PROCESSO DE MÉDIAS ALEATÓRIAS COM CONFIGURAÇÃO INICIAL PARABÓLICA

Deborah Pereira de Medeiros

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Probabilidade**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes**

-São Paulo, março de 2001-

PROCESSO DE MÉDIAS ALEATÓRIAS COM CONFIGURAÇÃO INICIAL PARABÓLICA

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de Doutorado devidamente corrigida e
defendida por Deborah Pereira de Medeiros
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 8 de março de 2001.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes(Orientador) - IME/USP
- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari - IME/USP
- Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia - IMECC/UNICAMP
- Prof. Dr. Hervé Jean François Guiol - IMECC/UNICAMP
- Profa. Dra. Chang Dórea - IM/UnB

Dedicado à minha
amada e adorada filha,
Manuela Mattei.

Agradecimentos

Durante o período do meu doutorado tive a oportunidade de contar com a ajuda, o apoio emocional, o incentivo constante, a amizade e o carinho de pessoas maravilhosas que foram essenciais para que pudesse suportar e superar momentos tão difícieis como os que tive de enfrentar. Sou grata a cada um de vocês que tenha dado algum tipo de contribuição nesta minha tarefa e que, de um jeito ou de outro, tenha participado deste verdadeiro processo de renovação pelo qual passei.

Agradeço mais especificamente,

- ao amigo e orientador Luiz Renato Gonçalves Fontes;
- aos professores Pablo Augusto Ferrari, Nancy Lopes Garcia, Hervé Jean François Guiol e Chang Dórea;
- a toda minha família, em especial a Manuela (minha filha), Aida (minha mãe), meus irmãos (todos seis) e minha prima Keite;
- aos meus amigos e colegas do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, principalmente do Departamento de Estatística e em especial a Maria José Oliveira (Zezé);
- a todos os outros amigos, em especial a Sara Carmona, Laura Ramos, Regina Madruga, Celso Cabral, Sebstião Lira, Júlio Hokama, Mário Castro, Héliton Tavares e Nelson Tanaka;
- a Paulo Renan Rodrigues dos Santos.

A todos vocês meu muito obrigada.

Resumo

Este trabalho estuda as flutuações, temporal e espacial, do processo de médias aleatórias (PMA), que representa um sistema de alturas, denotado por η_t e com configurações em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, assumindo como configuração inicial uma superfície parabólica de dimensão d passando pela origem. Mostra que no caso simétrico e com alcance finito, as flutuações da altura do sítio x se estabilizam apenas quando $d \geq 5$ e são da ordem de $t^{1-d/4}$, se $d = 1, 2$ ou 3 e da ordem de $(\log t)^{1/2}$, se $d = 4$, mas, no caso viesado, $\eta_t(x)$ flutua sempre em todas as dimensões. Estuda também o processo visto da altura da origem, denotado por $\hat{\eta}_t$, no caso simétrico e de alcance 1. Prova que as flutuações de $\hat{\eta}_t(x)$ são limitadas quando $d \geq 3$ e que este converge fracamente para uma superfície aleatória $\hat{\eta}(x)$, quando $t \to \infty$, que é invariante para o processo de médias aleatórias. Os resultados são obtidos para um processo a tempo discreto (um autômato celular probabilístico) e no caso do processo a tempo contínuo, considera-se aproximação através de uma família de procesos a tempo discreto.

Abstract

This thesis studies the time and space fluctuations of a d-dimensional parabolic surface submitted to a random averaging process (RAP). We show that in a symmetric finite range case the time fluctuations are bounded in $d \geq 5$. In $d = 1, 2$ and 3 they are of the order $t^{1-d/4}$, respectively. In the $d = 4$, they are of the order $(\log t)^{1/2}$. In a biased case, they are of the order $t^{5/4}$ in $d = 1$, $t(\log t)^{1/2}$ in $d = 2$ and t in $d \geq 3$. We also study the time fluctuations of the surface as seen from the height of the origin and show that in $d = 3$ and 4 they remain bounded for a symmetric nearest neighbor case. For all bounded fluctuation cases, we obtain a stationary measure as a time limit of the evolution. We also obtain the magnitude and shape of the spatial fluctuations of that measure. The results are first obtained for discrete time versions of the dynamics. We use discretizations of the continuous time dynamics to get the results from the discrete case by approximation.

Sumário

1 Introdução **1**

2 O processo de médias aleatórias **7**

2.1 Processo das alturas a tempo discreto 8

2.2 Processo com configuração inicial parabólica 10

2.3 Definições e resultados básicos 17

3 Ordem de magnitude das flutuações temporais **22**

3.1 Caso dos $u's$ simétricos 23

3.1.1 Cota superior para $Var(\bar{L}_n)$ 23

3.1.2 Cota inferior para $Var(\bar{L}_n)$ 30

3.1.3 Ordem de magnitude de $Var(\bar{L}_n)$ 34

3.1.4 Ordem de magnitude de $Var(L_n(x))$ no caso simétrico 34

3.1.5 Caso unidimensional e alcance estritamente 1 36

3.2 Caso dos u's viesados 40

3.2.1 Cota superior para $Var(\bar{L}_n)$ 40

3.2.2 Ordem de magnitude de $Var(L_n(x))$ no caso viesado 41

4 O processo das alturas vistas da altura da origem **45**

4.1 Definição, características e variância do processo visto da altura da origem 46

4.2 Convergência de $\hat{L}_n$ no modelo TI e alcance estritamente 1 52

4.3 A forma e a ordem de magnitude das flutuações espaciais no modelo TI . . 64

5 Processo das alturas a tempo contínuo. **74**

5.1 Discretização do processo contínuo 75

5.2 Ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ no caso de alcance finito e $\mu = 0$ . . . 88

5.3 Ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ no caso de $\mu \neq 0$ 97

5.4 Processo contínuo visto da altura da origem, no caso de alcance 1 e $\mu = 0$. 101

A Apêndice A **116**

116

A.1 Prova do Lema 2.5.1 116

A.2 Prova do Lema 3.1.1 118

A.3 Prova do Lema 4.3.1 122

A.4 Prova do Lema 4.3.2 131

A.5 Prova do Lema 5.1.1 139

A.6 Resultados de Ferrari and Fontes [6] 141

Referências bibliográficas **143**

Capítulo 1

Introdução

Superfícies aleatórias têm sido usadas como modelos para o estudo de diversos fenômenos em mecânica estatística. Vide [2], [3], [4] e [7]. O ponto de vista usual é de equilíbrio: define-se uma seqüência de superfícies aleatórias indexada por volumes finitos de uma rede infinita que convergem para a rede inteira, em geral a partir do formalismo Gibbsiano. Um objeto central do estudo são as flutuações de uma porção da superfície ao redor da origem como função do volume. O ponto de vista deste trabalho é o de fora do equilíbrio: começamos com uma superfície inicial fixa e a submetemos a uma evolução estocástica. O objeto central do nosso estudo são as flutuações de uma porção da superfície ao redor da origem como função do *tempo*. A dinâmica, a ser descrita em mais detalhe adiante, é de natureza local, o que permite realizá-la em volume infinito. Nossa referência básica é [6]. Neste trabalho é introduzido e estudado o processo de médias aleatórias, que chamamos de PMA, assumindo como configuração inicial um hiperplano passando pela origem, entre outras condições iniciais. O PMA, tratado no referido artigo, pode ser definido da seguinte forma: consideremos um processo estocástico denotado por η_t, $t \geq 0$, com configurações pertencentes a $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Para cada sítio $i \in \mathbb{Z}^d$ e em cada tempo t, temos uma altura $\eta_t(i)$ e estas alturas evoluem de acordo com a seguinte regra: sejam $\{N_t(i), i \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de processos de Poisson independentes de parâmetro 1 e $\{u(i,\cdot), i \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de vetores de probabilidade aleatórios independentes entre si e da configuração inicial η_0, sendo estas duas famílias independentes estocasticamente. Além disso, $(u(i,j))_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ é uma matriz estocástica aleatória, isto é, cada entrada é uma variável aleatória e a soma destas

variáveis em cada linha é 1 com probabilidade 1 e $u(i,j)$ tem a mesma distribuição de $u(i+k, j+k)$, para todo $i, j, k \in \mathbb{Z}^d$, ou seja, $u(i,j)$ é invariante por translação. Quando o relógio exponencial toca para o sítio i no tempo t, uma realização de u é escolhida e a altura deste sítio é renovada por uma combinação convexa aleatória das alturas de todos os sítios $j \in \mathbb{Z}^d$, a qual é dada por $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} u(i,j)\eta_t(j)$. Os coeficientes desta combinação convexa são escolhidos independentemente em cada tempo.

O PMA é um caso especial dos processos lineares tratados por Liggett [10], Capítulo IX, em que condições iniciais com distribuição invariante por translação são consideradas, diferentemente de Ferrari and Fontes [6] e do presente trabalho. Como exemplos particulares de PMA temos o processo suavizado com ruído e o modelo do votante. No primeiro, existe uma matriz a tal que $\nu(\{a\}) = 1$, onde ν é a distribuição da matriz u e ν concentra toda sua massa em uma matriz constante. Para cada marca do processo de Poisson, a combinação convexa é multiplicada por uma variável aleatória positiva e independente W, de média 1, chamada de "ruído" . Liggett and Spitzer [9], Andjel [1] e Liggett [10] estudaram questões relacionadas a existência e ergodicidade deste processo com "ruído'. No segundo exemplo, ν concentra massa num conjunto de matrizes com a seguinte propriedade: para cada i existe exatamente um j com $u(i,j) \neq 0$ e portanto, igual a 1. Isto é, quando o relógio toca para o sítio i, sua altura é renovada pela altura do sítio j para o qual temos $u(i,j) = 1$. Em Durrett [5] podemos encontrar uma recente revisão deste modelo.

Nosso trabalho estuda questões relativas às flutuações, temporal e espacial, do processo de médias aleatórias, assumindo uma configuração inicial parabólica dada por $X_0(i) = \|i\|^2$. Resultados para condições iniciais parabólicas do tipo $X_0(x) = a\|x\|^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$ fixos, podem ser obtidos do caso em que consideramos. Nós estendemos os resultados de [6], obtidos para o caso de uma superfície inicial planar, para o caso de uma superfície inicial parabólica.

No Capítulo 2 definimos o processo das alturas em tempo discreto (um autômato celular probabilístico), denotado por X_n, com configurações em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. No caso discreto, as alturas de todos os sítios são renovadas a cada tempo n. Definimos então o processo $\{u_n(i,j),\ i,j \in \mathbb{Z}^d\}_{n \geq 1}$ onde, para n fixo, $u_n(\cdot,\cdot)$ satisfaz as mesmas condições da matriz u do caso contínuo e as matrizes $\{u_n(\cdot,\cdot),\ n \geq 1\}$ são independentes. Então,

$X_n(i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} u_n(i,j)X_{n-1}(j)$. Escrevemos a altura do sítio i no tempo n em função das matrizes $u_k, k \leq n$ e da configuração inicial X_0. Esta relação é escrita como uma esperança condicional da posição inicial calculada em sítios ocupados por um passeio aleatório simples definido num meio aleatório. Introduzimos o processo L_n, *dual* a X_n, e a partir deste ponto, tendo em vista que $X_n \stackrel{d}{=} L_n$ para todo n fixo, obtemos todos os resultados para L_n. Denominamos este modelo, descrito no Capítulo 2, *completamente independente* ou CI. Utilizando o fato de que uma versão de L_n centrada é um martingal, obtemos expressões para a variância do processo L_n. Esta variância é escrita em função de valores esperados de funções de uma cadeia de Markov. Na parte final são provados alguns lemas relacionados com esta cadeia os quais serão utilizados no Capítulo 3. Também introduzimos duas definições, uma sobre a simetria da variável $u_n(i,j)$ (Definição 2.5.1) e outra sobre o alcance do processo (Definição 2.5.2). Estas definições são relevantes para o nosso cálculo da ordem de magnitude em n da variância do processo L_n.

