# Uma transformação de De Finetti e campos de coincidência de opiniões

Joelmir Divino Carlos Feliciano

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Luís Gustavo Esteves

USP - São Paulo

Setembro de 2006

# Uma transformação de De Finetti e campos de coincidência de opiniões

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Joelmir Divino Carlos Feliciano e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 13 de Setembro de 2006.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luís Gustavo Esteves (orientador) - IME - USP

Prof. Dr. Sérgio Wechsler - IME - USP

Prof. Dra. Verónica Andrea González-López - IMECC - UNICAMP

Aos meus pais

*José Carlos e Luzia,*

*meus irmãos e sobrinhos,*

*meu avô,*

*José F. Sobrinho (in memorian)*

*meu padrinho*

*Elvando G. Nascente (in memorian)*

*e meu filho Wendell Leon,*

com amor...

# Agradecimentos

Inicialmente, quero agradecer a Deus por me ajudar na realização de um dos meus sonhos. Em especial agradeço aos meus pais por todas as lições valiosas que me ensinaram desde que eu nasci e por todo amor e dedicação que tiveram comigo durante toda minha vida e em particular, durante essa dura jornada, além é claro, de todo apoio financeiro para que eu pudesse concluir esse trabalho.

Agradeço aos meus irmãos, João Carlos, por toda a força que sempre me dedicou e por vários diálogos produtivos que tivemos, por acreditar sempre no meu sucesso e por várias vezes me ajudar financeiramente. Agradeço também ao José Carlos por todo o seu apoio financeiro, que me foi de grande valor e sei que, a sua maneira, sempre torceu pelo meu sucesso e sempre continuará torcendo.

Agradeço a minha madrinha (Maria), cunhada (Luciane), tia (Vera), tio (João), tia (Rosana), Renato, Sérgio e Julielle pelas conversar proveitosas que tivemos e por todo carinho que recebi dessas pessoas que sempre foram muito importantes na minha vida. Em especial, agradeço a minha prima (Simone) que sempre me fez sentir como se estivesse em casa, ao meu afilhado (Cleiton) que sempre me apoiou e demonstrou todo o seu amor por mim, e ao tio (Zezé) que sempre acreditou e me apoiou em todos os momentos, saiba que te amo muito, que Deus lhe abençoe e lhe dê tudo de bom que a vida possa lhe reservar.

Agradeço ao meu amigo e Professor Ms (Pedro César Rocha Coimbra) que foi a primeira pessoa a me incentivar a fazer o mestrado, aos meus amigos Professores Doutores, José Elmo de Menezes, Iram do Carmo Martins e Júlio César Vasqués Saavedra, muito obrigado por todo o seu apoio, carinho, atenção, companherismo e pelos puxões de orelha que fizeram com que eu chegasse ao fim da minha jornada. Não tenho palavras para agradecê-los, que Deus os abençoe e que vocês continuem sendo essas pessoas maravilhosas que sempre foram, pois durante muito tempo vocês foram a minha família e espero que continuem sendo.

Agradeço ao meu amigo e mais que irmão (Nelson Lopes) que me incentivou e me ensinou várias lições de vida e de humildade, é uma honra dizer que você é meu amigo, muito obrigado, que Deus abençoe você e sua querida esposa (Kárita). Agradeço ao meu amigo e irmão (Nélio Machado) com quem eu tive a honra de conviver desde a graduação e que hoje, vencemos nossos objetivos, você merece todo o sucesso do mundo e me sinto muito feliz de ter compartilhado tantos momentos (bons e ruins) contigo, só nós sabemos o que passamos para chegar até aqui. Agradeço ao Enoch, um grande amigo de todas as horas e agradeço ao Ricardo um cara excepcional, você é mais que um amigo, muito obrigado.

Agradeço a minha querida amiga (Edjane) pelos momentos felizes e por sua amizade, você é simplesmente fantástica. Agradeço a Fabiana que me deu todo apoio, atenção e carinho do mundo e sempre ficou ao meu lado, te adoro muito e desejo toda felicidade do mundo para você. Agradeço a Heila Roberts pelo momentos lindos e maravilhosos que passamos juntos.

Agradeço ao meu amigo (Pinho), Patrícia e a todos da CPG que sempre me trataram da melhor maneira possível.

Agradeço aos meus amigos de Goiânia, Claudion, Gerônimo, Léo, Leonardo, Lívio que me acompanham desde criança e me dão todo o apoio do mundo.

Agradeço a todos que não foram citados acima, mas que de alguma maneira me ajudaram e contribuiram para obter sucesso na vida, e com isso, alcançar todos os meus objetivos. Para todos que não acreditavam no meu sucesso deixo a seguinte frase. "Somente no diciocário o sucesso precede o trabalho".

Por fim, um agradecimento mais que especial ao "chefe", Professor Doutor Luís Gustavo Esteves, pela amizade, paciência e dedicação durante todo o trabalho de orientação, ou melhor, pela sua dedicação bem antes da orientação, pois o senhor foi a única pessoa que acreditou na minha capacidade ao ponto de intervir por várias vezes ao meu favor, e por todas as discussões que tivemos em altíssimo nível. Que Deus o abençoe sempre e que o senhor continue sendo essa pessoa maravilhosa e humilde que demonstrou ser. Eu não poderia ter tido orientador melhor, obrigado por tudo, e saiba que eu sou seu fã, mesmo o senhor sendo corinthiano.

# Resumo

Dadas $n$ variáveis aleatórias $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ com funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$, respectivamente, sempre é possível construir uma função real $\phi$ de modo que as novas variáveis aleatórias $\phi(X_1)$, $\phi(X_2)$, ..., $\phi(X_n)$ possuam, todas, uma mesma função de distribuição $H$.

A partir desse resultado, é discutida a construção dos Campos de Coincidência de Opiniões de De Finetti como alternativa às formas usuais de caracterizar a "opinião" de um grupo de especialistas a respeito de uma quantidade de interesse desconhecida contínua. Um Campo de Coincidência de Opiniões é uma união finita de intervalos reais onde as opiniões dos membros do grupo coincidem a respeito da quantidade de interesse em questão.

# Abstract

Given $n$ randon variables $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ with continuous distribuiton functions $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$, respectively, it is always possible to construct a real function $\phi$ in such a way that $\phi(X_1)$, $\phi(X_2)$, ..., $\phi(X_n)$, also random variables, all have the same distribution function, say $H$.

From this result, De Finettian Fields of Coincidence of Opinions are presented once more as an alternative method aiming to somehow characterize the "opinion" of a group of experts about a continuous random quantity of interest. A Field of Coincidence of Opinions is a finite union of intervals where the opinions of the members of the group coincide with respect to that quantity of interest.

# Sumário

# Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar de modo detalhado o resultado acerca de transformações de variáveis aleatórias contínuas demostrado por Bruno De Finetti em 1953, bem como exibir uma interpretação deste resultado dentro da problemática existente em teoria da decisão coletiva. Nessa dissertação é proposta uma extensão do resultado apresentado em Esteves (1997) para 2 variáveis aleatórias.

A exposição do tema é feita em um único capítulo dividido em quatro seções.

Na seção 1, introduzimos um breve relato do resultado para 2 variáveis aleatórias contínuas, bem como suas respectivas proposições e teoremas mais importantes, apresentados em Esteves (1997).

Na seção 2, introduzimos o problema abordado por Bruno De Finetti em seu artigo de 1953 para o caso de $n$ variáveis aleatórias contínuas, $n \geq 3$. Mais precisamente, apresentamos a demonstração do seguinte resultado: dadas $n$ variáveis aletatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$, respectivamente, é possível obter ao menos uma função real $\phi$ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ possuam, todas, função de distribuição contínua $H$. Nesse caso, uma única função real $\phi$ gera transformadas $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ com mesma distribuição de probabilidade contínua.

Para a derivação do resultado principal, construimos uma função real $\varphi$, que define $\phi$, através de algumas propriedades de funções de distribuição contínuas, apresentadas sob a forma de proposições. Em seguida, determinamos as funções de distribuição das variáveis $\varphi(X_1), \varphi(X_2), ..., \varphi(X_n)$ (e, consequentemente, de $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$), encerrando a demontração do teorema proposto por Bruno De Finetti.

Na seção 2, são destacadas ainda algumas características da função $\varphi$ e apresentada uma interpretação do resultado demonstrado, ou seja, comentamos sobre a existência dos Campos e Coincidência de Opiniões de De Finetti para $n$ variáveis aleatórias e ressaltamos alguns de seus aspectos positivos e negativos.

Na seção 3, apresentamos um breve relato sobre Campos de Coincidência de Opiniões em geral, ou seja, para medidas de probabilidade mais gerais e destacamos algumas questões relacionadas à possibilidade (ou não) de construção de funções de conjuntos sobre os Campos de Coincidência de Opiniões (isto é, "medidas de probabilidade"em estruturas que não são $\sigma$-álgebras). Por fim, na seção 4 é apresentada a conclusão do trabalho.

# Capítulo 1

# A Transformação de De Finetti

## 1.1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho é apresentar, de maneira detalhada, o resultado de tranformações de variáveis aleatórias contínuas apresentado por De Finetti em seu artigo de 1953. Mais precisamente, apresentaremos a extensão do resultado para $n$ variáveis aleatórias contínuas. Inicialmente, relembramos algumas definições e resultados.

**Definição 1.1.** *Seja $X$ uma variável aleatória real definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. A função de distribuição da variável aleatória $X$, a qual representaremos por $F$, é definida por:*

$$F(x) = P(X < x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

**Observação 1.1.** *Note que a definição acima difere da definição usual de função de distribuição contínua à direita. A justificativa pela adoção da definição (1.1) se deve ao fato de De Finetti ter utilizado esta convenção em seu artigo. Destacamos que, de acordo com esta definição, uma função de distribuição é contínua à esquerda.*

**Definição 1.2.** *Seja $F$ uma função de distribuição contínua. Definimos, $\forall y \in (0,1)$, a seguinte função inversa $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ por*

$$F^{-1}(y) = sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}.$$

Note que $F^{-1}(y)$ está bem definida $\forall y \in$ (0,1) e que quando F é estritamente crescente, $F^{-1}$ corresponde à função inversa usual de $F$.

**Lema 1.1.** *Sejam $F$ uma função de distribuição e $F^{-1}$ sua inversa conforme a definição (1.2). Então,*

$\forall y \in (0,1)$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, vale

$$F^{-1}(y) < t \qquad \Leftrightarrow \qquad y < F(t).$$

**Lema 1.2.** *Sejam $F$ uma função de distribuição contínua e $F^{-1}$ definida como na definição (1.2). Então*

$$F(F^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in (0,1).$$

**Observação 1.2.** *As demonstrações dos lemas acima são detalhados em Esteves (1997) e correspondem à adaptações das demonstrações apresentadas em Roussas [11] considerando a definição (1.1).*

**Teorema 1.1.** *Consideremos uma variável aleatória real $X$ com função de distribuição contínua $F$. Seja $H$ uma outra função de distribuição contínua qualquer. Então, existe uma tranformação real $f$ da variável aleatória $X$ tal que a função de distribuição da tranformada $Z = f(X)$ seja $H$.*

A prova do teorema (1.1) segue diretamente das definições (1.1) e (1.2) e dos lemas (1.1) e (1.2) considerando $f = H^{-1} \circ F$.

