

**Modelo auto-regressivo
de duração condicional com
coeficientes variando no tempo**

Adriana Bruscato

TESE A SER APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA

OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística

Orientadora: **Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Tolo**i

Co-orientador: **Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin**

-São Paulo, novembro de 2006-

**Modelo auto-regressivo
de duração condicional com
coeficientes variando no tempo**

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Adriana Bruscato
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 06 de novembro de 2006.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Toloí (Orientadora) - IME - USP
- Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (Co-orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Cristiano Fernandes - PUC - RJ
- Prof. Dr. Pedro Valls - IBMEC SÃO PAULO
- Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes - UFRS

*A Deus, pela oportunidade de concluir
mais uma etapa de minha vida,
graças à Tua força e sabedoria infinita.*

*A meu amado marido Maurício,
a meus pais, Nelson e Luzia,
minhas irmãs Aninha, Alessandra e Daniela,
minha avó Geny
por todo o amor, compreensão,
apoio e estímulo.
À memória de meu avô
Nelson, por ter acreditado
sempre em mim.*

Agradecimentos

Gostaria de registrar meu agradecimento às pessoas que, de uma forma ou outra, participaram do processo de elaboração deste trabalho. Em especial, agradeço à Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Toloí, que orientou este trabalho e me dispensou enorme dedicação e atenção, estando sempre disponível nos momentos em que precisei. Ao Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin pela sugestão do tema e dedicação referente à orientação da tese. Pelo tempo que investiram e pela confiança. Aos Profs. Drs. Cristiano Fernandes, Pedro Valls e Sílvia Regina Costa Lopes pelas sugestões e críticas apresentadas. Também agradeço aos demais professores do IME-USP, que foram responsáveis pela minha formação.

Além disso, foi de enorme valia o auxílio fornecido por Chang, Lane e Maria Sílvia, pela força e amizade. Ao meu marido, Maurício, e a sua família, especialmente Oscar, Vera e Cris, aos meus amigos Sérgio, Célia, Giz, Marcus, Márcia, Elisa pela amizade, paciência, apoio e imensa solidariedade tão fundamentais neste período. Aos demais colegas e amigos que se fizeram presentes sob o aspecto da amizade, do incentivo e do apoio, o meu muito obrigado.

Finalmente à minha família pela força e amor sempre presentes, por ter acreditado em minha capacidade de concluir este trabalho e por ter participado dos meus dias mais difíceis durante esse período. Obrigada por saber que posso contar com vocês.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a generalização do modelo autorregressivo de duração condicional (ACD) para os tempos entre as negociações, criado com base nos modelos GARCH para a volatilidade, usando a decomposição em ondaletas dos parâmetros do modelo usual. O uso de ondaletas permite que os parâmetros do modelo ACD variem ao longo do tempo, permitindo a modelagem direta de séries não-estacionárias, ou seja, não havendo necessidade de transformações nos dados, como por exemplo, retirada da sazonalidade intra-diária.

A estimação do modelo ACD com parâmetros variando no tempo foi feita pelo método BHHH, baseando-se na verossimilhança supondo erros com distribuição exponencial padrão. Para estudo das propriedades assintóticas dos estimadores, usamos simulações via Bootstrap e Metropolis-Hastings.

Apresentamos os resultados da estimação do modelo ACD com parâmetros variando no tempo para processos estacionários e não-estacionários simulados via Monte Carlo e para processos reais: durações das ações da TELEMAR e IBM. A análise de resíduos e o cálculo de medidas de qualidade do ajuste indicaram que o modelo ACD com parâmetros variando no tempo conseguiu capturar a dependência existente entre as durações, bem como modelar a sazonalidade intra-diária e a volatilidade das séries avaliadas.

Abstract

The main goal of this work is to generalize the autoregressive conditional duration model (ACD) applied to times between trades, proposed by Engle e Russell (1998) and based on GARCH model for volatility, using wavelet decomposition of the ACD model parameters. The use of wavelets allows that parameters from ACD model vary through time (time-varying) and make possible the modelling of nonstationary processes without preliminary data transformations, like intraday seasonality extraction.

Maximum likelihood estimation of time-varying ACD model with exponential errors was performed using BHHH method. Bootstrap and Metropolis-Hastings simulation methods were used to assess the properties of estimators.

We present time-varying ACD model estimation results for Monte Carlo simulated stationary and nonstationary processes and also for real transactions data: IBM and TELEMAR stocks. Diagnostic analysis and goodness of fit measures suggest that time-varying ACD model simultaneously modelled the dependence between durations, intraday seasonality and volatility.

Conteúdo

1	Introdução e Objetivos	1
2	Preliminares	4
2.1	Processos Não-Estacionários e Localmente Estacionários	4
2.2	Ondaletas	8
2.3	Dados em Alta Frequência	13
3	Modelo autoregressivo de duração condicional	16
3.1	Definição	16
3.2	Estimação do Modelo de Duração Condicional	22
3.2.1	Estimação Semi-Paramétrica	22
3.2.2	Estimação Paramétrica	23
3.3	Propriedades do Estimador de Quase Verossimilhança para o Modelo ACD	26
4	Modelo Auto-Regressivo de Duração Condicional com Coeficientes Variando no Tempo	29
4.1	Definição	30
4.2	Estimação do Modelo de Duração Condicional com Coeficientes Variando no Tempo	31
4.3	Propriedades do Estimador de Quase Verossimilhança para o Modelo ACD com Coeficientes Variando no Tempo	34
4.3.1	Método Bootstrap Paramétrico	34

4.3.2	Método de Metropolis-Hastings	36
5	Simulações	41
5.1	Método de Monte Carlo	41
5.2	Séries Simuladas e Resultados	42
5.3	Conclusões Gerais	52
6	Aplicação a dados reais	72
6.1	TELEMAR	72
6.1.1	Análise Descritiva dos Dados da TELEMAR	72
6.1.2	Ajuste do Modelo ACD para os Dados da TELEMAR	77
6.2	IBM	101
6.2.1	Análise Descritiva dos Dados da IBM	101
6.2.2	Ajuste do Modelo ACD para os Dados da IBM	104
6.3	Conclusões Gerais	126
6.4	Sugestões para Trabalhos Futuros	127

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

O rápido desenvolvimento da computação e da capacidade de armazenamento de dados torna possível a coleta e análise de dados em alta frequência. Uma das variáveis econômicas de principal interesse é o volume de compra e venda de um determinado ativo num intervalo de tempo, portanto, pode-se direcionar o estudo naturalmente para o tempo entre as transações financeiras. É fácil perceber que em períodos de alta liquidez, o tempo entre as transações diminui e em períodos de baixa liquidez, o tempo entre as transações torna-se maior, ou seja, tempos maiores entre negociações indicam menor atividade do mercado. O comportamento dos tempos entre as negociações contém informações sobre a atividade *intraday* do mercado, sendo importante fonte de informação da micro-estrutura do mercado.

Artigos que tratam da micro-estrutura do mercado como O'Hara (1995), Hasbrouck (1988), Easley et al. (1996) enfatizam que o tempo entre eventos tais como negociações, mudanças de preço, ordens de compra ou venda têm importante papel no estudo do processamento de informação pública e privada nos mercados financeiros. O acesso a estes dados de transações financeiras abre novas perspectivas para a análise empírica da micro-estrutura dos processos de negociação.

As transações financeiras ocorrem em intervalos de tempo irregulares, enquanto as técnicas comumente utilizadas nos modelos de séries temporais são baseadas em inter-

valos de tempo igualmente espaçados. A transformação de dados irregulares em igualmente espaçados torna a modelagem mais complicada, pois a decisão da frequência de amostragem é subjetiva. Por exemplo, para consumo de bens duráveis, um intervalo natural de tempo pode ser mês ou ano. Em outro extremo, as negociações no mercado ocorrem em poucos segundos, sendo necessários intervalos de tempo muito menores. Se um intervalo pequeno for escolhido, haverá muitos tempos sem informação nova e heteroscedasticidade será introduzida de certa forma no modelo. Por outro lado, se a frequência de amostragem escolhida for muito grande, perderemos informações sobre a micro-estrutura do mercado.

A mudança na taxa de ocorrência dos eventos pode variar ao longo do dia, do mês ou do ano, dificultando a escolha de uma frequência de amostragem ótima. Para transações comerciais, a atividade é maior próximo à abertura e fechamento do mercado do que no meio do dia, ainda sofrendo influência de importantes bolsas como as de Nova Iorque, Londres e Japão.

Usando conceitos similares aos do modelo ARCH para a volatilidade, Engle e Russel (1997) desenvolveram o modelo de duração condicional para descrever a evolução do tempo entre as negociações de ações. O modelo de duração condicional foi introduzido na literatura para estudar dados que ocorrem irregularmente no tempo, tratando o tempo entre as ocorrências dos eventos como um processo estocástico e propondo uma nova classe de processos pontuais com taxas de ocorrência dependentes. As propriedades dos estimadores de quase-verossimilhança podem ser obtidas como corolário dos resultados para modelos ARCH.

No modelo de duração condicional os tempos de ocorrência das negociações, também chamados durações, são tratados como variáveis aleatórias chamadas *marks*, ocorrências ou eventos. A intensidade condicional é parametrizada em termos de eventos passados de maneira que seja útil para processos de negociação. O modelo recebe o nome de auto-regressivo de duração condicional (ACD) justamente por ser baseado nas durações e durações esperadas passadas entre eventos.

A estacionariedade é suposição essencial para a utilização dos modelos ACD convencionais, sendo útil para demonstração das propriedades dos estimadores e para cálculo dos momentos da distribuição dos tempos entre as negociações. A maioria dos processos reais não é estacionária, apresentando tendências, sazonalidades ou mudanças na variabilidade ao longo do tempo.

A idéia deste trabalho é generalizar o modelo ACD, permitindo que sua estimação possa ser feita sem a suposição de estacionariedade. Desta forma, os tempos entre as negociações, que são processos naturalmente não-estacionários, podem ser modelados sem a utilização de transformações.

A generalização do modelo ACD pode ser feita utilizando ondaletas, substituindo cada um dos parâmetros do modelo ACD convencional, fixos no tempo, por uma decomposição em ondaletas, permitindo que os coeficientes do modelo ACD variem no tempo. Uma vez que os parâmetros variam no tempo, não há necessidade de que os processos sejam estacionários para a modelagem, pois os coeficientes devem ser capazes de capturar as características do processo ao longo do tempo, tais como sazonalidade intra-diárias ou alterações na volatilidade ao longo do tempo.

O uso do modelo auto-regressivo de duração condicional permitiu a modelagem conjunta da sazonalidade intra-diária e da estrutura de dependência do processo de duração não-estacionário. Utilizamos os métodos de Bootstrap paramétrico e Metropolis-Hastings para estudo das propriedades dos estimadores de máxima-verossimilhança do modelo auto-regressivo de duração condicional com coeficientes variando no tempo.

No Capítulo 2 apresentamos noções de alguns conceitos utilizados na tese, como processos localmente estacionários, ondaletas e dados em alta frequência. O modelo auto-regressivo de duração condicional usual e suas propriedades são apresentados no Capítulo 3. A generalização do modelo auto-regressivo de duração condicional utilizando a decomposição em ondaletas está no Capítulo 4. Nos Capítulos 5 e 6 temos aplicações do modelo auto-regressivo de duração condicional com coeficientes variando no tempo para algumas séries temporais simuladas e para dados reais, respectivamente.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Processos Não-Estacionários e Localmente Estacionários

Na maioria das aplicações, a própria característica física dos sinais aleatórios leva à não-estacionariedade como em acústica, geofísica, engenharia e outras áreas. Uma análise adequada a tais situações envolve análise espectral de processos não-estacionários, que será apresentada a seguir.

Iniciaremos dando alguns exemplos de processos não-estacionários:

1. $X(t) = \mu(t) + Z(t)$, em que $\mu(t)$ é um polinômio de ordem finita em t que descreve o aumento ou decaimento do processo e $Z(t)$ é um ruído estacionário.
2. $\phi(B)X(t) = \theta(B)\epsilon(t)$, com $\phi(B)$ tendo raízes sobre o círculo unitário.

Este modelo é conhecido como modelo ARMA não-estacionário homogêneo. As propriedades de segunda ordem desse processo variam no tempo, mas a evolução completa dele é descrita por um número finito de parâmetros.

3. O processo uniformemente modulado é construído da seguinte forma

$$X(t) = c(t)X_0(t),$$

em que $c(t)$ é uma função moduladora (positiva) e $X_0(t)$ é um processo estacionário. Tal processo é não-estacionário uma vez que

$$\gamma_x(t_1, t_2) = c(t_1)c(t_2)\gamma_{x_0}(t_2 - t_1).$$

Fisicamente, se a evolução temporal da função moduladora $c(t)$ for muito pequena quando comparada com o suporte essencial da função de autocovariância de $X_0(t)$, temos

$$c(t_1)c(t_2) \sim c^2\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

e tais processos modulados podem ser considerados localmente estacionários. Este tipo de processo tem a vantagem de revelar a transição da estacionariedade para a não-estacionariedade. Mais detalhes podem ser encontrados em Herbst (1963) e Priestley (1965).

Não existe uma generalização natural da definição de processo estacionário para não-estacionário. Um dos maiores problemas é como estabelecer uma teoria assintótica adequada. Se temos observações X_1, X_2, \dots, X_T de um processo não-estacionário, o conceito assintótico para processos estacionários tem que ser modificado, no sentido que, quando o processo é estendido para o futuro ($T \rightarrow \infty$), não se pode obter nenhuma informação do comportamento do processo utilizando-se as observações do mesmo. Para contornar este problema, estabelece-se um conceito assintótico diferente.

Ao pensarmos em processos próximos a estacionários, devemos lembrar que suas características, como covariâncias e parâmetros, vão se alterando gradualmente de maneira não especificada no decorrer do tempo. Suponha, por exemplo, que um processo temporal discreto permaneça estacionário em torno de um segmento de tamanho L e mude posteriormente. Desta forma, somente as covariâncias até o lag $L - 1$ podem ser identificadas neste segmento. Além disso, considerações assintóticas clássicas para, por exemplo, o estimador das covariâncias de lag 1 não têm sentido, já que esta covariância pode estar mudando no decorrer do tempo.

Apesar disso, a idéia de ajustar modelos localmente estacionários para dados de séries temporais deste tipo pode ser expressiva e de fato tem sido usada freqüentemente.

A idéia de ter um processo aproximadamente estacionário em determinados trechos tornou-se rigorosa na teoria de Priestley para o espectro evolucionário. Dentro das aproximações de Priestley, as considerações assintóticas (por exemplo para julgar a eficiência de um estimador de covariância local) não são possíveis ou não têm sentido. Como dito anteriormente, isto decorre da natureza dos processos não-estacionários. Conseqüentemente, propriedades como consistência, normalidade assintótica, eficiência e aproximações para termos de ordem elevada das expansões de Taylor não podem ser utilizadas no tratamento teórico de procedimentos estatísticos para tais processos. Isto é particularmente ruim pois a estrutura complicada dos processos não-estacionários requer simplificações técnicas que precisam ser obtidas por aproximações assintóticas.

Para solucionar este problema, Dahlhaus (1997) introduziu uma aproximação assintótica, similar à da regressão não-paramétrica, para processos com espectro evolucionário. A idéia pode ser explicada mais facilmente com um exemplo de um processo auto-regressivo de ordem 1, variando no tempo,

$$X_t = g(t)X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \text{ iid } N(0, \sigma^2),$$

que foi observado para $t = 1, 2, \dots, T$. Suponha que se ajuste para os dados o modelo $g_\theta(t) = a + bt + ct^2$, com $\theta = (a, b, c)'$. É fácil construir diferentes estimadores para os parâmetros, por exemplo estimadores de mínimos quadrados, estimadores de máxima verossimilhança ou ajustar parâmetros AR(1) variando no tempo. Considerações assintóticas clássicas para comparar estes estimadores não fazem sentido, uma vez que com $T \rightarrow \infty$, $g_\theta(t) \rightarrow \infty$ enquanto, por exemplo, $|g(t)|$ pode ser menor que 1 dentro do segmento observado. Analogamente à regressão não-paramétrica, parece natural estabelecer a teoria assintótica assumindo que $g(t)$ seja observada numa grade cada vez mais fina (mas no mesmo intervalo), isto é, que se observe

$$X_{t,T} = g\left(\frac{t}{T}\right)X_{t-1,T} + \epsilon_t, \tag{2.1}$$

para $t = 1, 2, \dots, T$. Agora, $g\left(\frac{t}{T}\right)$ está definida no intervalo $[0, 1]$. Desta maneira, fazendo-se $T \rightarrow \infty$ tem-se na amostra $X_{1,T}, \dots, X_{T,T}$ mais e mais observações para a estrutura

local de $g(\frac{t}{T})$ em cada ponto de tempo. Se $g(\frac{t}{T})$ é constante, $X_{t,T}$ é independente de T e a aproximação assintótica descrita torna-se idêntica à aproximação clássica para processos estacionários.

Dahlhaus (1997) apresenta uma definição mais geral: uma seqüência de processos estocásticos $\{X_{t,T}, t = 1, \dots, T\}$ é chamada *localmente estacionária* com função de transferência A^0 e tendência μ se existir uma representação

$$X_{t,T} = \mu\left(\frac{t}{T}\right) + \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\omega t) A_{t,T}^0(\omega) d\zeta(\omega), \quad (2.2)$$

tal que:

(i) $\zeta(\omega)$ seja um processo estocástico em $[-\pi, \pi]$ com $\overline{\zeta(\omega)} = \zeta(-\omega)$ e

$$\text{cum}\{d\zeta(\omega_1), \dots, d\zeta(\omega_k)\} = \eta\left(\sum_{j=1}^k \omega_j\right) g_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) d\omega_1 \dots d\omega_k,$$

onde $\text{cum}\{\dots\}$ denota o cumulante de k -ésima ordem, $g_1(\omega) = 0$, $g_2(\omega) = 1$, $|g_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| \leq \text{const}_k$ para todo k e $\eta(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi j)$ é uma extensão da função delta de Dirac com período 2π .

(ii) Existam uma constante K e uma função periódica com período 2π , $A : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com $A(u, -\omega) = \overline{A(u, \omega)}$ e

$$\sup_{t, \omega} |A_{t,T}^0(\omega) - A\left(\frac{t}{T}, \omega\right)| \leq KT^{-1},$$

para todo T . Supomos que $A(u, \omega)$ e $\mu(u)$ sejam contínuas em u .

A suavidade de $A(u, \omega)$ em u garante que o processo tenha (assintoticamente) um comportamento localmente estacionário, controlando a variação local de $A_{t,T}^0(\omega)$ como função de t .

Suponha $X_{t,T}$ um processo ARMA com coeficientes variando no tempo,

$$\sum_{j=0}^p a_j\left(\frac{t}{T}\right) X_{t-j,T} = \sum_{j=0}^q b_j\left(\frac{t}{T}\right) \epsilon_{t-j},$$

onde ϵ_t são independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância 1 e $a_0(u) = b_0(u) = 1$. Então $X_{t,T}$ é localmente estacionário com densidade espectral

dependente do tempo

$$f(u, \omega) = \frac{\sigma^2(u) \left| \sum_{j=0}^q b_j(u) \exp(i\omega j) \right|^2}{2\pi \left| \sum_{j=0}^p a_j(u) \exp(i\omega j) \right|^2}. \quad (2.3)$$

Um processo ARMA com coeficientes variando no tempo é um exemplo de um processo localmente estacionário que é definido puramente no domínio do tempo. Se as funções de seus coeficientes forem paramétricas (por exemplo polinômios no tempo), obtém-se um exemplo de processo localmente estacionário paramétrico.

Dahlhaus (1996) definiu a *covariância local* de lag k e tempo u como

$$C(u, k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u, \omega) \exp(i\omega k) d\omega \quad (2.4)$$

e provou que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{[uT],T}, X_{[uT]+k,T}] &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\omega k) A_{[uT]+k,T}^0(\omega) A_{[uT],T}^0(-\omega) d\omega \\ &= C(u, k) + O(T^{-1}), \end{aligned}$$

uniformemente em u e k , em que $u = \frac{t}{T}$.

As propriedades inerentes à mudança de escala na definição e a perda de t como tempo para processos com espectro evolucionário permitem a existência de uma teoria assintótica. Em particular, esta aproximação é uma generalização natural da teoria assintótica para séries temporais estacionárias, a qual pode ser obtida como caso especial (para μ e A constantes ao longo do tempo).

2.2 Ondaletas

As ondaletas ou *wavelets* são ferramentas matemáticas poderosas muito utilizadas para decompor séries temporais não-estacionárias e sinais contaminados com ruídos. Seu poder vem do fato das funções de ondaletas permitirem a análise da série no tempo e escala, simultaneamente.

Durante muito tempo, a análise de Fourier foi utilizada para o estudo de séries temporais estacionárias, decompondo uma série com base numa combinação linear de componentes senoidais, cada uma com determinada frequência. Porém, pequenas alterações

em algumas observações podem provocar mudanças em todas as componentes de Fourier, uma vez que as bases de Fourier são localizadas apenas na frequência e não no tempo.

A diferença básica da análise de ondaletas, em relação à análise de Fourier, é o uso de um conjunto diferente de funções-base não-senoidais que particionam o plano tempo-frequência para capturar melhor o conjunto de eventos de baixa a alta frequência. Assim, as ondaletas caracterizam o comportamento local de uma série temporal, ao passo que os coeficientes de Fourier caracterizam o comportamento global de uma série temporal. A idéia, tanto na análise de Fourier quanto na análise de ondaletas, é aproximar uma função por uma combinação linear de senos e cossenos ou ondaletas, respectivamente.

Ondaletas são funções, por exemplo do tempo, ou seja, que crescem e decrescem num período de tempo limitado, e que possuem determinadas propriedades. A teoria de ondaletas é apresentada em Chui (1992), Ogden (1997), Morettin (1999) e Percival e Walden (2000).

Considere a geração do espaço $L^2(\mathbb{R})$ de todas as funções integráveis em módulo ao quadrado, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, com base em translações e dilatações de ordem (j, k) de uma função $\psi(\cdot)$. A função $\psi(t)$ é chamada ondaleta-mãe e as ondaletas $\psi_{j,k}(t)$ geradas formam uma base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Estas são dadas por

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}.$$

Com base nesta representação, percebe-se que cada função-base depende de dois parâmetros, a escala j (dilatação) e a localização k (translação). Para obter esta representação, consideramos dilatações binárias 2^j e translações diádicas $k2^{-j}$ de ψ . Lembremos que as funções-base de Fourier dependem apenas de um parâmetro, a frequência.

Qualquer função contínua pode ser usada como ondaleta, desde que sejam válidas algumas propriedades:

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0;$

- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1.$

Dessa forma, a função deve decair rapidamente para zero, quando $t \rightarrow \infty$. Daqui deriva o nome ondaletas, pois como a função $\psi(\cdot)$ apresenta valores positivos e negativos, então seu comportamento deve ser em forma de ondas para obtenção do decaimento para zero.

Se a segunda condição for válida, então para qualquer ϵ , $0 < \epsilon < 1$, existe um intervalo de comprimento finito $[-T, T]$, tal que

$$\int_{-T}^T \psi^2(u) du < 1 - \epsilon.$$

Para ϵ próximo de zero, vemos que a função $\psi(\cdot)$ deve ser praticamente nula fora do intervalo $[-T, T]$. Isso não ocorre com funções periódicas como o seno.

A função $\psi(\cdot)$ também tem as propriedades:

- 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$, onde $\hat{\psi}(w)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$;
- 4) os primeiros $M - 1$ momentos de $\psi(\cdot)$ são nulos, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$ para algum $M \geq 1$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |t^M \psi(t)| dt < \infty$.

A propriedade 3 é chamada de condição de admissibilidade e garante que uma função de interesse $f(\cdot)$ possa ser reconstruída a partir da transformada de ondaletas contínua. O valor de M , na última propriedade, está relacionado ao grau de suavidade da ondaleta, isto é, quanto maior valor de M , mais regular será $\psi(\cdot)$.

As ondaletas-mãe representam os detalhes (componentes de alta frequência) de um sinal. Algumas ondaletas têm suporte compacto, propriedade desejável e relacionada ao fato das ondaletas serem localizadas no tempo. Nem todas as ondaletas geram sistemas ortogonais, como por exemplo o chapéu mexicano. A vantagem de trabalhar com bases ortogonais é permitir a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada de ondaletas.

Suponha $L^2(\mathbb{R})$ o espaço das funções f mensuráveis de *quadrado integrável* sobre \mathbb{R} e que as funções $\psi_{j,k}(\cdot)$ formem uma base ortonormal gerada por $\psi(\cdot)$, então podemos

escrever

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

em que

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

são os coeficientes de ondaletas.

As ondaletas podem ser geradas pela função escala $\phi(\cdot)$, chamada ondaleta-pai, que é uma solução da equação

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k l_k \phi(2t - k).$$

Uma família ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$ é formada pelas dilatações e translações de $\phi(\cdot)$

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

As ondaletas-pai representam a parte suave (componentes de baixa frequência) de um sinal. Uma maneira de obter ondaletas $\psi(\cdot)$ a partir da ondaleta-pai é

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k),$$

em que $h_k = (-1)^k l_{1-k}$ e l_k e h_k são coeficientes de filtros passa-baixa e passa-alta, respectivamente, e são dados por

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt, \quad (2.6)$$

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (2.7)$$

Considerando a base ortonormal

$$\{\phi_{j_0,k}(t), \psi_{j,k}(t), j \geq j_0, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\},$$

podemos escrever uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ como

$$f(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

onde os coeficientes são

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_{j_0,k}(t)dt,$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt.$$

A limiarização de ondaletas ou *thresholding* é uma técnica utilizada para suavização de funções e, também, para reduzir ou remover o ruído presente numa série temporal, baseando-se na diminuição (limiarização suave) ou na eliminação (limiarização dura) da magnitude dos coeficientes de ondaletas que estão tendendo a zero. Neste trabalho, usamos a limiarização para suavização das funções estimadas via ondaletas, antes da reconstrução do processo com base na transformada inversa de ondaletas.

O procedimento de encolhimento de ondaletas pode ser dividido em duas etapas: escolha do tipo de suavização, função $\delta(\cdot, \cdot)$, e escolha do valor de truncamento, λ . Basicamente, a limiarização suave é feita ao aplicarmos a função $\delta^s(\beta_{j,k}, \lambda) = \text{sign}(\beta_{j,k})(|\beta_{j,k}| - \lambda)$ e a limiarização dura é feita ao aplicarmos a função $\delta^h(\beta_{j,k}, \lambda) = \beta_{j,k}I(\beta_{j,k} \geq \lambda)$ aos coeficientes de ondaletas.

Existem várias regras para selecionar o valor de truncamento, λ . Algumas dessas regras são motivadas por teorias estatísticas e oferecem uma série de formas para truncar os coeficientes de ondaletas. Na prática, o limiar universal é um dos mais utilizados e é definido por $\lambda = \sigma\sqrt{2\log n}$, em que n é o número de coeficiente de ondaletas e σ é o desvio padrão do ruído e pode ser estimado a partir dos dados. Além disso, podemos estimar σ por um único valor, que engloba todos os níveis, ou um valor para cada nível j , ou ainda, utilizar apenas o ruído relativo ao nível mais fino da decomposição de ondaletas.

Detalhes sobre limiarização podem ser encontrados em Morettin (1999) ou Percival e Walden (2000).

2.3 Dados em Alta Frequência

”Os dados em alta frequência começaram a ser avaliados primeiramente com o avanço tecnológico, para obtenção e armazenamento de dados e os mesmos atraem muito interesse, por sua importância no estudo empírico da micro-estrutura dos mercados”, O’Hara (1995).

Estes dados podem ser utilizados para comparar a eficiência de diferentes sistemas de negociação na formulação de preços, por exemplo, a negociação no viva voz na bolsa de Nova Iorque (NYSE) contra o sistema de negociação computadorizada da bolsa eletrônica NASDAQ. Podemos utilizá-los, também, para estudar a dinâmica do processo de oferta e procura na negociação de uma particular ação.

Os dados em alta frequência têm certas características que não aparecem nos dados em baixa frequência, introduzindo desafios para economistas e estatísticos em sua modelagem. Em particular, as principais características são negociações não-sincronizadas, influência do *spread* de oferta e procura e a existência de um comportamento periódico intra-diário. Descreve-se a seguir algumas destas características, que podem ser encontradas de forma mais detalhada em Goodhart e O’Hara (1997), Tsay (2002) e Müller et al. (1990).

1. **Negociação não-sincronizada:** as negociações de ações não ocorrem de forma sincronizada, ou seja, ações diferentes têm frequências de negociação diferentes e, até para uma única ação, existem variações na intensidade das negociações ao longo das horas e dos dias. Supõe-se que múltiplas séries são amostradas simultaneamente, quando de fato a amostragem é não-sincronizada. Por exemplo, para dados diários, o preço de uma ação costuma ser o preço de fechamento do mercado, ou seja, da última negociação e este tempo varia de dia para dia, levando a possíveis previsões equivocadas quando assume-se que os preços estão igualmente espaçados.

O fato das negociações serem feitas em tempos não-homogêneos tem efeito nas propriedades das séries de retornos. Para retornos diários de ações, negociações não-sincronizadas podem introduzir correlação cruzada de lag 1 entre os retornos,

autocorrelação de lag 1 nos retornos de uma carteira e, em algumas situações, autocorrelação negativa na série de retornos de uma ação. Para mais detalhes, vide Lo e MacKinlay (1990 a).

2. **Spread de compra e venda:** os formadores de mercado têm papel importante no mercado, promovendo liquidez no mesmo, comprando e vendendo quantidades significativas com segurança, no anonimato e com baixo impacto no preço. Em troca da liquidez de mercado, os *market makers* monopolizam os direitos de troca de ações. Eles compram num preço de oferta e vendem por um preço geralmente maior, a diferença entre os preços de venda e compra das ações é chamada spread de compra e venda, o lucro da negociação. A existência deste spread traz consequências importantes para as propriedades dos retornos das séries temporais, embora em pequena magnitude, pois não permitem a total liberdade de negociação no mercado. Detalhes podem ser lidos em Copeland e Galai (1983) e em Bollerslev e Melvin (1994).
3. **Características empíricas dos dados em alta frequência:**
 - Intervalos de tempo com espaçamento irregular - as transações não ocorrem em tempos com espaçamento regular, nem os preços sofrem alteração regularmente. O tempo entre as negociações torna-se importante e contém informações sobre a intensidade das negociações, vide Lo e McKinlay (1990 b).
 - Existência de um comportamento periódico diário nas negociações das ações: as transações ocorrem com maior frequência na abertura e fechamento da bolsa e ocorrem menos frequentemente nos horários de almoço, resultando em diferentes intensidades das negociações durante o dia. Por conseguinte, os tempos entre as negociações apresentam um ciclo diário. Mais informações em McInish e Wood (1992), Andersen e Bollerslev (1997) e Gouriéroux, Jasiak e Le Fol (1999).

- Múltiplas transações num único segundo: é possível que várias negociações, até mesmo com diferentes preços, ocorram ao mesmo tempo. Isto deve-se ao fato do tempo ser medido em segundos, que pode ser um intervalo de tempo muito longo para a escala em períodos de alta liquidez. Veja Campbell, Lo e MacKinlay (1997) e Tsay (2002).

Para mais detalhes sobre dados em alta frequência vide Tsay (2002), Dacorogna et al. (2001), Gouriéroux e Jasiak (2001) e Müller et al. (1990).

Capítulo 3

Modelo autoregressivo de duração condicional

No modelo de duração condicional os tempos de ocorrência das negociações, também chamados durações, são tratados como variáveis aleatórias chamadas *marks*, ocorrências ou eventos. A intensidade condicional é parametrizada em termos de eventos passados de maneira que seja útil para processos de negociação. O modelo recebe o nome de auto-regressivo de duração condicional (ACD) justamente por ser baseado nas durações e durações esperadas passadas entre eventos.

Usando conceitos similares aos dos modelos ARCH e GARCH para a volatilidade, Engle e Russel (1998) desenvolveram o modelo de duração condicional para descrever a evolução do tempo das durações para ações. As propriedades dos estimadores de quase-verossimilhança podem ser obtidas como corolário dos resultados para modelos ARCH.

3.1 Definição

O problema necessita da especificação do processo estocástico dos tempos de ocorrência, estimação dos parâmetros e cálculo das probabilidades dos eventos. A probabilidade instantânea de um evento é chamada de intensidade do processo e é condicionada à in-

formação passada em processos com dependência temporal. Uma vez que a intensidade é parametrizada, a verossimilhança pode ser calculada e os parâmetros podem ser estimados e estudados.

Engle e Russel (1998) propuseram a classe de modelos auto-regressivos de duração condicional (ACD) para os tempos de chegada que são dependentes. Os dados são simplesmente uma lista de tempos de ocorrência e, possivelmente, características associadas a estes tempos de chegada, como volume ou preço das negociações.

A formulação básica do modelo parametriza a intensidade condicional como uma função do tempo entre eventos passados e muitas extensões naturais incluem outros efeitos, como características associadas a transações passadas ou qualquer outra influência externa. A dependência da intensidade condicional em relação a ocorrências passadas sugere que o modelo se chame auto-regressivo de duração condicional. Associada à intensidade está a esperança condicional do tempo de espera até o próximo evento. O modelo ACD fornece ferramenta para testar se a função de intensidade é influenciada por variáveis observadas no mercado, tais como volume ou preço da negociação.

Considere um processo estocástico como uma seqüência de tempos $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. Como estes pontos estão distribuídos no tempo, são chamados *processos pontuais* e os tempos são chamados *tempos de ocorrência* do processo pontual. Ligado aos tempos de ocorrência há um processo de contagem, $N(t)$ que representa o número de eventos que ocorreram até o instante de tempo t , sendo uma função não-decrescente no tempo com $N(t_0) = 0$.

A *intensidade condicional* do processo é definida por

$$\lambda(t; N(t), t_1, \dots, t_{N(t)}) = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{P(N(t + \Delta_t) > N(t) | N(t), t_1, \dots, t_{N(t)})}{\Delta_t}. \quad (3.1)$$

Esta expressão generaliza o processo de Poisson, para o qual λ é constante, e o processo de Poisson não-homogêneo, que depende apenas de t mas não dos eventos passados até o tempo t . A equação (3.1) é usada para caracterizar o processo pontual auto-excitável (*self exciting point process*) como descrito em Snyder e Miller (1991). Este processo permite

que os eventos passados influenciem a evolução futura do processo e são usados para modelar processos pontuais dependentes tais como emissões elétricas ou terremotos.

As propriedades locais do processo são especificadas pela parametrização de (3.1) e, assim, temos as probabilidades e tempos de espera totalmente especificados. Em particular, a função de verossimilhança dos tempos observados pode ser derivada da intensidade do processo, porém, é conveniente escrever esta função em termos das durações, que são os tempos entre as negociações sucessivas, uma vez que especificamos a distribuição dos erros. Sejam $x_t = t_t - t_{t-1}$ os tempos entre as negociações $t - 1$ e t , para $t = 1, \dots, T$, t_0 é o tempo inicial de observação e T é o número de negociações no período avaliado, então a função log-verossimilhança pode ser expressa em termos da função densidade condicional de x_t como

$$l(x_1, \dots, x_T; \theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}; \theta). \quad (3.2)$$

O modelo ACD é conveniente para especificar processos auto-excitáveis. O modelo não precisa necessariamente ter memória limitada e pode ser estimado por máxima verossimilhança, além de permitir que sejam feitas previsões dos tempos de espera. A principal suposição do modelo ACD é que a dependência temporal pode ser resumida por uma função η que é a esperança condicional da duração dada a informação passada e tem a propriedade que os erros, dados por $\frac{x_t}{\eta_t}$, são independentes e identicamente distribuídos. Assim, a densidade das durações padronizadas satisfaz $\eta_t = E(x_t | \mathcal{F}_{t-1})$, com \mathcal{F}_{t-1} representando a informação avaliada até a $(t-1)$ -ésima negociação e $\frac{x_t}{\eta_t}$ são variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

O modelo autoregressivo de duração condicional mais geral pode ser escrito como

$$x_t = \eta_t \epsilon_t, \text{ com } \eta_t = \omega + \sum_{j=1}^r \delta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^s \gamma_j \eta_{t-j}, \quad (3.3)$$

em que ϵ_t é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, não-negativas e com $E(\epsilon_t) = 1$: O modelo auto-regressivo de duração condicional de ordens r e s é representado por $ACD(r, s)$.

Quando a distribuição de ϵ_t é exponencial, então o modelo é auto-regressivo de duração condicional exponencial e pode ser representado por $EACD(r, s)$. Caso os erros tenham distribuição Weibull, o modelo é representado por $WACD(r, s)$. Outra distribuição muito utilizada é a Gama generalizada pois possui forma bem geral, dando mais liberdade para representar a intensidade condicional do processo. Vide Tsay (2002).

Como nos modelos GARCH, o processo $y_t = x_t - \eta_t$ é uma sequência de diferenças martingais, com $E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, não-correlacionadas, mas com variância não-constante. Usando as diferenças martingais, o modelo pode ser representado por

$$x_t = \omega + \sum_{j=1}^{\max(r,s)} (\delta_j + \gamma_j)x_{t-j} - \sum_{j=1}^s \gamma_j y_{t-j} + y_t, \quad (3.4)$$

$\delta_j = 0$ para $j > r$ e $\gamma_j = 0$ para $j > s$. O modelo está na forma de um processo auto-regressivo de médias móveis com inovações não-gaussianas e heteroscedásticas, isto é, $\Phi(L)x_t = \Psi(L)y_t$, em que L indica o operador diferença. Esta representação pode ser utilizada para obter as condições de estacionariedade (fraca) para o modelo ACD. Detalhes em Lumsdaine (1996).

Previsões das durações podem ser obtidas diretamente desta representação usando os mesmos métodos utilizados para os modelos ARMA convencionais. Assim, é fácil calcular analiticamente o tempo esperado até que a $(t+h)$ -ésima negociação ocorra. Se o processo de duração for estacionário, ele será reversível à média e o impacto de uma determinada duração no futuro do processo decairá exponencialmente. Já que as negociações analisadas ocorrem com diferença de poucos segundos, a persistência dos choques será muito limitada no tempo calendário, a não ser que as raízes do polinômio sejam muito próximas de um.

A formulação (3.3) é parecida com a dos modelos EARMA (ARMA com erros exponenciais), uma vez que as durações condicionais têm distribuição exponencial e seguem um "processo ARMA". A simplicidade acontece com o uso de erros multiplicativos no modelo ACD.

O modelo ACD é conveniente pois vários momentos podem ser calculados aplicando-se

a esperança dos dois lados de (3.4), resultando em:

$$E(x_t) = \frac{\omega}{1 - \sum_{j=1}^{\max(r,s)} (\delta_j + \gamma_j)},$$

com $\gamma_0 > 0$ e $\sum_j (\delta_j + \gamma_j) < 1$, pois as durações são positivas.

Para exemplificar, suponha que estejamos interessados no modelo EACD(1,1). Desta forma, temos

$$x_t = \eta_t \epsilon_t, \text{ com } \eta_t = \omega + \delta x_{t-1} + \gamma \eta_{t-1}, \quad (3.5)$$

em que ϵ_t são i.i.d, com distribuição exponencial com média 1.

Supondo que o processo x_t seja fracamente estacionário, calculamos

$$E(x_t) = E[E(x_t|\mathcal{F}_{t-1})] = E[E(\eta_t \epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1})] = E(\eta_t).$$

Mas, $E(\eta_t) = E(\eta_{t-1})$, devido a estacionariedade de x_t e $E(\eta_t) = \omega + \delta E(x_{t-1}) + \gamma E(\eta_{t-1})$.

Substituindo os valores em $E(x_t)$:

$$\mu_x = E(x_t) = E(\eta_t) = \omega + \delta E(x_{t-1}) + \gamma E(\eta_{t-1}) = \omega + \delta E(x_t) + \gamma E(x_t).$$

Então,

$$\mu_x = E(x_t) = \frac{\omega}{1 - \delta - \gamma}. \quad (3.6)$$

Para calcular a variância, necessitamos obter $E(x_t^2)$.

$$\begin{aligned} E(x_t^2) &= E[E(\eta_t^2 \epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1})] = 2E[E(\eta_t^2|\mathcal{F}_{t-1})] = 2E(\eta_t^2) \text{ e} \\ E(\eta_t^2) &= \mu_x^2 \left(\frac{1 - (\delta + \gamma)^2}{1 - 2\delta^2 - 2\delta\gamma - \gamma^2} \right). \end{aligned}$$

Usando que $Var(x_t) = E(x_t^2) - E^2(x_t)$ e $E(x_t^2) = 2E(\eta_t^2)$, concluímos que

$$Var(x_t) = 2E(\eta_t^2) - \mu_x^2 = \mu_x^2 \left(\frac{1 - \gamma^2 - 2\delta\gamma}{1 - 2\delta^2 - 2\delta\gamma - \gamma^2} \right) \quad (3.7)$$

Com base neste resultado, o modelo EADC(1, 1) deve satisfazer $\gamma^2 + 2\delta\gamma + 2\delta^2 < 1$, para que o modelo tenha variância não-condicional invariante no tempo. Perceba que

uma vez que $\delta > 0$, o desvio padrão excederá a média, exibindo super-dispersão que é comum em dados de durações.

Para obter a função de autocorrelação do processo EACD(1,1), utiliza-se o processo escrito na forma (3.4), obtendo

$$x_t = \omega + (\delta + \gamma)x_{t-1} + y_t - \gamma y_{t-1},$$

em que $y_t = x_t - \eta_t$ é uma seqüência de diferenças martingais, com $E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, não-correlacionadas, mas com variância não-constante. Esta equação mostra que o modelo ACD(1,1) é equivalente a um modelo ARMA(1,1) para x_t , com coeficiente auto-regressivo $\delta + \gamma$ e coeficiente de médias-móveis $-\gamma$.

Usando as fórmulas usuais do modelo ARMA(1,1) para obtenção da função de autocorrelação do modelo ACD(1,1) temos

$$\rho_1 = \frac{\delta(1 - \gamma^2 - \delta\gamma)}{(1 - \gamma^2 - 2\delta\gamma)} \text{ e } \rho_h = (\delta + \gamma)\rho_{h-1}, \text{ para } h \geq 2.$$

O modelo ACD(1,1) é análogo ao GARCH(1,1) para a modelagem da volatilidade. Como o GARCH(1,1), o ACD(1,1) é um bom ponto de partida para a modelagem das durações. Entretanto, há muitas alternativas para o modelo ACD, como a versão logarítmica do modelo ACD descrita em Bauwens e Giot (2000), que evita restrições de não-negatividade implicadas pela especificação original do modelo ACD, facilitando o teste de hipóteses relacionadas à micro-estrutura do mercado, como a influência do preço sobre as durações. O modelo de duração condicional estocástico, que tem um fator latente estocástico para capturar a aleatoriedade não observada da informação corrente no mercado, foi proposto por Bauwens e Veredas (2000).

Várias outras modificações do modelo auto-regressivo de duração condicional foram propostas na literatura. Ghysels, Gouriéroux e Jasiak (2004) introduziram o modelo de duração com volatilidade estocástica, enquanto Zhang, Russel e Tsay (2001) apresentaram uma versão não-linear para o modelo baseada no processo auto-regressivo com limiares auto-excitáveis (*self-exciting threshold autoregressive models*). Bauwens e Giot (2003) estudaram o modelo ACD assimétrico, introduzindo informação de preço na modelagem.

Mais tarde, Fernandes e Gramming (2005) introduziram o modelo ACD aumentado, que também permite considerar a assimetria das durações no processo de estimação, porém utilizando outras distribuições para os erros.

3.2 Estimação do Modelo de Duração Condicional

A estimação do modelo auto-regressivo de duração condicional pode ser feita semi-parametricamente ou parametricamente, quando a distribuição dos erros pertence a uma família paramétrica.

3.2.1 Estimação Semi-Paramétrica

A estimação semi-paramétrica do modelo ACD é feita por quase-verossimilhança. Neste caso, o modelo ACD é dado por (3.3) e não há necessidade de especificar a distribuição das durações.

No método de quase-verossimilhança a log-verossimilhança é escrita como se os erros fossem exponencialmente distribuídos, ou seja,

$$l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = \sum_{t=1}^T \ln \left[\frac{1}{\eta_t} \exp\left(\frac{-x_t}{\eta_t}\right) \right] = - \sum_{t=1}^T \left[\ln(\eta_t) + \frac{x_t}{\eta_t} \right], \quad (3.8)$$

em que $\tilde{\theta}$ é o vetor de parâmetros e \tilde{x} é o vetor de durações observadas.

É importante notar que a função de log-quase-verossimilhança do modelo ACD, dada por (3.8), coincide com a função de log-verossimilhança para as durações no modelo EACD, podendo ser considerada como uma função log-verossimilhança no caso dos erros serem exponencialmente distribuídos. Desta maneira, as propriedades dos estimadores de quase-verossimilhança são as mesmas dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo EACD.

A função log-quase-verossimilhança das durações é não-linear nos parâmetros, necessitando de métodos iterativos para ser estimada. O método utilizado neste trabalho é chamado *BHHH* e foi proposto por Berndt, Hall, Hall e Hausman (1974), consistindo

numa aproximação prática para encontrar o estimador de máxima verossimilhança usando como ferramenta o método do gradiente.

Suponha que $\tilde{\theta}^i$ seja o vetor de estimativas dos parâmetros após a i -ésima iteração pelo método BHHH. Então, $\tilde{\theta}^{i+1}$ é calculado por

$$\tilde{\theta}^{i+1} = \tilde{\theta}^i + g_i \left(\sum_{t=1}^T \frac{\partial l(\tilde{\theta}; \tilde{x})}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial l(\tilde{\theta}; \tilde{x})}{\partial \tilde{\theta}'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l(\tilde{\theta}; \tilde{x})}{\partial \tilde{\theta}},$$

em que $\frac{\partial l(\tilde{\theta}; \tilde{x})}{\partial \tilde{\theta}}$ é avaliado em $\tilde{\theta}^i$ e g_i relaciona-se à direção do gradiente.

Segundo os autores, esta aproximação tem vantagens sobre o método de Newton: a convergência é assegurada e o método requer a avaliação de derivadas do modelo até segunda ordem somente, enquanto o método de Newton precisa da terceira derivada. A eliminação da terceira derivada ocorre pela relação fundamental da estatística em que a matriz de covariâncias assintótica do estimador de máxima verossimilhança é igual à matriz de covariâncias do gradiente da função de verossimilhança. Além disso, as propriedades usuais dos estimadores de máxima verossimilhança, como consistência e normalidade assintótica, são preservadas.

