM são parecidos com os do caso em que $\epsilon_i$ e $u_i$ têm distribuição Normal, exceto quando $\epsilon_i$ tem distribuição t-Student e $u_i$ tem distribuição Qui-quadrado.

Para o estimador $\hat{\beta}$, a violação da suposição de normalidade para as distribuições dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ parece afetar o vício médio e o EQM quando a distribuição do erro $\epsilon_i$ é t-Student e $u_i$ é Normal ou Qui-quadrado, para todo tamanho de amostra, e quando as distribuições de $\epsilon_i$ e $u_i$ são Qui-quadrados, para $n = 20$.

Para o estimador $\hat{\sigma}_u^2$, a mudança na distribuição dos erros $\epsilon_i$ e $u_i$ não afeta o vício médio. O EQM aumenta quando a distribuição do erro $\epsilon_i$ é t-Student ou Qui-quadrado.

Tabela 4.5: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\beta}$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=5.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | -0,275(397,4) | -0,013(1,058) | -0,485(1878,9) | -0,005(0,193) | -0,023(51,33) |
| | 1 | -0,066(92,95) | -0,001(0,073) | -0,102(725,8) | -0,001(0,028) | 0,141(116,6) |
| | 10 | -0,001(0,140) | 0,001(0,024) | 0,032(15,92) | -0,002(0,019) | -0,003(0,058) |
| 50 | 0,8 | 0,138(105,7) | 0,001(0,036) | 0,177(339,7) | -0,000(0,019) | 0,000(0,195) |
| | 1 | -0,002(59,55) | 0,001(0,019) | -0,256(256,6) | -0,000(0,017) | -0,025(5,315) |
| | 10 | 0,001(0,057) | 0,001(0,011) | 0,000(0,145) | -0,000(0,011) | -0,001(0,018) |
| 100 | 0,8 | 0,017(2,835) | -0,001(0,010) | -0,076(94,89) | 0,000(0,008) | -0,000(0,018) |
| | 1 | -0,002(5,364) | -0,001(0,008) | 0,216(870,2) | 0,000(0,007) | -0,000(0,014) |
| | 10 | -0,002(0,026) | -0,001(0,005) | -0,004(0,051) | 0,000(0,005) | -0,000(0,008) |

### 4.4.2 Testes de hipóteses

Nesta subseção avaliamos o tamanho observado dos testes de Wald (modelo irrestrito), Wald modificado (modelo irrestrito e restrito) e escore modificado apresentados nas Seções 4.2 e 4.3 para o modelo dado em (4.1) por meio de algumas simulações. A hipótese nula de interesse é $H_0 : \beta = 0$.

Foram geradas 10.000 amostras do modelo funcional normal definido em (4.1) fixando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

Nas Tabelas 4.8 a 4.25 temos os tamanhos observados (em porcentagem) dos testes fixando $\sigma_\epsilon^2 = 1$ (Tabelas 4.8 a 4.16) e $\sigma_\epsilon^2 = 5$ (Tabelas 4.17 a 4.25). As amostras

Tabela 4.6: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\sigma}_u^2$ para diferentes distribuições da covariável quando $\sigma_\epsilon^2$=5.

| | | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\lambda$ | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| 20 | 0,8 | -1,420(4,162) | -0,792(3,836) | -1,727(4,875) | -0,775(3,892) | -1,081(3,760) |
| | 1 | -1,056(2,605) | -0,601(2,494) | -1,370(3,102) | -0,598(2,508) | -0,788(2,398) |
| | 10 | -0,056(0,024) | -0,049(0,025) | -0,065(0,024) | -0,052(0,025) | -0,052(0,024) |
| 50 | 0,8 | -0,629(1,500) | -0,348(1,553) | -0,864(1,734) | -0,315(1,550) | -0,374(1,531) |
| | 1 | -0,442(0,945) | -0,263(0,996) | -0,643(1,058) | -0,240(0,993) | -0,276(0,984) |
| | 10 | -0,020(0,009) | -0,021(0,010) | -0,024(0,010) | -0,019(0,010) | -0,019(0,010) |
| 100 | 0,8 | -0,320(0,768) | -0,158(0,768) | -0,446(0,764) | -0,162(0,781) | -0,182(0,750) |
| | 1 | -0,223(0,497) | -0,116(0,492) | -0,318(0,486) | -0,123(0,499) | -0,132(0,482) |
| | 10 | -0,011(0,005) | -0,009(0,004) | -0,013(0,004) | -0,010(0,005) | -0,009(0,004) |

foram geradas com as seguintes distribuições da covariável: U(0,5), U(0,10), N(0,1), N(0,10) e LN(0,1); $\lambda$ = 0,8, 1 e 10; $n$ = 20, 50 e 100. Usamos tamanhos nominais iguais a 1%, 5% e 10%.

O tamanho observado dos testes é a proporção de rejeições de $H_0$ dentre as 10.000 amostras geradas.

Nas Tabelas 4.8 a 4.16 notamos que, para as distribuições U(0,10), N(0,10) e LN(0,1), os tamanhos observados do teste de Wald (modelo irrestrito) e do teste de Wald modificado (modelo irrestrito) são quase sempre maiores do que os nominais, não parecem se alterar quando $\lambda$ aumenta, para todo valor de $n$, mas se aproximam dos tamanhos nominais à medida que $n$ aumenta para todo valor de $\lambda$. Este resultado também pode ser observado para o teste de Wald modificado (modelo irrestrito) quando a distribuição da covariável é N(0,1). Para as distribuições U(0,5) (teste de Wald, modelo irrestrito, e teste de Wald modificado, modelo irrestrito) e N(0,1) (teste de Wald, modelo irrestrito), quando $n = 20$, os tamanhos observados aumentam quando $\lambda$ aumenta, mas se aproximam dos tamanhos nominais à medida que $n$ aumenta para todo valor de $\lambda$.