No Capítulo 3 determinamos a ordem de magnitude em n das flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, para o processo L_n no modelo CI, no caso dos u's simétricos e dos u's viesados. No caso simétrico tornou-se necessário supor que o processo L_n tenha alcance limitado. Concluímos que as flutuações da altura do sítio x, se $d \leq 4$, não se estabilizam, isto é, elas são da ordem de $n^{1-d/4}$, se $d = 1, 2$ ou 3, e são da ordem de $(\log n)^{1/2}$, se $d = 4$. Mas, se $d \geq 5$, estas flutuações são limitadas (Teorema 3.1.1). Para o caso viesado não fizemos restrições quanto ao alcance mas assumimos que o processo tem quarto momento finito. Concluímos que para todo $d \geq 1$, as flutuações de $L_n(x)$ nunca se estabilizam, flutuando sempre em todas as dimensões. Isto é, as flutuações da altura do sítio x são da ordem de $n^{5/4}$, se $d = 1$, da ordem de $n(\log n)^{1/2}$, se $d = 2$, e da ordem de n, se $d \geq 3$ (Teorema 3.2.1). Ainda neste capítulo, analisamos a convergência temporal de $L_n(x)$, provando que este converge quase certamente e em $\mathcal{L}^2$ para a variável $L(x)$, quando $d \geq 5$, os u's são simétricos e de alcance limitado. Como conseqüência, concluímos que $X_n(x)$ converge em distribuição para $L(x)$ e $Var(X_n(x)) \to Var(L(x))$, quando $n \to \infty$. Em relação à convergência espacial, estudamos a forma das flutuações espaciais da medida limite, no caso dos u's simétricos e limitados e $d \geq 5$ (Teorema 3.1.2). Neste ponto, nosso caso difere do caso estudado em [6] em que a superfície limite exibe flutuações espaciais não triviais em todas as dimensões $d \geq 5$. A forma da medida

invariante nos permite obter com relativa facilidade um resultado de convergência fraca para as flutuações normalizadas da medida invariante. Também, para o caso particular unidimensional de alcance estritamente 1 e dos $u's$ simétricos e limitados, encontramos a ordem de magnitude em n da variância de $L_n(x)$, provando que existe uma constante positiva e finita c, tal que $n^{-3/2}Var(L_n(x))$ converge para c, quando $n \to \infty$ (Teorema 3.1.3).

No Capítulo 4 apresentamos o processo das alturas vistas da altura da origem, denotado por $\hat{L}_n$. Não foi possível estimar a ordem de magnitude em n da variância deste processo no modelo CI. Introduzimos então um novo modelo, o qual chamamos de *temporalmente independente* ou TI. No modelo CI a altura de cada sítio no tempo n é renovada por médias aleatórias das alturas dos seus vizinhos no tempo $(n-1)$ possivelmente em todas as direções coordenadas. No novo modelo (TI), a cada unidade de tempo, primeiro escolhemos, de acordo com uma distribuição uniforme, uma direção coordenada e depois a altura em cada sítio é renovada por médias aleatórias das alturas de seus vizinhos independentemente porém todas na mesma direção escolhida. As outras hipóteses sobre o modelo continuam as mesmas. Argumentamos que todos os resultados obtidos para o modelo CI, nos Capítulos 2 e 3 e na Seção 4.1 são válidos para o modelo TI. Na Seção 4.2 tratamos da convergência temporal de $\hat{L}_n$, no modelo TI, no caso de alcance estritamente 1 (ver Definição 2.5.2) e $d \geq 3$. Neste caso, temos independência entre as redes par (soma das coordenadas de cada sítio é par) e ímpar (soma das coordenadas de cada sítio é ímpar). Por esta razão consideramos o modelo apenas em $2\mathbb{Z}^d$ (rede par). Provamos que $\hat{L}_n(x)$ converge quase certamente e em $\mathcal{L}^2$, para uma superfície aleatória $\hat{L}(x)$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ (Teorema 4.2.1). Logo, temos convergência em distribuição de $\hat{X}_n(x) = X_n(x) - X_n(0)$ para $\hat{L}(x)$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$. Na Seção 4.3 estudamos a ordem de magnitude (Teorema 4.3.1) e a forma (Teorema 4.3.2) das flutuações espaciais do processo $\hat{L}(x)$, neste mesmo modelo, e provamos que estas são da mesma ordem do que as de $L(x)$, se $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$. Aqui também temos flutuações não triviais em todas as dimensões $d \geq 3$ e também obtemos a forma assintótica das flutuações normalizadas, em contraste com o caso planar de [6] (ver Proposição 5.1 e Corolário 5.2 de [A.6]) em que não há flutuações não triviais da superfície invariante vista da altura da origem em $d = 1$ e 2 e nestes casos as formas assintóticas das flutuações espaciais das medidas invariantes

ainda não foram obtidas (possivelmente por tratarem-se de casos consideravelmente mais difícieis).Para obter os resultados dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2, trabalhamos com quantidades envolvendo uma cadeia de Markov D_n. Esta cadeia é simétrica e perturbada na origem, isto é, suas probabilidades de transição são espacialmente homogêneas fora da origem. Com o objetivo de utilizar resultados clássicos sobre passeios aleatórios, fazemos comparações dessas quantidades com outras correspondentes, envolvendo os passeios aleatórios simples e simétricos H_n (ver 3.1.10) e H_n^* (ver 4.3.9). Como em Ferrari and Fontes [6], as comparações são obtidas a partir das funções geradoras das respectivas quantidades.

No Capítulo 5 tratamos do processo das alturas a tempo contínuo e obtemos resultados análogos ao processo em tempo discreto. Consideramos uma discretização do processo, isto é, uma família de processos a tempo discreto, denotada por X_n^N, $n \geq 0$, sendo N o indexador da família. Na Seção 5.1 provamos que $X_{[Nt]}^N$ converge em $\mathcal{L}^2$ para η_t quando $N \to \infty$, para todo t fixo, assumindo que o processo tem quarto momento finito (Teorema 5.1.1). Como conseqüência deste teorema obtemos a variância do processo η_t como limite da variância de $X_{[Nt]}^N$, quando $N \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ fixo. Na Seção 5.2, considerando alcance finito, caso simétrico e existência do quarto momento, provamos que as flutuações da altura do sítio x são limitadas, quando $d \geq 5$, mas não se estabilizam quando $d \leq 4$, pois são da ordem de $t^{1-d/4}$, se $d = 1, 2$ ou 3 e da ordem de $(\log t)^{1/2}$, se $d = 4$ (Teorema 5.2.1). Na seção 5.3, estudamos o caso viesado e concluímos que as flutuações da altura do sítio x são da ordem de $t^{5/4}$, se $d = 1$, da ordem de $t(\log t)^{1/2}$, se $d = 2$ e da ordem de t, se $d \geq 3$, ou seja, $\eta_t(x)$ flutua sempre em todas as dimensões (Teorema 5.3.1). Na Seção 5.4 definimos e estudamos o processo visto da altura da origem, denotado por $\hat{\eta}_t$, $t \geq 0$, no caso de alcance estritamente 1 e $u's$ simétricos. Provamos que as flutuações de $\hat{\eta}_t(x)$ são limitadas em $d \geq 3$ e que $\hat{\eta}_t(x)$ converge em distribuição para $\hat{\eta}(x)$, quando $t \to \infty$, com a correspondente convergência das variâncias, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Todos os resultados de Ferrari and Fontes [6] que são utilizados neste trabalho estão relacionados no Apêndice $A.6$.

Em relação a Ferrari and Fontes [6], todos os resultados deste trabalho são originais (excetuando o Apêndice $A.6$). Os métodos utilizados são no entanto os mesmos que produziram os resultados daquele trabalho: a representação das alturas como valores esperados de um passeio aleatório *para trás*; a dualidade com um passeio aleatório *para*

frente; a martingalidade deste; as variâncias das alturas como valores esperados de funções de uma cadeia de Markov espacialmente não-homogênea. A principal dificuldade adicional em relação a Ferrari and Fontes [6] relaciona-se a este último objeto: no presente caso ele é consideravelmente mais complicado, envolvendo um processo a mais, S_n, correlacionado com um outro processo, D_n, o único a aparecer em Ferrari and Fontes [6]. Neste ponto, é necesário separar as contribuições (divergentes) de S_n e D_n. A análise torna-se bastante mais difícil, requerendo maiores restrições do que em Ferrari and Fontes [6]. Separada a contribuição de S_n, obtida uma expressão envolvendo uma esperança de D_n apenas, seguimos Ferrari and Fontes [6] e comparamos D_n com uma cadeia homogênea. Esta comparação também, como em Ferrari and Fontes [6], é feita a partir de funções geradoras, com a dificuldade adicional considerável de se tratar aqui da derivada da função geradora analisada em Ferrari and Fontes [6].

Capítulo 2

O processo de médias aleatórias

Neste capítulo estudamos o processo de médias aleatórias a tempo discreto, isto é, um *autômato celular probabilístico* denotado por X_n.

Na Seção 2.1 definimos o processo das alturas a tempo discreto e, neste caso, as alturas de todos os sítios são renovadas a cada tempo. Isto é, altura do sítio i no tempo n, para todo $i \in \mathbb{Z}^d$ e $n \geq 1$, é dada por uma combinação convexa aleatória da sua própria altura e das alturas de seus vizinhos no tempo $(n-1)$. Definimos o processo L_n, *dual* a X_n, tal que $X_n \stackrel{d}{=} L_n$. Denominamos este modelo de *completamente independente* ou CI. Escrevemos $X_n(x)$ e $L_n(x)$ em função da configuração inicial X_0 e dos passeios aleatórios simples $(Y_k^{x,n})_{k\geq 0}$ e $(Y_k^x)_{k\geq 0}$, respectivamente, ambos definidos num ambiente aleatório.

Na Seção 2.2 apresentamos estes dois processos, X_n e L_n, com uma configuração inicial específica dada por uma superfície parabólica de dimensão d passando pela origem e escrevemos o processo L_n em função de dois novos processos, denotados por $\bar{L}_n$ e $\bar{Z}_n$. Além disso, provamos que o processo $\bar{L}_n$ centrado é um martingal (Lema 2.2.1) e calculamos sua variância que é dada em função de uma cadeia de Markov $(D_n, S_n)_{n\geq 0}$ (ver 2.2.37).

Na Seção 2.3 apresentamos duas definições, uma sobre a simetria dos coeficientes aleatórios da combinação comvexa (Definição 2.5.1) e outra sobre o alcance do processo X_n (ou L_n) (Definição 2.5.2). Ainda nesta seção, provamos quatro lemas relacionados com a cadeia (D_n, S_n) tratando de homogeneidade espacial, simetria e propriedade de Markov (Lemas 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3 e 2.5.4).

2.1 Processo das alturas a tempo discreto

Consideremos $(X_n)_{n\geq 0}$ o sistema das alturas em tempo discreto, com configurações em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ e com a seguinte evolução: no tempo n, a altura do sítio $i \in \mathbb{Z}^d$ é dada por uma combinação convexa aleatória da sua própria altura e das alturas dos seus vizinhos no tempo $(n-1)$. Para todo $n \geq 1$ e todo $i \in \mathbb{Z}^d$, $X_n(i)$ representa a altura do sítio i no tempo n e definimos como

$$X_n(i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} u_n(i,j)X_{n-1}(j), \tag{2.1.1}$$

sendo

$$U = \{u_n(i, i+\cdot),\ n \geq 1,\ i \in \mathbb{Z}^d\}, \tag{2.1.2}$$

uma família de vetores de probabilidade aleatórios, independentes e identicamente distribuídos e independentes da configuração inicial X_0. Ou seja, para cada n fixo temos uma matriz estocástica aleatória u_n, cujas linhas são os vetores de probabilidade iid $\{u_n(i, i+\cdot), i \in \mathbb{Z}^d\}$ e a soma destas variáveis em cada linha é 1 com probabilidade 1. Como conseqüência temos que variável aleatória $u_n(i,j)$ é invariante por translação, isto é, $u_n(i,j) \stackrel{d}{=} u_n(i+k, j+k)$, para todo $i, j, k \in \mathbb{Z}^d$. Denotaremos por $\mathbb{P}$ e $\mathbb{E}$ a medida de probabilidade e a esperança associadas ao espaço Ω onde a família U está definida. Sejam ν a distribuição marginal de $u_1(\cdot,\cdot)$ e $\mathbb{P}_\nu$ e $\mathbb{E}_\nu$ a medida de probabilidade e a esperança induzidas pela distribuição ν. Logo, para todo i, $j \in \mathbb{Z}^d$ e todo $n \geq 1$, temos

$$\mathbb{P}_\nu\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} u_n(i,j) = 1\right) = 1. \tag{2.1.3}$$

OBSERVAÇÃO: A partir de agora, para simplificar, usaremos a notação $\nu(X)$ para indicar a esperança da variável X associada à distribuição ν. Isto é, $\mathbb{E}_\nu(X) =: \nu(X)$. Chamaremos este modelo de *completamente independente* ou CI. Condições para que o processo CI esteja bem definido são discutidas em Ferrari and Fontes [6]. Em particular,

$$\mathbb{E}(\ \|X_0(j)\|\ ) = O(\|j\|^2) \quad \text{e} \tag{2.1.4}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j\|^2\ \mathbb{E}_\nu(u_1(0,j)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j\|^2\ \nu(u_1(0,j)) < \infty \tag{2.1.5}$$

que adotaremos, são suficientes. Além disso, vamos assumir que para todo $k = 1, \ldots, d$, existe $x \in \mathbb{Z}^d$ com $x_k \neq 0$ tal que

$$\mathbb{P}_\nu(u_1(0,x) \neq 0) > 0. \tag{2.1.6}$$

Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra gerada pela família U. Pode-se ver que, fazendo $j_0 = x$, temos

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sum_{j_1, \ldots j_n \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{n} u_{n-i+1}(j_{i-1}, j_i)\, X_0(j_n) \\ &= \sum_{j_n \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\, Y_n^{x,n} = j_n \mid \mathcal{F}\,)\, X_0(j_n) \\ &= \mathbb{E}[\, X_0\,(Y_n^{x,n}) \mid \mathcal{F}], \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

sendo $(Y_k^{x,n})_{k=0}^n$ um passeio aleatório começando em x, com probabilidades de transição dadas por

$$\mathbb{P}(Y_k^{x,n} = j \mid Y_{k-1}^{x,n} = i,\ \mathcal{F}\,) = u_{n-k+1}(i,j). \tag{2.1.8}$$

Ou seja, podemos expressar $X_n(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, em termos do passeio aleatório $Y_n^{x,n}$ e de X_0. Vamos considerar agora o passeio aleatório $(Y_k^x)_{k\geq 0}$, dado pelas probabilidades de transição

$$\mathbb{P}(Y_k^x = j \mid Y_{k-1}^x = i,\ \mathcal{F}\,) = u_k(i,j). \tag{2.1.9}$$

O passeio Y_n^x será dito o *dual* do passeio $Y_n^{x,n}$. Note que, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\{\mathbb{P}(Y_k^x = \cdot \mid \mathcal{F});\ x \in \mathbb{Z}^d,\ 0 \leq k \leq n\,\} \\ \stackrel{d}{=}\ &\{\mathbb{P}(Y_k^{x,n} = \cdot \mid \mathcal{F});\ x \in \mathbb{Z}^d,\ 0 \leq k \leq n\,\}, \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

pois $u_k \stackrel{d}{=} u_{n-k+1}$.