3.2.2 Estimação Paramétrica

Quando a distribuição dos erros pertence a uma família paramétrica, pode-se fazer a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança.

Suponha um modelo ACD(r, s) dado pela expressão (3.3). Seja $i_0 = \max\{r, s\}$ e $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_T)'$. A função de verossimilhança das durações x_1, \dots, x_T é dada por

$$L(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = f(\tilde{x}; \tilde{\theta}) = \left[\prod_{t=t_0+1}^T f(x_t | \mathcal{F}_{t-1}, \tilde{\theta}) \right] f(x_{t_0} | \tilde{\theta}),$$

em que $\tilde{\theta}$ é o vetor de parâmetros do modelo ACD e t_0 é o tempo de abertura do mercado. A função densidade de probabilidade marginal $f(x_{t_0} | \tilde{\theta})$ tem forma complicada para o modelo ACD geral. Como sua importância na função de verossimilhança diminui, quando T aumenta, esta densidade marginal comumente é ignorada, resultando no uso do método de verossimilhança condicional (Tsay, 2002).

Para exemplificar, suponha um modelo EACD(1,1), dado por (3.5) com erros exponenciais com média 1. A função densidade de probabilidade de ϵ_t , $t = 1, \dots, T$ é escrita como $f(\epsilon) = \exp(-\epsilon)$. Sabendo que $\epsilon_t = \frac{x_t}{\eta_t}$, escrevemos a função densidade de probabilidade de x_t :

$$f(x_t | \tilde{\theta}, \mathcal{F}_{t-1}) = \exp\left[-\frac{x_t}{\eta_t}\right] \frac{1}{\eta_t}.$$

Assim, obtemos a log-verossimilhança das durações

$$l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = \ln[L(\tilde{\theta}; \tilde{x})] = \sum_{t=2}^T \left[-\ln(\eta_t) - \frac{x_t}{\eta_t} \right] \quad (3.9)$$

$$= \sum_{t=2}^T \left[-\ln(\omega + \delta x_{t-1} + \gamma \eta_{t-1}) - \frac{x_t}{\omega + \delta x_{t-1} + \gamma \eta_{t-1}} \right], \quad (3.10)$$

em que $\tilde{\theta} = (\omega, \delta_1, \gamma_1)'$ e $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_T)'$.

A especificação da distribuição dos erros pode ser generalizada de várias formas. De acordo com esta distribuição, tem-se a forma intensidade condicional do processo. Na literatura estatística a função de intensidade é comumente expressa como função de risco. Por exemplo, quando supõe-se que os erros são exponencialmente distribuídos, assume-se que a função de intensidade condicional do processo é constante ao longo do tempo, o que não é muito razoável em muitos fenômenos práticos. Usando outras distribuições para os erros, obtém-se formas mais gerais para a intensidade condicional do processo.

A distribuição de Weibull para os erros é uma das mais populares e generaliza a forma da intensidade condicional do processo para uma função monotônica crescente ou decrescente, dependendo das características das durações analisadas. Para escrever a log-verossimilhança das durações utilizando o modelo Weibull para os erros, utiliza-se a distribuição Weibull padrão:

$$f(\epsilon; \alpha) = \alpha \epsilon^{\alpha-1} \exp(-\epsilon^\alpha), \forall \epsilon \geq 0, \alpha > 0.$$

Usando o fato que $\epsilon_t = \frac{x_t}{\eta_t}$, calcula-se a log-verossimilhança das durações do modelo

WACD fazendo as devidas transformações nas variáveis:

$$\begin{aligned} l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) &= \sum_{t=1}^T \left\{ \alpha \ln \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] + \ln(\alpha) + (\alpha - 1) \ln \left(\frac{x_t}{\eta_t} \right) - \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{x_t}{\eta_t} \right) \right]^\alpha - \ln(\eta_t) \right\} \\ &= \sum_{t=1}^T \left\{ \alpha \ln \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right] + \ln \left(\frac{\alpha}{x_t} \right) + \alpha \ln \left(\frac{x_t}{\eta_t} \right) - \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{x_t}{\eta_t} \right) \right]^\alpha \right\}, \end{aligned}$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função definida por $\Gamma(k) = \int_0^\infty y^{k-1} \exp(-y) dy$, $k > 0$, com as seguintes propriedades:

- $\Gamma(k) = (k - 1)\Gamma(k - 1)$, $\forall k > 1$,
- $\Gamma(k) = (k - 1)!$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$,
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Se $\alpha = 1$, tem-se como caso particular a distribuição exponencial. Quando $\alpha > 1$, tem-se a intensidade condicional do processo como função monotônica crescente e quando $\alpha < 1$, tem-se a intensidade como função monotônica decrescente, isto é, a intensidade do processo vai diminuindo ao longo do tempo. A estimação também é feita por máxima verossimilhança e utilizando métodos iterativos.

Em alguns casos há necessidade de uma maior generalidade da função de intensidade condicional do processo pois a mesma pode não ser crescente ao longo de todo o tempo. Para aumentar a flexibilidade desta função, Zhang, Russell e Tsay (2001) usaram a distribuição gama generalizada padronizada para os erros. A função de intensidade resultante pode assumir vários comportamentos, incluindo a forma de U ou U invertido, quando temos diminuição da intensidade do processo no período de almoço, como será visto nas aplicações a durações reais do Capítulo 6.

3.3 Propriedades do Estimador de Quase Verossimilhança para o Modelo ACD

A conexão com o modelo GARCH é muito útil para o estudo das propriedades dos estimadores de quase-verossimilhança para o modelo ACD. Os teoremas que estabelecem as propriedades destes estimadores do GARCH(1,1), mesmo na presença de raízes unitárias, podem ser utilizados para os modelos ACD(1,1) como corolário dos teoremas 2 e 3 de Lumsdaine (1996) ou dos teoremas 1 e 3 de Lee e Hansen (1994).

Quando se supõe determinada distribuição para os erros, existe o risco de cometer enganos em relação à mesma e, neste caso, os estimadores de máxima verossimilhança não serão consistentes. Uma alternativa simples é usar os estimadores de quase-máxima verossimilhança, não havendo necessidade de fazer análise de resíduos sobre a distribuição destes. A função de quase-verossimilhança, como citado anteriormente, é obtida com base na distribuição exponencial para os erros, vide (3.8).

Os estimadores de quase-verossimilhança são consistentes para os parâmetros e têm matriz de covariâncias assintótica bem definida. Este resultado foi demonstrado primeiramente por Gouriéroux, Monfort e Trognon (1984) para a família exponencial com observações independentes.

Corolário de Lee e Hansen: Se

1. $E(x_t|\mathcal{F}_{t-1}) \equiv \eta_{0,t} = \omega_0 + \delta_0 x_{t-1} + \gamma_0 \eta_{0,t-1}$,
2. $\epsilon_t \equiv \frac{x_t}{\eta_{0,t}}$, para todo t , (i) for estritamente estacionário e ergódico; (ii) não-degenerado; (iii) tiver momentos condicionais de segunda ordem limitados e (iv) $\sup_t E[(\gamma_0 + \delta_0 \epsilon_t)|\mathcal{F}_{t-1}] < 0$, quase certamente,
3. $\theta_0 \equiv (\omega_0, \delta_0, \gamma_0)$ estiver no interior de Θ ,

4. a log-quase-verossimilhança for

$$l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = \sum_{t=2}^T \left[-\ln(\eta_t) - \frac{x_t}{\eta_t} \right], \quad (3.11)$$

em que $\eta_t = \omega + \delta x_{t-1} + \gamma \eta_{t-1}$, para $t > 1$ e $\eta_1 = \frac{\omega}{1-\gamma}$,

então:

- o máximo de (3.11) é consistente e assintoticamente normal com matriz de covariâncias dada pela família de erros-padrão robustos de Lee-Hansen;
- o modelo pode ser estimado por um programa para modelos GARCH, utilizando $\sqrt{x_t}$ como variável dependente e escolhendo média igual a zero.

A prova encontra-se em Engle e Russell (1998). Em Engle (2000) há outra versão do teorema para modelos ARCH baseada em Bollerslev e Wooldridge (1992). O corolário anterior permite a estimação e a inferência para os estimadores de quase-verossimilhança sem especificação da densidade dos erros e não necessita que os erros sejam independentes e identicamente distribuídos.

A função escore dada por

$$\frac{\partial l(\tilde{\theta}; \tilde{x})}{\partial \theta_i} = \sum_{t=2}^T \left(\frac{x_t}{\eta_t} - 1 \right) \frac{1}{\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_i},$$

pode ser vista como uma diferença martingal com respeito ao conjunto de informação \mathcal{F}_{t-1} . Assim os estimadores de quase-máxima verossimilhança são consistentes e assintoticamente normais se $E(x_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \eta_t$, ou seja, se a esperança condicional das durações estiver especificada corretamente, mesmo que a distribuição dos erros não seja exponencial. Desta forma, segue que

$$\hat{\theta}_i \sim N(\theta_i^0, V_q(\theta_i^0)),$$

em que θ_i^0 é o valor verdadeiro de θ_i e $V_q(\theta_i^0)$ pode ser estimada consistentemente por $A^{-1}B(A^{-1})'$, chamado estimador sanduíche, com

$$A = - \sum_{t=2}^T \frac{\partial^2 \ln(f_x(x_t | \mathcal{F}; \tilde{\theta}))}{\partial \tilde{\theta}^2} \text{ e } B = \sum_{t=2}^T \left[\frac{\partial \ln(f_x(x_t | \mathcal{F}; \tilde{\theta}))}{\partial \tilde{\theta}} \right] \left[\frac{\partial \ln(f_x(x_t | \mathcal{F}; \tilde{\theta}))}{\partial \tilde{\theta}} \right]',$$

com f_x sendo a função densidade de probabilidades da exponencial.

Se $\delta + \gamma \leq 1$, a condição (iv) da suposição (2) está automaticamente satisfeita, mas também é válida na presença de raízes unitárias e para alguns processos explosivos. Desta forma, o teorema cobre casos tais como processos de duração integrados e processos em que as durações divididas por sua esperança não precisam ser independentes e identicamente distribuídas, mas apenas estritamente estacionárias, dando robustez adicional aos resultados empíricos. Este resultado é aplicado apenas ao modelo ACD(1,1) e não tem fácil generalização para o caso IGARCH e, conseqüentemente, não há fácil generalização para os processos de duração integrados.

É importante notar que este resultado para o estimador de quase-verossimilhança não assegura a eficiência dos estimadores. Os estimadores de máxima verossimilhança usando a correta densidade dos erros serão os mais eficientes e é possível que o ganho seja substancial, particularmente se as amostras não forem muito grandes.

Capítulo 4

Modelo Auto-Regressivo de Duração CondicionaI com Coeficientes Variando no Tempo

A estacionariedade é suposição essencial para a utilização dos modelos ACD convencionais, sendo útil para demonstração das propriedades dos estimadores e para cálculo dos momentos da distribuição dos tempos entre as negociações. A maioria dos processos reais não é fracamente estacionária, apresentando tendências, sazonalidades ou mudanças na variabilidade ao longo do tempo.

Existem várias metodologias desenvolvidas para ajustar tendências, sazonalidades ou estabilizar a variância de séries temporais. No caso dos dados em alta frequência, nota-se claramente a existência de periodicidade intra-diária, com aumento dos tempos entre as negociações durante o período de almoço, indicando menor liquidez no mercado. *Splines*, *ondaletas*, funções quadráticas ou senóides são algumas formas de modelar a sazonalidade intra-diária para obtenção de um processo estacionário. O grande problema é que estes procedimentos envolvem escolhas subjetivas e que podem, em alguns casos, até alterar as características do processo a ser estudado.

A idéia deste trabalho é generalizar o modelo ACD, permitindo que sua estimação

possa ser feita sem a suposição de estacionariedade. Desta forma, os tempos entre as negociações, que são processos naturalmente não-estacionários, podem ser modelados sem a utilização de transformações.

4.1 Definição

A generalização do modelo ACD pode ser feita utilizando ondaletas, substituindo cada um dos parâmetros do modelo (3.3), fixos no tempo, por uma decomposição em ondaletas, permitindo que os coeficientes do modelo ACD variem no tempo. Uma vez que os parâmetros variam no tempo, não há necessidade de que o processo seja estacionário para a modelagem, pois os coeficientes devem ser capazes de capturar as características do processo ao longo do tempo, tais como sazonalidade intra-diárias ou alterações na volatilidade ao longo do tempo.

Para exemplificar, suponha que o modelo a ser estimado seja o auto-regressivo de duração condicional com $r = 1$ e $s = 1$, modelo ACD(1,1) com coeficientes variando no tempo,

$$x_{t,T} = \eta_{t,T} \epsilon_t, \quad (4.1)$$

$$\eta_{t,T} = E(x_{t,T} | \mathcal{F}_{t-1}) = \omega(u) + \delta(u)x_{t-1,T} + \gamma(u)\eta_{t-1,T}, \quad (4.2)$$

em que $u = \frac{t}{T}$, $t = 1, \dots, T$, $\omega(u) > 0$, $\forall u \in (0, 1]$.

Usando a notação de ondaletas (Morettin, 1999), escreve-se o modelo auto-regressivo de duração condicional, ACD(1,1), substituindo cada função paramétrica do modelo por sua decomposição em ondaletas:

$$\begin{aligned} x_{t,T} = & \left\{ \left[\alpha_{00}^{(\omega)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\omega)} \Psi_{jk}(u) \right] \right. \\ & + \left[\alpha_{00}^{(\delta)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\delta)} \Psi_{jk}(u) \right] x_{t-1,T} \\ & \left. + \left[\alpha_{00}^{(\gamma)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\gamma)} \Psi_{jk}(u) \right] \eta_{t-1,T} \right\} \epsilon_t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
x_{t,T} = & \left\{ \alpha_{00}^{(\omega)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\omega)} \Psi_{jk}(u) \right. \\
& + \alpha_{00}^{(\delta)} \left[\phi_{00}(u) x_{t-1,T} \right] + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\delta)} \left[\Psi_{jk}(u) x_{t-1,T} \right] \\
& \left. + \alpha_{00}^{(\gamma)} \left[\phi_{00}(u) \eta_{t-1,T} \right] + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\gamma)} \left[\Psi_{jk}(u) \eta_{t-1,T} \right] \right\} \epsilon_t,
\end{aligned}$$

em que $u = \frac{t}{T} \in (0, 1]$ e J é o número de níveis de resolução usado na decomposição de ondaletas. Os valores de j e k dependem do nível de resolução desejado na decomposição de ondaletas.

O primeiro momento condicional é dado por,

$$E(x_{t,T} | \mathcal{F}_{t-1}) = \eta_{t,T} = \omega(u) + \delta(u) x_{t-1,T} + \gamma(u) \eta_{t-1,T},$$

que é dependente do tempo.

A variância condicional também será uma função que depende do tempo:

$$\begin{aligned}
Var(x_{t,T} | \mathcal{F}_{t-1}) &= \eta_{t,T}^2 Var(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \\
&= [\omega(u) + \delta(u) x_{t-1,T} + \gamma(u) \eta_{t-1,T}]^2 Var(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}).
\end{aligned}$$

Mesmo que a variância de ϵ não dependa do tempo, a variância de $x_{t,T}$ ainda dependerá do tempo por influência de $\eta_{t,T}$.

4.2 Estimação do Modelo de Duração Condicional com Coeficientes Variando no Tempo

A estimação dos parâmetros do modelo ACD com parâmetros variando no tempo é baseada na função log quase-verossimilhança supondo que os erros tenham distribuição exponencial

$$l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = - \sum_{t=1}^T \left[\ln(\eta_{t,T}) + \frac{x_{t,T}}{\eta_{t,T}} \right],$$

com $\eta_{t,T} = \omega(u) + \sum_{j=1}^r \delta_j(u)x_{t-j,T} + \sum_{j=1}^s \gamma_j(u)\eta_{t-j,T}$ e $u = \frac{t}{T} \in (0, 1]$.

Na prática, a maioria dos processos pode ser modelada pelo modelo ACD(1,1), como também ocorre com os modelos do tipo GARCH. A função de log quase-verossimilhança do modelo ACD(1,1) é dada por

$$l(\tilde{\theta}; \tilde{x}) = - \sum_{t=1}^T \left\{ \ln[\omega(u) + \delta(u)x_{t-1,T} + \gamma(u)\eta_{t-1,T}] + \frac{x_{t,T}}{\omega(u) + \delta(u)x_{t-1,T} + \gamma(u)\eta_{t-1,T}} \right\}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{com } \omega(u) &= \alpha_{00}^{(\omega)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\omega)} \Psi_{jk}(u), \\ \delta(u) &= \alpha_{00}^{(\delta)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\delta)} \Psi_{jk}(u), \\ \gamma(u) &= \alpha_{00}^{(\gamma)} \phi_{00}(u) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}^{(\gamma)} \Psi_{jk}(u), \end{aligned}$$

$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_T)'$ e $\tilde{\theta} = (\alpha_{00}^{(\omega)}, \dots, \beta_{J-1, 2^{J-1}-1}^{(\omega)}, \alpha_{00}^{(\delta)}, \dots, \beta_{J-1, 2^{J-1}-1}^{(\delta)}, \alpha_{00}^{(\gamma)}, \dots, \beta_{J-1, 2^{J-1}-1}^{(\gamma)})$ de dimensão $(3 \cdot 2^J \times 1)$.

Note que todos os parâmetros do modelo proposto são funções dependentes do tempo. Cada parâmetro invariante no tempo no modelo ACD convencional foi substituído por sua decomposição em ondaletas, gerando parâmetros dependentes do tempo. Esta dependência temporal permite a modelagem de processos não-estacionários sem a utilização de transformações ou modelagens preliminares para obtenção de séries estacionárias.

O número de parâmetros a ser estimado no modelo ACD com coeficientes variando no tempo está relacionado ao nível de resolução desejado na decomposição de ondaletas, representado por J . A escolha do nível de resolução refere-se à quantidade de detalhes que será usada no modelo, tendo importante papel para a modelagem adequada do processo estudado. Se houver opção por um nível de resolução muito pequeno, perde-se informação da série temporal de interesse, enquanto que um nível de resolução muito grande leva à perda de eficiência dos estimadores, refletida no aumento da variabilidade dos mesmos.

Não existe uma única maneira de escolher o valor para J . A forma preliminar de escolha do nível de resolução da decomposição em ondaletas, utilizada neste trabalho, foi feita com base na análise descritiva das séries utilizadas, ou seja, séries mais comportadas precisam de um nível menor de detalhes, ao passo que séries com maior variação no tempo, precisam de um maior nível de resolução. Com base na escolha preliminar de J , verifica-se o comportamento das estimativas comparando-se a escolha preliminar com a retirada de um nível de resolução e com o acréscimo de mais um nível de resolução, escolhendo-se o valor final de J mais adequado ao processo.

Outro problema relacionado à escolha do nível de resolução da decomposição de ondaletas é a quantidade de parâmetros a serem estimados conjuntamente. Quanto maior o nível de detalhes desejado na decomposição de ondaletas, maior o número de parâmetros a serem estimados conjuntamente e, conseqüentemente, maior será o esforço computacional para convergência das estimativas. Em algumas situações, mesmo com amostras grandes, da ordem de 2^{15} observações, não foi possível obter a convergência para maximização da log quase-verossimilhança pelo método proposto por Berndt, Hall, Hall e Hausmann (1974), gerando estimativas não condizentes com a situação real estudada.

Para exemplificar, calcula-se a quantidade de coeficientes a serem estimados no modelo ACD com parâmetros variando no tempo com log quase-verossimilhança dada por (4.3). Perceba que cada um dos 3 parâmetros do modelo ACD(1,1) convencional foi substituído por sua decomposição em ondaletas, resultando na necessidade de estimar 2^J parâmetros para cada um dos 3 parâmetros originais, totalizando uma estimação conjunta de $3 \cdot 2^J$ parâmetros. Por exemplo, se $J = 4$ precisamos estimar 48 parâmetros no total, isto é, um parâmetro no modelo ACD usual foi transformado em 16 parâmetros no modelo ACD com parâmetros variando no tempo, sendo um parâmetro relativo à ondaleta-pai e mais 15 parâmetros referentes à ondaleta-mãe utilizada.

A escolha da ondaleta utilizada na decomposição pode ser feita de acordo com as características da série temporal analisada. Se o processo apresenta sazonalidade, utiliza-se uma ondaleta com formato capaz de modelar esta periodicidade, como a ondaleta LA(8)

- *Least Asymmetric da Daubechies*. Durante o processo de estimação foram utilizadas as ondaletas Haar, LA(8) e D(8) - *Daubechies*. A forma da ondaleta Haar dificulta a estimação da periodicidade dos dados analisados; não havendo muita diferença entre a LA(8) e D(8), a decisão foi trabalhar com a ondaleta LA(8).

4.3 Propriedades do Estimador de Quase Verossimilhança para o Modelo ACD com Coeficientes Variando no Tempo

Para avaliar as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança, utilizamos procedimentos de simulação para geração de réplicas do processo de durações. Com base nestas réplicas, foram construídos histogramas e analisamos as propriedades dos estimadores para o modelo auto-regressivo de duração condicional com parâmetros variando no tempo. A seguir descrevemos brevemente como foram realizados os métodos de Bootstrap paramétrico e de Metropolis-Hastings para o processo de durações.

4.3.1 Método Bootstrap Paramétrico

A idéia básica do método Bootstrap é reamostrar de um conjunto de dados, diretamente ou via um modelo ajustado, a fim de criar réplicas dos dados, a partir das quais é possível avaliar a variabilidade de quantidades de interesse sem usar cálculos analíticos. O método Bootstrap pode ser aplicado quando existe, ou não, um modelo probabilístico bem definido para os dados.

O procedimento proposto por Tsay (1992) permite a verificação da adequabilidade de modelos, é fácil de implementar devido aos avanços computacionais, é capaz de evidenciar propriedades de estimadores complicadas de calcular analiticamente e é flexível, pois pode avaliar o modelo como um todo ou somente certas características necessárias para a análise.

O procedimento de verificação de adequabilidade do modelo necessita de um modelo paramétrico e de uma ou várias funções que descrevam adequadamente as características especiais de interesse. Para o sucesso do procedimento é essencial que possamos usar o modelo para gerar amostras do processo repetidamente. Desta forma, um modelo paramétrico precisa ter uma forma matemática com parâmetros conhecidos e uma distribuição de probabilidades conhecida para os erros.

Outro ponto a ser colocado é que, em alguns casos, os valores iniciais do processo podem ser importantes, entretanto, se o processo for estacionário, o efeito dos valores iniciais desaparece ao descartarmos certo número de pontos no início do processo de geração. No trabalho, como o processo é não-estacionário, foram usados alguns valores iniciais como a média da série ou a primeira observação da série e não verificamos grandes diferenças nas amostras após serem descartadas as primeiras 200 observações.

A essência do procedimento de verificação de adequabilidade do modelo é a obtenção de uma distribuição empírica das funções de interesse via Bootstrap paramétrico. Esta função de distribuição serve como distribuição referência com a qual o correspondente modelo pode ser comparado. Mais especificamente, o modelo ajustado aos dados é usado repetidamente para gerar várias réplicas dos dados originais, todas com mesmo número de observações e simulando-se os erros. As réplicas geradas são usadas para construção da distribuição empírica da função de interesse.

Um modelo é considerado adequado para descrever as características de interesse quando é capaz de reproduzir a quantidade de interesse. Desta maneira, usando as réplicas, constrói-se um envelope baseado nos quantis empíricos de ordens $100(1 - \alpha/2)\%$ e $100(\alpha/2)\%$ chamado de envelope de aceitação. Basta colocar o modelo estimado com base nos dados originais e os limites superior e inferior das bandas de confiança do Bootstrap paramétrico num mesmo gráfico e verificar se o modelo estimado originalmente está dentro das bandas de confiança. Caso isso ocorra, diremos que o modelo se adequa bem aos dados ou que o modelo está bem ajustado.

O método que foi aplicado pode ser resumido nos seguintes passos:

1. estimação por máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas do modelo auto-regressivo de duração condicional, com base em T observações, e reconstituição dos parâmetros variando no tempo, que serão usados como funções matemáticas geradoras dos dados;
2. cálculo dos resíduos do modelo original com base na diferença entre os valores observados e ajustados pelo modelo no item 1;
3. geração de B amostras independentes, de tamanho T e com reposição dos resíduos do modelo original;
4. reconstrução de cada um dos B processos utilizando as estimativas dos coeficientes de ondaletas gerados conforme o item (1);
5. estimação dos coeficientes de ondaletas por máxima verossimilhança para cada uma das B réplicas do processo e reconstituição dos parâmetros do modelo auto-regressivo de duração condicional, gerando B réplicas do modelo original;
6. confecção de gráficos e histogramas para estudo das características dos estimadores de máxima verossimilhança com base nas propriedades da distribuição empírica dos processos gerados.

Para mais detalhes, vide Tsay (1992) e Gamerman (1997).

4.3.2 Método de Metropolis-Hastings

Suponha que se deseja gerar uma amostra de uma distribuição complicada π através de uma cadeia de Markov. Esta distribuição pode ser qualquer função densidade de probabilidade ou densidade a posteriori. Neste último caso, π seria a própria posteriori, coincidente com a função de verossimilhança se forem usadas prioris não-informativas para os parâmetros. O algoritmo de Metropolis-Hastings fornece uma série de realizações dependentes que formam uma cadeia de Markov com distribuição de equilíbrio π .

Para que o algoritmo de Metropolis-Hastings seja implementado, necessitamos escolher uma função densidade $q(\cdot, \cdot)$ adequada, denominada função geradora de candidatos, e que possa ser facilmente amostrada. O núcleo de transição de θ^i para θ^{i+1} é denotado por $q(\theta^i, \theta^{i+1})$, em que θ^i é o vetor de parâmetros de interesse gerado no passo i . Este núcleo apenas define uma proposta de movimento, a qual deve ou não ser confirmada por π , e deve ter algumas propriedades para que π seja a distribuição de equilíbrio da cadeia; vide Metropolis et al. (1953) e Hastings (1970).

Um outro fator crítico na eficiência do algoritmo é a escolha da dispersão da densidade $q(\cdot, \cdot)$, uma vez que essa dispersão afeta o comportamento da cadeia em pelo menos duas dimensões: na taxa ou probabilidade de aceitação dos movimentos e na região do espaço amostral que é coberta pela cadeia. Suponha que a cadeia tenha convergido: se a dispersão escolhida para o núcleo de transição for muito grande, serão sorteados alguns pontos distantes dos valores atuais da cadeia e esses pontos terão baixa probabilidade de serem aceitos, fazendo com que a cadeia se mantenha num mesmo ponto por mais tempo. Por outro lado, se a dispersão escolhida for muito pequena, a cadeia não cobrirá o suporte da densidade e regiões de baixa probabilidade serão amostradas.

No trabalho, usamos a distribuição normal multivariada centrada no último candidato aceito e com matriz de covariâncias proporcional ao inverso da informação de Fisher estimada por máxima verossimilhança. A opção de amostrar os 48 coeficientes de ondaletas num único bloco permite aproveitar a estrutura de dependência existente entre os mesmos.

Geralmente, o processo se move de um ponto θ^i para um candidato θ^* com maior frequência do que de θ^* para θ^i , contradizendo a condição de reversibilidade $\pi(\theta^i)q(\theta^i, \theta^*) = \pi(\theta^*)q(\theta^*, \theta^i)$. Este fato pode ser corrigido se diminuirmos o número de movimentos de θ^i para θ^* e isto pode ser feito introduzindo uma probabilidade de movimento α . Assim, calcula-se a probabilidade de aceitação do candidato θ^* , sorteado no passo $i + 1$, como

$$\alpha(\theta^i, \theta^*) = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)q(\theta^*, \theta^i)}{\pi(\theta^i)q(\theta^i, \theta^*)}, 1\right), \text{ se } \pi(\theta^i)q(\theta^i, \theta^*) > 0$$

e $\alpha(\theta^i, \theta^*) = 1$, caso contrário. Outras expressões para α são apresentadas em Hastings (1970).

Pode-se mostrar que se o núcleo de transição, q , for irredutível e aperiódico e $\alpha(\theta^i, \theta^*) > 0$, para todos os possíveis valores (θ^i, θ^*) , então o algoritmo gera uma cadeia irredutível e aperiódica com distribuição limite π .

Se $q(., .)$ for uma distribuição simétrica, então o método de Metropolis-Hastings se reduz ao método de Metropolis com a probabilidade de aceitação de θ^* igual a

$$\alpha(\theta^i, \theta^*) = \min\left(\frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta^i)}, 1\right), \text{ se } \pi(\theta^i)q(\theta^i, \theta^*) > 0$$

e $\alpha(\theta^i, \theta^*) = 1$, caso contrário.

Uma vez que a escolha da função geradora de candidatos foi a distribuição normal, que é uma distribuição simétrica, usamos a última forma de calcular a probabilidade de aceitação.

O objetivo da aplicação do método de Metropolis-Hastings é o estudo das propriedades dos estimadores do modelo auto-regressivo de duração condicional com parâmetros variando no tempo e, desta maneira, necessitamos de uma amostra dos coeficientes de ondas seguindo sua distribuição a posteriori. Para obtenção da amostra, usamos prioris não-informativas e a posteriori ficou proporcional à verossimilhança, ou seja, $\pi(\theta) \propto L(\theta; x)$.

O método de Metropolis-Hastings está esquematizado a seguir:

1. iniciar o contador em $n = 1$ e θ^0 com as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros contidos em θ ;
2. gerar um candidato a θ^* segundo uma distribuição normal multivariada centrada em θ^0 e com matriz de covariâncias proporcional ao inverso da informação de Fisher;
3. calcular a probabilidade de aceitação do candidato θ^* ,

$$\alpha(\theta^0, \theta^*) = \min\left(\frac{L(\theta^*; x)}{L(\theta^0; x)}, 1\right), \text{ se } \pi(\theta^0)q(\theta^0, \theta^*) > 0$$

e $\alpha(\theta^0, \theta^*) = 1$, caso contrário;

4. sortear u de uma distribuição uniforme entre 0 e 1. Se $u \leq \alpha(\theta^0, \theta^*)$, então $\theta^1 = \theta^*$, ou seja, o candidato é aceito e será a nova posição da cadeia; senão $\theta^1 = \theta^0$, isto é, o candidato não é aceito e a cadeia não muda de posição;

5. mudar o contador de i para $i + 1$ e voltar ao passo 2 até obter convergência ($i = N$ grande).

Aqui, necessitamos de uma amostra aleatória dos coeficientes de ondaletas e, para isso, selecionamos uma amostra sistemática dos coeficientes aceitos pelo método de Metropolis-Hastings. Para ter idéia de quantos em quantos pontos deveríamos amostrar, a fim de gerar uma amostra aleatória de coeficientes, usamos a função de auto-correlação da amostra obtida via Metropolis-Hastings e depois conferimos se os coeficientes subamostrados são aproximadamente não-correlacionados com base em sua fac.

O sucesso do método depende de taxas de aceitação não muito baixas e de funções geradoras de candidatos fáceis de simular. O método substitui uma amostragem complicada de π por uma amostragem mais fácil utilizando a função geradora $q(., .)$. Portanto, o método só faz sentido se existir facilidade na geração de $q(., .)$.

Note que existe a possibilidade da cadeia permanecer numa posição por várias iterações, de maneira que Hastings (1970) sugere que seja calculada a taxa de rejeição da cadeia em aplicações práticas. Dois pontos são relevantes: uma cadeia que não se move, isto é, com alta taxa de rejeição deve ser evitada. Outro ponto importante é que a densidade de equilíbrio π só interfere no algoritmo através da razão em α . Em particular, quando π é a densidade a posteriori, raramente é conhecido o valor de sua constante de proporcionalidade, embora se saiba sua expressão funcional, fazendo com que o método de Metropolis-Hastings possa ser usado nestas situações.

Uma maneira simples de verificar a convergência da cadeia simulada via Metropolis-Hastings foi sugerida por Gelman e Rubin (1992), que propõe considerarmos várias cadeias em paralelo, partindo de valores iniciais distintos, e compararmos a variabilidade dentro e entre as cadeias amostradas para cada um dos parâmetros de interesse, seguindo a mesma idéia da análise de variância (ANOVA). Uma vez que a convergência tenha sido atingida no i -ésimo passo, consideramos que as realizações dos passos posteriores a i como uma amostra aleatória da distribuição desejada.

Para monitorar a convergência, estima-se um fator R , para $r \geq 2$ cadeias de compri-

mento N , definido por

$$R = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{W}}.$$

Sob convergência, todos os rN valores são gerados da posteriori e a variância da distribuição pode ser estimada consistentemente por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N-1}{N}W + \frac{1}{N}C,$$

em que W representa a variabilidade dentro das cadeias e C representa a variabilidade entre as cadeias, com base nas r cadeias simuladas, ou seja,

$$W = \frac{1}{r(N-1)} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^N (\theta_j^i - E(\theta_j))^2 \text{ e } C = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^r (E(\theta_j) - E(\theta_j^i))^2,$$

em que $E(\theta_j)$ é a média dos valores da cadeia $j = 1, 2, \dots, r$ e $E(\theta_j^i)$ é a média dos valores de todas as cadeias, isto é, média geral de todos os valores amostrados ou média das médias de cada uma das cadeias geradas. Note que R será sempre maior que 1.

O valor r não precisa ser muito grande para que não haja gasto computacional desnecessário e os autores sugerem entre 2 e 9 cadeias para avaliação da convergência.

Se as cadeias não convergiram, então os valores iniciais ainda estarão influenciando as trajetórias. Devido a esta super-dispersão, $\hat{\sigma}^2$ super-estimar a variância até que a estacionariedade seja atingida. Por outro lado, antes da convergência, W tende a sub-estimar a variância porque cada uma das cadeias ainda não atravessou o espaço de estados adequado.

Quando $N \rightarrow \infty$, ambos os estimadores convergem para a variância pelo teorema ergódico e $R \rightarrow 1$. A convergência das cadeias pode ser avaliada pela proximidade de R a 1. Sugere-se aceitar a convergência quando o valor de R é menor que 1, 2.

Mais detalhes do método de Metropolis-Hastings podem ser encontrados em Chib e Greenberg (1995) e Gamerman (1997).

Capítulo 5

Simulações

A seguir apresentamos algumas simulações com o objetivo de analisar o comportamento dos estimadores para o modelo auto-regressivo de duração condicional com coeficientes variando no tempo e erros distribuídos exponencialmente, propostos no capítulo anterior. Nas simulações foram utilizados os métodos de Monte Carlo, Bootstrap e Metropolis-Hastings com o intuito de avaliar o vício e variabilidade dos estimadores de interesse.

Como um primeiro estudo para verificar se as características de um processo não-estacionário, tais como periodicidades, poderiam ser incorporadas pelos parâmetros do modelo variando no tempo, usamos o método de Monte Carlo. Além disso, o método foi usado para verificarmos empiricamente se os estimadores para os coeficientes variando no tempo se reduziriam aos estimadores usuais no caso de um processo estacionário.

5.1 Método de Monte Carlo

Neste trabalho, o método de Monte Carlo é usado para estudar o comportamento dos estimadores do modelo auto-regressivo de duração condicional (ACD) com coeficientes variando no tempo em amostras finitas.

O método de Monte Carlo foi desenvolvido durante a segunda guerra mundial, em

pesquisas relacionadas à difusão aleatória de nêutrons em material radioativo. O método se baseia essencialmente na simulação de variáveis aleatórias para solução numérica de problemas. Este método tornou-se mais conhecido com o desenvolvimento dos computadores, uma vez que sua aplicação necessita de um volume considerável de cálculo para a simulação de variáveis aleatórias. Permitindo simular o comportamento de processos que dependem de fatores aleatórios, o método de Monte Carlo fornece a solução de numerosos problemas, na condição de se poder associar ao problema em questão um ou vários modelos probabilísticos especialmente escolhidos.

O método consiste na simulação independente de um certo número de processos, B , seguindo uma mesma lei probabilística. Suponha que o objetivo seja calcular $E(\hat{\theta})$, em que $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetros θ . A solução pelo método de Monte Carlo consiste na aproximação de $E(\hat{\theta})$ pela média das estimativas de máxima verossimilhança das amostras simuladas, ou seja,

$$E_{MC}(\hat{\theta}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i, \quad (5.1)$$

em que $\hat{\theta}_i$ é a estimativa de máxima verossimilhança para o i -ésimo processo simulado, $i = 1, \dots, B$.

O desvio padrão do estimador (5.1) é calculado com base no desvio padrão das estimativas obtidas, isto é,

$$DP_{MC}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B [\hat{\theta}_i - E_{MC}(\hat{\theta})]^2}.$$

Para mais detalhes do método de Monte Carlo, vide Ross (1997), Diggle e Gratton (1984), Rubinstein (1981) e Metropolis e Ulam (1949).

5.2 Séries Simuladas e Resultados

Para simplificar, consideramos o modelo ACD(1,1) com erros distribuídos exponencialmente com média 1. Os parâmetros do modelo terão a flexibilidade de variar no tempo

devido a utilização de sua decomposição em ondaletas. Neste caso, não há necessidade de usar um processo estacionário para os tempos entre as negociações, uma vez que os parâmetros do modelo que variam no tempo seriam capazes de captar as alterações do processo ao longo do tempo.

Foram simulados 2 processos de duração, um estacionário e outro não-estacionário. Com base nos resultados dos estimadores variando no tempo nestes processos, poderemos avaliar se os mesmos coincidem com os estimadores convencionais no caso de processos estacionários e se estes estimadores variando no tempo conseguem capturar a estrutura de dependência do processo não-estacionário sem fazer transformações prévias no processo, ou seja, sem retirar a sazonalidade intra-diária antes da estimação.

Os processos estudados foram:

1. processo de duração estacionária:

$$\begin{aligned}x_t &= \eta_t \epsilon_t, \\ \eta_t &= 0,6 + 0,2x_{t-1} + 0,7\eta_{t-1},\end{aligned}$$

em que $\epsilon_t \sim \text{Exponencial}(1)$, independentes, $t = 1, \dots, T$.

2. processo de duração não-estacionária:

$$\begin{aligned}x_t &= \eta_t \epsilon_t, \\ \eta_t &= 0,7 + \delta(t)x_{t-1} + 0,2\eta_{t-1},\end{aligned}$$

em que $\delta(t) = 0,25 \cos(2\pi t/T) + 0,5$, $\epsilon_t \sim \text{Exponencial}(1)$, independentes, $t = 1, \dots, T$. A Figura 5.1 apresenta o gráfico da função δ utilizada na simulação.

Os gráficos dos processos simulados, usando $T = 2048$ observações, bem como as respectivas funções de autocorrelação (fac) estão apresentados na Figura 5.2.

Com base na primeira coluna da Figura 5.2 percebemos que o processo simulado (1) é estacionário pois sua fac decresce para zero exponencialmente; o tempo médio entre as negociações para a série simulada é igual a 5,53 segundos e o desvio padrão do tempo

entre as negociações é 7,19 segundos. Calculando os valores teóricos para a média e desvio padrão deste processo, utilizando as expressões (3.6) e (3.7), encontramos os valores da esperança e desvio padrão do processo teórico simulado: $E(X) = 6,0$ segundos e $DP(X) = 7,43$. Estes valores são bem próximos dos valores amostrais encontrados para o processo simulado.

No caso do processo ACD com coeficientes variando no tempo, o tempo médio entre as negociações é igual a 2,51 segundos, com desvio padrão 3,86 segundos, vide segunda coluna da Figura 5.2. A fac apresenta decaimento lento com vários lags fora do intervalo com 95% de confiança, indicando que o processo dos tempos entre as negociações simulado é não-estacionário.

É interessante notar que o processo simulado tem as mesmas características da função utilizada para gerar o parâmetro de dependência do passado dos tempos entre as negociações, $\delta(t) = 0,25 \cos(2\pi t/T) + 0,5$ (Figura 5.1). No início e no final do período de tempo avaliado, os tempos entre as negociações são maiores, diminuindo nos tempos intermediários, assim como a função $\delta(t)$. Isso era esperado pois quando a função $\delta(t)$ tem valores maiores, os tempos entre as negociações são maiores pois dependem de forma mais forte do tempo entre as negociações anteriores. Da mesma forma, quando esta função tem valores menores, a dependência do tempo entre as negociações anteriores diminui, deixando os tempos entre as negociações mais próximos da média do processo, no caso, 2,51 segundos.

Foram simuladas $B = 350$ réplicas independentes da série de erros, cada uma delas com tamanho $T = 2048$ utilizando a distribuição exponencial com média 1. Com base nos erros, os 2 processos descritos anteriormente foram reconstituídos e a estimação dos parâmetros foi feita no programa *RATS*, utilizando o método BHHH (Berndt, Hall, Hall e Hausmann (1974)). A ondaleta LA(8) foi escolhida com $J = 4$, ou seja, usamos uma ondaleta pai e 4 níveis de detalhes (ondaletas-mãe), resultando em 16 coeficientes de ondaletas para serem estimados para cada um dos 3 parâmetros do modelo ACD. A estimação dos parâmetros foi feita usando o modelo ACD usual com parâmetros fixos e

o modelo ACD com parâmetros variando no tempo, para que fosse possível comparar o comportamento dos estimadores.

Na Figura 5.3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e seus desvios padrões via Monte Carlo para o processo estacionário simulado. Nota-se que os resultados foram satisfatórios, ou seja, a média das estimativas via Monte Carlo são semelhantes aos valores verdadeiros dos parâmetros, marcados com a linha pontilhada nos gráficos.

Vale ressaltar que os estimadores do modelo ACD com parâmetros variando no tempo apresentam-se praticamente constantes ao longo do tempo, o que é esperado para os processos estacionários pois seus parâmetros são fixos ao longo do tempo. Assim, temos uma indicação de que os estimadores para o modelo ACD de processos estacionários são casos particulares dos estimadores variando no tempo, usando a decomposição em ondaletas.

Para o parâmetro ω (constante do modelo), ambos os estimadores via Monte Carlo (sem ondaletas e com ondaletas) apresentam pequeno vício, comparados com o valor teórico 0,6. No caso do estimador convencional, este vício é negativo e igual a 0,10. Para o estimador variando no tempo, o vício é positivo e em torno de 0,13 em todos os tempos. O desvio padrão do estimador usual via Monte Carlo é igual a 0,08 e bem menor que o desvio padrão do estimador variando no tempo, que apresenta valores entre 0,25 e 0,35 nos tempos iniciais, intermediários e finais; e valores entre 0,2 e 0,25 para os demais tempos.

Os estimadores via Monte Carlo para δ (parâmetro de dependência em relação às durações passadas) praticamente não apresentam vício para ambos os modelos, comparados com o valor teórico 0,2. Ainda, o estimador variando no tempo é praticamente constante ao longo do tempo. O desvio padrão dos estimadores é próximo, igual a 0,02 para o modelo usual e entre 0,02 e 0,04 para o modelo com parâmetros variando no tempo.

No caso do parâmetro γ (parâmetro de dependência em relação à média), o estimador convencional não apresenta vício, enquanto o estimador variando no tempo apresenta pequeno vício negativo, da ordem de 0,10, quando comparado ao valor verdadeiro 0,7. O desvio padrão do estimador usual é igual a 0,04 e menor que o desvio padrão do estimador

variando no tempo, seguindo o mesmo padrão do desvio padrão de ω , com valores entre 0,08 e 0,12.

Nas Figuras de 5.4 a 5.6 apresentam-se os histogramas dos estimadores dos parâmetros para o modelo ACD usual, em determinados tempos. A distribuição do estimador para ω (Figura 5.4) apresenta concentração entre os valores 0,5 e 0,7, com uma leve assimetria à direita, apresentando alguns valores extremos superiores. No caso do estimador para δ (Figura 5.5), a distribuição concentra-se entre os valores 0,19 e 0,21 e parece mais simétrica, próxima à distribuição normal. A distribuição do estimador de γ (Figura 5.6) concentra-se entre 0,6 e 0,7, apresentando leve assimetria à esquerda com valores extremos inferiores.

Na Figura 5.7 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e seus desvios padrões via Monte Carlo, para o processo não-estacionário simulado. Os resultados dos estimadores para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo foram ótimos, apresentando médias das estimativas via Monte Carlo, bem próximas dos valores verdadeiros dos parâmetros, marcados com a linha pontilhada nos gráficos. No caso do modelo ACD usual, obtivemos estimadores viciados e que não permitem a captura das mudanças dos parâmetros ao longo do tempo, o que era esperado por se tratar de estimadores para processos estacionários.

Para o parâmetro ω (constante do modelo), ambos os estimadores apresentam vício, comparados com o valor teórico 0,7. No caso do estimador convencional, este vício é negativo e igual a 0,15. Para o estimador variando no tempo, o vício é positivo em todos os tempos e em torno de 0,06, variando de 0,04 a 0,09 ao longo do tempo. O desvio padrão do estimador usual, via Monte Carlo, é igual a 0,06, enquanto o desvio padrão do estimador variando no tempo, apresenta valores entre 0,10 e 0,15 nos tempos iniciais, intermediários e finais; e valores entre 0,08 e 0,10 para os demais tempos.

No caso do parâmetro δ (parâmetro de dependência em relação às durações passadas) as diferenças entre os estimadores foram extremas. O estimador variando no tempo praticamente não apresenta vício, acompanhando muito bem a função teórica que depende do

tempo, marcada no gráfico com linha pontilhada. O estimador usual apresentou valor constante ao longo do tempo, como se fosse uma média da função, com estimativa via Monte Carlo igual a 0,55. Mais uma vez podemos concluir que o estimador variando no tempo para o modelo ACD consegue captar muito bem as alterações do processo não-estacionário. Os desvios padrões dos estimadores são próximos, igual a 0,04 para o modelo usual e entre 0,04 e 0,06 para o modelo com parâmetros variando no tempo.

Os estimadores via Monte Carlo para γ (parâmetro de dependência em relação à média), parecem ser muito pouco viciados. Para o estimador do modelo ACD convencional, o vício foi positivo e igual a 0,05; para o estimador variando no tempo este vício foi menor ainda e negativo, constante ao longo do tempo e igual a 0,02, comparados com o valor verdadeiro 0,2. O desvio padrão do estimador usual é igual a 0,04 e menor que o desvio padrão do estimador variando no tempo, seguindo o mesmo padrão do desvio padrão de ω , com valores entre 0,04 e 0,07.