Os tamanhos observados do teste de Wald modificado (modelo restrito) são, em geral, menores do que os níveis nominais para todo tamanho de amostra e todo valor de $\lambda$. Porém, quando $n$ aumenta, fixado o valor de $\lambda$, e quando $\lambda$ aumenta, para todo valor de $n$, os tamanhos observados se aproximam dos nominais.

Analisando as Tabelas 4.17 a 4.25, quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$, observamos que para todas as distribuições da covariável, os tamanhos observados do teste de Wald (modelo irrestrito) aumentam quando $\lambda$ aumenta para todo $n$ e, exceto para as distribuições U(0,5) e N(0,1) quando $\lambda = 0,8$ e 1, se aproximam do tamanho nominal quando $n$ aumenta para todo valor de $\lambda$.

Os tamanhos observados dos testes de Wald modificado (modelo irrestrito e restrito) são quase sempre maiores do que os nominais para as distribuições da covariável U(0,5) e N(0,1), mas se aproximam destes à medida que $\lambda$ aumenta para todo $n$ e quando aumentamos o tamanho da amostra, fixado o valor de $\lambda$.

O tamanho observado do teste de Wald modificado (modelo irrestrito e restrito) se aproxima do nível nominal à medida que aumentamos o tamanho da amostra, quando $\lambda = 10$, para todas as distribuições da covariável.

O tamanho observado do teste escore modificado é o que mais se aproxima do tamanho nominal para todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra, dos valores de $\lambda$ e de $\sigma_\epsilon^2$.

As Tabelas 4.8 a 4.25 mostram também que, em geral, os tamanhos observados dos testes de Wald (modelo irrestrito) e de Wald modificado (modelo restrito e irrestrito) quando $\sigma_\epsilon^2 = 5$, estão mais distantes dos níveis nominais do que quando $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

O valor de $\sigma_\epsilon^2$ parece não exercer influência sobre o tamanho observado do teste escore modificado para toda distribuição da covariável, valor de $\lambda$ e de $n$.

Nas Tabelas 4.26 a 4.28 temos os tamanhos observados dos testes quando o pressuposto de normalidade de um dos erros não está satisfeito. Os parâmetros das distribuições foram escolhidos da seguinte forma $\sigma_\epsilon^2 = 2$ e $\sigma_u^2 = 2$. Os erros foram gerados segundo uma N(0,2), $t_4$, U(-2,4;2,4) e $\chi_1^2$. A covariável foi gerada segundo uma distribuição N(0,10), o tamanho amostral foi igual a 20, 50 e 100 e os tamanhos nominais adotados foram de 1%, 5% e 10%. Em geral, observamos que a violação nos pressupostos de pelo menos um dos erros não parece afetar o tamanho observado dos testes quando comparado ao tamanho observado dos testes no caso em que os dois erros são normais.

Tabela 4.7: Vícios médios (erros quadráticos médios) simulados de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\sigma}_u^2$ para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$).

| Distribuição | Distribuição | | Estimadores | | |
|---|---|---|---|---|---|
| de $\epsilon_i$ | de $u_i$ | $n$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\sigma}_u^2$ |
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 20 | -0,003(0,099) | 0,001(0,010) | -0,220(0,401) |
| | | 50 | -0,001(0,042) | 0,000(0,005) | -0,086(0,152) |
| | | 100 | 0,001(0,019) | 0,000(0,001) | -0,043(0,078) |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 20 | 0,002(0,110) | -0,000(0,022) | -0,233(0,391) |
| | | 50 | 0,003(0,039) | -0,000(0,006) | -0,087(0,158) |
| | | 100 | -0,000(0,019) | 0,000(0,002) | -0,049(0,079) |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 20 | 0,002(0,100) | 0,001(0,008) | -0,215(0,398) |
| | | 50 | -0,001(0,040) | -0,000(0,005) | -0,089(0,162) |
| | | 100 | 0,000(0,019) | -0,000(0,002) | -0,043(0,078) |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 20 | -0,003(0,112) | 0,000(0,010) | -0,211(0,399) |
| | | 50 | 0,001(0,047) | -0,000(0,003) | -0,084(0,159) |
| | | 100 | 0,000(0,021) | 0,000(0,002) | -0,043(0,079) |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 20 | -0,006(1,450) | 0,007(6,301) | -0,295(1,054) |
| | | 50 | 0,003(0,392) | -0,033(4,747) | -0,108(0,773) |
| | | 100 | 0,000(0,022) | 0,001(0,408) | -0,062(0,475) |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 20 | 0,000(0,105) | -0,001(0,019) | -0,294(0,236) |
| | | 50 | 0,002(0,048) | 0,000(0,004) | -0,161(0,086) |
| | | 100 | -0,001(0,019) | 0,000(0,002) | -0,120(0,044) |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 20 | 0,997(1,098) | 0,000(0,016) | -0,219(2,109) |
| | | 50 | 0,997(1,037) | -0,000(0,012) | -0,103(1,002) |
| | | 100 | 1,000(1,020) | 0,000(0,002) | -0,047(0,533) |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 20 | -0,023(3,445) | 0,029(4,433) | -0,318(0,986) |
| | | 50 | -0,009(1,080) | 0,012(3,501) | -0,107(0,757) |
| | | 100 | 0,009(0,331) | -0,009(0,401) | -0,062(0,471) |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 20 | 0,999(1,100) | 0,002(0,012) | -0,228(2,091) |
| | | 50 | 0,998(1,037) | 0,001(0,006) | -0,086(1,003) |
| | | 100 | 0,996(1,013) | 0,000(0,002) | -0,065(0,528) |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 20 | 1,000(1,552) | -0,018(1,890) | -0,275(1,766) |
| | | 50 | 1,002(1,049) | -0,000(0,002) | -0,073(1,049) |
| | | 100 | 1,000(1,022) | 0,000(0,002) | -0,047(0,533) |

