Processo de Ramificação com Exclusão e Algumas Modificações

Marcia Salzano

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**
Orientador: **Prof. Dr. Pablo A. Ferrari**

Durante parte da elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro parcial do CNPq

-São Paulo, Julho de 1993-

Agradecimentos

Começo ressaltando que sou imensamente grata a meus amigos pelo apoio; ajuda constante direta e indireta em toda espécie de problema, especialmente burocráticos...

Agradeço primeiramente pela amizade a

Meu orientador, Pablo Ferrari, pela excelente orientação. Nunca faltaram opções de escolha de problemas, os mais variados possíveis. Aliás, as opções de escolha que ele tem são tão vastas que por Borel-Cantelli qualquer aluno resolve um deles com probabilidade 1; também agradeço pelas dicas, sugestões e idéias valiosas. Além disso, pela extrema disponibilidade em discutir problemas a qualquer hora do dia e pela acessibilidade extrema. Agradeço pela sua amizade, apoio e ajuda que sempre tive.

Antônio Galves que foi quem me aconselhou que deveria me preocupar em resolver problemas ao invés de me dedicar somente a aprender teorias. Foi um bom incentivo para que eu começasse a trabalhar em pesquisa.

Eduardo Jordão Neves que foi a primeira pessoa com quem tive acesso à teoria de probabilidades em iniciação científica. Além disso agradeço por sugestões nesse trabalho.

Nelson Tanaka pela orientação em iniciação científica e extrema disponibilidade em me ensinar e tirar dúvidas a qualquer hora. Também agradeço por ler e dar sugestões nesse trabalho.

Ofelia T. Alas pela orientação em iniciação científica. Foi uma das pessoas com quem adquiri boa parte de minha bagagem matemática.

Roberto Schonmann pela orientação científica. Foi quem me incentivou a participar de seminários do Grupo de Partículas e cursos de pós desde a graduação. Agradeço também por sugestões e dicas para esse trabalho e pela extrema paciência em me ouvir e tirar dúvidas inclusive via correio-eletrônico.

A todos os probabilistas do Grupo de Sistema de Partículas, por me incorporarem ao grupo desde quando aluna de graduação. Foi impressindível participar de seminarios de pesquisa para adquirir conhecimento na área.

Rubens Lintz com quem aprendi muito nos seminários de Análise Não Determinista.

A todos os amigos da graduação, mestrado e doutoramento em Estatística pela amizade. Em especial a Artur Tomita, Cassio Shimuta, Cláudio Akaoshi, Eduardo A. Prado, Leonardo Borges, Lúcia R. Junqueira, Lúcio M.G. Prado, M. Amélia Cardoso, Renata Grunberg pelos longos anos de amizade, ajuda em diversos sentidos e apoio sempre presente. Agradecimentos especiais a Lúcia e Lúcio por terem me cedido parte da sala e me aturado lá por longos anos; Jorge Tadashi pela ajuda no LaTeX; Léo por fazer parte das figuras nesse trabalho.

Discussões sobre a dissertação com Enrique Andjel, Tom Mountford, Vladmir Belitsky.

Aos funcionários da biblioteca pela extrema paciência e boa vontade.

Por um motivo ou outro agradeço aos professores Daciberg Lima, Sérgio Werschler, Clélia M. C. Toloi.

Resumo

O primeiro modelo a ser analisado é o Modelo de Ramificação com Exclusão Simétrica. Fixando-se uma taxa de exclusão menor do que de nascimento, mostraremos que começando a evolução com uma medida de probabilidade μ qualquer diferente da medida ponto-massa na configuração identicamente nula ($\delta_\emptyset$) quando o tempo tende a infinito teremos que μ convergirá em distribuição para a medida $\delta_{\mathbb{1}}$, que é ponto massa na configuração com todos os sítios ocupados. $\delta_\emptyset$ é invariante pois não há nascimento espontâneo de partículas.

O segundo modelo é chamado Ramificação com Exclusão e Morte em um Número Finito de Sítios. Permitimos que em um número finito de sítios as partículas possam morrer. Mostramos que se começarmos com a medida $\delta_{\mathbb{1}}$, o processo convergirá em distribuição para a medida concentrada em configurações com um número finito de sítios desocupados.

Outro modelo analisado é o Contato Modificado. Nesse processo as partículas além de terem descendentes e se locomover, podem morrer em qualquer sítio do espaço. Para esse processo mostramos que fixada a taxa de morte, existe um valor de taxa de nascimento crítico, λ_c, tal que abaixo desse valor o processo sempre morre e acima desse existe uma probabilidade não nula de o processo sobreviver. Mostramos ainda que o valor λ_c é positivo e finito, mas não achamos o valor preciso.

Abstract

The first model we analyse is the Branching with Simmetric Exclusion. Taking the exclusion rate smaller than the birth rate, we show that starting the evolution with any probability measure μ but the point mass on the empty configuration ($\delta_\emptyset$), μ will converge to the point mass on the full configuration ($\delta_{\mathbb{1}}$) as time goes to infinity. $\delta_\emptyset$ is invariant since there is no spontaneous birth.

The second model is named Branching with Exclusion and Death at a Finite Number of Sites. We change a bit the first model and allow particles to die at a finite number of sites. We show that starting with $\delta_{\mathbb{1}}$ the process will converge to a measure concentrated on configurations with a finite number of unoccupied sites.

The third model is the Modified Contact Process. Particles can have offsprings, walk and die at any site. We show that for a fixed death rate there is a critical value of birth rate, λ_c. Below this value the process always dies. Above the critical value there is a non-negative probability of survival. We showed that λ_c is positive and finite. We do not find the precise value of λ_c.

Introdução

Neste trabalho estudaremos alguns processos em Sistema de Partículas definidos em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Os resultados obtidos valem para dimensão d finita qualquer. Estudaremos basicamente a convergência desses processos quando o tempo tende a infinito. Todas as convergências serão em distribuição.

No primeiro capítulo daremos um resumo com conceitos e teoremas em Sistema de Partículas que usaremos no decorrer do trabalho. Como esses teoremas são conhecidos, daremos somente referência de onde podem ser encontradas as demonstrações. Colocaremos as demonstrações somente dos resultados que não são dados diretamente em livros, ou caso as hipóteses não sejam exatamente as mesmas. Além da teoria de semigrupos, daremos uma breve introdução ao método da construção gráfica.

No capítulo 2 daremos alguns resultados para o processo chamado Processo de Ramificação com Exclusão ("Branching with Exclusion"). Mostraremos que para taxa de nascimento maior do que taxa de salto, começando-se com uma única partícula, o processo convergirá em distribuição para a configuração com todos os sítios ocupados. Vale notar que $\delta_{\emptyset}$ e $\delta_{\mathbb{I}}$ são invariantes, logo o processo não é ergódico. Com isso, vemos que não é trivial que, dada qualquer medida de probabilidade inicial, o limite do processo com essa medida como distribuição inicial vai existir quando o tempo tende a infinito (e portanto ser

uma medida invariante). Para esse modelo específico mostraremos que começando-se com qualquer medida, esse limite sempre existirá e será uma combinação convexa de $\delta_\emptyset$ e $\delta_{\mathbb{N}}$.

No capítulo 3, modificamos um pouco o processo do capítulo anterior e permitimos que partículas possam morrer em um número finito de sítios. Este novo processo foi chamado de Processo de Ramificação com Exclusão e morte em um número finito de sítios. Note que esse processo não é mais invariante por translação. Obviamente $\delta_\emptyset$ é invariante para o processo. Mostramos que começando-se com a medida $\delta_{\mathbb{N}}$ o processo convergirá para uma distribuição concentrada no conjunto de configurações que têm um número finito de sítios desocupados. Com isso temos que o processo não será nunca ergódico.

No capítulo 4 temos o processo que chamamos de Contato modificado. Nele as partículas podem se locomover, ter descendentes e morrer. Note que a dinâmica aqui é parecida com a dada no capítulo 3. A diferença é que nesse novo processo as partículas podem morrer em todos os sítios. Para o Contato Modificado mostramos que, começando-se com partículas em todos os pontos do espaço, existe uma taxa de morte crítica onde, abaixo desse valor todas as partículas morrem - - isto é, o processo é ergódico- - e sendo assim, começando-se com qualquer medida de probabilidade, o processo tende a ficar vazio. Acima desse valor crítico o processo tem uma probabilidade positiva de sobreviver. Mostraremos que esse valor de λ_c é positivo e finito.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo daremos algumas noções básicas e teoremas que serão usados no decorrer do trabalho. Não demonstraremos aqui os teoremas citados mas daremos referências de onde podem ser encontradas.

O primeiro teorema a ser citado é um teorema simples em processos estocásticos mas muito útil para se saber se processos são recorrentes positivos.

Teorema 1.1 *Seja* $\{X_n\}$ *uma cadeia de Markov irredutível com espaço de estados enumerável* E, *no nosso caso será sempre* $\mathbb{Z}^d$ *e seja* g *uma função não negativa. Se existem algum* $\epsilon > 0$, $\theta < \infty$ *e* $N < \infty$ *tal que*

$$\mathbb{E}\Big[\, g(X_{n+1}) \;\Big|\; X_n = y \,\Big] \leq g(y) - \epsilon, \quad \forall\, y\colon \|y\| \geq N, \quad e$$

$$\mathbb{E}\Big[\, g(X_{n+1}) \;\Big|\; X_n = y \,\Big] \leq \theta, \quad \forall\, y\colon \|y\| \leq N$$

onde $\|\cdot\|$ *representa uma norma em* E, *então o processo* $\{X_n\}$ *é recorrente positivo.*

Demonstração. Esse teorema é um caso particular do Teorema 9.1 do artigo de Tweedie [17]. □

A teoria básica utilizada neste trabalho é de Sistemas de Partículas. Indicamos o livro de Liggett em Sistemas de Partículas [14] como referência básica. Desse mesmo livro enunciaremos alguns teoremas e definições que serão utilizadas em capítulos posteriores.

Denotaremos por Ω o espaço de estados do processo, que em nosso trabalho sempre será um espaço métrico compacto no qual é definida uma ordem parcial. Esta ordem parcial deve ser compatível com a topologia no sentido de que o conjunto $\{(\eta,\zeta) \in \Omega \times \Omega : \eta \leq \zeta\}$ seja fechado em $\Omega \times \Omega$ com a topologia produto. Em nosso trabalho tomaremos $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ com estrutura de mensurabilidade dada pela σ-álgebra de conjuntos borelianos. A ordem parcial será: $\eta \leq \zeta$ se e somente se $\eta(x) \leq \zeta(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Seja $D[0,\infty)$ o conjunto de todas funções ξ de $[0,\infty)$ com valores em Ω que são contínuas à direita e que têm limite à esquerda. Esse é o espaço de trajetórias de um processo de Markov com espaço de estados Ω. Para $s \in [0,\infty)$, definimos a projeção π_s de $D[0,\infty)$ em Ω por $\pi_s(\xi) = \xi_s$. Seja $\mathcal{F}$ a menor σ-álgebra em $D[0,\infty)$ que torna todas as funções π_s $(0 \leq s < \infty)$ mensuráveis. Para $t \in [0,\infty)$, seja $\mathcal{F}_t$ a menor σ-álgebra em $D[0,\infty)$ na qual todas as funções π_s $(s \leq t)$ são mensuráveis.

Definição 1.2 *Um* **Processo de Markov** *é uma coleção* $\{P^\eta,\ \eta \in \Omega\}$ *de medidas de probabilidade em* $D[0,\infty)$ *indexadas por* Ω *com as seguintes propriedades:*

(a) $P^\eta\big[\zeta \in D[0,\infty) : \zeta_0 = \eta\big] = 1$, *para todo* $\eta \in \Omega$.

(b) A aplicação $\eta \mapsto P^\eta(A)$ *de* Ω *em* $[0,1]$ *é mensurável para todo* $A \in \mathcal{F}$.

(c) $P^\eta\big[\ \eta_{s+t} \in A \ \big|\ \mathcal{F}_s\ \big] = P^{\eta_s}(\eta_t \in A)$ (P^η)-*q.c., para todo* $\eta \in \Omega$, $t,s \geq 0$ *e* $A \in \mathcal{F}$.

A esperança correspondente a P^η será denotada por $\mathbb{E}^\eta$. Então

$$\mathbb{E}^\eta Z = \int_{D[0,\infty)} Z\,dP^\eta$$

para qualquer função Z mensurável em $D[0,\infty)$ que é integrável em relação a P^η.