Nas Figuras de 5.8 a 5.10 apresentam-se os histogramas dos estimadores dos parâmetros para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo, em determinados tempos. A distribuição do estimador para ω (Figura 5.8) apresenta concentração entre os valores 0,65 e 0,8, com uma leve assimetria à direita, apresentando alguns valores extremos superiores. No caso do estimador para δ (Figura 5.9), a distribuição concentra-se nos valores da função da Figura 5.1 e parece simétrica, próxima à distribuição normal. A distribuição do estimador de γ (Figura 5.10) concentra-se entre 0,15 e 0,25, apresentando simetria. No geral, os histogramas parecem não apresentar grandes desvios em relação à distribuição normal.

Para testar a hipótese nula de não existência de correlação serial nos resíduos até o lag q , fizemos o teste proposto por Ljung e Box (1978) para as autocorrelações dos resíduos e dos resíduos ao quadrado do modelo ajustado.

Para o processo estacionário simulado, o valor da estatística do teste de Ljung-Box até o lag 12 foi igual a 18,21 ($p = 0,1096$) para os resíduos e igual a 17,00 ($p = 0,1496$) para os resíduos ao quadrado do modelo ajustado com parâmetros variando no tempo, indicando

que a hipótese de ruído branco até o lag 12 não deve ser rejeitada com 95% de confiança, tanto para os resíduos como para os resíduos ao quadrado. No caso do mesmo processo estacionário, mas estimado com base num modelo EACD sem coeficientes variando no tempo, obtivemos um valor da estatística de Ljung-Box igual a 8,619 ($p = 0,7351$) para os resíduos e igual a 11,13 ($p = 0,5182$) para os resíduos ao quadrado, também indicando bom ajuste das correlações seriais para este modelo no caso do processo estacionário.

No caso do processo não-estacionário simulado, o valor da estatística do teste de Ljung-Box até o lag 20 foi igual a 20,52 ($p = 0,4257$) para os resíduos e igual a 13,84 ($p = 0,8387$) para os resíduos ao quadrado do modelo ajustado, indicando que a hipótese de ruído branco até o lag 20 não deve ser rejeitada, com 95% de confiança, para o modelo com parâmetros variando no tempo, tanto para os resíduos como resíduos ao quadrado. Já para a estimação do processo não-estacionário via modelo com parâmetros fixos, o valor da estatística de Ljung-Box para os resíduos foi igual a 31,43 ($p = 0,0421$) e para os resíduos ao quadrado foi igual a 27,38 ($p = 0,1250$), indicando que este modelo não conseguiu capturar as características de dependência serial do processo não-estacionário, o que era de esperar pois os coeficientes do modelo são fixos no tempo.

A Figura 5.11 apresenta a média e os quantis empíricos com 90% das estimativas ordenadas via Bootstrap (210 réplicas) e via Metropolis-Hastings (200 réplicas). Estes valores podem ser comparados com os verdadeiros valores dos parâmetros (linha pontilhada).

Nos dois métodos de simulação, a amplitude dos quantis varia ao longo do tempo, sendo um pouco maior para as durações iniciais, intermediárias e finais.

Para analisar os resultados obtidos nas simulações, lembramos que os parâmetros ω e γ são invariantes no tempo e que apenas o parâmetro δ varia ao longo do tempo. Desta maneira, o parâmetro mais importante para avaliação dos métodos de simulação é o δ , que indica a dependência da duração passada.

Pelo método Bootstrap, há um bom ajuste do parâmetro δ , uma vez que a média via Bootstrap é praticamente coincidente com o verdadeiro valor de γ ao longo de todo o tempo e também está dentro dos limites inferior e superior dos quantis empíricos com 90%

das estimativas. Para os demais parâmetros constantes ao longo do tempo, percebemos certa falta de ajuste em relação aos verdadeiros valores, dado que há distanciamento entre as médias via Bootstrap e os valores verdadeiros e, em grande parte dos tempos, os parâmetros verdadeiros estão fora dos quantis empíricos.

Para o método de Metropolis-Hastings há maior proximidade entre os valores médios da simulação e os verdadeiros, além de todos os parâmetros verdadeiros estarem contidos dentro dos limites inferior e superior dos quantis contendo 90% das estimativas. Há indícios de que o método de Metropolis-Hastings ajustou melhor o processo não-estacionário simulado quando comparado com o método de Bootstrap paramétrico. Porém, com base apenas no coeficiente δ que varia no tempo, o ajuste via bootstrap foi melhor.

Como já visto anteriormente, o método de Monte Carlo foi usado para estudar o comportamento dos estimadores do modelo EACD(1,1) para o processo não-estacionário simulado, resultando num ótimo ajuste para todos os parâmetros que variam ou não ao longo do tempo (vide Figura 5.7). Assim, podemos comparar os 3 estimadores, de máxima verossimilhança, via Bootstrap e Metropolis-Hastings com o verdadeiro valor dos parâmetros, apresentados na Figura 5.12. No caso do parâmetro δ , os 3 estimadores tiveram bons resultados, entretanto, o pior resultado foi obtido utilizando Metropolis-Hastings. Para os demais parâmetros, há uma semelhança muito grande dos estimadores via máxima verossimilhança e Metropolis-Hastings e estes se aproximam bastante do verdadeiro valor, apesar de serem levemente viciados.

Calculamos o erro quadrático médio dos estimadores para compará-los melhor, bem como a eficiência dos mesmos em relação ao estimador de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo (Tabela 5.1). O erro quadrático médio é pequeno para todos os estimadores.

Para o parâmetro ω , o estimador de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo foi mais eficiente que os demais. No caso de δ , único parâmetro gerado variando no tempo, houve maior eficiência do estimador via Bootstrap e para γ o estimador via Metropolis-Hastings foi melhor.

Tabela 5.1 Erro quadrático médio (EQM), eficiência e erro quadrático médio de ajuste (EQMA) dos modelos EACD(1,1) com e sem parâmetros variando no tempo.

Estimador	Parâmetro	ω	δ	γ	EQMA
EMV - parâmetros variando	EQM	0,0086	0,0018	0,0034	1,9948
	eficiência	-	-	-	
Bootstrap - parâmetros variando	EQM	0,2517	0,0007	0,0368	1,9145
	eficiência	29,2674	0,3889	10,8235	
Metropolis-Hastings - parâmetros variando	EQM	0,0387	0,0078	0,0024	2,0490
	eficiência	4,5000	4,3333	0,7059	
EMV - parâmetros fixos	EQM	0,1125	0,0314	0,0056	2,0566
	eficiência	13,0814	17,4444	1,6470	

Além disso, calculamos a eficiência dos estimadores em relação ao estimador de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo. Percebe-se que o modelo que teve o pior desempenho foi o modelo com parâmetros fixos, o que era de esperar já que o processo simulado é não-estacionário.

Com base no erro quadrático médio de ajuste para cada um dos modelos, que equivale à média dos resíduos ao quadrado e está relacionado ao ajuste do modelo, o estimador via Bootstrap para o modelo com parâmetros variando foi melhor. É importante notar que há uma diferença muito pequena nos erros quadráticos médios de ajuste dos modelos avaliados. O pior modelo levando-se em conta o ajuste também foi o com parâmetros fixos no tempo.

A análise de resíduos dos modelos ajustados foi feita com base na construção de gráficos (da fac e do tipo QQ plot), bem como no teste de Kolmogorov-Smirnov para verificação do ajuste dos resíduos à distribuição exponencial e do teste de Ljung-Box (Tabela 5.2).

Tabela 5.2 Valores da estatística de Ljung-Box e níveis descritivos (entre parênteses) para o teste de ausência de correlação serial até o lag q nos resíduos e resíduos ao quadrado.

	q	12	20	50	100
Estimador 1	resíduos	14,31 (0,2814)	20,52 (0,4257)	41,71 (0,7918)	95,84 (0,5991)
	res. quadrado	6,19 (0,9060)	13,84 (0,8387)	36,20 (0,9284)	81,02 (0,9177)
Estimador 2	resíduos	26,61 (0,0088)	32,82 (0,0353)	53,57 (0,3390)	106,84 (0,3015)
	res. quadrado	20,94 (0,0512)	29,39 (0,1005)	53,22 (0,3513)	98,41 (0,5262)
Estimador 3	resíduos	15,14 (0,2337)	21,05 (0,3939)	39,95 (0,8446)	93,64 (0,6599)
	res. quadrado	20,94 (0,0512)	28,39 (0,1005)	53,22 (0,3513)	98,41 (0,5262)
Estimador 4	resíduos	16,08 (0,1876)	31,43 (0,0498)	68,51 (0,0421)	147,71 (0,0014)
	res. quadrado	9,09 (0,6950)	27,38 (0,1250)	65,17 (0,0734)	133,78 (0,0136)

Estimador 1: EMV - parâmetros variando no tempo

Estimador 2: Bootstrap - parâmetros variando no tempo

Estimador 3: Metropolis-Hastings - parâmetros variando no tempo

Estimador 4: EMV - parâmetros fixos

Com base nos testes de Ljung-Box, da Tabela 5.2, concluímos que, para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, tanto o estimador de máxima verossimilhança quanto o estimador via Metropolis-Hastings, conseguem capturar a estrutura de dependência entre as durações do processo não-estacionário simulado para todos os lags selecionados ($q = 12, 20, 50$ e 100). No caso do estimador Bootstrap, a hipótese de ausência de correlação serial entre os resíduos foi rejeitada para $q=12$ e $q=20$, indicando que o ajuste não permitiu a total modelagem da dependência entre as durações, apesar da falta dos lags que estão fora do intervalo de confiança ser próxima a 0,06. Todos os modelos com coeficientes variando no tempo modelaram bem a volatilidade das durações, o que não aconteceu nos modelos com coeficientes fixos.

Não foi rejeitada a hipótese de que os resíduos dos modelos estimados seguem distribuição exponencial de acordo com o teste de Kolmogorov-Smirnov, o que também pode

ser verificado com base na análise de resíduos na Figura 5.14. O bom ajuste dos resíduos à distribuição exponencial também pode ser verificado nos gráficos de quantis, havendo leves desvios da exponencial apenas para os maiores resíduos, especialmente para o modelo com parâmetros fixos.

5.3 Conclusões Gerais

Com base nas estimativas dos parâmetros do modelo ACD(1,1) com erros distribuídos exponencialmente, obtidas via método de Monte Carlo, conclui-se que:

1. Processo estacionário:

- os resultados foram satisfatórios tanto para o modelo ACD usual quanto para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo. Os estimadores do modelo com coeficientes variando no tempo foram aproximadamente constantes, indicando que estes estimadores possivelmente se reduzem aos estimadores do modelo usual no caso de processos estacionários;
- os estimadores para a constante (ω) dos modelos usual e com parâmetros variando no tempo apresentaram pequeno vício positivo e negativo, respectivamente. Para o parâmetro de dependência em relação às durações passadas (δ), os estimadores dos dois modelos praticamente não apresentaram vício. Já no caso do parâmetro que modela a dependência em relação à média (γ), o estimador variando no tempo apresenta pequeno vício negativo;
- para todos os parâmetros do modelo ACD, o desvio padrão dos estimadores, calculados via Monte Carlo, foram maiores para o modelo com parâmetros variando no tempo, sendo bem próximos para δ . Além disso, o desvio padrão via Monte Carlo varia ao longo do tempo para o modelo com parâmetros variando no tempo;

- os histogramas das estimativas para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo, em alguns tempos fixados, têm padrão aproximadamente simétrico para δ e apresentam leve grau de assimetria para os demais parâmetros;
- com base na Figura 5.11 e nos testes de Ljung-Box, nota-se que os dois modelos conseguiram captar a estrutura de dependência existente nos tempos entre as negociações, gerando resíduos e resíduos ao quadrado que levam à não rejeição de ruído branco até o lag 12, com 95% de confiança.

2. Processo não-estacionário:

- os resultados dos estimadores para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo foram significativamente melhores do que os do modelo usual (com parâmetros fixos), o que era esperado pelo padrão não-estacionário do processo. Mesmo para os parâmetros invariantes no tempo, manteve-se o resultado superior para os estimadores utilizando ondaletas;
- o vício do estimador para ω foi menor para o modelo com parâmetros variando no tempo e praticamente igual ao do modelo usual para γ . No caso de δ , parâmetro variante no tempo, a supremacia do estimador do modelo com parâmetros variando no tempo pode ser observada muito bem, conseguindo captar o comportamento do parâmetro ao longo do tempo;
- o desvio padrão dos estimadores, via Monte Carlo, para o modelo ACD com parâmetros variando no tempo varia ao longo do tempo, sendo maior que o desvio padrão dos estimadores do modelo convencional, quase igualando-se para δ ;
- os histogramas das estimativas dos parâmetros para o modelo ACD com o uso de ondaletas, em determinados tempos, têm leve assimetria à direita para ω e são aproximadamente simétricos para δ e γ . No geral, os histogramas parecem não apresentar grandes desvios em relação à distribuição normal;

- com base na Figura 5.11 e nos testes de Ljung-Box, percebe-se que somente o modelo com parâmetros variando no tempo conseguiu capturar a estrutura de dependência existente nos tempos entre as negociações, gerando resíduos e resíduos ao quadrado que levam à não rejeição de ruído branco até o lag 12, com 95% de confiança. Tanto os resíduos quanto os resíduos ao quadrado do modelo usual apresentam sinais de correlação serial, uma vez que seus coeficientes são fixos ao longo do tempo.
- os modelos com parâmetros variando no tempo foram mais eficientes que o modelo convencional, com parâmetros fixos, para o ajuste das durações do processo EACD(1,1) não-estacionário. Além disso, o estimador via Bootstrap para o modelo com coeficientes variando no tempo foi o que apresentou o menor erro quadrático médio de previsão, ou seja, menor média dos resíduos ao quadrado.

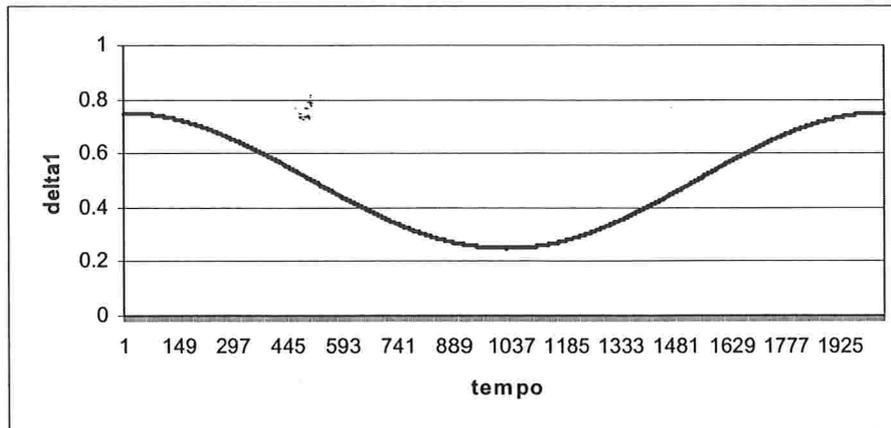


Figura 5.1: Valores da função δ utilizada para simulação do processo EACD(1,1) com coeficientes variando no tempo.

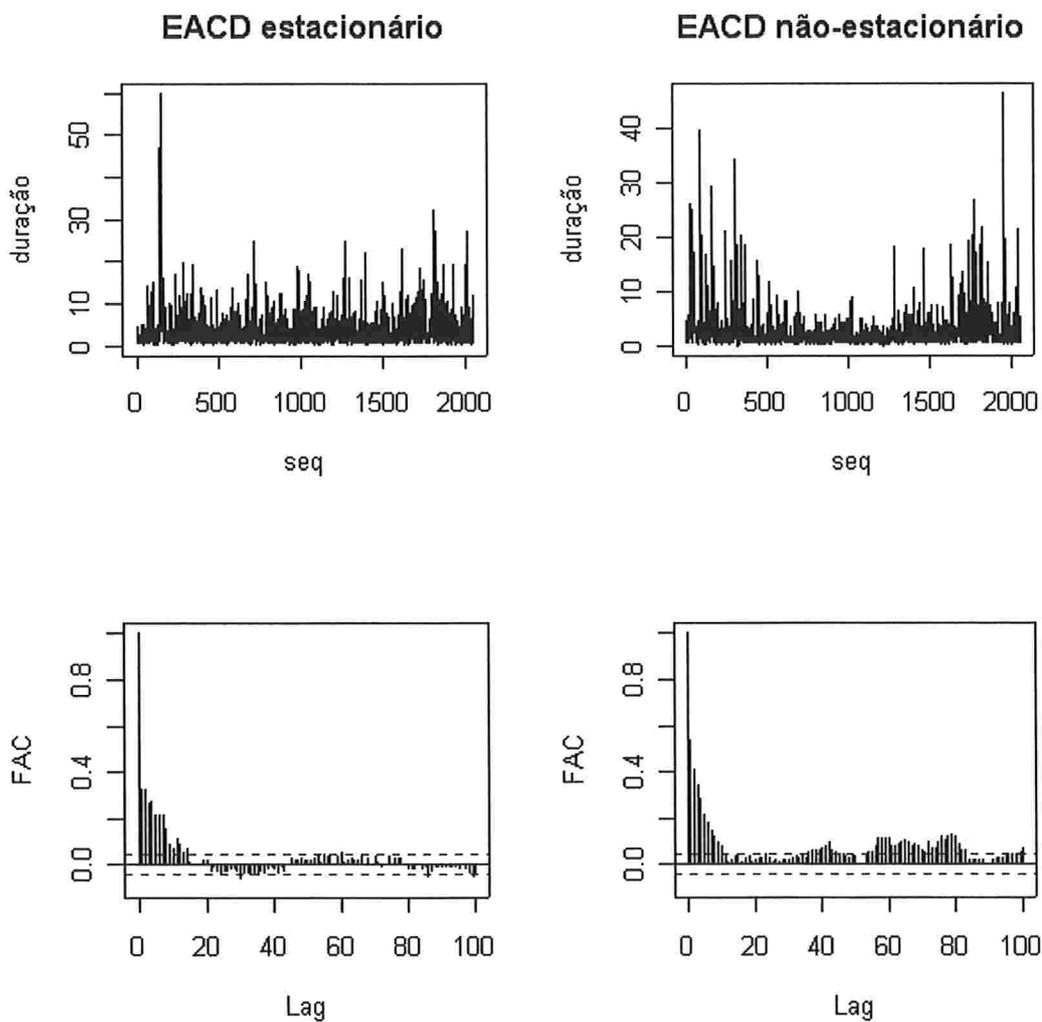


Figura 5.2: Processos simulados e função de auto-correlação para o modelo EACD(1,1) com duração estacionária e não-estacionária.

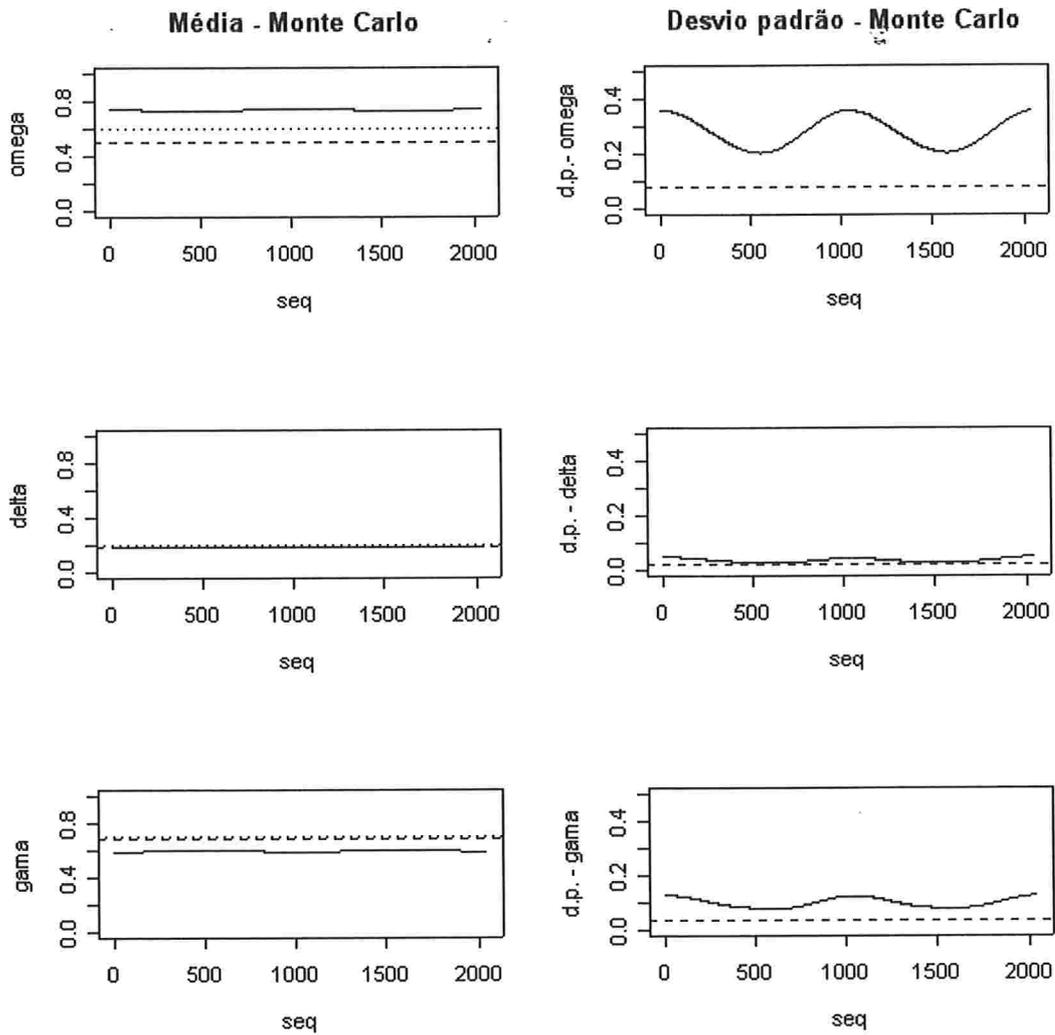


Figura 5.3: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia), do modelo com parâmetros fixos (linha tracejada) e valores verdadeiros dos parâmetros (linha pontilhada) para processo EACD(1,1) estacionário simulado via Monte Carlo. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia) e do modelo com parâmetros fixos (linha tracejada).

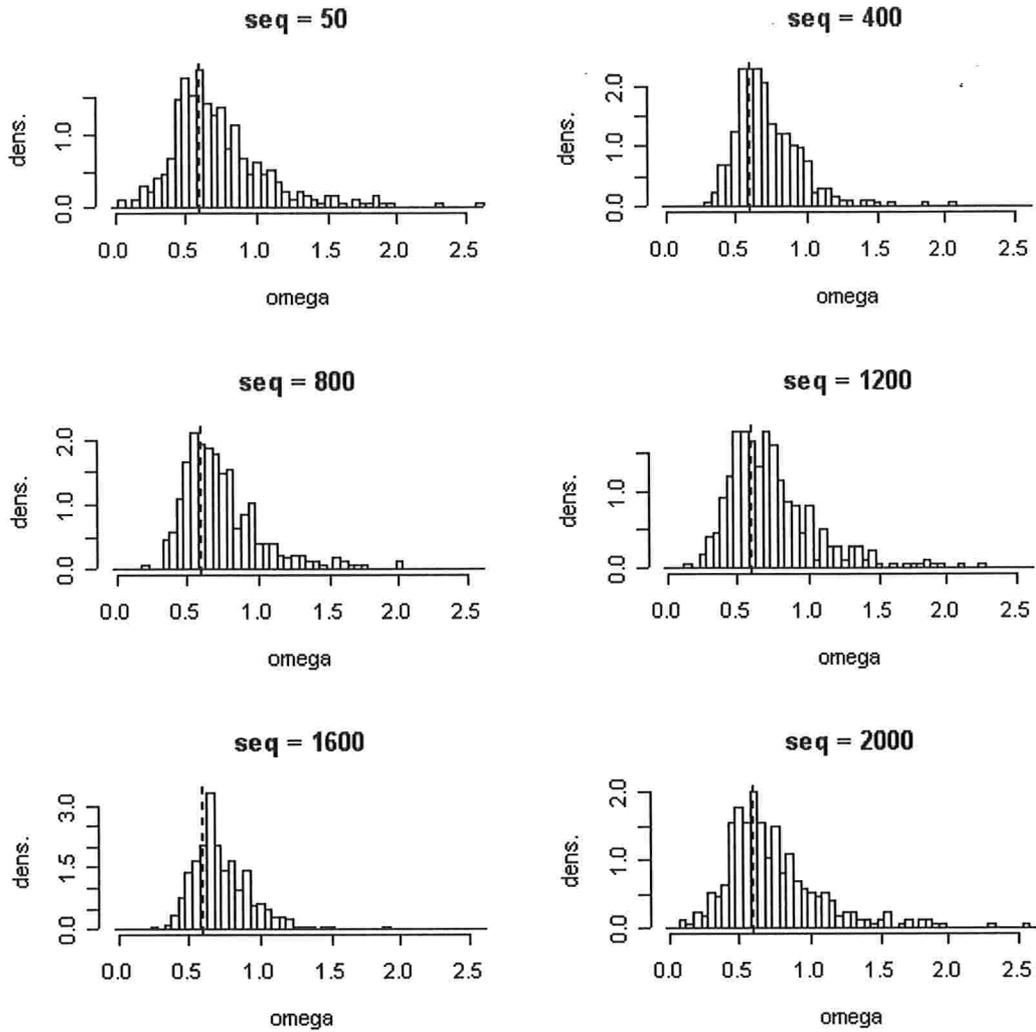


Figura 5.4: Histogramas das estimativas do parâmetro ω , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo estacionário simulado em tempos fixados.

δ

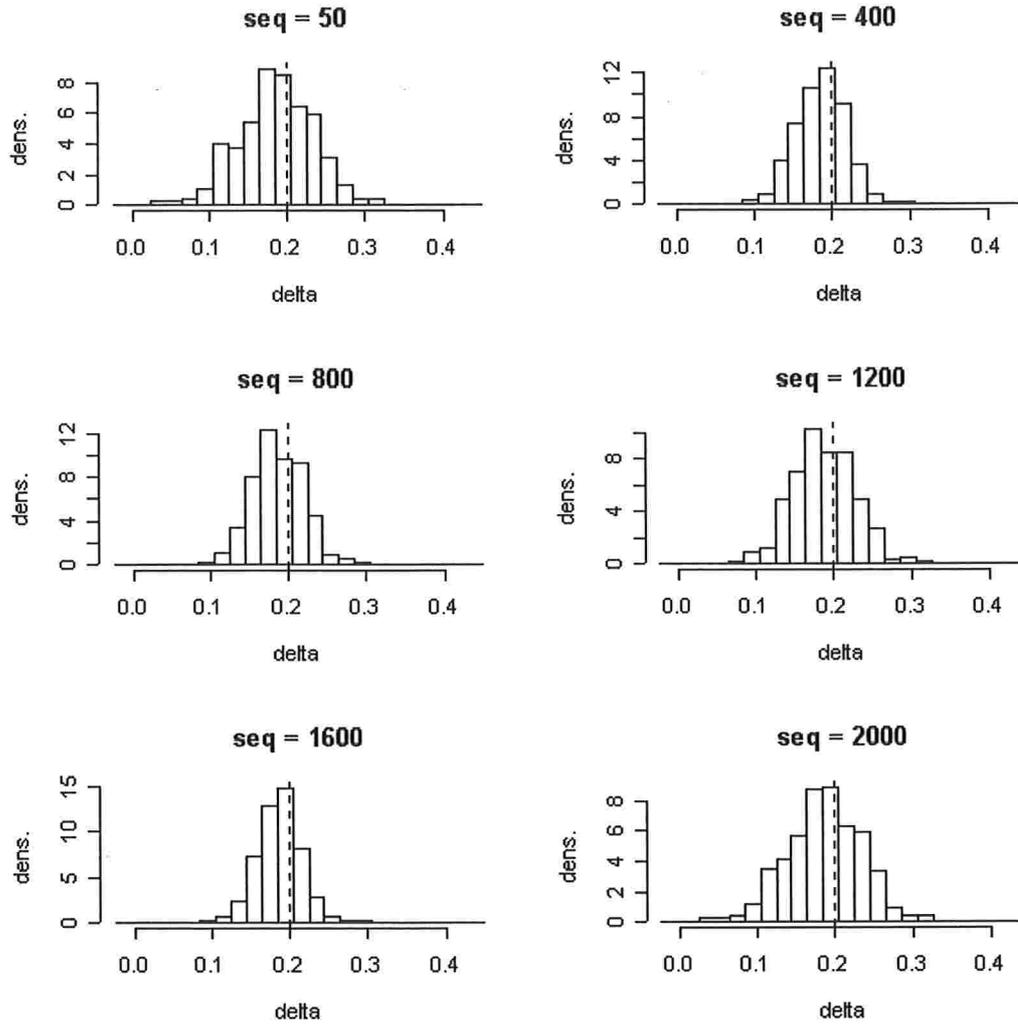


Figura 5.5: Histogramas das estimativas do parâmetro δ , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo estacionário simulado em tempos fixados.

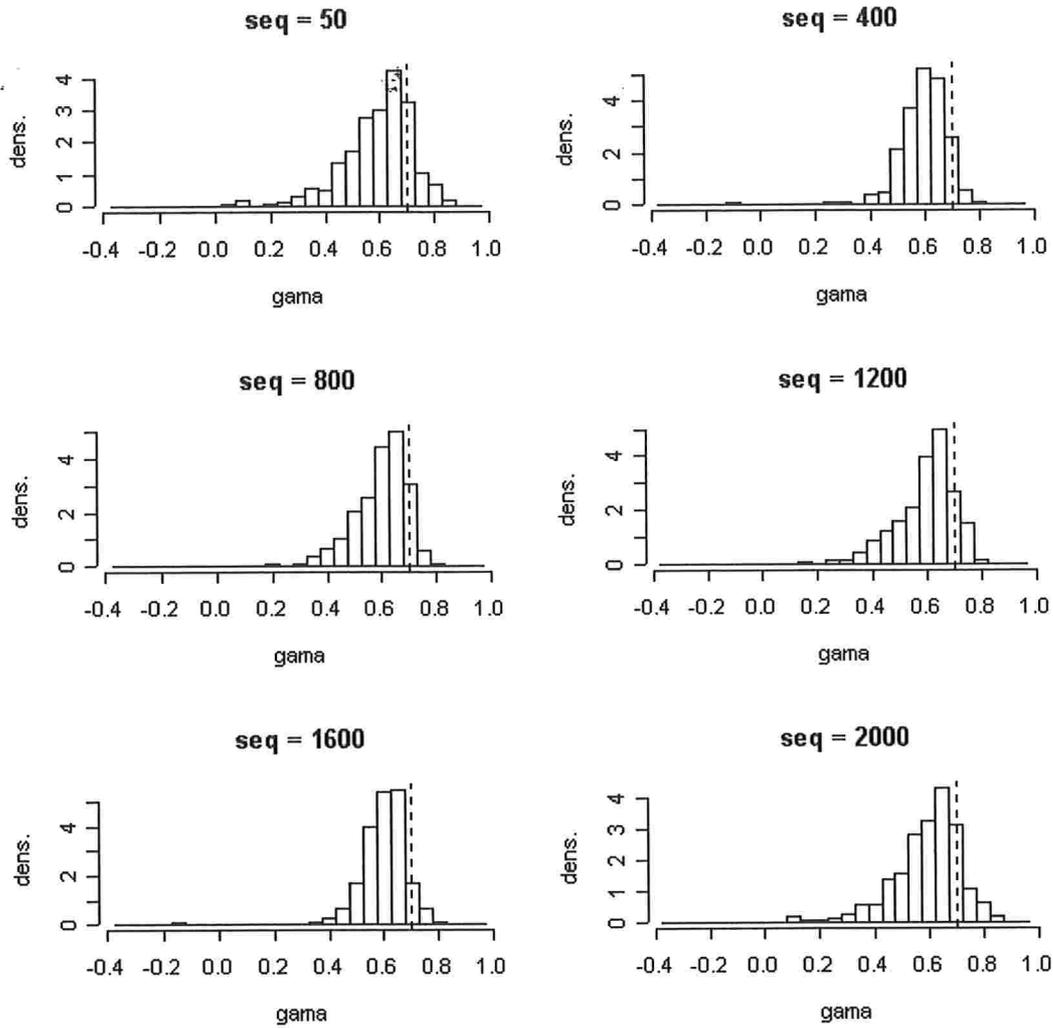


Figura 5.6: Histogramas das estimativas do parâmetro γ , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo estacionário simulado em tempos fixados.

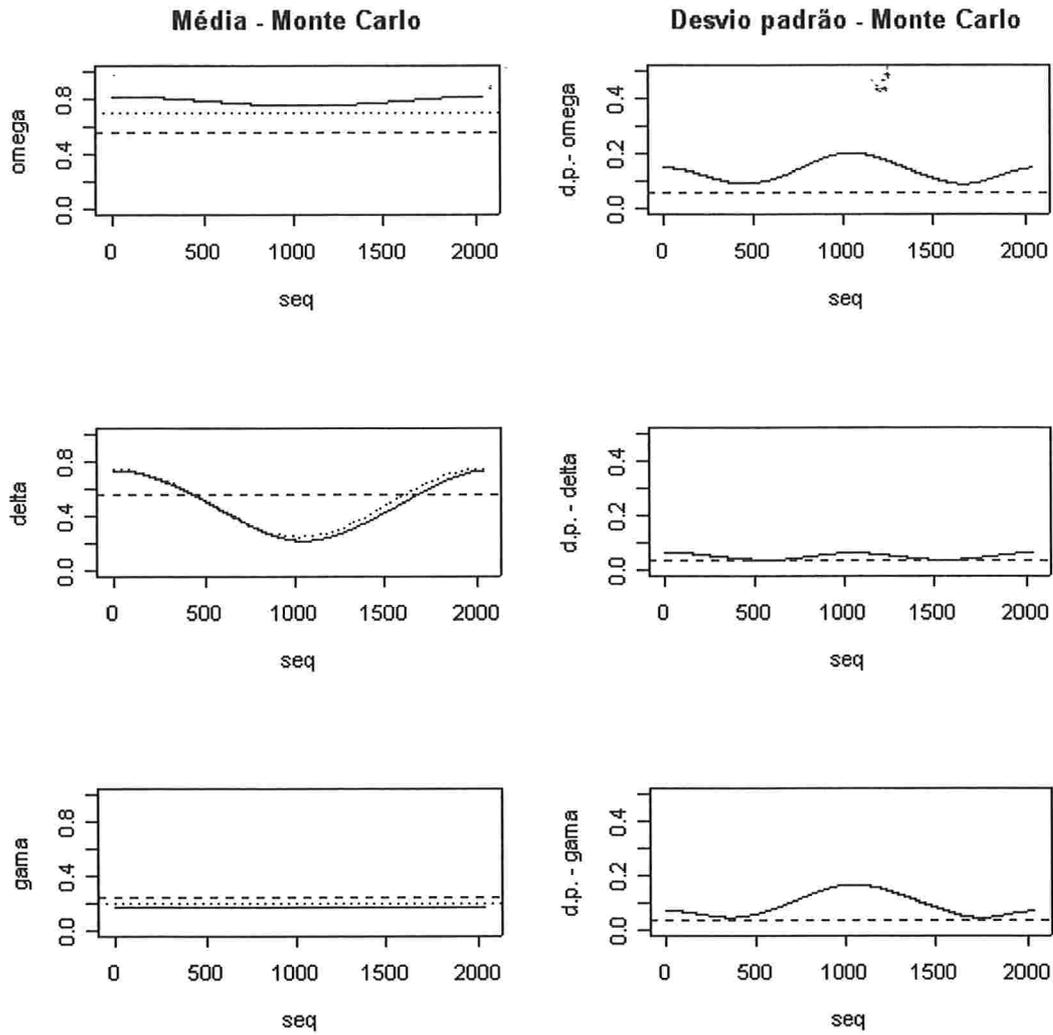


Figura 5.7: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia), do modelo com parâmetros fixos (linha tracejada) e valores verdadeiros dos parâmetros (linha pontilhada) para processo EACD(1,1) não-estacionário simulado via Monte Carlo. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia) e do modelo com parâmetros fixos (linha tracejada).

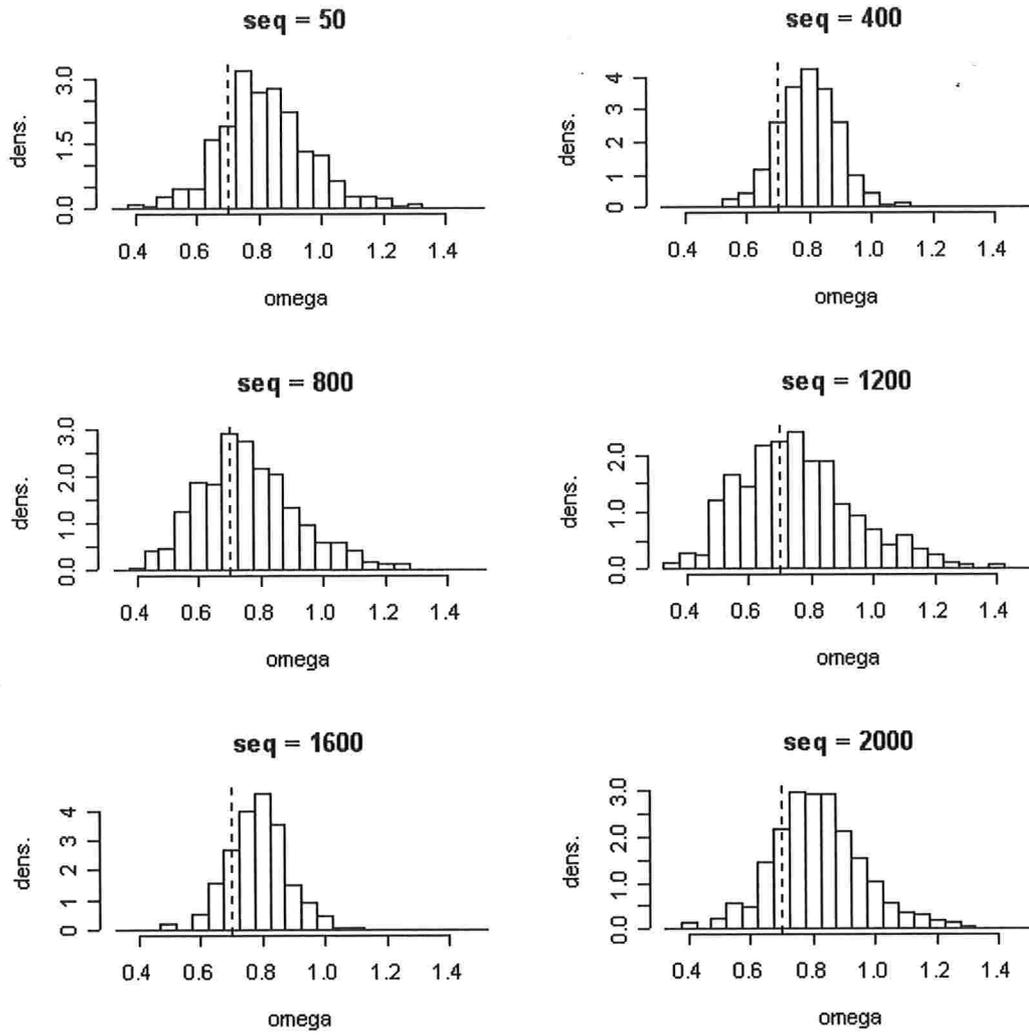


Figura 5.8: Histogramas das estimativas do parâmetro ω , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo não-estacionário simulado em tempos fixados.

δ

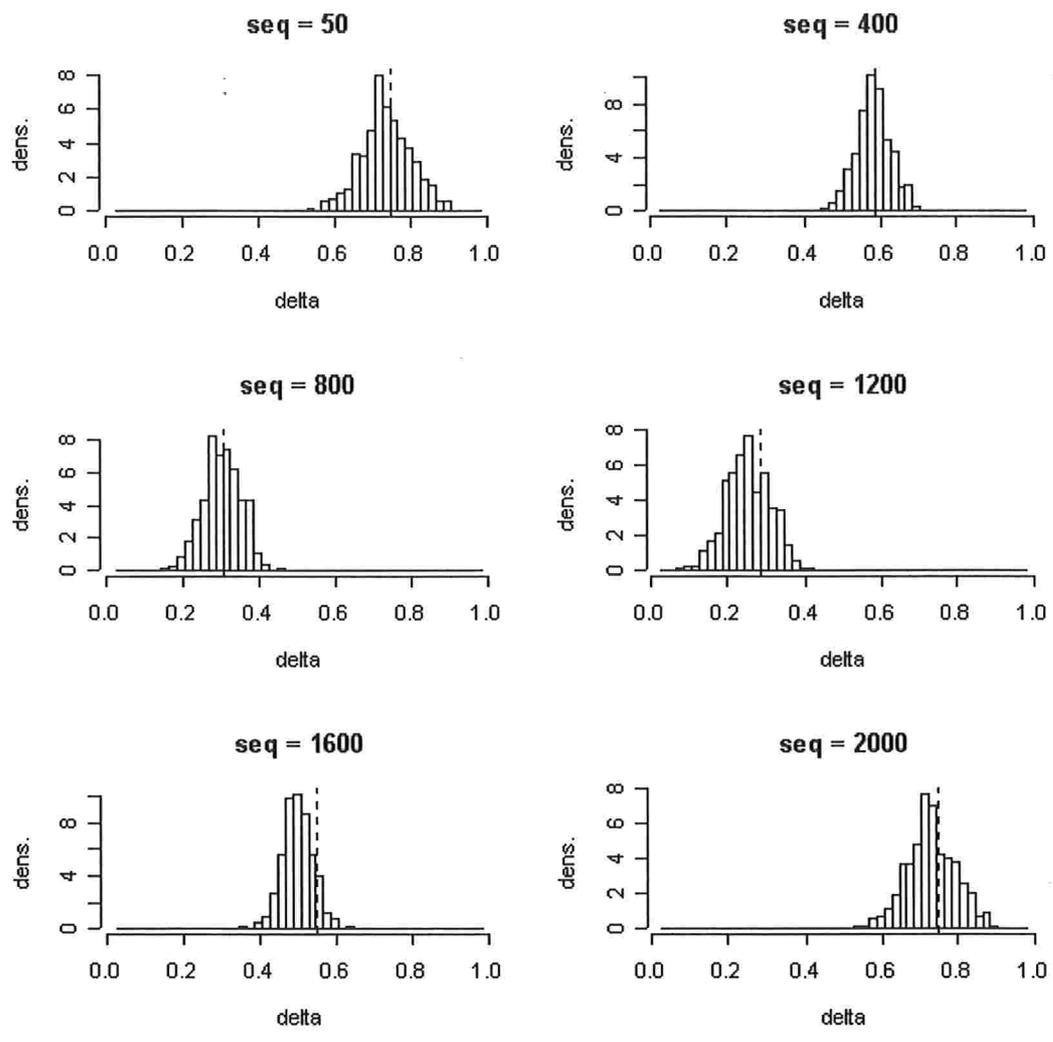


Figura 5.9: Histogramas das estimativas do parâmetro δ , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo não-estacionário simulado em tempos fixados.

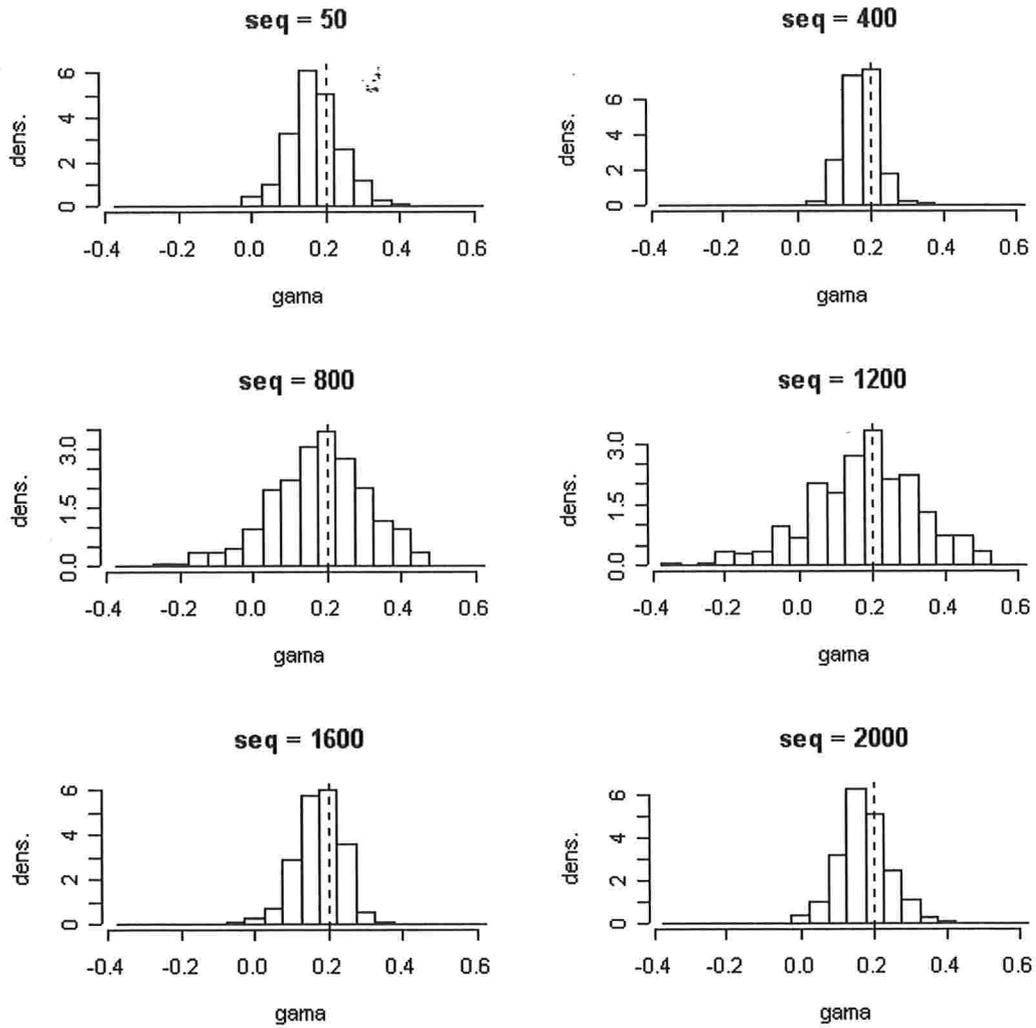


Figura 5.10: Histogramas das estimativas do parâmetro γ , usando o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, para o processo não-estacionário simulado em tempos fixados.