Tabela 4.8: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 0,8$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,50 | 2,48 | 1,13 | 2,49 | 1,88 |
| | 5 | 5,84 | 8,26 | 4,51 | 7,84 | 7,34 |
| | 10 | 10,65 | 13,99 | 8,40 | 13,52 | 13,23 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,17 | 2,26 | 3,51 | 2,32 | 2,02 |
| | 5 | 5,09 | 8,06 | 8,20 | 7,78 | 8,49 |
| | 10 | 10,49 | 13,96 | 13,93 | 13,34 | 15,20 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,38 | 0,46 | 3,95 | 0,57 | 0,13 |
| | 5 | 1,60 | 4,67 | 5,06 | 5,04 | 2,53 |
| | 10 | 4,84 | 10,61 | 7,34 | 10,51 | 7,64 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,64 | 0,81 | 0,81 | 0,72 | 0,75 |
| | 5 | 5,07 | 5,50 | 5,12 | 5,40 | 5,13 |
| | 10 | 10,35 | 11,46 | 10,83 | 10,97 | 10,78 |

Tabela 4.9: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,99 | 2,38 | 1,47 | 2,56 | 2,60 |
| | 5 | 6,96 | 8,04 | 5,30 | 7,76 | 7,42 |
| | 10 | 12,15 | 13,97 | 9,35 | 13,92 | 13,51 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,23 | 2,21 | 2,69 | 2,42 | 2,64 |
| | 5 | 5,80 | 7,92 | 7,68 | 7,50 | 8,49 |
| | 10 | 11,75 | 13,73 | 13,94 | 13,76 | 15,06 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,18 | 0,51 | 2,34 | 0,66 | 0,20 |
| | 5 | 1,83 | 4,58 | 3,31 | 5,00 | 3,38 |
| | 10 | 6,15 | 10,69 | 5,92 | 10,81 | 8,40 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,75 | 0,77 | 0,86 | 0,79 | 0,88 |
| | 5 | 5,41 | 5,35 | 5,45 | 5,36 | 5,36 |
| | 10 | 10,93 | 11,34 | 11,17 | 11,11 | 10,98 |

Tabela 4.10: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 10$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 2,36 | 2,30 | 2,56 | 2,47 | 2,42 |
| | 5 | 7,67 | 8,25 | 7,73 | 7,97 | 7,82 |
| | 10 | 13,61 | 14,12 | 13,33 | 13,67 | 13,48 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 2,18 | 2,31 | 2,28 | 2,43 | 2,43 |
| | 5 | 7,48 | 8,23 | 7,38 | 7,96 | 7,86 |
| | 10 | 13,46 | 14,15 | 12,92 | 13,66 | 13,51 |
| $W_{mR}^{*}$ | 1 | 0,59 | 0,69 | 0,47 | 0,76 | 0,79 |
| | 5 | 4,75 | 5,29 | 4,94 | 5,13 | 5,18 |
| | 10 | 10,70 | 11,44 | 10,16 | 11,10 | 10,62 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,81 | 0,73 | 0,73 | 0,76 | 0,85 |
| | 5 | 5,07 | 5,40 | 5,42 | 5,17 | 5,35 |
| | 10 | 11,11 | 11,51 | 10,81 | 11,12 | 10,78 |

Tabela 4.11: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 0,8$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,38 | 1,17 | 0,57 | 1,50 | 1,26 |
| | 5 | 5,71 | 5,66 | 3,96 | 5,83 | 6,12 |
| | 10 | 10,56 | 10,99 | 8,21 | 11,29 | 11,23 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,61 | 1,11 | 1,39 | 1,43 | 1,89 |
| | 5 | 7,01 | 6,00 | 5,18 | 5,84 | 8,12 |
| | 10 | 12,91 | 11,41 | 10,51 | 11,22 | 13,91 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,35 | 0,64 | 0,82 | 0,79 | 0,59 |
| | 5 | 3,20 | 4,55 | 2,13 | 4,73 | 4,51 |
| | 10 | 8,07 | 9,61 | 4,87 | 10,06 | 9,94 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,88 | 0,77 | 0,88 | 0,94 | 0,84 |
| | 5 | 5,10 | 4,85 | 5,25 | 4,98 | 5,11 |
| | 10 | 10,04 | 10,02 | 10,12 | 10,34 | 10,53 |

Tabela 4.12: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,28 | 1,53 | 0,83 | 1,48 | 1,46 |
| | 5 | 5,54 | 5,82 | 4,34 | 6,34 | 6,01 |
| | 10 | 10,72 | 10,72 | 9,06 | 11,21 | 11,46 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,46 | 1,50 | 1,20 | 1,36 | 1,88 |
| | 5 | 6,36 | 5,90 | 5,33 | 6,16 | 7,47 |
| | 10 | 12,33 | 11,04 | 11,09 | 11,26 | 13,51 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,48 | 0,78 | 0,33 | 0,87 | 0,73 |
| | 5 | 3,55 | 4,85 | 1,78 | 5,15 | 4,58 |
| | 10 | 8,61 | 9,43 | 5,04 | 10,09 | 10,12 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,96 | 0,94 | 0,88 | 0,97 | 0,98 |
| | 5 | 4,82 | 5,03 | 5,04 | 5,36 | 5,15 |
| | 10 | 10,09 | 9,68 | 10,13 | 10,34 | 10,55 |