Seja $C(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas em Ω, tomado como um espaço de Banach com

$$\|f\| = \sup_{\eta\in\Omega}\{|f(\eta)|\}.$$

Para $f \in C(\Omega)$, escrevemos

$$S(t)f(\eta) = I\!E^\eta f(\eta_t) = \int_{D[0,\infty)} f(\zeta_t)dP^\eta(\zeta). \tag{1.3}$$

Definição 1.4 *Um processo de Markov* $\{P^\eta, \eta \in \Omega\}$ *é dito ser um* **Processo Feller** *se* $S(t)f \in C(\Omega)$, *para todo* $t \geq 0$ *e* $f \in C(\Omega)$.

Denotaremos por $\wp$ o conjunto das medidas de probabilidade em Ω, com a topologia da convergência fraca, isto é, $\mu_n \to \mu$ em $\wp$ se e somente se $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ para toda $f \in C(\Omega)$. Note em particular que com respeito a essa topologia, o teorema de Prohorov nos dá que $\wp$ é compacto, já que Ω é compacto. Uma boa referência para se ver esse resultado é o livro de Billingsley [1].

Definição 1.5 *Uma família* $\{S(t), t \geq 0\}$ *de operadores lineares em* $C(\Omega)$ *é dito* **semigrupo de Markov** *se satisfaz as seguintes condições:*

(a) $S(0) = I$, *o operador identidade em* $C(\Omega)$.

(b) a aplicação $t \mapsto S(t)f$ *de* $[0,\infty)$ *em* $I\!R$ *é contínua à direita, para toda* $f \in C(\Omega)$.

(c) $S(t+s)f = S(t)S(s)f$, *para toda* $f \in C(\Omega)$ *e para todo* $s, t \geq 0$.

(d) $S(t)1 = S(t)$, *para todo* $t \geq 0$.

(e) $S(t)f \geq 0$, *para qualquer* f *não negativa em* $C(\Omega)$.

A seguir veremos um resultado importante para processos que são Feller.

Proposição 1.6 *Suponha que* $\{P^\eta, \eta \in \Omega\}$ *é um processo Feller em* Ω. *Então a coleção de operadores lineares* $\{S(t), t \geq 0\}$, *definidas por (1.3) é um semigrupo de Markov.*

Demonstração. Ver Proposição 1.3 do capítulo I de [14]. □

Definição 1.7 *Suponha que* $\{S(t),\ t \geq 0\}$ *é um semigrupo de Markov em* $C(\Omega)$. *Dada* $\mu \in \wp$, *definimos* $\mu S(t) \in \wp$ *pela seguinte relação:*

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t) f d\mu, \text{ para toda } f \in C(\Omega).$$

Definição 1.8 *A medida* $\mu \in \wp$ *é dita ser* **invariante** *para um processo com semigrupo de Markov* $\{S(t), t \geq 0\}$ *se* $\mu S(t) = \mu$, *para todo* $t \geq 0$. *O conjunto de todas as medidas* $\mu \in \wp$ *que são invariantes será denotado por* $\Im$. *Uma medida é* **extremal** *em um conjunto se não puder ser escrita como combinação convexa de duas medidas distintas desse conjunto. O subconjunto das medidas invariantes extremais será denotado por* $\Im_e$.

Proposição 1.9 *Seja* $\{S(t),\ t \geq 0\}$ *o semigrupo de um processo Feller. Então:*

(a) $\mu \in \Im$ *se e somente se* $\int S(t) f d\mu = \int f d\mu$, *para toda* $f \in C(\Omega)$, *e* $t \geq 0$.

(b) $\Im$ *é um subconjunto compacto e convexo de* $\wp$.

(c) $\Im$ *é o envelope convexo de* $\Im_e$.

(d) Se $\nu = \lim_{t \to \infty} \mu S(t)$ *para alguma* $\mu \in \wp$ *então* $\nu \in \Im$.

(e) Se $\nu = \lim_{t \to \infty} T_n^{-1} \int_0^{T_n} \mu S(t) dt$ *para alguma* $\mu \in \wp$ *e alguma sequência* $T_n \uparrow \infty$ *então* $\nu \in \Im$.

(f) $\Im$ *é não vazio.*

Demonstração. Proposição 1.8, capítulo I de [14]. □

Para a proposição a seguir usaremos a noção de núcleo de um gerador. Para introduzir esse conceito precisaríamos dar definições e uma série de resultados que relacionam o gerador, pré-gerador e núcleo, o que fugiria um pouco do nosso contexto. Para o leitor interessado no assunto, sugerimos os textos de Ethier e Kurtz [11] e Liggett [14]

Proposição 1.10 *Seja* D *o núcleo do gerador* L *de um semigrupo de Markov* $\{S(t), t \geq 0\}$. *Então*

$$\Im = \Big\{\mu \in \wp : \int Lf d\mu = 0, \ \textit{para toda} \ \ f \in D\Big\}.$$

Demonstração. Proposição 2.13, capítulo II de [14]. □

Definição 1.11 *Para* $x, y \in \mathbb{Z}^d$, *definimos a função "shift" em* Ω *por* $(\sigma_x \eta)(y) = \eta(y - x)$. *Esta definição induz de forma natural a transformação "shift" no espaço de todas as funções em* Ω *por*

$$\sigma_x f(\eta) = f(\sigma_x \eta),$$

e em elementos de $\wp$ *via*

$$\int f d(\sigma_x \mu) = \int (\sigma_x f) d\mu.$$

Definição 1.12 *O conjunto* $\mathcal{T}$ *será o das* **medidas invariantes por translação**. *Isso é,* $\mu \in \mathcal{T}$ *se e somente se* $\sigma_x \mu = \mu$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}^d$. *Denotaremos por* $\mathcal{T}_e$ *o conjunto das medidas invariantes por translação que são extremais.*

$\mathcal{M}$ denotará o conjunto de todas funções f contínuas de Ω em $\mathbb{R}$ que são monótonas crescentes, isto é, $f(\eta) \leq f(\zeta)$ se $\eta \leq \zeta$.

Definição 1.13 *Se μ_1 e μ_2 são duas medidas de probabilidade em Ω, diremos que $\mu_1 \leq \mu_2$ se e somente se $\int f d\mu_1 \leq \int f d\mu_2$, para toda $f \in \mathcal{M}$.*

Definição 1.14 *Diremos que um processo com semigrupo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ é* **atrativo** *se satisfizer uma das seguintes propriedades:*

(a) Se $f \in \mathcal{M}$, então $S(t)f \in \mathcal{M}$ para todo $t \geq 0$.

(b) Se $\mu_1 \leq \mu_2$, então $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t)$ para todo $t \geq 0$.

O Teorema 2.2, capítulo II de [14] nos dá a demonstração de que as definições (a) e (b) acima são equivalentes.

Uma das técnicas que usaremos neste trabalho é chamada de *acoplamento* entre duas medidas. O objetivo é mostrar, por exemplo, que se vale a desigualdade $\eta_0 \leq \zeta_0$ inicialmente então essa desigualdade será preservada em qualquer tempo posterior. O seguinte teorema nos dá condições suficientes para isso.

Teorema 1.15 *Suponha μ_1 e μ_2 duas medidas de probabilidade em Ω. Uma condição necessária e suficiente para $\mu_1 \leq \mu_2$ é que exista uma medida de probabilidade ν em $\Omega \times \Omega$ satisfazendo:*

(a) $\nu\{(\eta, \zeta): \eta \in A\} = \mu_1(A)$, para todo A boreliano de Ω,

(b) $\nu\{(\eta, \zeta): \zeta \in A\} = \mu_2(A)$, para todo A boreliano de Ω,

(c) $\nu\{(\eta, \zeta): \eta \leq \zeta\} = 1$.

Demonstração. Teorema 2.4 do capítulo II de [14]. □

Usaremos o Teorema 1.15 em nosso trabalho para medidas que são ponto-massa em distribuições η_0 e ζ_0 tal que $\eta_0 < \zeta_0$ e que além disso preservam a desigualdade $\eta_t < \zeta_t$ para todo $t \geq 0$.

Definição 1.16 *Um* **Sistema de Spins** *é um sistema de interação de partículas em* $\{0,1\}^S$, *com* S *enumerável, no qual cada coordenada assume somente dois possíveis valores* $\{0,1\}$ *e somente uma coordenada muda em cada transição. O mecanismo de transição é especificado por uma função não negativa* $c(x,\eta)$ *definida para* $x \in \mathbb{Z}^d$ *e* $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. *Isso representa a taxa com que a coordenada* $\eta(x)$ *muda de* 0 *para* 1 *e de* 1 *para* 0 *quando o sistema está no estado* η.

Definimos $\delta_{\emptyset}$ e $\delta_{\mathbb{1}}$ como sendo as medidas ponto-massa nas configurações $\eta \equiv 0$ e $\eta \equiv 1$ respectivamente.

Um problema que frequentemente ocorre ao se analisar a evolução de medidas quando o tempo tende a infinito é que mesmo tomando-se $\mu \in \Im$, nada nos garante que $\lim_{t\to\infty} \mu S(t)$ seja única. A situação mais cômoda ocorre da seguinte maneira:

Definição 1.17 *Um processo de Markov com semigrupo* $\{S(t): t \geq 0\}$ *é dito* **ergódico** *se*
(a) $\Im$ *é um conjunto unitário e, ainda, se* $\Im = \{\nu\}$ *então*
(b) $\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \nu$ *para toda* $\mu \in \wp$.

Nesse caso vemos que para qualquer medida de probabilidade inicial, o limite dessa medida quando t tender a infinito vai existir. Para um Sistema de Spins Atrativo, temos um resultado que nos diz que tomando-se $\mu = \delta_{\emptyset}$ ou $\mu = \delta_{\mathbf{1}}$, existem os limites destas medidas e estes são invariantes extremais.

Nenhum dos processos que estudaremos nos capítulos seguintes é Sistema de Spins pois as transições de salto de partículas dependem de 2 coordenadas, mas alguns resultados dados

em Liggett [14] para Sistemas de Spins são também válidos para os processos estudados aqui. Daremos as demonstrações desses teoremas, seguindo os mesmos passos de [14].

O teorema a seguir nos diz que se o processo é atrativo, torna-se possível ordenar as medidas de probabilidade no sentido de (e) abaixo. Além disso, teremos que para um Sistema de Partículas atrativo, tomando-se $\mu = \delta_\emptyset$ ou $\mu = \delta_{\mathbb{1}}$, existe $\lim_{t\to\infty} \mu S(t)$ e este limite é uma medida invariante extremal.

Teorema 1.19 *Seja* $\{S(t),\ t \geq 0\}$ *o semigrupo de um Processo Feller atrativo. Então:*

(a) $\delta_\emptyset S(s) \leq \delta_\emptyset S(t),\ 0 \leq s \leq t.$

(b) $\delta_{\mathbb{1}} S(s) \geq \delta_{\mathbb{1}} S(t),\ 0 \leq s \leq t.$

(c) $\delta_\emptyset S(t) \leq \mu S(t) \leq \delta_{\mathbb{1}} S(t),\ t \geq 0$ *e* $\mu \in \wp.$

(d) $\underline{\nu} = \lim_{t\to\infty} \delta_\emptyset S(t)$ *e* $\bar{\nu} = \lim_{t\to\infty} \delta_{\mathbb{1}} S(t)$ *existem.*

(e) se $\mu \in \wp$, $t_n \to \infty$ *e* $\nu = \lim_{n\to\infty} \mu S(t_n)$, *então* $\underline{\nu} \leq \nu \leq \bar{\nu}$,

