Coincidência de distribuições através de uma transformação de De Finetti

Luís Gustavo Esteves

Dissertação apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de
Mestre em Estatística

Área de concentração: Probabilidade
Orientador: Prof. Dr. Sérgio Wechsler

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

- São Paulo, Novembro de 1997 -

Este exemplar corresponde à redação final

da dissertação devidamente corrigida e

defendida por Luís Gustavo Esteves

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 13 de Novembro.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Sérgio Wechsler (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. José Galvão Leite - IME - USP
- Prof. Dr. Júlio Michael Stern - IME - USP

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer a minha família por todo carinho e atenção que teve comigo durante estes dois anos em que me dediquei ao programa de mestrado. Em especial, agradeço aos meus pais que, sabiamente, doutrinaram que "somente no dicionário o sucesso precede o trabalho". Qualquer desvirtuação deste ensinamento que cometi é de minha inteira responsabilidade.

Agradeço aos vários colegas da faculdade que, neste período, compartilharam, com muito companheirismo, tanto os momentos de alegria como aqueles de maior dificuldade. Incluo aqui os "velhos" amigos que me acompanham desde os tempos de graduação (e que tempos!) e também aqueles que, vindos deste Brasil afora e de países "hermanos", tive a grande sorte de conhecer.

Agradeço ao Corinthianíssimo Professor Galvão (este sim sabe das coisas) pela ajuda fundamental que deu para a compreensão de diversos resultados que aparecem no trabalho, além, é claro, pelas boas conversas sobre o Timão . Agradeço também aos professores Adilson e Fábio que, desde a época de iniciação científica, me incentivaram sobremaneira para que eu prosseguisse viagem. Deixo aqui meu muito obrigado ainda aos professores Augusto Reynol, Lúcia e Vladimir pelo apoio em vários momentos.

Por fim, um agradecimento especial ao "chefe", Professor Sérgio, pela amizade, pela paciência e dedicação durante o trabalho de orientação e pelas discussões , em altíssimo nível, sobre a alvi-negritude das coisas deste mundo.

Abstract

It is always possible to construct a real function ϕ, given two random variables X and Y with continuous distribution functions F and G, respectively, in such a way that $\phi(X)$ and $\phi(Y)$, also random variables, have both the same distribution function, say H.

Based on this result, it is introduced an alternative method aiming to somehow characterize the "opinion" of a group of experts about a continuous random quantity of interest, the **Fields of coincidence of opinions**. A Field of coincidence of opinions is a finite union of intervals where the opinions of the members of the group coincide with respect to that quantity of interest.

Resumo

Sempre é possível construir uma função real ϕ, dadas duas variáveis aleatórias X e Y com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente, de modo que as novas variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuam, ambas, uma mesma função de distribuição , digamos H.

A partir deste resultado, é apresentado um método alternativo visando de alguma forma caracterizar a "opinião " de um grupo de especialistas a respeito de uma quantidade aleatória contínua de interesse denominado **Campos de coincidência de opiniões** . Um Campo de coincidência de opiniões é uma união finita de intervalos reais onde as opiniões dos membros do grupo coincidem a respeito da quantidade de interesse em questão .

Sumário

Introdução **1**

1 A Transformação de De Finetti **3**

1.1 Introdução 3

1.2 Resultado Principal 9

1.2.1 Construção da função φ 9

1.2.2 Mensurabilidade de φ 23

1.2.3 Determinação da distribuição de φ 25

1.3 Interpretação do Resultado 27

Apêndice **32**

Conclusão **37**

Referências Bibliográficas **38**

Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar de modo detalhado o interessante resultado acerca de transformações de variáveis aleatórias contínuas demonstrado por De Finetti em 1953, bem como exibir uma interpretação deste resultado dentro da problemática existente em teoria de decisão coletiva.

A exposição do problema é feita quase que inteiramente em um único capítulo, a menos de alguns lemas auxiliares cujas demonstrações figuram no Apêndice. Este capítulo único é dividido em três seções .

Na seção 1, introduzimos o problema abordado por De Finetti em seu artigo de 1953, através da exposição de um outro teorema sobre transformações de variáveis aleatórias muito conhecido na literatura, a saber, que dadas uma variável aleatória real X com função de distribuição contínua F e uma outra função de distribuição H qualquer, existe uma transformação real f da variável aleatória X tal que a função de distribuição da transformada $Z = f(X)$ seja H.

Este teorema e os exemplos de sua aplicação direta apresentados no texto sugerem a seguinte questão : dadas duas variáveis aleatórias X e Y com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente, é possível obter uma única função real ϕ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuam, ambas, função de distribuição H?

A resposta - afirmativa - a esta pergunta é dada por De Finetti em seu artigo de 1953, onde é exibida a função real ϕ que satisfaz as condições exigidas na questão acima. Nosso alvo na seção 2 é demonstrar, de forma mais detalhada que no trabalho original de De Finetti, o teorema da existência de tal função real ϕ. Para tanto, dividimos a seção 2 em três subseções .

Na primeira subseção , construimos uma função real φ, que figura na expressão de ϕ, através de algumas propriedades de funções de distribuição contínuas, apresen-

tadas sob a forma de proposições . Em seguida, verificamos a mensurabilidade de φ (segunda subseção) e, por fim, determinamos, numa última subseção , as funções de distribuição das variáveis $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$, encerrando a demonstração do teorema proposto por De Finetti.

São destacadas ainda na seção 2 algumas características da função φ, e também das variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$, e enunciamos a extensão do teorema para o caso em que X e Y são vetores aleatórios de dimensão $n \in I\!N$.

Por fim, na seção 3, exibimos uma interpretação do resultado demonstrado na seção 2. O enfoque mais interessante deste resultado, segundo De Finetti, corresponde ao caso em que as variáveis aleatórias X e Y são relacionadas com uma única quantidade de interesse, isto é, em que F e G são as opiniões de dois indivíduos acerca desta quantidade de interesse, em uma situação em que um grupo de pessoas deve tomar uma decisão coletivamente.

Dentro deste contexto, podemos destacar o seguinte fato no processo de construção da função real φ (e das variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$): é possível construir uma união finita de intervalos reais, a qual De Finetti denominou **Campos de coincidência de opiniões** , onde as opiniões de ambos os indivíduos coincidem com relação a quantidade de interesse em questão .

Este fato, segundo De Finetti, acena uma possibilidade de tentar caracterizar a "opinião conjunta" de um grupo de pessoas, uma vez que algumas características dos Campos de coincidência de opiniões , que são listadas naquela seção , são consideradas requisitos importantes na descrição da "opinião " de um grupo de pessoas.

Dentre estas propriedades, podemos destacar que um campo de coincidência de opiniões pode ser visto como uma atribuição genuína de probabilidade, diferentemente do que ocorre com os procedimentos usuais de mistura de probabilidades. Deste modo, podemos verificar que as opiniões individuais são preservadas na construção dos campos de coincidência.

Finalizando a seção 3, alguns aspectos negativos dos Campos de coincidência de opiniões são considerados e várias questões sobre a natureza de tais campos são levantadas.

Capítulo 1

A Transformação de De Finetti

1.1 Introdução

Como mencionamos anteriormente, o principal objetivo deste trabalho é demonstrar o interessante resultado acerca de transformações de variáveis aleatórias contínuas apresentado por De Finetti em 1953. Tendo em mente este objetivo, introduzimos nesta seção o problema abordado por De Finetti em seu artigo de 1953, por intermédio da exposição de um outro teorema sobre transformações de variáveis aleatórias muito conhecido na literatura e de exemplos de sua aplicação direta.

Definição 1.1 *Seja X uma variável aleatória real definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A função de distribuição da variável aleatória X, a qual representaremos por F, é definida por*

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que a definição acima difere um pouco da definição usual de função de distribuição . Justificamos a opção por esta definição pelo fato de ter De Finetti utilizado esta convenção em seu artigo; deste modo, estamos nos mantendo fiéis à notação do texto original. Destacamos que, com esta definição , uma função de distribuição torna-se contínua à esquerda, ao invés de contínua à direita.

Definição 1.2 *Seja F uma função de distribuição contínua. Definimos, $\forall y \in (0,1)$, a seguinte função F^{-1} ("inversa"):*

$$\begin{aligned} F^{-1} \ : \ (0,1) &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\} \end{aligned}$$

Notemos que $F^{-1}(y) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}$ está bem definida, $\forall y \in (0,1)$. Tomemos $y \in (0,1)$ qualquer. Como $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e F é contínua, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0) < y$. Assim, $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}$ é não -vazio. Por outro lado, como $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_1) > y$, pois F é não -decrescente. Logo, x_1 é um limitante superior de $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}$. Assim, este conjunto admite supremo, $\forall y \in (0,1)$. Observemos que quando F é estritamente crescente, F^{-1} corresponde à função inversa usual de F.

Lema 1.1 *Sejam F uma função de distribuição e F^{-1} definida conforme a definição 1.2. Então , $\forall y \in (0,1)$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, vale*

$$F^{-1}(y) < t \quad \Leftrightarrow \quad y < F(t)$$

Prova: Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ uma sequência não -decrescente em $x_n \in \{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\}$, com $x_n \uparrow F^{-1}(y)$. Como F é contínua à esquerda, temos $F(x_n) \uparrow F(F^{-1}(y))$. Como $F(x_n) \leq y$, $\forall n \geq 1$, resulta $F(F^{-1}(y)) \leq y$. A partir deste fato, provaremos as duas negações do lema, isto é, provaremos que

$$F^{-1}(y) \geq t \quad \Leftrightarrow \quad y \geq F(t)$$

$(\Rightarrow)$ $F^{-1}(y) \geq t \Rightarrow F(F^{-1}(y)) \geq F(t)$, pois F é não -decrescente. Mas, como $F(F^{-1}(y)) \leq y$, segue que $y \geq F(t)$.

$(\Leftarrow)$ $y \geq F(t) \Rightarrow t \in \{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\} \Rightarrow t \leq F^{-1}(y)$.

Lema 1.2 *Sejam F uma função de distribuição contínua e F^{-1} definida como na definição 1.2. Então $F(F^{-1}(y)) = y$, $\forall y \in (0,1)$.*

Prova: Tomemos $y \in (0,1)$. Seja $A_y = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = y\}$. Como $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ e F é contínua, $A_y \neq \emptyset$. Se A_y possuir apenas um elemento, digamos x_0 , então $F(F^{-1}(y)) = F(x_0) = y$. Se A_y possuir mais que um elemento,

então , sendo F não -decrescente, A_y será da forma $A_y = [x_1, x_2]$, para x_1,$x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Em consequência, $F(F^{-1}(y)) = F(x_2) = y$. Em qualquer um dos dois casos, $F(F^{-1}(y)) = y$.