Tabela 4.13: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 10$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,65 | 1,46 | 1,38 | 1,54 | 1,54 |
| | 5 | 6,18 | 6,03 | 5,65 | 5,81 | 6,06 |
| | 10 | 11,21 | 11,29 | 11,14 | 11,40 | 11,51 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,63 | 1,45 | 1,34 | 1,55 | 1,55 |
| | 5 | 6,17 | 6,04 | 5,61 | 5,81 | 6,17 |
| | 10 | 11,33 | 11,33 | 11,00 | 11,43 | 11,73 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,93 | 0,87 | 0,73 | 0,96 | 1,01 |
| | 5 | 5,19 | 5,00 | 4,74 | 5,05 | 5,02 |
| | 10 | 10,16 | 10,25 | 9,85 | 10,44 | 10,50 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,98 | 0,91 | 0,86 | 0,96 | 1,05 |
| | 5 | 5,28 | 5,02 | 4,86 | 5,07 | 5,05 |
| | 10 | 10,25 | 10,26 | 10,09 | 10,44 | 10,55 |

Tabela 4.14: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 0,8$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,95 | 1,18 | 1,06 | 1,08 | 1,25 |
| | 5 | 4,85 | 5,56 | 5,25 | 5,10 | 5,33 |
| | 10 | 9,88 | 10,97 | 10,22 | 10,04 | 10,16 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,04 | 1,25 | 1,35 | 1,23 | 1,64 |
| | 5 | 5,53 | 5,96 | 6,43 | 5,70 | 6,44 |
| | 10 | 10,75 | 11,59 | 11,97 | 10,93 | 11,81 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,40 | 0,89 | 0,28 | 0,86 | 0,64 |
| | 5 | 3,92 | 4,93 | 3,20 | 4,53 | 4,47 |
| | 10 | 8,73 | 10,28 | 8,26 | 9,56 | 9,16 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,78 | 0,91 | 1,01 | 0,94 | 0,99 |
| | 5 | 4,63 | 5,07 | 5,30 | 4,63 | 5,11 |
| | 10 | 9,71 | 10,47 | 10,33 | 9,65 | 9,88 |

Tabela 4.15: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,16 | 1,11 | 0,96 | 1,17 | 1,08 |
| | 5 | 5,13 | 5,58 | 4,99 | 5,18 | 5,32 |
| | 10 | 9,96 | 10,48 | 10,38 | 10,26 | 10,53 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,29 | 1,16 | 1,12 | 1,32 | 1,27 |
| | 5 | 5,59 | 5,91 | 5,80 | 5,69 | 5,91 |
| | 10 | 10,89 | 10,91 | 11,48 | 10,90 | 11,59 |
| $W_{mR}^{*}$ | 1 | 0,67 | 0,80 | 0,36 | 0,84 | 0,67 |
| | 5 | 4,18 | 5,03 | 3,61 | 4,69 | 4,20 |
| | 10 | 8,95 | 10,01 | 8,81 | 9,71 | 9,61 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,96 | 0,89 | 0,88 | 0,89 | 0,87 |
| | 5 | 4,78 | 5,17 | 4,86 | 4,78 | 4,82 |
| | 10 | 9,59 | 10,12 | 10,22 | 9,83 | 10,11 |

Tabela 4.16: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$ e $\lambda = 10$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,12 | 1,19 | 1,11 | 1,10 | 1,23 |
| | 5 | 5,26 | 5,77 | 5,08 | 5,08 | 5,54 |
| | 10 | 10,08 | 10,99 | 10,11 | 10,00 | 10,74 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,16 | 1,20 | 1,09 | 1,10 | 1,26 |
| | 5 | 5,33 | 5,83 | 5,14 | 5,12 | 5,54 |
| | 10 | 10,16 | 11,02 | 10,14 | 10,03 | 10,85 |
| $W_{mR}^{*}$ | 1 | 0,89 | 0,86 | 0,88 | 0,85 | 0,90 |
| | 5 | 4,73 | 5,19 | 4,57 | 4,74 | 5,08 |
| | 10 | 9,55 | 10,50 | 9,49 | 9,38 | 10,16 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,90 | 0,86 | 0,92 | 0,85 | 0,90 |
| | 5 | 4,75 | 5,20 | 4,61 | 4,75 | 5,12 |
| | 10 | 9,57 | 10,52 | 9,58 | 9,41 | 10,22 |

Tabela 4.17: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 0,8$.

| Teste | Tamanho Nominal(%) | Distribuição da covariável U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,70 | 1,75 | 0,59 | 1,67 | 1,25 |
| | 5 | 2,76 | 6,78 | 2,32 | 6,20 | 5,18 |
| | 10 | 5,54 | 12,27 | 4,14 | 11,32 | 9,62 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 8,28 | 0,60 | 13,76 | 1,80 | 2,69 |
| | 5 | 13,34 | 4,15 | 18,09 | 6,92 | 8,48 |
| | 10 | 19,24 | 8,61 | 22,01 | 12,67 | 15,28 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 12,32 | 0,13 | 20,78 | 0,87 | 1,64 |
| | 5 | 14,40 | 1,70 | 23,29 | 2,08 | 2,80 |
| | 10 | 16,35 | 5,84 | 25,42 | 5,21 | 5,38 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,77 | 0,69 | 0,91 | 0,78 | 0,76 |
| | 5 | 5,31 | 5,32 | 5,49 | 5,76 | 5,14 |
| | 10 | 11,07 | 10,88 | 10,77 | 11,47 | 10,66 |