Note também que, as distribuições incondicionais (a $\mathcal{F}$) de Y_i^x e $Y_i^{x,n}$ os tornam, ambos, o mesmo passeio aleatório (em distribuição), com probabilidades de transição espacialmente homogêneas, dadas por

$$\pi(x,y) = \nu[u_1(x,y)] = \nu[u_1(0,y-x)] = \pi(0,y-x),\ \forall\, x,y \in \mathbb{Z}^d.$$

Sejam

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} j\,\pi(0,j) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \tag{2.1.11}$$

$$\xi^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j-\mu\|^2\,\pi(0,j) \in [0,\infty), \tag{2.1.12}$$

a média e variância do incremento do passeio incondicional, respectivamente. Seja agora, para $n \geq 0$ e $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$L_n(x) = \mathbb{E}[X_0(Y_n^x) \mid \mathcal{F}]. \tag{2.1.13}$$

De (2.1.9) temos que, para todo n fixo,

$$X_n \stackrel{d}{=} \{L_n(x);\ x \in \mathbb{Z}^d\} = L_n. \tag{2.1.14}$$

Dizemos que L_n é *dual* a X_n, referindo-nos a (2.1.14). Os resultados desta tese referem-se à distribuição de X_n, para n individual, ainda que assintótico. É suficiente pois estabelecê-los para L_n. É o que faremos.

2.2 Processo com configuração inicial parabólica

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ o sistema das alturas definido na Seção 2.1. Consideremos como configuração inicial uma superfície parabólica de dimensão d, passando pela origem e definida da seguinte forma: para cada $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$X_0(x) = \sum_{k=1}^{d} x_k^2 = \|x\|^2. \tag{2.2.1}$$

Então,

$$L_n(x) = \mathbb{E}[\ \|Y_n^x\|^2 \mid \mathcal{F}\ ]. \tag{2.2.2}$$

Como Y_n^x é um passeio aleatório começando em x, temos

$$\mathbb{E}[L_n(x)] = \mathbb{E}(\|Y_n^x\|^2) = \mathbb{E}(\|Y_n^0 + x\|^2) = \|x\|^2 + 2n(x\mu) + n\xi^2 + n^2\|\mu\|^2. \tag{2.2.3}$$

Seja $\mathcal{F}_n$ a σ-álgebra gerada por

$$U_n = \{\ u_k(x,y);\ 0 \leq k \leq n,\ x,y \in \mathbb{Z}^d\ \}. \tag{2.2.4}$$

Com o objetivo de encontrar uma expressão para $Var(L_n(x))$, consideremos

$$\bar{Y}_n^x = Y_n^x - \mathbb{E}(Y_n^x), \tag{2.2.5}$$

o que implica

$$\|Y_n^x\|^2 = \|\bar{Y}_n^x\|^2 + 2(x + n\mu)\bar{Y}_n^x + \|x + n\mu\|^2. \tag{2.2.6}$$

Daí, usando (2.2.6) em (2.2.2), obtemos

$$L_n(x) = \bar{L}_n(x) + 2(x + n\mu)\bar{Z}_n(x) + \|(x + n\mu)\|^2, \tag{2.2.7}$$

sendo

$$\bar{L}_n(x) = \mathbb{E}(\|\bar{Y}_n^x\|^2 \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{e} \tag{2.2.8}$$

$$\bar{Z}_n(x) = \mathbb{E}(\bar{Y}_n^x | \mathcal{F}_n). \tag{2.2.9}$$

Note que, as distribuições de $\bar{L}_n(x)$ e de $\bar{Z}_n(x)$ não dependem de x, pela invariância por translação do modelo. Sejam $\bar{L}_n(0) = \bar{L}_n$ e $\bar{Z}_n(0) = \bar{Z}_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} Var(L_n(x)) &= Var(\bar{L}_n) + 4Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n] + \\ &\quad + 4Cov(\bar{L}_n, (x + n\mu)\bar{Z}_n). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Como veremos adiante, as ordens de magnitude em n dos dois primeiros termos da expressão anterior são distintas. Por esta razão, para obter a ordem de $Var(L_n(x))$ não precisamos estimar $Cov(\bar{L}_n, (x + n\mu)\bar{Z}_n)$ pois utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos que a ordem de magnitude deste último termo é inferior à ordem máxima dos dois primeiros.

(a) Cálculo de $Var(\bar{L}_n)$: Seja $Y_n = Y_n^0$. Então,

$$\mathbb{E}(\bar{L}_n) = \mathbb{E}(\|\bar{Y}_n\|^2) = n\xi^2. \tag{2.2.11}$$

Usando (2.2.5) e (2.2.8), temos

$$\begin{aligned}
\bar{L}_n &= \mathbb{E}[\|(Y_n - n\mu)\|^2 \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(j - n\mu)\|^2 \, \mathbb{P}(Y_n = j \mid Y_{n-1} = k, \mathcal{F}_n) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(k - (n-1)\mu) + (j - k - \mu)\|^2 \, u_n(k,j) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|(k - (n-1)\mu)\|^2 \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) + \\
&\quad + 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (k - (n-1)\mu) \, (\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} (j - k - \mu) \, u_n(k,j)) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) + \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(j - k - \mu)\|^2 \, u_n(k,j)) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}[\|\bar{Y}_{n-1}\|^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \\
&\quad + 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (k - (n-1)\mu) \, \bar{\theta}_n(k) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \theta_n^*(k) \, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k \mid \mathcal{F}_n).
\end{aligned}$$

Denotando

$$\bar{\theta}_n(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} (j-k-\mu)u_n(k,j) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2.12}$$

$$\theta_n^*(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(j-k-\mu)\|^2 \, u_n(k,j) \in \mathbb{R}, \tag{2.2.13}$$

$$\bar{W}_n = \mathbb{E}(\bar{Y}_{n-1}\, \bar{\theta}_n(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n) \quad \text{e} \tag{2.2.14}$$

$$W_n^* = \mathbb{E}(\theta_n^*(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n), \tag{2.2.15}$$

temos

$$\bar{L}_n = \bar{L}_{n-1} + 2\bar{W}_n + W_n^*. \tag{2.2.16}$$

Note que as distribuições de $\theta_n(k)$ e $\theta_n^*(k)$ nao dependem de k e,

$$\mathbb{E}(\,\bar{\theta}_n(0)) = \mathbb{E}(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} (j-\mu)u_n(0,j)) = 0, \tag{2.2.17}$$

$$\mathbb{E}(\,\theta_n^*(0)\,) = \mathbb{E}(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|(j-\mu)\|^2 \, u_n(0,j)\,) = \xi^2. \tag{2.2.18}$$

Daí, como $\bar{L}_0 = 0$ então, podemos escrever

$$\bar{L}_n = \sum_{j=1}^{n} (\,2\bar{W}_j + W_j^*\,).$$

Seja

$$\bar{W}_n^* = (\,W_n^* - \xi^2\,) = \mathbb{E}(\bar{\theta}_n^*(Y_{n-1})|\mathcal{F}_n), \tag{2.2.19}$$

sendo $\bar{\theta}_n^*(0) = \theta_n^*(0) - \xi^2$.

Portanto, usando (2.2.11) e (2.2.19), temos

$$\bar{L}_n - \mathbb{E}(\,\bar{L}_n\,) = \sum_{j=1}^{n} 2\bar{W}_j + \bar{W}_j^*. \tag{2.2.20}$$

Observe que, no caso não viesado ($\mu = 0$) e de alcance 1, isto é, $u_1(0,x) = 0$ se $\|x\| \neq 1$, temos

$$\bar{\theta}_1^*(0) = 0 \quad \text{e portanto,} \quad \bar{W}_j^* \equiv 0. \tag{2.2.21}$$

Sejam

$$M_n := 2\sum_{j=1}^{n} \bar{W}_j \quad \text{e} \quad M_n^* := \sum_{j=1}^{n} \bar{W}_j^*. \tag{2.2.22}$$

De (2.2.14) e (2.2.17), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{W}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\bar{Y}_{n-1}\bar{\theta}_n(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{F}_{n-1}\} = \mathbb{E}[\bar{Y}_{n-1}\bar{\theta}_n(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[(k-(n-1)\mu)\bar{\theta}_n(k) \mid Y_{n-1}=k,\ \mathcal{F}_{n-1}] \times \\
&\quad \times \mathbb{P}[Y_{n-1}=k \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= 0, \qquad (2.2.23)
\end{aligned}$$

e de (2.2.15) e (2.2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\bar{W}_n^* \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\bar{\theta}_n^*(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{F}_{n-1}\} = \mathbb{E}[\bar{\theta}_n^*(Y_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[\bar{\theta}_n^*(k) \mid Y_{n-1}=k,\ \mathcal{F}_{n-1}] \times \\
&\quad \times \mathbb{P}[Y_{n-1}=k \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0. \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Observe que, de (2.2.23) e (2.2.24), podemos afirmar que M_n e M_n^* são martingais em relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$. Como,

$$\bar{L}_n = M_n + M_n^* \qquad (2.2.25)$$

então, concluímos a prova do seguinte Lema.

Lema 2.2.1 *O processo $\bar{L}_n - n\xi^2$ é um martingal em relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$.*

Observe que,

$$\begin{aligned}
\bar{W}_j &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} [(k-(j-1)\mu)\bar{\theta}_j(k)]\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1}) \quad \text{e} \qquad (2.2.26) \\
\bar{W}_j^* &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \bar{\theta}_j^*(k)\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=k \mid \mathcal{F}_{j-1}), \qquad (2.2.27)
\end{aligned}$$

com

$$\mathbb{E}(\bar{W}_j) = \mathbb{E}(\bar{Y}_{j-1}\bar{\theta}_j(Y_{j-1})) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(\bar{W}_j^*) = \mathbb{E}(\bar{\theta}_j^*(Y_{j-1})) = 0.$$

Sejam S e D cadeias assumindo valores em $\mathbb{Z}^d$, começando no zero e definidas por

$$D_n = Y_n - \hat{Y}_n \quad \text{e} \quad S_n = Y_n + \hat{Y}_n, \qquad (2.2.28)$$

sendo $(\hat{Y}_n)_{n\geq 0}$ uma cópia independente de $(Y_n)_{n\geq 0}$, dado $\mathcal{F}$. Provaremos mais adiante, no Lema 2.5.2, que $(D_n, S_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov. Usando (2.2.28), podemos

escrever

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})]^2 &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\mathbb{P}(\hat{Y}_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k,\hat{Y}_{j-1}=k \mid \mathcal{F}_{j-1})] \\
&= \mathbb{P}(Y_{j-1}=\hat{Y}_{j-1}=k) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right). \qquad (2.2.29)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{L}_n) &= \sum_{j=1}^{n} Var(2\bar{W}_j+\bar{W}_j^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n}[4Var(\bar{W}_j)+Var(\bar{W}_j^*)+4Cov(\bar{W}_j,\bar{W}_j^*)]. \qquad (2.2.30)
\end{aligned}$$