(f) $\underline{\nu},\ \bar{\nu} \in \Im_e.$

Demonstração. (Teorema 2.3 do capítulo III de [14])
Por definição $\delta_\emptyset \leq \delta_\emptyset S(t-s)$ para $0 \leq s \leq t$. Usando a atratividade do processo e pela propriedade do semigrupo, segue que

$$\delta_\emptyset S(s) \leq \delta_\emptyset S(t-s)S(s) = \delta_\emptyset S(t)$$

o que nos prova (a). A prova de (b) é semelhante. Para (c) note que pela monotonicidade temos que $\delta_\emptyset \leq \mu \leq \delta_{\mathbb{1}}$, para toda $\mu \in \wp$. Novamente pela atratividade, temos

$$\delta_\emptyset S(t) \leq \mu S(t) \leq \delta_{\mathbb{1}} S(t)$$

o que nos dá (c). Para provar (d) note que pelo ítem (a) temos que $\{\delta_\emptyset S(t) : t \geq 0\}$ é uma família não decrescente de medidas na topologia da convergência fraca. Além disso, vimos

que $\wp$ é compacto nessa topologia. Logo, $\{\delta_\emptyset S(t)\}$ converge para uma medida $\underline{\nu}$ em $\wp$. Falta mostrar a unicidade de $\underline{\nu}$. Para isso, note que se

$$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2, \ \forall f \in \mathcal{M}, \text{ alguma } \mu_1, \mu_2 \in \wp,$$

temos que $\mu_1 = \mu_2$. Segue então (d), pois o caso $\bar{\nu}$ é análogo. (e) é uma consequência de (c) e (d). Para (f) note que $\underline{\nu}$ e $\bar{\nu} \in \Im$ pela Proposição 1.9. Para ver que são extremais, suponha $\bar{\nu} = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, onde $0 < \alpha < 1$ e $\mu_1, \mu_2 \in \Im$. Temos por (e) que $\mu_1 \leq \bar{\nu}$ e $\mu_2 \leq \bar{\nu}$. Tomando $f \in \mathcal{M}$, temos

$$\int f d\mu_i \leq \int f d\bar{\nu}, \ i = 1,2 \quad \text{e} \quad \int f d\bar{\nu} = \alpha \int f d\mu_1 + (1-\alpha) \int f d\mu_2$$

Temos então $\int f d\bar{\nu} = \int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$, ou seja, $\bar{\nu} = \mu_1 = \mu_2$. □

Teorema 1.20 *Para um Processo Feller atrativo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) O processo é ergódico,

(b) $\Im$ *é unitário,*

(c) $\underline{\nu} = \bar{\nu}$ *(definidas no Teorema 1.19).*

Demonstração. (Corolário 2.4, capítulo III de [14])
(a) $\Rightarrow$ (b) segue da Definição 1.17.
(b) $\Rightarrow$ (c) segue de (f) do teorema anterior.
(c) $\Rightarrow$ (a): Se $\mu \in \wp$, então o conjunto $\{\mu S(t) : t \geq 0\}$ é relativamente compacto. Por (e) do teorema anterior, todo limite de subsequência é igual a $\underline{\nu}$ (e igual a $\bar{\nu}$ por hipótese), logo, existe $\lim_{t\to\infty} \mu S(t)$ e é igual a $\underline{\nu}$ e $\bar{\nu}$. Pela Definição 1.17, o processo é ergódico. □

Enunciaremos agora a Propriedade Forte de Markov para um Processo de Markov $\{X_n\}$. Para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 1.21 *Uma variável aleatória* $N \in \{1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ *é dita* **tempo de parada** *se para todo* $n < \infty$ *tivermos* $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$. *Definimos ainda* $\mathcal{F}_N = \{A: A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ *para todo* $n\}$.

Teorema 1.22 (Propriedade Forte de Markov) *Seja* $\{X_n\}$ *um processo de Markov. Suponha que para cada* n *a função* $Y_n: \Omega \to \mathbb{R}$ *é mensurável e* $|Y_n| \leq M$, *para algum* $M < \infty$ *e para todo* n. *Então*
$\mathbb{E}_\mu(\ Y_N \circ \sigma_N \mid \mathcal{F}_N\ ) = \mathbb{E}_{X_N}(Y_N)$, *em* $\{N < \infty\}$. *Sendo que* $\mathbb{E}_\nu$ *indica a esperança do processo começando-se com a medida* ν.

Demonstração. Ver Durrett [9]. □

Daremos a seguir uma introdução que servirá para a **construção gráfica** dos Sistemas de Partículas dados nos capítulos posteriores. Essa é uma visão mais construtiva da teoria, através da qual podemos ter uma noção mais precisa sobre a evolução dos processos e foi introduzida por Harris em 1978. Através desse método conseguiremos uma caracterização simples para processos que são Feller. Esse tópico pode ser encontrado em Griffeath [13].

Cada $x \in \mathbb{Z}^d$ será chamado de sítio.

Definimos o diagrama de tempo-espaço como $E = \mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$. O par $(x, t) \in E$ representa o sítio x no tempo t.

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, seja $0 = \tau_{1,x}^0,\ \tau_{1,x}^1,\ \tau_{1,x}^2, \ldots$ uma sequência infinita de tempos crescentes tal que $\{\tau_{1,x}^{n+1} - \tau_{1,x}^n,\ n \geq 1\}$ sejam distribuídas independentemente com distribuição exponencial de taxa $\lambda_{1,x}$ igual à taxa de morte de partículas em x. Em cada tempo $\tau_{1,x}^n$, ponha um sinal β. Isso representará que no tempo $\tau_{1,x}^n$ morrerá uma partícula, se isso for possível.

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$, seja V_x o conjunto dos sítios y tais que x interage com y. A cardinalidade de V_x deverá ser finita. No nosso caso $V_x = \{y: |x - y|_1 = 1\}$. Tome a sequência $0 = \tau_{2,x}^0,\ \tau_{2,x}^1,\ \tau_{2,x}^2, \ldots$ de tempos crescentes de forma que $\{\tau_{2,x}^{n+1} - \tau_{2,x}^n,\ n \geq 1\}$ sejam distribuídas independentemente com distribuição exponencial de taxa $\lambda_{2,x}$ igual à taxa de interação de x com y. Em cada tempo $\tau_{2,x}^n$, escolha $y \in V_x$ com probabilidade $1/2d$ e

ponha uma seta indo de x para y. Isso representará que no tempo $\tau^n_{2,x}$ haverá uma interação entre x e y. Essa interação pode ser de dois tipos: ou para um intercâmbio entre x e y ou para x dar origem a um descendente em y.

Para uma caracterização mais geral para construção gráfica em Sistemas de Partículas veja Griffeath [13].

Dizemos que existe um **caminho de** (y,s) **para** (x,t), com $s < t$ se existe uma sequência de setas numa ordem crescente de tempo, indo de y no tempo s para x no tempo t tal que não há nenhuma marca de morte β no meio desse percurso de setas.

A seguir teremos um teorema simples para se saber se um processo é Feller. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.24 *Diremos que um processo* $\{\eta_s\}$ *tem* **influência de** ∞ *em* $(x,t) \in E$, *isto é, no sítio* x *no tempo* t, *se existem conjuntos não vazios* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \subset \mathbb{Z}^d$ *e tempos* $t_1 \geq t_2 \geq \cdots > 0$ *tais que:*

(i) para cada $n \geq 1$, *existe um caminho retornando de* (y,t_n) *para* (x,t) *para todo* $y \in \Lambda_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n| = \infty$.

Teorema 1.24 *Se o processo é tal que*

$$P\{\textit{influência de } \infty \textit{ em } (x,t)\} = 0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{Z}^d,\ t \geq 0$$

então o processo é Feller.

Demonstração. Proposição 1.4 de [13]. □

Observação: Definimos $\bar{X}$ como sendo a restrição do espaço de estados X às configurações

que não têm duas ou mais marcas no mesmo instante t em sítios x e y quaisquer que interagem. Segue do Lema de Borel-Cantelli, que $P(\bar{X}) = 1$. Trabalharemos sempre em $\bar{X}$.

Capítulo 2

Ramificação + Exclusão

2.1 Descrição do modelo

Para se visualizar o processo, podemos imaginá-lo como um modelamento, ainda que grosseiro, para a evolução de um grupo de bactérias que podem se reproduzir assexuadamente e se locomover. É um modelo primitivo para esse tipo de interpretação, pois não há mortes. Uma pergunta a ser analisada é a seguinte. Se começarmos com uma única bactéria, será que ela infectará uniformemente todo o espaço de dimensão finita qualquer, ou somente formará aglomerados grandes que se deslocarão no espaço? Mostraremos que encherá todo o espaço com qualquer taxa de nascimento maior do que a taxa de salto. Mostraremos também que para qualquer valor $\gamma > 0$, haverá uma partícula em qualquer sítio infinitas vezes. Podemos dizer de uma forma grosseira, que a maioria das partículas não vão se afastar para infinito.

Esse processo de Markov $\{P^\eta : \eta \in \Omega\}$, que passaremos a denotar por $\{\eta_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ tem espaço de estados $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, onde $\{0,1\}$ é considerado com a topologia discreta e Ω com a respectiva topologia produto.

Definição 2.1 *Cada $x \in \mathbb{Z}^d$ será chamado de* **sítio**. *Diremos que o sítio está* **ocupado** *se*

$\eta(x) = 1$. *Caso contrário diremos que o sítio está* **vazio**.

Definição 2.2 *Definimos por* **vizinhos do sítio** i *os sítios* j *tais que* $|j - i|_1 = 1$. *São usualmente chamados de vizinhos mais próximos.*

A evolução do processo pode ser descrita da seguinte forma:

Cada partícula em um sítio i cria um novo descendente no sítio vizinho j, caso j esteja vazio, de acordo com um processo pontual de Poisson de taxa 1. Isto é, a partícula no sítio i cria uma nova partícula em j, se estiver vazio, com probabilidade $\frac{1}{1+\gamma}p(|j-i|_1)$, onde $p(k) = \frac{1}{2d}$, se $k = 1$. Caso j já esteja ocupado, nada ocorre.

A partícula em i pode saltar para um vizinho j, caso j esteja vazio, segundo um processo pontual de Poisson de taxa γ, isto é, com probabilidade $\frac{\gamma}{1+\gamma}p(|j-i|_1)$. Quando j está ocupado, as transições são suspensas.

Definimos

$$\eta^j(i) = \begin{cases} \eta(i), & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\eta^{j,k}(i) = \begin{cases} \eta(i), & \text{se } i \notin \{j,k\} \\ \eta(j), & \text{se } i = k \\ \eta(k), & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Para qualquer função cilíndrica $f: \Omega \to \mathbb{R}$, o gerador L do processo de Markov é definido por

$$(Lf)(\Omega) \quad = \gamma \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)] + \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^j) - f(\eta)]\eta(i)$$

A relação entre o gerador de Markov e o semigrupo em $C(\Omega)$ é dado pelo Teorema de Hille-Yosida. Para maiores detalhes na teoria de semigrupos e geradores, sugerimos o livro de Ethier e Kurtz [11].

Faremos aqui a *construção gráfica* deste processo. Assim, o leitor que não conhece a técnica, pode adquirir familiaridade com ela e poderá fazer sozinho a construção gráfica para os processos dados nos capítulos posteriores.

Fixe $x \in \mathbb{Z}^d$. Para cada y tal que $|x-y|_1 = 1$ tome a sequência $\{\tau_{x,y}^n : n = 0, 1, \ldots\}$, onde $\tau_{x,y}^0 = 0$ e $\{\tau_{x,y}^n - \tau_{x,y}^{n-1}\}$ têm distribuição exponencial com taxa $1/2$ (denotaremos essa distribuição por $\text{Exp}(1/2d)$). Em cada tempo $\tau_{x,y}^n$ trace uma seta $x \longrightarrow y$. Essa seta indica que se x estiver ocupado em um tempo imediatamente anterior a $\tau_{x,y}^n$ e y estiver vazio em $\tau_{x,y}^n$, então nesse instante y também ficará ocupado (ou seja, x infectou y no tempo $\tau_{x,y}^n$); caso contrário não há infecção.

Usamos o mesmo procedimento para todos os outros sítios $x \in \mathbb{Z}^d$ e com isso temos o nascimento de partículas com taxa 1.

Para as setas de salto, $\{\tau_{x,y}^n - \tau_{x,y}^{n-1}\}$ tem distribuição $\text{Exp}(\gamma/2d)$. Se, imediatamente antes de $\tau_{x,y}^n$, x estiver ocupado e y estiver desocupado, no instante $\tau_{x,y}^n$ a partícula que estiver em x saltará para y deixando x vazio. Caso contrário nada ocorrerá.

2.2 Alguns resultados

Para esse modelo em dimensão $d = 1$ há diversos resultados conhecidos. Bramson et al. em [2] e De Masi, Ferrari e Lebowitz em [6] derivaram certos tipos de equações hidrodinâmicas a partir de modelos dinâmicos probabilísticos microscópicos. Cammarota e Ferrari em [5] mostraram, entre outras coisas, que começando-se com uma configuração com uma partícula mais à direita, a posição desta, convenientemente reescalonada, converge para um Movimento Browniano não degenerado.

Definimos $\mu^x_{\{1\}}$ como sendo a medida ponto-massa na configuração com uma única partícula no sítio x.