Enunciamos agora o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Consideremos uma variável aleatória real X com função de distribuição contínua F. Seja H uma outra função de distribuição contínua qualquer. Então , existe uma transformação real f da variável aleatória X tal que a função de distribuição da transformada $Z = f(X)$ seja H.*

Prova: Definindo-se, $\forall y \in (0,1)$, $H^{-1}(y)$ de modo análogo à definição de $F^{-1}(y)$, basta estabelecermos $Z = H^{-1}(F(X))$ e verificarmos que esta nova variável aleatória possui função de distribuição H (como F é contínua, $F(X) \in (0,1)$ quase certamente). Deste modo, para $z \in \mathbb{R}$, temos

$$P(Z < z) = P(H^{-1}(F(X)) < z) = P(F(X) < H(z)) = P(F(X) \leq H(z)) \ ,$$

onde as duas últimas igualdades decorrem do lema 1.1 e da continuidade da F, respectivamente. Mas, pelo lema 1.1 e continuidade da distribuição de X, temos
1.2

$$P(F(X) \leq H(z)) = P(X \leq F^{-1}(H(z))) = P(X < F^{-1}(H(z))) =$$

$$= F(F^{-1}(H(z))) = H(z) \ ,$$

onde a última igualdade decorre do lema 1.2.

Observemos que o teorema 1.1 continua válido sem a suposição de continuidade da função de distribuição H. Destacamos ainda que as demonstrações dos lemas 1.1 e 1.2 e do teorema 1.1 apresentadas aqui são adaptações das provas feitas em Roussas [9].

A título de ilustração do resultado acima, consideremos os seguintes exemplos.

Exemplo 1.1 *Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro α. Vamos obter, a partir de X, uma variável $Z = f(X)$ com distribuição exponencial β.*

Para obtermos a transformação desejada, vamos utilizar o teorema acima, onde

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad \text{e} \quad H(x) = 1 - e^{-\beta x} \ , \ x \geq 0 \ ;$$

Obtendo a função inversa de H, H^{-1}, temos: $H^{-1}(y) = -\frac{1}{\beta}\log(1-y), \forall y \in (0,1)$. Logo,

$$Z = H^{-1}(F(X)) = -\frac{1}{\beta}\log(1 - F(X)) = -\frac{1}{\beta}\log e^{-\alpha X} = \frac{\alpha}{\beta}X$$

Deste modo, $Z = \frac{\alpha}{\beta}X$ possui distribuição exponencial de parâmetro β.

Exemplo 1.2 *Seja X uma variável aleatória com distribuição logística, isto é, cuja função de distribuição é dada por:*

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \ , \ x \in I\!R$$

Vamos determinar a transformada $Z = f(X)$ que possui distribuição exponencial de parâmetro α.

Fazendo uso do teorema 1.1, temos:

$$Z = H^{-1}(F(X)) = -\frac{1}{\alpha}\log(1 - F(X)) = -\frac{1}{\alpha}\log(1 - \frac{e^X}{1+e^X}) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\log\frac{1}{1+e^X} = \log\{1+e^X\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

Logo, $Z = \log\{1+e^X\}^{\frac{1}{\alpha}}$ possui distribuição exponencial de parâmetro α.

Do teorema demonstrado acima decorrem os seguintes dois corolários:

Corolário 1.1 *(Transformação Integral de Probabilidade)*
Se X é uma variável aleatória com função de distribuição contínua F, então a variável aleatória $F(X)$ possui distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

Prova: Basta aplicarmos o teorema 1.1, tomando H como sendo a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme em $(0,1)$.

Corolário 1.2 *Sejam U uma variável aleatória com distribuição uniforme sobre $(0,1)$ e H uma função de distribuição contínua. Nestas condições , $H^{-1}(U)$ é uma variável aleatória com função de distribuição H.*

Prova: $H^{-1}(U)$ possui a mesma distribuição que $H^{-1}(F(X))$, que, pelo teorema 1.1, possui função de distribuição H.

Destacamos que o resultado do corolário 1.2 pode ser estendido para o caso em que H não é uma função de distribuição contínua, diferentemente do corolário 1.1, cuja validade é restrita às funções de distribuição F contínuas.

Observemos que o resultado do corolário 1.2 é de grande importância para técnicas de simulação uma vez que fundamenta o Método da Transformação Inversa (Ross [8]). Este método permite gerar pseudo-observações de qualquer variável aleatória cuja função de distribuição é analiticamente inversível. Por fim, observamos que o título entre parênteses do corolário 1.1 é tradicional na literatura (ver, por exemplo, Roussas [9] e Thomasian [10]).

Retomemos agora a situação do exemplo 1.1, onde obtivemos, a partir da variável aleatória X com distribuição exponencial de parâmetro α, uma variável $Z = f(X)$ com distribuição exponencial β. Se considerarmos uma terceira variável aleatória contínua Y com função de distribuição G, diferente da função de distribuição de X (a qual denominamos F), podemos construir, a partir de Y, uma variável aleatória $W = g(Y)$ com função de distribuição H (isto é, de modo que W possua distribuição exponencial β). Para isso, basta definirmos $W = H^{-1}(G(Y))$.

No entanto, ao analisarmos as transformações f e g citadas acima, verificamos que estas funções não são necessariamente idênticas. Em outras palavras, para obtermos uma variável aleatória com uma dada função de distribuição H em duas situações distintas (numa, a partir de X e, noutra, a partir de Y), precisamos aplicar transformações diferentes em cada um destes casos.

Para ilustrar esta afirmação , consideremos a situação a seguir.

Exemplo 1.3 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição exponencial de parâmetros α e β, respectivamente, com $\alpha \neq \beta$. Suas funções de distribuição são , portanto,*

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad , x \geq 0 \qquad e \qquad G(y) = 1 - e^{-\beta y} \quad , \; y \geq 0 \; .$$

Consideremos agora a seguinte função de distribuição

$$H(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 0 \\ x & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & se\ x \geq 1 \end{cases},$$

isto é, H é a função de distribuição de uma variável aleatória uniforme sobre o intervalo $(0, 1)$.

Pelo teorema 1.1, a variável $Z = f(X) = H^{-1}(F(X)) = F(X) = 1 - e^{-\alpha X}$ possui distribuição uniforme em $(0, 1)$. No entanto, $f(Y) = H^{-1}(F(Y)) = 1 - e^{-\alpha Y}$ possui distribuição beta com parâmetros 1 e $\frac{\beta}{\alpha}$. Logo, $H^{-1}(F(Y))$ não possui função de distribuição H. Analogamente, a variável $W = g(Y) = H^{-1}(G(Y))$ possui distribuição uniforme em $(0, 1)$, ao passo que $H^{-1}(G(X))$, não (mais precisamente, $H^{-1}(G(X))$ possui distribuição beta com parâmetros 1 e $\frac{\alpha}{\beta}$). Deste modo, as transformações aplicadas às variáveis X e Y com o intuito de obter variáveis uniformemente distribuídas em $(0, 1)$, a saber, f e g, são distintas.

Temos, portanto, a seguinte situação : dadas duas variáveis aleatórias contínuas quaisquer X e Y, é sempre possível, pelo teorema 1.1, construir duas novas variáveis aleatórias $Z = f(X)$ e $W = g(Y)$, ambas possuindo uma certa função de distribuição H. No entanto, de um modo geral, f não é igual a g. Dentro deste contexto, uma questão é colocada: é possível obter uma função real ϕ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuam, ambas, função de distribuição H?

A resposta - afirmativa - a esta pergunta é dada por De Finetti em seu artigo de 1953. Neste artigo, De Finetti exibe uma função real ϕ que satisfaz as condições exigidas na questão acima e apresenta vários passos da construção das variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$, bem como da derivação de suas respectivas funções de distribuição .

Nas próximas seções deste capítulo, vamos apresentar, de forma mais detalhada que no trabalho original de De Finetti, o teorema da existência de tal função real ϕ, bem como a sua demonstração , além de citar uma interpretação deste resultado.

1.2 Resultado Principal

Nesta seção , enunciamos e demonstramos o teorema que garante, a partir de duas variáveis aleatórias contínuas quaisquer X e Y, a existência de uma função real ϕ que possibilita a coincidência das distribuições das duas novas variáveis $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ com qualquer distribuição dada.

Com o intuito de facilitar a compreensão do resultado a ser apresentado, organizamos esta seção do seguinte modo: inicialmente, estabelecemos o teorema citado no parágrafo anterior, bem como a argumentação básica de sua demonstração (Roteiro da prova). Em seguida, numa primeira subseção , construímos uma função real φ que figura na demonstração deste teorema principal. Feito isso, definimos as variáveis $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ e dedicamos as subseções 1.2.2 e 1.2.3, respectivamente, à verificação de sua mensurabilidade e à determinação de suas funções de distribuição .

Iniciemos, então , enunciando o teorema:

Teorema 1.2 *(Bruno de Finetti)*
Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente. Seja H uma função de distribuição qualquer. Existe uma função real ϕ tal que as variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuem, ambas, a mesma função de distribuição H.

Roteiro da prova: Basta provarmos que existe uma função real φ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ possuem distribuição comum uniforme sobre o intervalo (0,1), pois, então, tomando $\phi = H^{-1} \circ \varphi$, concluiremos - pelo corolário 1.2 - que $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ possuem, ambas, função de distribuição H. Desta forma, procederemos à construção das variáveis aleatórias uniformemente distribuídas $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$, sem perda de generalidade.

1.2.1 Construção da função φ

No processo de construção da função real φ mencionada acima, utilizaremos algumas propriedades de funções de distribuição contínuas que destacamos a seguir. Estas propriedades serão apresentadas sob a forma de proposições , com as correspondentes demonstrações . Estabelecidos estes resultados, exibiremos a expressão da função φ.

Inicialmente, apresentamos algumas definições e convenções que serão utilizadas por todo este capítulo.

Para uma variável aleatória X com função de distribuição contínua F, representaremos por M_X o conjunto das medianas de X, isto é, $M_X = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = \frac{1}{2}\}$. O ínfimo e o supremo deste conjunto serão representados, respectivamente, por $\underline{m}_X$ e $\overline{m}_X$. Este conjunto é não -vazio e limitado, pois F é uma função (de distribuição) contínua.

Definimos, de um modo mais geral, para $\alpha \in (0,1]$, o conjunto $P^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = \alpha\}$. Para todo $\alpha \in (0,1)$, este conjunto é, novamente, não -vazio e limitado (temos, portanto, $P^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = M_X$). Além disso, $P^{-1}(\{\alpha\})$ é fechado, pois é a imagem inversa do conjunto fechado $\{\alpha\}$ pela função contínua F. Observemos que, como F é contínua, $F^{-1}(\alpha) = \sup P^{-1}(\{\alpha\})$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

Definimos também o conjunto $\overline{C}_X$ por

$$\overline{C}_X = \{(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : F(b) - F(a) = \frac{1}{2}\} \ ,$$

onde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Notemos que $\overline{C}_X$ é não -vazio, pois tomando-se um par ordenado formado por um elemento de $P^{-1}(\{\frac{1}{4}\})$ na primeira coordenada e um elemento de $P^{-1}(\{\frac{3}{4}\})$ na segunda coordenada (isto é, tomando-se quartis de primeira e terceira ordem de F), este par ordenado pertencerá a $\overline{C}_X$.

Destacamos ainda que, como a cada ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$, com $x < y$, corresponde um único intervalo $(x,y]$ da reta, $\overline{C}_X$ pode ser visto como o conjunto de todos os intervalos de números reais onde a probabilidade de X assumir valores no intervalo seja $\frac{1}{2}$.