Deve-se ressaltar que o teorema (1.1) continua válido sem a suposição de continuidade da função de distribuição $H$. Porém, a função de distribuição $F$ deve ser contínua.

A título de ilustração do teorema (1.1), consideremos os seguintes exemplos.

**Exemplo 1.1.** *Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\alpha$, $\alpha > 0$. Vamos obter, a partir de $X$, uma variável $Z = f(X)$ com distribuição exponencial de parâmetro $\beta$, $\beta > 0$.*

Para obtermos a transformação desejada, vamos utilizar o teorema (1.1),

$$F(x) = \left(1 - e^{-\alpha x}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad e \qquad H(x) = \left(1 - e^{-\beta x}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x),$$

onde $I_{\mathbb{A}}(.)$ denota a função indicadora do conjunto $\mathbb{A}$.

Obtendo a função inversa de $H$, $H^{-1}$, segundo a definição (1.2) temos:

$$H^{-1}(y) = -\frac{1}{\beta} log(1 - y), \qquad \forall y \in (0, 1).$$

Logo,

$$Z = H^{-1}(F(X)) = -\frac{1}{\beta} log(1 - F(X)) = -\frac{1}{\beta} log(e^{-\alpha X}) = \frac{\alpha}{\beta} X$$

Deste modo, $Z = \frac{\alpha}{\beta} X$ possui distribuição exponencial de parâmetro $(\beta > 0)$.

A seguir, apresentaremos um exemplo onde $H$ não é uma função contínua.

**Exemplo 1.2.** *Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\alpha$, $\alpha > 0$. Vamos obter, a partir de $X$, uma variável $Z = g(X)$ com distribuição geométrica de parâmetro $\rho$, $0 < \rho < 1$.*

Novamente utilizaremos o teorema (1.1) para obtermos a transformação desejada. Nesse caso:

$$F(x) = \left(1 - e^{-\alpha x}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad e \qquad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{1 - (1 - \rho)^n\} I_{(n,n+1]}(x).$$

onde $I_{\mathbb{A}}(.)$ denota a função indicadora do conjunto $\mathbb{A}$.

Obtendo a função inversa de $H$, $H^{-1}$, segundo a definição (1.2), temos, para todo $t \in (0,1)$, que:

$$H^{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)I_{[1-(1-\rho)^n;1-(1-\rho)^{n+1})}(x).$$

Logo,

$$Z = H^{-1}(F(X)) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)I_{[-\frac{1}{\alpha}nlog(1-\rho);-\frac{1}{\alpha}(n+1)log(1-\rho))}(x).$$

Portanto, $Z$ possui função de distribuição discreta $H$.

**Exemplo 1.3.** *Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli de parâmetro $p$, $0 < p < 1$. Seja $H$ a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\beta$, $\beta > 0$.*

Nesse caso, como a função de distribuição de $X$, $F$, não é contínua, não é verdade que $Z(X) = H^{-1}(F(X))$ possui distribuição de parâmetro $\beta$.

Com efeito,

$$F(x) = (1-p)I_{(0,1]}(x) + I_{(1,\infty)}(x) \quad e$$

$$H(x) = \left(1 - e^{-\beta x}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Pela definição 1.2, temos que

$$H^{-1}(x) = -\frac{1}{\beta}log(1-x), \quad x \quad \in \quad [0,1).$$

Logo,

$$Z(X) = -\frac{1}{\beta} log[1 - F(X)].$$

Assim, $Z$ é uma variável aleatória discreta assumindo valores 0 e $-\frac{1}{\beta}logp$ com probabilidades $p$ e $1-p$, respectivamente. Com efeito,

$$P(Z(X) = 0) = P(F(X) = 0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 1 - p \quad e$$

$$P\left(Z(X) = -\frac{1}{\beta}logp\right) = P(F(X) = 1 - p) = P(X \in (0, 1]) = P(X = 1) = p.$$

Do teorema (1.1) seguem alguns resultados.

**Corolário 1.1.** *Se $X$ é uma variável aleatória com função de distribuição contínua $F$, então a variável aleatória $F(X)$ possui distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$.*

No exemplo anterior, note que $F(X) = (1-p)I_{(0,1]}(x) + I_{(1,\infty)}(x)$ é uma variável aleatória discreta assumindo valores 0 e $1-p$ com probabilidades $1-p$ e $p$, respectivamente. De fato,

$$P(F(X) = 0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 1 - p \quad e$$

$$P(F(X) = 1 - p) = P(X \in (0, 1]) = P(X = 1) = p.$$

Assim, o Corolário 1.1 é válido apenas para funções de distribuição contínuas, diferentemente do Corolário 1.2 que segue.

**Corolário 1.2.** *Seja $U$ uma variável aleatória com distribuição uniforme sobre $(0,1)$ e $H$ uma função de distribuição. Nestas condições, $H^{-1}(U)$ é uma variável aleatória com função de distribuição $H$.*

Devemos ressaltar ainda que o resultado do corolário (1.2) é de grande importância para técnicas de simulação, uma vez que fundamenta o Método da Tranformação Inversa (Ross [10]).

Do teorema (1.1), podemos destacar o fato que para obtermos uma variável aleatória com uma dada função de distribuição $H$ em duas situações distintas (numa, a partir de $X$ com função de distribuição contínua $F$ e, noutra, a partir de $Y$ com função de distribuição contínua $G$), precisamos aplicar tranformações diferentes em cada um destes casos.

Para ilustrar esta afirmação, consideremos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.4.** *Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com distribuição exponencial de parâmetros $\alpha$ e $\beta$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, respectivamente, com $\alpha \neq \beta$. Suas funções de distribuição são, portanto,*

$$F(x) = \left(1 - e^{-\alpha x}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad e \qquad G(y) = \left(1 - e^{-\beta y}\right) I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Considere a seguinte função de distribuição

$$H(x) = (1 - e^{-\gamma x}) I_{\mathbb{R}^+}(x), \quad \gamma > 0.$$

Isto é, $H$ é a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição Exponencial de parâmetro $\gamma$, $\gamma > 0$.

Pelo teorema (1.1), a variável

$$Z = f(X) = H^{-1}(F(X)) = -\frac{1}{\gamma}log(1 - F(X)) = -\frac{1}{\gamma}log[1 - (1 - e^{-\alpha X})] = \frac{\alpha}{\gamma}X$$

possui distribuição Exponencial de parâmetro $\gamma$. Analogamente,

$$W = g(Y) = H^{-1}(G(Y)) = \frac{\beta}{\gamma}X$$

possui distribuição Exponencial de parâmetro $\gamma$ e, desse modo, $f$ e $g$ são distintas.

Assim, em geral, dadas duas variáveis aleatórias contínuas quaisquer $X$ e $Y$, é sempre possível, pelo teorema (1.1), construir duas novas variáveis aleatórias $Z = f(X)$ e $W = g(Y)$, ambas possuindo uma certa função de distribuição contínua $H$, com $f$ e $g$ distintas em geral.

De Finetti (1953) mostra que existe ainda ao menos uma função real $\phi$ tal que as variáveis aleatórias contínuas $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuam, ambas, função de distribuição contínua $H$. Nesse caso, uma única função real $\phi$ aplicada às variáveis aleatórias $X$ e $Y$ produz transformadas com mesma distribuição de probabilidade. De Finetti apresenta vários passos da construção de tais variáveis aleatórias, bem como da derivação de suas respectivas funções de distribuição. A seguir, os principais passos dessa construção são apresentados.

**Teorema 1.2.** *(Bruno De Finetti)*

*Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, respectivamente. Seja também $H$ uma função de distribuição qualquer. Existe uma função real $\phi$, tal que as variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuem, ambas, a mesma função de distribuição $H$.*

**Roteiro da demonstração:** A idéia inicial é provar a existência de uma função real $\varphi$ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ possuam, ambas, distribuição contínua uniforme no intervalo (0, 1). Em seguida, tomaremos a função real $\phi = H^{-1} \circ \varphi$ e, utilizando o corolário (1.2), concluiremos que $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuirão, ambas, função de distribuição H. Desta forma, procederemos à construção das variáveis aleatórias uniformente distribuídas $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$, sem nenhuma perda de generalidade.

O fato subjacente à construção da função $\varphi$ consiste no seguinte resultado: para qualquer par funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, existe (necessariamente) um intervalo $(a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \dfrac{1}{2}$.

**Proposição 1.1.** *Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, respectivamente. Existe um intervalo $I_1 = (a, b]$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, que satisfaz*

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$$

A demonstração da proposição (1.1) está detalhada em Esteves (1997).

Devemos ressaltar que em situações onde exista mais de um intervalo satisfazendo a proposição (1.1), representaremos sempre por $I_1$ o intervalo com o menor ínfimo dentre os que satisfizerem esta proposição, para evitar ambiguidades (estamos admitindo aqui, num abuso de notação, $-\infty$ como sendo o ínfimo de um conjunto ilimitado inferiormente). Uma vez que a escolha é efetuada e ainda assim existirem mais de um intervalo satisfazendo a proposição (1.1), $I_1$ representará o intervalo com menor supremo. Além desta convenção, fixaremos também que o intervalo $I_1$ sempre será fechado à direita e aberto à esquerda e representaremos por $I_0$ o intervalo complementar de $I_1$ em relação a $\mathbb{R}$.

Seguem alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas $X$ e $Y$ com funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, respectivamente e seus correspondentes intervalos $(a, b]$ de probabilidade comum $\frac{1}{2}$ para ilustrar a proposição (1.1).

**Exemplo 1.5.** *Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas uniformes $F$ e $G$ sobres os intervalos $(1,2)$ e $(2,3)$ , respectivamente. Assim*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 2 \\ x-2 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}.$$

Como nosso objetivo é obter um intervalo $I_1 = (a, b]$ que tenha probabilidade $\frac{1}{2}$ em ambas as distribuições, devemos determinar $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tais que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$.

Das expressões de $F$ e $G$ acima, devemos ter $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$.

Com efeito, se $a > \frac{3}{2}$ então $\forall b > a$, $F(b) - F(a) < F(b) - F\left(\frac{3}{2}\right) = F(b) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

Por outro lado, se $a < \frac{3}{2}$, então $F(a) < \frac{1}{2}$ e, portanto, devemos ter $b = a + \frac{1}{2} < 2$, o que produz $G(b) - G(a) = 0$. Logo, $a$ deve ser igual a $\frac{3}{2}$. Por argumento similar, verificamos que $b$ deve ser igual a $\frac{5}{2}$. No caso de $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$, temos

$$F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \quad e$$

$$G\left(\frac{5}{2}\right) - G\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 2\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

Observamos que neste exemplo o intervalo $I_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ é o único intervalo real da forma $(a, b]$ que satisfaz a proposição (1.1) e que, segundo nossas convenções acima, o intervalo $I_0 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right]$.