Nessa seção mostraremos que fixando-se $\gamma < 1$ e começando-se com a medida concentrada em configurações com somente uma partícula em x, isto é $\mu^x_{\{1\}}$, o processo vai convergir para a medida $\delta_{\mathbb{1}}$, isto é, concentrada na configuração onde todo sítio está ocupado com probabilidade um. Esse resultado vale para dimensão $d < \infty$ qualquer. Ressaltamos que se $\gamma = 0$ o processo é chamado de modelo de Richardson, que tem resultados mais fortes já demonstrados e que podem ser encontrados, por exemplo, em [8].

Note que nesse processo, apesar de não haver morte de partículas, elas podem se locomover. Mostrando que começando-se com uma única partícula o processo converge para uma medida concentrada em todos os sítios ocupados, através da atratividade, poderemos concluir que começando com qualquer medida inicial, o limite será invariante e convergirá para a medida $\delta_{\mathbb{1}}$ se a medida inicial for diferente de $\delta_{\emptyset}$. Isso é por si só um fato interessante, já que o processo não é ergódico, logo não é imediato que o limite existirá para qualquer medida inicial.

A primeira observação que fazemos aqui sobre o processo é que ele é um *processo atrativo* para qualquer valor $\gamma \geq 0$. Para se ver isso basta fazer um acoplamento duas medidas tais que $\eta^1_0 \leq \eta^2_0$: colocamos as mesmas setas designando nascimento e salto de partículas para os dois processos η^1_0 e η^2_0. Como tomamos as medidas de forma que $\eta^1_0 \leq \eta^2_0$, então se

tivermos uma partícula num sítio i na configuração η_0^1, obrigatoriamente temos uma outra no mesmo sítio i em η_0^2. Podemos ter partículas em η_0^2 que não correspondem a nenhuma em η_0^1. Como as setas são as mesmas, se uma partícula saltar ou tiver descendentes em η_t^1, o mesmo ocorre em η_t^2. O leitor pode esquematizar todas as possibilidades de transição e ver que a desigualdade será sempre preservada. Pelo item (b) da Definição 1.14, temos que o processo é atrativo.

Além disso temos que o *processo é Feller* para qualquer valor $\gamma \geq 0$.

Definimos

$$\begin{aligned} e_i &= (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_d) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\ 0 &= (0, \ldots, 0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Temos a seguinte proposição.

Proposição 2.5 *O processo de Ramificação com Exclusão $\{\eta_t\}$ é Feller.*

Demonstração. O Teorema 1.24 nos diz que se qualquer sítio x não tiver influência de ∞ com probabilidade 1, então o processo será Feller. Ainda em [13] vemos que todos os processos para os quais o sup das somas das taxas de interação de x com qualquer $y \in \mathbb{Z}^d$ é finito e que são processos de alcance finito (definido em (iii) da Definição 2.12), são Processos Feller. Todos os processos nesse trabalho satisfazem as duas propriedades.

□

É fácil ver que as medidas $\delta_\emptyset$ e $\delta_{\mathbb{1}}$ são invariantes. Com isso concluímos que este processo nunca será ergódico. Para mostrar que $\mu_{\{1\}}^0 S(t) \to \delta_{\mathbb{1}}$, precisaremos dos seguintes resultados que valem para qualquer valor $\gamma > 0$.

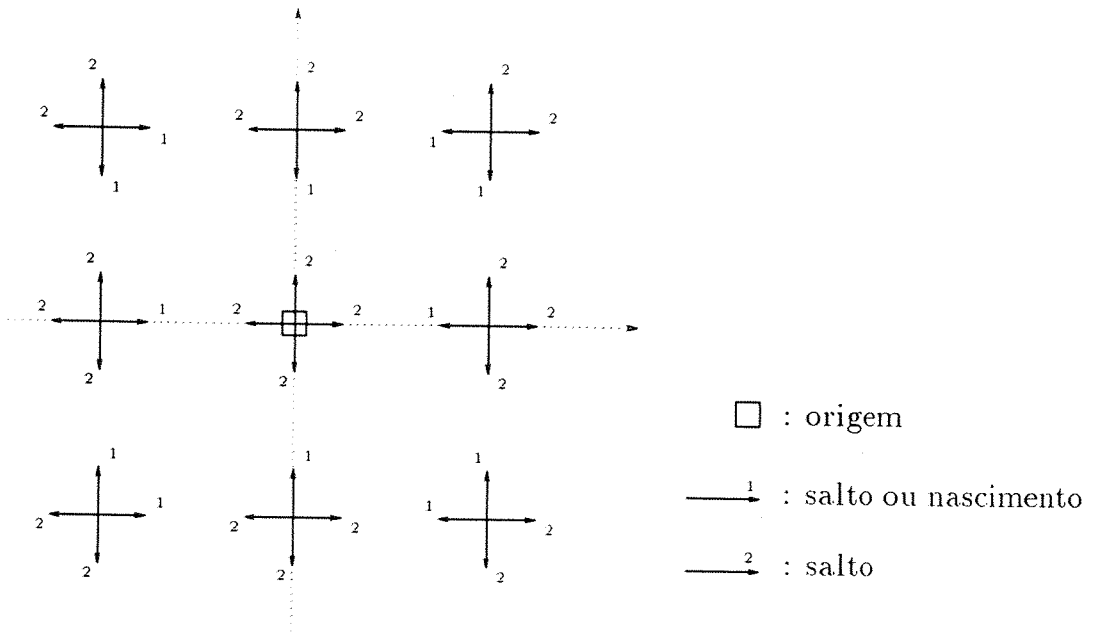
O teorema a seguir nos mostra, intuitivamente falando, que a tendência do processo η_t vai ser a de ter partículas em qualquer sítio infinitas vezes, quando começamos com qualquer medida diferente da ponto massa na configuração com todos os sítios vazios.

Teorema 2.6 *Começando-se com a medida $\mu^0_{\{1\}}$, a origem vai estar ocupada infinitas vezes (i.v.).*

Demonstração. Para mostrar isso, acoplaremos o processo $\{\eta_t\}$ com um processo $\{W_t\}$, que terá somente uma partícula (e que chamaremos de pseudo-partícula). Essa pseudo-partícula (p.p.) vai imitar um movimento "mau" que uma partícula faz em $\{\eta_t\}$ para retornar à origem. Mais especificamente, acoplaremos o processo com um outro no qual manteremos uma única partícula - - que será a p.p.- - e apagaremos todas as outras. Note então que $\eta_t(W_t) \equiv 1$. Com o acoplamento mostraremos que à p.p. corresponde uma partícula de η_t na mesma posição. Portanto, sempre que a p.p. volta à origem, haverá uma partícula de η_t na origem. Basta então mostrar que a p.p. retorna à origem infinitas vezes.

Descreveremos, ainda informalmente, o movimento da p.p. utilizando o método de construção gráfica. Esse método de construção de processos pode ser vista com maiores detalhes nos textos de Durrett [8] e Griffeath [13]. Colocamos em $\{W_t\}$ as mesmas marcas de $\{\eta_t\}$ e colocamos inicialmente a p.p. na origem. A p.p. pode se aproximar da origem via salto ou criação de um descendente. Mais precisamente, a p.p. estando no sítio i, vai para um sítio vizinho j, tal que $|j|_1 = |i|_1 - 1$, assim que encontrar uma seta de salto ou nascimento de i para j. Ela se afasta da origem somente quando encontrar setas indicando salto. Esclarecemos aqui que a aleatoriedade do processo está na fixação das marcas do processo. Depois de ter as marcas fixadas, o movimento de $\{W_t\}$ será determinístico, seguindo o esquema que daremos mais adiante. Para se analisar o processo $\{W_t\}$, olharemos para a cadeia imersa do processo, que é a tempo discreto. A Proposição 7.7.5 de Breiman [4] nos diz que as transições de probabilidade $p_t(i,j)$ para todo $t \geq 0$ e a distribuição inicial especificam completamente o Processo de Markov a tempo contínuo. Isto é, essa cadeia imersa descreverá completamente a evolução do processo.

Esquematicamente, em $d = 2$ temos



Formalmente, temos:

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $\{i_1, \ldots, i_k\}$ tais que $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = 0$ (isto é, k das d coordenadas de x são nulas).

Definimos as transições por:

$$(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) \to (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_d), \text{ para } j = 1, \ldots, d;$$

onde em $\xrightarrow{1}$ temos $|x_j| \mapsto |y_j| = |x_j| - 1$ com probabilidade p_k, e em $\xrightarrow{2}$ temos $|x_j| \mapsto |y_j| = |x_j| + 1$ com probabilidade q_k.

Mais precisamente,

Para a transição do tipo $\xrightarrow{1}$ temos as possibilidades:

$$\begin{cases} y_j = x_j + 1, & \text{se } x_j < 0 \\ y_j = x_j - 1, & \text{se } x_j > 0 \end{cases} \quad \text{com probabilidade } p_k = \frac{1+\gamma}{(d-k)(1+\gamma)+(d+k)\gamma} > \frac{1}{2d}.$$

Note que a p.p. se aproxima da origem por $(d-k)$ dentre as $2d$ direções possíveis para a transição.

Para as transições do tipo $\xrightarrow{2}$ temos as possibilidades:

$$\begin{cases} y_j = \pm 1, & \text{se } x_j = 0 \\ y_j = x_j + 1, & \text{se } x_j > 0 \\ y_j = x_j - 1, & \text{se } x_j < 0 \end{cases} \quad \text{com probabilidade } q_k = \frac{\gamma}{(d-k)(1+\gamma)+(d+k)\gamma} < \frac{1}{2d}, \text{ se } k < d.$$

A p.p. se afasta por $(d+k)$ dentre as $2d$ direções. Note que p_k e q_k satisfazem $(d-k)p_k + (d+k)q_k = 1$.

O movimento da p.p. tem cadeia imersa dada pelas transições acima. Chamaremos de Y_n a posição da p.p. na n-ésima transição.

Definiremos os tempos de parada ("stopping times") por:

$T_0 \equiv 0$

$T_n = \inf\{t > T_{n-1} : Y_t \neq Y_{T_{n-1}}\}$

A Propriedade Forte de Markov garante que $\{W_n = Y_{T_n} : n \geq 0\}$ é a cadeia de Markov a tempo discreto relativa à cadeia a tempo contínuo.

O que veremos agora é que o movimento da p.p. é um processo irredutível e recorrente positivo.

Lema 2.7 *O processo $\{W_n\}$ é irredutível e recorrente positivo.*

Demonstração. A irredutibilidade vem direto da construção de $\{p_k, q_k; k = 0, \ldots, d\}$.

A recorrência positiva vem do Teorema 1.1. Na notação do teorema, tomemos $g(y) = (|y|_2)^2$. Precisamos mostrar que existem $\epsilon > 0$ e $N < \infty$ satisfazendo:

$$I\!E\Big[\ |W_{n+1}|_2^2 \ \Big|\ W_n = y\ \Big] \leq |y|_2^2 - \epsilon, \quad \text{sempre que } |y|_2 > N. \tag{2.9}$$

Usaremos a seguir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} y &= (y_1, \ldots, y_d) \\ y^2 &= \sum_{j=1}^{d} y_j^2 \\ {}_iy_+^2 &= (|y_i| + 1)^2 + \sum_{j \neq i} y_j^2 = y^2 + 1 + 2|y_i| \\ {}_iy_-^2 &= (|y_i| - 1)^2 + \sum_{j \neq i} y_j^2 = y^2 + 1 - 2|y_i| \end{aligned}$$

Dado $y \in \mathbb{Z}^d$, seja k o número de coordenadas de y iguais a zero. Representaremos $y = (0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_d)$ e veremos que 2.9 vale para qualquer outra ordem dos zeros de y. Fixe $N = \max\left\{\frac{1}{p_s - q_s} : s = 1, \ldots, d\right\}$. Note que $0 < N < \infty$ pois $p_s - q_s > 0$, $s = 1, \ldots, d$. Tome $\epsilon = 1/2$. Lembramos também que $(d-k)p_k + (d+k)q_k = 1$. Para y tal que $|y|_2 > N$, temos

$$y^2 - I\!E\Big[\ |W_{n+1}|_2^2 \ \Big|\ W_n = y\ \Big] = y^2 - \Big[q_k(y^2+1)2k + q_k \sum_{i=k+1}^{d} {}_iy_+^2 + p_k \sum_{i=k+1}^{d} {}_iy_-^2\Big] =$$

$$= y^2 - \Big[y^2 + 2kq_k + q_k \sum_{i=k+1}^{d} (2|y_i| + 1) + p_k \sum_{i=k+1}^{d} (-2|y_i| + 1)\Big] =$$

$$= 2(p_k - q_k) \sum_{i=k+1}^{d} |y_i| - 1 = 2(p_k - q_k)|y|_1 - 1 \overset{|y|_1 > N}{>} 1 > \epsilon.$$

Note que nunca foi usado o fato de que as k primeiras coordenadas de y são iguais a

zero. Logo, o mesmo vale para os zeros em outras posições. Além disso, o resultado vale para $k = 0, \ldots, d$.