(a)(i) De (2.2.26) e (2.2.29), temos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{W}_j) &= \mathbb{E}(\bar{W}_j)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(k-(j-1)\mu)\,\bar{\theta}_j(k)\,\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right)\times\right. \\
&\qquad \left.\times\left(\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}(r-(j-1)\mu)\,\bar{\theta}_j(r)\,\mathbb{P}(Y_{j-1}=r|\mathcal{F}_{j-1})\right)\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}\left\{[(k-(j-1)\mu)\bar{\theta}_j(k)]^2\times[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})]^2\right\} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu\left[(k-(j-1)\mu)\bar{\theta}_j(k)\right]^2\,\mathbb{E}\left[P(Y_{j-1}=k \mid \mathcal{F}_{j-1})\right]^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu\left[(k-(j-1)\mu)\bar{\theta}_j(k)\right]^2\,\mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right),
\end{aligned}$$

pela independência de $\bar{\theta}_j(k)$ e $\mathcal{F}_{j-1}$, devido a independência temporal dos $u's$, e pelo fato de $\bar{\theta}_j(k)$ e $\bar{\theta}_j(r)$ serem não correlacionados quando $k \neq r$.
No intuito de simplificar a notação seja $\tilde{\Omega}=\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\right),\tilde{\nu}\right)$ uma cópia de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\right),\nu\right)$ e seja $\bar{\varphi}:\tilde{\Omega}\to(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ tal que

$$\bar{\varphi} \stackrel{d}{=} \bar{\theta}_1(0) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_{\tilde{\nu}}(\varphi\neq 0)>0, \qquad (2.2.31)$$

para todo φ, sendo $\mathbb{P}_{\tilde{\nu}}$ a medida de probabilidade induzida pela distribuição $\tilde{\nu}$. Então, a partir de agora, vamos tomar o espaço de probabilidade $\Omega\times\tilde{\Omega}$, onde Ω é o espaço de

probabilidade anterior em que o modelo estava definido. Neste novo espaço, é claro que $\bar{\varphi}$ é independente de $\mathcal{F}$. As esperanças envolvendo variáveis aleatórias que não $\bar{\varphi}$ serão denotadas por $\mathbb{E}$, como antes e aquelas envolvendo apenas $\bar{\varphi}$ serão denotadas por $\tilde{\nu}$. A notação $\mathbb{E}(\tilde{\nu}(\cdot))$ e $\tilde{\nu}(\mathbb{E}(\cdot))$ indicam esperanças com relação a $\mathbb{E} \times \tilde{\nu}$ e $\tilde{\nu} \times \mathbb{E}$.
Portanto, usando (2.2.31) na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{W}_j) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}\left[(k-(j-1)\mu)\bar{\varphi}\right]^2 \mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}\left[(k-(j-1)\mu)\bar{\varphi}\right]^2 \mathbb{E}\left(\mathbf{1}\left\{\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right\}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left(\tilde{\nu}\left[(k-(j-1)\mu)\bar{\varphi}\right]^2 \mathbf{1}\left\{\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\tilde{\nu}\left[\left(\frac{S_{j-1}}{2}-(j-1)\mu\right)\bar{\varphi}\right]^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right) \\
&= \frac{1}{4}\,\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\bar{S}_{j-1}\bar{\varphi}\right)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right], \qquad (2.2.32)
\end{aligned}$$

sendo $\bar{S}_{j-1} = S_{j-1} - 2(j-1)\mu = S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})$.
(a)(ii) Usando (2.2.27) e (2.2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{W}_j^*) &= \mathbb{E}(\bar{W}_j^*)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \bar{\theta}_j^*(k)\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right) \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \bar{\theta}_j^*(r)\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=r|\mathcal{F}_{j-1})\right)\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left\{\left[\bar{\theta}_j^*(k)\right]^2 \times \left[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right]^2\right\} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \nu\left[\bar{\theta}_j^*(k)\right]^2\ \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right]^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} Var\left(\bar{\theta}_1^*(0)\right)\ \mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right) \\
&= \sigma_*^2\ \mathbb{P}(D_{j-1}=0), \qquad (2.2.33)
\end{aligned}$$

pois quando $k \neq r$, $\bar{\theta}_j^*(k)$ e $\bar{\theta}_j^*(r)$ são não correlacionados, $\bar{\theta}_j^*(k)$ é independente de $\mathcal{F}_{j-1}$, pela independência temporal dos u's e sendo

$$\sigma_*^2 = Var(\bar{\theta}_1^*(0)) = \nu\left[\bar{\theta}_1^*(0)\right]^2. \qquad (2.2.34)$$

(a)(iii) Usando (2.2.26), (2.2.27) e (2.2.29), temos

$$
\begin{aligned}
Cov(\bar{W}_j, \bar{W}_j^*) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(k-(j-1)\mu)\bar{\theta}_j(k)\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right)\ \times\right.\\
&\qquad \left.\times\ \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}^d}\bar{\theta}_j^*(r)\ \mathbb{P}(Y_{j-1}=r|\mathcal{F}_{j-1})\right)\right]\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}\left\{\left[(k-(j-1)\mu)\ \bar{\theta}_j(k)\ \bar{\theta}_j^*(k)\right]\times\left[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right]^2\right\}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu\left[(k-(j-1)\mu)\ \bar{\theta}_j(k)\ \bar{\theta}_j^*(k)\right]\ \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(Y_{j-1}=k|\mathcal{F}_{j-1})\right]^2\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\nu\left[(k-(j-1)\mu)\ \bar{\theta}_j(k)\ \bar{\theta}_j^*(k)\right]\ \mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(k-(j-1)\mu)\ \nu\left[\bar{\theta}_j(k)\ \bar{\theta}_j^*(k)\right]\ \mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right)
\end{aligned}
$$

pelas mesmas razões de não correlação e independência explicadas nos ítens anteriores. Seja

$$
\bar{\rho}:\Omega\to\left(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\quad\text{tal que}\quad \bar{\rho}\overset{d}{=}\bar{\theta}_1(0)\ \bar{\theta}_1^*(0). \tag{2.2.35}
$$

Como antes, no novo espaço $\Omega\times\tilde{\Omega}$ temos que $\bar{\rho}$ é independente de $\mathcal{F}$. Então, usando (2.2.35) na expressão anterior, temos

$$
\begin{aligned}
Cov(\bar{W}_j, \bar{W}_j^*) &= \tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(k-(j-1)\mu)\mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right)\\
&= \tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(k-(j-1)\mu)\mathbb{E}\left(\mathbf{1}\left\{\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right\}\right)\\
&= \tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}\left[(k-(j-1)\mu)\mathbf{1}\left\{\frac{S_{j-1}}{2}=k, D_{j-1}=0\right\}\right]\\
&= \tilde{\nu}(\bar{\rho})\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{j-1}}{2}-(j-1)\mu\right)\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right]\\
&= \frac{1}{2}\tilde{\nu}(\bar{\rho})\mathbb{E}\left(\bar{S}_{j-1}\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.36}
$$

Substituindo (2.2.32), (2.2.33) e (2.2.36) em (2.2.30), temos

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{L}_n) &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\bar{S}_{j-1}\bar{\varphi}\right)^2\ \mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right]+\sigma_*^2\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_{j-1}=0)\ +\\
&\qquad +2\tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left(\bar{S}_{j-1}\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.37}
$$

Pelas definições de M_n e M_n^*, dadas em (2.2.22) e usando (2.2.32), (2.2.33) e (2.2.36), observe que

$$Var(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\bar{S}_{j-1}\bar{\varphi}\right)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right], \tag{2.2.38}$$

$$Var(M_n^*) = \sigma_*^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_{j-1}=0) \quad \text{e} \tag{2.2.39}$$

$$Cov(M_n,\ M_n^*) = \tilde{\nu}(\bar{\rho}) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\bar{S}_{j-1}\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}\right). \tag{2.2.40}$$

(b) Cálculo de $Var[(x+n\mu)\bar{Z}_n]$: Usando (2.2.9) note que,

$$Var[(x+n\mu)\bar{Z}_n] = Var[(x+n\mu)\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_n)] = Var[(x+n\mu)\tilde{Z}_n],$$

sendo $\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_n(0) = \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_n)$ (Definição 2 de $A.6$). Portanto, usando o resultado da Proposição 2.3 (ver $A.6$) temos

$$Var[(x+n\mu)\bar{Z}_n] = (\sigma_x^2 + 2n\gamma_{x\mu} + n^2\sigma_\mu^2)\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_{j-1}^0 = 0), \tag{2.2.41}$$

sendo $\theta_1(0) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} j u_1(0,j)$, com base em (2.2.12) e

$$\sigma_x^2 = Var(x\theta_1(0)), \tag{2.2.42}$$

$$\sigma_\mu^2 = Var(\mu\theta_1(0)) \quad \text{e} \tag{2.2.43}$$

$$\gamma_{x\mu} = Cov(x\theta_1(0), \mu\theta_1(0)). \tag{2.2.44}$$

2.3 Definições e resultados básicos

Definição 2.5.1 *A variável $u_n(i,j)$ é dita ser fortemente não viesada, $\forall n \geq 1$ e $\forall i,j \in \mathbb{Z}^d$, se sua distribuição é simétrica no seguinte sentido:*

$$[u_1(0,i)u_1(0,j)] \stackrel{d}{=} [u_1(0,-i)u_1(0,-j)].$$

Uma condição suficiente para a definição anterior é dada por

$$\{u_1(0,i); i \in \mathbb{Z}^d\} \stackrel{d}{=} \{u_1(0,-i); i \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Como conseqüência da Definição 2.5.1, temos

$$u_1(0,i) \stackrel{d}{=} u_1(0,-i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d,$$

o que implica $\mu = 0$. Se $\mu \neq 0$ então dizemos que a distribuição de $u_n(i,j)$ é viesada para todo $n \geq 1$ e $i, j \in \mathbb{Z}^d$.

Definição 2.5.2 *O processo $(X_n)_{n\geq 0}$ tem alcance limitado se existe $M > 0$ tal que*

$$\mathbb{P}(u_1(0,i) > 0) = 0, \quad \|i\| > M.$$

Dizemos que o menor M tal que satisfaz a Definição 2.5.2 é o alcance do processo.

Lema 2.5.1 *$(Y_n, \hat{Y}_n)$ é uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, com as seguintes probabilidades de transição:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}) &= \mathbb{E}[u_1(j_{n-1}, j_n) u_1(k_{n-1}, k_n)] \\ &= \nu[u_1(j_{n-1}, j_n) u_1(k_{n-1}, k_n)].\end{aligned}$$

Prova: Ver Apêndice A.1.

Lema 2.5.2 *(D_n, S_n) é uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, com as seguintes probabilidades de transição:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(D_n = d_n, S_n = s_n | D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}) \\ = \ &\mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1} + d_{n-1}}{2}, \frac{s_n + d_n}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1} - d_{n-1}}{2}, \frac{s_n - d_n}{2}\right)\right] \\ = \ &\nu\left[u_1\left(\frac{s_{n-1} + d_{n-1}}{2}, \frac{s_n + d_n}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1} - d_{n-1}}{2}, \frac{s_n - d_n}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Prova: A propriedade de Markov decorre do lema 2.5.1. Para a probabilidade de transição, temos

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(D_n = d_n, \ S_n = s_n) \\ = \ &\mathbb{E}[\mathbb{P}(D_n = d_n, S_n = s_n | \mathcal{F}_n)] \\ = \ &\mathbb{E}\left[\sum_{d_{n-1}, s_{n-1}} \mathbb{P}\left(D_n = d_n, S_n = s_n | D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}, \mathcal{F}_n\right) \times \right. \\ &\left. \times \ \mathbb{P}\left(D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1} | \mathcal{F}_n\right)\right] \\ = \ &\mathbb{E}\left[\sum_{d_{n-1}, s_{n-1}} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{s_n + d_n}{2}, \hat{Y}_n = \frac{s_n - d_n}{2} | Y_{n-1} = \frac{s_{n-1} + d_{n-1}}{2}, \right.\right. \\ &\left.\left. \hat{Y}_{n-1} = \frac{s_{n-1} - d_{n-1}}{2}, \mathcal{F}_n\right) \mathbb{P}\left(D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1}\right)\right] = (I)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\sum_{d_{n-1},s_{n-1}} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{s_n+d_n}{2} | Y_{n-1} = \frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \mathcal{F}_n\right) \times \right. \\
&\quad \times \mathbb{P}\left(\hat{Y}_n = \frac{s_n-d_n}{2} | \hat{Y}_{n-1} = \frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \mathcal{F}_n\right) \times \\
&\quad \left. \times \mathbb{P}\left(D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{d_{n-1},s_{n-1}} u_n\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_n+d_n}{2}\right) u_n\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_n-d_n}{2}\right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{P}\left(D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right)\right] = (II) \\
&= \sum_{d_{n-1},s_{n-1}} \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_n+d_n}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_n-d_n}{2}\right)\right] \times \\
&\quad \times \mathbb{P}\left(D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(D_n = d_n, S_n = s_n | D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_n+d_n}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_n-d_n}{2}\right)\right] \\
&= \nu\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_n+d_n}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_n-d_n}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

sendo as igualdades (I) e (II) justificadas pela independência dos passeios Y_n e $\hat{Y}_n$, dado a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_n$, e pela independência entre u_n e a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_{n-1}$, respectivamente. Logo, concluímos a prova do Lema 2.5.2. □

Lema 2.5.3 *A cadeia (D_n, S_n) é espacialmente homogênea em $\{0\} \times \mathbb{Z}^d$ e $(\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^d$ separadamente, mas não em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$.*