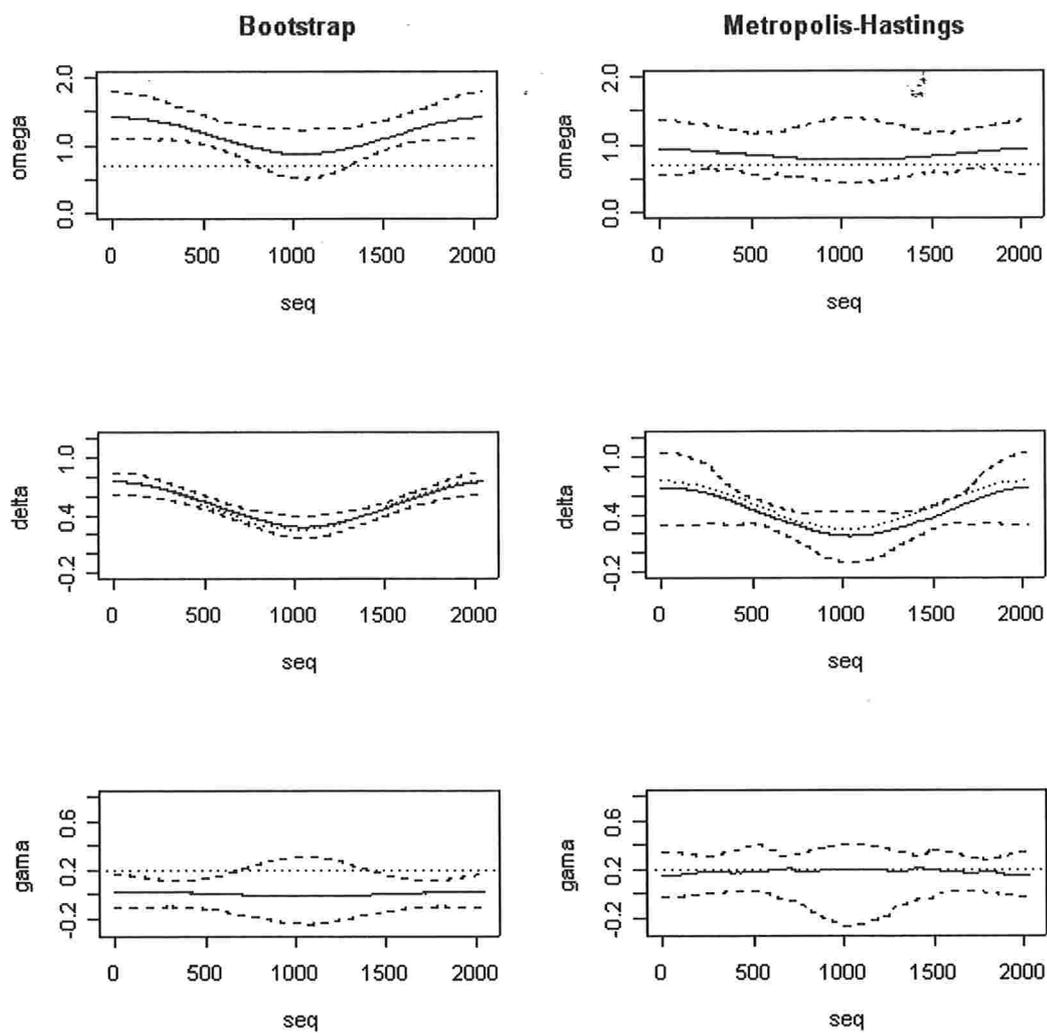


Figura 5.11: Média (linha cheia) e quantis empíricos com 90% das estimativas (linha tracejada) para os estimadores dos parâmetros do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado. A linha pontilhada indica o verdadeiro valor do parâmetro.

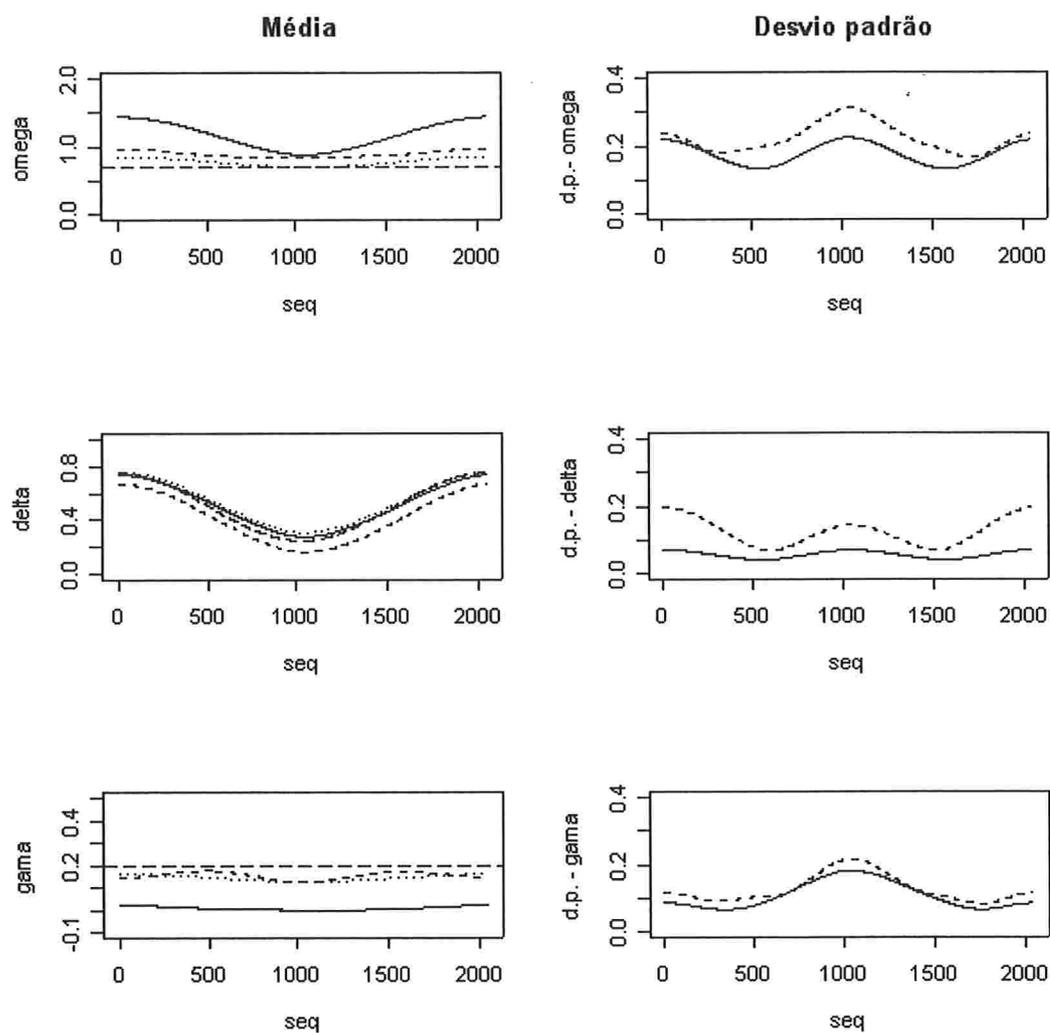


Figura 5.12: Média e desvio padrão para os estimadores dos parâmetros do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado, para comparação dos resultados das simulações via Bootstrap (linha cheia), via Metropolis-Hastings (linha tracejada fina), do EMV para o modelo com parâmetros variando no tempo (linha pontilhada) e do verdadeiro valor do parâmetros (linha tracejada grossa).

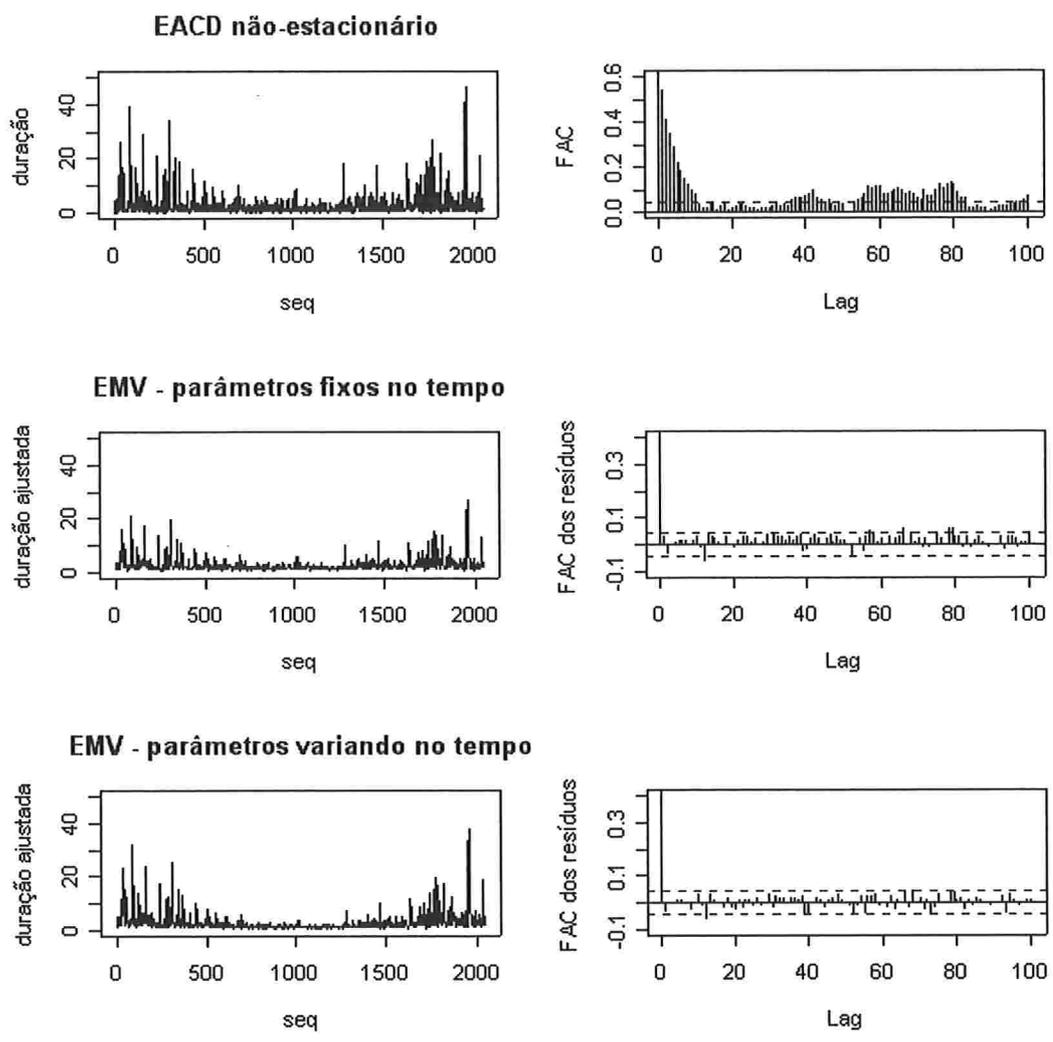


Figura 5.13: Processo EACD(1,1) não-estacionário simulado e durações ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

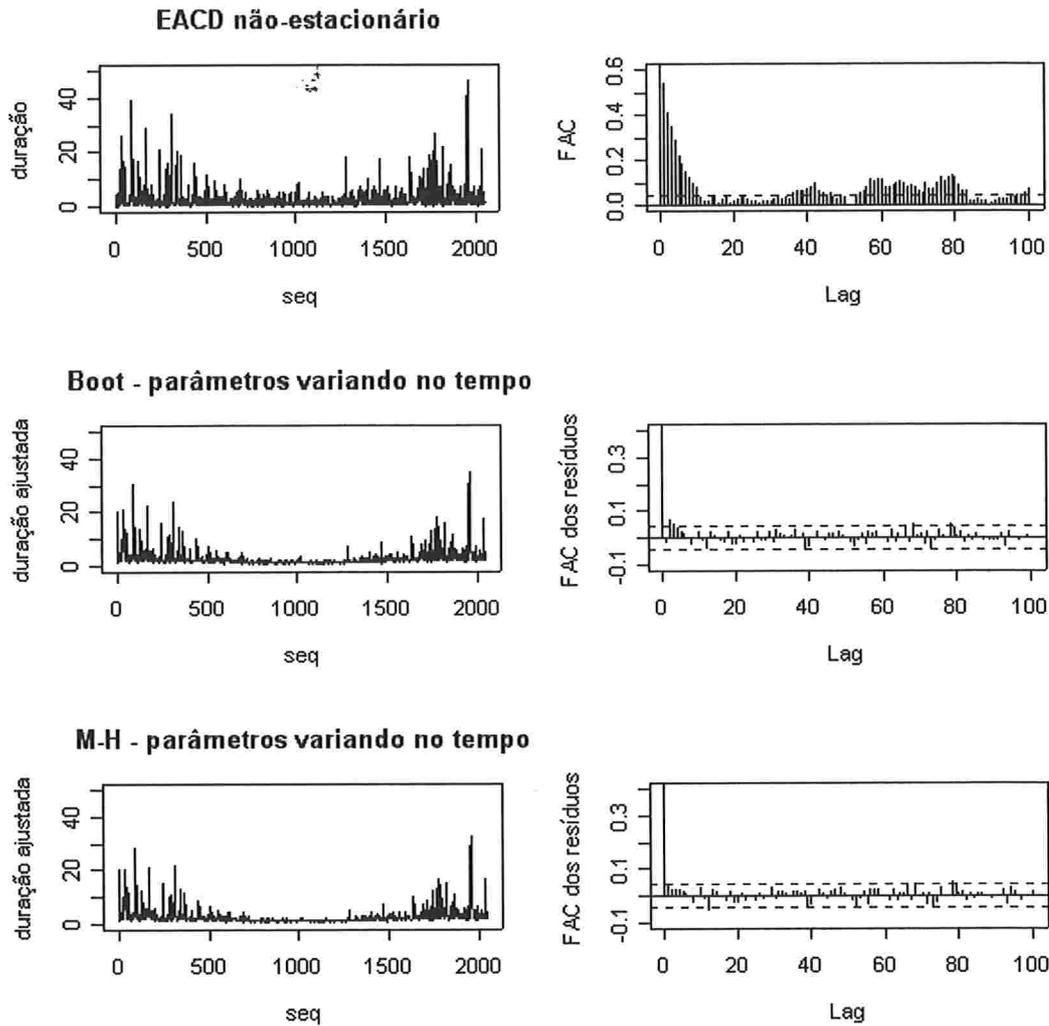


Figura 5.13 (continuação): Processo EACD(1,1) não-estacionário simulado e durações ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

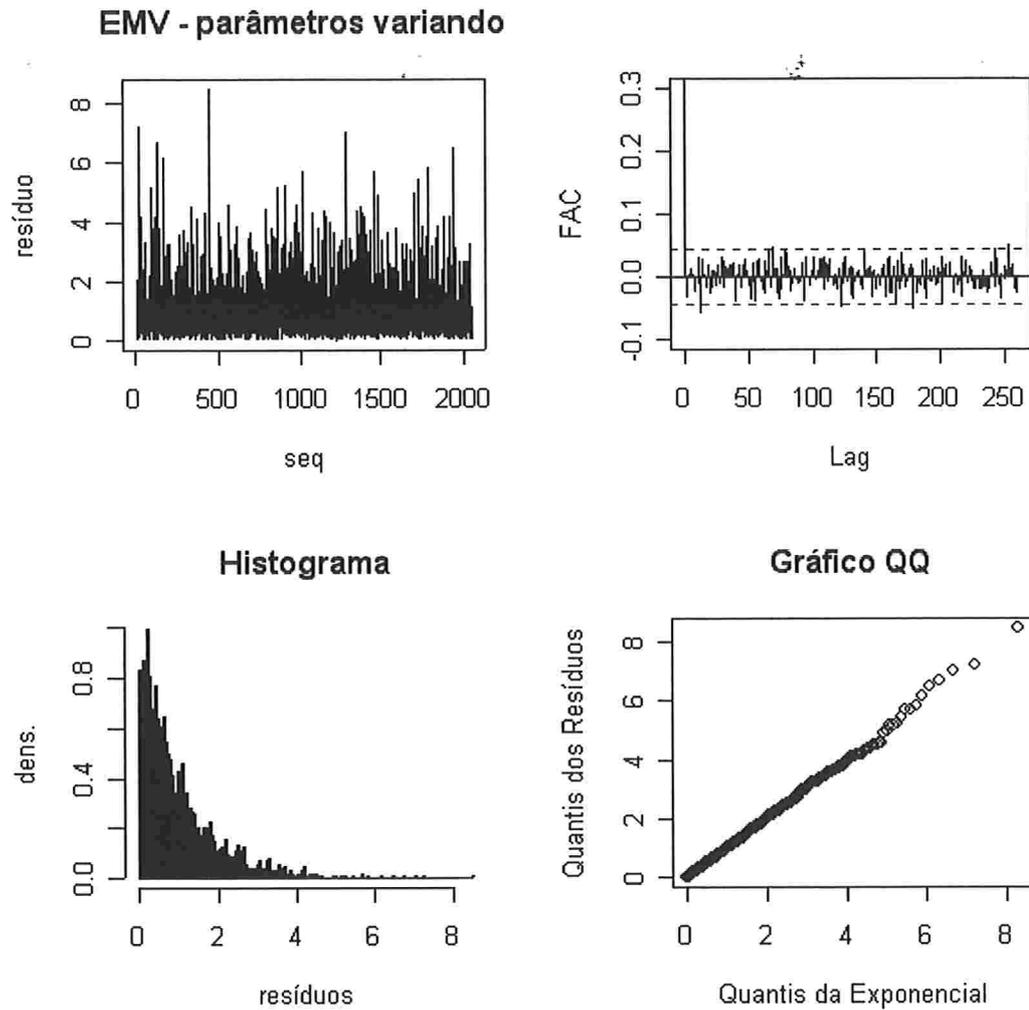


Figura 5.14: Resíduos e análise de resíduos para as durações do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

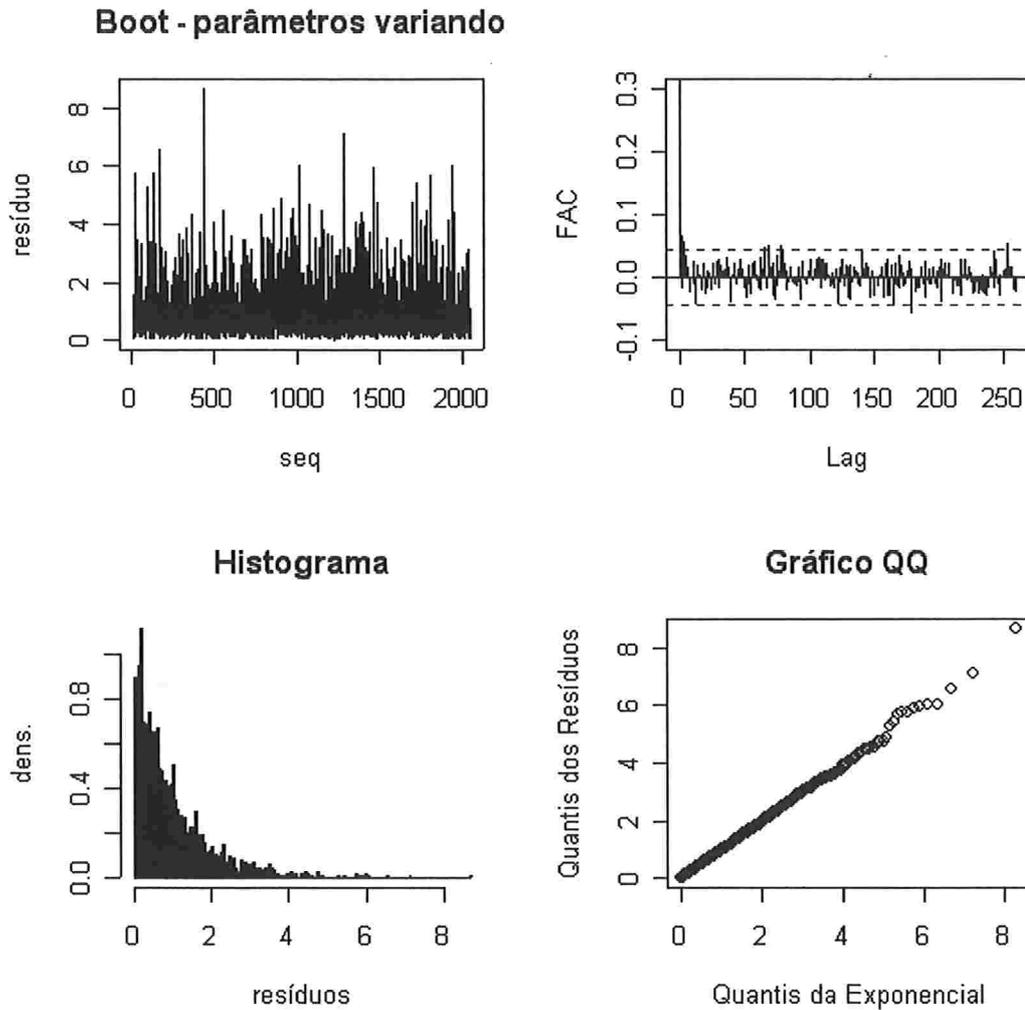


Figura 5.14 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

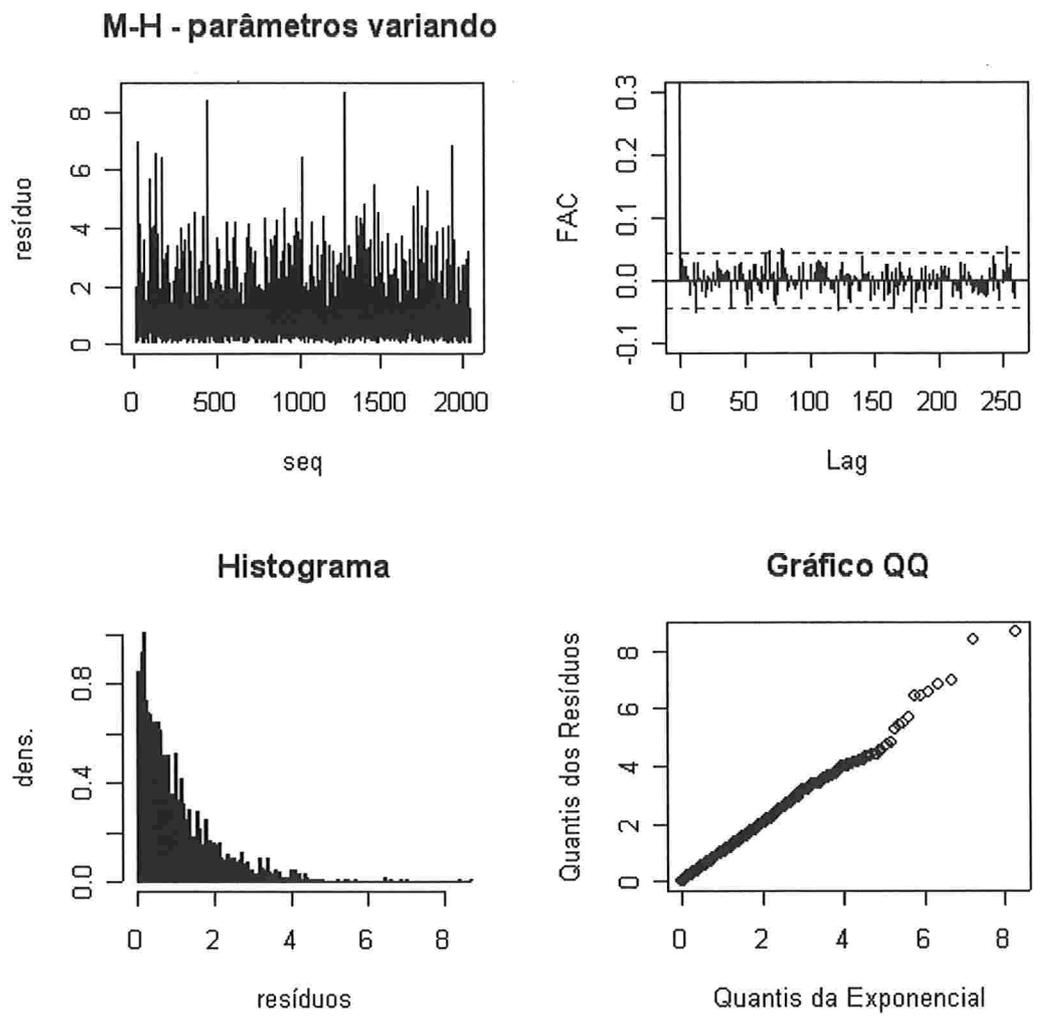


Figura 5.14 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

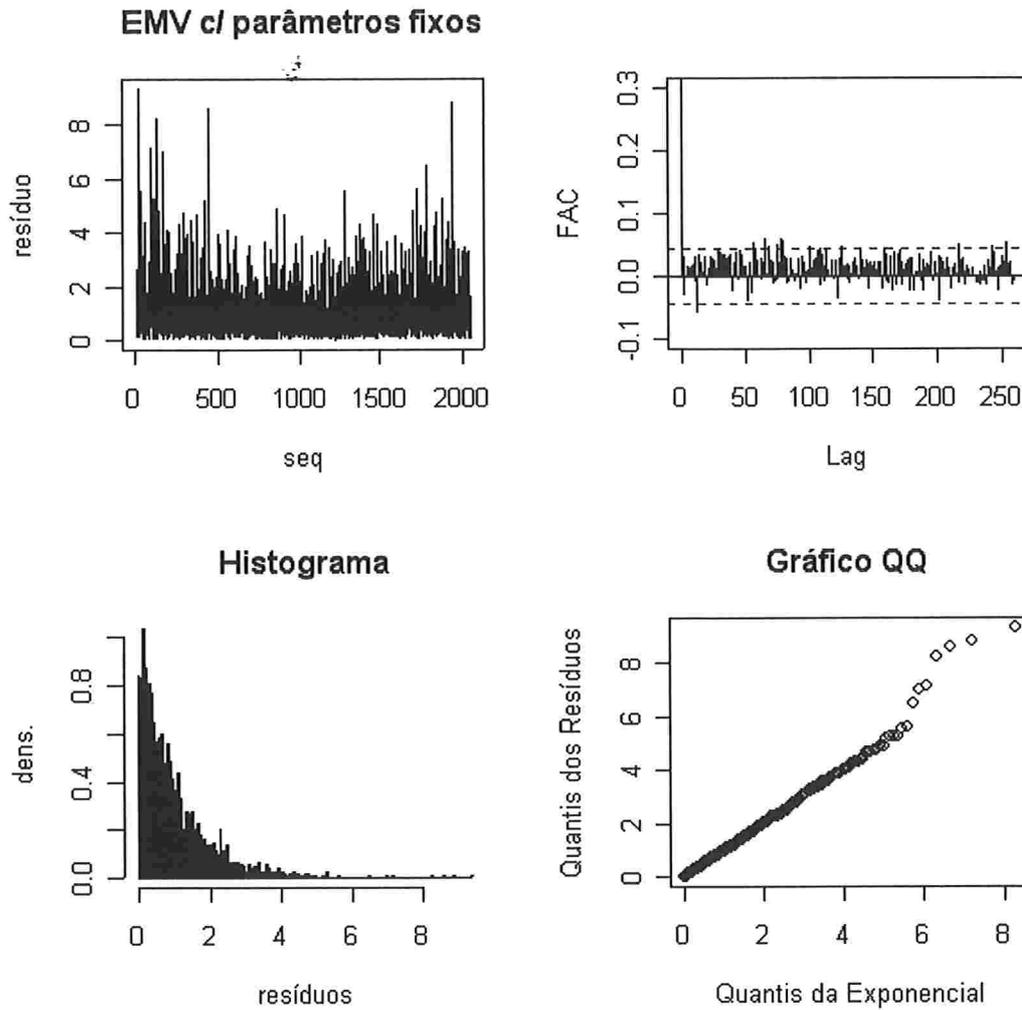


Figura 5.14 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações do processo EACD(1,1) não-estacionário simulado, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

Capítulo 6

Aplicação a dados reais

São apresentados os resultados da estimação do modelo de duração condicional quando aplicados às séries de durações das ações das empresas TELEMAR [Fonte: BOVESPA] e IBM [Fonte: Trades, Orders, Reports and Quotes (TORQ)].

6.1 TELEMAR

6.1.1 Análise Descritiva dos Dados da TELEMAR

Os dados das negociações das ações da TELEMAR foram coletados no período de 08 de setembro de 2004 a 10 de setembro de 2004. Neste período foram observados 3 dias de negociação. O número total de negociações no período analisado é 6.734.

Existem problemas no armazenamento e obtenção dos dados em alta frequência. A limpeza dos dados é necessária para que a análise estatística dos dados em alta frequência ocorra da melhor maneira possível. Para dados de negociação, observações ausentes podem ocorrer de diversas maneiras e a acurácia do tempo exato de negociação acaba sendo questionada para algumas negociações. Por exemplo, tempos de negociação registrados depois das 17:00, mesmo ocorrendo antes do fechamento da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). A escolha de um método de limpeza dos dados requer um forte entendimento da maneira como são realizadas as operações no mercado, pois a limpeza pode

trazer viés para as análises estatísticas realizadas.

Retiramos as negociações que aconteceram fora do horário de funcionamento da BOVESPA, entre 10:00 e 17:00, resultando num total de 6.588 transações (146 negociações ocorreram no chamado período *after market*, horário em que a BOVESPA está fechada). Vários autores consideram que estas observações têm um padrão diferente das negociações que ocorrem no horário de funcionamento da bolsa, vide Goodhart e O'Hara (1997), Engle (2000) e Zhang, Russell e Tsay (2001). Neste caso, aproximadamente 2,17% das negociações aconteceram quando a BOVESPA estava fechada, referindo-se às negociações feitas por via eletrônica. Sabe-se que os retornos de ações negociadas no período em que a bolsa não funciona (período *overnight*) diferem substancialmente dos retornos intra-diários; ver Stoll e Whaley (1990).

Continuando, excluímos os dados das negociações que ocorreram ao mesmo tempo, devido à dificuldade de inclusão das mesmas nos modelos estatísticos utilizados para o estudo do tempo entre as negociações. Na maioria das vezes as negociações simultâneas ocorrem por causa de ordens com grande volume de compra ou venda, que acabam sendo fechadas por várias ordens de venda ou compra. Por exemplo, suponha que exista uma ordem de compra de 1000 ações de determinada empresa e esta ordem de compra é liquidada com base em 2 ordens de venda de 500 ações cada uma. Neste caso, teremos 2 ordens ocorrendo simultaneamente mas para liquidar um único negócio de 1000 ações.

Sendo a ação da TELEMAR uma das que têm maior liquidez no mercado, observamos 2.026 transações simultâneas, ou seja, aproximadamente 30% dos tempos entre as negociações foram iguais a zero. Das negociações simultâneas, apenas 35% delas apresentam alteração de preço. Desta maneira, transações simultâneas não parecem trazer grandes informações da micro-estrutura do mercado na modelagem estatística.

O número médio de negociações por dia é igual a 2.225, com desvio padrão 575. O número mínimo de negociações num dia é 1.804 e o máximo é 2.895. Avaliando as durações, o tempo médio entre as negociações no período avaliado é 16,25 segundos, com desvio padrão igual a 26,43 segundos. A mediana das durações é 7 segundos. Esta mediana

bem menor do que a média indica a forte assimetria positiva dos dados, com concentração nos menores valores, informação que pode ser confirmada pelo histograma e pelo boxplot das durações. O valor mínimo das durações é 1 segundo, enquanto o valor máximo é 322 segundos.

O coeficiente de assimetria das durações é igual a 4,51, indicando forte assimetria positiva, ou seja, concentração dos dados nos menores valores. Esta informação pode ser facilmente obtida se compararmos os valores da média e mediana obtidos para as durações. Outra informação importante é a existência de um grande número de valores extremos nas caudas da distribuição das durações (curtose aproximadamente igual a 30), especialmente no que diz respeito aos maiores valores.

Para avaliar os estimadores de máxima verossimilhança dos modelos ACD com e sem parâmetros variando no tempo, bem como suas propriedades, foi escolhida uma parte da série de durações da TELEMAR sem as negociações simultâneas, sem o período *aftermarket* e que tivesse número de observações múltiplo da potência 2, ou seja, a série analisada possui $4.096 = 2^{12}$ observações, das 10:00 de 08/09/2004 (quarta-feira) às 15:30, aproximadamente, de 10/09/2004 (sexta-feira).

A Figura 6.1 apresenta o gráfico do tempo entre as negociações da TELEMAR no período avaliado das 10:00 às 17:00, bem como sua função de autocorrelação estimada e seus gráficos histograma e boxplot. As durações variam ao longo de cada um dos dias avaliados, indicando a forte não-estacionariedade da série e alterações na liquidez da ação entre os dias e dentro dos mesmos. No período do almoço (aproximadamente entre 13:00 e 14:30) estas durações são maiores e a liquidez do mercado é menor.

Foram encontradas 22 durações maiores do que 180 segundos (3 minutos), responsáveis pelos maiores picos no gráfico. A função de autocorrelação decai lentamente para zero, mostrando o padrão não-estacionário das durações. O histograma e o boxplot confirmam a forte assimetria positiva das durações e o grande excesso de curtose em relação à distribuição normal, ver Figura 6.1.

Para entender melhor as características dos preços das negociações das ações da TELE-

MAR, construímos uma tabela de contingência contendo a classificação dos movimentos de preço da ação. As alterações de preço foram classificadas como aumento de preço (representado pelo sinal +), estabilidade do preço (representada pelo sinal 0) e diminuição de preço (representada pelo sinal -). A Tabela 6.1 contém os movimentos de preço entre duas negociações consecutivas, ou seja, da (t-1)-ésima transação para a t-ésima transação do conjunto de dados.

Tabela 6.1 Movimentação de preços em negociações consecutivas para as ações da TELEMAR. Os movimentos de preço foram classificados em "Aumento", "Estável" e "Diminuição".

negociação t-1	negociação t			Total
	+	0	-	
+	168 (4,10%)	390 (9,52%)	263 (6,42 %)	821 (20,04 %)
0	397 (9,69%)	1547 (37,77%)	444 (10,84 %)	2388 (58,30 %)
-	255 (6,23%)	451 (11,01%)	181 (4,42 %)	887 (21,66 %)
Total	820 (20,02%)	2388 (58,30%)	888 (21,68 %)	4096 (100,00 %)

Com base na Tabela 6.1, nota-se que

1. aumentos ou diminuições consecutivas de preço são raros, representando apenas 8,52% das observações;
2. em 37,77% das negociações, o preço permanece estável, havendo grande tendência de não variação do preço da ação da TELEMAR;
3. o percentual de negócios em que os preços mudaram o sentido da movimentação, isto é, na (i-1)-ésima transação o preço havia diminuído e na i-ésima negociação o preço subiu, bem como o inverso, é muito semelhante, aproximadamente 6,3 % das negociações. Isso totaliza aproximadamente 13% das transações e indica o processo de reversão de preços;

4. a distribuição marginal dos preços é muito semelhante nas duas negociações, vide linha e coluna do total (aproximadamente 20% das negociações sofreram acréscimo no preço, 58% permaneceram com preços estáveis e 22% apresentaram decréscimo no preço. Além disso, parece haver simetria para aumento e diminuição do preço, em relação à estabilidade do preço.

Para estudar as características das negociações de ações brasileiras, dividimos as séries em intervalos de 5 minutos, calculando o número de negociações e o tempo médio entre as negociações nos intervalos de 5 minutos. A Figura 6.2 contém os gráficos do número de negociações nos intervalos de 5 minutos e sua função de autocorrelação estimada para os lags de 0 a 260. Vale ressaltar que para esta parte da análise foi usada uma série maior de durações da TELEMAR, no período de 4 de agosto a 10 de setembro de 2004 (27 dias de negociação), para que o padrão de sazonalidade intra-diária fosse estimado mais precisamente com base na função de autocorrelação das durações.

O número médio de negociações em cada período de 5 minutos é igual a 20, com desvio padrão igual a 15,20. Os números mínimo e máximo de transações num período de 5 minutos foram 0 e 108, respectivamente. Além disso, o número de negociações nos intervalos de 5 minutos parece ser maior na abertura e fechamento do mercado de ações, apresentando um comportamento semelhante em cada um dos dias de negociação. A duração média entre as negociações nos períodos de 5 minutos é igual a 24,18 minutos, com desvio padrão de 13,40 minutos.

Existe particular interesse no estudo do padrão cíclico da função de autocorrelação, que apresenta periodicidade igual a 84, correspondendo ao número de intervalos de 5 minutos num dia de negociação. Note que a função de autocorrelação do tempo médio entre as negociações também apresenta a periodicidade intra-diária, apresentando picos nos lags múltiplos de 84, número de intervalos de 5 minutos num dia de negociações.

Para entender melhor a sazonalidade intra-diária, apresenta-se o gráfico do número médio de transações nos períodos de 5 minutos, ao longo dos 27 dias avaliados na Figura 6.3. Ao todo são 84 médias, isto é, o primeiro valor do gráfico equivale à média do

número de negociações feitas nos 5 primeiros minutos do horário normal de negociação, nos 27 dias estudados. O gráfico apresenta um maior número de negociações nos períodos compreendidos das 10:15 às 12:00 e das 14:40 às 16:55, correspondentes aos períodos antes e após o horário de almoço. Também nota-se uma diminuição substancial no número de negociações no período do dia entre 13:00 e 14:00, durante o horário de almoço. Assim, verifica-se claramente a distinção de 2 patamares diferentes no número de negociações, nos horários de almoço e fora deste horário.

É interessante notar o padrão das durações médias nos intervalos de 5 minutos, com tempos médios entre as negociações menores nos períodos das 10:15 às 12:00 e das 14:40 às 16:55, correspondentes aos períodos antes e após o horário de almoço e tempos médios maiores entre 13:00 e 14:00, durante o horário de almoço, vide Figura 6.3. Nota-se que este gráfico apresenta padrão inverso do número de negociações nos intervalos de 5 minutos e confirmando a idéia de que o estudo das durações tem grande importância para entender a micro-estrutura do mercado ou, mais precisamente, os períodos de maior ou menor liquidez das negociações de uma ação.

6.1.2 Ajuste do Modelo ACD para os Dados da TELEMAR

Inicialmente estimamos os parâmetros do modelo ACD convencional, ou seja, com parâmetros constantes, e do modelo ACD com parâmetros variando no tempo, ambos com erros exponenciais por máxima verossimilhança, usando o programa RATS. Numa segunda etapa, para estudar as propriedades destes estimadores, foram utilizados os métodos de simulação Bootstrap paramétrico e Metropolis-Hastings, descritos anteriormente.

a) Estimadores de Máxima Verossimilhança

Os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas foram obtidos pelo método BHHH, citado anteriormente. Não foi feita limiarização (*threshold*) nas estimativas pela dificuldade em encontrar limiares que preservassem as características das séries modeladas, isto é, não conseguimos estimadores limiarizados capazes de captar a

dependência entre as durações avaliadas.

Tabela 6.2 Estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas e erros padrões (entre parênteses) para os modelos EACD(1,1) com e sem parâmetros variando no tempo.

Coefficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	3,6732 (0,4752)	0,1306 (0,0117)	0,6433 (0,0308)
β_{10}	-0,6532 (0,3989)	0,0317 (0,0104)	-0,0233 (0,0257)
β_{10}	2,0815 (0,4617)	0,0525 (0,0131)	-0,1752 (0,0284)
β_{11}	-1,3063 (0,3767)	0,0016 (0,0110)	0,0421 (0,0291)
β_{20}	0,2036 (0,1924)	-0,0029 (0,0101)	-0,0130 (0,0252)
β_{21}	-0,4580 (0,3255)	-0,0061 (0,0117)	0,0242 (0,0253)
β_{22}	0,3193 (0,6033)	-0,0440 (0,0123)	0,0530 (0,0351)
β_{23}	-0,4415 (0,2407)	-0,0006 (0,0071)	0,0449 (0,0165)
β_{30}	0,2852 (0,4448)	-0,0073 (0,0156)	-0,0278 (0,0361)
β_{31}	-0,1553 (0,5456)	-0,0380 (0,0093)	0,0760 (0,0290)
β_{32}	1,8027 (0,6974)	0,0442 (0,0137)	-0,1275 (0,0374)
β_{33}	0,4253 (0,1557)	0,0380 (0,0075)	-0,0370 (0,0113)
β_{34}	0,2065 (0,1378)	0,0267 (0,0066)	-0,0306 (0,0108)
β_{35}	-0,2377 (0,1232)	0,0125 (0,0133)	0,0135 (0,0226)
β_{36}	0,2776 (0,1277)	0,0504 (0,0123)	-0,0661 (0,0166)
β_{37}	-0,2347 (0,1157)	-0,0120 (0,0081)	0,0151 (0,0135)
Modelo usual	0,1395 (0,0258)	0,0662 (0,0038)	0,9263 (0,0041)

Na Tabela 6.2 são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas e os erros padrões para o modelo EACD(1,1) com e sem parâmetros variando no tempo. Se usarmos como base o teste de Wald, com nível de significância de 5% teremos 24 parâmetros estatisticamente significantes, o que indica que os parâmetros realmente variam no tempo e que apenas modelos com parâmetros variando no tempo seriam capazes de modelar a estrutura de dependência do processo das durações.

Na Figura 6.4 apresentamos a reconstrução dos 3 parâmetros do modelo EACD(1,1), com base nas estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas, tanto para o modelo usual como para o modelo com parâmetros variando no tempo. Como a reconstrução de cada um dos parâmetros originais é feita com base numa combinação linear de coeficientes de ondaletas, estas novas estimativas reconstruídas também são de máxima verossimilhança (propriedade da invariância) e é possível calcular o desvio padrão das mesmas (método Delta). Nota-se que as estimativas de máxima verossimilhança, do modelo com parâmetros variando no tempo, variam ao longo do tempo, o que era esperado pelo fato da série de durações da TELEMAR ser não-estacionária.

A estimativa para o nível da série (ω) varia entre 0,32 e 14,98 no modelo com parâmetros variando no tempo, com picos acompanhando os momentos de maior liquidez da ação. Esta estimativa para o modelo usual, ou seja, sem parâmetros variando no tempo é 0,14, muito próxima de zero. No caso do parâmetro que indica a dependência da duração passada (δ), a estimativa para o modelo com parâmetros variando no tempo possui valores entre -0,08 e 0,51, enquanto que no modelo usual esta estimativa é 0,07. As estimativas para a dependência da média condicional passada (γ) variam entre -0,09 e 1,05 no modelo com parâmetros variando no tempo e é igual a 0,93 no modelo usual. A soma das estimativas δ e γ é muito próxima de 1 no modelo convencional e varia ao longo do tempo, para o modelo com parâmetros variando no tempo, com valores entre 0,8 e 1,0 até a duração 2.500 e com valores entre 0,4 e 0,8 após esta duração, isto é, a série apresenta padrões diferentes de persistência ao longo da seqüência de durações.

É interessante notar que a persistência da média condicional da série é muito forte para o modelo usual e esta persistência apresenta-se um pouco menor, na maioria dos pontos da seqüência avaliados, no modelo com parâmetros variando no tempo, sendo maior nos períodos de baixa liquidez ou grandes durações e menor nos períodos de alta liquidez. Além disso, aparentemente, os padrões seguidos pelas dependências da duração passada e da média condicional passada são opostos. A correlação linear entre estes estimadores é negativa e forte para os coeficientes correspondentes à mesma ondaleta.

b) Estimadores via Bootstrap e Metropolis-Hastings

Com o intuito de estudar as propriedades dos estimadores do modelo EACD com parâmetros variando no tempo, utilizamos os métodos de simulação de Bootstrap paramétrico e Metropolis-Hastings.

Tsay (1992) propõe o uso do método de bootstrap paramétrico para verificação da adequabilidade de modelos estatísticos. Ele parte do princípio de que um modelo estatístico é adequado aos dados se o mesmo reproduz com sucesso as características de interesse, ou seja, ele enfatiza que a reprodutibilidade de um modelo ajustado avalia sua validade. Desta maneira, um modelo paramétrico bem ajustado contém suas estimativas no interior do intervalo de confiança formado pelos quantis empíricos das estimativas Bootstrap. Este método também pode ser usado para selecionar modelos.

O método de Bootstrap foi feito com base na média de 350 réplicas, enquanto o método de Metropolis-Hastings foi avaliado usando 400 réplicas. Antes da obtenção das réplicas via Metropolis-Hastings, analisamos a convergência do método com base em 3 cadeias de tamanho 45.000, obtendo valores de \hat{R} inferiores a 1,2 para todos os coeficientes de ondaletas avaliados, o que indicou a convergência do método. Para obtenção das réplicas, foi utilizada a primeira cadeia de Markov de tamanho 45.000, descartando-se as primeiras 5.000 realizações da cadeia, e selecionamos as réplicas de maneira sistemática de 100 em 100 realizações para obter observações não-correlacionadas do processo de duração. A escolha do valor 100 foi feita com base nas funções de auto-correlação da cadeia gerada, vide Figura A.3, que é aproximadamente zero a partir de lags próximos de 100 para a maioria dos coeficientes de ondaletas. Para confirmar a ausência de correlação entre as 400 réplicas selecionadas sistematicamente, que formarão a amostra via Metropolis-Hastings, apresentamos a função de auto-correlação para cada um dos coeficientes de ondaletas (Figura A.4), confirmando que a amostra é não-correlacionada. A taxa de rejeição dos candidatos via Metropolis-Hastings foi em torno de 30% .

As Tabelas 6.3 e 6.4 apresentam as estimativas dos coeficientes de ondaletas e seus erros padrões para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, obtidas

via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, respectivamente. Se usarmos como base o teste de Wald, com nível de significância de 5% teremos 47 e 45 parâmetros estatisticamente significantes por Bootstrap e Metropolis-Hastings, respectivamente. Isto indica que os parâmetros realmente variam no tempo e que apenas modelos com parâmetros variando no tempo seriam capazes de modelar a estrutura de dependência do processo das durações.

Tabela 6.3 Estimativas via Bootstrap dos coeficientes de ondaletas e desvios padrões (entre parênteses) para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo.

Coeficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	7,2107 (1,6434)	0,1452 (0,0223)	0,3553 (0,1158)
β_{10}	-1,1094 (1,2917)	0,0220 (0,0271)	-0,0129 (0,0845)
β_{10}	2,0829 (1,2552)	0,0314 (0,0271)	-0,1368 (0,0750)
β_{11}	-1,2662 (1,1396)	-0,0057 (0,0246)	-0,0356 (0,1161)
β_{20}	0,3535 (0,8512)	-0,0063 (0,0193)	-0,0490 (0,1005)
β_{21}	-0,2339 (0,9984)	-0,0068 (0,0239)	-0,0010 (0,0700)
β_{22}	1,2685 (1,3971)	-0,0513 (0,0258)	0,0148 (0,0857)
β_{23}	-0,5187 (0,6433)	-0,0043 (0,0219)	0,1071 (0,0553)
β_{30}	0,5301 (0,8240)	-0,0120 (0,0231)	-0,0578 (0,0652)
β_{31}	0,3650 (1,4676)	-0,0346 (0,0215)	0,0554 (0,0786)
β_{32}	2,1572 (1,7325)	0,0309 (0,0237)	-0,1237 (0,0918)
β_{33}	1,0227 (0,7396)	0,0228 (0,0260)	-0,0246 (0,0377)
β_{34}	0,9884 (0,7683)	0,0277 (0,0240)	-0,0525 (0,0421)
β_{35}	-0,6561 (0,5120)	0,0141 (0,0248)	0,0422 (0,0708)
β_{36}	0,6381 (0,5231)	0,0522 (0,0211)	-0,0817 (0,0556)
β_{37}	-0,5621 (0,3285)	-0,0210 (0,0304)	0,0253 (0,0390)

Tabela 6.4 Estimativas via Metropolis-Hastings dos coeficientes de ondaletas e desvios padrões (entre parênteses) para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo.

Coeficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	3,7865 (1,0758)	0,1453 (0,0231)	0,6289 (0,0650)
β_{10}	-1,0542 (1,4986)	0,0255 (0,0210)	0,0129 (0,0915)
β_{10}	2,8298 (1,5296)	0,0668 (0,0309)	-0,1993 (0,0815)
β_{11}	-1,2044 (1,2489)	-0,0043 (0,0211)	0,0143 (0,1056)
β_{20}	0,1652 (0,6885)	0,0069 (0,0165)	-0,0210 (0,0904)
β_{21}	-0,4975 (1,0103)	0,0028 (0,0195)	0,0143 (0,0727)
β_{22}	2,3020 (2,6601)	-0,0610 (0,0373)	-0,0505 (0,1638)
β_{23}	-0,6109 (0,6790)	-0,0062 (0,0153)	0,0617 (0,0437)
β_{30}	0,2408 (1,2016)	-0,0107 (0,0395)	-0,0046 (0,0796)
β_{31}	-0,2036 (1,5174)	-0,0502 (0,0300)	0,0838 (0,0984)
β_{32}	1,6818 (1,5387)	0,0312 (0,0330)	-0,1099 (0,0941)
β_{33}	0,3227 (0,6711)	0,0278 (0,0258)	-0,0469 (0,0466)
β_{34}	0,2907 0,3950()	0,0356 (0,0156)	-0,0317 (0,0347)
β_{35}	-0,1265 (0,4165)	0,0124 (0,0347)	-0,0072 (0,0635)
β_{36}	-0,0738 (0,7524)	0,0322 (0,0256)	-0,0120 (0,0795)
β_{37}	0,0796 (0,4464)	-0,0210 (0,0241)	-0,0033 (0,0504)

Comparando as estimativas dos coeficientes de ondaletas obtidos via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, percebe-se que muitos coeficientes diferem entre os 2 métodos de simulação. É interessante notar a semelhança entre os coeficientes estimados por máxima verossimilhança (Tabela 6.2) e via Metropolis-Hastings (Tabela 6.4). Em relação ao desvio padrão, 42% dos coeficientes estimados via Bootstrap tem maior variação do que os estimados via Metropolis-Hastings.

Para estudar as propriedades dos estimadores dos coeficientes de ondaletas, construimos os histogramas dos coeficientes com base nas simulações via Bootstrap e Metropolis-Hastings, vide Figuras A.3 e A.4. A linha vertical corresponde à estimativa de máxima verossimilhança.

O método Bootstrap apresenta a maioria dos coeficientes com razoável simetria e com caudas semelhantes à da distribuição normal. Fazendo o teste de normalidade de Shapiro-Wilk, 38 dos 48 coeficientes de ondaletas apresentaram normalidade com 95% de confiança, ou seja, 79% dos coeficientes de ondaletas podem ser considerados normais. Pelo método de Metropolis-Hastings, a maioria dos coeficientes também apresenta distribuição normal, porém isto válido para apenas 27 dos 48 coeficientes, cerca de 56% deles. Outro fato que se pode notar é que a estimativa de máxima verossimilhança não é o valor de maior densidade da grande maioria das distribuições dos coeficientes.

Na Figura 6.5 apresentamos os 4 estimadores (EMV com parâmetros fixos, EMV, Bootstrap e Metropolis-Hastings com parâmetros variando no tempo) para comparação de seus resultados. Para o parâmetro δ , que representa a dependência da duração passada, os 3 estimadores variando no tempo foram muito semelhantes. Para os demais parâmetros, os estimadores de máxima verossimilhança e via Metropolis-Hastings foram mais semelhantes entre si, destoando dos estimadores via Bootstrap. Entretanto, os 3 estimadores variando no tempo apresentam um mesmo padrão ao longo da seqüência de durações avaliada. Os estimadores variando no tempo diferem do invariante no tempo, indicando que a série de durações da TELEMAR é não-estacionária. No último gráfico colocamos a soma dos parâmetros δ e γ para ter idéia da persistência da média do processo. A persistência é muito grande, uma vez que a soma dos coeficientes é próxima de 1 e diminui ao longo do tempo, ou seja, é menor quando o nível da série é maior.

As Figuras 6.6 e 6.7 possuem as estimativas por máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo EACD(1,1) e um intervalo com 90% de confiança, baseado nos quantis empíricos de ordens 5% e 95% das estimativas Bootstrap e Metropolis-Hastings, respectivamente, bem como o desvio padrão destes estimadores. Nota-se que em toda a seqüência avaliada, as estimativas para os 3 parâmetros do modelo EACD(1,1) estão contidas dentro das bandas de confiança, para ambos os métodos. Isso indica que o modelo com parâmetros variando no tempo está bem ajustado aos dados pois conseguimos reproduzir com sucesso as características do processo de durações via simulação. Mais informações em Tsay

(1992).

No caso do Bootstrap, para o parâmetro ω , relativo ao nível da série, nota-se que a estimativa de máxima verossimilhança está próxima ao limite inferior do intervalo de confiança bootstrap que corresponde ao quantil de ordem 5% . A estimativa de γ fica próxima ao limite superior do intervalo, ou seja, ao quantil de ordem 95% .

Ainda, os desvios-padrões dos estimadores variam ao longo da seqüência de durações, sendo maiores nos períodos de alta liquidez. Estes desvios são um pouco menores para o método Bootstrap.

c) Análise de Resíduos

Para uma melhor comparação entre os modelos, apresentamos gráficos e algumas estatísticas dos resíduos.

Nas Figuras 6.8 e 6.9 encontramos os valores ajustados pelos modelos, seus resíduos e as funções de auto-correlação dos mesmos. Nota-se que o ajuste se faz apenas para a média do processo pois os valores ajustados não conseguem captar totalmente os picos da série, indicando que os modelos não servem bem para fazer previsões das durações nos períodos de baixa liquidez, que correspondem aos picos da série.

Comparando as séries ajustadas com as durações da TELEMAR, percebe-se que houve um melhor ajuste dos modelos com parâmetros variando no tempo em relação ao modelo com parâmetros fixos. O fato dos parâmetros variarem no tempo, permite maior liberdade à série ajustada, fazendo com que modele melhor as durações, especialmente nos períodos de baixa liquidez. Os valores ajustados não são muito satisfatórios, subestimando o processo, porém acompanham o nível da série sendo possível verificar os períodos de alta ou baixa liquidez. É perceptível, graficamente, que o ajuste das durações pelo modelo com parâmetros variando no tempo é melhor, pois os valores ajustados acompanham mais fielmente o processo original. Os resíduos também são menores para os modelos com parâmetros variando no tempo, quando comparados com os resíduos do modelo com parâmetros fixos (Figura 6.8).

Tabela 6.5 Valores da estatística de Ljung-Box e p-valores (entre parênteses) para o teste de ausência de correlação serial até o lag q nos resíduos e resíduos ao quadrado.

	q	12	20	50	100
Estimador 1	resíduos	11,3 (0,5016)	18,6 (0,5459)	65,2 (0,0726)	134,2 (0,0127)
	res. quadrado	5,0 (0,9574)	7,4 (0,9950)	53,6 (0,3361)	109,7 (0,2385)
Estimador 2	resíduos	26,0 (0,0106)	43,23 (0,0019)	90,72 (0,0004)	166,05 (<0,001)
	res. quadrado	7,7 (0,8060)	54,1 (<0,001)	83,5 (0,0021)	153,7 (0,0004)
Estimador 3	resíduos	107,4 (<0,001)	139,9 (<0,001)	331,2 (<0,001)	448,4 (<0,001)
	res. quadrado	7,7 (0,8060)	54,1 (<0,001)	83,5 (0,0021)	153,7 (0,5262)
Estimador 4	resíduos	24,1 (0,0199)	39,0 (0,0067)	83,9 (0,0019)	161,0 (0,0001)
	res. quadrado	4,9 (0,9612)	20,1 (0,4519)	48,7 (0,5245)	106,3 (0,3146)

Estimador 1: EMV - parâmetros variando no tempo

Estimador 2: Bootstrap - parâmetros variando no tempo

Estimador 3: Metropolis-Hastings - parâmetros variando no tempo

Estimador 4: EMV - parâmetros fixos

Com base nas funções de auto-correlação dos resíduos, observamos que os métodos de estimação utilizados conseguem captar grande parte da estrutura de dependência da série de durações. O estimador via Metropolis-Hastings pareceu pior que os demais por apresentar mais lags fora do intervalo com 95% de confiança. Para testar se os modelos conseguiram capturar a estrutura de dependência entre as durações utilizamos o teste de Ljung-Box para os lags 12, 20, 50, 80 e 100 (Tabela 6.5). Os testes revelam que apenas o modelo estimado por máxima verossimilhança com parâmetros variando no tempo conseguiu modelar a dependência entre as durações e durações ao quadrado, que representa a volatilidade da série, com 95% de confiança.

No caso do modelo com coeficientes fixos, os p-valores do teste de Ljung-Box para os resíduos até os lags 12, 20, 50, 80 e 100 foram menores do que o nível de significância de 5% indicando que a hipótese de ruído branco até estes lags deve ser rejeitada com

95% de confiança, mostrando que o modelo usual não conseguiu captar a estrutura de dependência do processo de durações. Já para os resíduos ao quadrado, todos os p-valores foram maiores do que 5% ou seja, o modelo usual permitiu que a volatilidade da série de durações fosse modelada.

Para o modelo estimado por máxima verossimilhança com parâmetros variando no tempo, tanto os testes para os resíduos como os testes para os resíduos ao quadrado apresentaram níveis descritivos maiores que 5% exceto para o lag 100, o que nos faz crer que o modelo com ondaletas é capaz de capturar a dependência entre as durações e também a volatilidade das mesmas. É importante salientar que o tamanho da série utilizada é 4.096 e, por este motivo, os intervalos de confiança têm amplitude muito reduzida. Podemos afirmar portanto, que o modelo com parâmetros variando no tempo funcionou muito bem para modelar as correlações entre as durações da TELEMAR.

As funções de autocorrelação, para o modelo com parâmetros variando no tempo, parecem ter menor amplitude, ou seja, neste modelo as auto-correlações de lags inferiores estão dentro do intervalo de confiança, o que era esperado com base nos testes de Ljung-Box já comentados. A maior autocorrelação estimada é 0,066 e 0,073 para os modelos com e sem parâmetros variando no tempo, respectivamente, e corresponde ao lag 88 (aproximadamente 1,5 minutos). Mesmo fora do intervalo de confiança para as auto-correlações iguais a zero, estes valores são muito pequenos quando comparados aos valores das autocorrelação da série de durações na Figura 6.6, com valor máximo igual a 0,18 e decaindo lentamente para zero.

A média dos resíduos é igual a 1,02 segundos com desvio padrão 1,33, resíduo mínimo igual a 0 e máximo igual a 20,46 para o modelo estimado por máxima verossimilhança com parâmetros variando no tempo. No modelo com coeficientes fixos, o resíduo médio é 1,01 com desvio padrão 1,49; mínimo e máximo iguais a 0,02 e 20,37, respectivamente. Os valores das médias dos resíduos estão muito próximos da média do erro, sob a suposição de distribuição exponencial padrão, e os desvios padrões são um pouco maiores, o que pode ser indicativo de super-dispersão.

Tabela 6.6 Análise de resíduos: média e desvio padrão dos resíduos, erro quadrático médio de ajuste, AIC e BIC.

Estatística	Estimador 1	Estimador 2	Estimador 3	Estimador 4
Média residual	1,02	1,05	1,04	1,01
DP residual	1,33	1,84	1,47	1,79
EQMA	2,84	3,13	4,13	4,14
AIC	7,31	7,33	7,42	7,56
BIC	7,38	7,40	7,43	7,62

Estimador 1: EMV - parâmetros variando no tempo

Estimador 2: Bootstrap - parâmetros variando no tempo

Estimador 3: Metropolis-Hastings - parâmetros variando no tempo

Estimador 4: EMV - parâmetros fixos

Outros critérios para seleção dos estimadores foram o erro quadrático médio de ajuste, o desvio padrão residual e os critérios AIC e BIC. O modelo estimado por máxima verossimilhança com parâmetros variando no tempo apresentou menor erro quadrático médio, variância residual e AIC, enquanto os modelos estimados por máxima verossimilhança com parâmetros fixos tiveram os maiores erro quadrático médio, AIC e BIC. Dentre os modelos com parâmetros variando no tempo, o que apresentou o pior ajuste foi o estimado via Metropolis-Hastings. Os resíduos dos 4 modelos são compatíveis com uma distribuição exponencial com média 1, tanto pelo histograma como pelo gráfico de quantis da exponencial. Há certa falta de ajuste principalmente para as durações extremas, como pode ser visto nos gráficos de quantis da exponencial.

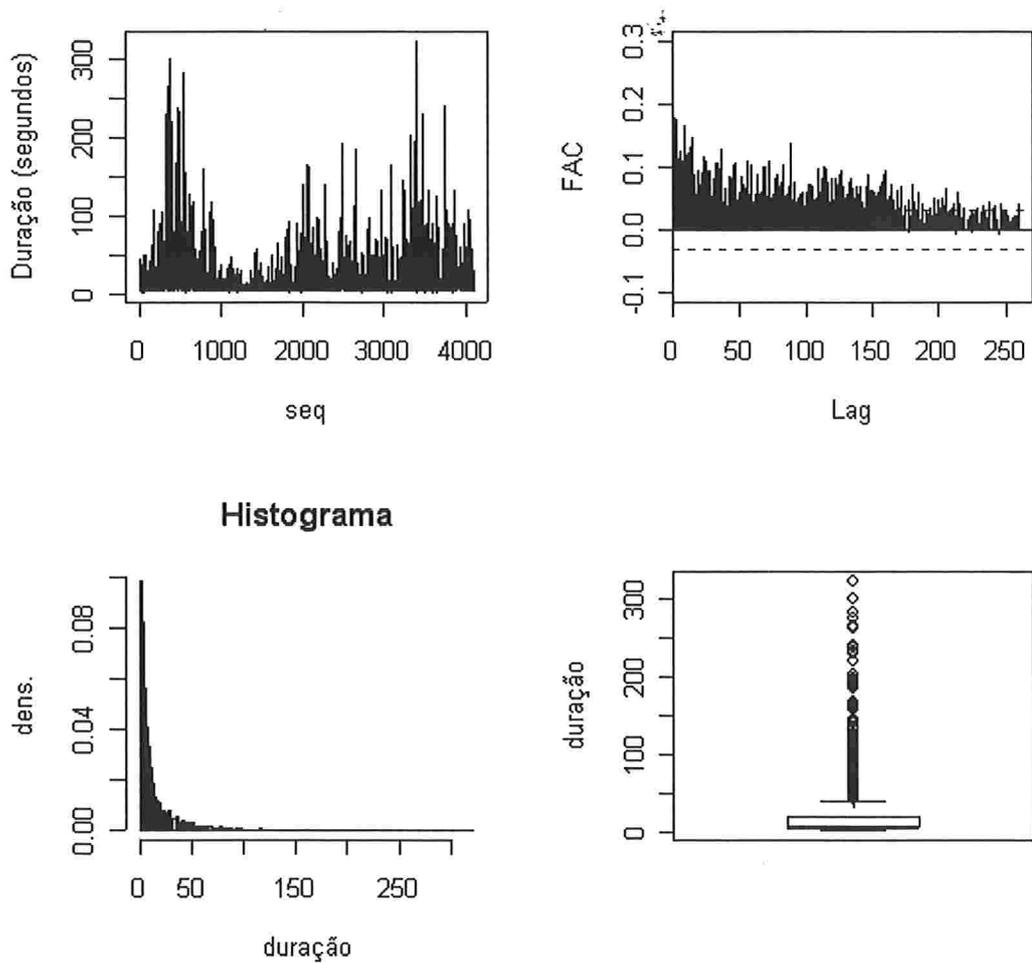


Figura 6.1: Gráfico, função de autocorrelação, histograma e boxplot do tempo entre as negociações da ação TELEMAR, no período de 8 a 10 de setembro de 2004.

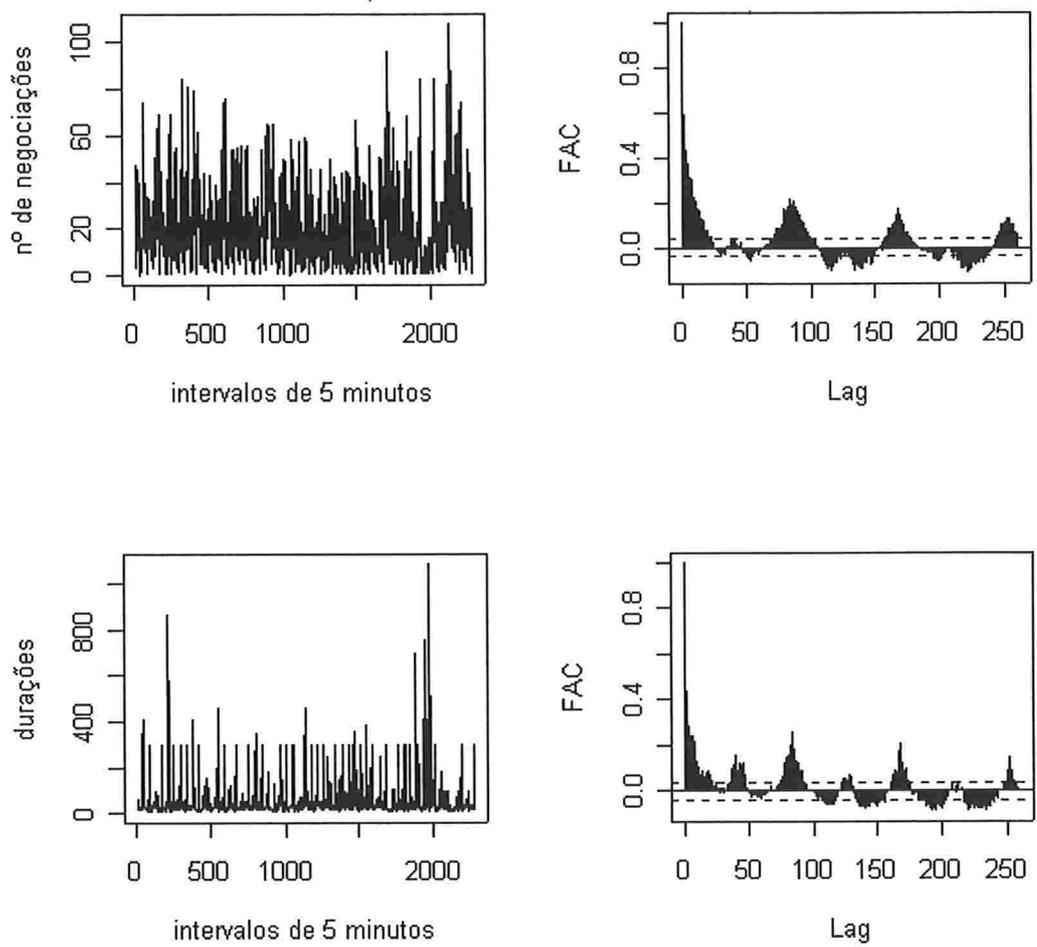


Fig. 6.2

Figura 6.2: Gráfico e função de autocorrelação do número de negociações e do tempo entre as negociações da ação TELEMAR em intervalos de 5 minutos, no período de 4 de agosto a 10 de setembro de 2004.

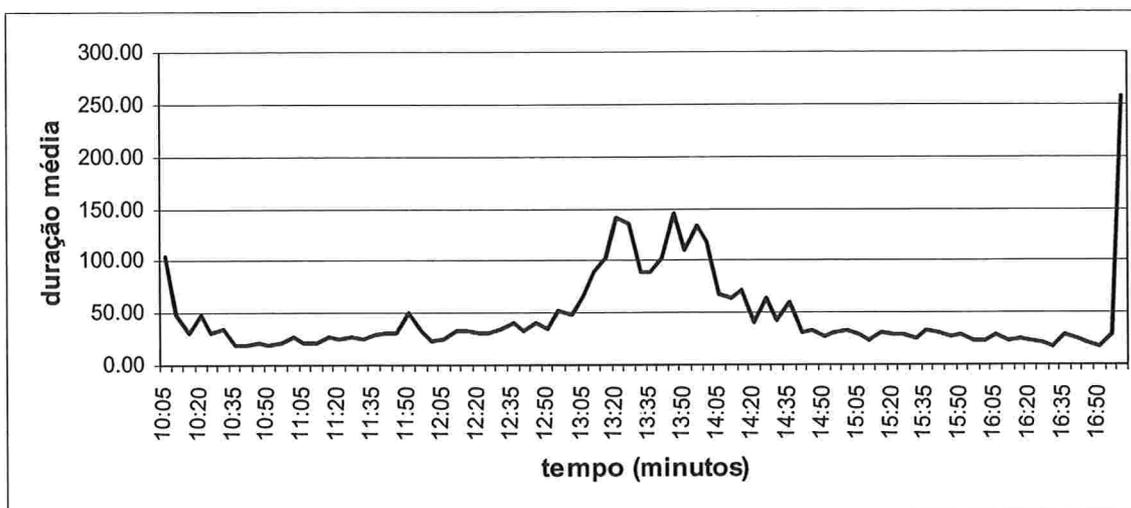
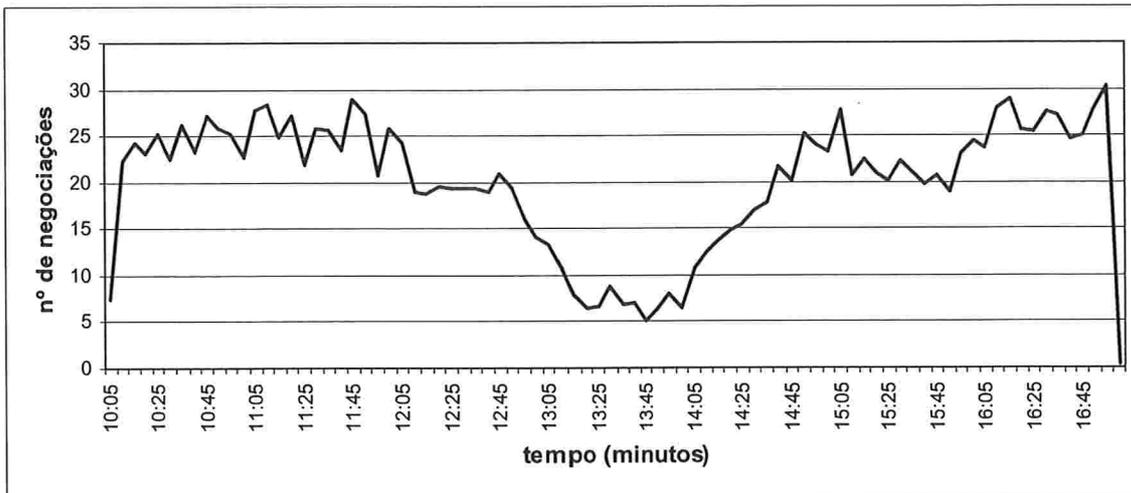


Figura 6.3: Estimativa da sazonalidade intra-diária - Gráficos do número médio de negociações e do tempo médio entre as negociações da ação TELEMAR em intervalos de 5 minutos, no período de 4 de agosto a 10 de setembro de 2004.

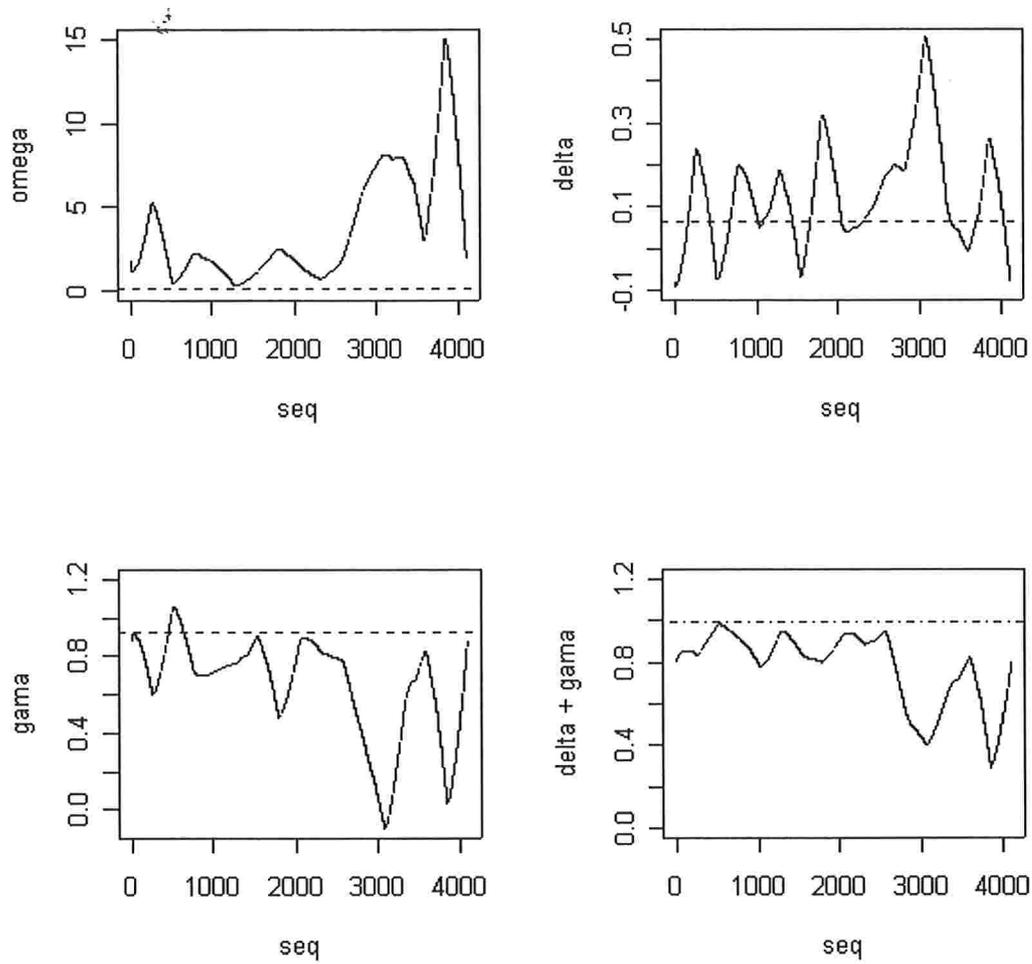


Figura 6.4: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo (linha cheia) e com parâmetros fixos (linha tracejada).

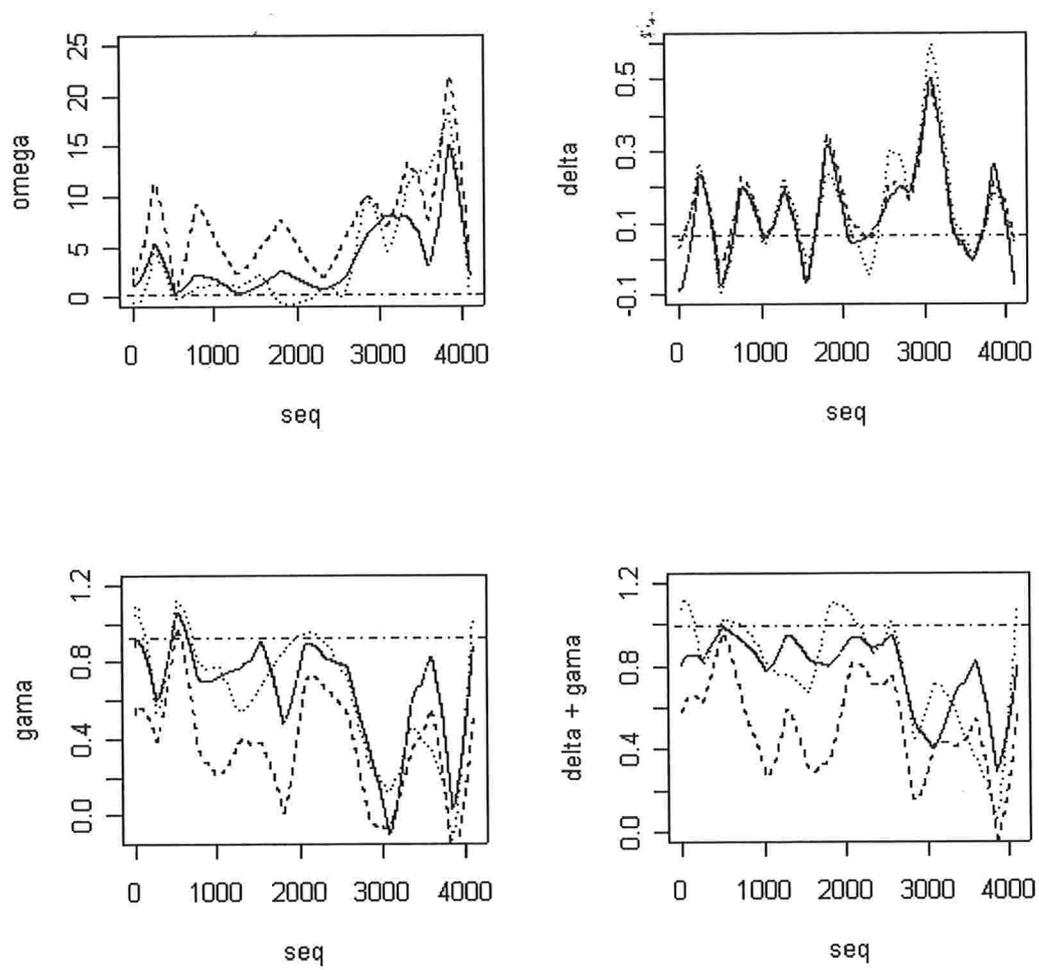


Figura 6.5: Estimativas dos parâmetros do processo EACD(1,1) para as durações da TELEMAR, para comparação dos resultados do EMV para o modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia), modelo sem parâmetros variando no tempo (linha tracejada com ponto) e das simulações via Bootstrap (linha tracejada) e via Metroplis-Hastings (linha pontilhada).

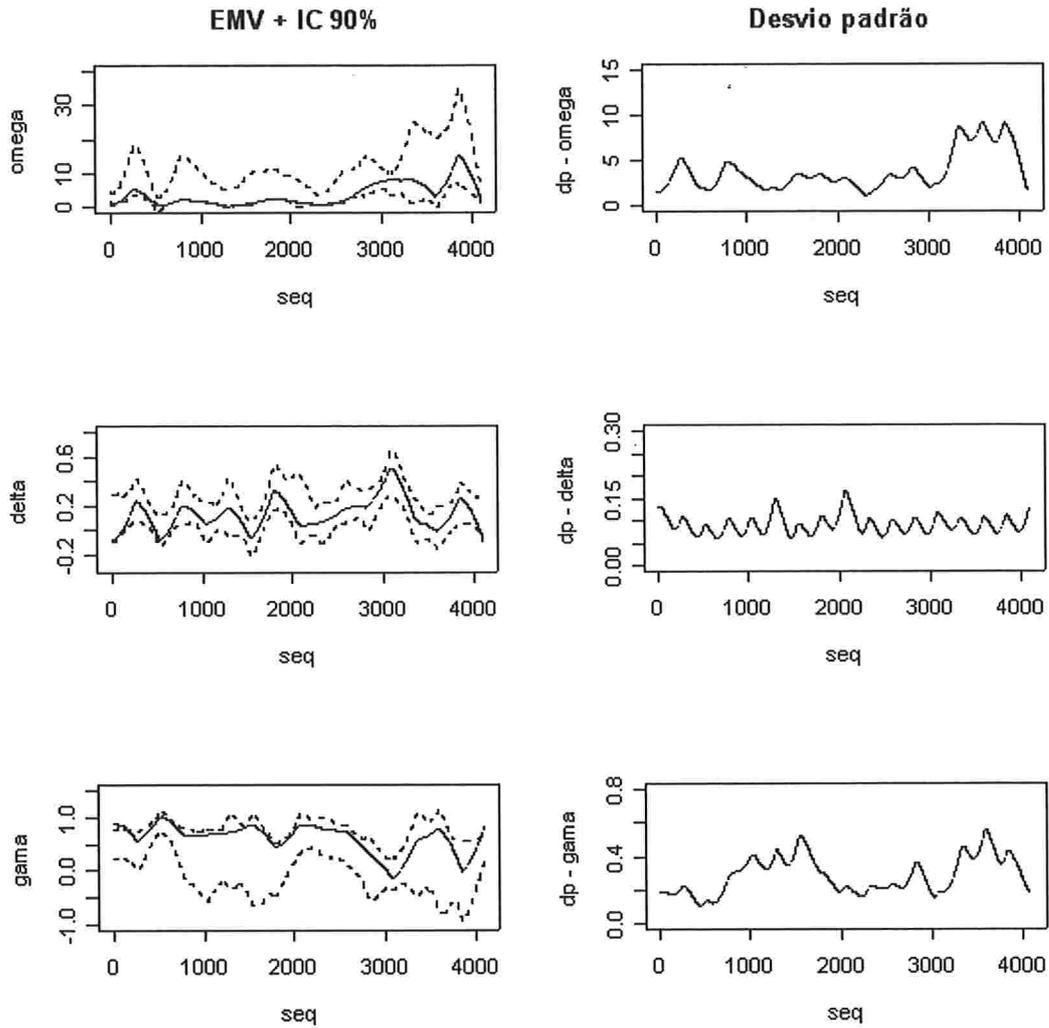


Figura 6.6: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança (linha cheia) e quantis empíricos obtidos via Bootstrap com 90% de confiança (linha tracejada) para os parâmetros do modelo EACD(1,1) para o tempo entre as negociações da ação TELEMAR. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores via Bootstrap.

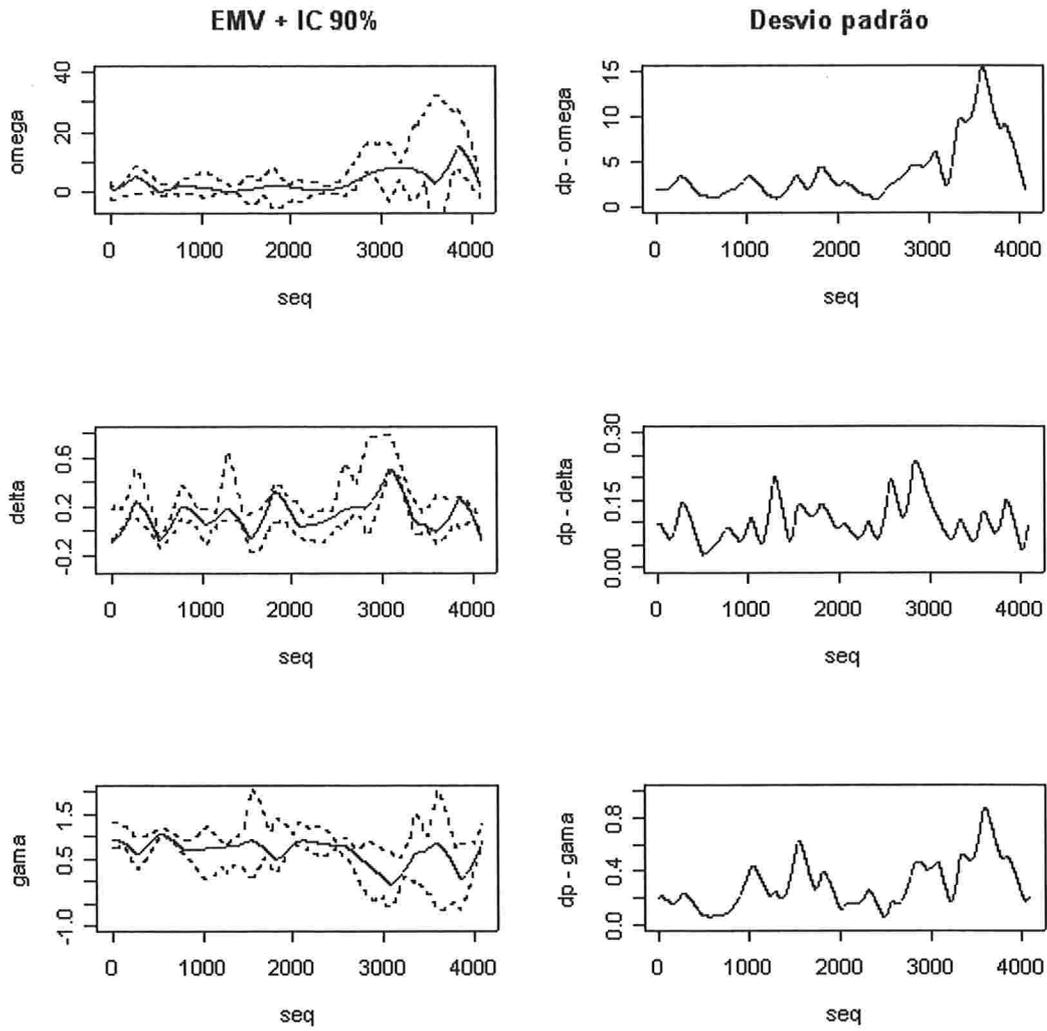


Figura 6.7: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança (linha cheia) e quantis empíricos obtidos via Metropolis-Hastings com 90% de confiança (linha tracejada) para os parâmetros do modelo EACD(1,1) para o tempo entre as negociações da ação TELEMAR. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores via Metropolis-Hastings.

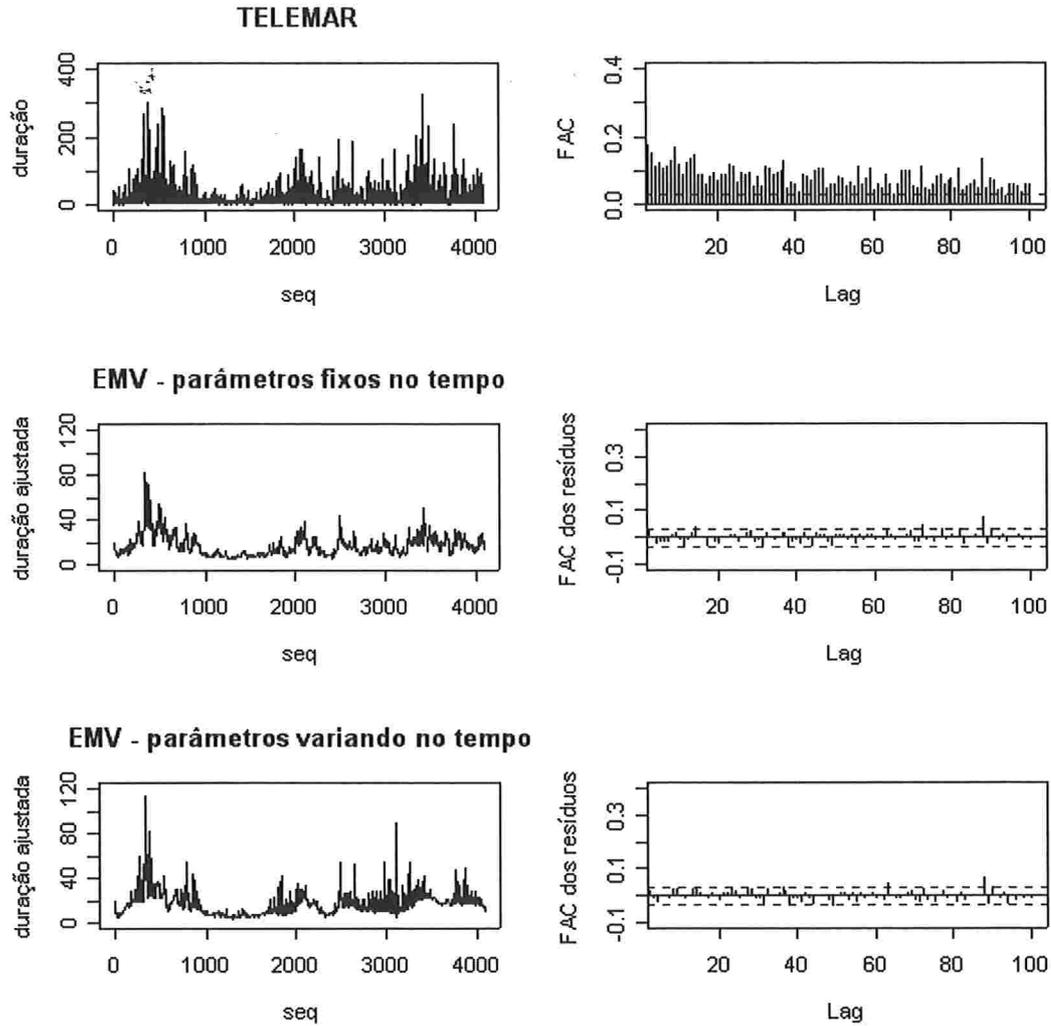


Figura 6.8: Série de durações da TELEMAR e durações ajustadas com base no modelo EACD(1,1) sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

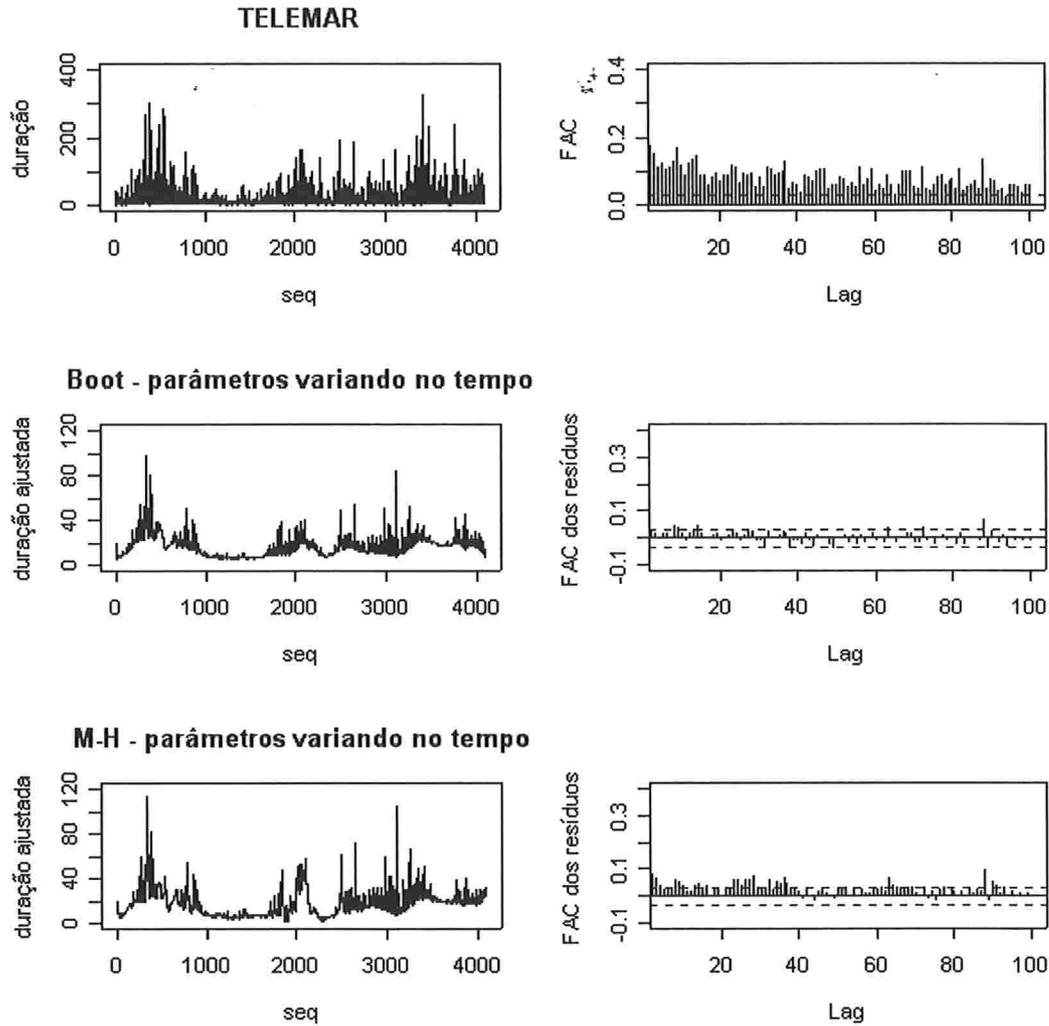


Figura 6.8 (continuação): Série de durações da TELEMAR e durações ajustadas com base no modelo EACD(1,1) sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