Para $|y|_2 < N$, temos claramente que $I\!E\left[\ |W_{n+1}|_2^2 \ \middle|\ W_n = y\ \right] < \theta$, algum $\theta < \infty$.

Portanto, mostramos que o processo é recorrente positivo. □

Tendo mostrado que o processo $\{W_n\}$ é recorrente positivo, segue que a origem estará ocupada infinitas vezes e com isso demonstramos o teorema. □

Como resultado imediato, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.9 *Qualquer sítio vai estar ocupado i.v.*

Demonstração. Para isso, basta esperar o tempo (finito) em que a p.p. que partiu da origem atinja o sítio i e, a partir desse instante, direcionar a p.p. para retornar a i ao invés de para a origem. Isso é, definimos as transições dadas no teorema acima em relação ao sítio i ao invés de 0, o que significa somente transladar as transições da origem para i de forma ao "drift" ser para i e não mais para a origem. □

Os artigos de Ding, Durrett e Liggett [7] e Mountford [15] analisam um processo mais genérico do que esse. Lá é permitido que em cada sítio possa haver um número qualquer de partículas. Além disso, as taxas de nascimento de partícula depende do número de partículas nesse sítio, semelhantemente para a taxa de morte. Em ambos artigos um dos modelos estudados tem a restrição de que se não há partículas em um determinado sítio, então a taxa de nascimento de partícula é zero. Para esse caso os autores mostram, entre outras coisas, que as únicas medidas invariantes e invariantes por translação são uma combinação convexa

de $\delta_\emptyset$ e uma determinada medida produto ν (no nosso caso será $\nu = \lim_{t\to\infty} \delta_{\mathbf{1}} S(t)$). Mountford em [15] dá outros resultados para a taxa de nascimento espontâneo igual a zero. Um dos resultados é que sob certas condições, começando-se com uma medida qualquer diferente de $\delta_\emptyset$ a medida limite será ν. Uma observação relevante é que para esses artigos citados o espaço Ω não é compacto, logo as soluções para os problemas são bem mais complicadas. Vale ressaltar que o processo analisado aqui não chega a ser um caso particular dos processos lá estudados, pois naqueles processos se a taxa de nascimento espontâneo é zero, então quando há uma única partícula em um sítio, ela não morre nunca, o que não é o nosso caso aqui.

Mostraremos mais adiante que começando-se com qualquer medida diferente de $\delta_\emptyset$, o processo convergirá para a medida $\delta_{\mathbf{1}}$. Além disso, caracterizaremos o formato assintótico do crescimento, começando-se com uma partícula. Antes, daremos um resultado isolado, caracterizando as medidas invariantes e invariantes por translação. A razão para colocarmos essa demonstração é para que o leitor se familiarize com cálculos envolvendo geradores. Usaremos a Definição 2.5 para e_i.

Lema 2.10 *As únicas medidas invariantes extremais e invariantes por translação são* $\delta_\emptyset$ *e* $\delta_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. Seja μ invariante extremal e por translação. Suponha que para algum cubo d-dimensional finito C temos

$$\mu\Big(\ \eta(x+e_i) \neq \eta(x) :\ \text{algum } x, x+e_i \in C\ \Big)\ > 0.$$

Temos então que para algum $x, x-e_i \in C$, $\mu\Big(\ \eta(x-e_i)=1, \eta(x)=0\Big)\ > 0$. Sem perda de generalidade tomemos $i=1$. Como μ é invariante por translação temos

$$\mu\Big(\ \eta(x-e_1)=1, \eta(x)=0\Big)\ = \mu\Big(\ \eta(x)=1, \eta(x+e_1)=0\ \Big) \tag{2.12}$$

Seja

$$f(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta(x)=1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como a medida é invariante, pelo Teorema 1.10 temos que para f dada acima,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega Lf d\mu = \tfrac{\gamma}{2d} \sum_{i,j\in\mathbf{Z}^d} \int f(\eta^{i,j}) - f(\eta) d\mu + \tfrac{1}{2d} \sum_{j\in\mathbf{Z}^d} \int f(\eta^j) - f(\eta) d\mu = \\
&= \tfrac{\gamma}{2d} \sum_{\substack{\{e_i,-e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \Big[\mu\big(\eta(x)=1,\eta(x+e_i)=0\big) - \mu\big(\eta(x)=0,\eta(x+e_i)=1\big)\Big] + \\
&\quad + \tfrac{1}{2d} \sum_{\substack{\{e_i,-e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \mu\big(\eta(x)=0,\eta(x+e_i)=1\big) \\
&= \tfrac{\gamma}{2d}\Big\{ \sum_{\substack{\{e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \Big[\mu\big(\eta(x)=1,\eta(x+e_i)=0\big) - \mu\big(\eta(x-e_i)=1,\eta(x)=0\big)\Big] + \\
&\quad + \sum_{\substack{\{e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \Big[\mu\big(\eta(x-e_i)=0,\eta(x)=1\big) - \mu\big(\eta(x)=0,\eta(x-e_i)=1\big)\Big]\Big\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2d} \sum_{\substack{\{e_i,-e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \mu\big(\eta(x)=0,\eta(x+e_i)=1\big) \\
&\overset{2.12}{=} \tfrac{1}{2d} \sum_{\substack{\{e_i,-e_i\}\\ i=1,\dots,d}} \mu\big(\eta(x)=0,\eta(x+e_i)=1\big)
\end{aligned}
$$

Então $\mu\big(\eta(x)=0,\eta(x\pm e_i)=1\big)=0$, para $i=1,\dots,d$. Ou seja, em qualquer cubo finito C, todos os sítios estão ocupados ou vazios com probabilidade 1. Pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov, as únicas medidas que satisfazem isso são $\delta_{\mathbb{1}}$ ou $\delta_{\emptyset}$ respectivamente.

□

Para enunciarmos o Teorema do Formato ("Shape Theorem"), precisaremos das seguintes definições.

$\xi_t^A = \big\{y \in \mathbb{Z}^d : \eta_t(y) = 1,$ quando $\eta_0(x) = 1$ somente para sítios $x \in A\big\}$.
$S = \big\{A \subset \mathbb{Z}^d\big\}$, o conjunto das partes de $\mathbb{Z}^d$.

Definição 2.12 *Dizemos que a família $\{\xi_t^A : A \subset \mathbb{Z}^d\}$ de Processos de Markov a valores em S é um* **modelo de crescimento** *se $\emptyset$ é um estado absorvente e a família é:*

(i) invariante por translação: o processo transladado $x + \xi_t^A$ é uma cópia de ξ_t^{x+A}, onde $x + B = \{x + y : y \in B\}$:

(ii) atrativa: se $A \subset B$ *então* ξ_t^A *e* ξ_t^B *podem ser construídos no mesmo espaço de forma que* $\xi_t^A \subset \xi_t^B$, *para todo* $t \geq 0$;

(iii) de alcance finito: existe $L < \infty$ *tal que se* $A \cap \{x : |x| \leq L\} = \emptyset$, *então* $P\{0 \in \xi_t^A\} = o(t)$ *quando* $t \to 0$.

Definimos ainda

$$\tau^A = \inf\{t : \xi_t^A = \emptyset\}, \quad t^A(x) = \inf\{t : x \in \xi_t^A\}; \quad \tau = \tau^{\mathbf{Z}}; \quad t(x) = t^0(x).$$

Dizemos que $\{\xi_t\}$ é **supercrítico** se $P(\tau = \infty) > 0$.

Para o teorema, será conveniente identificar cada $x \in \mathbb{Z}^d$ com um cubo em $\mathbb{R}^d$ de lado um com centro em x. Definimos então

$$H_t = \Big\{y \in \mathbb{R}^d : \text{ existe } x \in \mathbb{Z}^d \text{ com } \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \text{ e } t(x) \leq t\Big\}. \tag{2.14}$$

Tomaremos a norma l^∞ em $\mathbb{R}^d$. Definimos ainda

$$K_t = \Big\{y \in \mathbb{R}^d : \text{ existe } x \in \mathbb{Z}^d \text{ com } \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \text{ e } \xi_t^{\{0\}}(x) = \xi_t^{\mathbf{1}}(x)\Big\}, \tag{2.15}$$

onde $\xi_0^{\mathbf{1}} = \mathbb{Z}^d$.

Teorema 2.15 (Durrett, Griffeath 1982) *Seja* ξ_t^0 *um modelo de crescimento supercrítico. Suponha que há constantes* $C, c, \gamma \in (0, \infty)$ *tais que*

(a) $P(t \leq \tau < \infty) \leq Ce^{-\gamma t}$;

(b) $P(t(x) > t, \tau = \infty) \leq Ce^{-\gamma t}$ *para* $\|x\| < ct$.

Então existe um conjunto convexo A *tal que em* $\{\tau = \infty\}$ *temos, para qualquer* $0 < \epsilon < 1$;

$$(1 - \epsilon)tA \subset H_t \subset (1 + \epsilon)tA$$

para qualquer t *suficientemente grande.*

Se além disso tivermos

(c) Se ainda, $P(x \notin K_t, \tau = \infty) \leq Ce^{-\gamma t}$ *para* $\|x\| \leq ct$ *então em* $\{\tau = \infty\}$ *temos que o processo cresce linearmente, isto é, para qualquer* $0 < \epsilon < 1$,

$$(1-\epsilon)tA \subset (H_t \cap K_t) \subset (1+\epsilon)tA$$

para todo t *suficientemente grande.*

Demonstração. Este resultado foi provado por Richardson em 1973 para o Modelo de Richardson; para o Modelo do Votante Viciado foi provado em 1980 por Bramson e Griffeath e em 1982 essa versão mais genérica foi demonstrada por Durrett e Griffeath em [10], com uma correção feita em Durrett [8]. □

Enunciaremos agora um resultado dado por Bramson e Griffeath.

Teorema 2.16 *Se* $\gamma < 1$ *então o Modelo de Ramificação com Exclusão satisfaz a seguinte lei de convergência:*

Se $\mu = \delta_\emptyset$, *então* $\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \delta_\emptyset$.

Se $\mu = \mu^0_{\{1\}}$, *então* $\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \delta_{\mathbb{1}}$, *onde* $\mu^0_{\{1\}}$ *é a medida ponto-massa na configuração com uma única partícula na origem.*

Demonstração. Esse resultado é o Teorema 3 de [3]. Não daremos aqui a demonstração pois o resultado está provado lá. □

Decorre do teorema acima e da atratividade do processo o seguinte resultado.

Corolário 2.17 *Fixado* $\gamma < 1$ *e começando-se com qualquer medida diferente de* $\delta_\emptyset$, *o processo vai convergir para* $\delta_{\mathbb{1}}$. *Começando-se com* $\delta_\emptyset$, *o processo continuará sempre em* $\delta_\emptyset$.

Demonstração. Começando-se com uma única partícula, o processo converge para $\delta_{\mathbb{1}}$ pela invariância do processo. Começando-se com uma $\mu \neq \delta_{\emptyset}$, temos que essa medida vai colocar pelo menos uma partícula no sistema com probabilidade 1. Neste caso, a chance de se encher o espaço $\mathbb{Z}^d$ inteiro é maior do que começando-se com uma única partícula. □

Capítulo 3

Exclusão + Ramificação + Morte em um Número Finito de Sítios

3.1 Descrição do Modelo

Informalmente podemos pensar que esse modelo descreve a evolução de bactérias que se reproduzem assexuadamente e locomovem-se. Mas em um número finito de lugares elas podem morrer, caso passem por lá. Novamente analisaremos o que acontece com a população de bactérias. Como resposta teremos que ou todas elas morrem, ou preenchem todo o espaço de dimensão finita d qualquer.

Este modelo tem espaço de estados $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Dado $\eta \in \Omega$ e $i \in \mathbb{Z}^d$, $\eta(i) \in \{0,1\}$ é a projeção de η no sítio i. O conjunto $\{0,1\}$ vai ser considerado com a topologia discreta e Ω com a respectiva topologia produto e σ-álgebra Σ dos borelianos.