**Exemplo 1.6.** *Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas normais $F$ e $G$ com média $0$ e variâncias $1$ e $4$, respectivamente.*

Neste caso, temos que ambas as variáveis são simétricas em torno do ponto 0, de modo que 0 é mediana de $X$ e de $Y$. Desde modo, segundo nossas convenções acima o intervalo $I_1 = (-\infty, 0]$ satisfaz a proposição (1.1), pois

$$F(0) - F(-\infty) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad G(0) - G(-\infty) = \frac{1}{2}$$

Porém, diferentemente do exemplo (1.5), não é único o intervalo real que possui probabilidade $\frac{1}{2}$ sobre ambas as distribuições. Basta observamos que o intervalo $(0, +\infty)$ também satisfaz tal propriedade. Contudo, adotaremos $I_1 = (-\infty, 0]$ e $I_0 = (0, +\infty)$.

Devemos destacar que, em geral, não é possível obter para qualquer par de funções de distribuição contínuas um único intervalo de probabilidade comum $p$, $p >$

$\frac{1}{2}$. Em outras palavras, a proposição (1.1) é válida para $p = \frac{1}{2}$ (mais precisamente, para os valores $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 1$).

A seguir, apresentaremos um exemplo onde não é possível obter intervalos de probabilidade comum $p$, $\frac{1}{2} < p < 1$, para duas dadas variáveis aleatórias contínuas.

**Exemplo 1.7.** *Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição contínua Uniforme no intervalo $(1, 2)$ e $Y$ uma outra variável aleatória com distribuição contínua correspondendo a uma mistura de duas distribuições Uniformes em $(0, 1)$ e $(2, 3)$, isto é, $Y \underline{\underline{d}} \frac{1}{2}U(0, 1) + \frac{1}{2}U(2, 3)$, onde $\underline{\underline{d}}$ denota que $Y$ possui mesma distribuição que uma mistura de $U(0, 1)$ e $U(2, 3)$ com mesma probabilidade $\frac{1}{2}$. Além disso, sejam $F_X$ e $G_Y$ as funções de distribuição das variáveis aleatórias $X$ e $Y$, respectivamente.*

Note que, para todo $\frac{1}{2} < p < 1$, não existe $I = (a, b]$ tal que

$$F_X(b) - F_X(a) = G_Y(b) - G_Y(a) = p, \quad \frac{1}{2} < p < 1,$$

pois, para que a igualdade acima seja satisfeita é necessário $b > 2$ $\left(G_Y(2) = \frac{1}{2}\right)$ e $a < 1$ $\left(G_Y(1) = \frac{1}{2}\right)$, o que produziria $F_X(b) - F_X(a) = 1$.

Utilizando-se o mesmo procedimento adotado na proposição (1.1), podemos dividir cada um dos conjuntos $I_0$ e $I_1$ em dois subconjuntos disjuntos tais que ambos os subconjuntos contenham $\frac{1}{4}$ de probabilidade, tanto da distribuição de $X$ quanto da distruibuição de $Y$. Isto é, podemos construir conjuntos $I_{i_1 i_2}$ tais que $P(X \in I_{i_1 i_2}) = P(Y \in I_{i_1 i_2}) = \frac{1}{4}$, $i_1, i_2 = 0, 1$, e $I_{i_1} = I_{i_1,0} \bigcup I_{i_1,1}$ com $I_{i_1,0} \bigcap I_{i_1,1} = \emptyset$, $i_1 = 0, 1$.

Aplicando este resultado sucessivamente, encontra-se, para todo $n \geq 1$, $2^n$ conjuntos disjuntos formados por um número finito de intervalos (mais precisamente, uniões de no máximo $n-1$ intervalos) de probabilidade $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, tanto em relação à $X$ quanto em relação à $Y$, isto é, existem conjuntos disjuntos $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $i_j \in \{0,1\}$, $\forall j = 1, 2, ..., n$, tais que

$$P(X \in I_{i_1 i_2 \dots i_n}) = P(Y \in I_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \forall (i_1, i_2, ..., i_n) \in \{0,1\}^n, \quad e$$

$I_{i_1 i_2 \dots i_n} = I_{i_1 i_2 \dots i_n,0} \bigcup I_{i_1 i_2 \dots i_n,1}$ com $I_{i_1 i_2 \dots i_n,0} \bigcap I_{i_1 i_2 \dots i_n,1} = \emptyset$. A partir da construção de tais conjuntos, podemos, finalmente, definir a função real $\varphi$ citada anteriormente.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

onde $i_1, i_2, ...$ são tais que $x \in I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $\forall n \geq 1$ (aqui, os conjuntos $I_{i_1 i_2 \dots i_n}$ correspondem aos conjuntos construídos acima através das funções de distribuições contínuas $F$ e $G$). Além disso, $\varphi$ é função também das funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, pois, na definição, figuram índices $\{i_n : n \geq 1\}$ que dependem exclusivamente de $F$ e $G$.

Assim, a função $\varphi$ associa a cada número real $x$, o número do intervalo $(0,1)$ que tem uma representação diática dada por $0, i_1 i_2 ...$, com $x \in I_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $\forall n \geq 1$ (uma caracterização bem detalhada da representação, ou expansão, diádica de um número real do intervalo $(0,1)$ é encontrada em Billingsley [2]). A demonstração da uniformidade de $\varphi(X)$ ($\varphi(Y)$) é feita diretamente pela definição de função de distribuição (Esteves (1997)).

Uma consequência da construção da função real $\varphi$ acima é descrita por De Finetti quando as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ estão relacionadas a uma única quantidade de interesse desconhecida, ao invés de duas quantidades de interesse distintas, isto é, quando $F$ e $G$ são as representações númericas de incerteza (opiniões) de dois indivíduos acerca desta única quantidade de interesse.

Neste contexto, a construção da função real $\varphi$ (e das variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$) serve para nos dizer o seguinte fato: é possível construirmos uma união finita de intervalos reais, a qual De Finetti denominou **Campos de Coincidências de Opiniões**, onde as opiniões de dois indivíduos (representadas por $F$ e $G$) coincidem com relação à quantidade de interesse em questão a um certo "nível de unanimidade". Esse resultado pode ser estendido para um número finito de funções de distribuições contínuas, sendo possível estabelecer campos de coincidência de opiniões para um grupo finito de indivíduos opinando sobre a mesma quantidade de interesse. Segundo De Finetti, esse fato, acena uma possibilidade de tentar caracterizar (se é que isso faz sentido) a "opinião conjunta"de um grupo de indivíduos.

Uma discussão mais detalhada sobre os campos de coincidência de opiniões será apresentada na próxima seção, após a demonstração do resultado principal.

## 1.2 Resultado Principal

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos a extensão do Teorema (1.2) que garante que a partir de $n$ variáveis aleatórias $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..., $X_n$ com funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, respectivamente, existe uma função real $\phi$ tal que as novas variáveis $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ possuam uma mesma dada distribuição.

Com o intuito de facilitar a compreensão do resultado a ser apresentado, organizaremos esta seção da seguinte maneira: inicialmente, estabeleceremos a extensão do teorema (1.2) bem como a argumentação básica de sua demonstração (Roteiro da Prova). Em seguida, apresentaremos vários exemplos, e por fim, uma interpretação desse resultado.

Iniciemos, então, enunciando a extensão do Teorema (1.2):

**Teorema 1.3.** *(Bruno De Finetti)*

*Sejam $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..., $X_n$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, respectivamente. Seja $H$ uma função de distribuição qualquer. Então, existe uma função real $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ possuem a mesma função de distribuição $H$.*

**Roteiro da demonstração:** A demostração do teorema (1.3) para $n$ variáveis será parecida com a demonstração do teorema (1.2), ou seja, provaremos, sem perda de generalidade, a existência de uma função real $\varphi$ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X_1)$, $\varphi(X_2)$, ..., $\varphi(X_n)$ possuam todas distribuição contínua uniforme no intervalo (0, 1). Em seguida, tomaremos a função real $\phi = H^{-1} \circ \varphi$ e, utilizando o corolário (1.2), concluiremos que $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ possuirão, todas, função de distribuição H.

O fato subjacente à construção da função $\varphi$ consiste no seguinte resultado: para um conjunto de $n$ funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, existe um conjunto $I_1$, formado pela união de no máximo $n-1$ intervalos de mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ com relação a todas as funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, isto é, existe um conjunto $I_1 = \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i]$, $k \leq n-1$, com $a_i < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., k-1$, satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} F_l(b_i) - F_l(a_i) = \frac{1}{2}$, para todo $l = 1, 2, ..., n$.

**Exemplo 1.8.** *Sejam $X_1, X_2, X_3$ e $X_4$ varáveis aleatórias Uniformes em $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ e $(3,4)$, respectivamente.*

Seja

$$I = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \bigcup \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right].$$

Nesse caso,

$$P_{X_1}(I) = P_{X_2}(I) = P_{X_3}(I) = P_{X_4}(I) = \frac{1}{2},$$

isto é, existe um conjunto formado pela união de no máximo 3 intervalos (nesse exemplo, 2 intervalos) de mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ com relação às variáveis aleatórias contínuas $X_1, X_2, X_3$ e $X_4$.

Devemos salientar que a construção da função $\varphi$ para $n$ variáveis aleatórias baseia-se na existência de um conjunto formado pela união de intervalos que produzirão probabilidade $\frac{1}{2}$ para todas as funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, generalizando a construção da função $\varphi$ para 2 variáveis aleatórias (nesse último caso, para qualquer par de funções de distribuição contínuas $F$ e $G$, existe, necessariamente, um intervalo $(a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$.

Prosseguimos com a seguinte propriedade de funções de distribuição contínuas.

**Proposição 1.2.** *Sejam $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..., $X_n$, $n \geq 2$, variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$, $F_3$, ..., $F_n$, respectivamente. Então, existe um conjunto formado pela união de intervalos $I_1 = \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i]$, $k \leq n-1$, com $a_i < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., k-1$, satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{k} F_l(b_i) - F_l(a_i) = \frac{1}{2}, \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad l = 1, 2, ..., n.$$

**Demonstração**: Faremos esta demonstração por indução. Assim, seja $P_n$ a proposição que dadas $n$ variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$, respectivamente, existe uma união de no máximo $n-1$ intervalos de números reais, digamos $I_1^{(n)}$, tal que $\mathbb{P}_{X_i}(I_1^{(n)}) = \frac{1}{2}$, $\forall\, i = 1, 2, ..., n$, onde $\mathbb{P}_{X_i}$ denota a medida de probabilidade induzida pela variável aleatória $X_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Com efeito, a proposição é válida para $n = 2$, pois corresponde ao resultado da proposição (1.1) (demonstrada detalhadamente em Esteves (1997)) apresentada na seção (1.1).

Para $n = 3$, consideremos $X_1, X_2$ e $X_3$ com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2$ e $F_3$. Do resultado da proposição (1.1), existe um intervalo $I_1^{(2)} = (a, b]$ tal que $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a) = \frac{1}{2}$.

Se $F_3(b) - F_3(a) = \frac{1}{2}$, então basta tomarmos $I_1^{(3)} = (a, b]$. Do contrário, consideremos o argumento que segue.

Consideremos, inicialmente, $F_3(b) - F_3(a) < \frac{1}{2}$. Seja

$$\mathfrak{C}_2 = \left\{ (a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4 : a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2, \quad \sum_{i=1}^{2} F_j(b_i) - F_j(a_i) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2 \right\}$$

É claro que $\mathfrak{C}_2 \neq \emptyset$, pois $\left(a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b\right) \in \mathfrak{C}_2$. Além disso, $\mathfrak{C}_2$ é conexo (a demonstração é omitida aqui).