Prova: Se a cadeia (D_n, S_n) está em $\{0\} \times \mathbb{Z}^d$ no tempo $(n-1)$ então $D_{n-1} = 0$. Neste caso, pelo Lema 2.5.2, temos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(D_n = d, S_n = s_{n-1} + s \mid D_{n-1} = 0, S_{n-1} = s_{n-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}}{2} + \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}}{2} + \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
&= \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

pois os $u's$ são invariantes por translação. Mas, se a cadeia (D_n, S_n) está em $(\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^d$ no tempo $(n-1)$ então $D_{n-1} \neq 0$ e portanto, temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(D_n = d_{n-1} + d, S_n = s_{n-1} + s \mid D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2} + \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2} + \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}+d_{n-1}}{2} + \frac{s+d}{2}\right)\right] \mathbb{E}\left[u_1\left(\frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2}, \frac{s_{n-1}-d_{n-1}}{2} + \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
= \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} + s, D_n = d_{n-1} + d | S_{n-1} = s_{n-1}, D_{n-1} = d_{n-1}) \\
& = \begin{cases} \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] & \text{se } d_{n-1} = 0 \\ \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] & \text{se } d_{n-1} \neq 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

o que prova que a cadeia (D_n, S_n) não é homogênea em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$. □

Como conseqüência do Lema 2.5.3, podemos construir (D_n, S_n) da seguinte forma: sejam (γ_0, δ_0) o incremento de (D_n, S_n) em $\{0\} \times \mathbb{Z}^d$ e (γ, δ) o incremento de (D_n, S_n) em $(\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^d$, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\gamma_0 = d,\ \delta_0 = s) &= \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
&= \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] \quad \text{e} \qquad (2.3.2) \\
\mathbb{P}(\gamma = d,\ \delta = s) &= \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \mathbb{E}\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] \\
&= \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right]. \qquad (2.3.3)
\end{aligned}$$

Sejam $\{(\gamma_n(i),\ \delta_n(i));\ i \in (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}),\ n \geq 1\}$ e $\{(\gamma_n(0),\ \delta_n(0));\ n \geq 1\}$ duas famílias de vetores aleatórios iid e independentes entre si tais que, para todo $i \in (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\})$ temos

$$(\gamma_1(i)), \delta_1(i) \stackrel{d}{=} (\gamma, \delta), \tag{2.3.4}$$

$$(\gamma_1(0), \delta_1(0)) \stackrel{d}{=} (\gamma_0, \delta_0). \tag{2.3.5}$$

Lema 2.5.4 *Se $u_n(i,j)$ é fortemente não viesado, para todo $n \geq 1$ e $i,j \in \mathbb{Z}^d$, então a cadeia (D_n, S_n) satisfaz*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} + s, D_n = d_{n-1} + d \,|D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}) \\ = \; & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} - s, D_n = d_{n-1} + d \,|D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}), \end{aligned}$$

para qualquer valor de $d_{n-1}, s_{n-1}, d, s \in \mathbb{Z}^d$. Isto é, o incremento da cadeia é simétrico e portanto temos

$$\mathbb{P}(\delta_n(d_{n-1}) = s,\ \gamma_n(d_{n-1}) = d) \;=\; \mathbb{P}(\delta_n(d_{n-1}) = -s,\ \gamma_n(d_{n-1}) = d).$$

Prova: (1) Se $d_{n-1} = 0$, então por (2.3.1)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} + s, D_n = d|D_{n-1} = 0, S_{n-1} = s_{n-1}) = (a) \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] = (b) \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s-d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{-s+d}{2}\right)\right] \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{-s-d}{2}\right)\right] = (c) \\ = \; & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} - s, D_n = d|D_{n-1} = 0, S_{n-1} = s_{n-1}), \end{aligned}$$

sendo que as igualdades (a) e (c) seguem da prova do lema 2.5.3, no caso de $D_{n-1} = 0$, e a igualdade (b) segue da hipótese de que os u's são fortemente não viesados.
(2) Se $d_{n-1} \neq 0$, então por (2.3.1)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} + s, D_n = d_{n-1} + d|D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}) = (d) \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] = (e) \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s-d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s+d}{2}\right)\right] \\ = \; & \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s+d}{2}\right)\right] \nu\left[u_1\left(0, \frac{-s-d}{2}\right)\right] = (f) \\ & \mathbb{P}(S_n = s_{n-1} - s, D_n = d_{n-1} + d|D_{n-1} = d_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}), \end{aligned}$$

sendo que as igualdades (d) e (f) seguem da prova do lema 2.5.3, no caso de $D_{n-1} \neq 0$, e a igualdade (e) segue da conseqüência da definição 2.5.1. Logo, os ítens (1) e (2) provam o Lema 2.5.4. □

Capítulo 3

Ordem de magnitude das flutuações temporais

Neste capítulo determinamos a ordem de magnitude em n de $Var(L_n(x))$ e, como conseqüência, a ordem das flutuações da altura do sitio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, para o processo d-dimensional L_n no modelo CI, para os seguintes casos: dos u's simétricos, o que implica $\mu = 0$, e dos u's viesados, isto é, $\mu \neq 0$.

Na Seção 3.1 estudamos o caso dos u's simétricos e suporemos que o processo L_n tem alcance limitado. Provamos que neste caso as flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, estabilizam-se apenas quando $d \geq 5$ (Teorema 3.1.1). Em relação à convergência temporal de $L_n(x)$ mostramos que este converge quase certamente e em $\mathcal{L}^2$ para a variável $L(x)$, quando $n \to \infty$, no caso de $d \geq 5$ e do processo com alcance limitado. Como conseqüência concluímos que $X_n(x)$ converge fracamente para $L(x)$ quando $n \to \infty$. Ainda neste caso, tratamos da convergência espacial de $L(x)$ estudando a forma das flutuações espaciais desta medida limite e a ordem de magnitude em x destas flutuações (Teorema 3.1.2). Também nesta seção apresentamos resultados referentes ao caso particular de $d = 1$ e alcance estritamente 1 (vizinhos mais próximos) onde encontramos o limite exato.

Na Seção 3.2 tratamos do caso dos u's viesados e assumimos que o processo tem quarto momento finito. Nesta situação mostramos que as flutuações de $L_n(x)$ nunca se estabilizam, flutuando sempre em todas as dimensões (Teorema 3.2.1).

3.1 Caso dos $u's$ simétricos

Seja $u_n(i,j)$ como na Definicao 2.5.1, para todo $n \geq 1$ e $i,j \in \mathbb{Z}^d$. Então temos que $\mu = 0$ e de (2.2.10), obtemos

$$Var(L_n(x)) = Var(\bar{L}_n) + 4Var(x\bar{Z}_n) + 4Cov(\bar{L}_n, x\bar{Z}_n). \tag{3.1.1}$$

Fazendo $i = j-1$ e escrevendo S_i como soma dos seus incrementos em (2.2.37), temos

$$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(D_{j-1})\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] \\ &+ 2\tilde{\nu}(\rho) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(D_{j-1}))\mathbf{1}\{D_i = 0\}] + \sigma_*^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0), \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

onde, neste caso de $\mu = 0$, com base em (2.2.12), (2.2.13) e (2.2.34), temos

$$\theta_n(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (j-k)u_n(k,j), \tag{3.1.3}$$

$$\theta_n^*(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|j-k\|^2 u_n(k,j), \tag{3.1.4}$$

$$\sigma_*^2 = Var(\theta_1(0)) = \nu[\theta_1(0)]^2. \tag{3.1.5}$$

Além disso, φ e ρ são definidos como em (2.2.31) e (2.2.35), respectivamente, tais que

$$\varphi \stackrel{d}{=} \theta_1(0) \quad \text{e} \quad \rho \stackrel{d}{=} \theta_1(0)\theta_1^*(0). \tag{3.1.6}$$

3.1.1 Cota superior para $Var(\bar{L}_n)$

Vamos analisar, separadamente, cada parcela de $Var(\bar{L}_n)$, com o objetivo de determinar cotas superiores para a sua ordem de magnitude em n.

(A) Estudo da primeira parcela

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(D_{j-1})\varphi\right)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] \\ = & \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\sum_{j=1}^{i} (\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2 + 2\sum_{k<j=1}^{i} (\delta_k(D_{k-1})\varphi)(\delta_j(D_{j-1}))\varphi)\mathbf{1}\{D_i = 0\}\right)\right] \\ = & \tilde{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}\left[(\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right]\right) + \end{aligned}$$

$$+ 2\tilde{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k<j=1}^{i} \mathbb{E}\left[(\delta_k(D_{k-1})\varphi)(\delta_j(D_{j-1})\varphi)\mathbf{1}\{D_i=0\}\right]\right). \tag{3.1.7}$$

Como $\delta_j(l) = (Y_j - Y_{j-1}) + (\hat{Y}_j - \hat{Y}_{j-1})$ entao $\|\delta_j(l)\| \leq \|Y_j - Y_{j-1}\| + \|\hat{Y}_j - \hat{Y}_{j-1}\| \leq 2M$, sendo M o alcance do processo. Portanto,

$$(\delta_j(l)\varphi)^2 \leq \|\delta_j(l)\|^2\|\varphi\|^2 = 4M^2\|\varphi\|^2. \tag{3.1.8}$$

Então, usando (3.1.8), para todo φ temos

$$\begin{aligned}(A1) \qquad & \mathbb{E}[(\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}] = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[(\delta_j(l)\varphi)^2\mathbf{1}\{D_{j-1}=l, D_i=0\}] \\ \leq & \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[4M^2\|\varphi\|^2\mathbf{1}\{D_{j-1}=l, D_i=0\}] = 4M^2\|\varphi\|^2\mathbb{P}(D_i=0).\end{aligned}$$

Portanto, para a primeira parcela de (3.1.7), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{E}\left[(\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}\right]\right) &\leq \tilde{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}4M^2\|\varphi\|^2\mathbb{P}(D_i=0)\right) \\ &= 4M^2\tilde{\nu}\left(\|\varphi\|^2\right)\sum_{i=1}^{n-1} i\mathbb{P}(D_i=0). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Em relação à segunda parcela de (3.1.7), para todo φ temos

$$\begin{aligned}(A2) \qquad & \mathbb{E}\left[(\delta_k(D_{k-1})\varphi)(\delta_j(D_{j-1})\varphi)\mathbf{1}\{D_i=0\}\right] \\ = & \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\sum_{r\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[(\delta_k(r)\varphi)(\delta_j(l)\varphi)\mathbf{1}\{D_{k-1}=r, D_{j-1}=l, D_i=0\}\right] \\ = & \sum_{l,r\in\mathbb{Z}^d}\sum_{w_1,w_2\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[(\delta_k(r)\varphi)(\delta_j(l)\varphi) \times \\ & \times \mathbf{1}\{D_{k-1}=r, D_k=r+w_2, D_{j-1}=l, D_j=l+w_1, D_i=0\}] \\ = & \sum_{l,r\in\mathbb{Z}^d}\sum_{w_1,w_2\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z_1,z_2\in\mathbb{Z}^d} (z_1\varphi)(z_2\varphi) \times \\ & \times \mathbb{P}(\delta_k(r)=z_2, \delta_j(l)=z_1, D_{k-1}=r, D_{j-1}=l, D_k=r+w_2, D_j=l+w_1, D_i=0).\end{aligned}$$

Sabemos que D_n é Markoviano e que

$$D_i = D_j + \sum_{m=j+1}^{i}\gamma_m(D_{m-1}), \quad \text{para todo } j,\ 0\leq j\leq i.$$

Portanto, dado que $D_j = l + w_1$, temos que

$$D_i = l + w_1 + \sum_{m=j+1}^{i}\gamma_m(D_{m-1}).$$

Ou seja, dado D_j, temos que D_i só depende de D_{m-1}, para todo $m \geq j+1$. Como $k < j$ então D_i fica independente de $D_{k-1}, D_k, D_{j-1}, \delta_k(D_{k-1})$ e de $\delta_j(D_{j-1})$. Além disso, sabemos que

$$[D_j = l + w_1, D_{j-1} = l] \;=\; [D_{j-1} = l, \gamma_j(l) = w_1] \quad \text{e}$$

$$[D_k = r + w_2, D_{k-1} = r] \;=\; [D_{k-1} = r, \gamma_k(r) = w_2].$$

Portanto, para $k < j$ e todo φ , temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(\delta_k(D_{k-1})\varphi)(\delta_j(D_{j-1})\varphi)\mathbf{1}\{D_i = 0\}] \\
= & \sum_{l,r\in\mathbb{Z}^d} \sum_{w_1,w_2\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{Z}^d} (z_1\varphi)(z_2\varphi)\mathbb{P}(D_i = 0|D_j = l + w_1) \;\times \\
& \quad \times \mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1, \delta_k(r) = z_2, \gamma_k(r) = w_2, D_{j-1} = l, D_{k-1} = r) \\
= & \sum_{l,r\in\mathbb{Z}^d} \sum_{w_1,w_2\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{Z}^d} (z_1\varphi)(z_2\varphi)\mathbb{P}(D_i = 0|D_j = l + w_1) \;\times \\
& \quad \times \mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1|\delta_k(r) = z_2, \gamma_k(r) = w_2, D_{j-1} = l, D_{k-1} = r) \;\times \\
& \quad \times \mathbb{P}(\delta_k(r) = z_2, \gamma_k(r) = w_2, D_{j-1} = l, D_{k-1} = r) \\
= & \sum_{l,r\in\mathbb{Z}^d} \sum_{w_1,w_2\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{Z}^d} (z_1\varphi)(z_2\varphi)\mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1) \;\times \\
& \quad \times \mathbb{P}(\delta_k(r) = z_2, \gamma_k(r) = w_2, D_{j-1} = l, D_{k-1} = r)\mathbb{P}(D_i = 0|D_j = l + w_1) \\
= & \; 0,
\end{aligned}$$

pois como vimos no Lema (2.5.4), a cadeia S_n tem incrementos simétricos neste caso de $\mu = 0$ e portanto, $\mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1) = \mathbb{P}(\delta_j(l) = -z_1, \gamma_j(l) = w_1)$. Daí, para a segunda parcela de (3.1.7), temos