Cada $i \in \mathbb{Z}^d$ será chamado de sítio (veja Definição 2.1). Cada sítio i pode estar ocupado por no máximo uma partícula em cada instante $t \geq 0$. Nesse caso, $\eta_t(i) = 1$, onde $\eta_t(i)$ é a projeção de η_t no sítio i.

Seja $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ o conjunto de sítios onde partículas podem morrer.

Colocaremos a seguinte evolução no processo:

Uma partícula em um sítio $i \notin B$ pode criar outra partícula em um sítio vizinho j ou saltar para ele, caso j esteja vazio. As partículas que nascerem em B ou que saltarem para lá, morrem depois de um tempo exponencial de parâmetro β. Assumiremos que partículas em B podem ter descendentes em vizinhos ou saltar para lá antes de morrer. Mas ressaltamos aqui que os resultados obtidos nesse capítulo são um pouco mais fortes e valem também no caso em que partículas em B não podem ter descendentes nos sítios vizinhos nem saltar para eles. Além disso, podemos assumir que as partículas que caem em B morrem imediatamente, ou seja, que $\beta = \infty$.

· Partículas são criadas de acordo com um processo de Poisson de taxa γ . Isto é, a partícula no sítio i cria uma nova partícula em j, se estiver vazio, com probabilidade $\frac{\gamma}{1+\gamma}p(|j-i|_1)$, onde $p(k)= \frac{1}{2d}$, se $k = 1$. Caso j já esteja ocupado, nada ocorre.

· A partícula que está no sítio i salta para o sítio j, com $|j - i|_1 = 1$, de acordo com uma distribuição de Poisson de taxa 1. Se a partícula em i decide saltar para j mas j já estiver ocupado, o salto é suspenso.

· Assumiremos que as partículas em B morrem depois de um tempo exponencial de média $\frac{1}{\beta}$. As transições em B também são com exclusão, isto é, se z_i está ocupado e alguma partícula decidir saltar para z_i, esse salto é suspenso.

Definimos

$$\eta_{z_j}(i) = \begin{cases} \eta(i), & \text{se } i \neq z_j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Usando as Definições 2.3, 2.4 e 3.1, definimos o gerador de Markov do processo, para qualquer função cilíndrica $f: \Omega \to \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned}(Lf)(\Omega) &= \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)] + \gamma \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^j) - f(\eta)]\eta(i) \\ &+ \beta \sum_{\substack{i \in \mathbf{Z}^d \\ z_j \in B}} [f(\eta_{z_j}(i)) - f(\eta)]\eta(z_j)\mathbf{1}_{\{z_j\}}(i).\end{aligned}$$

A relação entre o gerador de Markov e o semigrupo em $C(\Omega)$ é dado pelo Teorema de Hille-Yosida.

3.2 Análise do Processo

As primeiras observações que faremos são que esse processo não é *invariante por translação*, pois as transições não são todas simétricas, já que há um número finito de sítios onde ocorrem mortes. Isso torna a análise mais complicada, pois não podemos utilizar as mesmas técnicas vistas no capítulo anterior para analisar a convergência de qualquer medida de probabilidade.

Este processo de Markov é *atrativo*. Para ver que é atrativo basta fazer-se um acoplamento entre duas medidas $\mu_1 \leq \mu_2$ e a partir do método da construção gráfica podemos ver que sempre continuarão mantendo a desigualdade $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t)$, para todo $t \geq 0$. Note que sempre que for criada uma partícula na configuração com densidade μ_1, ou se uma partícula morrer ou saltar, o mesmo ocorre na configuração que tem por densidade μ_2. Temos então (b) da Definição 1.14. Tendo isso, o Teorema 1.19 nos diz que existe $\lim_{t\to\infty} \delta_{\mathbb{1}} S(t)$. Veremos que essa medida é concentrada em configurações com um número finito de sítios vazios.

O processo é *Feller*. Para ver isso basta notar que a demonstração é a mesma do Teorema 2.5. Note que lá só usamos o fato de as interações serem com um número finito de vizinhos (no nosso caso, vizinhos mais próximos). Para esse processo a influência de ∞ será menor (via acoplamento dos processos) pois nesse há morte de partículas, o que não ocorre no Ramificação com Exclusão.

Consideraremos o processo começando com a medida $\delta_{\mathbb{1}}$ no tempo $t = 0$ (isto é, com a medida que coloca uma partícula em cada sítio com probabilidade um) e analisaremos a evolução do processo quando o tempo tende a infinito.

As perguntas básicas que tentaremos responder são: Começando-se com a medida $\delta_{\mathbb{1}}$, o processo convergirá para alguma medida quando t tende a infinito? Qual medida é essa? A resposta obtida é que o processo vai convergir para uma medida concentrada em configurações com um número finito de buracos. Mostraremos primeiramente que esse resultado vale se ocorrerem mortes somente na origem. Como corolário imediato observaremos

que o mesmo resultado vale se tivermos um número finito de sítios onde partículas podem morrer. Esse resultado vale independentemente dos valores das taxas (desde que a taxa de nascimento de partículas seja maior do que zero) e na demonstração nunca será usado o fato de que as partículas podem ter descendentes nos sítios onde ocorrem mortes. Além disso as partículas que caem nesses sítios onde ocorrem mortes podem morrer instantaneamente.

A análise do problema em uma dimensão d qualquer é complicada, mas podemos simplificar o problema. Ao invés de analisarmos o problema em $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$, olharemos para uma projeção deste espaço, dado pelo número de buracos no sistema. Em outras palavras, ao invés de olharmos para o processo $\{\eta_t\}$, olharemos para o processo $\{f(\eta_t)\}$, onde $f(\eta_t)$ é o número de buracos em sítios diferentes de 0 na configuração ao tempo t. Lembramos que a medida inicial é $\delta_{\mathbf{1}}$, logo o número de buracos em qual quer tempo finito é sempre finito, como mostraremos no lema abaixo.

Lema 3.2 *Para o processo $\{\eta_t\}$, com taxas γ e β quaisquer e com $f(\eta_0) < \infty$, temos $P\{\exists t \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } f(\eta_t) = \infty\} = 0$.*

Demonstração. Seja $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ sequência enumerável com $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

$$P\Big[f(\eta_t) = \infty \text{ algum } t > 0\Big] = P\Big[\bigcup_t \Big\{f(\eta_t) = \infty\Big\}\Big] \leq P\Big[\bigcup_{t_n} \Big\{f(\eta_s) = \infty \text{ algum } s \in (0,t_n]\Big\}\Big]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\Big[f(\eta_s) = \infty \text{ algum } s \in (0,t_n]\Big] \leq \sum_{n=1}^{\infty} P[\text{infinitos buracos até } t_n\Big] \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{\text{infinitas setas de salto de partículas de um viz. de 0 para 0 até } t\} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} P_{t_n}$$

Suponha que $P_{t_n} > 0$, algum n. Devemos ter infinitas setas que indiquem salto de uma partícula de i para 0, com $|i|_1 = 1$, em um intervalo finito $(0,t_n]$. Mas então $\exists s_i \in (0,t_n]$ tal que s_i é um ponto de acumulação dessas setas. Mas isso contraria o fato de as setas serem distribuídas segundo um processo pontual de Poisson, pois tomando qualquer intervalo $\Delta_{t_n} \subset [0,t_n]$ tal que $s_i \in \Delta_{t_n}$, teríamos $P(2 \text{ ou mais setas em } \Delta_{t_n}) \neq o(\Delta_{t_n})$. Queremos

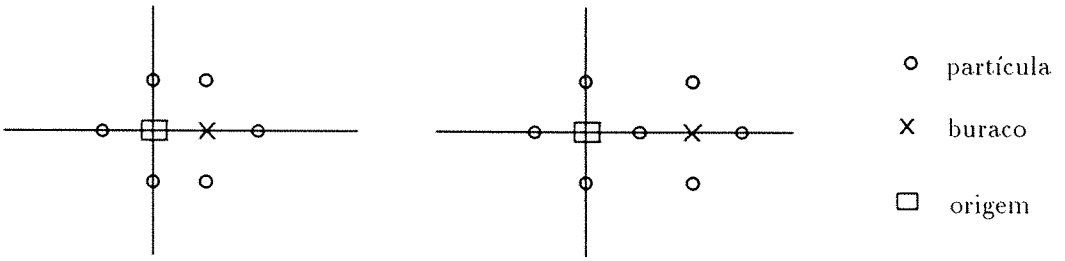
dizer com isso que mesmo que o tamanho do intervalo $\Delta(t)$ tenda a zero linearmente, a probabilidade de ter duas ou mais setas em Δ_t não vai a zero com uma velocidade maior. Mas isso é absurdo, pois as marcas são distribuídas de acordo com um processo de Poisson. □

Analisaremos agora a evolução da cadeia imersa do processo $\{f(\eta_t)\}$. Tomemos $B = \{0\}$, onde $0 \doteq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ representa a origem. Assumiremos que as partículas que caírem em 0 morrem instantaneamente, o que é a pior situação possível. Começando-se com a medida $\delta_{\mathbb{1}}$, em $t = 0$, temos que $f(\eta_t)$ pode ter transições da forma:

Se $f(\eta_t) = 0$, temos

$0 \to 1$ se algum dos $2d$ vizinhos de 0 saltar para 0.

Tendo $f(\eta_t) = 1$ podemos ter configurações do tipo:



(a_1) buraco vizinho ao 0 (b_1) buraco em algum sítio longe de 0

Em (a_1) temos:

$1 \to 0$ se uma das 3 part. viz. do buraco tiver 1 descendente nele.

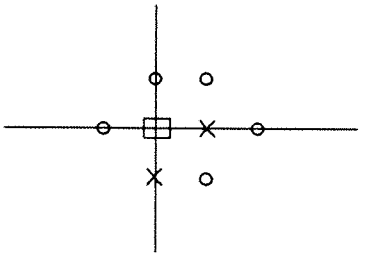
$1 \to 2$ se uma das 3 part. viz de 0 saltar para 0.

Em (b_1):

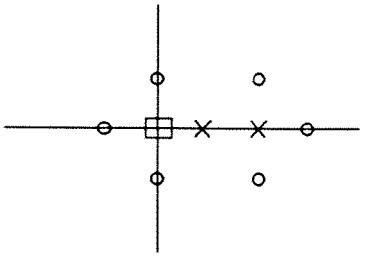
$1 \to 0$ se uma das 4 part. viz do buraco tiver 1 descendente nele.

$1 \to 2$ se uma das 4 part. viz. de 0 saltar para 0.

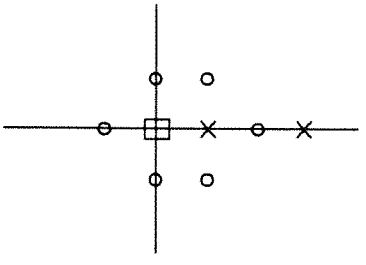
Se $f(\eta_t) = 2$ podemos ter:



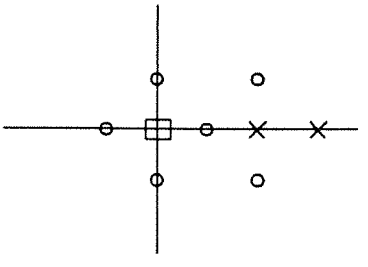
(a_2) 2 buracos vizinho de 0



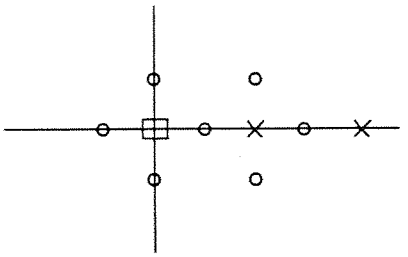
(b_2) 1 buraco viz. de 0 com outro ao lado



(c_2) 1 buraco viz. de 0 e outro longe



(d_2) 2 buracos viz. e longe de 0



(e_2) 2 buracos longe de 0 e longe entre si

Em (a_2):

$2 \to 1$ se uma das 6 part. viz. dos buracos tiver 1 desc. em um deles.

$2 \to 3$ se uma das 2 part. viz. de 0 saltar para ele.

Sejam $b_1 \ldots b_n \in \mathbb{Z}^d$ os n buracos no sistema no tempo t. Definimos:

$v_{b_i}^t = \sum_{|z-b_i|_1} \eta_t(z)$, para $i = 1, \ldots, n$ o nº de part. viz. do buraco b_i no tempo t.