Por fim, devemos citar que, num abuso de notação , estamos admitindo a possibilidade $a = -\infty$. Neste caso, $(-\infty, \underline{m}_X)$, por exemplo, é também um elemento de $\overline{C}_X$. A mesma observação vale para o caso $b = +\infty$.

Lema 1.3 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente. Seja $C_X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : F(b) - F(a) = \frac{1}{2}\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. Se $M_X \cap M_Y = \emptyset$, então existem intervalos $(a_1, b_1], (a_2, b_2]$, ambos em C_X,*

tais que $G(b_1) - G(a_1) < \frac{1}{2}$ *e* $G(b_2) - G(a_2) > \frac{1}{2}$.

Lema 1.4 *Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. O conjunto $C_X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : F(b) - F(a) = \frac{1}{2}\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$ é conexo.*

As demonstrações dos dois lemas acima estão apresentadas no Apêndice, uma vez que exibi-las aqui desviaria a leitura do curso natural do texto.

Por fim, estabelecemos a seguinte proposição :

Proposição 1.1 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente. Existe um intervalo $I_1 = (a,b]$, com $-\infty \leq a < b < +\infty$, que satisfaz*

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$$

Prova: Duas situações necessitam ser consideradas:

(1) $M_X \bigcap M_Y \neq \emptyset$, isto é, F e G possuem ao menos uma mediana comum: Neste caso, a conclusão é imediata. Basta tomarmos um elemento de $M_X \bigcap M_Y$, digamos m_0, e considerarmos o intervalo $(-\infty, m_0]$, pois

$$F(m_0) - F(-\infty) = G(m_0) - G(-\infty) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(2) $M_X \bigcap M_Y = \emptyset$, isto é, F e G não possuem mediana comum. Aqui, provaremos que existe um elemento (a,b) de C_X (como definido no lema 1.3) tal que também $G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$. Para tanto, definimos a função $D : C_X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x,y) = G(y) - G(x).$$

Afirmamos que D é contínua em seu domínio C_X. De fato, fixemos $(x,y) \in C_X$. Para toda sequência $\{(x_n, y_n) : n \geq 1\}$ de pontos de C_X que converge para (x,y), temos

$$x_n \to x \quad \text{e} \quad y_n \to y.$$

Mas, como G é contínua em $\mathbb{R}$, temos

$$G(x_n) \to G(x) \text{ e } G(y_n) \to G(y) \ ,$$

de modo que

$$D(x_n, y_n) = G(y_n) - G(x_n) \to G(y) - G(x) = D(x, y) \ ,$$

sendo D, portanto, contínua em C_X.

Por outro lado, pelo lema 1.4, o conjunto C_X é conexo e sendo D contínua neste conjunto, resulta que a imagem de D é também um conjunto conexo e, em particular neste caso, um intervalo real (Lima [5]). Mas, pelo lema 1.3, $\exists\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C_X$ tais que $D(a_1, b_1) < \frac{1}{2}$ e $D(a_2, b_2) > \frac{1}{2}$. Logo, a imagem de D é um intervalo real que contém um valor menor que $1/2$ e outro maior que $1/2$. Assim, existe $(a, b) \in C_X$ tal que

$$D(a, b) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2} = F(b) - F(a) \ ,$$

uma vez que $(a, b) \in C_X$.

Devemos destacar que em situações onde há mais de um intervalo satisfazendo a proposição 1.1, representaremos sempre por I_1 o intervalo com menor ínfimo dentre os que satisfazem esta proposição , para evitar ambiguidades (aqui, estamos admitindo, num abuso de notação , $-\infty$ como sendo o ínfimo de um conjunto ilimitado inferiormente). Feita esta escolha e havendo ainda mais de um intervalo satisfazendo a proposição 1.1, I_1 representará o intervalo com menor supremo. Além desta convenção , faremos também o intervalo I_1 sempre fechado à direita e aberto à esquerda e representaremos por I_0 o complementar de I_1 em relação a $\mathbb{R}$.

A título de ilustração da proposição 1.1, apresentamos alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas X e Y e correspondentes intervalos $(a, b]$ de probabilidade comum $\frac{1}{2}$.

Exemplo 1.4 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuições uniformes sobre os intervalos $(1, 2)$ e $(2, 3)$, respectivamente. Assim:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 1 \\ x - 1 & se\ 1 \leq x < 2 \\ 1 & se\ x \geq 2 \end{cases} \quad e \quad G(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < 2 \\ x - 2 & se\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

É fácil ver que o intervalo $I_1 = (a, b]$ neste caso é o intervalo $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, pois

$$F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \text{ e } G(\frac{5}{2}) - G(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$$

Convém destacar que, neste exemplo, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ é o único intervalo real satisfazendo a proposição 1.1. Segundo as convenções acima, $I_0 = (-\infty, \frac{3}{2}] \bigcup (\frac{5}{2}, +\infty)$

Exemplo 1.5 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuições normais com média comum 0 e variâncias 1 e 4, respectivamente.*

Como ambas as variáveis são simétricas em torno do ponto 0, temos que $0 \in M_X \bigcap M_Y$. Deste modo, o intervalo $(-\infty, 0]$ satisfaz a proposição 1.1, pois

$$F(0) - F(-\infty) = \frac{1}{2} \text{ e } G(0) - G(-\infty) = \frac{1}{2}$$

Contudo, diferentemente da situação do exemplo 1.4, neste caso não é único o intervalo real que possui probabilidade $\frac{1}{2}$ sob ambas as distribuições . Basta observarmos que o intervalo $(0, +\infty)$ também satisfaz tal propriedade. No entanto, não diremos que este intervalo satisfaz a proposição 1.1, pois teríamos $b = +\infty$. Neste exemplo, $I_0 = (0, +\infty)$.

Exemplo 1.6 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuições Normal (0,1) e Cauchy (1,1), respectivamente.*

Neste caso, temos $I_1 = (-0,066; 1,938]$, pois

$$F(1,938) - F(-0,066) = 0,9736 - 0,4736 = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$G(1,938) - G(-0,066) = 0,7398 - 0,2398 = \frac{1}{2}$$

Exibimos, por fim, um exemplo no qual existem infinitos intervalos de números reais satisfazendo a proposição 1.1.

Exemplo 1.7 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição F e G dadas, respectivamente, por:*

$$F(x) = \frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x) \quad e \quad G(x) = \frac{1}{2}G_1(x) + \frac{1}{2}G_2(x) \text{ , onde}$$

F_1, F_2, G_1 e G_2 são as funções de distribuição das variáveis aleatórias uniformes sobre $(-1,0)$, $(3,4)$, $(0,1)$ e $(2,3)$, respectivamente.

Qualquer intervalo da forma $(a,b]$, com $a \in (-\infty,-1]$ e $b \in [1,2]$ satisfaz a proposição 1.1, pois

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Aqui, segundo as convenções feitas anteriormente, $I_1 = (-\infty, 1]$.

Prosseguimos com a seguinte nova propriedade de funções de distribuição contínuas.

Proposição 1.2 *Suponhamos as condições da proposição 1.1 e os conjuntos I_0 e I_1 dela obtidos. Então:*

(i) existe um conjunto $I_{01} \subset I_0$ tal que $P(X \in I_{01}) = P(Y \in I_{01}) = \frac{1}{4}$ e

(ii) existe um conjunto $I_{11} \subset I_1$ tal que $P(X \in I_{11}) = P(Y \in I_{11}) = \frac{1}{4}$

Prova:

(i) Seja $I_1 = (a,b]$. Há duas situações a serem consideradas:

(1) Suponhamos $-\infty < a < b < +\infty$. Pela proposição 1.1, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \frac{1}{2}$. Definamos a seguinte função de distribuição $\overline{F}$ a partir de F:

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 2F(x) & \text{se } x < a \\ 2\{F(x+b-a) - \frac{1}{2}\} & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Analogamente, definamos $\overline{G}$ por:

$$\overline{G}(x) = \begin{cases} 2G(x) & \text{se } x < a \\ 2\{G(x+b-a) - \frac{1}{2}\} & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Notemos que a transformação $\overline{F}$ ($\overline{G}$) é definida de tal forma que sua representação gráfica é obtida, da representação gráfica de F (G), suprimindo-se os pontos $(x, F(x))$ $((y, G(y)))$ correspondentes aos valores de x (y) do intervalo $(a, b]$ e, em seguida, unindo-se (justapondo-se) as curvas remanescentes através da devida translação (para a esquerda) dos pontos $(x, F(x))$ $((y, G(y)))$ relativos aos valores de x (y) maiores que b. Deste modo, temos (fazendo-se a adequada normalização), por construção , que $\overline{F}$ e $\overline{G}$ são também funções de distribuição contínuas.

Pela proposição 1.1, $\exists$ $(a_0, b_0] \subset I\!R$ tal que $\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2}$. Analisemos as possibilidades:

• $b_0 < a$. Neste caso, $\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = 2F(b_0) - 2F(a_0)$ e $\overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = 2G(b_0) - 2G(a_0)$. Assim,

$$\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2F(b_0) - 2F(a_0) = 2G(b_0) - 2G(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b_0) - F(a_0) = G(b_0) - G(a_0) = \frac{1}{4}$$

Pela continuidade das funções F e G, podemos escrever ainda que

$$P(X \in (a_0, b_0]) = P(Y \in (a_0, b_0]) = \frac{1}{4}$$

Basta então tomarmos $I_{01} = (a_0, b_0]$.

• $a_0 < a \leq b_0$. Nesta situação , $\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = 2\{F(b_0 + b - a) - \frac{1}{2}\} - 2F(a_0)$ e $\overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = 2\{G(b_0 + b - a) - \frac{1}{2}\} - 2G(a_0)$. Logo

$$\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\{F(b_0 + b - a) - \frac{1}{2}\} - 2F(a_0) = 2\{G(b_0 + b - a) - \frac{1}{2}\} - 2G(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b_0+b-a) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{F(b)-F(a)} - F(a_0) = G(b_0+b-a) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{G(b)-G(a)} - G(a_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b_0+b-a)-\{F(b)-F(a)\}-F(a_0) = G(b_0+b-a)-\{G(b)-G(a)\}-G(a_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F(b_0+b-a)-F(b)\}+\{F(a)-F(a_0)\} = \{G(b_0+b-a)-G(b)\}+\{G(a)-G(a_0)\} = \frac{1}{4}$$

Como F e G são contínuas, vale que

$$P(X \in (a_0, a]) + P(X \in (b, b_0+b-a]) = P(Y \in (a_0, a]) + P(Y \in (b, b_0+b-a]) = \frac{1}{4}$$

Portanto,

$$P(X \in (a_0, a] \bigcup (b, b_0+b-a]) = P(Y \in (a_0, a] \bigcup (b, b_0+b-a]) = \frac{1}{4}$$

e, consequentemente, temos $I_{01} = (a_0, a] \bigcup (b, b_0+b-a)$

• $a \leq a_0$. Aqui, $\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = 2\{F(b_0+b-a) - \frac{1}{2}\} - 2\{F(a_0+b-a) - \frac{1}{2}\}$ e $\overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = 2\{G(b_0+b-a) - \frac{1}{2}\} - 2\{G(a_0+b-a) - \frac{1}{2}\}$. Assim,

$$\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\{F(b_0+b-a)-\frac{1}{2}\}-2\{F(a_0+b-a)-\frac{1}{2}\} = 2\{G(b_0+b-a)-\frac{1}{2}\}-2\{G(a_0+b-a)-\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F(b_0+b-a)-\frac{1}{2}\}-\{F(a_0+b-a)-\frac{1}{2}\} = \{G(b_0+b-a)-\frac{1}{2}\}-\{G(a_0+b-a)-\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b_0 + b - a) - F(a_0 + b - a) = G(b_0 + b - a) - G(a_0 + b - a) = \frac{1}{4}$$

Novamente pela continuidade das funções F e G, resulta que

$$P(X \in (a_0 + b - a, b_0 + b - a]) = P(Y \in (a_0 + b - a, b_0 + b - a]) = \frac{1}{4}$$

Neste caso, $I_{01} = (a_0 + b - a, b_0 + b - a]$.