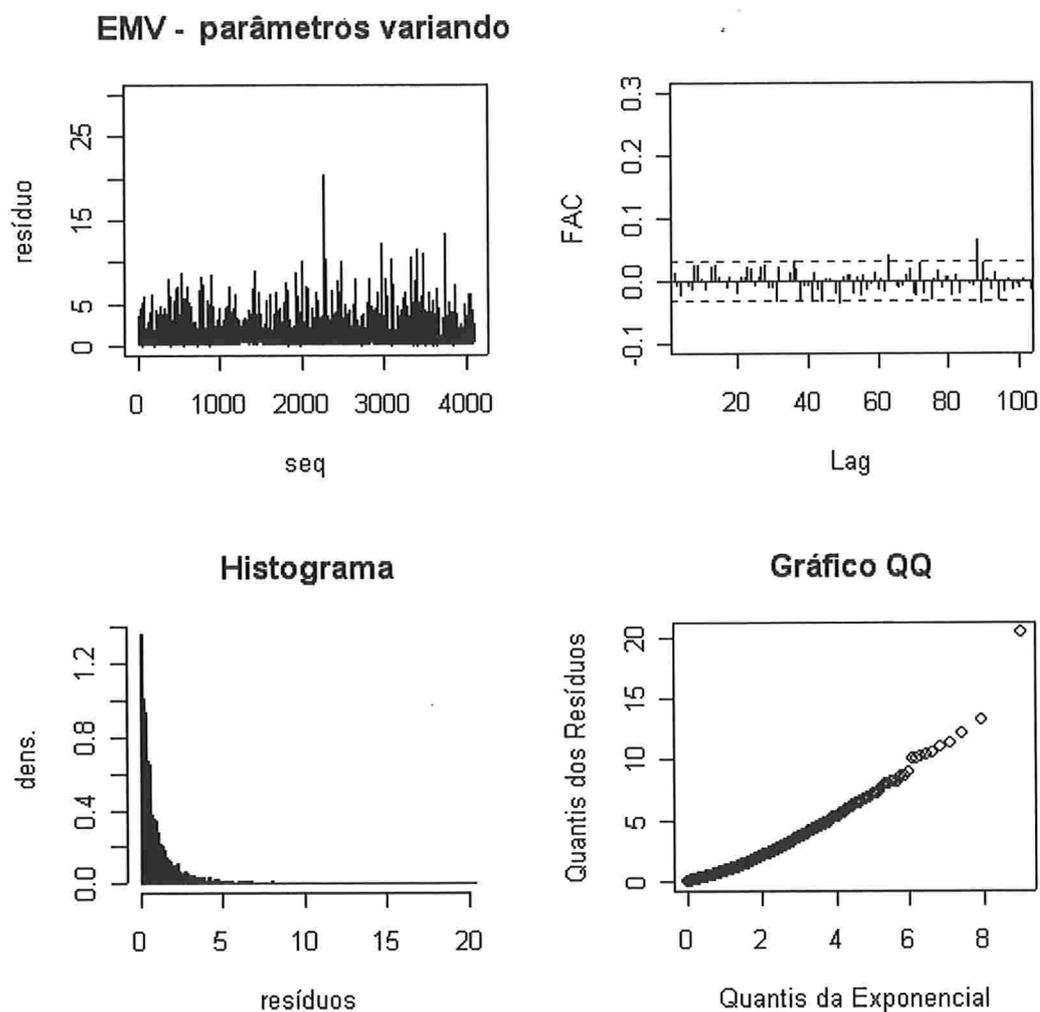
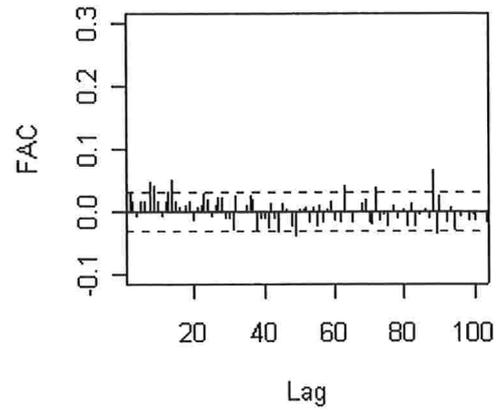
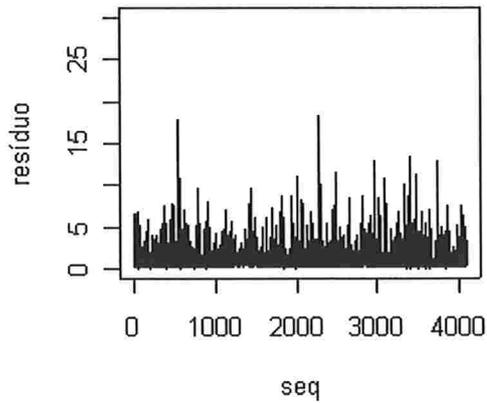


Figura 6.9: Resíduos e análise de resíduos para as durações da TELEMAR, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

Boot - parâmetros variando



Histograma

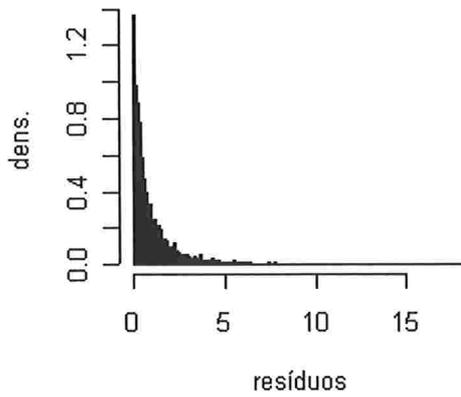


Gráfico QQ

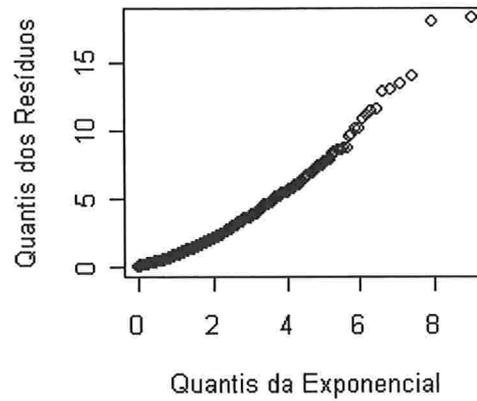


Figura 6.9 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da TELEMAR, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

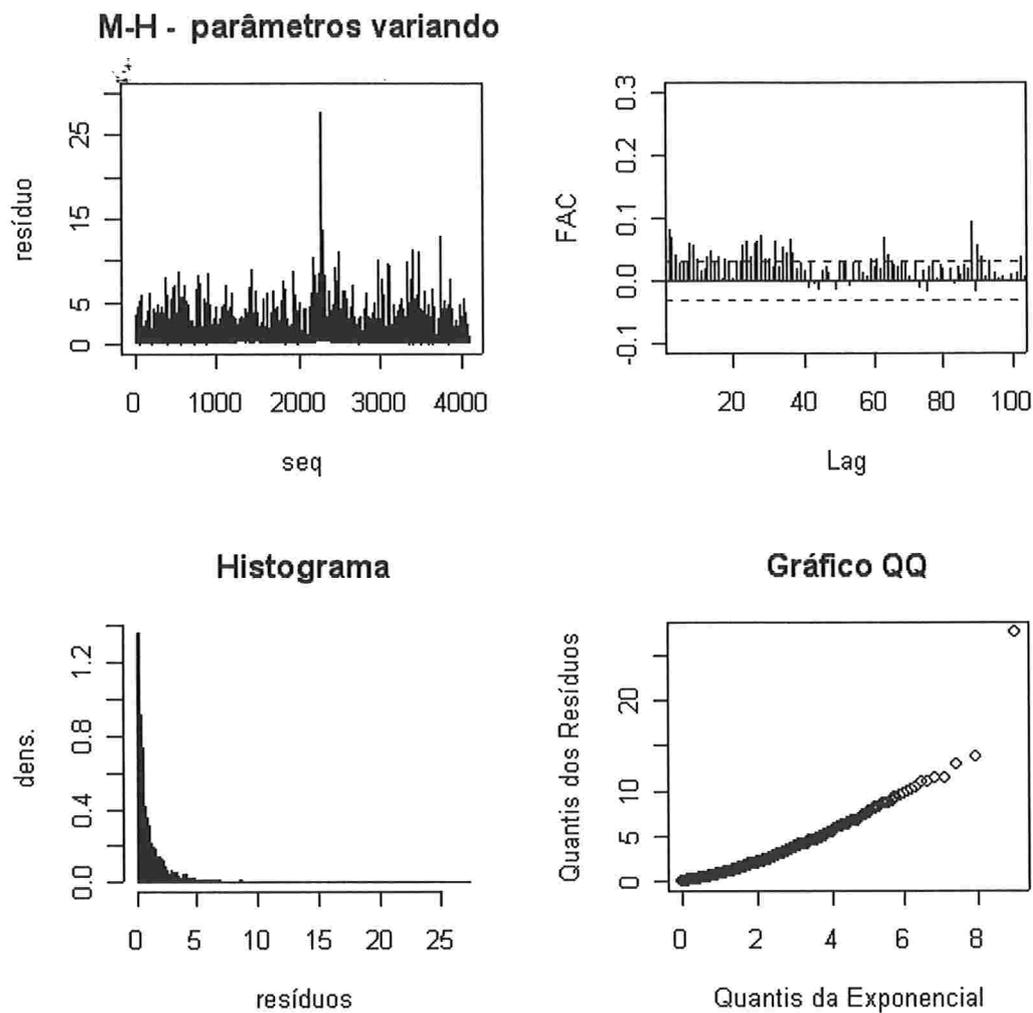


Figura 6.9 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da TELEMAR, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

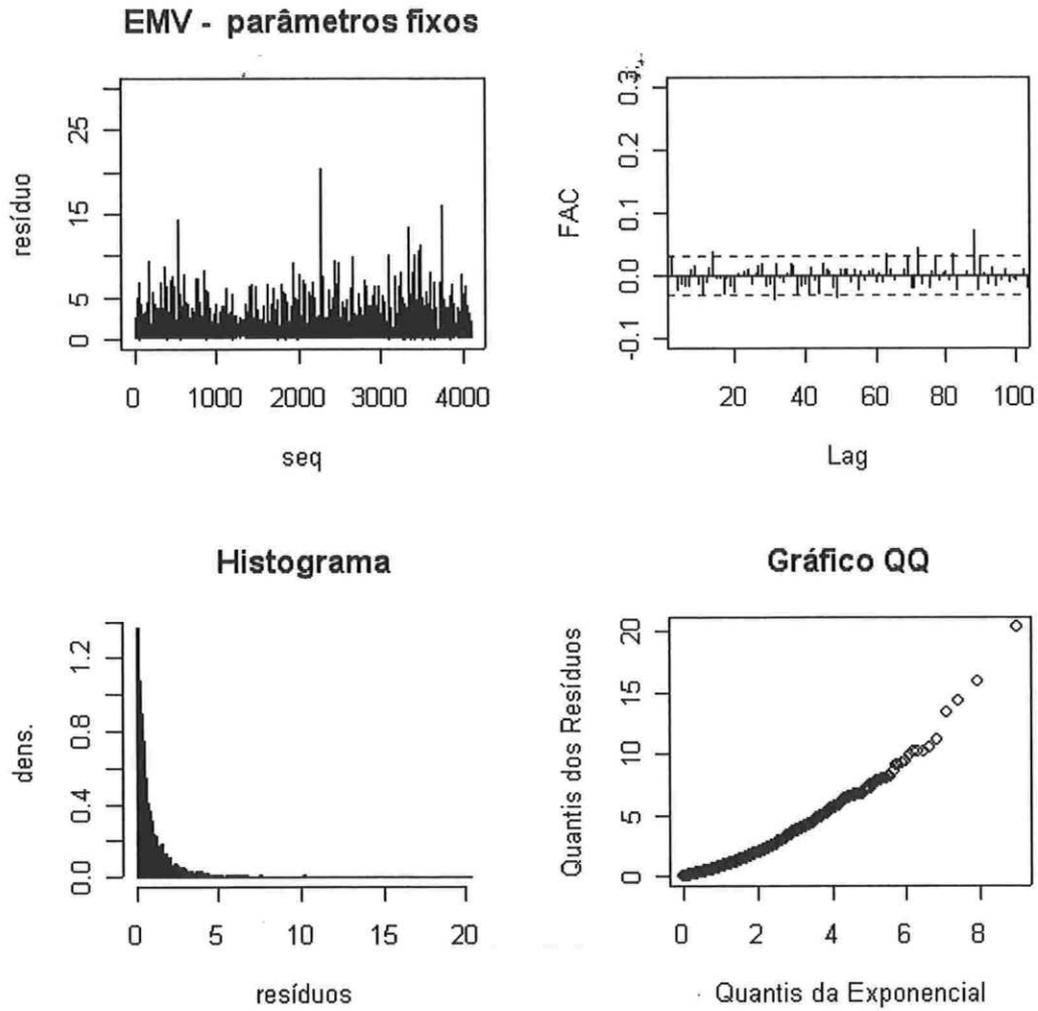


Figura 6.9 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da TELEMAR, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

6.2 IBM

6.2.1 Análise Descritiva dos Dados da IBM

Os dados das negociações da ação da IBM foram obtidos no site de Ruey Tsay (<http://gsbwww.uchicago.edu/fac/ruey.tsay/teaching/fts/>) e serão utilizados para comparação dos resultados do modelo ACD sem ondaletas e com ondaletas. O período analisado compreende das 9:30 do dia primeiro às 15:00 de 08 de novembro de 1990. Neste período foram observados 6 dias de negociação, descontando-se os finais de semana.

Foram retiradas as negociações que aconteceram fora do horário de funcionamento da bolsa de Nova Iorque (NYSE), entre 9:00 e 16:00. Como mencionado anteriormente, na abertura do mercado, muitas negociações são realizadas para finalizar as possíveis ordens que ocorreram fora do período de funcionamento da bolsa e isto pode gerar um padrão diferente nas durações durante os primeiros minutos após a abertura da bolsa. Já que o interesse é focar a análise no comportamento das durações ao longo do período de negociação, excluimos os primeiros 30 minutos de negociação de cada um dos dias avaliados. Nesse caso, trabalhamos com as negociações que ocorreram no horário *normal* de negociação, entre 9:30 e 16:00 para os dados da IBM.

As negociações simultâneas foram agregadas, ou seja, foram retiradas as durações iguais a zero. Finalmente, utilizamos 4.096 observações da IBM para a modelagem. Para mais informações sobre os dados da IBM, vide Tsay (2002) e Engle (2000).

O número médio de negociações por dia é igual a 5.438, com desvio padrão 1.230. O número mínimo de negociações num dia é 3.634 e o máximo é 6.973. Avaliando as durações, o tempo médio entre as negociações no período avaliado é 33,24 segundos, com desvio padrão igual a 42,17 segundos. Cinquenta por cento dos tempos entre as negociações são menores ou iguais a 19 segundos. A duração mínima é igual a 1 segundo, enquanto que a duração máxima é 466 segundos.

O coeficiente de assimetria das durações é igual a 2,97 e indica assimetria positiva, ou seja, concentração dos dados nos menores valores. Outra informação importante é

que a distribuição das durações tem peso nas caudas maior do que a distribuição normal (curtose aproximadamente igual a 16,76).

A Figura 6.10 apresenta o gráfico do tempo entre as negociações da IBM no período avaliado das 9:30 às 16:00, bem como sua função de autocorrelação estimada e seus gráficos histograma e boxplot. O padrão apresentado pelas durações da IBM é semelhante ao das durações da TELEMAR, ou seja, as durações variam ao longo de cada um dos dias avaliados, sendo maiores no período do almoço, apresentando um padrão não-estacionário. O histograma e o boxplot confirmam a assimetria positiva das durações e o excesso de curtose em relação à distribuição normal.

Para entender melhor as características dos preços das negociações das ações da IBM, construímos uma tabela de contingência contendo a classificação dos movimentos de preço da ação. As alterações de preço foram classificadas como aumento de preço (representado pelo sinal +), estabilidade do preço (representada pelo sinal 0) e diminuição de preço (representada pelo sinal -). A Tabela 6.1 contém os movimentos de preço entre duas negociações consecutivas, ou seja, da (t-1)-ésima transação para a t-ésima transação do conjunto de dados.

Tabela 6.7 Movimentação de preços em negociações consecutivas para as ações da IBM. Os movimentos de preço foram classificados em "Aumento", "Estável" e "Diminuição".

negociação t-1	negociação t			Total
	+	0	-	
+	30 (0,73%)	407 (9,94%)	262 (6,42 %)	700 (17,09 %)
0	351 (8,57%)	1949 (47,58%)	403 (9,84 %)	2703 (65,99 %)
-	318 (7,76%)	347 (8,47%)	27 (0,68 %)	693 (16,92 %)
Total	699 (17,07%)	2703 (65,99%)	694 (16,94 %)	4096 (100,00 %)

Com base na Tabela 6.7, percebe-se que

1. aumentos ou diminuições consecutivas de preço representam 1,41% das observações;

2. em 47,58% das negociações, o preço permanece estável, havendo grande tendência de não variação do preço da ação da IBM;
3. o percentual de negócios em que os preços mudaram o sentido da movimentação, isto é, na (i-1)-ésima transação o preço havia diminuído e na i-ésima negociação o preço subiu, bem como o inverso, é muito pequeno. Isso totaliza aproximadamente 14,18% das transações e indica o processo de reversão de preços;
4. a distribuição marginal dos preços é muito semelhante nas duas negociações, vide linha e coluna do total (aproximadamente 17% das negociações sofreram acréscimo no preço, 66% permaneceram com preços estáveis e 17% apresentaram decréscimo no preço. Além disso, parece haver simetria para aumento e diminuição do preço, em relação à estabilidade do preço.

Dividimos a série em intervalos de 5 minutos, calculando o número de negociações e o tempo médio entre as negociações nos intervalos de 5 minutos para estudar o comportamento intra-diário das durações. A Figura e 6.11 contêm os gráficos do número de negociações nos intervalos de 5 minutos e sua função de autocorrelação estimada para os lags de 0 a 260.

O número médio de negociações em cada período de 5 minutos é igual a 69,72, com desvio padrão igual a 24,27. Os números mínimo e máximo de transações num período de 5 minutos foram 0 e 200, respectivamente. Também, o número de negociações nos intervalos de 5 minutos parece ser maior na abertura e fechamento do mercado de ações.

Para verificar a existência de sazonalidade intra-diária, estudamos a função de autocorrelação do número de transações nos períodos de 5 minutos. A função de autocorrelação apresenta-se decaindo lentamente em forma de senóides amortecidas e verificamos a existência de periodicidade aproximadamente igual a 78, correspondendo ao número de intervalos de 5 minutos num dia normal de negociação. Esta periodicidade não é tão clara talvez pelo fato de haver bastante diferença no comportamento das negociações ao longo dos dias avaliados, vide Figura 6.11. Note que o padrão das durações médias nos

intervalos de 5 minutos não é o mesmo ao longo dos 6 dias avaliados, percebe-se que nos dias 01 e 02 de dezembro (primeiros 2 dias avaliados) os tempos entre as negociações são bem maiores do que nos demais dias estudados.

Com base no gráfico do número médio de transações nos períodos de 5 minutos, ao longo dos 6 dias avaliados, Figura 6.12, percebemos que há uma diminuição no número de negociações no período do almoço. De padrão oposto ao número de negociações, o tempo entre as negociações vai aumentando até o horário de almoço e depois volta a cair.

6.2.2 Ajuste do Modelo ACD para os Dados da IBM

Foi usado o mesmo procedimento descrito para as durações da TELEMAR para modelagem das durações da IBM, ou seja, estimamos os parâmetros do modelo ACD convencional e do modelo ACD com parâmetros variando no tempo, ambos com erros exponenciais, por máxima verossimilhança, usando o programa RATS. Depois, utilizamos os métodos Bootstrap paramétrico e Metropolis-Hastings para estudar as propriedades destes estimadores.

a) Estimadores de Máxima Verossimilhança

Os estimadores de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas foram obtidos pelo método BHHH, citado anteriormente, e não foi feita limiarização (*threshold*) nas estimativas.

Com base na Tabela 6.8, em que são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas e os erros padrões para o modelo EACD(1,1) com e sem parâmetros variando no tempo, e usando o teste de Wald, com nível de significância de 5% teremos 26 parâmetros estatisticamente significantes, o que indica que os parâmetros realmente variam no tempo e que apenas modelos com parâmetros variando no tempo seriam capazes de modelar a estrutura de dependência do processo das durações.

Na Figura 6.13 apresentamos a reconstrução dos 3 parâmetros do modelo EACD(1,1), com base nas estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas, tanto

para o modelo usual como para o modelo com parâmetros variando no tempo. Nota-se que as estimativas de máxima verossimilhança variam ao longo do tempo para o modelo com parâmetros variando no tempo, o que era esperado pelo fato da série de durações da IBM ser não-estacionária.

Tabela 6.8 Estimativas de máxima verossimilhança dos coeficientes de ondaletas e erros padrões (entre parênteses) para o modelo EACD(1,1) com e sem parâmetros variando no tempo.

Coeficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	4,9535 (0,4821)	0,0731 (0,0087)	0,7867 (0,0098)
β_{10}	-1,6848 (0,4894)	-0,0146 (0,0088)	0,0641 (0,0169)
β_{10}	1,6304 (0,8464)	0,0076 (0,0093)	-0,0487 (0,0261)
β_{11}	-2,6153 (0,4569)	0,0018 (0,0079)	0,0776 (0,0162)
β_{20}	0,4951 (0,3623)	-0,0176 (0,0066)	0,0054 (0,0118)
β_{21}	-0,1662 (0,4752)	0,0005 (0,0082)	0,0104 (0,0163)
β_{22}	4,5065 (1,3515)	0,0146 (0,0139)	-0,1351 (0,0385)
β_{23}	-1,0270 (0,4360)	0,0154 (0,0075)	0,0170 (0,0167)
β_{30}	-0,4104 (0,3462)	-0,0074 (0,0061)	0,0152 (0,0133)
β_{31}	-2,0184 (0,4490)	-0,0051 (0,0058)	0,0567 (0,0133)
β_{32}	-2,7505 (1,1696)	0,0143 (0,0129)	0,0713 (0,0351)
β_{33}	-0,3336 (0,5005)	-0,0020 (0,0078)	0,0190 (0,0178)
β_{34}	0,5807 (0,2853)	0,0256 (0,0075)	-0,0372 (0,0119)
β_{35}	-0,3825 (0,1963)	-0,0214 (0,0057)	0,0287 (0,0078)
β_{36}	0,8414 (0,6461)	-0,0023 (0,0075)	-0,0161 (0,0211)
β_{37}	-0,4375 (0,2092)	-0,0377 (0,0073)	0,0486 (0,0103)
Modelo usual	0,2705 (0,0542)	0,0758 (0,0071)	0,8404 (0,0108)

A estimativa para o nível da série (ω) varia entre -2,18 e 33,84 no modelo com parâmetros variando no tempo. Esta estimativa para o modelo usual é muito próxima de zero (0,27). No caso do parâmetro que indica a dependência da duração passada (δ), a

estimativa para o modelo com parâmetros variando no tempo possui valores entre -0,10 e 0,22, enquanto que no modelo usual esta estimativa é 0,05. As estimativas para a dependência da média condicional passada (γ) variam entre -0,04 e 1,07 no modelo com parâmetros variando no tempo e é igual a 0,84 no modelo usual. A soma das estimativas δ e γ é muito próxima de 1 no modelo convencional e varia ao longo do tempo, para o modelo com parâmetros variando no tempo, com valores entre 0,8 e 1,0 até a duração 3.500 e tem uma queda muito acentuada até 0,06, voltando ao patamar anterior. Para as durações da IBM, também percebemos uma forte persistência da média condicional.

b) Estimadores via Bootstrap e Metropolis-Hastings

As propriedades dos estimadores do modelo EACD com parâmetros variando no tempo foram estudadas com base nos métodos de Bootstrap e Metropolis-Hastings.

O 2 métodos foram implementados com base na média de 350 réplicas. Antes da obtenção das réplicas via Metropolis-Hastings, analisamos a convergência do método com base em 3 cadeias de tamanho 22.500, obtendo valores de \hat{R} inferiores a 1,2 para todos os coeficientes de ondaletas avaliados, o que indicou a convergência do método. Para obtenção das réplicas, foi utilizada a primeira cadeia simulada de tamanho 22.500, descartando-se as primeiras 5.000 realizações, e selecionamos as réplicas de maneira sistemática de 50 em 50 realizações para obter observações não-correlacionadas do processo de duração. O valor 50 foi obtido com base nas funções de auto-correlação da cadeia gerada, vide Figura A.5. Para confirmar a ausência de correlação entre as 350 réplicas selecionadas sistematicamente apresentamos a função de auto-correlação para cada um dos coeficientes de ondaletas (Figura A.6), confirmando que a amostra é não-correlacionada. A taxa de rejeição dos candidatos via Metropolis-Hastings foi em torno de 34% .

As Tabelas 6.9 e 6.10 apresentam as estimativas dos coeficientes de ondaletas e seus erros padrões para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo, obtidas via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, respectivamente. A conclusão de que os parâmetros variam no tempo pode ser verificada com base no teste de Wald, pois teremos 42 e 43

parâmetros estatisticamente significantes por Bootstrap e Metropolis-Hastings, respectivamente, com nível de significância de 5% .

Tabela 6.9 Estimativas via Bootstrap dos coeficientes de ondaletas e desvios padrões (entre parênteses) para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo.

Coeficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	8,7787 (2,6818)	0,0677 (0,0163)	0,6787 (0,0894)
β_{10}	-1,5358 (2,9370)	-0,0035 (0,0174)	0,0440 (0,0957)
β_{10}	1,2050 (2,5611)	0,0041 (0,0165)	-0,0259 (0,0840)
β_{11}	-3,7480 (2,0741)	0,0070 (0,0164)	0,1052 (0,0670)
β_{20}	0,0157 (1,0832)	-0,0204 (0,0167)	0,0279 (0,0435)
β_{21}	-0,1080 (2,2290)	-0,0032 (0,0156)	0,0184 (0,0676)
β_{22}	2,6566 (3,5415)	0,0089 (0,0179)	-0,0749 (0,1040)
β_{23}	-0,4904 (2,1297)	0,0172 (0,0170)	-0,0053 (0,0707)
β_{30}	-0,3941 (1,7439)	-0,0013 (0,0159)	0,0024 (0,0552)
β_{31}	-0,7353 (2,4173)	0,0044 (0,0187)	0,0119 (0,0733)
β_{32}	0,2116 (2,9257)	0,0160 (0,0205)	-0,0102 (0,0862)
β_{33}	-0,9020 (1,6291)	-0,0073 (0,0154)	0,0453 (0,0497)
β_{34}	0,3705 (1,4033)	0,0180 (0,0184)	-0,0247 (0,0520)
β_{35}	-0,6580 (0,5604)	-0,0115 (0,0134)	0,0268 (0,0242)
β_{36}	1,2241 (1,2114)	-0,0104 (0,0143)	-0,0146 (0,0383)
β_{37}	-0,6243 (1,1020)	-0,0127 (0,0159)	0,0223 (0,0427)

Tabela 6.10 Estimativas via Metropolis-Hastings dos coeficientes de ondaletas e desvios padrões (entre parênteses) para o modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo.

Coeficientes de ondaletas	ω	δ	γ
α_{00}	4,9006 (0,7761)	0,0749 (0,0228)	0,7834 (0,0142)
β_{10}	-1,1399 (0,8080)	-0,0094 (0,0187)	0,0448 (0,0299)
β_{10}	0,9999 (1,4040)	-0,0007 (0,0159)	-0,0241 (0,0455)
β_{11}	-2,6144 (0,6006)	0,0006 (0,0147)	0,0820 (0,0236)
β_{20}	0,6175 (0,4099)	-0,0146 (0,0104)	0,0009 (0,0125)
β_{21}	-0,3049 (0,5603)	0,0073 (0,0159)	0,0106 (0,0220)
β_{22}	4,0592 (1,7467)	0,0041 (0,0308)	-0,1177 (0,0537)
β_{23}	-0,9673 (0,5863)	0,0132 (0,0096)	0,0193 (0,0218)
β_{30}	-0,3965 (0,6813)	-0,0069 (0,0091)	0,0136 (0,0253)
β_{31}	-1,8816 (0,6799)	-0,0003 (0,0120)	0,0503 (0,0195)
β_{32}	-2,4240 (2,0412)	0,0191 (0,0205)	0,0583 (0,0635)
β_{33}	-0,0338 (0,8225)	0,0024 (0,0143)	0,0079 (0,0316)
β_{34}	0,4356 (0,5214)	0,0188 (0,0171)	-0,0267 (0,0240)
β_{35}	-0,4963 (0,2869)	-0,0135 (0,0156)	0,0247 (0,0119)
β_{36}	1,1029 (0,8863)	-0,0108 (0,0165)	-0,0117 (0,0263)
β_{37}	-0,4957 (0,4224)	-0,0454 (0,0140)	0,0555 (0,0221)

Novamente, ao comparamos os valores nas Tabelas 6.9 e 6.10, verificamos que muitos coeficientes de ondaletas diferem entre os 2 métodos de simulação. Houve semelhança entre os coeficientes estimados por máxima verossimilhança (Tabela 6.8) e via Metropolis-Hastings (Tabela 6.10). Em relação ao desvio padrão, 85% dos coeficientes estimados via Bootstrap tem maior variação do que os estimados via Metropolis-Hastings.

Nas Figuras A.7 e A.8 estão os histogramas dos coeficientes de ondaletas com base nas simulações via Bootstrap e Metropolis-Hastings. A linha vertical corresponde à estimativa de máxima verossimilhança. Verificamos as mesmas conclusões obtidas para o caso da

TELEMAR, ou seja, o método Bootstrap apresenta a alguns dos coeficientes com razoável simetria e com caudas semelhantes à da distribuição normal, 20 dos 48 coeficientes de ondaletas apresentaram normalidade com 95% de confiança, ou seja, 42% dos coeficientes de ondaletas podem ser considerados normais. Pelo método de Metropolis-Hastings, nenhum dos coeficientes apresenta distribuição normal. Porém, podemos notar que a estimativa de máxima verossimilhança geralmente está na classe com maior densidade nos histogramas.

Na Figura 6.14 apresentamos os 4 estimadores (EMV com parâmetros fixos, EMV, Bootstrap e Metropolis-Hastings com parâmetros variando no tempo). Todos os estimadores do modelo com parâmetros variando no tempo apresentaram mesmo padrão de variação ao longo do tempo, no entanto os estimadores de máxima verossimilhança e Metropolis-Hastings foram muito semelhantes. No último gráfico apresentamos a soma dos parâmetros δ e γ para ter idéia da persistência da média do processo. A persistência é muito grande, uma vez que a soma dos coeficientes é próxima de 1 e apresenta uma diminuição repentina no final da série, logo voltando ao patamar inicial.

As Figuras 6.15 e 6.16 contêm as estimativas por máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo ACD(1,1) e um intervalo com 90% de confiança, baseado nos quantis empíricos de ordens 5% e 95% das estimativas Bootstrap e Metropolis-Hastings, respectivamente, bem como o desvio padrão destas estimativas. Nota-se que em toda a seqüência avaliada, as estimativas para os 3 parâmetros do modelo EACD(1,1) estão praticamente contidas dentro das bandas de confiança, para ambos os métodos. Isso indica que o modelo com parâmetros variando no tempo está bem ajustado aos dados pois conseguimos reproduzir com sucesso as características do processo de durações via simulação.

No caso do Bootstrap, para o parâmetro ω , relativo ao nível da série, nota-se que a estimativa de máxima verossimilhança está próxima ao limite inferior do intervalo de confiança Bootstrap que corresponde ao quantil de ordem 5% . A estimativa de γ fica próxima ao limite superior do intervalo, ou seja, ao quantil de ordem 95% .

c) Análise de Resíduos

Nas Figuras 6.17 e 6.18 temos os valores ajustados pelos modelos, seus resíduos e as funções de auto-correlação dos mesmos. Comparando as séries ajustadas com as durações da IBM, percebe-se que houve um melhor ajuste dos modelos com parâmetros variando no tempo em relação ao modelo com parâmetros fixos. O fato dos parâmetros variarem no tempo, permite uma melhor modelagem das durações. Os valores ajustados não são muito satisfatórios, subestimando o processo, porém acompanham o nível da série sendo possível verificar os períodos de alta ou baixa liquidez. Tanto os valores ajustados como os resíduos têm comportamento mais adequado para o modelo com parâmetros variando no tempo.

Tabela 6.11 Valores da estatística de Ljung-Box e p-valores (entre parênteses) para o teste de ausência de correlação serial até o lag q nos resíduos e resíduos ao quadrado.

	q	12	20	50	100
Estimador 1	resíduos	11,8 (0,4602)	22,7 (0,3031)	56,2 (0,2550)	117,1 (0,1165)
	res. quadrado	14,1 (0,2940)	24,3 (0,2273)	56,9 (0,2337)	97,8 (0,5421)
Estimador 2	resíduos	15,9 (0,1938)	25,2 (0,1929)	54,9 (0,2942)	115,4 (0,1389)
	res. quadrado	6,6 (0,8837)	15,0 (0,7748)	35,9 (0,9330)	83,5 (0,8830)
Estimador 3	resíduos	9,6 (0,6527)	17,3 (0,6299)	48,7 (0,5267)	110,0 (0,2322)
	res. quadrado	14,2 (0,2871)	22,1 (0,3357)	53,9 (0,3259)	92,40 (0,6926)
Estimador 4	resíduos	18,0 (0,1159)	24,5 (0,2224)	55,2 (0,2852)	116,6 (0,1232)
	res. quadrado	9,8 (0,6307)	14,8 (0,7905)	34,5 (0,9532)	85,9 (0,8418)

Estimador 1: EMV - parâmetros variando no tempo

Estimador 2: Bootstrap - parâmetros variando no tempo

Estimador 3: Metropolis-Hastings - parâmetros variando no tempo

Estimador 4: EMV - parâmetros fixos

Com base nas funções de auto-correlação dos resíduos, observamos que todos os modelos conseguem captar a estrutura de dependência da série de durações da IBM, que

tem máximo próximo a 0,1 para a série original, valor este muito pequeno. Os testes de Ljung-Box confirmam que todos os estimadores conseguiram modelar a dependência entre as durações e durações ao quadrado, que representa a volatilidade da série, com 95% de confiança.

A média dos resíduos é igual a 1,02 segundos com desvio padrão 1,23, resíduo mínimo igual a 0 e máximo igual a 12,06 para o modelo estimado por máxima verossimilhança com parâmetros variando no tempo. No modelo usual o resíduo médio é 2,48 com desvio padrão 3,07; mínimo e máximo iguais a 0,02 e 33,27, respectivamente. Os valores das médias dos resíduos para os modelos com parâmetros variando no tempo estão muito próximos da média do erro, sob a suposição de distribuição exponencial padrão, e os desvios padrões são um pouco maiores, o que pode ser indicativo de super-dispersão. No caso do modelo com parâmetros fixos, os resíduos têm média e desvio padrão muito maior que os aceitáveis com base na distribuição exponencial padrão.

Tabela 6.12 Análise de resíduos: média e desvio padrão dos resíduos, erro quadrático médio de ajuste, AIC e BIC.

Estatística	Estimador 1	Estimador 2	Estimador 3	Estimador 4
Média residual	1,02	0,99	1,02	2,48
DP residual	1,23	1,20	1,24	3,07
EQMA	2,57	2,52	2,56	15,56
AIC	8,97	8,97	8,98	10,12
BIC	9,04	9,04	9,04	10,19

Estimador 1: EMV - parâmetros variando no tempo

Estimador 2: Bootstrap - parâmetros variando no tempo

Estimador 3: Metropolis-Hastings - parâmetros variando no tempo

Estimador 4: EMV - parâmetros fixos

Baseando-se nos outros critérios para seleção dos modelos, o estimador de máxima verossimilhança do modelo com parâmetros variando no tempo apresentou resultados

parecidos com os demais estimadores dos modelos com parâmetros variando no tempo. E todos foram melhores que o estimador de máxima verossimilhança do modelo convencional. Há certa falta de ajuste principalmente para as maiores durações, como pode ser visto nos gráficos de quantis da exponencial.

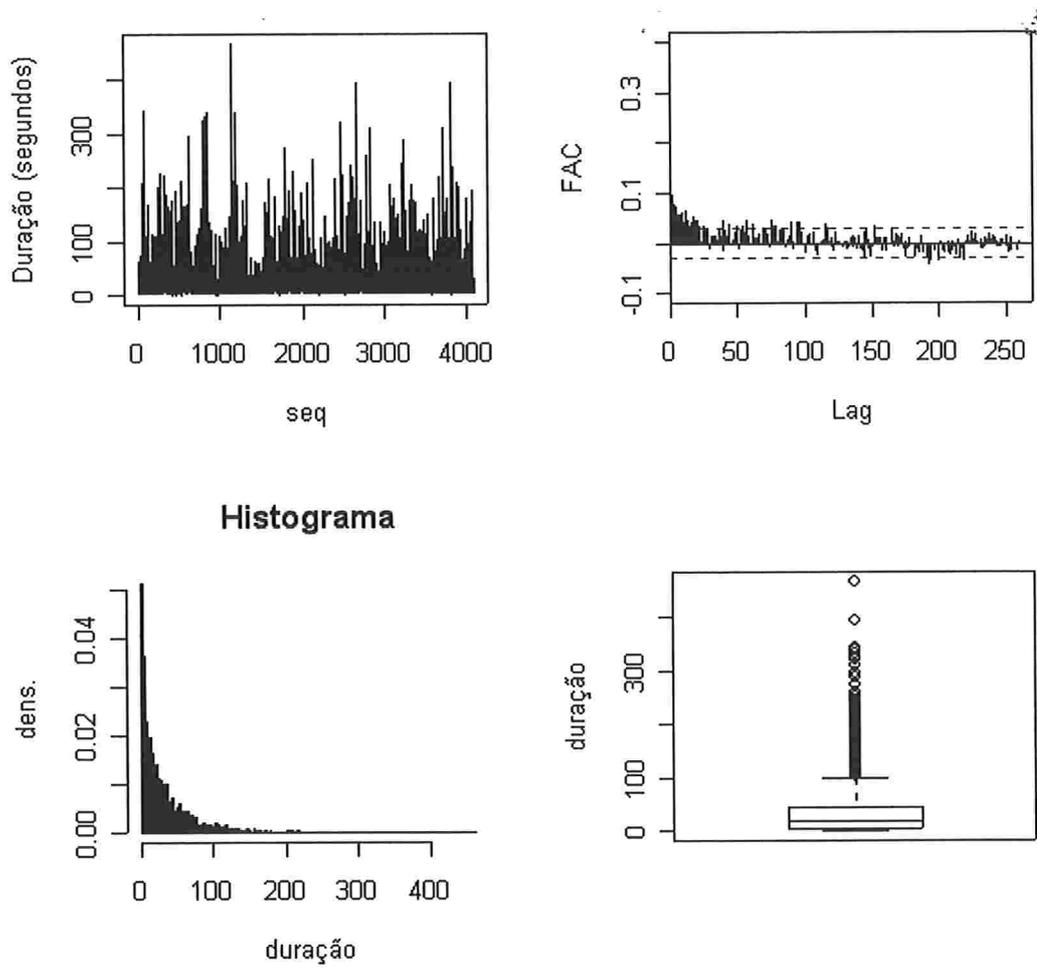


Figura 6.10: Gráfico, função de autocorrelação, histograma e boxplot do tempo entre as negociações da ação IBM, no período de 01 de agosto a 08 de novembro de 1990.

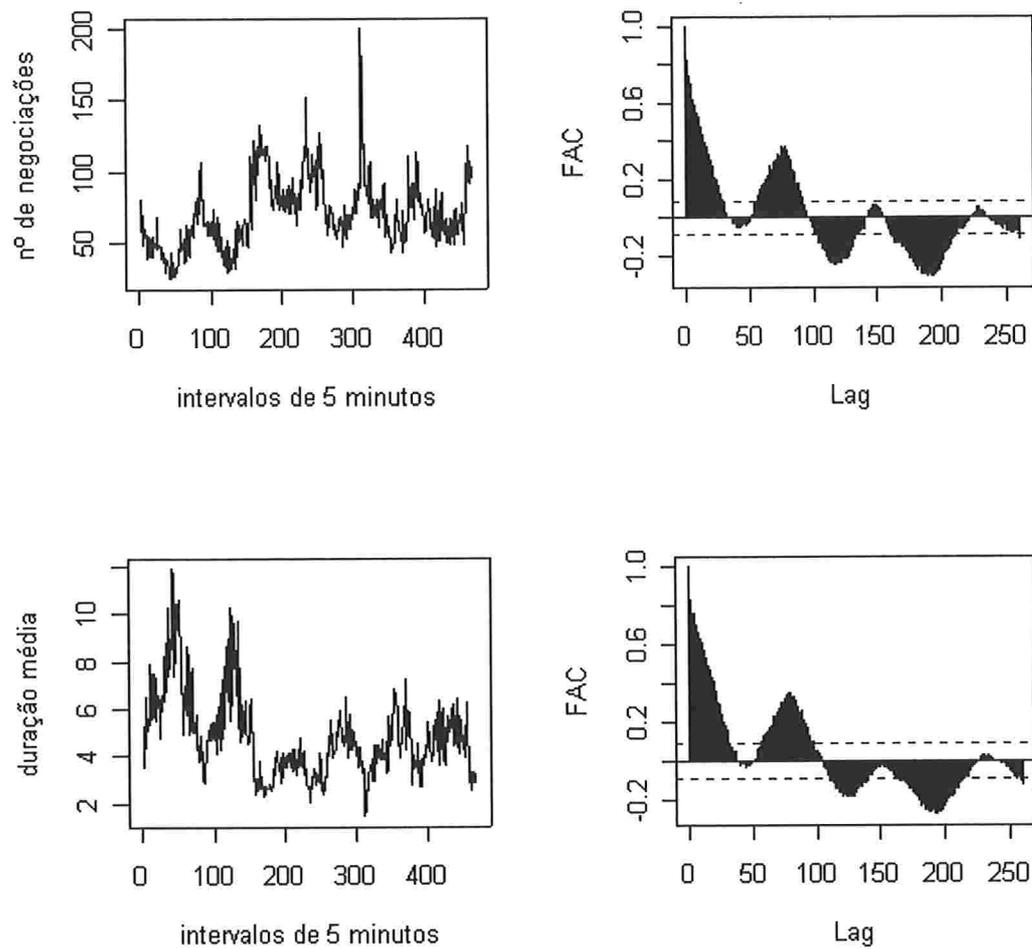


Figura 6.11: Gráfico e função de autocorrelação do número de negociações e do tempo entre as negociações da ação IBM em intervalos de 5 minutos, no período de 01 de agosto a 08 de novembro de 1990.

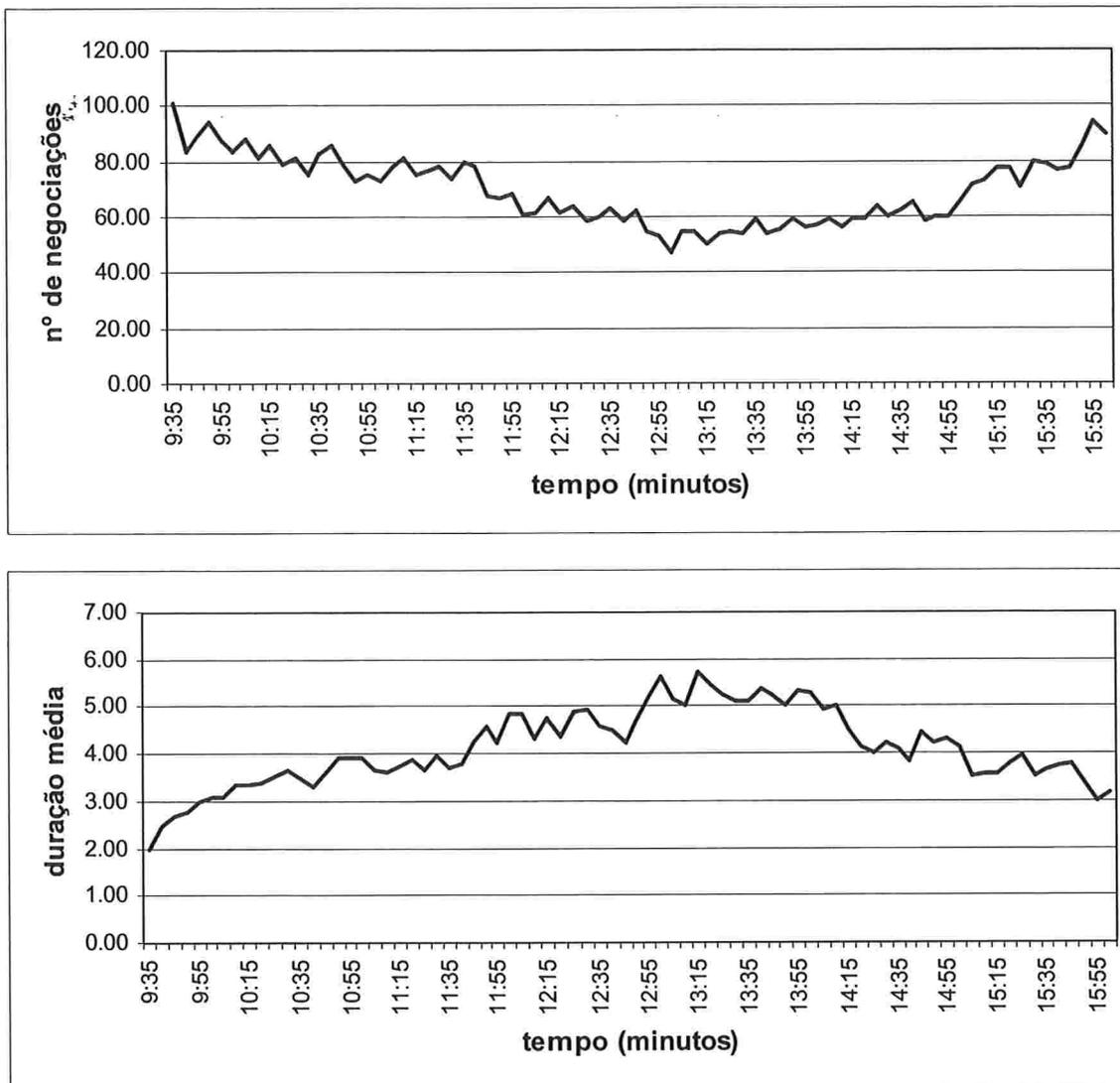


Figura 6.12: Estimativa da sazonalidade intra-diária - Gráficos do número médio de negociações e do tempo médio entre as negociações da ação IBM em intervalos de 5 minutos, no período de 01 de agosto a 08 de novembro de 1990.