$v_n^t = \sum_{i=1}^{n} v_{b_i}^t$, o nº total de part. viz. dos n buracos no tempo t, contadas com multiplicidade, pois se a mesma partícula for vizinha de, por exemplo, dois buracos, ela poderá ter descendentes ou saltar para qualquer um dos dois.

$v_0^t = \sum_{|j|=1} \eta_t(j)$, o nº de part. viz. de 0 no tempo t.

Genericamente temos que, se $f(\eta_t) = n$, temos as transições no tempo t:

$n \to n-1$ se uma das v_n^t part. tiver um descendente num dos buracos.

$n \to n+1$ se uma das v_0^t part. saltar para o 0.

Note que mesmo esse processo $\{f(\eta_t)\}$ tem uma transição complicada (pois o processo obviamente não é Markoviano, embora $\{\eta_t\}$ o seja). Para contornar esse problema, faremos um acoplamento desse processo com um outro que além de ser Markoviano, ainda vai nos garantir que o processo original vai retornar à configuração com todos os sítios ocupados infinitas vezes (i.v.). Para a construção desse novo processo, note que temos as seguintes desigualdades:

$n \to n-1$ com taxa maior ou igual a $\sqrt[d]{n}$
(note que o pior caso é quando os buracos estão aglomerados em um cubo d-dimensional)

$n \to n+1$ com taxa menor ou igual a $2d$.
(uma das partículas saltar para a origem)

Com base nessas desigualdades, construiremos um processo Markoviano com uma taxa de morte de partículas maior do que o processo original; taxa de nascimento menor do que o original, mas que mesmo assim o processo modificado é recorrente positivo.

O processo modificado, que chamaremos de $\{\zeta_t\}$ evolui com taxas:

Se $\zeta_t = 0$:

$0 \to 1$ com prob. 1

Para $n \geq 1$, temos

$n \to n-1$ com taxa $\sqrt[d]{n}$ (ou seja, com prob. $\frac{\sqrt[d]{n}}{2d+\sqrt[d]{n}}$),

$n \to n+1$ com taxa $2d$ (ou seja, com prob. $\frac{2d}{2d+\sqrt[d]{n}}$).

O processo parece ser recorrente positivo pois quando n tende a infinito, a probabilidade de diminuir o número de buracos tende a 1. Para se verificar que realmente o processo é recorrente positivo, usaremos o Teorema 1.1.

Teorema 3.3 *O processo* $\{\zeta_t\}$ *é recorrente positivo, para todo* $\gamma > 0$.

Demonstração. Na notação do Teorema 1.1, tomemos $N = (6d)^d$ e $\epsilon = \frac{1}{2}$. Considere $g(y) = y$, $y = 0, 1, \ldots$. Temos então para $\zeta_t > N$,

$$I\!E\Big[\, g(\zeta_{t+1}) \;\Big|\; \zeta_t = n \,\Big] = (n-1)\cdot\frac{\sqrt[d]{n}}{2d+\sqrt[d]{n}} + (n+1)\cdot\frac{2d}{2d+\sqrt[d]{n}} = n - \frac{\sqrt[d]{n}-2d}{\sqrt[d]{n}+2d}$$
$$\overset{N>(6d)^d}{\leq} n - \frac{1}{2}$$

$$I\!E\big[\, g(\zeta_{t+1}) \mid \zeta_t = m \,\big] < N, \quad \text{se} \quad m \leq N$$

Logo, o processo $\{\zeta_t\}$ é recorrente positivo. □

Poderíamos provar que o processo é recorrente positivo sem utilizar o Teorema 1.1. Para cada γ e dimensão d fixados, existe um $N < \infty$ tal que a probabilidade da transição de n para $n-1$ é maior do que a de n para $n+1$, qualquer $n \geq N$. Bastaria se acoplar o processo $\{f(\eta_t)\}$ com um processo $\{\xi_t\}$ com taxas de $f(\eta_t)$ se $\xi_t < N$ e taxa de $f(\eta_t) = N$ para $n \geq N$. Mais precisamente, se $\xi_t = m$, $m \leq N$, então as taxas para $\xi_t = m$ são as mesmas de $f(\eta_t) = m$. Se $n > N$ e $\xi_t = n$, então as taxas para $\xi_t = n$ são as mesmas de $f(\eta_t) = N$. É fácil ver que esse novo processo é recorrente positivo, pois é um passeio aleatório assimétrico em $\mathbb{Z}^+$ modificado em somente um número finito de estados (a saber, $A = \{0, \ldots, N\}$. Em Feller [12] podemos ver que um passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ assimétrico com "drift" para a origem é recorrente positivo. Em nosso caso, modificamos

esse processo em somente um conjunto finito A. Sabemos por Feller [12] que o conjunto A será visitado infinitas vezes. Como A é finito e fechado, temos que qualquer estado de A será visitado infinitas vezes).

Através de um acoplamento entre o processo original $\{\eta_t\}$ e o processo modificado $\{\zeta_t\}$, temos que se o processo modificado retorna à configuração com todos os sítios ocupados, com maior chance o processo original também voltará.

Teorema 3.4 *Começando com a medida $\delta_{\mathbf{1}}$, o processo vai convergir para uma medida que tem somente um número finito de buracos.*

Demonstração. Como a cadeia imersa do processo $\{f(\eta_t)\}$ tem espaço de estados enumerável e é recorrente positiva, o processo retornará infinitas vezes à configuração totalmente cheia de partículas. Vimos que em nenhum tempo finito o processo terá um número infinito de buracos. Além disso, sabemos pelo Teorema 1.19 que existe o limite de $\delta_{\mathbf{1}}S(t)$ já que o processo em questão é um sistema atrativo, logo o processo só pode convergir para uma medida que tem um número finito de buracos. □

Com base na demonstração, temos como resultado imediato:

Corolário 3.5 *Se tivermos um número finito k de sítios onde partículas podem morrer, e começarmos com uma medida que concentra em uma configuração que tem somente um número finito n de buracos com probabilidade um, então vale o mesmo resultado do teorema acima.*

Demonstração. Note que a cadeia imersa para o processo $\{f(\eta_t)\}$ tem espaço de estados enumerável e é recorrente positiva mesmo tendo um número k de sítios onde morrem partículas (as taxas são um pouco diferentes, mas conseguimos basicamente os mesmos limitantes. Além disso, começar-se com uma configuração com n buracos equivale a olhar para a cadeia imersa começando do estado $f(\eta_0) = n$. □

Observação: Considere o caso em que B é unitário. Começando-se com uma medida μ concentrada em uma configuração com um número finito de partículas, no limite ou todas as partículas morrem, ou teremos um número infinito de partículas. Vale ressaltar que não sabemos se o número de buracos vai ser finito. Note que podemos usar uma construção similar à dada anteriormente para o processo $\{f(\eta_t)\}$, onde $f(\cdot) = n$ representava ter n buracos na configuração. Ao invés de olhar essa função, analisaremos $g(\eta_t) =$ nº de partículas na configuração η_t. Tomando-se as taxas $g(\cdot) : n \to n+1$ com a taxa de $f(\cdot) : n \to n-1$ e $g(\cdot) : n \to n-1$ com a taxa de $f(\cdot) : n \to n+1$. A única diferença é que aqui $g(\cdot) = 0$ é absorvente, logo, se tivermos 0 partículas em um tempo t, continuaremos tendo 0 partículas em qualquer tempo subsequente. Condicionando-se a nunca ter 0 partículas, temos então que o processo tende a ter um número infinito de partículas.

Temos pelo menos duas medidas invariantes extremais distintas, logo o processo nunca será ergódico.

Infelizmente o mesmo tipo de análise não funciona se tivermos um número infinito de sítios onde partículas morrem ou se a configuração inicial tem um número infinito de buracos. Para estudar esse tipo de problema usaremos outro tipo de análise que daremos no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Contato Modificado

4.1 Descrição do Modelo

O processo pode ser interpretado como um modelamento de um sistema onde bactérias se reproduzem assexuadamente, locomovem-se e eventualmente morrem. A pergunta é basicamente a mesma de todos os outros capítulos: começando-se com o espaço totalmente preenchido por bactérias, elas continuarão vivas ou todas morrerão deixando o espaço vazio? A resposta é que depende dos valores das taxas de nascimento e de morte. Fixando inicialmente a configuração $\eta \equiv 1$, um valor de taxa de morte de bactérias, vai haver uma taxa de nascimento crítica tal que abaixo desse valor o sistema se extingue e acima dele o processo sobrevive com probabilidade positiva. Não daremos aqui o valor dessa taxa crítica, mas sim um intervalo finito $[a, b]$ contendo esse valor. Com isso mostramos que o processo tem uma transição de fase. Mesmo no Contato Usual, o valor exato da taxa crítica ainda é um problema em aberto.

O Contato Usual é um processo no qual as partículas nascem e morrem com as taxas que daremos aqui. A diferença está no fato de que as partículas não podem se locomover. Essa diferença, aparentemente sem muita influência na evolução do processo, traz dificuldades

extra pois com a locomoção, o processo de Contato Modificado deixa de ser um Sistema de Spins (pois o salto depende de 2 coordenadas em cada transição) e isso dificulta bastante os cálculos.

Este modelo é um processo de Contato onde além de partículas nascerem e morrerem, podem trocar de posição. Mais precisamente, seja $\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ o espaço de estados.

O processo de Contato Modificado $\{\xi_t\}$ tem a seguinte evolução:

· Se não há partícula no sítio i, uma partícula é criada com taxa $\lambda \times$ nº viz. ocupados. Equivalentemente, $\xi(i) : 0 \to 1$ com taxa $\lambda \sum_{|j-i|=1} \xi(j)$

· Uma partícula morre com taxa 1. Ou seja, $\xi(i)$: $1 \to 0$ com taxa 1.

· Uma partícula salta de i para j com taxa $\gamma/2d$. Equivalentemente, $\xi(i)\xi(i+1) : 01 \to 10$ com taxa $\gamma/2d$. O mesmo vale para $10 \to 01$. Para efetuar esses saltos, procedemos da seguinte maneira: para cada sítio x, escolhemos um vizinho y com probabilidade $1/2d$ e colocamos uma seta de salto de x para y com taxa γ.

Definimos

$$\eta_j(i) = \begin{cases} \eta(i), & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Utilizando as Definições 2.3, 2.4 e 4.1, para qualquer função cilíndrica $f: \Omega \to \mathbb{R}$, o gerador L do processo de Markov é definido por

$$\begin{aligned}(Lf)(\Omega) &= \gamma \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)] + \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} p(|j-i|_1)[f(\eta^j) - f(\eta)]\eta(i) \\ &\quad + \lambda \sum_{i,j \in \mathbf{Z}^d} [f(\eta_j(i)) - f(\eta)]\eta(j).\end{aligned}$$

Para a construção gráfica do processo usaremos setas tipo *stirring* para indicar salto de partículas. Ou seja, para cada par $\{i,j\} \subset \mathbb{Z}^d$ colocamos setas de salto com taxa γ. Essas setas podem ser utilizadas tanto por x quanto por y, A construção gráfica segue de forma análoga à vista para o Processo de Ramificação com Exclusão acrescentando-se marcas de morte em cada sítio x de acordo com um processo de Poisson de taxa igual a 1. A vantagem de se colocar setas tipo "stirring" é que com isso, se olharmos para o processo dual (seguindo as setas no sentido contrário ao tempo; ao encontrar seta indicando nascimento, matamos a partícula e ao achar uma marca de morte fazemos nascer uma partícula), esse novo processo terá a mesma distribuição se olharmos o processo com o tempo crescendo. A auto-dualidade vem do fato de que o Contato Usual e a Exclusão com setas tipo "stirring" serem auto-duais.

4.2 Análise do Processo

Observamos aqui uma semelhança com o modelo dado no capítulo anterior. A única diferença é que aqui as partículas podem morrer em todos os sítios. Nosso interesse nesse modelo é saber se existe um λ crítico (λ_c^d) tal que fixando-se γ e para $\lambda < \lambda_c^d$ o processo morre (isto é, o processo converge para a medida $\delta_\emptyset$) e para valores acima desse valor o processo tem uma chance positiva de sempre sobreviver. Para o processo de Contato foi provado que esse λ_c^d existe. Seguiremos os mesmos passos para demonstrar que para o Contato Modificado também existe um λ_c^d. Basearemo-nos nos textos de Griffeath [13], Liggett [14], Durrett [8] e notas de aula de Schonmann [16].