Concluímos então que existe um intervalo (ou união finita de intervalos) $I_{01} \subset I_0$ tal que $P(X \in I_{01}) = P(Y \in I_{01}) = \frac{1}{4}$.

(2) Supondo $a = -\infty$, temos $I_1 = (-\infty, 0]$. Nesta situação , definimos

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \underline{m}_X \\ 2F(x) - 1 & \text{se } x > \underline{m}_X \end{cases}$$

Da mesma forma, definimos $\overline{G}$. Como em (1), $\overline{F}$ e $\overline{G}$ definidas aqui são também funções de distribuição contínuas. Logo, pela proposição 1.1, existe $(a_0, b_0) \subset I\!R$, com $\underline{m}_X < a_0 < b_0$, tal que $\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$\overline{F}(b_0) - \overline{F}(a_0) = \overline{G}(b_0) - \overline{G}(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{2F(b_0) - 1\} - \{2F(a_0) - 1\} = \{2G(b_0) - 1\} - \{2G(a_0) - 1\} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2F(b_0) - 2F(a_0) = 2G(b_0) - 2G(a_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(b_0) - F(a_0) = G(b_0) - G(a_0) = \frac{1}{4}$$

Denotando por I_{01} o intervalo $(a_0, b_0]$, o resultado em (i) fica provado.

(ii) A demonstração da existência do conjunto $I_{11} \subset I_1$ tal que $P(X \in I_{11}) = P(Y \in I_{11}) = \frac{1}{4}$ é análoga à demonstração da parte (i) desta proposição . Basta considerarmos as funções de distribuição

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 2(F(x) - F(a)) & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases} \quad \text{e} \quad \overline{G}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 2(G(x) - G(a)) & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

$\overline{F}$ e $\overline{G}$ definidas acima são funções de distribuição contínuas, com $\overline{F}(a) = \overline{G}(a) = 0$ e $\overline{F}(b) = \overline{G}(b) = 1$. Pela proposição 1.1, $\exists (a_1, b_1] \subset (a, b]$ tal que $\overline{F}(b_1) - \overline{F}(a_1) = \overline{G}(b_1) - \overline{G}(a_1) = \frac{1}{2}$. Segue que

$$\overline{F}(b_1) - \overline{F}(a_1) = \overline{G}(b_1) - \overline{G}(a_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\{F(b_1) - F(a)\} - 2\{F(a_1) - F(a)\} = 2\{G(b_1) - G(a)\} - 2\{G(a_1) - G(a)\} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b_1) - F(a_1) = G(b_1) - G(a_1) = \frac{1}{4}$$

Tomando $I_{11} = (a_1, b_1]$, a parte (ii) da proposição 1.2 é satisfeita.

Destacamos que o conjunto I_{11} descrito em (ii) será sempre um único intervalo real, independentemente das funções de distribuição F e G, ao passo que I_{01} será ou um intervalo real ou uma união finita de intervalos reais, dependendo das formas das funções F e G.

Analogamente ao que foi feito para o intervalo I_1, em situações em que houver mais de um intervalo real satisfazendo a proposição 1.2, parte (ii), tomaremos o intervalo com extremos "mais à esquerda" contido em I_1 como sendo I_{11}. Em I_0, denotaremos por I_{01} o conjunto satisfazendo a parte (i) da proposição 1.2 composto pelo menor número de intervalos reais. Caso existam dois ou mais conjuntos nestas condições em I_0, tomaremos aquele com menor ínfimo como sendo I_{01} (aqui, estamos admitindo $-\infty$ como sendo o ínfimo de um conjunto ilimitado inferiormente). Além disso, denotaremos por I_{10} o conjunto complementar de I_{11} em relação a I_1 e por I_{00} o complementar de I_{01} em relação a I_0.

Voltando ao exemplo 1.4 apresentado anteriormente, temos:

$$I_{01} = (-\infty, \frac{5}{4}] \bigcup (\frac{5}{2}, \frac{11}{4}] \quad , \quad I_{00} = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \bigcup (\frac{11}{4}, \infty) \quad ,$$

$$I_{11} = (\frac{7}{4}, \frac{9}{4}] \text{ e } I_{10} = (\frac{3}{2}, \frac{7}{4}] \bigcup (\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]$$

No exemplo 1.5, estes conjuntos são aproximadamente

$$I_{01} = (0,635; 2,35] \ , \ I_{00} = (0; 0,635] \bigcup (2,35; \infty) \ ,$$

$$I_{11} = (-2,35; -0,635] \text{ e } I_{10} = (-\infty; -2,35] \bigcup (-0,635; 0]$$

Destacamos que para os conjuntos obtidos através da proposição 1.2, valem as seguintes relações :

$$P(X \in I_{i_1 i_2}) = P(Y \in I_{i_1 i_2}) = \frac{1}{4} \ , \ i_1 = 0,1 \ , \ i_2 = 0,1 \text{ e}$$

$$I_{i_1} = I_{i_1,0} \bigcup I_{i_1,1} \ , \text{com } I_{i_1,0} \bigcap I_{i_1,1} = \emptyset \ , \ i_1 = 0,1.$$

Aplicando o mesmo procedimento utilizado nas demonstrações das proposições 1.1 e 1.2, podemos dividir cada um dos conjuntos I_{00}, I_{01}, I_{10} e I_{11} em dois subconjuntos disjuntos tais que ambos contenham $1/8$ tanto da distribuição de X quanto da distribuição de Y. Isto é, podemos dividir, genericamente, $I_{i_1 i_2}$, $i_1 = 0,1$, $i_2 = 0,1$, em dois subconjuntos disjuntos $I_{i_1 i_2,0}$ e $I_{i_1 i_2,1}$, tais que $P(X \in I_{i_1 i_2,0}) = P(Y \in I_{i_1 i_2,0}) = \frac{1}{8}$ e $P(X \in I_{i_1 i_2,1}) = P(Y \in I_{i_1 i_2,1}) = \frac{1}{8}$.

Como antes, estes novos conjuntos serão formados por uniões finitas de intervalos reais. Destacamos também que convenções similares às adotadas nas proposições 1.1 e 1.2 são feitas para esta última construção .

Em geral, procedendo deste modo, sucessivamente, podemos obter, $\forall n \in I\!N$, 2^n conjuntos disjuntos $I_{i_1 \ldots i_n}$, $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$, tais que

$$P(X \in I_{i_1 \ldots i_n}) = P(Y \in I_{i_1 \ldots i_n}) = (\frac{1}{2})^n \ , \ \forall (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n \text{ e}$$

$$I_{i_1 \ldots i_n} = I_{i_1 \ldots i_n,0} \bigcup I_{i_1 \ldots i_n,1} \ , \ \forall n \in I\!N$$

Uma outra característica dos conjuntos $I_{i_1 \ldots i_n}$, sobre a qual voltaremos a falar na próxima subseção , é apresentada no lema 1.5.

Lema 1.5 *Qualquer conjunto da forma $I_{i_1 \ldots i_n}$, $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$, construído segundo o procedimento que acabamos de descrever, é composto, no máximo, por $n+1$ intervalos reais.*

Uma demonstração simplificada deste lema encontra-se no Apêndice.

Estabelecidas as proposições 1.1 e 1.2, bem como a extensão destes resultados exposta logo acima, podemos exibir, enfim, a função real φ citada no início desta subseção .

Seja $\varphi : I\!R \to [0,1]$ dada por:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n \quad ,$$

onde $i_1, i_2, \ldots$ são tais que $x \in I_{i_1 \ldots i_n}$, $\forall n \geq 1$ (aqui, os conjuntos $I_{i_1 \ldots i_n}$ correspondem aos conjuntos construídos acima através das funções de distribuição F e G).

Notemos que, rigorosamente, φ é função também das funções de distribuição F e G, pois, na sua definição figuram índices $\{i_n : n \geq 1\}$ que dependem exclusivamente de F e G. No entanto, visando não sobrecarregar a notação (mas, tendo em mente este fato), vamos omitir, quase sempre, estes argumentos ao nos referirmos a função φ. Em outras palavras, optamos por escrever φ $(\varphi(x))$ ao invés de $\varphi_{F,G}$ $(\varphi_{F,G}(x))$, por simplicidade.

Analisando a expressão de φ, observamos que esta função associa, a cada número real x, o número do intervalo $[0,1]$ que tem uma representação diádica dada por $0, i_1 i_2 \ldots$, com $x \in I_{i_1 \ldots i_n}$, $\forall n \geq 1$. Uma caracterização bem detalhada de representação (ou expansão) diádica de um número real do intervalo $[0,1]$ é encontrada em Billingsley [2]. Mostramos, a seguir, que φ é, de fato, uma função real.

(a) Verifiquemos primeiro que, para cada x real, existe $y \in [0,1]$ tal que $\varphi(x) = y$. Seja $x \in I\!R$. Vamos provar, por indução , que, $\forall n \geq 1$, existe $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$ tal que $x \in I_{i_1 \ldots i_n}$.

Pela proposição 1.1, existem subconjuntos reais I_0 e I_1 tais que $\mathbb{R} = I_0 \bigcup I_1$ e $I_0 \bigcap I_1 = \emptyset$. Como $x \in \mathbb{R}$, então $x \in I_0 \bigcup I_1$. Logo, $x \in I_0$ ou $x \in I_1$ e, portanto, $\exists i_1 = 0, 1$ tal que $x \in I_{i_1}$. Suponhamos então que, para $n \in \mathbb{N}$, existe $(i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n$ tal que $x \in I_{i_1 ... i_n}$ (Hipótese de Indução). Como para todo natural n vale que

$$I_{i_1 ... i_n} = I_{i_1 ... i_n, 0} \bigcup I_{i_1 ... i_n, 1} \quad e \quad I_{i_1 ... i_n, 0} \bigcap I_{i_1 ... i_n, 1} = \emptyset$$

segue que

$$x \in I_{i_1 ... i_n} \Rightarrow x \in I_{i_1 ... i_n, 0} \bigcup I_{i_1 ... i_n, 1} \Rightarrow x \in I_{i_1 ... i_n, 0} \quad \text{ou} \quad x \in I_{i_1 ... i_n, 1}$$

Em qualquer um dos dois casos, $\exists (i_1, ..., i_n, i_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ tal que $x \in I_{i_1 ... i_n i_{n+1}}$ e a indução está verificada.