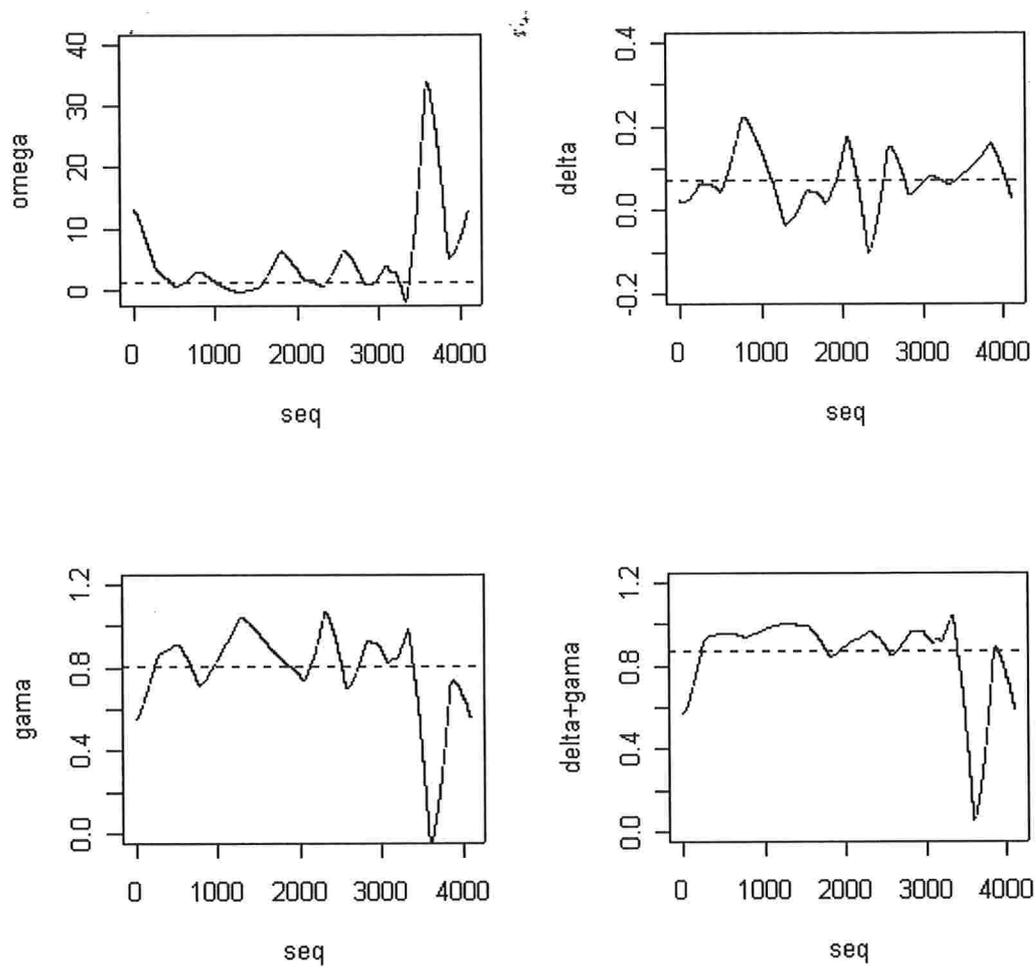


Figura 6.13: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo EACD(1,1) com parâmetros variando no tempo (linha cheia) e com parâmetros fixos (linha tracejada).

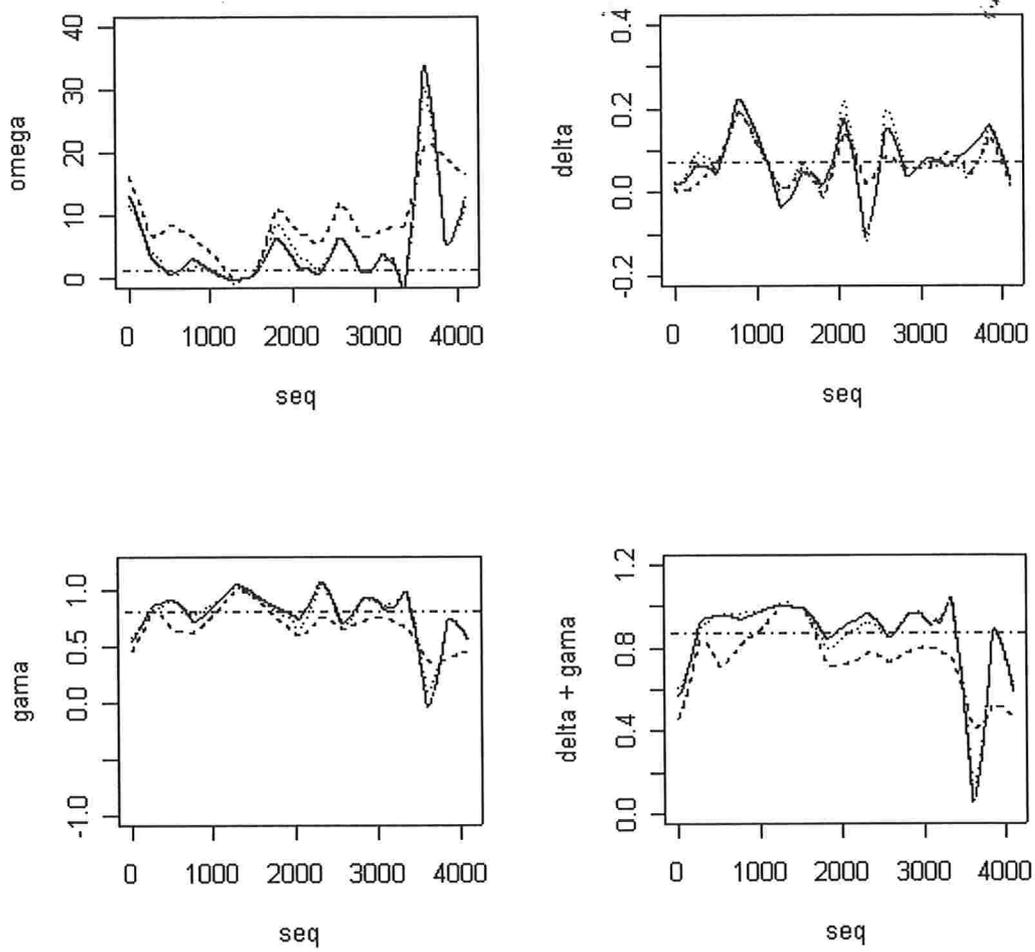


Figura 6.14: Estimativas dos parâmetros do processo EACD(1,1) para as durações da IBM, para comparação dos resultados do EMV para o modelo com parâmetros variando no tempo (linha cheia), modelo sem parâmetros variando no tempo (linha tracejada com ponto) e das simulações via Bootstrap (linha tracejada) e via Metroplis-Hastings (linha pontilhada).

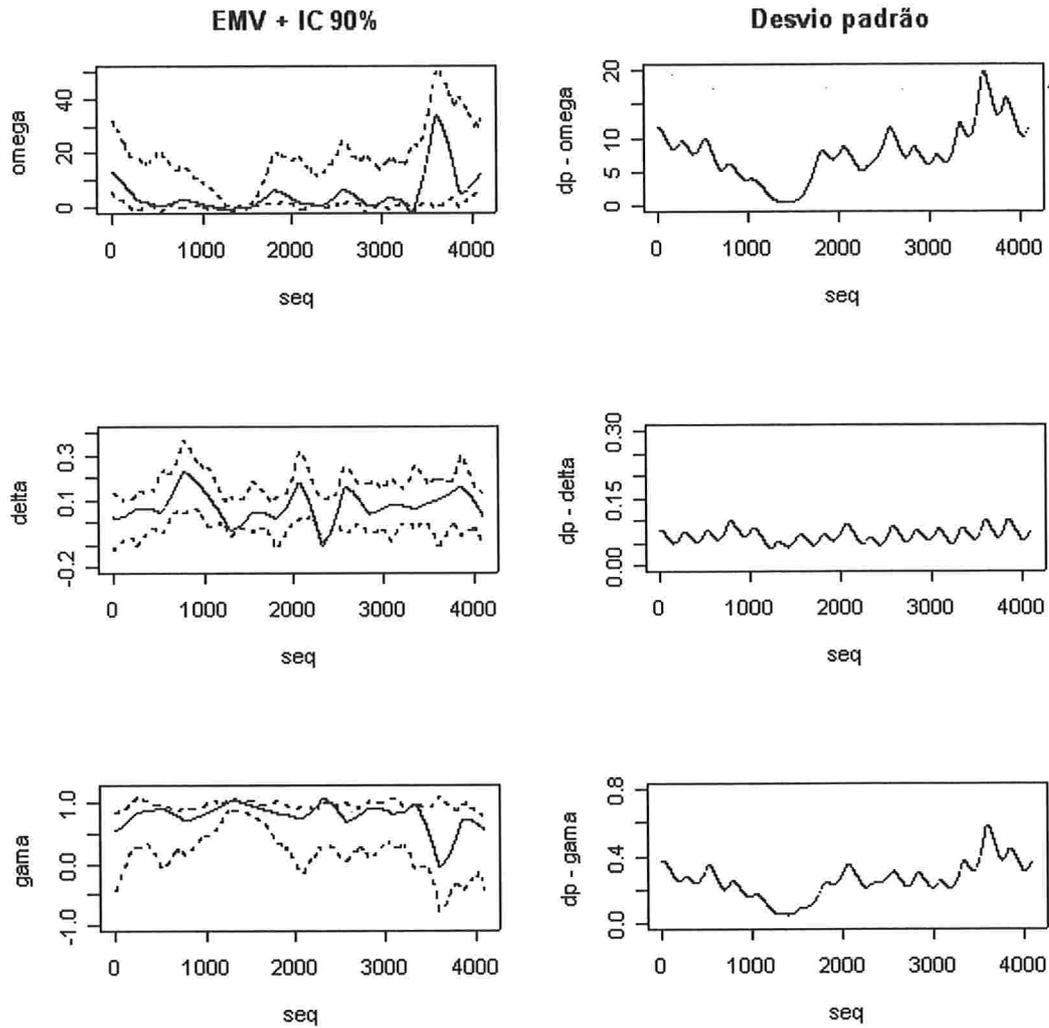


Figura 6.15: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança (linha cheia) e quantis empíricos obtidos via Bootstrap com 90% de confiança (linha tracejada) para os parâmetros do modelo EACD(1,1) para o tempo entre as negociações da ação IBM. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores via Bootstrap.

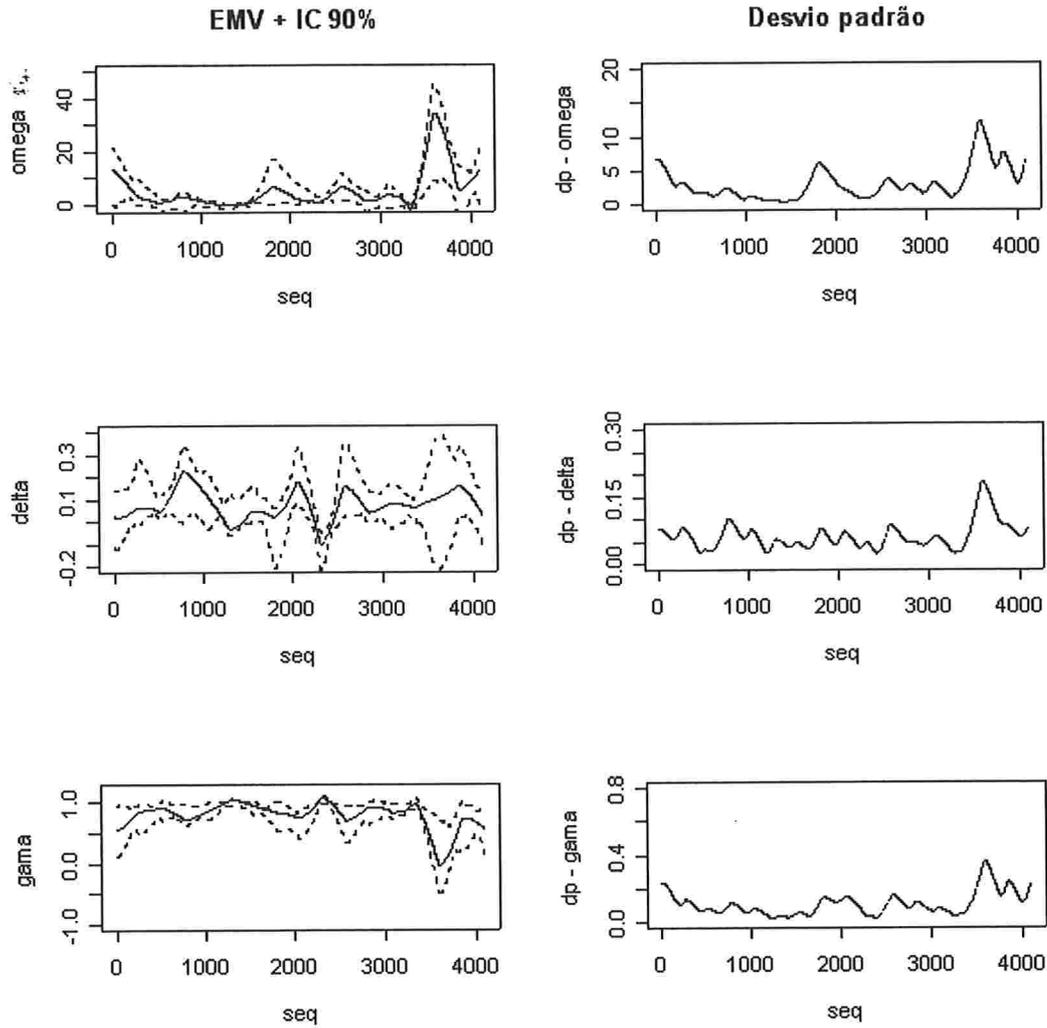


Figura 6.16: Coluna 1 - Estimativa de máxima verossimilhança (linha cheia) e quantis empíricos obtidos via Metropolis-Hastings com 90% de confiança (linha tracejada) para os parâmetros do modelo EACD(1,1) para o tempo entre as negociações da ação IBM. Coluna 2 – Estimativa do desvio padrão dos estimadores via Metropolis-Hastings.

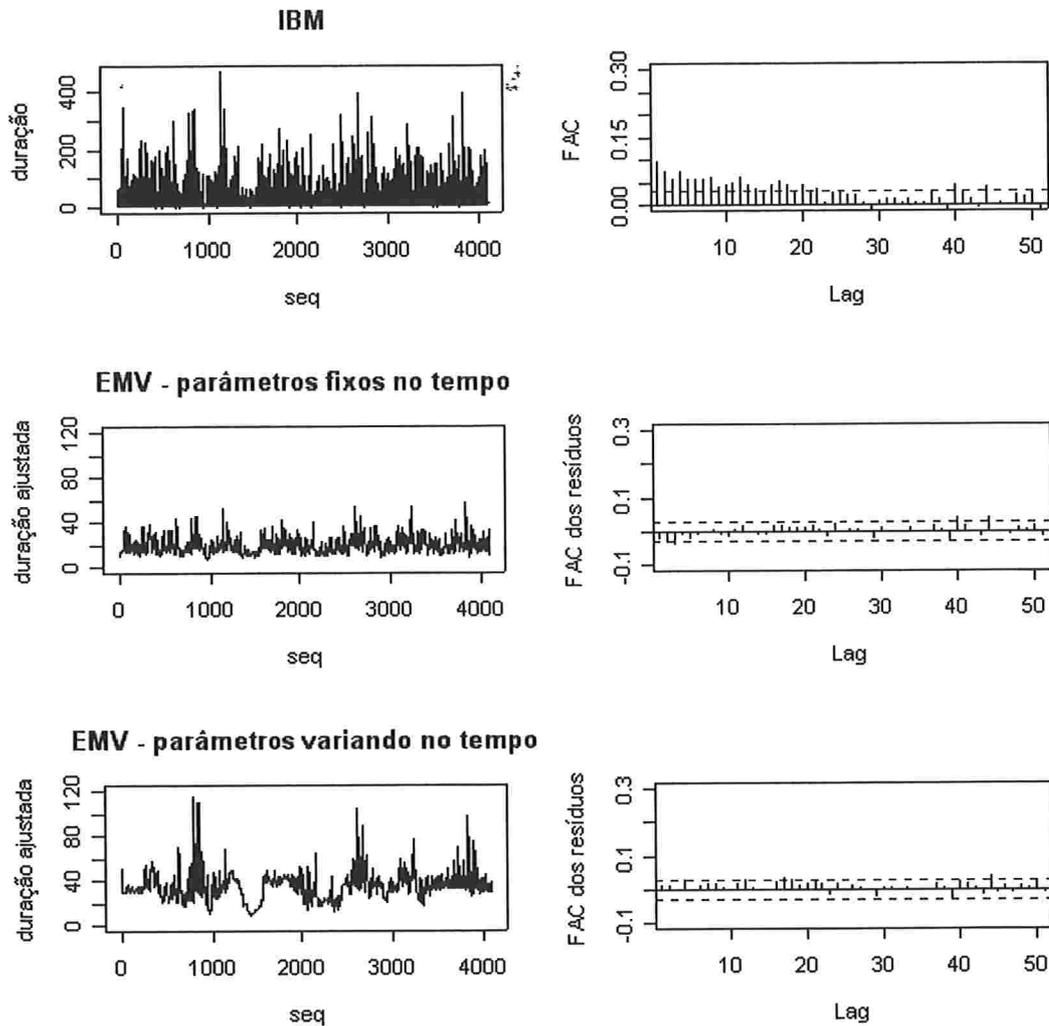


Figura 6.17: Série de durações da IBM e durações ajustadas com base no modelo EACD(1,1) sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

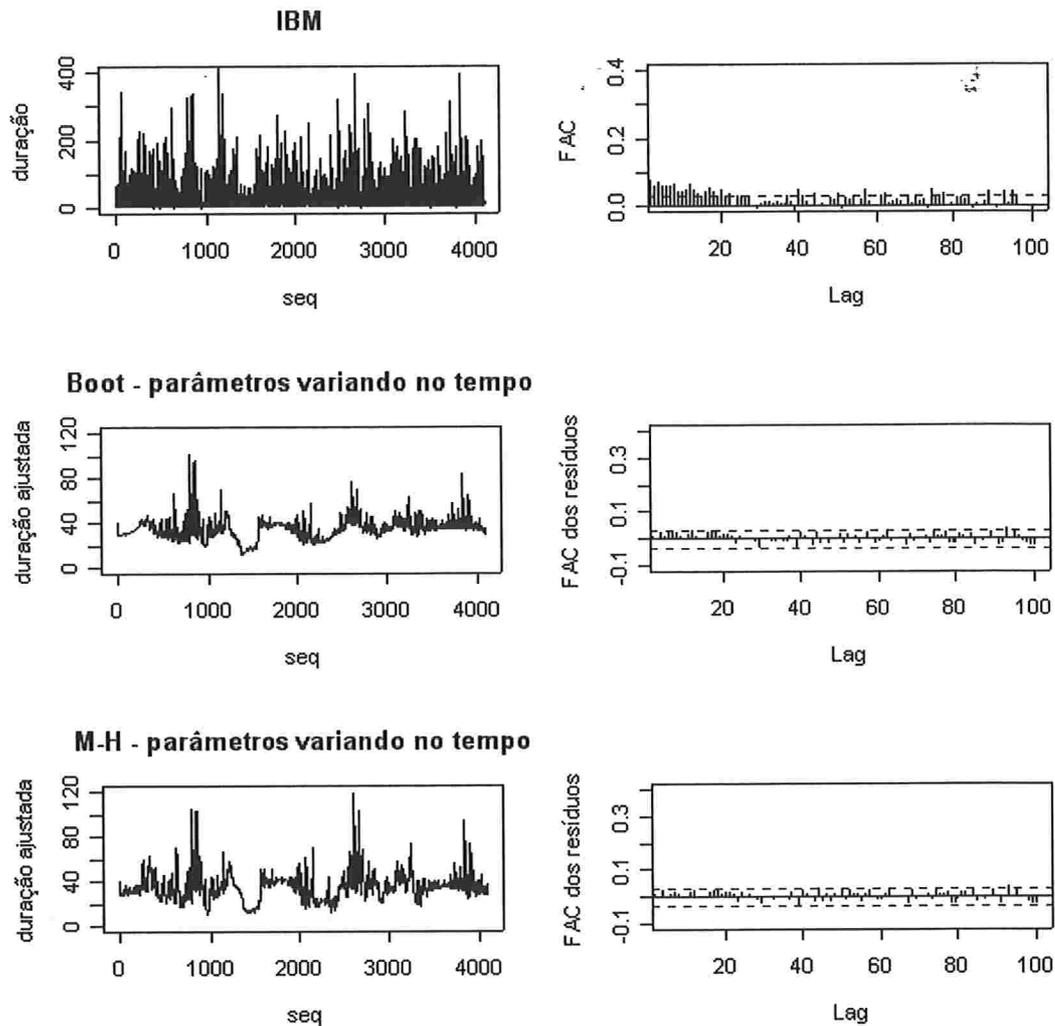


Figura 6.17 (continuação): Série de durações da IBM e durações ajustadas com base no modelo EACD(1,1) sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings, bem como função de auto-correlação dos resíduos para cada um dos modelos ajustados.

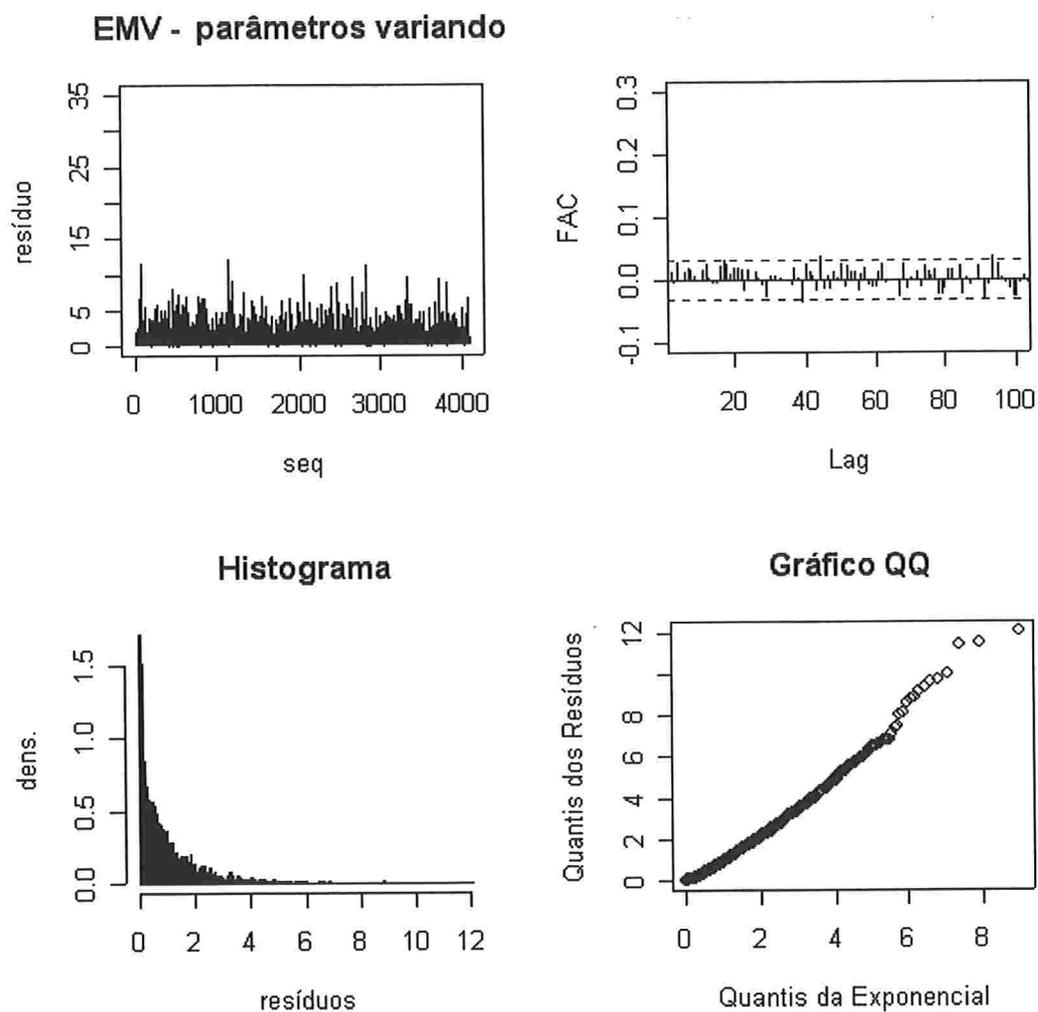


Figura 6.18: Resíduos e análise de resíduos para as durações da IBM, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings

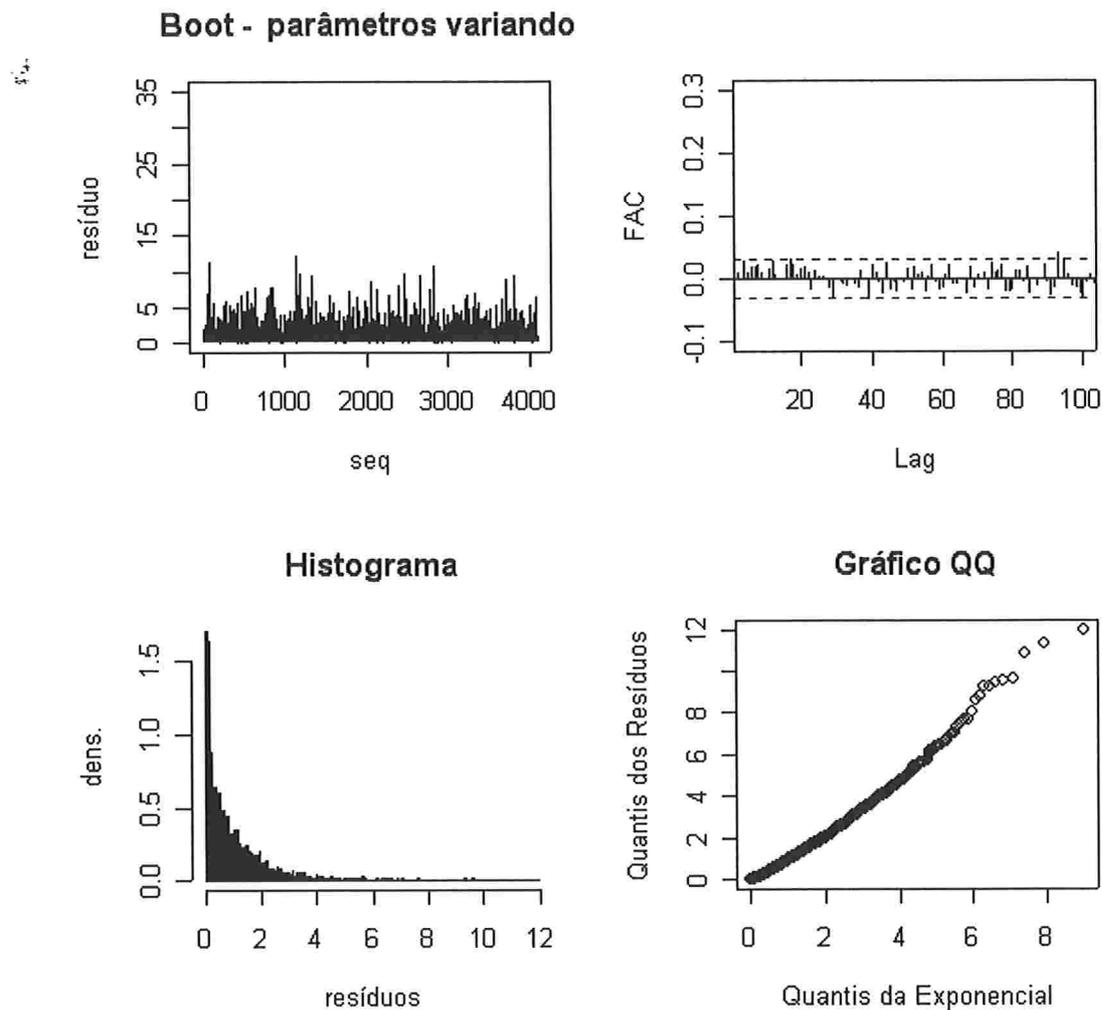


Figura 6.18 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da IBM, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings

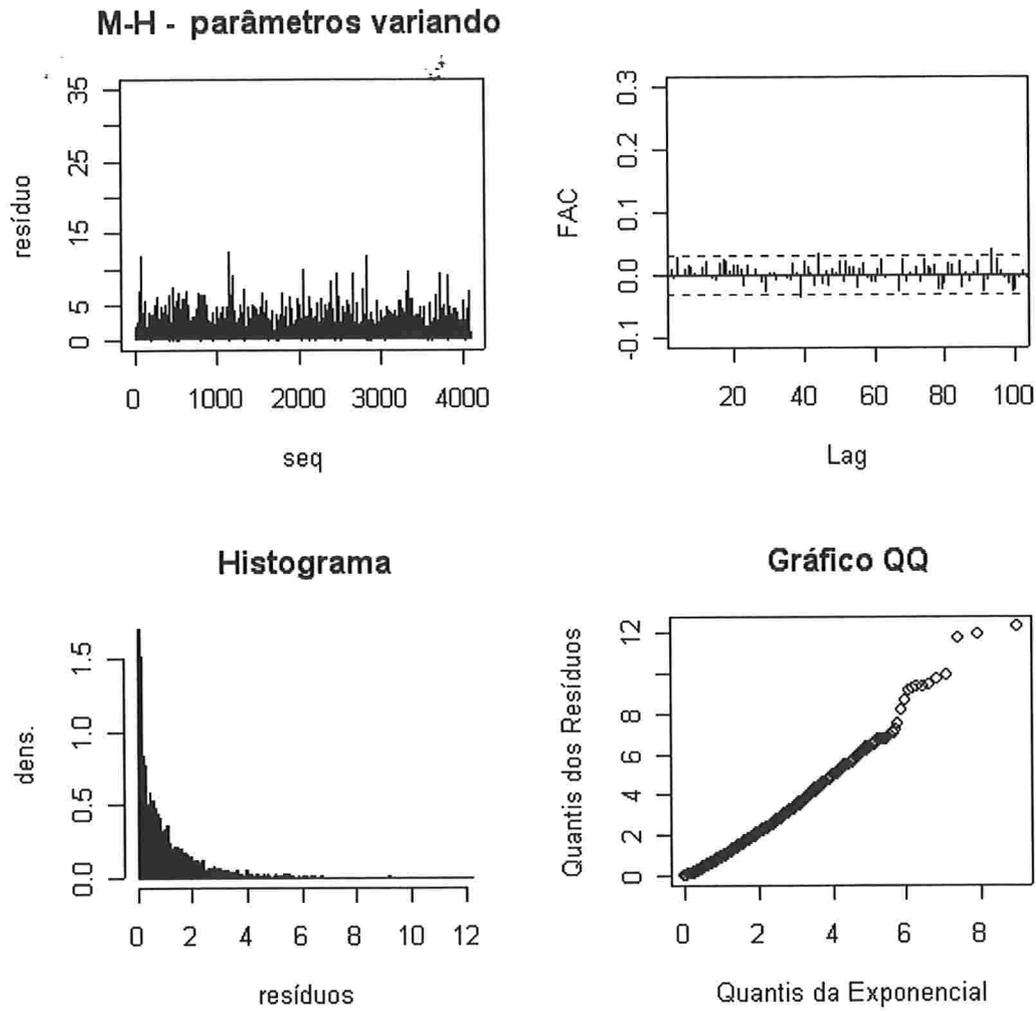


Figura 6.18 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da IBM, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings

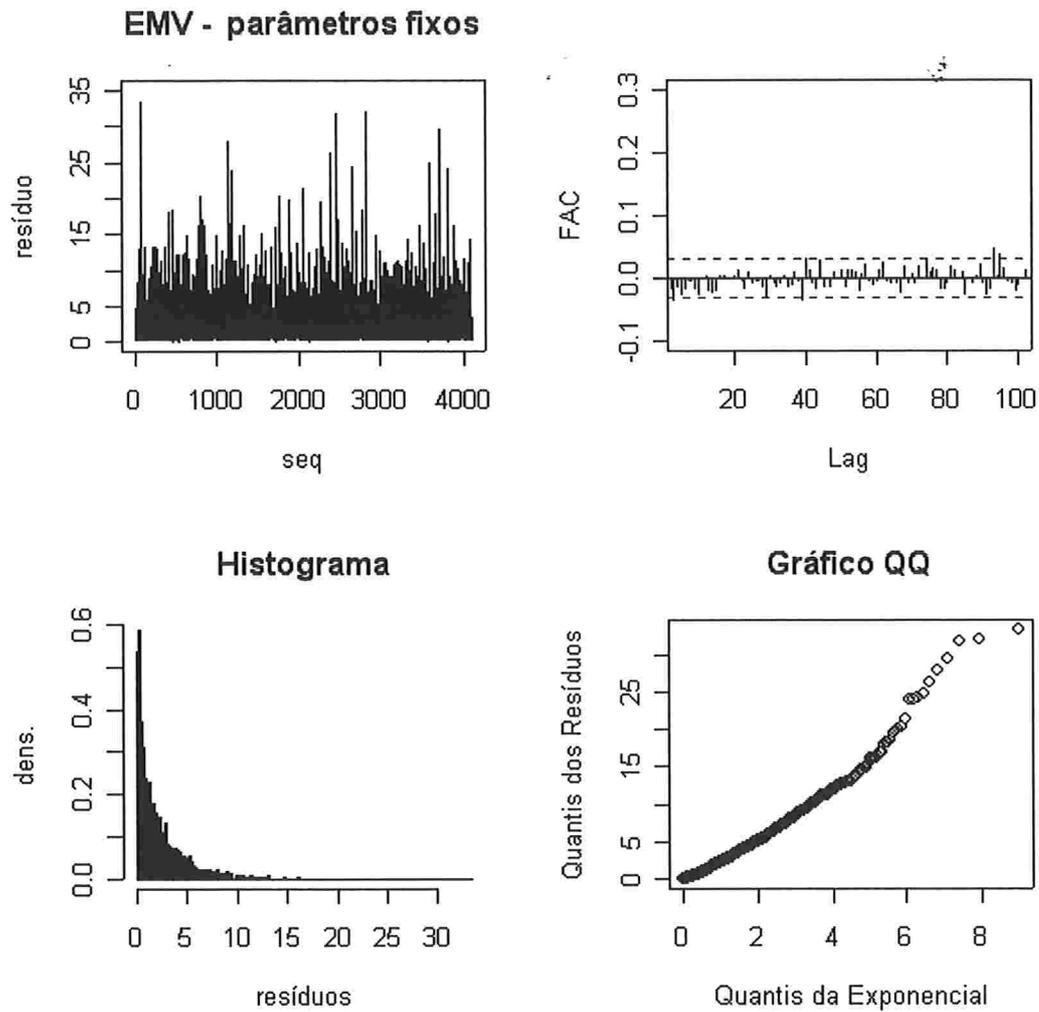


Figura 6.18 (continuação): Resíduos e análise de resíduos para as durações da IBM, ajustadas com base no modelo sem parâmetros variando no tempo, ajustado por máxima verossimilhança, e nos modelos com parâmetros variando no tempo, ajustados por máxima verossimilhança, via Bootstrap e via Metropolis-Hastings.

6.3 Conclusões Gerais

- Foi possível modelar tanto a sazonalidade intra-diária como a estrutura de dependência das durações da IBM e TELEMAR utilizando o modelo auto-regressivo de duração condicional com parâmetros variando no tempo e erros exponencialmente distribuídos, baseando-se na decomposição dos processos via ondaletas;
- o ajuste dos modelos com parâmetros variando no tempo foi melhor do que o do modelo usual, o que era esperado pelo padrão não-estacionário dos processos reais de negociação. Especialmente no caso da TELEMAR, que apresenta características que variam mais intensamente ao longo do tempo em comparação com a IBM, fato dos estimadores variarem ao longo do tempo, possibilitou uma boa modelagem conjunta da sazonalidade, da estrutura de dependência das durações e de sua volatilidade;
- as estimativas dos parâmetros do modelo ACD e os desvios padrões dos estimadores variam ao longo do tempo, confirmando a não-estacionariedade das séries de durações utilizadas. As estimativas são semelhantes para os três modelos com parâmetros variando no tempo, principalmente para a estimação por máxima verossimilhança e Metropolis-Hastings. Desta maneira, as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança são similares às propriedades dos estimadores via Metropolis-Hastings;
- para a ação da TELEMAR, a maioria dos coeficientes de ondaletas apresentou distribuição normal para ambos os métodos de estimação, Bootstrap (79% são normais) e Metropolis-Hastings (56% são normais). No caso da ação da IBM, 42% dos coeficientes estimados via Bootstrap foram considerados normais enquanto nenhum dos coeficientes estimados via Metropolis-Hastings apresentou distribuição normal, com 95% de confiança. A principal causa do desvio de normalidade é o excesso de curtose da distribuição dos coeficientes de ondaletas;
- os métodos Bootstrap e Metropolis-Hastings são essenciais para realização de testes de hipóteses e construção de intervalos de confiança de interesse pois estimam a

variabilidade dos estimadores dos coeficientes de ondaletas.

6.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

1. Considerar o modelo log-ACD com parâmetros variando no tempo. Essa versão do modelo ACD permitiria o uso de variáveis adicionais de mercado, como preço, volume e *spread*, sem restrição na estimação dos parâmetros. As variáveis adicionais auxiliariam na obtenção de uma melhor modelagem do que acontece no mercado financeiro e serviriam para testar hipóteses sobre a micro-estrutura do mercado, além de explicar como é a dependência das variáveis de mercado com as durações e como essa dependência varia ao longo do tempo. O modelo log-ACD foi estudado por Bauwens e Giot (2000), que usaram simulação via Monte Carlo e aplicação do modelo às durações das ações da IBM, Disney e Boeing para mostrar que o modelo é uma boa alternativa em relação ao modelo ACD.
2. Outra análise de interesse seria a utilização do modelo de duração condicional estocástico com parâmetros variando no tempo, que permitiria uma estrutura mais flexível para a esperança condicional da duração, sendo regida por um processo latente. Mais detalhes sobre o modelo SCD podem ser encontrados em Bauwens e Veredas (2000).
3. O uso de distribuições mais flexíveis para os erros, como as distribuições Weibull e Gama, pode ser uma maneira de melhorar o ajuste do modelo, permitindo que a intensidade do processo tenha uma forma mais geral.
4. Estender modelos ACD assimétricos, considerando parâmetros variando no tempo. Este tipo de modelo foi estudado por Bauwens e Giot (2003) e permite modelar as durações de forma diferente quando há aumento ou decaimento no preço.

Bibliografia

- Andersen, T. e Bollerslev, T. (1997). Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets. *Journal of Empirical Finance*, 4, 115-158.
- Bauwens, L. e Giot, P. (2000). The logarithmic ACD model: an application to the bid-ask quote process of three NYSE stocks. *Annales d'Economie et de Statistique*, 60, 117-150.
- Bauwens, L. e Giot, P. (2003). Asymmetric ACD models: introducing price information in ACD models. *Empirical Economics*, 28, 709-731.
- Bauwens, L. e Veredas, D. (2000). The stochastic conditional duration model: a latent factor model for the analysis of financial durations. *Journal of Econometrics*, 119 (2), 381-412.
- Berndt, E., Hall, B., Hall, R. e Hausmann, J. (1974). Estimation and inference in nonlinear structural models. *Annals of Economic and Social Measurement*, 3, 653-665.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev, T. e Melvin, M. (1994). Bid-ask spreads and volatility in the foreign exchange market: an empirical analysis. *Journal of International Economics*, 36, 355-372.
- Bollerslev, T. e Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, 11 (2), 143-172.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, New Jersey.

- Chib, S. e Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *The American Statistician*, 49 (4), 327-335.
- Chui, C. K. (1992). *An introduction to wavelets, wavelet analysis and its applications*, vol 1. Academic Press, San Diego.
- Copeland, T. e Galai, D. (1983). Information effects and the bid-ask spread. *Journal of Finance*, 38, 1457-1469.
- Dacorogna, M. M., Gençay, R. Muller, U., Olsen, R. B. e Pictet, O. V. (2001). *An introduction to high-frequency finance*. Academic Press, San Diego.
- Dahlhaus, R. (1996). Asymptotic statistical inference for nonstationary process with evolutionary spectra. In *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, Vol II (P.M. Robinson and M. Rosenblatt, eds.). Springer-Verlag, New York.
- Dahlhaus, R. (1997). Fitting time series models to nonstationary processes. *Annals of Statistics*, 25, 1-37.
- Diggle, P. J. e Gratton, R. J. (1984). Monte Carlo methods of inference for implicit statistical models. *Journal of The Royal Statistical Society, B*, 46 (2), 193-227.
- Easley, D., Kiefer, N. M., O'Hara, M. e Paperman, J. (1996). Liquidity, information and infrequently traded stocks. *Journal of Finance*, 51, 1405-1436.
- Engle, R. F. e Russell, J. R. (1997). Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange prices with the autoregressive conditional duration model. *Journal of Empirical Finance*, 12, 187-212.
- Engle, R. F. e Russell, J. R. (1998). Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, 66 (5), 1127-1162.

- Engle, R. F. (2000). The econometrics of ultra-high-frequency data. *Econometrica*, 68 (1), 1-22.
- Fernandes, M. e Gramming, J. (2005). A family of autoregressive conditional duration models. *Journal of Econometrics*, a ser publicado.
- Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. Chapman & Hall, London.
- Gelman, A. e Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequence. *Statistical Science*, 7 (4), 457-511.
- Gençay, R., Selçuk, F. e Whitcher, B. (2001). Differentiating intraday seasonalities through wavelet multi-scaling. *Physica A*, 289, 543-556.
- Ghysels, E., Gouriéroux, C. e Jasiak, J. (2004). Stochastic volatility durations. *Journal of Econometrics*, 119 (2), 413-433.
- Goodhart, C. e O'Hara, M.. (1997). High frequency data in financial markets: issues and applications. *Journal of Empirical Finance*, 4, 73-114.
- Gouriéroux, C. e Jasiak, J. (2001). *Financial econometrics: problems, models, and methods*. Princeton University Press, New Jersey.
- Gouriéroux, C., Jasiak, J. e Le Fol, G. (1999). Intra-day market activity. *Journal of Financial Markets*, 2, 193-226.
- Gouriéroux, C., Monfort, A. e Trognon, A. (1984). Pseudo maximum likelihood methods: theory. *Econometrica*, 52, 681-700.
- Hasbrouck, J. (1988). Trades, quotes, inventories and information. *Journal of Financial Economics*, 22, 229-252.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57, 97-109.

- Herbst, L.J. (1963). Periodogram analysis and variance fluctuations. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 25, 442-450.
- Lee, S. e Hansen, B. (1994). Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory*, 10, 29-52.
- Ljung, G. M. e Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65, 297-303.
- Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1990 a). An econometric analysis of nonsynchronous trading. *Journal of Econometrics*, 45, 181-211.
- Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1990 b). An econometric analysis of infrequent trading. *Journal of Econometrics*, 45, 181-212.
- Lumsdaine, R. L. (1996). Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator in IGARCH(1,1) and covariance stationary GARCH(1,1) models. *Econometrica*, 64 (3), 575-596.
- McInish, T. H. e Wood, R. A. (1992). An analysis of intraday patterns in bid/ask spreads for NYSE stocks. *The Journal of Finance*, 47 (2), 753-764.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. e Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machine. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1091.
- Metropolis, N. e Ulam, S. (1949). The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44 (247), 335-341.
- Morettin, P. A. (1999). *Ondas e ondaletas*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Müller, U. A., Dacorogna, M. M., Olsen, R. B., Pictet, O. V., Schwarz, M. e Morgeneegg, C. (1990). Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price

- change scaling law, and intraday analysis. *Journal of Banking and Finance*, 14, 1189-1208.
- Ogden, R. T. (1997). *Essential wavelets for statistical applications and data analysis*. Birkhäuser, Boston.
- O'Hara, M. (1995). *Market microstructure theory*. Basil Blackwell Publishers, Oxford.
- Percival, D. B. e Walden, A. T. (2000). *Wavelet methods for time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Priestley, M. B. (1965). Evolutionary spectra and nonstationary process. *Journal of The Royal Statistical Society, B*, 27, 204-237.
- Ross, S. (1997). *Simulation (statistical modelling and decision making)*. Academic Press, San Diego.
- Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo method*. Wiley, New York.
- Snyder, D. L. e Miller, M. I. (1991). *Random point processes in time and space*. Springer Verlag, New York.
- Stoll, H. e Whaley, R. (1990). Stock market structure and volatility. *Review of Financial Studies*, 3, 37-71.
- Tsay, R. S. (1992). Model checking via parametric bootstraps in time series analysis. *Applied Statistics*, 41 (1), 1-15.
- Tsay, R. S. (2002). *Analysis of financial time series*. John Wiley, New York.
- Zhang, M. Y., Russell, J. R. e Tsay, R. S. (2001). A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data. *Journal of Econometrics*, 104, 179-207.