É fácil ver que o Contato Modificado é *atrativo*. Basta se construir um acoplamento entre duas medidas $\mu_1 \leq \mu_2$ e usar (b) de 1.14. Vemos que se uma partícula na configuração com densidade μ_2 morre, salta ou cria partícula em um vizinho, o mesmo ocorre para a configuração com densidade μ_1 ou já havia uma partícula em μ_2 e continuamos com a desigualdade $\mu_1 S(t) \leq \mu_2 S(t)$, para todo $t \geq 0$.

O processo é *invariante por translação* pelo fato de todas as transições serem simétricas.

O processo também é *Feller*. A prova sai de forma análoga à vista no Teorema 2.5.

Definição 4.2 *Para $A \subset \mathbb{Z}^d$, seja $\xi_t^A = \{y \in \mathbb{Z}^d$: existe caminho de $(x,0)$ para (y,t), algum $x \in A$, tal que $\eta(x) = 1$ para todo $x \in A$; $\eta(x) = 0$ para todo $x \notin A\}$. Denotaremos μ_η como sendo a medida ponto-massa na configuração η.*

Observação: Durante todo o capítulo trabalharemos com o parâmetro γ fixo.

Seja $\nu_{\lambda,\gamma}$ a medida invariante superior para o Contato Modificado com parâmetros $\lambda \geq 0$ e $\gamma \geq 0$. Ou seja, $\nu_{\lambda,\gamma} = \lim_{t\to\infty} \delta_{\mathbb{1}} S(t)$. Pelo Teorema 1.19, temos que esse limite existe.

Definição 4.3 *Denotaremos* $\tau^A = \inf\{t > 0 : \xi_t^A = \emptyset\}$ *e ainda* $\rho(\lambda, \gamma) = P_{\lambda,\gamma}\{\tau^{\{0\}} = \infty\}$.

Teorema 4.4 *Se* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *então* $\nu_{\lambda_1,\gamma} \leq \nu_{\lambda_2,\gamma}$. *Logo,* $\rho(\lambda, \gamma)$ *é não decrescente em* λ.

Demonstração. Faremos essa prova via construção gráfica. Construímos dois processos acoplados $\{\zeta_t^{\lambda_1}\}$ e $\{\zeta_t^{\lambda_2}\}$ tal que colocamos as mesmas setas para salto e morte de partículas (já que as taxas são as mesmas para os dois processos). Para as setas indicando nascimento, começamos colocando setas nos dois processos com taxa λ_1. Depois somente em $\{\zeta_t^{\lambda_2}\}$, colocamos mais setas com taxa $\lambda_2 - \lambda_1$. Pela atratividade do processo segue o resultado.

□

Pelo Teorema 1.20 o processo é ergódico para um dado λ se e somente se $\rho(\lambda, \gamma) = 0$.

Para o processo em dimensão d, definimos o valor crítico λ_c^d como

$$\lambda_c^d = \inf\{\lambda \geq 0 : \rho(\lambda, \gamma) > 0\}$$

Veremos a seguir que o processo deve ter uma transição de fase, isto é, dependendo do valor de λ o processo vai ou não ser ergódico.

Teorema 4.5 *Se* $\lambda < \lambda_c^d$ *então o processo é ergódico, isto é* $\Im = \{\delta_\emptyset\}$. *Se* $\lambda > \lambda_c^d$ *então o processo não é ergódico.*

Demonstração. Seja $\mu \in \Im$. Então, $\mu S(t) = \mu$. Mas

$$\mu S(t)\{\eta : \eta \cap B \neq \emptyset\} = P(\xi_t^\mu \cap B \neq \emptyset) = \int P(\xi_t^\eta \cap B \neq \emptyset) d\mu(\eta)$$

$$\leq \int P(\xi_t^{\delta_\emptyset} \cap B \neq \emptyset) d\mu(\eta) = P(\tau^B > t) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

A última igualdade segue do fato de que o processo é auto-dual. Logo, $\mu\{\eta : \eta \cap B \neq \emptyset\} = 0$. Portanto $\mu = \delta_\emptyset$.

Se $\lambda > \lambda_c^d$, então $\nu_{\lambda,\gamma}(0 \text{ infectado}) > 0$, logo, $\nu_{\lambda,\gamma} \neq \delta_\emptyset$.

□

Mostraremos agora que $0 < \lambda_c^d < \infty$, ou seja, o processo tem realmente uma transição de fase. Acharemos dois limitantes para esse valor. Começaremos mostrando que $\lambda_c^d \geq \frac{1}{2d}$ pelo teorema a seguir.

Teorema 4.6 *Se $\lambda \leq \frac{1}{2d}$ então $\rho(\lambda, \gamma) = 0$.*

Demonstração. Essa prova foi baseada na demonstração para Contato Usual, dada no curso de Schonmann [16]. Se $|\xi_t| = n$, onde $|\cdot|$ representa a cardinalidade do conjunto, temos as seguintes transições possíveis:

$n \to n+1$ com taxa $\lambda \sum_{\{y \in \mathbf{Z}^d \setminus \xi_t\}} \sum_{x:\|x-y\|_1=1} 1_{x \in \xi_t} \leq 2d\lambda|\xi_t| \doteq \lambda_n$

$n \to n-1$ com taxa $|\xi_t| \doteq \delta_n$.

$n \to n$ com taxa $\gamma \sum_{\{y \in \mathbf{Z}^d \setminus \xi_t\}} \sum_{x:\|x-y\|_1=1} 1_{x \in \xi_t} \leq 2d\gamma|\xi_t| \doteq \gamma_n$.

O processo $\{X_n\}$ com taxas γ_n, δ_n e λ_n é um processo de ramificação em tempo contínuo e cada indivíduo tem transição do tipo:

$1 \to 0$ com probabilidade $\frac{1}{1+2d\lambda+2d\gamma}$

$1 \to 1$ com probabilidade $\frac{2d\gamma}{1+2d\lambda+2d\gamma}$

$1 \to 2$ com probabilidade $\frac{2d\lambda}{1+2d\lambda+2d\gamma}$

O processo morre se $I\!E(X_n) = \frac{2d\gamma}{1+2d\lambda+2d\gamma} + \frac{4d\lambda}{1+2d\lambda+2d\gamma} \leq 1$. Isso ocorre se e somente se $\lambda \leq \frac{1}{2d}$. □

Teorema 4.7 $\lambda_c^d \leq \frac{2(1+\gamma)}{d}$.

Demonstração. Mostraremos isso via acoplamento, e assumindo como conhecido um resultado para Contato Usual. O acoplamento será feito com o processo de Contato Modificado $\{\xi_t^m\}$ e um Contato Usual $\{\xi_t^u\}$ da seguinte maneira: colocamos as mesmas setas de nascimento e morte nos dois processos. Para o processo $\{\xi_t^m\}$, coloque as setas de salto. Já para o processo $\{\xi_t^u\}$, ao invés de colocarmos setas de salto, colocamos marcas de morte de partículas, isto é, ao invés da partícula saltar, como faz no Contato Modificado, ela morre no Contato Usual antes de poder saltar (com isso obtemos um Contato Usual com taxa de nascimento λ e taxa de morte igual a $1+\gamma$. É fácil ver, para cada configuração dada, que $\xi_t^u \leq \xi_t^m$, $\forall t > 0$, se começarmos com $\xi_0^u = \xi_0^m$. Pois, se nascer uma partícula em ξ_t^m, o mesmo ocorre em ξ_t^u. Se morrer uma em ξ_t^m, o mesmo ocorre em ξ_t^u. Caso uma partícula em ξ_t^m salte, em ξ_t^u ela vai ter morrido. Logo, segue o resultado. Agora, se acharmos um valor de λ para o Contato Usual, de forma que esse processo sobreviva, pelo acoplamento poderemos afirmar isso também para o Contato Modificado. Note que o Contato Usual que construímos é equivalente a um Contato Usual com taxas $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{1+\gamma}$ e taxa de morte igual a 1. Temos em Liggett [14], por exemplo, uma demonstração de que neste caso $\bar{\lambda}_c \leq \frac{2}{d}$. Não daremos aqui a demonstração para esse fato. Ressaltamos, entretanto, que essa demonstração é difícil. Não se conhece nenhuma demonstração fácil para o problema. Reescalonando o processo, temos para o Contato Modificado que $\lambda_c^d \leq \frac{2(1+\gamma)}{d}$.

□

Teorema 4.8 *Em* $\{\tau = \infty\}$ *temos: para* $\lambda > \bar{\lambda}_c(\mathbb{Z})(1+\gamma)$ *existe um conjunto convexo* A *tal que para qualquer* $0 < \epsilon < 1$, *temos*

$$(1-\epsilon)tA \subset H_t \subset (1+\epsilon)tA$$

para todo t *suficientemente grande, onde* $\bar{\lambda}_c(\mathbb{Z})$ *é a taxa crítica para o Contato Usual em dimensão* 1 *e* H_t *está definido em 2.14.*

Demonstração. Este resultado é dado no artigo de Durrett e Griffeath [10] para o Contato Usual com maior generalidade. Para aquele processo demonstram que valem as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema 2.15. Nossa tática para demonstrar para o Contato Modificado será, como na demonstração do Teorema 4.7, baseada num acoplamento dos dois processos. Coloque, no Contato Usual $\{\xi_t^u\}$ e no Modificado $\{\xi_t^m\}$, setas de nascimento com taxas λ e marcas de morte com taxa 1. Para o Contato Modificado coloque setas de salto com taxa γ. Para o Usual, coloque nesses mesmos instantes marcas de morte. Foi provado em [10], que para valores $\lambda > \bar{\lambda}_c(z) + \gamma$, valem as estimativas (a) e (b). Como a chance de sobrevivência no Modificado é maior por causa do acoplamento, temos que valem (a) e (b) também para esse modelo. □

Gostaríamos de observar que as demonstrações de resultados para o Contato Usual não são automaticamente verificadas para o Contato Modificado, como intuitivamente possa parecer. A dificuldade está no fato de que esse novo processo não é mais um Sistema de Spins por causa da Exclusão. A maioria das demonstrações para Contato Usual usam fortemente essa propriedade direta ou indiretamente, em muitos teoremas.

Bibliografia

[1] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Willey, New York, 1968.

[2] M. Bramson, P. Calderoni, A. De Masi, P.A. Ferrari, J.L. Lebowitz, R.H. Schonmann. *Microscopic Selection Principle for a Diffusion-Reaction Equation.* Journal of Statistical Physics, nº 5/6, p. 905-920. 1986.

[3] M. Bramson, D. Griffeath. *On the Williams - Bjerknes tumor growth Model: I.* Annals of Probability 9, p. 173-185. 1981.

[4] L. Breiman. *Probability and Stochastic Processes with a view towards Applications.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[5] C. Cammarota, P.A. Ferrari. *An Invariant Principle for the Edge of the Branching Exclusion Process.* Stochastic Processes and their Applications 38, p. 1-11, 1991.

[6] A. De Masi, P.A. Ferrari, J.L. Lebowitz. *Reation-Diffusion Equations for Interactiong Particle Systems.* Journal of Statistical Physics, vol. 44, nº 3/4, p. 589-645, 1986.

[7] W. Ding, R. Durrett, T. Liggett. *Ergodicity of Reversible Reaction Diffusion Processes.* Probability Theory and Related Fields. 85, p. 13-26, 1990.

[8] R. Durrett. *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation.* Wadsworth & Brooks, 1988.

[9] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Wadsworth&Brooks. 1991.

[10] R. Durrett e D. Griffeath. *Contact Process in several Dimentions.* Z. fur Wahr. 59, p. 539-552, 1982.

[11] S.N. Ethier e T.G. Kurtz. *Markov Process: characterization and convergence.* Wiley, New York, 1985.

[12] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol I, 3ª ed. Wiley, New York, 1968.

[13] D. Griffeath. *Additive and Cancellative Interacting Particle Systems.* Lecture Notes in Mathematics 724, Springer Verlag, New York, 1979.

[14] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems.* Spring-Verlag, New York, 1985.

[15] T.S. Mountford. *The Ergodicity of a Class of Reversible Reaction-Diffusion Processes.* Probability Theory and Related Fields 92, p. 259-274, 1992.

[16] R.H. Schonmann. *Notas de aula do Curso de Percolação.* 1º semestre, 1989.

[17] R.L. Tweedie. *Criteria for classifying general Markov Chains.* Advanced Applied Probability 8, p. 737-771, 1976.