Assim, podemos associar a x a sequência de índices $i_1, i_2 ...$, tal que $x \in I_{i_1 ... i_n}$, $\forall n \geq 1$. Mas, como para uma dada sequência binária qualquer existe um número do intervalo $[0, 1]$ que tem uma representação diádica dada por esta sequência, segue que existe $y \in [0, 1]$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n = \varphi(x)$. Em outras palavras, podemos associar a sequência de índices $i_1, i_2 ...$ e, consequentemente, ao número real x, o número y do intervalo $[0, 1]$. Logo, $\forall x \in \mathbb{R}$, existe $y \in [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = y$.

(b) Provemos agora a unicidade de $y \in [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = y$. Como a cada sequência binária $i_1, i_2 ...$ podemos associar um único número real y de $[0, 1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n = y$, basta provarmos que é única a sequência de índices $i_1, i_2 ...$ tal que $x \in I_{i_1 ... i_n}$, $\forall n \geq 1$.

Tomemos duas sequências binárias $\{i_n : n \geq 1\}$ e $\{j_n : n \geq 1\}$ tais que

$$x \in I_{i_1 ... i_n} \quad \text{e} \quad x \in I_{j_1 ... j_n} \ , \ \forall n \geq 1$$

Consideremos o conjunto $C = \{k \in \mathbb{N} : i_k \neq j_k\}$. Vamos verificar que $C = \emptyset$, o que é equivalente a verificar a igualdade das duas sequências $\{i_n : n \geq 1\}$ e $\{j_n : n \geq 1\}$.

Suponhamos, por absurdo, que $C \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordem, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 = \min C$. Vejamos:

1) $k_0 \neq 1$, pois, caso contrário, teríamos $i_1 = 0$ e $j_1 = 1$ ou $i_1 = 1$ e $j_1 = 0$.

Em qualquer uma destas possibilidades, $x \in I_0$ e $x \in I_1$, o que seria absurdo pois $I_0 \bigcap I_1 = \emptyset$, por construção . Consideremos então o caso $k_0 > 1$.

2) Se $k_0 > 1$, temos, em decorrência da definição de k_0, que $i_k = j_k$, $\forall k = 1, ..., k_0 - 1$, e $j_{k_0} \neq i_{k_0}$, implicando que $j_{k_0} = 1 - i_{k_0}$, $i_{k_0} \in \{0, 1\}$. Assim, $I_{j_1 ... j_{k_0-1} j_{k_0}} = I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 1-i_{k_0}}$. Mas, por hipótese, $x \in I_{i_1 ... i_{k_0-1} i_{k_0}}$ e $x \in I_{j_1 ... j_{k_0-1} j_{k_0}}$, ou ainda, $x \in I_{i_1 ... i_{k_0-1} i_{k_0}}$ e $x \in I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 1-i_{k_0}}$. Logo, $x \in I_{i_1 ... i_{k_0-1} i_{k_0}} \bigcap I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 1-i_{k_0}}$, ou, equivalentemente, $x \in I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 0} \bigcap I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 1}$, o que é absurdo, pois $I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 0} \bigcap I_{i_1 ... i_{k_0-1}, 1} = \emptyset$ por construção . Portanto, $C \neq \emptyset$ e as sequências $\{i_n : n \geq 1\}$ e $\{j_n : n \geq 1\}$ são iguais. Assim, é único $y \in [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = y$.

De (a) e (b), concluímos que φ é, de fato, uma função real.

Embora a forma funcional de $\varphi = \varphi_{F,G}$ seja bastante complexa, tornando difícil até mesmo a elaboração de sua representação gráfica para casos em que F e G são funções de distribuição bem simples, podemos destacar algumas características desta função .

De um modo geral, φ não é uma função contínua. A título de ilustração deste fato, retomemos o exemplo 1.4 e vejamos que 3/2 é um ponto de descontinuidade de φ nesta situação . Com efeito,

$$\varphi(\frac{3}{2}) = 0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n \text{ , pois } \frac{3}{2} \in I_{00} \text{ ,}$$

onde $i_3, i_4, ...$ são tais que $\frac{3}{2} \in I_{00 i_3 ... i_n}$, $\forall n \geq 3$. Mas,

$$\sum_{n=3}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n \leq \sum_{n=3}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{4} \text{ . Logo, } \varphi(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, se tomarmos uma sequência $\{x_k : k \geq 1\}$ não -crescente, com $x_k \downarrow \frac{3}{2}$, temos que $\exists k_0 \in I\!N$ tal que $k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in I_1$, de tal forma que

$$\varphi(x_k) = 1 \times \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} i_n (\frac{1}{2})^n \geq \frac{1}{2} \text{ , para } k \geq k_0.$$

Deste modo, ou existe $\lim_{k \to +\infty} \varphi(x_k) \geq \frac{1}{2}$ (e $\lim_{k \to +\infty} \varphi(x_k) \neq \varphi(\frac{3}{2})$ quando $x_k \downarrow \frac{3}{2}$, pois $\varphi(\frac{3}{2}) \leq \frac{1}{4}$) ou este limite não existe. Logo, segue que 3/2 é ponto de descontinuidade de φ. Assim, vemos que φ , em geral, não é uma função contínua.

Uma consequência imediata da descontinuidade de φ é que, em geral, esta função também não é diferenciável (Lima [5]). Notemos ainda que φ não é inversível (basta observarmos que, no exemplo 1.4, $(-\infty, 1] \subset \varphi^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$).

Há ainda várias propriedades da função φ a serem exploradas, como, por exemplo, a existência ou não de condições sobre as funções de distribuição F e G sob as quais φ seja contínua (em caso afirmativo, um aspecto interessante a ser abordado seria a determinação de tais condições e, em caso negativo, a caracterização dos pontos de descontinuidade de φ). No entanto, não faremos aqui um estudo mais minucioso da função φ, uma vez que esta análise não corresponde ao objetivo central do presente trabalho.

1.2.2 Mensurabilidade de φ

Nesta subseção , vamos verificar que a função real $\varphi : I\!R \to [0,1]$ é $\mathcal{B}$-mensurável, onde $\mathcal{B}$ é a $\sigma-$álgebra de Borel em $I\!R$. Isto é, vamos provar que $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ são variáveis aleatórias definidas em $I\!R$. Para isto, mostraremos que $\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} \in \mathcal{B}$, $\forall t \in I\!R$.

Como a imagem de φ corresponde ao intervalo $[0,1]$, temos que $\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = \emptyset \in \mathcal{B}$, se $t \leq 0$ e $\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = I\!R \in \mathcal{B}$, se $t > 1$. Assim, a prova da mensurabilidade de φ se restringe a demonstrar a inclusão acima para $t \in (0,1]$.

Fixemos $t \in (0,1]$. Sabemos que t pode ser escrito da forma $t = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)(\frac{1}{2})^n$, onde $d_1(t), d_2(t)...$ são tais que $0, d_1(t)d_2(t)...$ é uma expansão diádica de t. Para evitarmos qualquer ambiguidade na definição de expansão diádica de um núnero real $t \in (0,1]$, consideraremos para t , aqui, a representação diádica infinita, isto é, a representação em que figuram um número infinito de $1's$. Assim, por exemplo, para $t = \frac{1}{2}$, consideraremos a expansão $0,01111...$, que possui uma infinidade de $1's$, ao invés da expansão $0,10000...$, que possui um número finito destes (notemos que sempre é possível escolher uma sequência com infinitos $1's$). Tomemos então $x_0 \in \{x \in I\!R : \varphi(x) < t\}$ e seja $\varphi(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n(\frac{1}{2})^n$. Logo:

$$x_0 \in \{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} \Leftrightarrow \varphi(x_0) < t \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} i_n(\frac{1}{2})^n < \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)(\frac{1}{2})^n$$

Como estamos considerando uma expansão diádica infinita para t , segue que a última desigualdade acima é verdadeira se e só se

$i_n = 1$ $\quad d_n = 0$

$$\exists\, n_0 \in I\!N \text{ tal que } n_0 = \inf\{n \in I\!N : i_n \neq d_n(t) \;\text{ e }\; i_n = 1 - d_n(t) = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in I\!N \text{ tal que } x_0 \in I_{d_1(t)\ldots d_{n_0-1}(t),0} \;\text{ e }\; d_{n_0}(t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in I\!N \text{ tal que } x_0 \in I_{d_1(t)\ldots d_{n_0-1}(t),1-d_{n_0}(t)} \;\text{ e }\; d_{n_0}(t) = 1$$

Definindo a sequência de conjuntos $\{A_n : n \geq 1\}$ por:

$$A_1 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } d_1(t) = 0 \\ I_0 & \text{se } d_1(t) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad A_n = \begin{cases} \emptyset & \text{se } d_n(t) = 0 \\ I_{d_1(t)\ldots d_{n-1}(t),1-d_n(t)} & \text{se } d_n(t) = 1 \end{cases}, n > 1$$

temos que

$$\exists\, n_0 \in I\!N \text{ tal que } x_0 \in I_{d_1(t)\ldots d_{n_0-1}(t),1-d_{n_0}(t)} \;\text{ e }\; d_{n_0}(t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in I\!N \text{ tal que } x_0 \in A_{n_0} \Leftrightarrow x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Assim, $x_0 \in \{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} \Leftrightarrow x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Logo,

$$\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Mas, $\forall n \in I\!N$, cada conjunto da forma $I_{i_1\ldots i_n}$ é formado por uma união de no máximo $n+1$ intervalos reais, conforme o lema 1.5. Assim, como $A_n = \emptyset$ ou A_n é da forma $I_{i_1\ldots i_n}$, $\forall n \geq 1$, segue que $A_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \geq 1$, pois ou é o conjunto vazio ou é uma união finita de elementos de $\mathcal{B}$ (em qualquer um dos dois casos, A_n é elemento de $\mathcal{B}$). Como $A_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \geq 1$, segue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ e, consequentemente, $\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} \in \mathcal{B}$, $\forall t \in (0,1]$.

Assim, temos que $\varphi(X)$ (e também $\varphi(Y)$) são, de fato, variáveis aleatórias reais. Determinemos então as distribuições de $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$.

1.2.3 Determinação da distribuição de φ

Provemos, finalmente, que $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ têm ambas distribuição uniforme no intervalo (0,1). Calculemos então $F_{\varphi(X)}(t)$, $\forall t \in I\!R$, a função de distribuição de $\varphi(X)$ pela definição .

$$F_{\varphi(X)}(t) = P(\varphi(X) < t) = P(X \in \varphi^{-1}((-\infty, t)) = P_X(\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\}) \ ,$$

onde P_X é a medida de probabilidade em $(I\!R, \mathcal{B})$ induzida pela variável aleatória X e $\varphi^{-1}(A)$ é a imagem inversa do conjunto $A \in \mathcal{B}$ pela função φ. Assim, temos:

(1) $t \leq 0 \Rightarrow \{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = \emptyset$ e, portanto, $P_X(\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\}) = P_X(\emptyset) = 0$.