Apêndice A - Gráficos

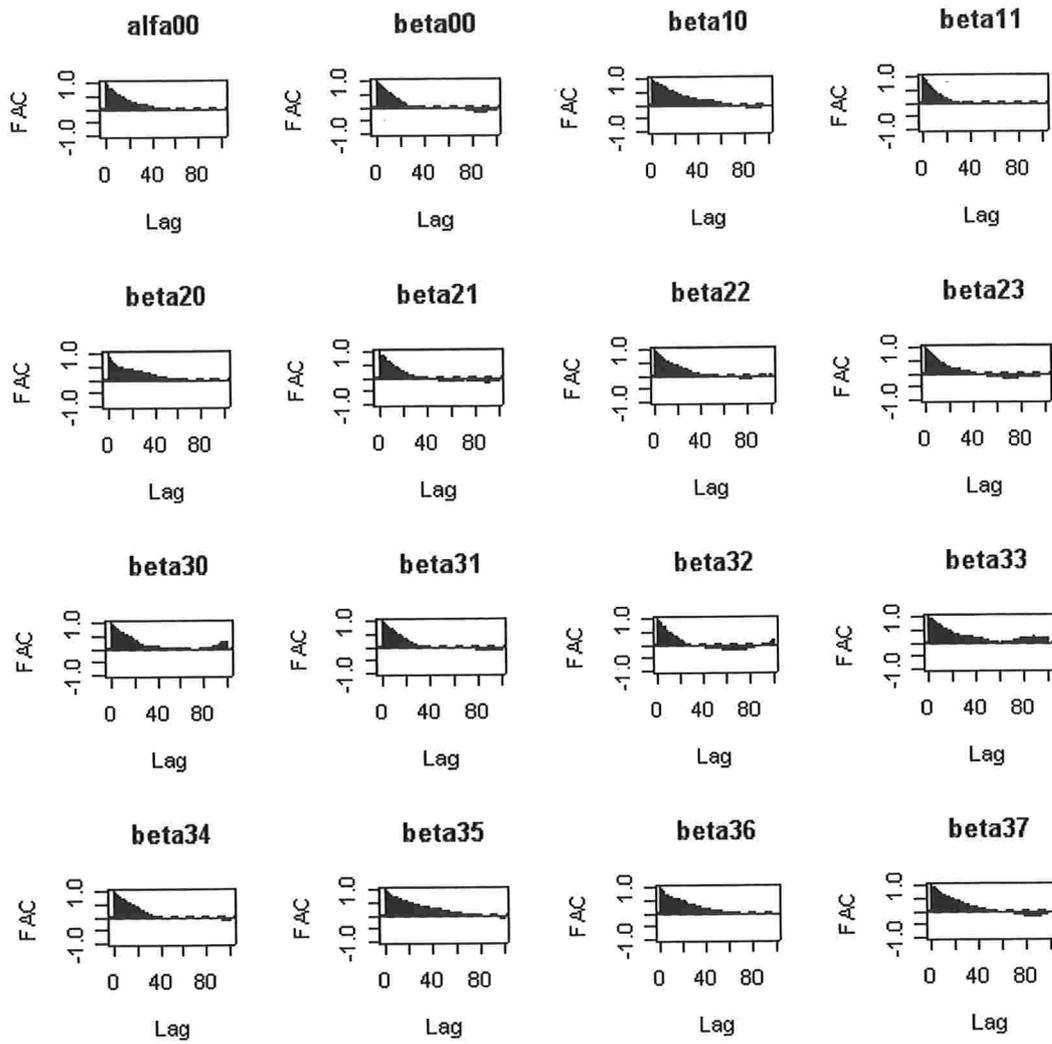


Figura A.5: Função de auto-correlação estimada para a cadeia gerada via Metropolis-Hastings (17.500 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro ω .

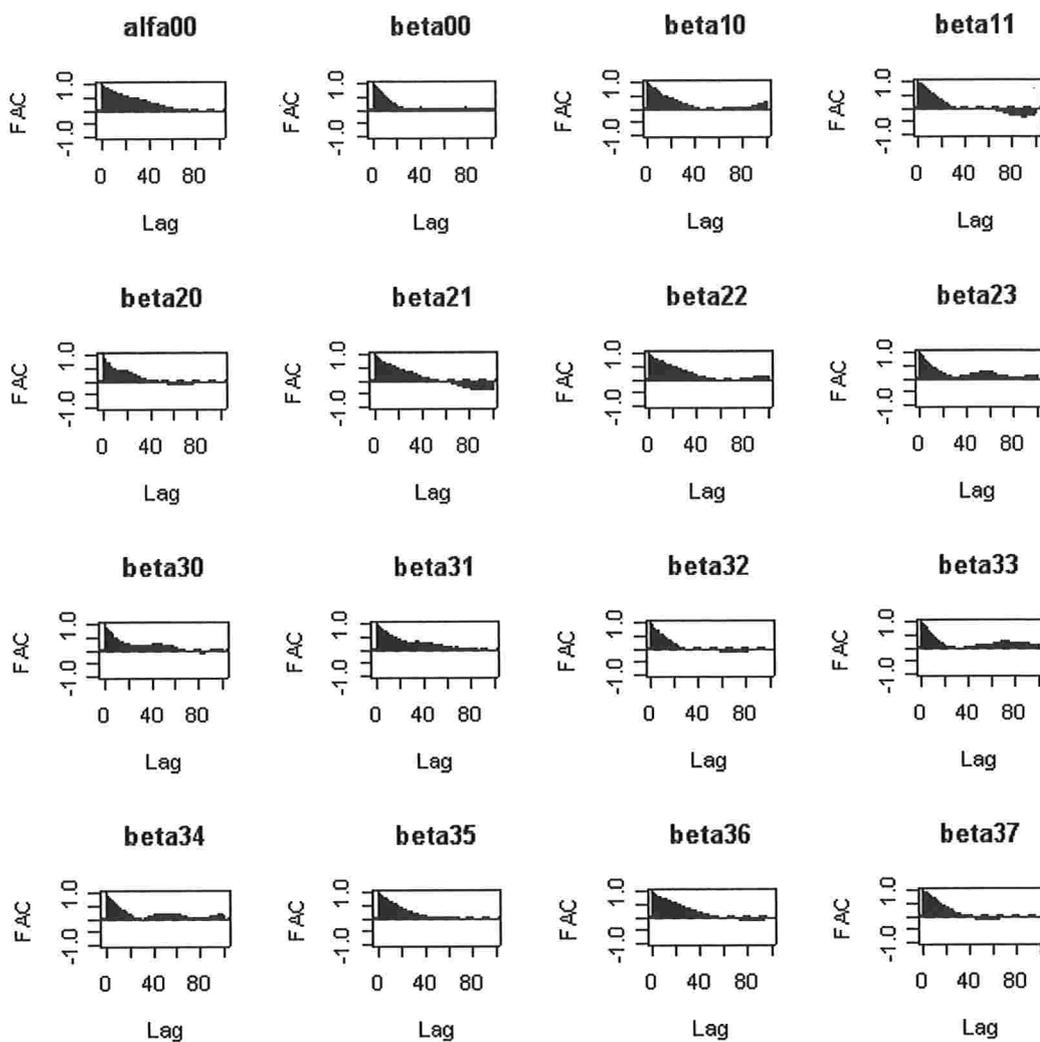


Figura A.5 (continuação): Função de auto-correlação estimada para a cadeia gerada via Metropolis-Hastings (17.500 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro δ .

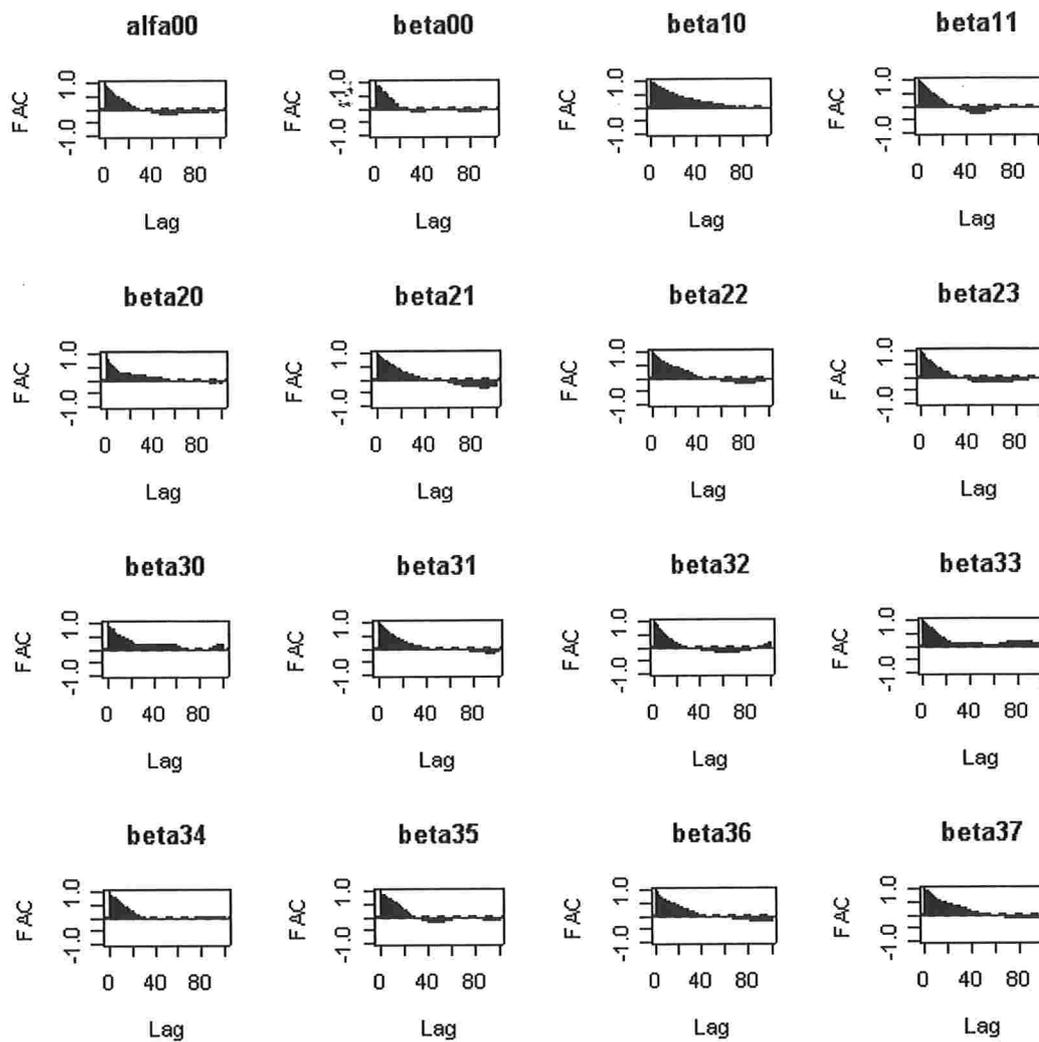


Figura A.5 (continuação): Função de auto-correlação estimada para a cadeia gerada via Metropolis-Hastings (17.500 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro γ .

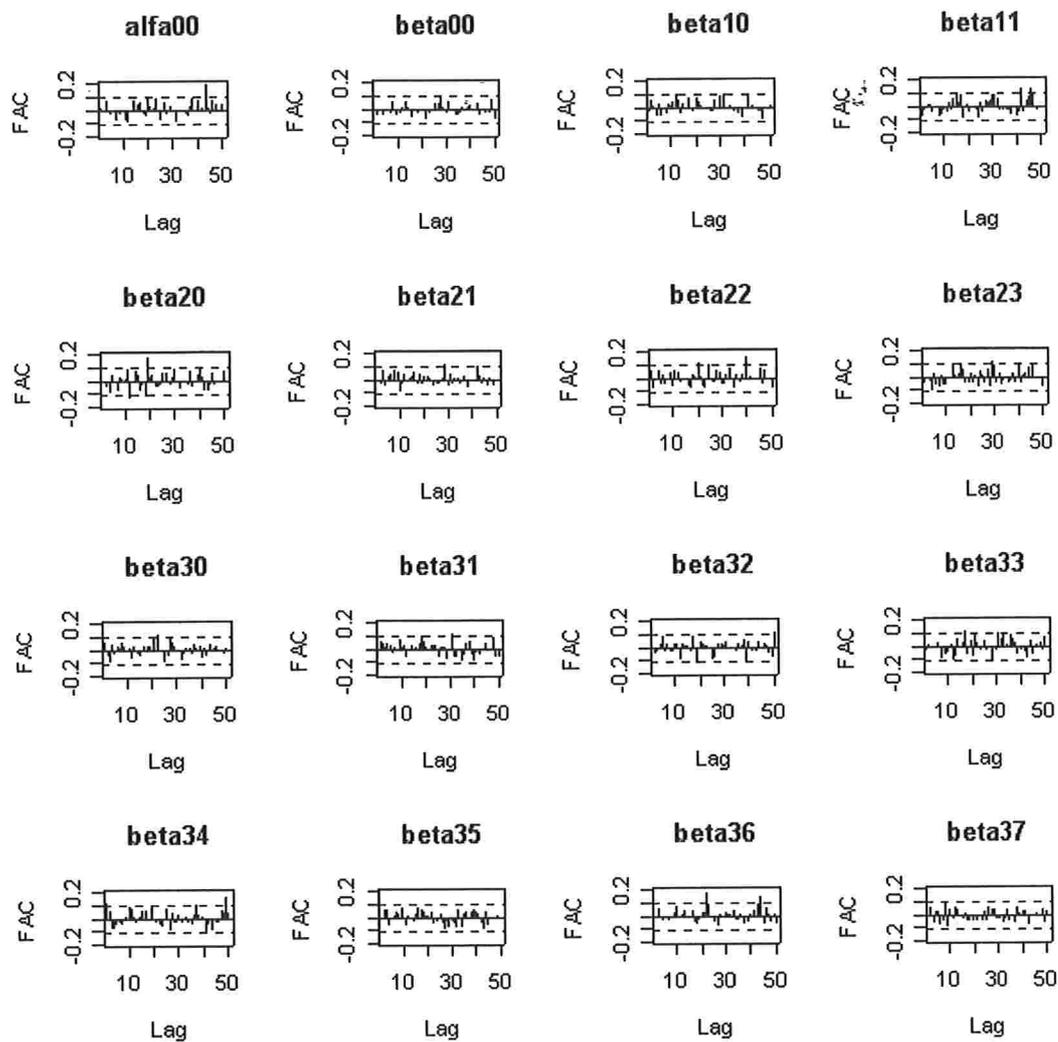


Figura A.6: Função de auto-correlação estimada para a sub-cadeia gerada via Metropolis-Hastings (350 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro ω .

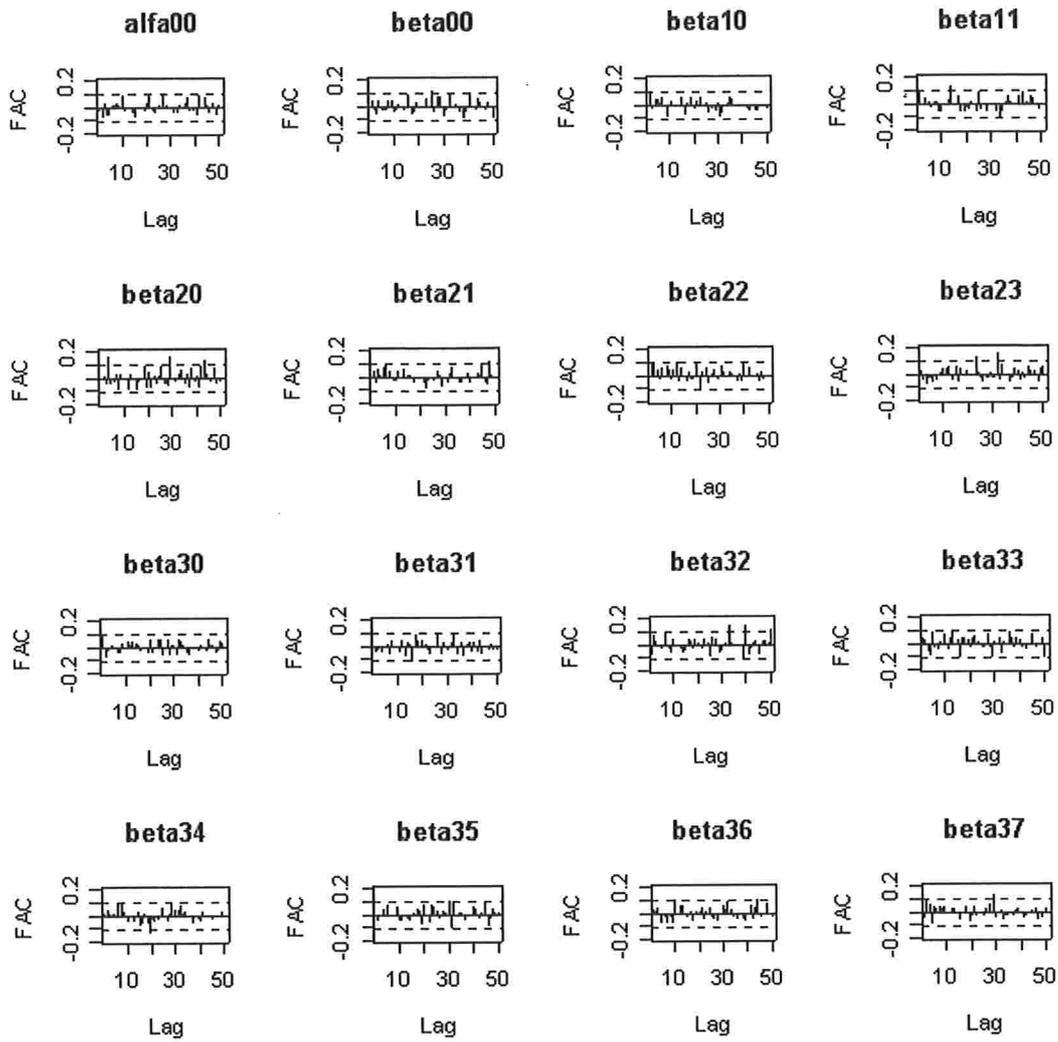


Figura A.6 (continuação): Função de auto-correlação estimada para a sub-cadeia gerada via Metropolis-Hastings (350 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro δ .

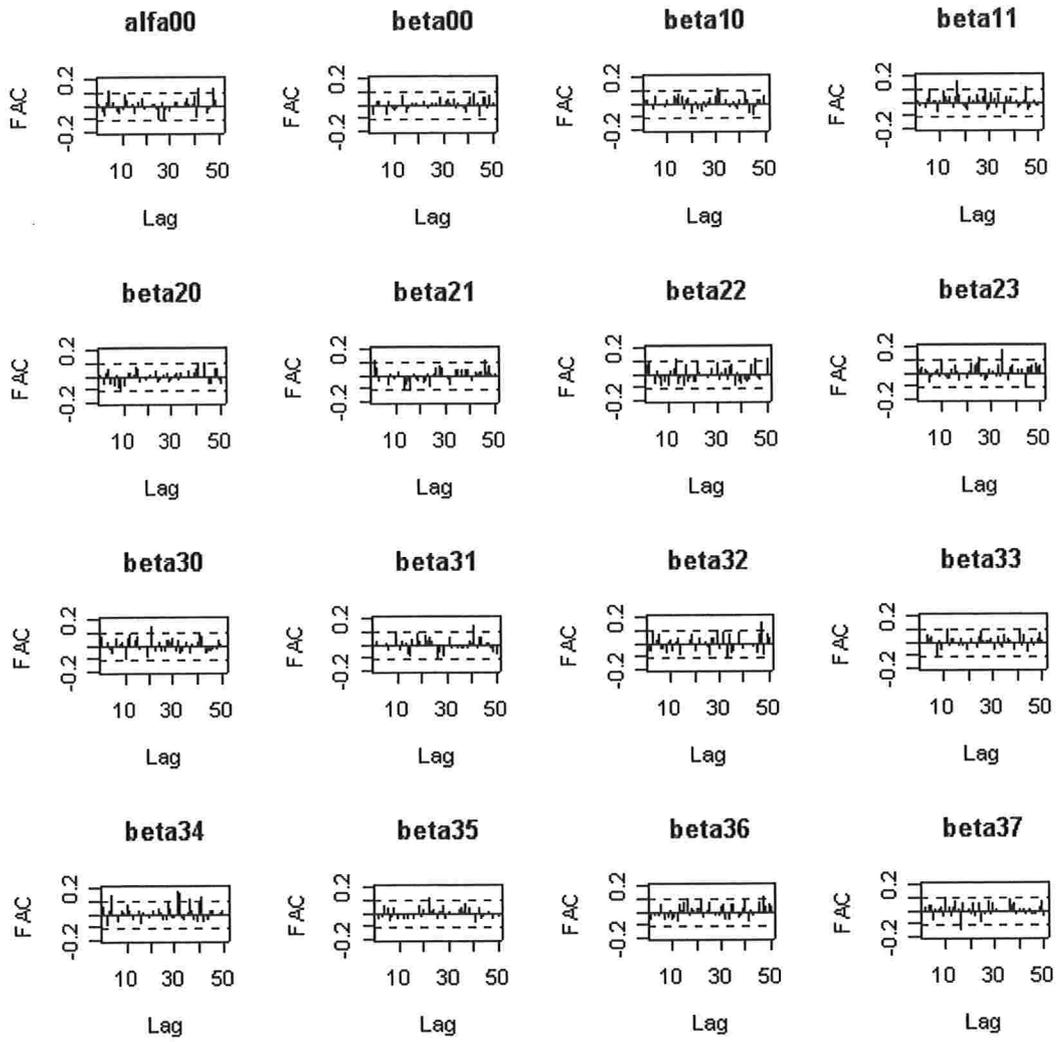


Figura A.6 (continuação): Função de auto-correlação estimada para a sub-cadeia gerada via Metropolis-Hastings (350 réplicas) para os coeficientes de ondaletas do parâmetro γ .

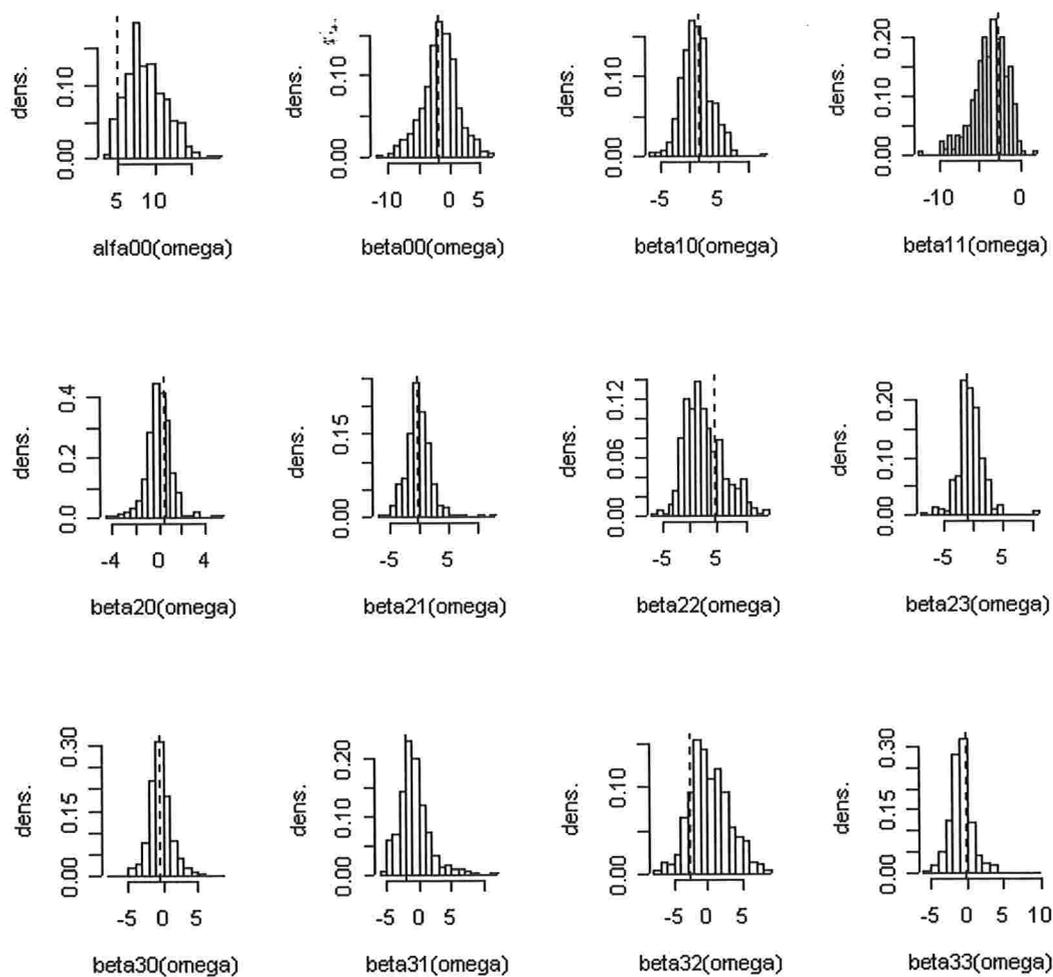


Figura A.7: Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Bootstrap. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

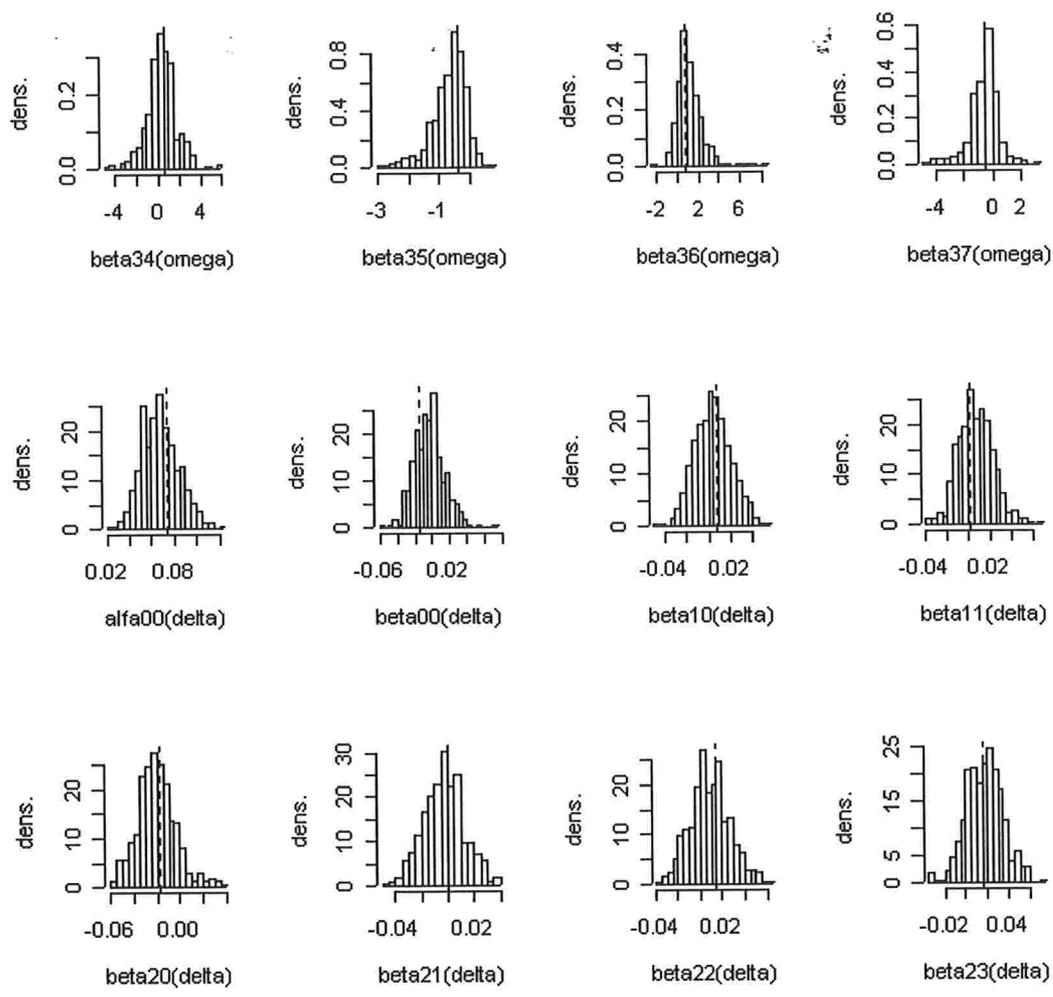


Figura A.7 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Bootstrap. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

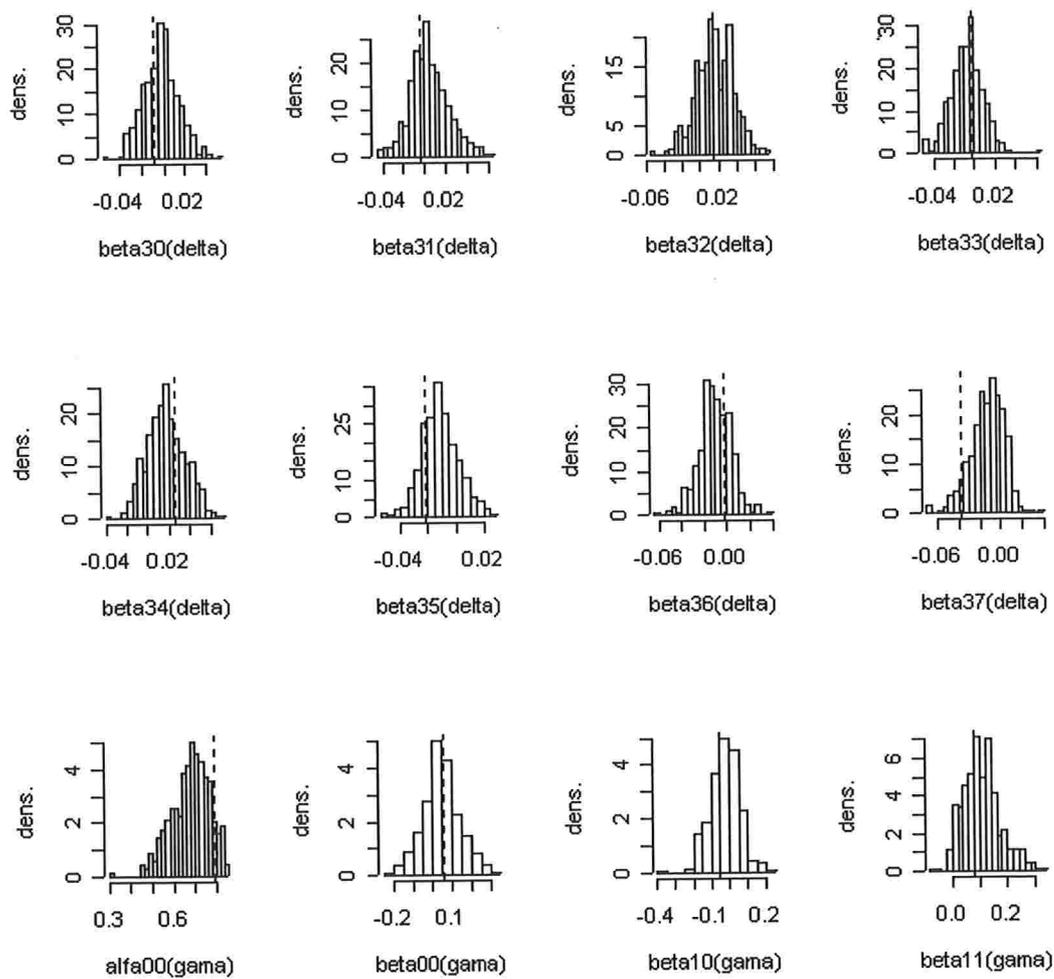


Figura A.7 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Bootstrap. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

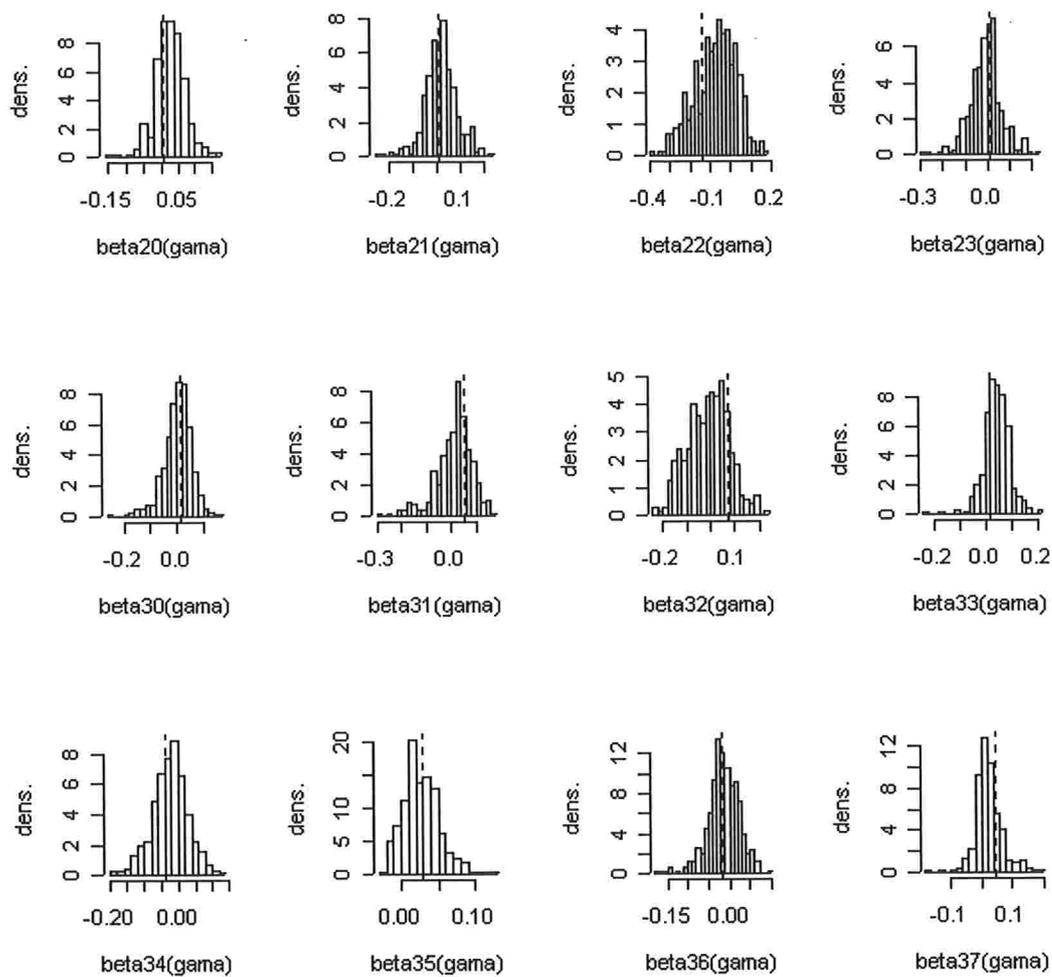


Figura A.7 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Bootstrap. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

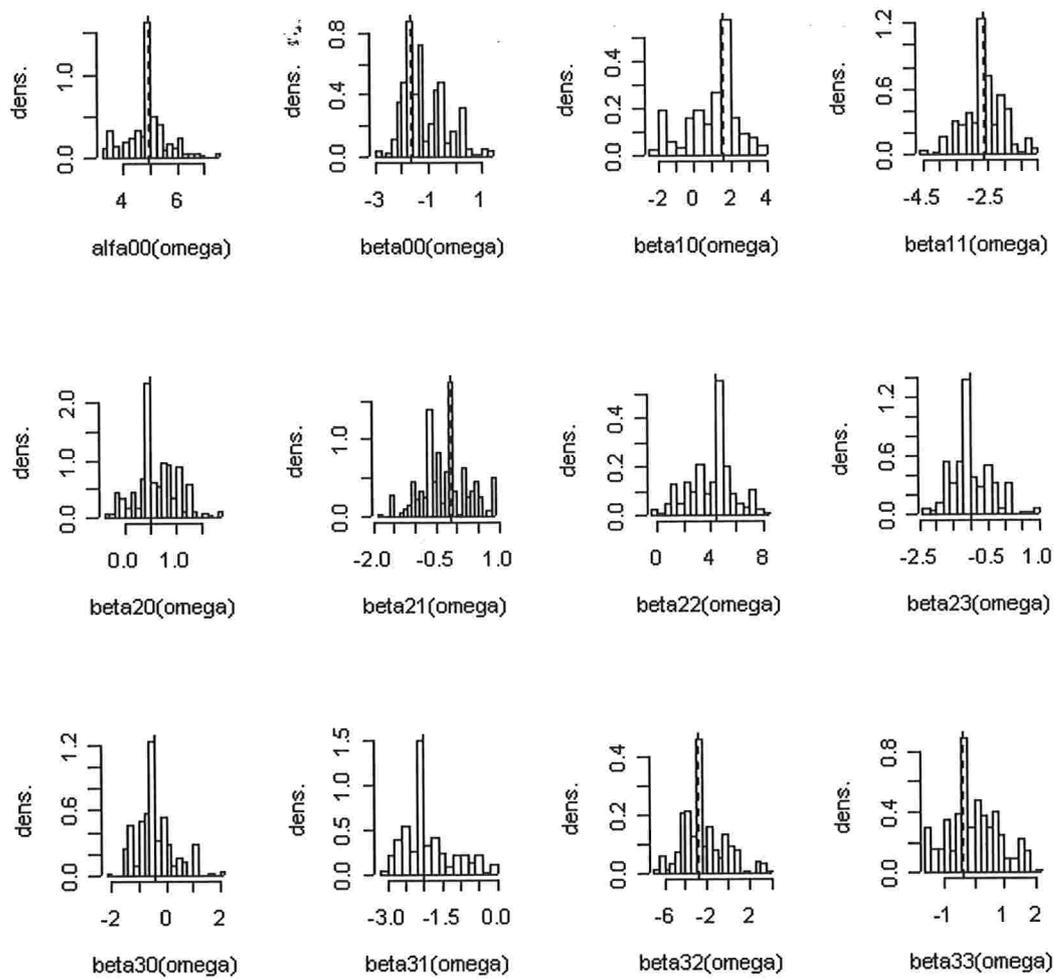


Figura A.8: Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Metropolis-Hastings. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

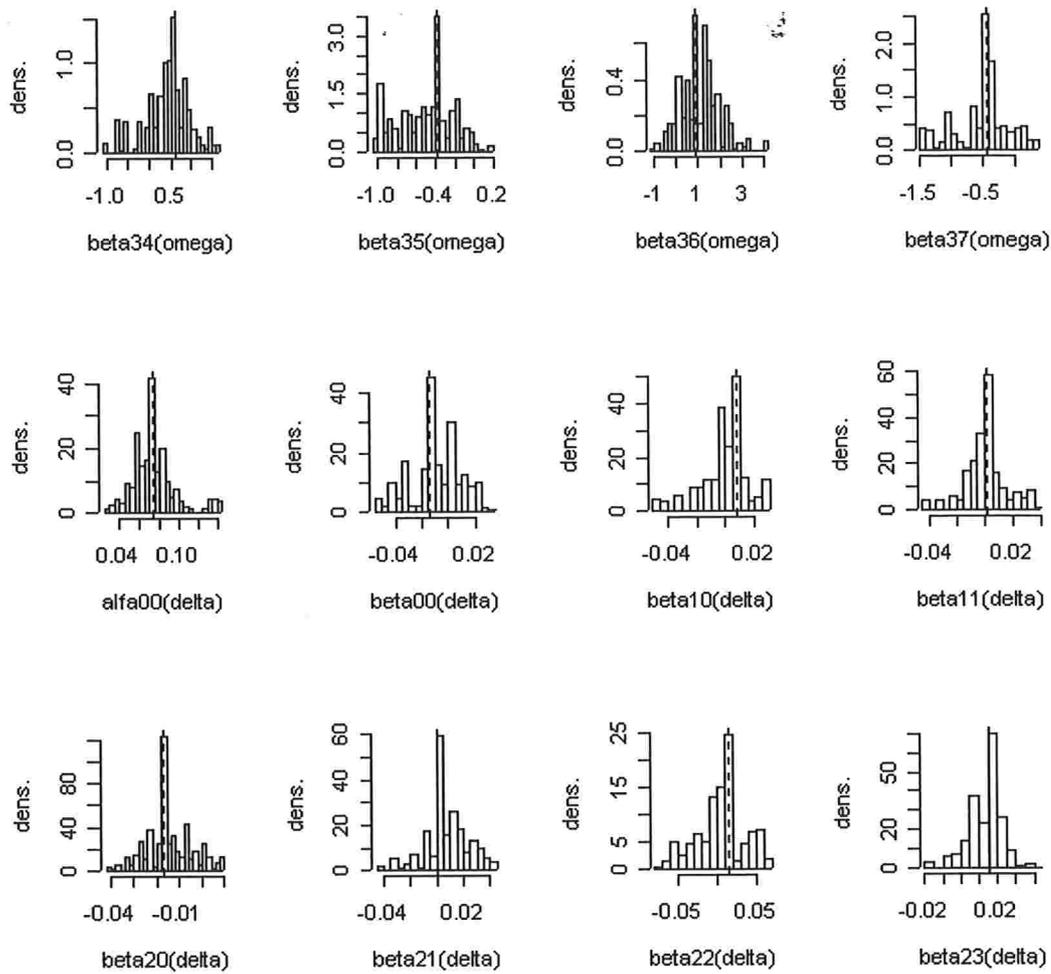


Figura A.8 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Metropolis-Hastings. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

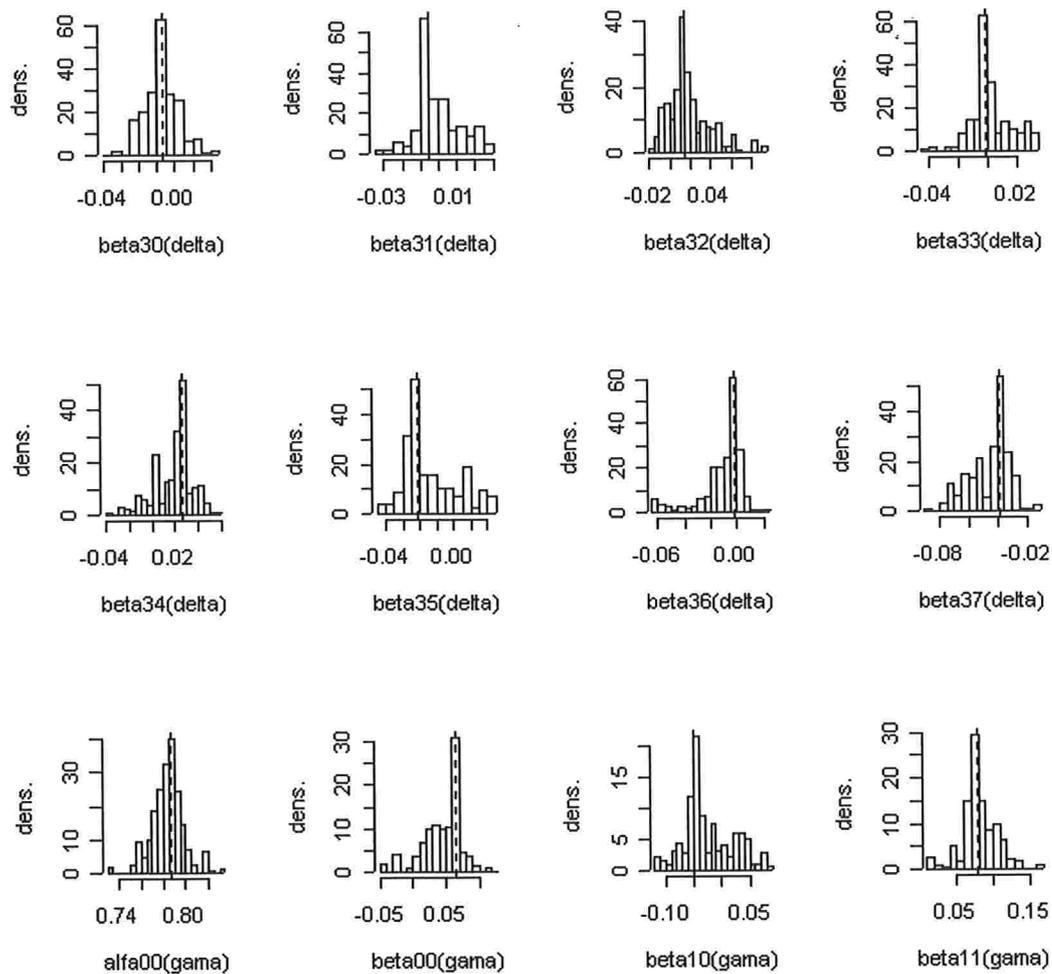


Figura A.8 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Metropolis-Hastings. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.

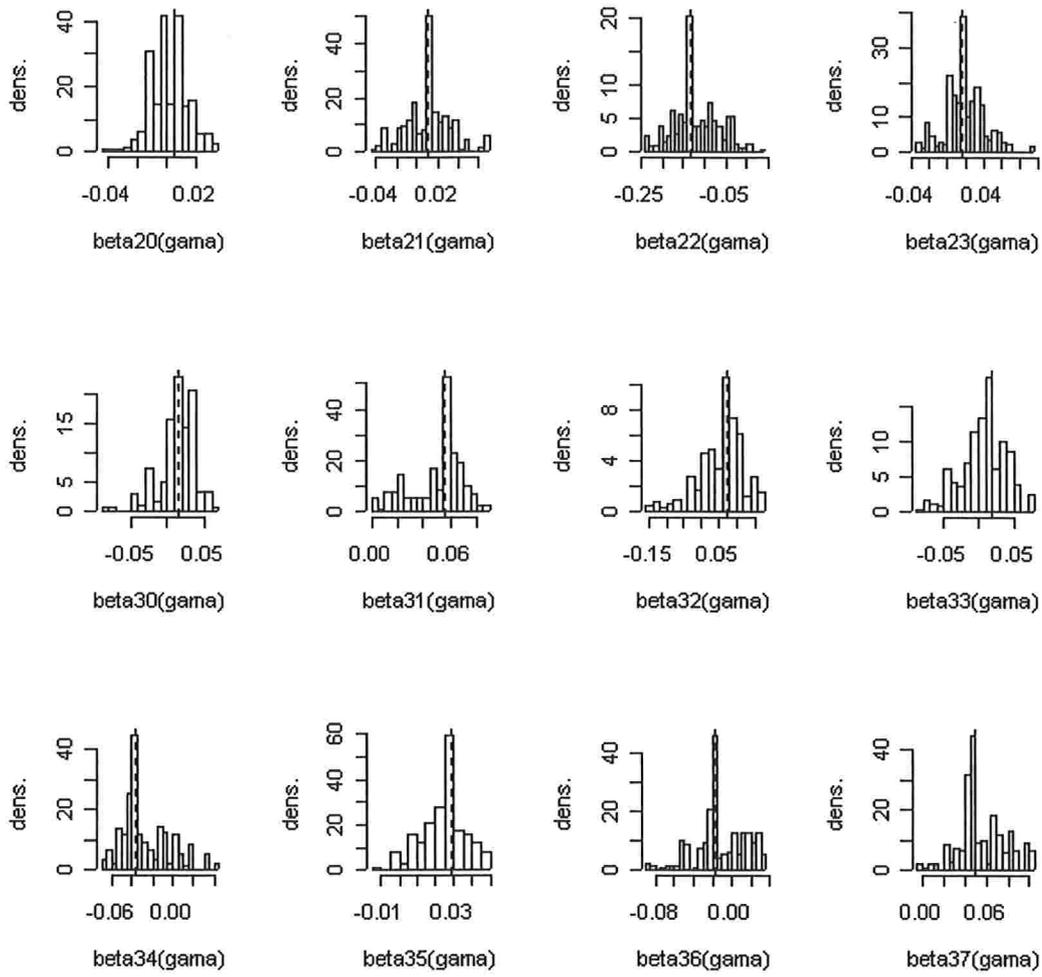


Figura A.8 (continuação): Histogramas das estimativas dos coeficientes de ondaletas via Metropolis-Hastings. A linha tracejada vertical representa a estimativa de máxima verossimilhança.