Considerando a função contínua $T_3 : \mathfrak{C}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_3(a_1, b_1, a_2, b_2) = F_3(b_2) - F_3(a_2) + F_3(b_1) - F_3(a_1),$$

temos que $T_3(\mathfrak{C}_X)$ é conexo e, portanto, um intervalo real. Como

$$T_3\left(a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b\right) < \frac{1}{2}$$

e, consequentemente,

$$T_3(-\infty, a, b, \infty) = 1 - T_3\left(a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b\right) > \frac{1}{2},$$

segue que existe $(a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*) \in \mathfrak{C}_2$ tal que $T_3(a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*) = \frac{1}{2}$ e, desse modo, tomamos $I_1^{(3)} = (a_1^*, b_1^*] \bigcup (a_2^*, b_2^*]$. A verificação é análoga para o caso $F_3(b) - F_3(a) > \frac{1}{2}$.

Suponhamos então que $P_n$ é válida para $n = n_0$ (hipótese de indução).

Assim, dadas $n_0$ variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_{n_0}$ com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_{n_0}$, existe $I_1^{(n_0)}$ da forma

$$\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i], \quad a_i < b_i \leq a_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., k-1, \quad k \leq n_0 - 1.$$

Provemos então o resultado para $n_0+1$ variáveis aleatórias. Sejam $X_1, X_2, ..., X_{n_0+1}$ variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_{n_0+1}$.

Pela hipótese de indução, existe $I_1^{(n_0)}$ da forma

$$\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i], \quad a_i < b_i \leq a_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., k-1, \quad k \leq n_0 - 1.$$

Se $\mathbb{P}_{X_{n_0+1}}(I_1^{(n_0)}) = \frac{1}{2}$, basta tomarmos $I_1^{(n_0+1)} = I_1^{(n_0)}$.

Se $\mathbb{P}_{X_{n_0+1}}(I_1^{(n_0)}) = \sum_{i=1}^{k} F_{X_{n_0+1}}(b_i) - F_{X_{n_0+1}}(a_i) < \frac{1}{2}$, consideremos o conjunto

$$\mathfrak{C}_{n_0} = \{(x_1, y_1, ..., x_{n_0}, y_{n_0}) \in \mathbb{R}^{2n_0} : x_i < y_i \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n_0 - 1,$$

$$\mathbb{P}_{X_j}\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(x_i, y_i]\right) = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, ..., n_0\}.$$

$\mathfrak{C}_{n_0}$ é não vazio, pois

$$Q_1 = (a_1, a_1 + \frac{(b_1 - a_1)}{n_0 - k + 1}, a_1 + \frac{(b_1 - a_1)}{n_0 - k + 1}, a_1 + \frac{2(b_1 - a_1)}{n_0 - k + 1}, ..., a_1 + \frac{(n_0 - k)(b_1 - a_1)}{n_0 - k + 1}, b_1, ..., a_k, b_k)$$

$\in \mathfrak{C}_{n_0}$, por exemplo. Além disso, $\mathfrak{C}_{n_0}$ é conexo.

Definindo a função contínua $T_{n_0+1} : \mathfrak{C}_{n_0} \longrightarrow [0,1]$ por

$$T_{n_0+1}(x_1, y_1, ..., x_{n_0}, y_{n_0}) = \sum_{i=1}^{n_0} F_{X_{n_0+1}}(y_i) - F_{X_{n_0+1}}(x_i),$$

segue que $T_{n_0+1}(\mathfrak{C}_{n_0})$ é um intervalo real. Como existem pontos $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{C}_{n_0}$ tais que

$$T_{n_0+1}(Q_1) = \mathbb{P}_{X_{n_0+1}}(I_1^{(n_0)}) < \frac{1}{2} \quad e \quad T_{n_0+1}(Q_2) = 1 - \mathbb{P}_{X_{n_0+1}}(I_1^{(n_0)}) > \frac{1}{2},$$

segue que existe $Q_0^* = (a_1^*, b_1^*, ..., a_{n_0}^*, b_{n_0}^*) \in \mathfrak{C}_{n_0}$ tal que

$$T_{n_0+1}(Q_0^*) = \mathbb{P}_{X_{n_0+1}}\left(\bigcup_{i=1}^{n_0}(a_i^*, b_i^*]\right) = \frac{1}{2},$$

isto é, existe uma união de no máximo $n_0$ intervalos $I_1^{(n_0+1)} = \bigcup_{i=1}^{n_0}(a_i^*, b_i^*]$, $a_i^* < b_i^* \leq a_{i+1}^*$, $i = 1, 2, ..., n_0 - 1$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n_0} F_j(b_i^*) - F_j(a_i^*) = \frac{1}{2}, \quad \forall \quad j = 1, 2, ..., n_0 + 1,$$

concluindo a prova da proposição (1.2).

A seguir, a proposição (1.2) é ilustrada pelos seguintes exemplos.

**Exemplo 1.9.** *Sejam $X_1$, $X_2$ e $X_3$ variáveis aleatórias com distribuições Beta de parâmetros $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$, respectivamente.*

Primeiramente, observamos que as distribuições de probabilidade de $X_1$, $X_2$ e $X_3$, $P_{X_1}$, $P_{X_2}$ e $P_{X_3}$, respectivamente, satisfazem, para todo intervalo $(a,b] \subseteq (0,1)$,

$$P_{X_1}((a,b]) = P(a < X_1 \leq b) = \int_a^b f(x_1)dx_1 = \int_a^b dx_1 = b - a$$

$$P_{X_2}((a,b]) = P(a < X_2 \leq b) = \int_a^b f(x_2)dx_2 = \int_a^b 2(1-x_2)dx_2 = (1-a)^2 - (1-b)^2$$

$$P_{X_3}((a,b]) = P(a < X_3 \leq b) = \int_a^b f(x_3)dx = \int_a^b 2x_3dx_3 = b^2 - a^2$$

Neste caso, para todo $p \in [0,1]$, existe um intervalo $(a,b] \subseteq (0,1)$ tal que $P_{X_1}((a,b]) = P_{X_2}((a,b]) = P_{X_3}((a,b]) = p$.

Com efeito, se $p \neq 0$, do sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rr} b - a = p & (1) \\ b^2 - a^2 = p & (2) \\ (1-a)^2 - (1-b)^2 = p & (3) \end{array} \right.$$

segue que $b = a + p$ (equação (1)) e, consequentemente, que $2ap + p^2 = p$.

Assim, temos, finalmente, que $a = \dfrac{1-p}{2}$ e $b = \dfrac{1+p}{2}$.

Tais valores de $a$ e $b$ satisfazem também a equação (3). Desse modo, existe $(a, b] \subseteq (0, 1)$ satisfazendo $P_{X_1}((a, b]) = P_{X_2}((a, b]) = P_{X_3}((a, b]) = p$ e, em particular, para $p = \frac{1}{2}$, temos $I_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

Observemos que sempre é possível encontrar um único intervalo $I_1$ satisfazendo $P_{X_1}(I_1) = P_{X_2}(I_1) = ... = P_{X_n}(I_1) = \frac{1}{2}$ quando as distribuições contínuas são simétricas em torno de um mesmo valor (por exemplo: Seja $X_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$, com $I_1 = (-\infty, 0]$ ); do contrário, nem sempre será possível obter tal intervalo. A seguir, exibiremos dois exemplos nos quais não existe $I_1 = (a, b]$ de probabilidade $\frac{1}{2}$ em relação a $X_1, X_2, ..., X_n$, mas apenas a união de intervalos da forma apresentada na proposição (1.2).

**Exemplo 1.10.** *Sejam $X_1$, $X_2$ e $X_3$ variáveis aleatórias com distribuições Uniformes contínuas em $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 3)$, respectivamente.*

Note que não é possível encontrar $(a, b] \subseteq (0, 1)$ tal que $P_{X_1}((a, b]) = P_{X_2}((a, b]) = P_{X_3}((a, b]) = p$. Com efeito, deveríamos ter $a \leq 1 - p$ (pois $F_{X_1}(1 - p) = 1 - p$) e $b \geq 2 + p$ (pois $F_{X_3}(2 + p) = p$). No entanto, teríamos $F_{X_2}(b) - F_{X_2}(a) \geq F_{X_2}(2) - F_{X_2}(1) = 1$.

Como observado acima, nem sempre é possível obter um único intervalo de mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ com relação as três distribuições. Porém, se ao invés de um único intervalo, considerarmos a união de intervalos (ou melhor, de $n - 1$ intervalos) conseguiremos obter o resultado desejado. Com efeito, podemos encontrar $(a, b] \bigcup (c, d]$, com $a < b \leq c < d$, tal que $P_{X_1}((a, b] \bigcup (c, d]) = P_{X_2}((a, b] \bigcup (c, d]) = P_{X_3}((a, b] \bigcup (c, d]) = \frac{1}{2}$. Nesse exemplo, várias uniões de intervalos satisfazem a proposta acima, tais como

$$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\bigcup\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right],\quad \left(\frac{1}{2},1\right]\bigcup\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right] \quad e \quad \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\bigcup\left(\frac{5}{2},3\right].$$

Note que além dessas uniões de intervalos existem várias outras satisfazendo a proposição (1.2). Em situações em que houver mais de uma união de intervalos reais satisfazendo a proposição 1.2, tomaremos sempre a união de intervalos reais formada pelo menor número de intervalos como $I_1$. No caso de dois ou mais conjuntos com mesmo número de intervalos, denotaremos por $I_1$ aquele que possuir o menor ínfimo.

Assim, no exemplo (1.8), temos $I_1 = \left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\bigcup\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Na sequência, obtemos uma união de no máximo 2 intervalos de mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ com relação à $X_1$, $X_2$ e $X_3$ segundo a idéia proposta por De Finetti (1953). De acordo com De Finetti (1953), dadas três variáveis aleatórias $X_1$, $X_2$ e $X_3$, com funções de distribuição contínuas $F_1$, $F_2$ e $F_3$, respectivamente, podemos obter $a$, $b$, $c$ e $d \in \mathbb{R}$, com $a < b \leq c < d$, de modo que

$$F_{X_1}(b) - F_{X_1}(a) = F_{X_1}(d) - F_{X_1}(c) = \frac{1}{4}; \qquad (I)$$

$$F_{X_i}(b) - F_{X_i}(a) + F_{X_i}(d) - F_{X_i}(c) = \frac{1}{2}, \quad i = 2,3 \qquad (II).$$

**Exemplo 1.11.** *Sejam $X_1$, $X_2$ e $X_3$ variáveis aleatórias com distribuições Beta de parâmetros $(1,1)$, $(2,1)$ e $(3,1)$, respectivamente.*

Novamente, sejam $P_{X_1}$, $P_{X_2}$ e $P_{X_3}$ as distribuições de $X_1$, $X_2$ e $X_3$, respectivamente. Logo,

$$P_{X_1}((a,b]) = P(a < X_1 \leq b) = \int_a^b f(x_1)dx_1 = \int_a^b dx_1 = b - a$$

$$P_{X_2}((a,b]) = P(a < X_2 \leq b) = \int_a^b f(x_2)dx_2 = \int_a^b 2x_2 dx_2 = b^2 - a^2$$

$$P_{X_3}((a,b]) = P(a < X_3 \leq b) = \int_a^b f(x_3)dx = \int_a^b 3x_3^2 dx_3 = b^3 - a^3$$