Tabela 4.18: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,71 | 2,16 | 0,68 | 1,76 | 1,72 |
| | 5 | 3,36 | 7,39 | 2,39 | 6,15 | 5,81 |
| | 10 | 6,61 | 13,10 | 4,76 | 11,29 | 10,42 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 9,70 | 0,52 | 11,25 | 1,08 | 3,59 |
| | 5 | 19,41 | 3,28 | 15,76 | 5,34 | 10,97 |
| | 10 | 27,85 | 7,56 | 21,07 | 10,94 | 18,68 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 9,90 | 0,07 | 18,32 | 0,45 | 0,84 |
| | 5 | 11,53 | 2,48 | 20,67 | 1,89 | 2,14 |
| | 10 | 13,37 | 7,20 | 22,86 | 5,40 | 5,21 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,66 | 0,79 | 0,79 | 0,64 | 0,85 |
| | 5 | 5,26 | 5,43 | 4,92 | 5,09 | 5,38 |
| | 10 | 11,22 | 11,47 | 11,06 | 10,62 | 10,67 |

Tabela 4.19: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 20$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 10$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 2,47 | 2,52 | 1,75 | 2,42 | 2,53 |
| | 5 | 7,84 | 7,97 | 7,06 | 7,92 | 7,85 |
| | 10 | 13,19 | 13,68 | 12,81 | 13,67 | 13,61 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,73 | 2,31 | 1,71 | 2,25 | 2,54 |
| | 5 | 7,20 | 7,52 | 7,42 | 7,77 | 8,07 |
| | 10 | 12,70 | 13,11 | 14,52 | 13,76 | 13,93 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,23 | 0,75 | 0,25 | 0,59 | 0,62 |
| | 5 | 3,95 | 5,00 | 1,81 | 4,94 | 4,78 |
| | 10 | 9,39 | 10,74 | 6,15 | 11,02 | 10,72 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,83 | 0,88 | 0,94 | 0,77 | 0,87 |
| | 5 | 5,43 | 5,21 | 5,28 | 5,36 | 5,19 |
| | 10 | 10,98 | 10,97 | 11,75 | 11,43 | 11,13 |

Tabela 4.20: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 0,8$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,32 | 1,37 | 0,20 | 1,22 | 0,67 |
| | 5 | 2,09 | 5,68 | 1,62 | 5,40 | 3,49 |
| | 10 | 4,69 | 11,34 | 3,81 | 10,32 | 7,33 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 6,54 | 0,59 | 9,94 | 0,33 | 3,92 |
| | 5 | 8,86 | 3,77 | 13,28 | 2,57 | 10,48 |
| | 10 | 11,27 | 8,31 | 16,81 | 6,24 | 17,01 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 9,09 | 0,28 | 14,66 | 0,26 | 1,62 |
| | 5 | 10,78 | 2,79 | 16,90 | 2,95 | 2,85 |
| | 10 | 12,77 | 7,95 | 18,75 | 7,26 | 5,26 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,96 | 1,08 | 0,86 | 0,96 | 0,98 |
| | 5 | 4,78 | 5,26 | 5,36 | 5,05 | 4,67 |
| | 10 | 10,22 | 10,93 | 10,29 | 10,10 | 9,90 |

Tabela 4.21: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,37 | 1,50 | 0,32 | 1,30 | 0,71 |
| | 5 | 2,32 | 5,92 | 1,76 | 5,70 | 3,83 |
| | 10 | 5,46 | 11,21 | 3,93 | 11,26 | 8,27 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 4,67 | 0,66 | 11,32 | 0,46 | 2,30 |
| | 5 | 6,44 | 4,50 | 13,79 | 3,36 | 7,13 |
| | 10 | 8,38 | 9,23 | 15,93 | 7,47 | 13,68 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 6,20 | 0,33 | 12,24 | 0,27 | 0,82 |
| | 5 | 7,66 | 3,74 | 14,12 | 3,46 | 1,93 |
| | 10 | 9,51 | 8,48 | 16,12 | 8,52 | 4,81 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,96 | 1,11 | 1,01 | 0,87 | 0,82 |
| | 5 | 5,15 | 5,43 | 5,07 | 5,05 | 5,00 |
| | 10 | 10,28 | 10,63 | 10,08 | 10,55 | 10,36 |

Tabela 4.22: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 50$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 10$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,72 | 1,58 | 1,38 | 1,49 | 1,49 |
| | 5 | 6,57 | 6,06 | 5,84 | 5,98 | 5,77 |
| | 10 | 12,04 | 11,85 | 11,73 | 11,36 | 10,93 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 1,13 | 1,48 | 0,70 | 1,37 | 1,37 |
| | 5 | 5,59 | 5,85 | 4,54 | 5,65 | 5,86 |
| | 10 | 10,71 | 11,57 | 9,61 | 11,05 | 11,03 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 0,67 | 0,90 | 0,33 | 0,85 | 0,74 |
| | 5 | 4,95 | 5,14 | 3,87 | 4,82 | 4,58 |
| | 10 | 10,31 | 10,57 | 9,08 | 10,42 | 9,60 |
| $Q_m^*$ | 1 | 1,11 | 0,97 | 0,89 | 0,88 | 0,92 |
| | 5 | 5,66 | 5,19 | 5,28 | 4,91 | 4,96 |
| | 10 | 11,23 | 10,65 | 11,05 | 10,56 | 9,94 |

Tabela 4.23: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 0,8$.