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k<j=1}^{i-1} \mathbb{E}[(\delta_k(D_{k-1})\varphi)(\delta_j(D_{j-1})\varphi)\mathbf{1}\{D_i = 0\}] = 0. \tag{3.1.10}$$

Logo, usando (3.1.9) e (3.1.10) em (3.1.7), concluímos o item (A) obtendo uma cota superior para a primeira parcela de $Var(\bar{L}_n)$, dada por

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j(D_{j-1})\varphi\right)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] \leq 4M^2\nu(\|\varphi\|^2) \sum_{i=1}^{n-1} i\mathbb{P}(D_i = 0). \tag{3.1.11}$$

(B) Estudo da segunda parcela

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(D_{j-1})\right) \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}(\delta_j(l)\mathbf{1}\{D_{j-1} = l, D_i = 0\})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{l,w_1\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}(\delta_j(l)\mathbf{1}\{D_{j-1} = l, D_j = l + w_1, D_i = 0\})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{l,w_1\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z_1\in\mathbb{Z}^d} z_1 \mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, D_{j-1} = l, D_j = l + w_1, D_i = 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{l,w_1\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z_1\in\mathbb{Z}^d} z_1 \mathbb{P}(D_i = 0|D_j = l + w_1) \times$$
$$\times \mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1|D_{j-1} = l)\mathbb{P}(D_{j-1} = l)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{l,w_1\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z_1\in\mathbb{Z}^d} z_1 \mathbb{P}(\delta_j(l) = z_1, \gamma_j(l) = w_1) \times$$
$$\times \mathbb{P}(D_i = 0|D_j = l + w_1)\mathbb{P}(D_{j-1} = l)$$

$$= 0, \tag{3.1.12}$$

novamente pelo fato da cadeia S_n ter incrementos simétricos no caso dos u's simétricos (ver Lema 2.5.4).

Substituindo (3.1.11) em (3.1.2) e fazendo $c_1 = 4M^2\nu(\|\varphi\|^2)$, temos

$$Var(\bar{L}_n) \leq c_1 \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(D_k = 0) + \sigma_*^2 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(D_k = 0). \tag{3.1.13}$$

Seja H_n um passeio aleatório começando no zero, homogêneo e probabilidade de transição, para todo $l, k \in \mathbb{Z}^d$, dada por

$$\gamma_H(l,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu(u_1(0,j))\nu(u_1(l,j+k)). \tag{3.1.14}$$

Por Spitzer (1964), P7.9, página 75, existe constante L_0 tal que, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}(H_n^0 = x) \leq L_0 n^{-d/2}, \quad \forall d \geq 1. \tag{3.1.15}$$

O passeio aleatório D_n é simétrico, homogêneo fora da origem e tem probabilidade de transição dada por

$$\gamma_D(l,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu(u_1(0,j)u_1(l,j+k)). \tag{3.1.16}$$

Observe que, as probabilidades de transição de D_n e H_n diferem apenas na origem. Isto é, se $l = 0$, temos

$$\gamma_D(0,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu[u_1(0,j)u_1(0,j+k)] \neq \gamma_H(0,k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d,$$

e, se $l \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}\gamma_D(l,k) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu[u_1(0,j)].\nu[u_1(l,j+k)] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \nu[u_1(0,j)].\nu[u_1(0,j+k-l)] = \gamma_H(l,k),\end{aligned}$$

sendo que a primeira igualdade segue da independência entre $u_1(0,\cdot)$ e $u_1(l,\cdot)$, e a segunda, vem do fato de $u_1(i,i+\cdot)$ ser invariante por translação. Para estimar a primeira parcela do lado direito da desigualdade (3.1.13), vamos utilizar o seguinte Lema:

Lema 3.1.1 *Para todo $0 < s < 1$, sejam $f(s)$ e $g(s)$ as séries de potência de $\mathbb{P}(D_n = 0)$ e $\mathbb{P}(H_n = 0)$, respectivamente, e $f'(s)$ e $g'(s)$ suas derivadas. Então, existe uma constante $c < \infty$ tal que*

$$\lim_{s\to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} \leq c.$$

Prova: Ver Apêndice A.2.

Portanto, o Lema 3.1.1 nos garante que existe constante c, $0 < c < \infty$, tal que

$$\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(D_k = 0)s^k \leq c \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(H_k = 0)s^k. \tag{3.1.17}$$

Daí, usando (3.1.15), no caso de $x = 0$, em (3.1.17), temos

$$\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(D_k = 0)s^k \leq cL_0 \sum_{k\geq 1} k^{1-d/2}s^k. \tag{3.1.18}$$

Por outro lado, para todo $0 \leq s \leq 1$, temos

$$\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(D_k = 0)s^k \geq \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0)s^k. \tag{3.1.19}$$

Observe que, para $k \leq n$ vale

$$(1 - \frac{1}{n})^k \geq (1 - \frac{1}{n})^n \geq \tilde{c} > 0. \tag{3.1.20}$$

Então, considerando (3.1.19) para $s = 1 - \frac{1}{n}$ e usando (3.1.20), temos

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{1}{\tilde{c}} \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(D_k = 0)(1 - \frac{1}{n})^k. \tag{3.1.21}$$

Substituindo (3.1.18), no caso particular de $s = 1 - \frac{1}{n}$, no segundo membro da desigualdade (3.1.21), temos

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{cL_0}{\tilde{c}} \sum_{k\geq 1} k^{1-d/2}(1 - \frac{1}{n})^k = \frac{cL_0}{\tilde{c}} f^*(1 - \frac{1}{n}). \tag{3.1.22}$$

Vamos estudar o comportamento de $f^*(s) = \sum_{k\geq 1} k^{1-d/2} s^k$, para todo $d \geq 1$, com o objetivo de estimar $\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k^0 = 0)$ e, consequentemente, encontrar uma cota superior para $Var(\bar{L}_n)$, usando (3.1.13) e o Lema 3.3 [A.6], que garante que existem constantes L_1, L_2 e L_3 tais que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_k = 0) \leq \begin{cases} L_1 n^{1/2}, & \text{se } d = 1 \\ L_2 \log n, & \text{se } d = 2 \\ L_3, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

(a) Se $d = 2$ então

$$f^*(s) = \sum_{k\geq 1} s^k = \frac{s}{1-s} \Longrightarrow f^*(1 - \frac{1}{n}) = n - 1 < n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{cL_0}{\tilde{c}}\, n.$$

Sejam $k_2 = \frac{c_1 c L_0}{\tilde{c}}$ e $\tilde{k}_2 = \sigma_*^2 L_2$. Então, $Var(\bar{L}_n) \leq k_2 n + \tilde{k}_2 \log n$. Logo, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n} \leq k_2. \tag{3.1.23}$$

(b) Se $d = 3$ então

$$(f^*(s))^2 = (\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} s^n)^2 = \sum_{n\geq 1} (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{n-k}}) s^n.$$

Sendo $x_k = \frac{k}{n}$, $f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{x_k(1-x_k)}}$ e $\Delta x_k = \frac{1}{n}$,

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \frac{1}{n} = \pi.$$

Portanto, existe constante A tal que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq A, \quad \text{para todo } n > 1.$$

Logo, fazendo $\tilde{A} = \sqrt{A}$, temos

$$(f^*(s))^2 \leq \sum_{n\geq 1} As^n = A\frac{s}{1-s} \Longrightarrow f^*(s) \leq \sqrt{A}\sqrt{\frac{s}{1-s}} \Longrightarrow$$

$$f^*(1-\frac{1}{n}) \leq \tilde{A}(n-1)^{1/2} < \tilde{A}n^{1/2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{cL_0\tilde{A}}{\tilde{c}}\, n^{1/2}.$$

Fazendo $k_3 = \frac{c_1 c L_0 \tilde{A}}{\tilde{c}}$ e $\tilde{k}_3 = \sigma_*^2 L_3$, temos $Var(\bar{L}_n) \leq k_3 n^{1/2} + \tilde{k}_3$. Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{1/2}} \leq k_3. \tag{3.1.24}$$

(c) Se $d = 4$ então

$$f^*(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} s^k = \sum_{k\geq 1} (\int_0^s x^{k-1} dx) = \log \frac{1}{1-s} \Longrightarrow$$

$$f^*(1-\frac{1}{n}) = \log n \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{cL_0}{\tilde{c}} \log n.$$

Sendo $k_4 = \frac{c_1 c L_0}{\tilde{c}}$ e $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_3$, obtemos $Var(\bar{L}_n) \leq k_4 \log n + \tilde{k}_4$. Então

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{\log n} \leq k_4 \tag{3.1.25}$$

(d) Se $d \geq 5$ então

$$f^*(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{d/2-1}} s^k \quad \text{e} \quad \frac{d}{2} - 1 \geq \frac{3}{2} \Longrightarrow f^*(s) \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{d/2-1}} < \infty.$$

Logo, existe constante $\bar{A} > 0$ tal que $f^*(s) \leq \bar{A}$, $\forall 0 \leq s \leq 1$. Ou seja,

$$f^*(1-\frac{1}{n}) \leq \bar{A} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \frac{cL_0}{\tilde{c}} \bar{A}.$$

Fazendo, $k_5 = \frac{c_1 c L_0 \bar{A}}{\tilde{c}}$ e $\tilde{k}_5 = \tilde{k}_3$, temos $Var(\bar{L}_n(0)) \leq k_5 + \tilde{k}_5 \Longleftrightarrow Var(\bar{L}_n)$ é limitada. Isto é,

$$Var(\bar{L}_n(0)) \leq \text{constante}, \quad \forall n. \tag{3.1.26}$$

(e) Se $d = 1$ então, usando os Lemas 3.1 e 3.2 [A.6], pode-se mostrar que existe constante $0 < a_1 < \infty$, tal que

$$\mathbb{P}(D_n = 0) \sim \frac{a_1}{\sqrt{n}}, \tag{3.1.27}$$

onde $a_n \sim \lambda c_n$ significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lambda$. Portanto, existe constante $c_0 > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(D_n = 0) \leq c_0 n^{-1/2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(D_k = 0) \leq \sum_{k=1}^{n} c_o k^{1/2} \leq c_0 n^{3/2}.$$

Fazendo $k_1 = c_1 c_0$ e $\tilde{k}_1 = \sigma_*^2 L_1$, temos $Var(\bar{L}_n) \leq k_1 n^{3/2} + \tilde{k}_1 n^{1/2}$. Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{3/2}} \leq k_1. \tag{3.1.28}$$

3.1.2 Cota inferior para $Var(\bar{L}_n)$

Novamente, vamos estudar cada parcela de $Var(\bar{L}_n)$ e, para isto, consideremos a expressão dada em (2.2.37).