Conforme proposto por De Finetti, devemos encontrar $a$, $b$, $c$ e $d \in \mathbb{R}$, com $a < b \leq c < d$, tais que

$$\begin{cases} b - a = \dfrac{1}{4} & (1) \\ (b-a) + (d-c) = \dfrac{1}{2} & (2) \\ (b^2 - a^2) + (d^2 - c^2) = \dfrac{1}{2} & (3) \\ (b^3 - a^3) + (d^3 - c^3) = \dfrac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

Da equação (1), temos

$$b = a + \frac{1}{4} \qquad (I)$$

e, da equação (2), temos

$$d = c + \frac{1}{4} \qquad (II).$$

Substituindo as expressões para $b$ e $d$ encontradas em (I) e (II) na equação (3), temos

$$\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - a^2 + \left(c + \frac{1}{4}\right) - c^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + \frac{2a}{4} + \frac{1}{16} - a^2 + c^2 + \frac{2c}{4} + \frac{1}{16} - c^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2a}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2c}{4} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} + \frac{1}{8} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4a + 1 + 4c}{8} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad 4a + 1 + 4c = 4 \qquad \Leftrightarrow \quad 4a = 3 - 4c \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{3 - 4c}{4} \qquad (III)$$

Substituindo a expressão de $a$ obtido da equação (III) na equação (I), temos

$$b = \frac{3 - 4c}{4} + \frac{1}{4} \qquad \Leftrightarrow \quad b = \frac{4 - 4c}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 1 - c \qquad (IV)$$

Substituindo as expressões de $a$, $b$ e $d$ encontradas em (II), (III) e (IV) na equação (4), temos

$$(1-c)^2(1-c)-\left(\frac{3-4c}{4}\right)^2\left(\frac{3-4c}{4}\right)+\left(c+\frac{1}{4}\right)^2\left(c+\frac{1}{4}\right)-c^3=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad(1-2c+c^2)(1-c)-\left(\frac{9-24c+16c^2}{16}\right)\left(\frac{3-4c}{4}\right)+\left(c^2+\frac{2c}{4}+\frac{1}{16}\right)\left(c+\frac{1}{4}\right)-c^3=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-3c+3c^2-c^3-\left(\frac{27-108c+144c^2-64c^3}{64}\right)+c^3+\frac{3c^2}{4}+\frac{3c}{16}+\frac{1}{64}-c^3=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{38-72c+96c^2}{64}=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 38-72c+96c^2=32.$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por 6, temos

$$16c^2-12c+1=0,$$

donde

$$c=\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}\quad(ou\quad c'=0,6545\qquad e\qquad c''=0,0955).$$

Como $c$ deve ser maior ou igual a $\frac{1}{4}$ (pois $b-a=\frac{1}{4}$ e $c\geq b$), segue que $c=\frac{3+\sqrt{5}}{8}$. Assim, substituindo o valor de $c$ em (1), (2) e (3), obtemos, finalmente,

$$a = \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \quad b = \frac{5-\sqrt{5}}{8}, \quad c = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \quad e \quad d = \frac{5+\sqrt{5}}{8},$$

(ou $a = 0,0955$, $b = 0,3455$, $c = 0,6545$ e $d = 0,9045$, aproximadamente).

Desse modo, existe a união de 2 intervalos disjuntos, $(a,b]\bigcup(c,d] \subseteq (0,1)$ satisfazendo

$$P_{X_1}((a,b]\bigcup(c,d]) = P_{X_2}((a,b]\bigcup(c,d]) = P_{X_3}((a,b]\bigcup(c,d]) = \frac{1}{2}$$

Assim, teremos que $I_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right]\bigcup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right]$ (também podemos escrever $I_1 = (0,0955; 0,3455]\bigcup(0,6545; 0,9045]$).

Por outro lado, não existe um único intervalo $(a,b] \subseteq (0,1)$ tal que $P_{X_1}((a,b]) = P_{X_2}((a,b]) = P_{X_3}((a,b]) = p$.

Com efeito, $a, b \in (0,1)$ devem satisfar

$$\begin{cases} b - a = p & (1) \\ b^2 - a^2 = p & (2) \\ b^3 - a^3 = p & (3) \end{cases}$$

Da equação (1), obtemos

$$b - a = p \quad \Leftrightarrow \quad b = a + p \quad (I),$$

Substituindo o valor de $b$ na equação (2), obteremos

$$(a+p)^2 - a^2 = p \quad \Leftrightarrow \quad a_2 + 2ap + p_2 - a^2 = p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1-p}{2}, \quad donde \quad b = \frac{1+p}{2} \quad (II).$$

Substituindo as expressões para $a$ e $b$ encontradas em $(II)$ na equação (3), temos

$$b^3 - a^3 = p \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+p}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^3 = p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+p}{2}\right)^2 \left(\frac{1+p}{2}\right) - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \left(\frac{1-p}{2}\right) = p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{8}(1 + 2p + p^2)(1+p) - \frac{1}{8}(1 - 2p + p^2)(1-p) = p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 3p + 3p^2 + p^3 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 = 8p \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6p + 2p^3 = 8p.$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por $2p$, temos

$$3 + p^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 1.$$

Portanto, neste caso, para todo $p \in (0,1)$, não existe um único intervalo $I_1 = (a,b] \subseteq (0,1)$ tal que $P_{X_1}((a,b]) = P_{X_2}((a,b]) = P_{X_3}((a,b]) = p$.

O procedimento adotado para a obtenção da união de intervalos $(a,b] \bigcup (c,d]$ satisfazendo a proposição (1.2), descrito por $(I)$ e $(II)$ na página 25, pode ser generalizado para $n$ variáveis aleatórias. Considerando agora $n$ funções de distribuição contínuas, $F_1, F_2, ..., F_n$, devemos determinar $a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{n-1}, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ com $a_i < b_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., n-2$, tais que

$$F_{X_1}(b_i) - F_{X_1}(a_i) = \frac{1}{2(n-1)}, \quad \forall \quad i = 1, 2, ..., n-1 \quad e$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{X_j}(b_i) - F_{X_j}(a_i) = \frac{1}{2}, \quad \forall \quad j = 2, 3, ..., n.$$

A seguir, apresentaremos uma nova propriedade de funções de distribuição contínuas decorrente da proposição (1.2).

**Proposição 1.3.** *Suponhamos as condições da proposição (1.2) e os conjuntos $I_0$ e $I_1$ dela obtidos. Então:*

(i) *existe um conjunto $I_{01} \subset I_0$ tal que $P(X_1 \in I_{01}) = P(X_2 \in I_{01}) = ... = P(X_n \in I_{01}) = \frac{1}{4}$* e

(ii) *existe um conjunto $I_{11} \subset I_1$ tal que $P(X_1 \in I_{11}) = P(X_2 \in I_{11}) = ... = P(X_n \in I_{11}) = \frac{1}{4}$*

**Demonstração**

(i) Pela proposição (1.2), existe $I_1 = \bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i]$, $k \leq n-1$ tal que $\sum_{i=1}^{k} F_l(b_i) - F_l(a_i) = \frac{1}{2}$, para todo $l = 1, 2, ..., n$. Sendo $I_0$ o complementar de $I_1$, vamos obter $I_{01} \subset I_0$, satisfazendo a condição acima. Para tanto, consideremos $a_1 \in \mathbb{R}$ (o caso $a_1 = -\infty$ é desenvolvido de maneira similar com uma pequena modificação na definição que segue) e definamos, a partir de $F_l$, $l = 1, 2, ..., n$, a seguinte função de distribuição $\overline{F_l}$:

$$\overline{F_l}(x) = \begin{cases} 2F_l(x) & \text{se} \quad x < a_1 \\ 2\left\{F_l(A_1(x)) - \{F_l(b_1) - F_l(a_1)\}\right\} & \text{se} \quad a_1 \leq x < a_1 + a_2 - b_1 \\ 2\left\{F_l(A_2(x)) - \left[\sum_{i=1}^{2}[F_l(b_i) - F_l(a_i)]\right]\right\} & \text{se} \quad a_1 + a_2 - b_1 \leq x < a_3 + \sum_{i=1}^{2}(a_i - b_i) \\ 2\left\{F_l(A_3(x)) - \left[\sum_{i=1}^{3}[F_l(b_i) - F_l(a_i)]\right]\right\} & \text{se} \quad a_3 + \sum_{i=1}^{2}(a_i - b_i) \leq x < a_4 + \sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i) \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ 2\left\{F_l(A_j(x)) - \left[\sum_{i=1}^{j}[F_l(b_i) - F_l(a_i)]\right]\right\} & \text{se} \quad a_j + \sum_{i=1}^{j-1}(a_i - b_i) \leq x < a_{j+1} + \sum_{i=1}^{j}(a_i - b_i), j \leq k-1 \\ 2\left\{F_l(A_k(x)) - \left[\sum_{i=1}^{k}[F_l(b_i) - F_l(a_i)]\right]\right\} & \text{se} \quad x \geq a_k + \sum_{i=1}^{k-1}(a_i - b_i) \end{cases}$$

$$\textit{onde} \quad A_j(x) = x + \sum_{i=1}^{j}[b_i - a_i], \quad j = 1, 2, ..., k.$$

Notemos que a transformação $\overline{F_l}$, com $l = 1, 2, ..., n$, é definida de tal forma que sua representação gráfica é obtida, da representação gráfica de $F_l$, com $l = 1, 2, ..., n$, da seguinte maneira: inicialmente, são suprimidos os pontos $(x, F_l(x))$ correspondentes aos valores de $x$ do intervalo $(a_1, b_1]$ e, em seguida, as curvas remanescentes são unidas (justapostas) através da devida translação (para a esquerda) dos pontos $(x, F_l(x))$ relativos aos valores de $x$ maiores que $b_1$; repete-se o procedimento sucessivamente para os intervalos $(a_2, b_2), ..., (a_{k-1}, b_{k-1})$, até o último intervalo. Desse modo, temos (fazendo-se a adequada normalização), por construção, que $\overline{F_l}$ com $l = 1, 2, ..., n$ é também função de distribuição contínua.

Novamente, pela proposição (1.2), $\exists \bigcup_{i=1}^{k'}(a'_i, b'_i] \subset \mathbb{R}$, $k' \leq n-1$, tal que $\sum_{i=1}^{k'} \overline{F_l}(b'_i) - \overline{F_l}(a'_i) = \frac{1}{2}$, $k' \leq n-1$ e $l = 1, 2, ..., n$. Faremos, na sequência, a conclusão da demonstração para alguns casos (isto é, para algumas possibilidades para os valores de $a'_1, b'_1, ..., a'_{k'}, b'_{k'}$):

• $b'_{k'} < a_1$. Neste caso, $\sum_{i=1}^{k'} \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l(a'_i) = \sum_{i=1}^{k'} \{2F_l(b'_i) - 2F_l(a'_i)\}$, $k' \leq n-1$ e $l = 1, 2, ..., n$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{k'} \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l(a'_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k'} 2F_l(b'_i) - 2F_l(a'_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k'} F_l(b'_i) - F_l(a'_i) = \frac{1}{4}$$

para todo $l = 1, 2, ..., n$.