(2) $t > 1 \Rightarrow \{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = I\!R$. Logo, $P_X(\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\}) = P_X(I\!R) = 1$.

(3) $0 < t \leq 1$, vale que:

$$\{x \in I\!R : \varphi(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ Deste modo,}$$

$$F_{\varphi(X)}(t) = P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Afirmamos que $\{A_n : n \geq 1\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, isto é, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Para verificarmos tal afirmação , consideremos, sem perda de generalidade, $i < j$. Se $A_i = \emptyset$ ou $A_j = \emptyset$, obviamente teremos $A_i \bigcap A_j = \emptyset$. Tomemos então índices $i, j \geq 2$ tais que $A_i \neq \emptyset$ e $A_j \neq \emptyset$ (tais indíces existem pois estamos considerando uma representação diádica infinita para t). Neste caso:

$$A_i = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t), 1-d_i(t)} \ \text{ e } \ A_j = I_{d_1(t)\ldots d_{j-1}(t), 1-d_j(t)} = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t) d_i(t)\ldots, 1-d_j(t)}$$

Mas, $A_j = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t) d_i(t)\ldots, 1-d_j(t)} \subset I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t) d_i(t)}$ e $I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t) d_i(t)} \bigcap A_i = \emptyset$, pois $A_i = I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t), 1-d_i(t)}$. Assim, vale que $A_i \bigcap A_j \subseteq A_i \bigcap I_{d_1(t)\ldots d_{i-1}(t) d_i(t)} = \emptyset$ e, consequentemente, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i < j$. Logo, os conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ são disjuntos dois a dois.

Voltando ao cálculo da função de distribuição de $\varphi(X)$, temos:

$$F_{\varphi(X)}(t) = P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(A_n)$$

Determinemos então $P_X(A_n)$, $n \in I\!N$. Se $d_n(t) = 0$, temos $A_n = \emptyset$ e, portanto, $P_X(A_n) = 0$. Caso $d_n(t) = 1$, temos $P_X(A_n) = P_X(I_{d_1(t)\ldots d_{n-1}(t),1-d_n(t)}) = (\frac{1}{2})^n$, pois, por construção , o conjunto $I_{d_1(t)\ldots d_{n-1}(t),1-d_n(t)}$ contém $(\frac{1}{2})^n$ da distribuição de X. Assim:

$$P_X(A_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_n(t) = 0 \\ (\frac{1}{2})^n & \text{se } d_n(t) = 1 \end{cases} \quad \text{, ou ainda,} \quad P_X(A_n) = (\frac{1}{2})^n d_n(t)$$

Substituindo na expressão da função de distribuição de $\varphi(X)$, temos:

$$F_{\varphi(X)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)(\frac{1}{2})^n = t \ ,$$

pois, como $0, d_1(t)d_2(t)\ldots$ corresponde a uma expansão diádica do número real t, vale que $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(t)(\frac{1}{2})^n = t$. Logo, de (1), (2) e (3), temos que

$$F_{\varphi(X)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

que é a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Logo, $\varphi(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$. Analogamente, obtemos que $\varphi(Y) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Citamos no início desta seção que a prova do teorema 1.2 consiste em verificar a existência de uma função real φ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ sejam uniformemente distribuídas em $(0,1)$. Deste modo, com a construção que apresentamos nas subseções 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3, concluímos a demonstração do teorema 1.2.

Destacamos, inicialmente, que nas hipóteses do teorema 1.2 nada é mencionado sobre os espaços de probabilidade onde X e Y são definidas, sendo feita referência apenas à estrutura das suas funções de distribuição F e G (respectivamente). Deste modo, o resultado do teorema 1.2 é válido, inclusive, para variáveis aleatórias definidas em espaços de probabilidade distintos. Notemos também que X e Y são supostas

serem variáveis aleatórias contínuas quaisquer, absolutamente contínuas (isto é, que apresentam funções densidade de probabilidade) ou não . X e Y podem ainda possuir ou não momentos bem definidos.

Em segundo lugar, ressaltamos que não é única a transformação real φ tal que as variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$ sejam uniformemente distribuídas em $(0,1)$. Por exemplo, uma outra função φ' que goza desta mesma propriedade é dada por $\varphi' = 1 - \varphi$. Mais precisamente, existem infinitas funções nestas condições (em geral, podemos considerar várias indexações para os conjuntos obtidos a partir das proposições 1.1 e 1.2 (e extensões) diferentes daquela adotada na subseção 1.2.1).

O resultado do teorema 1.2 pode ser generalizado para um número $n \in I\!N$ qualquer de variáveis aleatórias contínuas. Isto é, dadas n variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, com funções de distribuição contínuas $F_1, ..., F_n$, respectivamente, e uma função de distribuição contínua qualquer H, existe uma função real ϕ tal que $\phi(X_1) \sim ... \sim \phi(X_n)$, cada uma delas possuindo função de distribuição H.

Por fim, vale mencionar que o resultado do teorema 1.2 continua válido no caso em que X e Y são vetores aleatórios de mesma dimensão $n \in I\!N$. Assim, se $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ são vetores aleatórios com funções de distribuição conjunta contínuas $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$, respectivamente, e H uma função de distribuição unidimensional qualquer, então existe uma função real $\phi : I\!R^n \to I\!R$ tal que as variáveis aleatórias $\phi(\mathbf{X})$ e $\phi(\mathbf{Y})$ têm ambas função de distribuição H. A extensão para o caso multivariado se dá de modo similar à demonstração do teorema 1.2 na sua versão unidimensional feita aqui.

Na próxima seção , apresentamos uma interpretação do resultado que acabamos de provar.

1.3 Interpretação do Resultado

Segundo De Finetti, o enfoque mais interessante do teorema 1.2 corresponde à situação em que as variáveis aleatórias X e Y são relacionadas com uma única quantidade de interesse, ao invés de duas quantidades de interesse distintas, e F e G são as representações numéricas de incerteza (as opiniões) de dois indivíduos acerca desta única quantidade de interesse. Notemos que esta formulação é natural sob a concepção subjetivista de probabilidade.

Dentro deste contexto, em que duas pessoas expressam suas opiniões a respeito de uma certa quantidade de interesse, podemos destacar o seguinte fato no processo de construção da função real φ (e das variáveis aleatórias $\varphi(X)$ e $\varphi(Y)$): é possível construir uma união finita de intervalos reais, a qual De Finetti denominou **Campos de Coincidência de Opiniões** , onde as opiniões de ambos os indivíduos (representadas por F e G) coincidem com relação a quantidade de interesse em questão a um certo "nível de unanimidade". Em outras palavras, sempre é possível construir uma união finita de intervalos reais que contenha, $\forall\alpha \in (0,1)$, pelo menos $1-\alpha$ das distribuições de X e Y simultaneamente. Formalmente, enunciamos este fato na seguinte proposição :

Proposição 1.3 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente. Então , $\forall\alpha \in (0,1)$, existe uma união finita de intervalos reais $B = B(\alpha)$ tal que*

$$P_X(B) = P_Y(B) \geq 1-\alpha$$

Prova: Fixemos $\alpha \in (0,1)$ qualquer. Sabemos que $\exists\ n_0 = n_0(\alpha) \in I\!N$ tal que $1-(\frac{1}{2})^{n_0} \geq 1-\alpha$. Assim, basta definirmos, por exemplo, a sequência de conjuntos $\{B_n : n \geq 1\}$ por

$$\begin{aligned}
B_1 &= I_1 \\
B_2 &= I_{01} \\
B_3 &= I_{001} \\
&\vdots \\
B_n &= I_{\underbrace{0...01}_{n-1\ zero's}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e tomarmos $B = \bigcup_{n=1}^{n_0} B_n$. Deste modo, temos que:

$$P_X(B) = P_X(\bigcup_{n=1}^{n_0} B_n) = \sum_{n=1}^{n_0} P_X(B_n)$$

onde a última igualdade decorre do fato de que $\{B_n : n \geq 1\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois. Como, por construção $P_X(B_n) = (\frac{1}{2})^n$, $\forall n \geq 1$, segue que:

$$P_X(B) = \sum_{n=1}^{n_0} (\frac{1}{2})^n = 1 - (\frac{1}{2})^{n_0} \geq 1 - \alpha$$

Analogamente, verificamos que $P_Y(B) = 1 - (\frac{1}{2})^{n_0} \geq 1 - \alpha$, concluindo a demonstração da proposição 1.3.

Destacamos que o resultado da proposição 1.3 pode ser estendido para um número finito qualquer de funções de distribuição contínuas. Assim, é possível estabelecermos campos de coincidência de opiniões para um grupo finito de indivíduos (opinando a respeito de uma mesma quantidade de interesse). Este fato, segundo De Finetti, acena uma possibilidade de tentar caracterizar (se é que tal caracterização faz sentido) a "opinião conjunta" de un grupo de pessoas, conforme argumentamos a seguir.

Imaginemos uma situação em que um grupo de pessoas devem tomar uma decisão coletivamente (problema de decisão em grupo) e que, para tanto, necessitam opinar a respeito de uma certa quantidade aleatória através da exposição de suas respectivas funções de distribuição (que aqui suporemos contínuas) para esta quantidade. A construção de campos de coincidência de opiniões delineia um método alternativo para tentar expressar qual seria a "opinião " deste grupo de pessoas sobre a quantidade de interesse em questão , uma vez que algumas propriedades dos campos de coincidência , que passamos a listar a partir de agora, são consideradas, segundo a literatura, requisitos importantes na tentativa de caracterizar a "opinião " de um grupo.

Em primeiro lugar, destacamos que os campos de coincidência podem ser vistos como uma atribuição genuína de probabilidade para o grupo, diferentemente do que ocorre com os processos usuais de mistura de probabilidades, que produzem distribuições de probabilidades desprovidas de qualquer interpretação dentro do paradigma subjetivista, excetuando-se as situações bem particulares de ditaduras ou unanimidade. Em outras palavras, as distribuições de probabilidade resultantes destes processos de mistura não correspondem a opinião de pessoa alguma, opondo-se à visão de De Finetti.

Outro aspecto positivo deste método reside no fato de que as opiniões individuais são preservadas quando da construção dos campos de coincidência. Esta última propriedade dos campos de coincidência confere a este método um caráter objetivo no sentido de que, preservadas as opiniões individuais, parece não haver motivo especial algum, além daquele de cunho matemático que citamos no próximo parágrafo, para que os membros do grupo rejeitem os campos de coincidência de opiniões como uma expressão de consenso (de fato, nenhum membro do grupo precisa abrir mão de

suas convicções a respeito da quantidade de interesse na formação destes campos de coincidência).