| Teste | Tamanho Nominal(%) | Distribuição da covariável U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,36 | 0,97 | 0,23 | 1,23 | 0,90 |
| | 5 | 2,48 | 5,14 | 1,64 | 5,22 | 4,68 |
| | 10 | 5,76 | 10,07 | 4,19 | 10,14 | 9,34 |
| $W_{mI}^*$ | 1 | 2,89 | 0,55 | 6,38 | 0,64 | 0,12 |
| | 5 | 5,72 | 3,49 | 9,13 | 3,76 | 1,72 |
| | 10 | 9,40 | 8,14 | 12,47 | 7,99 | 4,76 |
| $W_{mR}^*$ | 1 | 3,13 | 0,36 | 8,87 | 0,56 | 0,25 |
| | 5 | 4,22 | 3,56 | 10,41 | 4,25 | 2,67 |
| | 10 | 6,50 | 8,32 | 12,16 | 8,99 | 7,14 |
| $Q_m^*$ | 1 | 0,79 | 0,85 | 1,06 | 1,01 | 0,86 |
| | 5 | 4,98 | 4,99 | 4,83 | 4,93 | 4,77 |
| | 10 | 9,91 | 10,01 | 10,22 | 9,89 | 9,54 |

Tabela 4.24: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 1$.

| | Tamanho | Distribuição da covariável | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Teste | Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
| $W_I^{**}$ | 1 | 0,39 | 0,89 | 0,30 | 1,25 | 1,20 |
| | 5 | 2,83 | 5,11 | 2,25 | 5,31 | 5,18 |
| | 10 | 6,48 | 10,17 | 5,17 | 10,73 | 10,18 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 1,63 | 0,59 | 4,39 | 0,93 | 0,34 |
| | 5 | 3,62 | 3,75 | 6,56 | 4,62 | 2,71 |
| | 10 | 6,59 | 8,55 | 9,38 | 9,72 | 6,15 |
| $W_{mR}^{*}$ | 1 | 1,81 | 0,45 | 6,46 | 0,72 | 0,38 |
| | 5 | 2,94 | 3,73 | 7,71 | 4,44 | 3,59 |
| | 10 | 5,50 | 8,80 | 9,86 | 9,86 | 8,31 |
| $Q_m^{*}$ | 1 | 0,96 | 0,77 | 1,05 | 0,95 | 1,19 |
| | 5 | 4,95 | 4,87 | 5,35 | 5,00 | 5,10 |
| | 10 | 9,80 | 9,97 | 10,44 | 10,45 | 10,23 |

Tabela 4.25: Porcentagem de rejeições dos testes: Wald, Wald modificado e escore modificado em 10.000 amostras para $n = 100$, $\sigma_\epsilon^2 = 5$ e $\lambda = 10$.

| Teste | Tamanho Nominal(%) | U(0,5) | U(0,10) | N(0,1) | N(0,10) | LN(0,1) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_I^{**}$ | 1 | 1,26 | 1,17 | 1,34 | 1,37 | 1,21 |
| | 5 | 5,26 | 5,38 | 5,63 | 5,66 | 5,62 |
| | 10 | 10,15 | 10,39 | 10,55 | 10,74 | 10,71 |
| $W_{mI}^{*}$ | 1 | 0,97 | 1,10 | 0,73 | 1,33 | 1,00 |
| | 5 | 4,55 | 5,18 | 4,06 | 5,51 | 5,21 |
| | 10 | 9,11 | 10,27 | 8,75 | 10,58 | 10,35 |
| $W_{mR}^{*}$ | 1 | 0,90 | 0,89 | 0,73 | 0,99 | 0,86 |
| | 5 | 4,59 | 4,82 | 4,74 | 5,28 | 5,09 |
| | 10 | 9,39 | 9,91 | 9,57 | 10,20 | 10,31 |
| $Q_m^*$ | 1 | 1,06 | 0,94 | 1,08 | 1,00 | 0,89 |
| | 5 | 5,00 | 4,89 | 5,42 | 5,31 | 5,22 |
| | 10 | 9,76 | 9,98 | 10,24 | 10,24 | 10,38 |

Tabela 4.26: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 20$.

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | Tamanho Nominal (%) | Testes $W_I^{**}$ | $W_{mI}^*$ | $W_{mR}^*$ | $Q_m^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,52 | 2,55 | 0,54 | 0,93 |
| | | 5 | 7,80 | 7,89 | 4,16 | 5,09 |
| | | 10 | 13,48 | 13,57 | 9,95 | 11,06 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 2,24 | 2,43 | 0,16 | 0,80 |
| | | 5 | 7,78 | 8,18 | 3,02 | 5,51 |
| | | 10 | 13,26 | 13,69 | 8,39 | 11,15 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 2,03 | 2,29 | 0,09 | 0,75 |
| | | 5 | 7,46 | 8,00 | 2,37 | 5,00 |
| | | 10 | 13,10 | 13,66 | 7,59 | 10,98 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 2,22 | 2,51 | 0,15 | 0,80 |
| | | 5 | 7,39 | 7,88 | 2,62 | 5,38 |
| | | 10 | 13,18 | 13,80 | 7,72 | 11,24 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,39 | 2,45 | 0,50 | 0,73 |
| | | 5 | 7,65 | 7,70 | 4,54 | 5,00 |
| | | 10 | 12,97 | 13,06 | 10,01 | 10,64 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,13 | 2,22 | 0,23 | 0,75 |
| | | 5 | 7,22 | 7,31 | 3,34 | 4,86 |
| | | 10 | 12,79 | 12,95 | 8,42 | 10,22 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 2,66 | 2,78 | 0,58 | 0,87 |
| | | 5 | 7,98 | 8,25 | 4,55 | 5,68 |
| | | 10 | 13,52 | 13,83 | 9,91 | 11,36 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 2,18 | 2,32 | 0,72 | 0,80 |
| | | 5 | 7,42 | 7,77 | 4,18 | 5,24 |
| | | 10 | 13,27 | 13,56 | 9,59 | 11,12 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 2,29 | 2,44 | 0,45 | 0,71 |
| | | 5 | 7,68 | 7,98 | 4,04 | 5,45 |
| | | 10 | 13,32 | 13,58 | 9,49 | 10,99 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 2,39 | 2,56 | 0,73 | 0,90 |
| | | 5 | 7,92 | 8,43 | 4,02 | 5,51 |
| | | 10 | 13,50 | 13,96 | 9,59 | 11,71 |

Tabela 4.27: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 50$.