Pela continuidade das funções $F_l$, $l = 1, 2, ..., n$, podemos escrever ainda que

$$P\left(X_l \in \bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]\right) = \sum_{i=1}^{k'} \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l(a'_i)$$

para todo $l = 1, 2, ..., n$, e, portanto,

$$P\left(X_1 \in \bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]\right) = P\left(X_2 \in \bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]\right) = ... = P\left(X_n \in \bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]\right) = \frac{1}{4}.$$

Como $b'_{k'} < a_1$, é claro que $\bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]) \subset I_0$ e, assim, basta tomarmos $I_{01} = \bigcup_{i=1}^{k'} (a'_i, b'_i]$, $k' \leq n-1$.

• Suponhamos $a'_i < a_i + \sum_{j=1}^{i-1}(a_j - b_j) < b'_i < a'_{i+1}$, $\forall\ i = 1, 2, ..., k'-1$. Assim, temos, por hipótese, que, para todo $l = 1, 2, ..., n$,

$$\sum_{i=1}^{k'} \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l(a'_i) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k'} \left\{ \left[ \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i-1}(a_j - b_j)\right)\right] + \left[\overline{F}_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i-1}(a_j - b_j)\right) - \overline{F}_l(a'_i)\right]\right\} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_l(b_1' + b_1 - a_1) - F_l(a_1 + b_1 - a_1) + F_l(a_1 + b_1 - a_1) - F_l(b_1) + F_l(a_1) - F_l(a_1') +$$

$$+\sum_{i=2}^{k'}\{[F_l\left(b_i' + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - \sum_{j=1}^{i} F_l(b_j) - F_l(a_j) - F_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) + \sum_{j=1}^{i} F_l(b_j) - F_l(a_j)] +$$

$$+[F_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - \sum_{j=1}^{i} F_l(b_j) - F_l(a_j) - F_l\left(a_i' + \sum_{j=1}^{i-1}(b_j - a_j)\right) + \sum_{j=1}^{i-1} F_l(b_j) - F_l(a_j)]\} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_l(b_1' + b_1 - a_1) - F_l(b_1) + F_l(a_1) - F_l(a_1') +$$

$$+\sum_{i=2}^{k'}\{\left[F_l\left(b_i' + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - F_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right)\right] +$$

$$+\left[F_l\left(a_i + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - F_l(b_i) + F_l(a_i) - F_l\left(a_i' + \sum_{j=1}^{i-1}(b_j - a_j)\right)\right]\} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_l(b_1' + b_1 - a_1) - F_l(b_1) + F_l(a_1) - F_l(a_1') +$$

$$+\sum_{i=2}^{k'}\left\{\left[F_l\left(b_i' + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - F_l(b_i)\right] + \left[F_l(a_i) - F_l\left(a_i' + \sum_{j=1}^{i-1}(b_j - a_j)\right)\right]\right\} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k'}\left\{\left[F_l\left(b_i' + \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)\right) - F_l(b_i)\right] + \left[F_l(a_i) - F_l\left(a_i' + \sum_{j=1}^{i-1}(b_j - a_j)\right)\right]\right\} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P_{X_l}\left(\bigcup_{i=1}^{k'}\left(a_i'+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j),a_i\right]\bigcup\left(b_i,b_i'+\sum_{j=1}^{i}(b_j-a_j)\right]\right)=\frac{1}{4}.$$

Logo, para todo $l=1,2,...,n$, temos

$$P_{X_l}\left(\bigcup_{i=1}^{k'}\left(a_i'+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j),a_i\right]\bigcup\left(b_i,b_i'+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j)\right]\right)=\frac{1}{4}.$$

Como essa união está contida em $I_0$, basta tomarmos então

$$I_{01}=\bigcup_{i=1}^{k'}\left(a_i'+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j),a_i\right]\bigcup\left(b_i,b_i'+\sum_{j=1}^{i-1}(b_j-a_j)\right].$$

Em geral, $I_{01}$ será formado pela união de no máximo $2n-2$ intervalos, como no segundo caso considerado acima.

**(ii)** A demonstração da existência do conjunto $I_{11} \subset I_1$ tal que $P(X_1 \in I_{11}) = P(X_2 \in I_{11}) = ... = P(X_n \in I_{11}) = \dfrac{1}{4}$ é análoga à demonstração da parte **(i)** desta proposição. De modo similar, a partir de $F_l$, definamos, se $a_1 \in \mathbb{R}$, a seguinte função de distribuição $\overline{F_l}$ com $l=1,2,...,n$:

$$\overline{F_l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < a_1 \\ 2\{F_l(x) - F_l(a_1)\} & \text{se} \quad a_1 \le x < b_1 \\ \left\{F_l(A_2(x)) + F_l(b_1) - \sum\limits_{i=1}^{2} F_l(a_i)\right\} & \text{se} \quad b_1 \le x < b_1 + b_2 - a_2 \\ 2\left\{F_l(A_3(x)) + \sum\limits_{i=1}^{2} F_l(b_i) - \sum\limits_{i=1}^{3} F_l(a_i)\right\} & \text{se} \quad b_1 + (b_2 - a_2) \le x < b_1 + \sum\limits_{i=2}^{3}(b_i - a_i) \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 2\left\{F_l(A_{j+1}(x)) + \sum\limits_{i=1}^{j} F_l(b_i) - \sum\limits_{i=1}^{j+1} F_l(a_i)\right\} & \text{se} \quad b_1 + \sum\limits_{i=2}^{j}(b_i - a_i) \le x < b_1 + \sum\limits_{i=2}^{j+1}(b_i - a_i), j \le k-1 \\ 1 & \text{se} \quad x \ge b_1 + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(b_i - a_i) \end{cases}$$

$$\textit{onde} \quad A_{j+1}(x) = x + \sum_{i=2}^{j+1}[a_i - b_{i-1}], \quad j = 1, 2, ..., k-1.$$

$\overline{F_l}$, $l = 1, 2, ..., n$ definidas acima são funções de distribuição contínuas, com $\overline{F}_1(a_1) = \overline{F}_2(a_1) = ... = \overline{F}_k(a_1) = 0$ e $\overline{F}_1\left(b_1 + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(b_i - a_i)\right) = \overline{F}_2\left(b_1 + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(b_i - a_i)\right) = ... = \overline{F}_k\left(b_1 + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(b_i - a_i)\right) = 1$. Pela proposição (1.2), $\exists$ $\bigcup\limits_{i=1}^{k'}(a'_i, b'_i]$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{k'} \overline{F}_l(b'_i) - \overline{F}_l(a'_i) = \frac{1}{2}$, com $k' \le n-1$, para todo $l = 1, 2, ..., n$. Além disso, se $a_1 < a'_1 < b'_1 < ... < b'_{k'} < b_1$, temos

$$\sum_{i=1}^{k'} \overline{F_l}(b'_i) - \overline{F_l}(a'_i) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k'} \{2[F_l(b'_i) - F_l(a_i)] - 2[F_l(a'_i) - F_l(a_i)]\} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{k'} F_l(b'_i) - F_l(a'_i) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k'} F_l(b'_i) - F_l(a'_i) = \frac{1}{4}.$$

Pela continuidade das funções $F_l$, $l = 1, 2, ..., n$, podemos escrever ainda que

$$P(X_1 \in \bigcup_{i=1}^{k'}(a_i', b_i']) = P(X_2 \in \bigcup_{i=1}^{k'}(a_i', b_i']) = \ldots = P(X_n \in \bigcup_{i=1}^{k'}(a_i', b_i']) = \frac{1}{4}.$$

Basta então tomarmos $I_{11} = \bigcup_{i=1}^{k'}(a_i', b_i']$, $k \leq n-1$. Em geral, $I_{11}$ também será formado pela união de no máximo $2n-2$ intervalos de números reais. Devemos destacar que nem sempre será possível obter um único intervalo de mesma probabilidade $\frac{1}{4}$ com relação as três distribuições.

Em situações em que houver mais de uma união de intervalos reais satisfazendo a proposição 1.3, tomaremos sempre a união de intervalos reais formada pelo menor número de intervalos como $I_{11}$ $(I_{01})$. No caso de dois ou mais conjuntos com mesmo número de intervalos, denotaremos por $I_{11}$ $(I_{01})$ aquele que possuir o menor ínfimo.

A seguir, apresentaremos um exemplo do resultado da proposição (1.3).

**Exemplo 1.12.** *Sejam $X_1$, $X_2$ e $X_3$ variáveis aleatórias com distribuições Uniformes contínuas em $(0,1)$, $(1,2)$ e $(2,3)$, respectivamente. (Exemplo (1.10))*

Consideremos também o conjunto $I_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \bigcup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, obtido no exemplo (1.10) de mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ com relação as três variáveis aleatórias uniformes $X_1, X_2$ e $X_3$.

Conforme a proposição (1.3), podemos encontrar um conjunto $I_{11} \subset I_1$ tal que $P(X_1 \in I_{11}) = P(X_2 \in I_{11}) = P(X_3 \in I_{11}) = \frac{1}{4}$. Mais precisamente, $I_{11} = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \bigcup \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$. Além disso, $I_{01} = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \bigcup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$.

Assim, o conjunto $I_{11}$ $(I_{01})$ possui probabilidade $\frac{1}{4}$ nas três distribuições Uniformes.

Em geral, dividindo, sucessivamente, os intervalos, teremos, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, uma única divisão (partição) da reta, definida pela regra acima mencionada, em $2^m$ conjuntos disjuntos, a saber $I_{00...0}, I_{00...1}, ..., I_{11...1}$, cada um tendo a fração de $\frac{1}{2^m}$ da distribuição com respeito à $F_1, F_2, ..., F_n$.

Mais precisamente, aplicando o resultado da proposição (1.2) sucessivamente, encontra-se, para todo $m \geq 1$, $2^m$ conjuntos disjuntos, formados por um número finito de intervalos, de probabilidade $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ em relação a todas as variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$, isto é, existem conjuntos disjuntos $I_{i_1 i_2 ... i_m}$, $i_j \in \{0,1\}$, $\forall j = 1, 2, ..., m$, tais que

$$P(X_1 \in I_{i_1 i_2 ... i_m}) = P(X_2 \in I_{i_1 i_2 ... i_m}) = ... = P(X_n \in I_{i_1 i_2 ... i_m}) = \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

$\forall (i_1 i_2 ... i_m) \in \{0,1\}^m$.

Destacamos também que convenções similares às adotadas nas proposições (1.2) e (1.3) são feitas para esta última construção.

A partir da construção de tais conjuntos, podemos, finalmente, definir a função real $\varphi$ citada anteriormente.

**Definição 1.3.** *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por:*

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} i_m \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

onde $i_1, i_2, ...$ são tais que $x \in I_{i_1 i_2 ... i_m}$, $\forall m \geq 1$ (aqui, os conjuntos $I_{i_1 i_2 ... i_m}$ correspondem aos conjuntos construídos acima através das funções de distribuições contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$. Além disso, $\varphi$ é função também das funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$, pois, na definição, figuram índices $\{i_m : m \geq 1\}$ que dependem exclusivamente de $F_1, F_2, ..., F_n$.