Apesar das vantagens que destacamos acima (em relação às formas habituais de agrupar opiniões), o método baseado nos campos de coincidência também apresenta algumas limitações . Inicialmente, podemos observar que um campo de coincidência de opiniões não determina uma distribuição de probabilidade propriamente dita, pois consiste apenas de uma união finita de intervalos reais e suas respectivas taxas de incerteza segundo os membros do grupo. Assim, a teoria normativa bayesiana de tomada de decisão , que está fundamentada na maximização de utilidade esperada, não se aplica a qualquer procedimento de tomada de decisão que tenha por base os campos de coincidência como descrição da "opinião " do grupo (embora esta solução bayesiana tenha sido formulada somente para a versão unipessoal do problema de decisão).

Outra deficiência que podemos apontar neste método é a ausência de uma sustentação axiomática, em termos de coerência, que justifique a adoção dos campos de coincidência como uma representação da "opinião " de um grupo de pessoas. Este inconveniente, presente também em todos os demais processos de agrupamento de opiniões , decorre da inexistência de um conceito de coerência (racionalidade) coletiva. Embora Arrow [1] tenha demonstrado a impossibilidade de um grupo de pessoas coerentes tomar decisões de maneira racional, muitos trabalhos têm sido feitos visando estabelecer tal conceito de coerência conjunta e, consequentemente, uma forma numérica de traduzir a incerteza de um grupo de pessoas.

Dentro deste contexto de problemas de decisão coletiva, onde não há nenhuma teoria normativa para tomada de decisão e sim várias tentativas de caracterizar coerência conjunta, julgamos que a existência dos campos de coincidência de opiniões venha a contribuir para a discussão e a reflexão sobre esta questão , ainda bastante em aberto. Esta contribuição pode ser tanto mais significativa a medida que existe "um ponto que está se tornando cada vez melhor compreendido em teoria de decisão em grupo, a saber, que um grupo de bayesianos não pode ser totalmente bayesiano mesmo quando seus membros queiram que assim seja" (Genest e Zidek [4]).

A seguir, apresentamos alguns exemplos de campos de coincidência de opiniões .

Exemplo 1.8 *Consideremos novamente a situação do exemplo 1.4, onde X e Y são variáveis aleatórias com distribuições uniformes sobre os intervalos* $(1,2)$ *e* $(2,3)$, *respectivamente.*

Um campo de coincidência de opiniões com $\alpha = 0{,}125$ seria a união de intervalos $(1, \frac{11}{8}] \bigcup (\frac{3}{2}, \frac{23}{8}]$ (correspondente a $I_1 \bigcup I_{01} \bigcup I_{001}$, conforme construção da subseção 1.2.1), ou ainda o intervalo real $(\frac{9}{8}, \frac{23}{8}]$. Notemos que como os suportes das distribuições de X e Y são disjuntos, o campo de coincidência de opiniões não estará contido na intersecção destes suportes. O mesmo não ocorre no próximo exemplo.

Exemplo 1.9 *Retomemos o exemplo 1.5, onde X e Y são variáveis aleatórias com distribuições normais com média comum 0 e variâncias 1 e 4, respectivamente.*

Aqui, um campo de coincidência de opiniões com $\alpha = 0{,}25$ corresponde ao conjunto $(-\infty, 0] \bigcup (0,635\ ;\ 2,35]$. Neste caso, parece não haver nenhum intervalo real que constitua um campo de coincidência, diferentemente do exemplo anterior.

Estes dois exemplos nos mostra que há vários pontos obscuros na caracterização dos campos de coincidência, trazendo à tona algumas questões : Sob quais condições sobre os suportes das funções de distribuição F e G é possível obter um único intervalo real como um campo de coincidência de opiniões ? Qual seria uma cota superior para o número de intervalos reais que compõem um campo de coincidência em função de α? (Quanto a última pergunta, um limitante superior bastante grosseiro para o número de intervalos reais seria $\frac{n_0(n_0+1)}{2}$, onde $n_0 = n_0(\alpha) = \min\{n \in I\!N : 1 - (\frac{1}{2})^n \geq 1 - \alpha\}$)

Além das questões de caráter matemático que mencionamos no parágrafo anterior, existem várias indagações de ordem filosófica: Faz sentido a construção de campos de coincidência quando os suportes das distribuições de X e Y são disjuntos? Será que quando F e G possuem mesmo suporte os campos de coincidência fornecem uma interpretação mais clara (precisa) sobre a incerteza do grupo do que em situações mais gerais? Admitindo que um campo de coincidência seja uma expressão bastante razoável de consenso, qual seria um "nível de unanimidade" adequado a ser adotado? Este valor dependeria do particular problema que estaria sendo considerado? Como podemos ver, há muito ainda a ser estudado e entendido sobre os campos de coincidência de opiniões de De Finetti.

Apêndice

Neste apêndice, apresentamos as demonstrações dos Lemas 1.3, 1.4 e 1.5 que foram omitidas anteriormente.

Lema 1.3 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição contínuas F e G, respectivamente. Seja $C_X = \{(a,b) \in I\!R^2 : F(b) - F(a) = \frac{1}{2}\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. Se $M_X \bigcap M_Y = \emptyset$, então existem intervalos $(a_1, b_1], (a_2, b_2]$, ambos em C_X, tais que $G(b_1) - G(a_1) < \frac{1}{2}$ e $G(b_2) - G(a_2) > \frac{1}{2}$.*

Prova: Sejam $\underline{m}_X = \inf M_X$ e $\overline{m}_X = \sup M_X$. Notemos que $\underline{m}_X \in M_X$ e $\overline{m}_X \in M_X$, uma vez que M_X é fechado por ser a imagem inversa do conjunto fechado $\{\frac{1}{2}\}$ pela função contínua F.

Além disso, sejam $n_0 = [\underline{m}_X]$ e $N_0 = [\overline{m}_X]+1$. Como $M_X \bigcap M_Y = \emptyset$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $G(\overline{m}_X) < \frac{1}{2}$ (é claro que $G(\overline{m}_X) < \frac{1}{2} \Rightarrow G(\underline{m}_X) < \frac{1}{2}$, pois G é não -decrescente). Consideremos as sequências de pares ordenados (ou de intervalos reais) $(I_n : n \geq 1)$ e $(J_n : n \geq 1)$ dadas por:

$$I_n = (n_0 - n\ ;\ \sup\{x \in I\!R : F(x) = \frac{1}{2} + F(n_0 - n)\}] \quad \text{e}$$

$$J_n = (\inf\{x \in I\!R : F(x) = F(N_0 + n) - \frac{1}{2}\}\ ;\ N_0 + n]$$

Observemos que estas duas sequências estão bem definidas, pois $n_0 - n < \sup\{x \in I\!R : F(x) = \frac{1}{2} + F(n_0 - n)\}$ e $\inf\{x \in I\!R : F(x) = F(N_0 + n) - \frac{1}{2}\} < N_0 + n$, para todo $n \geq 1$, pelo não -decrescimento de F. Destacamos que, com esta construção , $I_n \in C_X$, $J_n \in C_X$, $\forall n \geq 1$.

Notemos que $\sup\{x \in I\!R : F(x) = \frac{1}{2} + F(n_0 - n)\} \downarrow \overline{m}_X$ e $\inf\{x \in I\!R : F(x) = F(N_0 + n) - \frac{1}{2}\} \uparrow \underline{m}_X$, quando $n \to +\infty$. Assim, $p_n = P(Y \in I_n) \to G(\overline{m}_X)$ e $q_n =$

$P(Y \in J_n) \to 1 - G(\underline{m}_X)$, quando $n \to +\infty$, pela continuidade da função de distribuição G. Deste modo, temos que $\exists\, n_1 \in I\!N$ tal que $n \geq n_1 \Rightarrow p_n < \frac{1}{2}$ (basta considerarmos, por exemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - G(\overline{m}_X)))$ e $\exists\, n_2 \in I\!N$ tal que $n \geq n_2 \Rightarrow q_n > \frac{1}{2}$ (tomando, por exemplo, $\varepsilon' = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - G(\underline{m}_X)))$.

Logo, para $n \geq n^* = \max\{n_1, n_2\}$, $P(Y \in I_n) < \frac{1}{2}$ e $P(Y \in J_n) > \frac{1}{2}$. Assim, denominando $I_{n^*} = (a_1, b_1]$ e $J_{n^*} = (a_2, b_2]$, segue o resultado, pois $P(Y \in I_{n^*}) = G(b_1) - G(a_1) < \frac{1}{2}$, $P(Y \in J_{n^*}) = G(b_2) - G(a_2) > \frac{1}{2}$ e $I_{n^*}, J_{n^*} \in C_X$.

Lema 1.4 *Seja X uma variável aleatória com função de distribuição contínua F. O conjunto $C_X = \{(a,b) \in I\!R^2 : F(b) - F(a) = \frac{1}{2}\ ,\ -\infty < a < b < +\infty\}$ é conexo.*

Prova: Vamos demonstrar este lema por absurdo. Suponhamos, então , que C_X não seja conexo, ou seja, que existam (conforme em Marsden [7]) conjuntos não -vazios A_0 e A_1, abertos em $I\!R^2$, tais que:

$$C_X \subset A_0 \bigcup A_1 \ ,\ C_X \bigcap A_0 \neq \emptyset \ ,\ C_X \bigcap A_1 \neq \emptyset \ \text{ e } \ C_X \bigcap A_0 \bigcap A_1 = \emptyset \qquad (1)$$

Como antes, definimos $P^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in I\!R : F(x) = \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$, e $\underline{m}_X$ e $\overline{m}_X$, o ínfimo e o supremo de $P^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$, respectivamente. Consideremos os seguintes dois casos:

(1) $P^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

Neste caso, definindo, $\forall x \in (-\infty, \underline{m}_X)$, $B_x = \{x\} \times P^{-1}(\{F(x) + \frac{1}{2}\})$, temos

$$C_X = \bigcup_{x \in (-\infty, \underline{m}_X)} B_x$$

Afirmamos que, $\forall x \in (-\infty, \underline{m}_X)$, B_x é conexo, pois é conexo por caminhos. De fato, dados $P_x^i = (x, y_x^i) \in B_x$, i = 1,2, existe uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to I\!R^2$ unindo P_x^1 a P_x^2, com $\gamma(0) = P_x^1$, $\gamma(1) = P_x^2$ e $\gamma([0,1]) \subset B_x$, a saber

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x, (1-t)y_x^1 + ty_x^2)\ ,\ t \in [0,1]$$

É fácil ver que γ é contínua, pois $\gamma_1(t) = x$ e $\gamma_2(t) = (1-t)y_x^1 + ty_x^2$, suas componentes, o são . Além disso, $\gamma([0,1]) \subset B_x$, pois, $\forall t \in [0,1]$,

$$\min\{y_x^1, y_x^2\} \leq \gamma_2(t) \leq \max\{y_x^1, y_x^2\} \ ,$$

e sendo F não -decrescente,

$$F(\min\{y_x^1, y_x^2\}) \leq F((1-t)y_x^1 + ty_x^2) \leq F(\max\{y_x^1, y_x^2\})$$

Como $F(\min\{y_x^1, y_x^2\}) = F(\max\{y_x^1, y_x^2\}) = F(x) + \frac{1}{2}$, concluimos que $F((1-t)y_x^1 + ty_x^2) = F(x) + \frac{1}{2}$, $\forall t \in [0,1]$. Logo, $\gamma([0,1]) \subset B_x$.