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | Tamanho Nominal (%) | Testes $W_I^{**}$ | $W_{mI}^{*}$ | $W_{mR}^{*}$ | $Q_m^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,55 | 1,58 | 0,83 | 1,00 |
| | | 5 | 5,82 | 5,87 | 4,70 | 4,99 |
| | | 10 | 11,22 | 11,28 | 9,84 | 10,27 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 1,50 | 1,51 | 0,73 | 0,95 |
| | | 5 | 6,12 | 6,15 | 4,67 | 5,21 |
| | | 10 | 11,36 | 11,39 | 9,90 | 10,40 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 1,37 | 1,42 | 0,60 | 0,89 |
| | | 5 | 5,98 | 6,01 | 4,48 | 5,14 |
| | | 10 | 11,56 | 11,66 | 9,88 | 10,54 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,39 | 1,48 | 0,61 | 0,87 |
| | | 5 | 5,89 | 5,97 | 4,41 | 4,92 |
| | | 10 | 11,11 | 11,14 | 9,41 | 10,12 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,63 | 1,69 | 0,79 | 1,04 |
| | | 5 | 6,18 | 6,30 | 4,65 | 5,43 |
| | | 10 | 11,25 | 11,35 | 9,77 | 10,48 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,37 | 1,45 | 0,56 | 0,91 |
| | | 5 | 5,58 | 5,74 | 4,04 | 4,78 |
| | | 10 | 10,98 | 11,03 | 9,02 | 10,00 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,47 | 1,51 | 0,67 | 0,89 |
| | | 5 | 6,17 | 6,23 | 4,73 | 5,13 |
| | | 10 | 11,30 | 11,38 | 9,85 | 10,41 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,42 | 1,45 | 0,80 | 0,94 |
| | | 5 | 5,75 | 5,81 | 4,48 | 4,88 |
| | | 10 | 10,80 | 10,89 | 9,36 | 9,93 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 1,58 | 1,62 | 0,79 | 1,05 |
| | | 5 | 5,84 | 5,91 | 4,57 | 5,03 |
| | | 10 | 11,14 | 11,17 | 9,54 | 10,24 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,50 | 1,56 | 0,73 | 0,95 |
| | | 5 | 5,96 | 6,11 | 4,40 | 5,17 |
| | | 10 | 11,54 | 11,62 | 9,87 | 10,73 |

Tabela 4.28: Porcentagem de rejeições dos testes em 10.000 amostras para diferentes distribuições dos erros ($\sigma_\epsilon^2 = \sigma_u^2 = 2$) para $n = 100$.

| Distribuição de $\epsilon_i$ | Distribuição de $u_i$ | Tamanho Nominal (%) | Testes $W_I^{**}$ | $W_{mI}^{*}$ | $W_{mR}^{*}$ | $Q_m^{**}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(0,2)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,34 | 1,34 | 0,96 | 1,12 |
| | | 5 | 5,52 | 5,53 | 4,79 | 5,10 |
| | | 10 | 10,47 | 10,51 | 9,90 | 10,06 |
| $N(0,2)$ | $t_4$ | 1 | 1,23 | 1,25 | 0,82 | 0,92 |
| | | 5 | 5,60 | 5,61 | 4,97 | 5,20 |
| | | 10 | 10,47 | 10,52 | 9,93 | 10,13 |
| $N(0,2)$ | $U(-2,4;2,4)$ | 1 | 1,03 | 1,03 | 0,74 | 0,81 |
| | | 5 | 5,15 | 5,17 | 4,54 | 4,72 |
| | | 10 | 10,19 | 10,22 | 9,58 | 9,77 |
| $N(0,2)$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,17 | 1,17 | 0,80 | 0,87 |
| | | 5 | 5,34 | 5,35 | 4,81 | 4,97 |
| | | 10 | 10,35 | 10,35 | 9,72 | 9,81 |
| $t_4$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,32 | 1,34 | 1,05 | 1,08 |
| | | 5 | 6,04 | 6,12 | 5,39 | 5,59 |
| | | 10 | 11,12 | 11,24 | 10,43 | 10,73 |
| $U(-2,4;2,4)$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,34 | 1,35 | 0,95 | 1,06 |
| | | 5 | 5,76 | 5,79 | 5,12 | 5,38 |
| | | 10 | 10,79 | 10,80 | 10,23 | 10,39 |
| $\chi_1^2$ | $N(0,2)$ | 1 | 1,05 | 1,07 | 0,72 | 0,83 |
| | | 5 | 5,19 | 5,20 | 4,38 | 4,68 |
| | | 10 | 10,20 | 10,23 | 9,63 | 9,87 |
| $t_4$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,17 | 1,19 | 0,79 | 0,85 |
| | | 5 | 5,47 | 5,50 | 4,82 | 5,00 |
| | | 10 | 10,71 | 10,73 | 10,09 | 10,32 |
| $\chi_1^2$ | $t_4$ | 1 | 1,19 | 1,20 | 0,77 | 0,95 |
| | | 5 | 5,13 | 5,17 | 4,44 | 4,79 |
| | | 10 | 10,46 | 10,50 | 9,66 | 10,00 |
| $\chi_1^2$ | $\chi_1^2$ | 1 | 1,22 | 1,22 | 0,81 | 0,98 |
| | | 5 | 5,28 | 5,30 | 4,70 | 4,89 |
| | | 10 | 10,29 | 10,31 | 9,73 | 9,94 |