(C) Estudo da primeira parcela: usando (2.2.29), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] = 4\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}\left(\frac{S_i}{2}\varphi\right)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] \\
= \; & 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}(k\varphi)^2 \mathbb{P}\left(\frac{S_i}{2} = k, D_i = 0\right) = 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}(k\varphi)^2 \mathbb{E}[\mathbb{P}^2(Y_i = k|\mathcal{F}_i)].
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Jensen, temos

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}^2(Y_i = k|\mathcal{F}_i)] \geq (\mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_i = k|\mathcal{F}_i)])^2 = [\mathbb{P}(Y_i = k)]^2.$$

Então, para qualquer $\epsilon \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] \geq 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}(k\varphi)^2 \mathbb{P}^2(Y_i = k) \\
\geq \; & 4\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k;\, \tilde{\nu}(k\varphi)^2 > \epsilon i \in\mathbb{Z}^d} \tilde{\nu}(k\varphi)^2 \mathbb{P}^2(Y_i = k) \geq 4\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon i \sum_{k;\, \tilde{\nu}(k\varphi)^2 > \epsilon i \in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^2(Y_i = k) \\
= \; & 4\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon i \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^2(Y_i = k) - \sum_{k;\, \tilde{\nu}(k\varphi)^2 \leq \epsilon i \in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^2(Y_i = k)\Big].
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Seja $(\bar{Y}_n)_{n\geq 0}$ uma cópia independente de $(Y_n)_{n\geq 0}$, começando na origem. Consideremos o passeio aleatório $(\bar{D}_n)_{n\geq 0}$, definido pela diferença de dois passeios independentes, que não apresenta a não-homogeneidade na origem que estava presente em D_n. Isto é,

$$\bar{D}_n = Y_n - \bar{Y}_n, \tag{3.1.30}$$

com probabilidade de transição dada por

$$\gamma_{\bar{D}}(l,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu(u_1(0,j))\nu(u_1(0,j+k-l)), \tag{3.1.31}$$

que depende apenas de $(k-l)$. De (3.1.14) e (3.1.31), note que, $\bar{D}_n \stackrel{d}{=} H_n$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}^2(Y_i=k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(Y_i=k)\mathbb{P}(\bar{Y}_i=k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(Y_i=k,\bar{Y}_i=k)\\ &= \mathbb{P}(Y_i=\bar{Y}_i) = \mathbb{P}(\bar{D}_i=0). \end{aligned}\tag{3.1.32}$$

Substituindo (3.1.32) em (3.1.29), temos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}]\\ \geq\ & 4\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon i[\mathbb{P}(\bar{D}_i=0) - \sup_k \mathbb{P}(Y_i=k) \sum_{k;\ \tilde{\nu}(k\varphi)^2\leq \epsilon i\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(Y_i=k)]. \end{aligned}\tag{3.1.33}$$

Por Spitzer (1964), P 7.9, página 75, existem constantes M_0 e $\bar{M}_0$ tais que,

$$\mathbb{P}(\bar{D}_n=0) \geq \bar{M}_0 n^{-d/2} \quad \text{e} \quad \sup_k \mathbb{P}(Y_n=k) \leq M_0 n^{-d/2}. \tag{3.1.34}$$

Substituindo (3.1.34) em (3.1.33), temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}]\\ \geq\ & 4\epsilon\sum_{i=1}^{n-1}[\bar{M}_0 i^{1-d/2} - M_0 i^{1-d/2}\mathbb{P}\left(\tilde{\nu}(Y_i\varphi)^2 \leq \epsilon i\right)]\\ =\ & 4\epsilon\sum_{i=1}^{n-1} i^{1-d/2}\left[\bar{M}_0 - M_0\mathbb{P}\left(\tilde{\nu}(\frac{Y_i\varphi}{\sqrt{i}})^2 \leq \epsilon\right)\right]. \end{aligned}\tag{3.1.35}$$

Como Y_i é um passeio aleatório podemos escrever $Y_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta_j$, sendo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos. Daí, temos

$$\begin{aligned}Cov(Y_i) &= Cov(Y_{ik}, Y_{ir}) = Cov\left(\sum_{j=1}^{i}\Delta_{jk}, \sum_{j=1}^{i}\Delta_{jr}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} Cov(\Delta_{jk},\Delta_{jr}) = i^2\ \xi_{k,r}, \end{aligned}$$

para todo $k,r = 1,\ldots,d$. Sendo $V_i = \frac{Y_i}{\sqrt{i}}$, tenos que

$$Cov(V_i) = Cov\left(\frac{Y_i}{\sqrt{i}}\right) = i\ \xi_{k,r},$$

para todo $k, r = 1, \ldots, d$. Como o passeio Y_i tem segundo momento finito, pelo Teorema Central do Limite temos que

$$V_i \stackrel{d}{\Longrightarrow} V,$$

onde $V \sim N(0, A)$ e A é a matriz de variâncias e covariâncias cujas entradas são dadas por $\xi_{k,r}$, para todo $k, r = 1, \ldots, d$. Observe que, como conseqüência de (2.1.6) e de (2.2.31) temos que para todo φ,

$$I\!P(Y_i\, \varphi \neq 0) > 0, \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Como $\tilde{\nu}\left[(V_i.\varphi)^2\right]$ é uma função contínua de V_i então

$$\tilde{\nu}\left[(V_i.\varphi)^2\right] \stackrel{d}{\Longrightarrow} Z = \tilde{\nu}\left[(V.\varphi)^2\right].$$

A não trivialidade da matriz A e o fato de que $I\!P_{\tilde{\nu}}(\varphi \neq 0) > 0$ (ver (2.2.31)), implicam que Z é contínua e, logo, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que quando $i \to \infty$,

$$I\!P\left(\tilde{\nu}\left[(V_i.\varphi)^2\right] \leq \varepsilon\right) \to I\!P(Z \leq \varepsilon) \leq \delta. \tag{3.1.36}$$

Logo, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para i suficientemente grande, $i > i_0$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} I\!E[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] \geq 4\varepsilon \sum_{i=1}^{i_0} i^{1-d/2}\left[\bar{M}_0 - M_0 I\!P\left(\tilde{\nu}[(V_i.\varphi)^2] \leq \varepsilon\right)\right] + \\
&\quad + 4\varepsilon(\bar{M}_0 - M_0\delta) \sum_{i=i_0+1}^{n-1} i^{1-d/2} \\
&= 4\varepsilon \sum_{i=1}^{i_0} i^{1-d/2}\, c_i(\epsilon) + r \sum_{i=i_0+1}^{n-1} i^{1-d/2},
\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

de forma que $(\bar{M}_0 - M_0\delta) > 0$ e fazendo $c_i(\epsilon) = \left[\bar{M}_0 - M_0 I\!P\left(\tilde{\nu}[(V_i.\varphi)^2] \leq \epsilon\right)\right]$ e $r = 4\epsilon(\bar{M}_0 - M_0\delta) > 0$. Substituindo a expressão anterior em (2.2.37) e considerando que a segunda parcela desta última se anula (ver (3.1.12)) temos que

$$Var(\bar{L}_n) \;\geq\; 4\varepsilon \sum_{k=1}^{k_0} k^{1-d/2} c_k(\varepsilon) + r \sum_{k=k_0+1}^{n-1} k^{1-d/2} + \sigma_*^2 \sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0). \tag{3.1.38}$$

Portanto, usando a desigualdade anterior e o Lema 3.3 [A.6], vamos estabelecer uma cota inferior pra $Var(\bar{L}_n(0))$, para todo $d \geq 1$.

(i) Se $d = 1$, então

$$\frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{3/2}} \geq \frac{4\varepsilon \sum_{k=1}^{k_0} k^{1/2} c_k(\varepsilon)}{n^{3/2}} + r \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}} + \frac{\sigma_*^2}{n}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0)}{n^{1/2}}\right).$$

Sejam $x_k = \frac{k}{n}$, $f(x_k) = \sqrt{\frac{k}{n}}$ e $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, para todo k. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{3/2}} \geq \frac{2}{3} r. \tag{3.1.39}$$

(ii) Se $d = 2$, então

$$\frac{Var(\bar{L}_n)}{n} \geq \frac{4\varepsilon}{n} \sum_{k=1}^{k_0} c_k(\varepsilon) + \frac{r(n-1-k_0)}{n} + \frac{\sigma_*^2 \log n}{n} \; \frac{\sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0)}{\log n}.$$

Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n} \geq r. \tag{3.1.40}$$

(iii) Para $d = 3$, então

$$Var(\bar{L}_n) \geq 4\varepsilon \sum_{k=1}^{k_0} \frac{c_k(\varepsilon)}{\sqrt{k}} + r \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sigma_*^2 \sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0).$$

Como $k \leq n$ então $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Portanto,

$$\frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{1/2}} \geq \frac{4\varepsilon}{n} \sum_{k=1}^{k_0} c_k(\varepsilon) + \frac{r(n-1-k_0)}{n} + \frac{\sigma_*^2}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0).$$

Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n)}{n^{1/2}} \geq r. \tag{3.1.41}$$

(iv) Quando $d = 4$, temos

$$Var(\bar{L}_n(0)) \geq 4\varepsilon \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k} c_k(\varepsilon) + r \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sigma_*^2 \sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0).$$

Sejam $x_k = \frac{k}{n}$, $f(x_k) = \frac{1}{x_k}$ e $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Então,

$$\sum_{k=k_0+1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=k_0+1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k \geq \log n - \log(k_0+1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{Var(\bar{L}_n)}{\log n} &\geq \frac{4\varepsilon}{\log n}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{c_k(\varepsilon)}{k} + \frac{r(\log n - \log(k_0+1))}{\log n} \\ &+ \frac{\sigma_*^2}{\log n}\sum_{k=0}^{n-1} I\!P(D_k = 0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Var(\bar{L}_n(0))}{\log n} \geq r. \tag{3.1.42}$$

3.1.3 Ordem de magnitude de $Var(\bar{L}_n)$

Portanto, utilizando as expressões de (3.1.23) a (3.1.28) e de (3.1.39) a (3.1.42), temos o seguinte resultado:

$$Var(\bar{L}_n) \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} n^{2-d/2}, & \text{se } d = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ \log n, & \text{se } d = 4 \\ \text{limitada}, & \text{se } d \geq 5. \end{cases} \tag{3.1.43}$$

3.1.4 Ordem de magnitude de $Var(L_n(x))$ no caso simétrico

Observe que, usando (2.2.41) e o fato de que $\mu = 0$, temos

$$Var(x\bar{Z}_n) = \sigma_x^2 \sum_{j=1}^{n} I\!P(D_{j-1}^0 = 0),$$

pois, $\sigma_\mu^2 = \gamma_{x\mu} = 0$ e sendo σ_x^2 independente de n. Logo, pelo Lema 3.3 [A.6], temos

$$Var(x\bar{Z}_n) \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} n^{1/2}, & \text{se } d = 1, \\ \log n, & \text{se } d = 2 \\ \text{limitada}, & \text{se } d \geq 3. \end{cases} \tag{3.1.44}$$

Observe que, para todo $d \geq 1$, a ordem de magnitude em n de $Var(\bar{L}_n)$ domina a ordem de $Var(x\bar{Z}_n)$. E, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, podemos garantir que a ordem

de $Cov(\bar{L}_n, x\bar{Z}_n)$ é inferior a essa ordem máxima. Portanto, na expressão (3.1.1), temos que, a ordem de magnitude de $Var(L_n(x))$ é dada pela ordem do termo dominante que, neste caso, é $Var(\bar{L}_n)$. Então, usando (3.1.43), (3.1.44) e (3.1.1), concluímos a prova do seguinte teorema:

Teorema 3.1.1: *Seja $L_n(x)$ como definido em (2.2.7). Se $L_n(x)$ tem alcance limitado e $u_n(i,j)$, para todo $n \geq 1$ e $i, j \in \mathbb{Z}^d$, é fortemente não viesado, então*

$$Var(L_n(x)) \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} n^{2-d/2} & \text{se } d = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ \log n & \text{se } d = 4 \\ \text{limitada} & \text{se } d \geq 5. \end{cases}$$

O teorema acima nos diz que, no caso não viesado e com alcance limitado, as flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, são da ordem de: $n^{1-d/4}$, se $d = 1, 2$ ou 3; $(\log n)^{1/2}$, se $d = 4$; e constante, se $d \geq 5$. Isto é, as flutuações da altura do sítio x se estabilizam quando $d \geq 5$ e $L_n(x)$ não converge para o equilíbrio se $d \leq 4$.

Observe que, em $d \geq 5$, devido à martingalidade de $\bar{L}_n$ e do Teorema de Convergência de Martingais em L^2 Durrett [5], temos que

$$\bar{L}_n \to \bar{L}, \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty,$$

sendo $\bar{L}$ tal que $Var(\bar{L}(x)) = \lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x)) < \infty$,independente de x.

Do Lema 2.2, da Proposição 2.3 e do Lema 3.3 [A.6] e do fato de que $\bar{Z}_n(x) \stackrel{d}{=} \tilde{Z}_n(x)$, temos que

$$\bar{Z}_n \to \bar{Z}, \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty,$$

com $\bar{Z}$ tal que $Var(x\ \bar{Z}(x)) = \lim_{n\to\infty} Var(x\ \bar{Z}_n(x)) < \infty$, independente de x.

Logo, de (2.2.7), para $d \geq 5$, temos que

$$L_n \to L, \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty,$$

sendo L tal que

$$L(x) - \|x\|^2 = \bar{L}(x) + x\bar{Z}(x).$$

De (2.1.14), temos que

$$X_n \stackrel{d}{\Longrightarrow} L, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Como as distribuições de $\bar{L}(x)$ e $\bar{Z}(x)$ não dependem de x, temos provado o seguinte Teorema.

Teorema 3.1.2: *Para todo $\theta \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\theta\| = 1$,*

$$\frac{L(x) - \|x\|^2}{\|x\|} \xrightarrow{d} 2\theta\bar{Z}(0) \quad \text{e} \quad \frac{Var(L(x))}{\|x\|^2} \to Var(2\theta\bar{Z}(0)) < \infty,$$

quando $\|x\| \to \infty$ e $\frac{x}{\|x\|} \to \theta$.

Note-se que, ao contrário do resultado correspondente para o PMA com configuração inicial planar, a superfície limite/invariante no caso parabólico tem flutuações espaciais não triviais.