Estabelecida a conexidade dos conjuntos B_x, iniciamos a demonstração propriamente dita (por absurdo) da conexidade de C_X.

Se C_X não é conexo, existem conjuntos abertos não -vazios A_0 e A_1 em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo as condições em (1). Assim, tomemos $P_0 = (x_0, y_0) \in A_0 \bigcap C_X$ e $P_1 = (x_1, y_1) \in A_1 \bigcap C_X$.

Afirmamos que, $\forall x \in (-\infty, \underline{m}_X)$, $B_x \neq \emptyset$, e, ou $B_x \subset A_0$ ou $B_x \subset A_1$, pois, em caso contrário, B_x não seria conexo, uma vez que teríamos $B_x \subset C_X \subset A_0 \bigcup A_1$, $B_x \bigcap A_0 \neq \emptyset$, $B_x \bigcap A_1 \neq \emptyset$ e $B_x \bigcap A_0 \bigcap A_1 \subset C_X \bigcap A_0 \bigcap A_1 = \emptyset$. Notemos que, do mesmo modo, $x_0 \neq x_1$, pois, em caso negativo, $B_{x_0} = B_{x_1}$ não seria conexo.

Podemos, portanto, considerar a função $I : (-\infty, \underline{m}_X) \to \{0,1\}$, definida por:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } B_x \subset A_0 \\ 1 & \text{se } B_x \subset A_1 \end{cases}$$

Vamos verificar que I é contínua em $(-\infty, \underline{m}_X)$! Evidentemente, isto é absurdo, pois I é uma sobrejeção ($I(x_0) = 0$ e $I(x_1) = 1$). De fato, tomemos $x^* \in (-\infty, \underline{m}_X)$ qualquer e, sem perda de generalidade, suponhamos que $B_{x^*} \subset A_0$, de tal forma que $I(x^*) = 0$.

Como F é contínua, $F(\inf P^{-1}(\{\alpha\})) = \alpha$, qualquer que seja $\alpha \in (0,1)$. Por isso, $F(\inf P^{-1}(\{F(x^*) + \frac{1}{2}\})) = F(x^*) + \frac{1}{2}$, de modo que o ponto $(x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*) + \frac{1}{2}\})) \in B_{x^*}$ e, consequentemente, pertence a A_0. Sendo A_0 aberto, temos que

$$\exists\ \varepsilon_1 > 0 \text{ tal que } \overline{B}((x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*) + \frac{1}{2}\}), \varepsilon_1) \subset A_0 \quad \text{, onde}$$

$\overline{B}((x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}), \varepsilon_1)$ representa a bola fechada de raio ε_1 centrada em $(x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\})$.

Assim, existe $P' = (x', y') \in A_0$ com $x' < x^*$, tal que $F(y') - F(x') = \frac{1}{2}$: este ponto P' pertence ao menor arco da circunferência de centro em $(x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\})$ e raio ε_1 que une $(x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}) - \varepsilon_1)$ a $(x^* - \varepsilon_1, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}))$, pois

$$F(\inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\})-\varepsilon_1)-F(x^*) < \frac{1}{2} \text{ e } F(\inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}))-F(x^*-\varepsilon_1) \geq \frac{1}{2}$$

Deste modo, $(x', y') \in B_{x'}$ e, consequentemente, $I(x') = 0$.

E mais: $\forall x \in [x', x^*]$, $I(x) = 0$. Com efeito, considerando-se o segmento que une (x, y') a $(x, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}))$, temos que:

$$F(\inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\})) - F(x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad F(y') - F(x) \leq \frac{1}{2}$$

Logo, existe (x, y) neste segmento tal que $F(y) - F(x) = \frac{1}{2}$ e, consequentemente, $(x, y) \in B_x$. Como este segmento está contido em $\overline{B}(x^*, \inf P^{-1}(\{F(x^*)+\frac{1}{2}\}), \varepsilon_1) \subset A_0$, segue que $(x, y) \in A_0 \bigcap B_x$ e $I(x) = 0$. Portanto, $\forall x \in [x', x^*]$, $I(x) = 0$. Analogamente, podemos verificar que $\exists\ x'' > x^*$ tal que $\forall x \in [x^*, x'']$, $I(x) = 0$. Tomando-se $\delta = \min\{x^* - x', x'' - x^*\}$, temos que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } |x - x^*| < \delta \ \Rightarrow\ |I(x) - I(x^*)| = 0\ <\ \varepsilon$$

Logo, I é contínua em $(-\infty, \underline{m}_X)$. Mas isto é absurdo, pois I assume valores em $\{0, 1\}$ e não é uma função constante (temos, na hipótese de C_X não ser conexo, $I(x_0) = 0$ e $I(x_1) = 1$). Portanto, C_X é conexo.

Da mesma forma, podemos provar a continuidade da função I quando $B_{x^*} \subset A_1$.

(2) $P^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$. (Neste caso, $B_x \neq \emptyset$, $\forall x \in M_X$)

Como $P^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ é da forma $P^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = [\underline{m}_X, \overline{m}_X]$, temos, neste caso,

$$C_X = \bigcup_{x \in (-\infty, \overline{m}_X]} B_x = (\bigcup_{x \in (-\infty, \underline{m}_X]} B_x) \bigcup (\bigcup_{x \in [\underline{m}_X, \overline{m}_X]} B_x).$$

Observamos, inicialmente, que a prova de que $\bigcup_{x\in(-\infty,\underline{m}_X]} B_x$ é conexo é análoga à demonstração feita em **(1)**.

Em segundo lugar, o conjunto $\bigcup_{x\in[\underline{m}_X,\overline{m}_X]} B_x$ é conexo por caminhos, pois, $\forall\,(x,y) \in \bigcup_{x\in[\underline{m}_X,\overline{m}_X]} B_x$, vale que $F(y) - F(x) = \frac{1}{2}$ e, consequentemente, dados dois pontos quaisquer deste conjunto, o segmento de reta que os une é uma curva contínua em $\bigcup_{x\in[\underline{m}_X,\overline{m}_X]} B_x$ (o argumento aqui exposto é o mesmo apresentado em **(1)** quando da verificação da conexidade de B_x). Logo, $\bigcup_{x\in[\underline{m}_X,\overline{m}_X]} B_x$ é conexo.

Por fim, C_X é a união de dois conjuntos conexos com pelo menos um ponto em comum (um ponto de $B_{\underline{m}_X}$). Assim, C_X é conexo (Lima [6]).

Lema 1.5 *Qualquer conjunto da forma $I_{i_1\ldots i_n}$, $(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n$, construído segundo o procedimento descrito na subseção 1.2.1 é composto, no máximo, por $n+1$ intervalos reais.*

Prova: Provaremos este lema por indução . Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira, pois, pela proposição 1.1, vimos que I_1 é um único intervalo real e I_0 é formado por um ou dois intervalos. Suponhamos, então , que este fato é verdadeiro para $n \in I\!N$ (Hipótese de indução). Assim, suponhamos que todos os 2^n conjuntos da forma $I_{i_1\ldots i_n}$, $(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n$, são formados por, no máximo, $n+1$ intervalos reais.

Tomemos um destes conjuntos qualquer, digamos $I_{i_1\ldots i_n}$, constituído de $k \leq n+1$ intervalos reais. Deste modo, $I_{i_1\ldots i_n} = \bigcup_{j=1}^{k}(a_j,b_j]$, com $a_{j+1} > b_j$, $j = 1,\ldots,k-1$ (lembramos que estamos admitindo as possibilidades $a_1 = -\infty$ ou $b_k = +\infty$). Procedendo como na proposição 1.2, podemos obter um subconjunto $I_{i_1\ldots i_n,1}$ de $I_{i_1\ldots i_n}$ que será da forma $(a_0,b_r]\bigcup(a_{r+1},b_{r+1}]\bigcup\ldots\bigcup(a_s,b_0]$, com $1 \leq r \leq s \leq k$. Este conjunto é constituído de $s-r+1 \leq k \leq n+1$ intervalos, enquanto que seu complementar em relação a $I_{i_1\ldots i_n}$, $I_{i_1\ldots i_n,0}$, é composto por, no máximo, $r+k-s+1 \leq k+1 \leq n+2$ intervalos reais. Logo, qualquer conjunto da forma $I_{i_1\ldots i_n i_{n+1}}$ é composto por, no máximo, $n+2$ intervalos reais, concluindo a indução .

Conclusão

Neste trabalho, verificamos, de maneira bem detalhada, que, dadas duas variáveis aleatórias reais X e Y com funções de distribuição contínuas F e G, sempre é possível obter uma única função real ϕ tal que as transformadas $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ (também variáveis aleatórias) possuam, ambas, a mesma função de distribuição , digamos H.

Destacamos ainda que este resultado possui uma interpretação interessante dentro do contexto de problemas de decisão coletiva, quando duas pessoas possuem opiniões distintas a respeito de uma dada quantidade de interesse traduzidas numericamente por F e G. Neste caso, De Finetti apontou a possibilidade de se obter, no processo de construção da função ϕ (e das variáveis aleatórias $\phi(X)$ e $\phi(Y)$), uma união finita de intervalos reais, a qual denominou **Campos de coincidência de opiniões** , onde as opiniões de ambos os indivíduos coincidem com relação a quantidade de interesse em questão .

Segundo De Finetti, esta constatação acena uma possibilidade de tentar caracterizar a "opinião " de um grupo de pessoas a respeito de uma certa quantidade de interesse, uma vez que um Campo de coincidência de opiniões corresponde a uma atribuição genuína de probabilidade.

Por fim, levantamos algumas questões sobre a natureza dos Campos de coincidência de opiniões ; há ainda vários pontos obscuros na caracterização de tais campos. A busca de respostas a estas indagações pode, sem dúvida, nortear futuros trabalhos nesta área.

Referências Bibliográficas

[1] Arrow, K. J. (1951)
Social choice and individual values.
Segunda edição , Yale University Press.

[2] Billingsley, P. (1986)
Probability and Measure.
Segunda edição , John Wiley Sons.

[3] de Finetti, B. (1953)
Transformazioni di Numeri Aleatori atte a far coincidere distribuzioni diverse.
Giornale Dell'Istituto Italiano Degli Attuari, XVI, págs. 51 a 57.

[4] Genest, C. e Zidek, J. V. (1986)
Combining Probability Distributions: a critique and an annotated bibliography
Statistical Science, Vol. 1, N.1, págs. 114 a 148.

[5] Lima, E. L. (1981)
Curso de Análise, Volumes 1 e 2.
Rio de Janeiro, IMPA - CNPq (Projeto Euclides).

[6] Lima, E. L. (1976)
Elementos de Topologia Geral.
Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.

[7] Marsden, J. E. (1974)
Elementary classical analysis.
W.H. Freeman and Company.

[8] Ross, S. M. (1972)
Introduction to probability models.
Macmillan Publishing Company.

[9] Roussas, G. G. (1973)
A first course in Mathematical Statistics.
Addison-Wesley Publishing Company.

[10] Thomasian, A. J. (1969)
The structure of probability theory with applications.
McGraw-Hill.