Capítulo 5

# Comentários finais

Neste trabalho apresentamos a idéia básica da metodologia de estimação e de construção de testes de hipóteses baseados na função escore corrigida (Gimenez, 1997), para o modelo de regressão linear simples funcional. Apresentamos expressões para os estimadores dos parâmetros estruturais do modelo e para a matriz de covariâncias, considerando o modelo de regressão linear simples funcional com a variância do erro de medida ($\sigma_u^2$) e a razão das variâncias dos erros ($\lambda$) conhecidas. Aplicamos os resultados encontrados para obter as estatísticas de razão de verossimilhanças, Wald e escore baseadas na função escore corrigida (modificadas e não-modificadas) para testar hipóteses sobre o coeficiente angular $\beta$. Construímos também a estatística de Wald baseada na função escore usual. Além disso, realizamos estudos de simulação para avaliar algumas propriedades dos estimadores e o desempenho dos testes propostos.

Os resultados dessas simulações mostram que, em geral, os vícios médios dos estimadores são pequenos para o modelo linear simples funcional com variância do erro de medida conhecida. Quanto aos erros quadráticos médios, estes aumentam quando a variância da variável resposta ($\sigma_\epsilon^2$) aumenta, mas, em geral, parecem não se alterar com o valor de $\sigma_u^2$. Para os estimadores de $\alpha$ e de $\beta$, os EQM são afetados pela distribuição adotada para a covariável. Quando a suposição de normalidade dos erros do modelo é violada, o estimador de $\beta$ é o menos afetado se compararmos com os estimadores dos demais parâmetros da regressão.

Quando a razão das variâncias dos erros é conhecida, os resultados das simulações mostram que, em geral, os vícios médios e os EQM dos estimadores aumentam quando o valor de $\sigma_\epsilon^2$ aumenta. Para $\sigma_\epsilon^2 = 1$, os vícios dos estimadores de $\alpha$ e de $\beta$ são pequenos para todo valor de $n$ e de $\lambda$. Já, os EQM desses estimadores diminuem quando o valor de $n$ aumenta (fixado $\lambda$) e, para algumas distribuições da covariável, não se alteram quando $\lambda$ aumenta (fixado $n$). Para $\sigma_\epsilon^2 = 5$, os vícios médios e os EQM de $\alpha$ e de $\beta$, em geral, diminuem com o aumento de $\lambda$ e de $n$. Para o estimador de $\sigma_u^2$ este último resultado ocorre para os dois valores de $\sigma_\epsilon^2$. A violação da suposição de normalidade dos erros do modelo afeta, em geral, os vícios médios e os EQM dos estimadores.

No modelo de regressão linear simples funcional com variância do erro de medida e razão das variâncias dos erros conhecidas, os estudos de simulação mostram que o teste escore modificado é o único teste que apresenta os tamanhos observados bem próximos do tamanho nominal para todas as distribuições da covariável, independentemente do tamanho da amostra, do valor de $\sigma_u^2$ ou de $\lambda$ e $\sigma_\epsilon^2$. A distribuição da covariável não parece afetar os tamanhos observados deste teste. E quando violamos a suposição de normalidade dos erros, os tamanhos observados estão próximos dos tamanhos nominais para qualquer tamanho de amostra.

# Referências Bibliográficas


[1] Bolfarine, H., Rodrigues, J., Cordani, L. (1992). *O modelo de regressão com erros nas variáveis.* 10º SINAPE. São Paulo.

[2] Bolfarine, H., Sandoval, M. C. (2001). *Introdução à inferência estatística.* Rio de Janeiro: SBM.

[3] Cheng, G. L., Van Ness, J. W. (1991). On the unreplicated ultrastuctural model. *Biometrika,* **78**, 442-445.

[4] Cheng, G. L., Van Ness, J. W. (1994). On estimating linear relationships when both variables are subject to errors. *Journal of the Royal Statistical Society B,* **56**, 167-183.

[5] Fuller, W. A. (1987). *Measurement error models.* New York: Wiley.

[6] Gimenez, Patricia C. (1997). *Inferência em modelos com erros nas variáveis, através do método do escore corrigido.* Tese de Doutorado. São Paulo: IME-USP.

[7] Gleser, L. J. (1985). A note on G. R. Dolby's unreplicated ultrastructural model. *Biometrika,* **72**, 117-124.

[8] Kendall, M. G., Stuart, A. (1979). *The advanced theory of statistics,* 4a. ed. New York: Hafner.

[9] Nakamura, T. (1990). Corrected score function for errors-in-variables models: methodology and application to generalized linear models. *Biometrika*, **77**, 127-137.

[10] Neyman, J., Scott, E. (1948). Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrica*, **16**, 1-32.

[11] Patefield, W. M. (1977). On the information matriz in the linear functional relationship problem. *Applied Statistics*, **26**, 69-70.

[12] Patefield, W. M. (1978). The unreplicated ultrastructural relation: large sample properties. *Biometrika*, **65**, 535-540.

[13] Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorems in mathematical statistics.* New York: Wiley.

[14] Solari, M. E. (1969). The "maximum likelihood solution" to the problem of estimating a linear functional relationship. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **31**, 372-375.

[15] Stefanski, L. A., Carroll, R. J. (1987). Conditional scores and optimal scores for generalized linear measurement-error models. *Biometrika*, **74**, 703-716.

[16] Venables, W. M., Ripley, B. D. (1999). *Modern applied statistics with S-Plus.* 3a. ed. New York: Springer-Verlag.