Assim, a função $\varphi$ associa a cada número real $x$, o número do intervalo $[0,1]$ que tem uma representação diádica dada por $0, i_1 i_2 ...$, com $x \in I_{i_1 i_2 ... i_m}$, $\forall m \geq 1$ (uma caracterização bem detalhada da representação, (ou expansão), diádica de um número real do intervalo $[0,1]$ é encontrada em Billingsley [2]). A demonstração de que $\varphi$ é de fato uma função real é omitida (é similar a encontrada em Esteves (1997)).

Finalmente, faremos, na sequência, a demonstração que $\varphi(X_1), \varphi(X_2), ..., \varphi(X_n)$ têm distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Calculemos então, sem perda de generalidade, $F_{\varphi(X_1)}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, a função de distribuição de $\varphi(X_1)$ pela definição:

$$F_{\varphi(X_1)}(t) = P(\varphi(X_1) < t) = P(X_1 \in \varphi^{-1}(-\infty, t)) = P_{X_1}(\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\}),$$

onde $P_{X_1}$ é a medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ induzida pela variável aleatória $X_1$ e $\varphi^{-1}(A)$ é a imagem inversa do conjunto $A \in \mathcal{B}$ pela função $\varphi$. Notemos que os conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\}$ são mensuráveis, isto é, que a função real $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ é $\mathcal{B}$ - mensurável, onde $\mathcal{B}$ é a $\sigma$ - álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

A demonstração da mensurabilidade de $\varphi$ é omitida aqui mas está detalhada em Esteves (1997). Assim, temos:

**(1)** $t \leq 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\} = \emptyset$ e, portanto, $P_{X_1}(\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\}) = P_{X_1}(\emptyset) = 0$;

**(2)** $t > 1 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\} = \mathbb{R}$. Logo, $P_{X_1}(\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\}) = P_{X_1}(\mathbb{R}) = 1$

**(3)** $0 < t \leq 1$, vale que:

$$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < t\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad onde \quad A_m = I_{d_1(t)\ldots d_{m-1}(t),1-d_m(t)}.$$

Afirmamos que $\{A_m : m \geq 1\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Para verificarmos tal afirmação, consideremos, sem perda de generalidade, $i < j$. Se $A_i = \emptyset$ ou $A_j = \emptyset$, obviamente, teremos $A_i \bigcap A_j = \emptyset$. Tomemos então índices $i, j \geq 2$ tais que $A_i \neq \emptyset$ e $A_j \neq \emptyset$ (tais índices existem, pois estamos considerando uma representação diádica infinita para $t$). Neste caso:

$$A_i = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t),1-d_i(t)} \quad e \quad A_j = I_{d_1(t)\ldots d_{j-1}(t),1-d_j(t)} = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t)d_i(t)\ldots,1-d_j(t)}.$$

Mas, $I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t)d_i(t)\ldots,1-d_j(t)} \subset I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t)d_i(t)}$ e $I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t)d_i(t)} \bigcap A_i = \emptyset$, pois $A_i = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t),1-d_i(t)}$. Assim, vale que $A_i \bigcap A_j \subseteq A_i \bigcap I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t)d_i(t)} = \emptyset$ e, consequentemente, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i < j$. Logo, os conjuntos $A_1, A_2, \ldots.$ são disjuntos dois a dois.

Deste modo,

$$F_{\varphi(X_1)}(t) = P_{X_1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{X_1}(A_m),$$

pela $\sigma-$ aditividade de $P_{X_1}$.

Determinemos, então, $P_{X_1}(A_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Se $d_m(t) = 0$, temos $A_m = \emptyset$ e, portanto, $P_{X_1}(A_m) = 0$. Caso $d_m(t) = 1$, temos $P_{X_1}(A_m) = P_{X_1}(I_{d_1(t)\ldots d_{m-1}(t),1-d_m(t)}) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$, pois, por construção, o conjunto $I_{d_1(t)\ldots d_{m-1}(t),1-d_m(t)}$ contém $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ da distribuição de $X_1$. Assim:

$$P_{X_1}(A_m) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; d_m(t) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^m & \text{se } \; d_m(t) = 1 \end{cases},$$

ou ainda,

$$P_{X_1}(A_m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m d_m(t)$$

Substituindo na expressão da função de distribuição de $\varphi(X_1)$, temos:

$$F_{\varphi(X_1)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m(t)\left(\frac{1}{2}\right)^m = t,$$

pois, como $0, d_1(t)d_2(t)\ldots$ corresponde a uma expansão diática do número real $t$, vale que $\sum_{m=1}^{\infty} d_m(t)\left(\frac{1}{2}\right)^m = t$. Logo, de **(1)**, **(2)** e **(3)**, temos que

$$F_{\varphi(X_1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; t \leq 0 \\ t & \text{se } \; 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{se } \; t > 1 \end{cases},$$

que é a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Portanto, $\varphi(X_1) \sim U(0, 1)$. A demonstração é análoga para $\varphi(X_2), \varphi(X_3), ..., \varphi(X_n)$, concluindo a prova do Teorema (1.3).

Devemos destacar, inicalmente, que nas hipóteses do teorema (1.3) nada é mencionado sobre os espaços de probabilidade onde $X_1, X_2, ..., X_n$ são definidas, sendo feita referência apenas à continuidade das suas funções de distribuição $F_1, F_2, ..., F_n$ (respectivamente). Deste modo, o resultado do teorema (1.3) é válido para variáveis aleatórias definidas em espaços de probabilidade distintos. Notemos também que $X_1, X_2, ..., X_n$ são supostas serem variáveis aleatórias contínuas quaisquer, absolutamente contínuas (isto é, que admitem funções densidade de probabilidade) ou não. $X_1, X_2, ..., X_n$ podem ainda possuir ou não momentos bem definidos.

Em segundo lugar, ressaltamos que não é única a transformação real $\varphi$ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X_1), \varphi(X_2), ..., \varphi(X_n)$ sejam uniformemente distribuídas em $(0, 1)$. Mais precisamente, existem infinitas funções nestas condições (em geral, podemos considerar várias indexações para os conjuntos obtidos a partir das proposições (1.2) e (1.3) (e extensões) diferentes daquela que adotamos neste texto).

Por fim, vale mencionar que o resultado do teorema (1.3) é também válido no caso em que $X_1, X_2, ..., X_n$ são vetores aleatórios de mesma dimensão $m \in \mathbb{N}$. Assim, se $X_1 = (X_{1_1}, X_{1_2}, ..., X_{1_m})$, $X_2 = (X_{2_1}, X_{2_2}, ..., X_{2_m})$, ..., $X_n = (X_{n_1}, X_{n_2}, ..., X_{n_m})$ são vetores aleatórios com funções de distribuição conjunta contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$, respectivamente, e $H$ uma função de distribuição unidimensional qualquer, então existe uma função real $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ possuam mesma distribuição $H$.

Há ainda várias propriedades da função $\varphi$ a serem estudadas, como, por exemplo, a existência (ou não) de condições sobre as funções de distribuição $F_1, F_2, ..., F_n$ sob as quais $\varphi$ seja uma função contínua (de modo geral, $\varphi$ não é uma função contínua).

No entanto, não faremos aqui um estudo mais minucioso da função $\varphi$, uma vez que esta análise não corresponde ao objetivo central do presente trabalho.

Um outro aspecto relevante sobre a construção desenvolvida aqui é discutida por De Finetti quando as variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ estão relacionadas com uma única quantidade de interesse, ao invés de $n$ quantidades de interesse distintas, sendo $F_1, F_2, ..., F_n$ as representações númericas de incerteza (ou opiniões) de $n$ indivíduos acerca desta única quantidade de interesse.

Dentro deste contexto, a construção da função real $\varphi$ (e das variáveis aleatórias $\varphi(X_1), \varphi(X_2), ..., \varphi(X_n)$) serve para nos dizer o seguinte fato: é possível construirmos uma união finita de intervalos reais, a qual De Finetti denominou **Campos de Coincidência de Opiniões**, onde as opiniões de todos os indivíduos (representadas por $F_1, F_2, ..., F_n$) coincidem com relação à quantidade de interesse em questão a um certo "nível de unanimidade", ou seja, teremos um grupo (finito) de indivíduos compartilhando a mesma opinião sobre certos atributos da quantidade de interesse. Segundo De Finetti, esse fato acena uma possibilidade de tentar caracterizar a "opinião conjunta"de um grupo de indivíduos.

Imagine uma situação em que um grupo de indivíduos deve tomar uma decisão coletivamente (problema de decisão em grupo) e que essa decisão é influenciada por uma certa quantidade desconhecida para a qual as opiniões dos membros do grupo são expressas através de funções de distribuição contínuas. A construção de campos de coincidência de opiniões sugere a possibilidade do desenvolvimento de um método alternativo para tentar expressar qual seria a opinião deste grupo de indivíduos sobre a quantidade de interesse em questão.

Neste caso, podemos destacar que os campos de coincidência de opiniões podem ser vistos como uma atribuição genuína de probabilidade em grupo, diferentemente do que ocorre em processos usuais de mistura de probabilidades, que apresentam como resultados distribuições de probabilidade que não correspondem à opinião de indivíduo algum, sendo, portanto, desprovidas de qualquer interpretação dentro da visão subjetivista (excetuando-se as situações bem particulares de ditaduras ou unanimidade),opondo-se à visão de De Finetti.

Outro aspecto importante neste método é a preservação das opiniões individuais quando da construção dos campos de coincidência de opiniões, conferindo-lhe um caráter objetivo no sentido de que, preservando as opiniões individuais, parece não haver nenhum motivo especial (além da difícil determinação de tais conjuntos) para que os indivíduos do grupo rejeitem os campos de coincidência de opiniões como uma expressão de consenso (afinal, nenhum indivíduo precisa abrir mão de suas convicções a respeito da quantidade de interesse na formação dos campos de coincidência de opiniões).

Por outro lado, qualquer método de decisão coletiva baseado nos campos de coincidência de opiniões apresentaria algumas limitações. Em primeiro lugar, podemos notar que um campo de coincidênicia de opiniões não determina uma distribuição de probabilidade propriamente dita, pois consiste apenas na união finita de intervalos reais e suas respectivas taxas de incerteza segundo os indivíduos do grupo, fazendo com que a teoria bayesiana de tomada de decisão, que é baseada na maximização da função de utilidade esperada, não possa ser aplicada a nenhum procedimento de tomada de decisão que tenha por base os campos de coincidência de opiniões como descrição da "opinião" do grupo (em que pese que a solução bayesiana de maximização de utilidade esperada tenha sido desenvolvida para a versão unipessoal do problema de decisão).

Outro ponto negativo deste método é a ausência de uma sustentação axiomática, em termos de coerência, que justifique a adoção dos campos de coincidência de opiniões como uma representação da "opinião" de um grupo de indivíduos. Porém, este inconveniente, que decorre da inexistência de um conceito de coerência (racionalidade) coletiva, está presente em todos os demais processos de agrupamentos de opiniões . Deve-se destacar que vários trabalhos foram desenvolvidos visando estabelecer tal conceito de coerência conjunta e, consequentemente, uma forma numérica de traduzir a incerteza de um grupo de indivíduos.

Portanto, como não existe ainda nenhuma teoria normativa para tomada de decisão coletiva e sim várias tentativas de caracterização de coerência conjunta, acreditamos que a existência dos campos de coincidência de opiniões possa contribuir, em algum sentido, para a discussão e a reflexão sobre este assunto que permanece em aberto.

## 1.3 Campos de Coincidência de Opiniões em geral

Nesta seção, apresentaremos uma definição de "Campo de Coincidência de Opiniões" para $m$ vetores aleatórios quaisquer $X_1, X_2, ..., X_m$. Em seguida, exibiremos uma caracterização dos Campos de Coincidências de Opiniões e verificaremos que essa classe de subconjuntos não possui todas as propriedades para que seja uma $\sigma$-álgebra.

**Definição 1.4.** *Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ vetores aleatórios em $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ com medidas de probabilidade $P_{X_1}, P_{X_2}, ..., P_{X_m}$, respectivamente. Dizemos que $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ é um Campo de Coincidência das Opiniões $P_{X_1}, P_{X_2}, ..., P_{X_m}$ se $P_{X_1}(A) = P_{X_2}(A) = ... = P_{X_m}(A)$.*

A seguir, relembramos a definição de um d-sistema (Williams [13]).

**Definição 1.5.** *Seja $\Omega \neq \emptyset$. Uma classe $\mathfrak{D}$ de subconjuntos de $\Omega$ é chamado um d-sistema (Williams [13]))se:*

(a) $\Omega \in \mathfrak{D}$

(b) $A, B \in \mathfrak{D}$, com $A \subseteq B \Rightarrow B \backslash A \in \mathfrak{D}$

(c) $A_n \in \mathfrak{D}$ e $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathfrak{D}$

Verificamos, a seguir, que, em geral, os campos de coincidência de opinião para as variáveis $X_1, X_2, ..., X_m$ é um d-sistema.

<u>**Resultado**</u>: Sejam $X_1, X_2, ..., X_m$ vetores aleatórios em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ com medidas de probabilidade $P_{X_1}, P_{X_2}, ..., P_{X_m}$, respectivamente. Seja

$$\mathfrak{C} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : P_{X_1}(E) = P_{X_2}(E) = ... = P_{X_m}(E)\}.$$

Então, $\mathfrak{C}$ é um d-sistema.

**Demonstração**

**(a)** $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{C}$, pois como $X_1, X_2, ..., X_m$ são vetores aleatórios em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $P_{X_1}(\mathbb{R}^n) = P_{X_2}(\mathbb{R}^n) = ... = P_{X_m}(\mathbb{R}^n) = 1$.

**(b)** Sejam $A, B \in \mathfrak{C}$ com $A \subseteq B$. Assim, $P_{X_1}(A) = P_{X_2}(A) = ... = P_{X_m}(A)$ e $P_{X_1}(B) = P_{X_2}(B) = ... = P_{X_m}(B)$. Logo, para $i = 2, 3, ..., m$,

$$P_{X_i}(B \setminus A) = P_{X_i}(B \bigcap A^c) = P_{X_i}(B) - P_{X_i}(B \bigcap A) = P_{X_i}(B) - P_{X_i}(A),$$

pois $A \subseteq B$. Assim,

$$P_{X_i}(B \setminus A) = P_{X_i}(B) - P_{X_i}(A) = P_{X_1}(B) - P_{X_1}(A) = P_{X_1}(B) - P_{X_1}(B \bigcap A^c) = P_{X_1}(B \setminus A).$$

Logo, $\forall i = 2, 3, ..., m$, $P_{X_i}(B \setminus A) = P_{X_1}(B \setminus A)$ e, portanto, $B \setminus A \in \mathfrak{C}$.

**(c)** $A_k \in \mathfrak{C}$, $A_k \uparrow A$. Assim, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{X_1}(A_k) = P_{X_2}(A_k) = ... = P_{X_m}(A_k)$. Como a sequência $A_k$ é monótona, temos, pela continuidade de probabilidade, que:

$$P_{X_i}(A) = P_{X_i}(\lim_{k \to \infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} P_{X_i}(A_k) = \lim_{k \to \infty} P_{X_1}(A_k) = P_{X_1}(\lim_{k \to \infty} A_k) = P_{X_1}(A),$$

$\forall i = 2, 3, ..., m$. Logo, $P_{X_1}(A) = P_{X_2}(A) = ... = P_{X_m}(A) = \lim_{k \to \infty} P_{X_1}(A_k)$ e, portanto, $A \in \mathfrak{C}$.

De $(a), (b)$ e $(c)$, temos que $\mathfrak{C}$ é um d - sistema.

Destacamos ainda que $\mathfrak{C}$ é fechada para complemento, isto é, $A \in \mathfrak{C} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{C}$ (essa propriedade segue diretamente de $(a)$ e $(b)$). Além disso, $\mathfrak{C}$ é fechada para uniões disjuntas. Com efeito, seja $A_k \in \mathfrak{C}$, $k \in \mathbb{N}$, com $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Então, $P_{X_i}(A_k) = P_{X_1}(A_k)$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, $i = 2, 3, ..., m$. Consequentemente, $P_{X_i}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_{X_i}(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_{X_1}(A_k) = P_{X_1}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Assim, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{C}$.

Contudo, $\mathfrak{C}$ não é fechada para intersecções e uniões finitas em geral e, portanto, $\mathfrak{C}$ não é $\sigma$-álgebra ou $\pi$-sistema (Williams [13]).

A seguir, apresentamos um exemplo para verificar que, em geral, $\mathfrak{C}$ não é uma $\sigma$ - álgebra.

**Exemplo 1.13.** *Sejam $X_1$ e $X_2$ variáveis aleatórias com distribuições uniformes nos intervalos $(0,1)$ e $(0,2)$, respectivamente.*

Seja $\mathfrak{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : P_{X_1}(A) = P_{X_2}(A)\}$. Assim,

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \in \mathfrak{C}, \quad pois \quad P_{X_1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx_1 = \frac{1}{2} \quad e$$

$$P_{X_2}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} dx_2 = \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \bigcup \left(\frac{3}{2}, 2\right] \in \mathfrak{C}, \quad pois$$

$$P_{X_1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) + P_{X_1}\left(\left(\frac{3}{2}, 2\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx_1 + \int_{\frac{3}{2}}^{2} dx_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \quad e$$

$$P_{X_2}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) + P_{X_2}\left(\left(\frac{3}{2}, 2\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} dx_2 + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{2} dx_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Mas,

$$\left[\frac{1}{2},1\right] = \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \bigcap \left(\left[\frac{1}{2},1\right] \bigcup \left(\frac{3}{2},2\right]\right) \notin \mathfrak{C},$$

$$pois \quad P_{X_1}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \frac{1}{2} \quad e \quad P_{X_2}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \frac{1}{4}.$$

Do fato que o conjunto dos Campos de Coincidência de Opiniões dos vetores $X_1, X_2, ..., X_m$ não é, em geral, uma $\sigma-$álgebra, algumas questões podem ser levantadas. Primeiro, a restrição de $P_{X_i}$, $i = 1, 2, ..., m$, ao conjunto $\mathfrak{C}$ dos Campos de Coincidência de Opiniões constituiria uma função de conjuntos com propriedades interessantes? Ou, de um modo mais geral, existiriam funções de conjuntos definidas em um $d-$sistema que poderiam ser consideradas, eventualmente, como expressões númericas da "opinião" de um grupo de indivíduos com opiniões individuais quantificadas por $P_{X_1}, P_{X_2}, ..., P_{X_m}$? Em caso afirmativo, quais mecanismos de atualização de incerteza usualmente considerados na literatura (condicionamento bayesiano, supercondicionamento, regra de Jeffreys, entre outros) poderiam ser aplicados nesse caso? Tal(is) mecanismo(s) permitiria(m) também a atualização dos Campos de Coincidência de Opiniões a partir de dados amostrais?

## 1.4 Conclusão

Neste trabalho, verificamos, de maneira bem detalhada, que, dadas $n$ variáveis aleatórias reais $X_1, X_2, ..., X_n$ com funções de distribuição contínuas $F_1, F_2, ..., F_n$, respectivamente, sempre é possível obter uma função real $\phi$ tal que as transformadas $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$ (também variáveis aleatórias) possuam, todas, a mesma função de distribuição, digamos $H$.

Destacamos ainda que este resultado possui uma interpretação interessante dentro do contexto da teoria da decisão coletiva, quando $n$ pessoas possuem opiniões distintas (traduzidas numericamente por $F_1, F_2, ..., F_n$) a respeito de uma quantidade de interesse desconhecida que influencia uma tomada de decisão desse grupo. Neste caso, De Finetti apontou a possibilidade de se obter, no processo de construção da função $\phi$ (e das variáveis $\phi(X_1), \phi(X_2), ..., \phi(X_n)$), uma união finita de intervalos reais, a qual denominou **Campo de Coincidência de Opiniões**, onde as opiniões de todos os indivíduos coincidem com relação à quantidade de interesse em questão.

Segundo De Finetti, esta constatação acena uma possibilidade de tentar caracterizar a "opinião"de um grupo de pessoas a respeito de uma certa quantidade de interesse, uma vez que um Campo de Coincidência de Opiniões corresponde a uma atribuição genuína (no sentido que as opiniões individuais são preservadas) de probabilidade, diferentemente dos processos usuais de mistura de probabilidades.

Por fim, levantamos algumas questões sobre a natureza dos Campos de Coincidência de Opiniões, pois há vários pontos ainda obscuros na caracterização de tais campos. A busca de respostas a estas indagações pode, sem dúvida, nortear futuros trabalhos nesta área e que com certeza seriam de grande interesse para o problema de tomada de decisão em grupo.

# Referências Bibliográficas

[1] Arrow, K. J. (1951).

*Social choice and individual values.*

Segunda edição, Yale University Press.

[2] Billingsley, P. (1986).

*Probability and Measure.*

Segunda edição, John Wiley Sons.

[3] De Finetti, B. (1953).

*Transformazioni di Numeri Aleatori atte a far coincidere distribuzioni diverse.*

Giornale Dell'Istituto Italiano Degli Attuari, XVI, págs. 51 à 57.

[4] Esteves, L. G. (1997).

*Coincidência de distribuições através de uma transformação de De Finetti.*

Dissertação Mestrado IME-USP/MAE - São Paulo.

[5] Fernadez, P. J. (1976).

*Medida e Integração.*

Rio de Janeiro, IMPA - CNPq (Projeto Euclides).

[6] Genest, C. e Zidek, J. V. (1986).

*Combining Probability Distributions: a critique and an annotated bibliografhy.*

Statistical Science, Vol. 1, N. 1, págs. 114 à 118.

[7] Lima, E. L. (1981).

*Curso de Análise, Volumes 1 e 2 .*

Rio de Janeiro, IMPA - CNPq (Projeto Euclides).

[8] Lima, E. L. (1976).

*Elementos de Topologia Geral.*

Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.

[9] Marsden, J. E. (1974).

*Elementary classical analysis.*

W. H. Freeman and Company.

[10] Ross, S. M. (1972).

*Introduction to probability models.*

Macmillan Publishing Company.

[11] Roussas, G. C. (1973).

*A first course in Mathematical Statistics.*

Addison - Wesley Publishing Company.

[12] Thomasian, A. J. (1969).

*The structure of probability theory with applications.*

McGraw - Hill.

[13] Williams, D. (1994).

*Probability with martingales.*

McGraw - Hill.