3.1.5 Caso unidimensional e alcance estritamente 1

Agora, consideramos o caso particular de $d = 1$ e "vizinhos mais próximos". Isto é, para todo $n \geq 1$ e $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$u_n(i,j) = 0, \quad \text{se} \quad |i - j| \neq 1 \quad \text{e}$$
$$u_n(i, i-1) = 1 - u_n(i, i+1).$$

Observe que, neste caso, os passeios S_n e D_n não pulam simultaneamente. Sejam $\delta_j(D_{j-1})$ e $\gamma_i(D_{i-1})$, $i, j \geq 1$, como definidos em (2.3.4) e (2.3.5). Portanto, temos

$$\mathbb{P}(\delta_j(D_{j-1}) = z | D_{j-1} \neq 0) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } z = 0 \\ 1/4, & \text{se } z = 2 \\ 1/4, & \text{se } z = -2 \end{cases} \tag{3.1.45}$$

$$\mathbb{P}(\delta_j(D_{j-1}) = z | D_{j-1} = 0) = \begin{cases} 1 - 2\beta, & \text{se } z = 0 \\ \beta & \text{se } z = 2 \\ \beta & \text{se } z = -2, \end{cases} . \tag{3.1.46}$$

sendo $\beta = \nu[u_n^2(0,1)]$. Com o objetivo de identificar qual dos passeios, S_n ou D_n, vai saltar, vamos definir uma nova variável, que indica qual deles pula no tempo $(j-1)$. Seja $\{\ \eta_j(D_{j-1}),\ j \geq 1\ \}$ uma família de variáveis aleatórias, tal que

1. $\eta_j(D_{j-1}) = 1 \iff$ apenas S_j salta no tempo $(j-1) \iff S_j = S_{j-1} + 2$ ou $S_{j-1} - 2$ e $D_j = D_{j-1}$;

2. $\eta_j(D_{j-1}) = 0 \Longleftrightarrow$ apenas D_j salta no tempo $(j-1) \Longleftrightarrow S_j = S_{j-1}$ e $D_j = D_{j-1}+2$ ou $D_{j-1} - 2$.

Seja $\{ \eta_j(x),\ j \geq 1,\ x \in \mathbb{Z} \}$ uma família de v.a.'s independentes, sendo $\eta_j(x) \in \{0,1\}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Se $x \neq 0$ então $\eta_j(x)$ tem distribuição de Bernoulli com parâmetro $1/2$ e, se $x = 0$, tem distribuição de Bernoulli com parâmetro 2β. Sejam $\bar{\delta}_j(D_{j-1})$ e $\bar{\gamma}_j(D_{j-1})$ v.a.'s que representam o tamanho e o sentido do salto de S_n e D_n, respectivamente, no tempo $(j-1)$, dado que este salto ocorreu. Portanto, a variável $\bar{\delta}_j(k)$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, tanto no caso $D_{j-1} \neq 0$ como $D_{j-1} = 0$ tem a seguinte distribuição:

$$\bar{\delta}_j(k) = \begin{cases} 2 & \text{com probab } \frac{1}{2} \\ -2 & \text{com probab } \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.1.47}$$

Então, podemos expressar os passeios S_n e D_n da seguinte forma:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{\delta}_j(D_{j-1})\eta_j(D_{j-1}) \quad \text{e} \tag{3.1.48}$$

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_j(D_{j-1})\bar{\eta}_j(D_{j-1}), \tag{3.1.49}$$

sendo $\bar{\eta}_j(D_{j-1}) = 1 - \eta_j(D_{j-1})$.

Logo, $\{\bar{\delta}_j(k),\ j \geq 1, \forall\ k \in \mathbb{Z}\}$ é uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com a distribuição dada em (3.1.47). Observe que, neste caso de $d = 1$ e alcance 1 temos, $\theta_1^*(0) = 1$ e $\theta_1(0) = 2u_1(0,1) - 1$. Portanto, $\nu(\rho) = \sigma_*^2 = 0$ e, seja $\sigma^2 = \nu(\varphi^2) = Var(\theta_1(0)) = 4\beta - 1$. Então, usando (3.1.2) e escrevendo S_n como em (3.1.48), temos

$$Var(\bar{L}_n) \;=\; \sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{i} \bar{\delta}_j(D_{j-1})\eta_j(D_{j-1}))^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}]. \tag{3.1.50}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{i} \bar{\delta}_j(D_{j-1})\eta_j(D_{j-1}))^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] \\ = \; & \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}[\bar{\delta}_j^2(D_{j-1})\eta_j^2(D_{j-1})\mathbf{1}\{D_i = 0\}] \\ = \; & 4\sum_{j=1}^{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[\eta_j^2(k)\mathbf{1}\{D_{j-1} = k\}\mathbf{1}\{D_i = 0\}], \end{aligned} \tag{3.1.51}$$

pois, $\bar{\delta}_j(k)$ e $\bar{\delta}_l(r)$ são independentes entre si e de qualquer outra variável e tem valor esperado zero. Note que, escrevendo $\eta_j^2(k) = \eta_j(k) = \mathbf{1}\{\eta_j(k) = 1\}$, temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\eta_j^2(k)\mathbf{1}\{D_{j-1} = k\}\mathbf{1}\{D_i = 0\}] \\
= \; & \mathbb{P}(\eta_j(k) = 1, D_{j-1} = k, D_i = 0) \\
= \; & \mathbb{P}(D_{j-1} = k, D_j = k, D_i = 0) \\
= \; & \mathbb{P}(D_i = 0 | D_j = k, D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_j = k | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k) \\
= \; & \mathbb{P}(D_i = 0 | D_j = k)\mathbb{P}(D_j = k | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k), \qquad (3.1.52)
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade decorrente do fato de D_n ser Markoviano. Substituindo (3.1.52) em (3.1.51), temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{i} \bar{\delta}_j(D_{j-1})\eta_j(D_{j-1})\right)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] \\
= \; & 4\sum_{j=1}^{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(D_i = 0 | D_j = k)\mathbb{P}(D_j = k | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k). \qquad (3.1.53)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.1.53) em (3.1.50), temos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{L}_n) \; = \; & 4\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(D_i = 0 | D_j = k) \\
& \mathbb{P}(D_j = k | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k). \qquad (3.1.54)
\end{aligned}$$

Note que, pelo fato de D_n ser homogêneo no tempo, temos

$$\mathbb{P}(D_i = 0 | D_j = k) = \mathbb{P}(D_{i-1} = 0 | D_{j-1} = k) \qquad \text{e} \qquad (3.1.55)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_j = k | D_{j-1} = k) \; &= \; \mathbb{P}(\eta_j(D_{j-1}) = 1 | D_{j-1} = k) \\
&= \; \mathbb{P}(\eta_j(k)) = 1 | D_{j-1} = k) = \mathbb{P}(\eta_j(k)) = 1) \\
&= \; \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k \neq 0 \\ 2\beta, & \text{se } k = 0. \end{cases} \qquad (3.1.56)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.1.55) e (3.1.56) em (3.1.54), temos

$$Var(\bar{L}_n) = 4\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}[\sum_{k\neq 0} \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_{i-1} = 0 | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k) \; +$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\beta \mathbb{P}(D_{i-1} = 0 | D_{j-1} = 0)\mathbb{P}(D_{j-1} = 0)] \\
= \; & 4\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} [\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(D_{i-1} = 0 | D_{j-1} = k)\mathbb{P}(D_{j-1} = k) \; + \\
&+ (2\beta - \frac{1}{2})\mathbb{P}(D_{i-1} = 0 | D_{j-1} = 0)\mathbb{P}(D_{j-1} = 0)] \\
= \; & 4\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} [\frac{1}{2} i \mathbb{P}(D_{i-1} = 0) + (2\beta - \frac{1}{2}) \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(D_{i-j} = 0 | D_0 = 0)\mathbb{P}(D_{j-1} = 0)] \\
= \; & 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbb{P}(D_{i-1} = 0) \; + \\
&+ 2\sigma^4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{i-1} \mathbb{P}(D_{i-1-m} = 0 | D_0 = 0)\mathbb{P}(D_m = 0), \qquad (3.1.57)
\end{aligned}
$$

fazendo $j - 1 = m$ e usando o fato de que $\sigma^2 = 4\beta - 1$.

Teorema 3.1.3: *Se* $\mu = 0$ *então existe uma constante* c *, positiva e finita, tal que*

$$
n^{-3/2} Var(L_n) \longrightarrow c, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.
$$

Prova: Observe que, usando (3.1.27), temos que existe constante c_1 tal que

$$
\mathbb{P}(D_{i-1} = 0) \; \sim \; \frac{c_1}{\sqrt{i}}.
$$

Portanto, existe constante c, $0 < c < \infty$, tal que

$$
2\sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} i \mathbb{P}(D_{i-1} = 0) \; \sim \; c\, n^{3/2}. \qquad (3.1.58)
$$

Por outro lado, fazendo $j = i - 1$, temos

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{i-1} \mathbb{P}(D_{i-1-m} = 0 | D_0 = 0)\mathbb{P}(D_m = 0) = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{j} \mathbb{P}(D_{j-m} = 0)\mathbb{P}(D_m = 0) \\
\leq \; & \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=0}^{j} \mathbb{P}(D_{j-m} = 0)\mathbb{P}(D_m = 0). \qquad (3.1.59)
\end{aligned}
$$

E, fazendo $k = j - m$ em (3.1.59), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{i-1} \mathbb{P}(D_{i-1-m} = 0 | D_0 = 0)\mathbb{P}(D_m = 0) \; & \leq \; \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(D_k = 0)\mathbb{P}(D_m = 0) \\
& = \; \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(D_k = 0) \right)^2. \qquad (3.1.60)
\end{aligned}
$$

Logo, usando o Lema 3.3 [$A.6$], página 16], temos que existe constante $0 < K_1 < \infty$ tal que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} I\!P(D_k = 0)\right)^2 \sim K_1\, n. \tag{3.1.61}$$

Portanto, usando (3.1.58), (3.1.60) e (3.1.61) em (3.1.57), completamos a prova do Teorema 3.1.3. □

3.2 Caso dos u's viesados

Agora, vamos considerar o caso em que $\mu \neq 0$. De (2.2.10), temos

$$\begin{aligned} Var(L_n(x)) &= Var(\bar{L}_n) + 4Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n] \\ &\quad +4Cov(\bar{L}_n, (x + n\mu)\bar{Z}_n), \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

e, fazendo $i = j - 1$ em (2.2.37), obtemos

$$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} I\!E[\tilde{\nu}(\bar{S}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] + 2\tilde{\nu}(\bar{\rho}) \sum_{i=0}^{n-1} I\!E(\bar{S}_i \mathbf{1}\{D_i = 0\}) + \\ &\quad + \sigma_*^2 \sum_{i=0}^{n} I\!P(D_i = 0), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

sendo σ_*^2 e $\bar{\rho}$ como definidos em (2.2.34) e (2.2.35), respectivamente.

3.2.1 Cota superior para $Var(\bar{L}_n)$

Exatamente como foi feito na seção anterior, vamos estudar cada parcela de $Var(\bar{L}_n)$.

(E) Estudo da primeira parcela

Usando (2.2.28), temos $\bar{S}_i = \bar{Y}_i + \bar{\hat{Y}}_i$, sendo $\bar{Y}_i = (Y_i - i\mu)$ e $\bar{\hat{Y}}_i = (\hat{Y}_i - i\mu)$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} & |I\!E[\tilde{\nu}(\bar{S}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}]| = |I\!E[\tilde{\nu}(\bar{Y}_i\bar{\varphi} + \bar{\hat{Y}}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}]| \\ \leq\ & I\!E|\tilde{\nu}(\bar{Y}_i\bar{\varphi} + \bar{\hat{Y}}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}| \leq I\!E|\tilde{\nu}[2(\bar{Y}_i\bar{\varphi})^2 + 2(\bar{\hat{Y}}_i\bar{\varphi})^2]\mathbf{1}\{D_i = 0\}| \\ \leq\ & 4I\!E|\tilde{\nu}(\bar{Y}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}| \leq 4I\!E|\tilde{\nu}(\|\bar{Y}_i\|^2\|\bar{\varphi}\|^2)\mathbf{1}\{D_i = 0\}| \\ \leq\ & 4\tilde{\nu}(\|\bar{\varphi}\|^2)[I\!E(\|\bar{Y}_i\|)^4 I\!P(D_i = 0)]^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

usando a desigualdade de Hölder, no caso de $p = q = 2$, e o fato de que

$$\tilde{\nu}[(\bar{Y}_i\bar{\varphi})^2] \leq \tilde{\nu}(\|\bar{Y}_i\|^2\|\bar{\varphi}\|^2) = \|\bar{Y}_i\|^2\, \tilde{\nu}(\|\bar{\varphi}\|^2)$$

Seja $\bar{\alpha}_r$, para todo $r \geq 1$, o r-ésimo momento central do incremento do passeio incondicional Y_n, definido por

$$\bar{\alpha}_r = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j-\mu\|^r \nu(u_1(0,j)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j-\mu\|^r \pi(0,j). \tag{3.2.4}$$

Então, supondo que $\bar{\alpha}_4 < \infty$, temos

$$\mathbb{E}(\|\bar{Y}_i\|^4) = O(i^2) \tag{3.2.5}$$

pois, $\lim_{i\to\infty} \frac{E(\|\bar{Y}_i\|^4)}{i^2} = 6\bar{\alpha}_2^2 = 6\xi^4 < \infty$, sendo ξ^2 como definido em (2.1.12). Daí, existe constante $0 < K < \infty$ tal que, $\mathbb{E}(\|\bar{Y}_i\|^4) \leq Ki^2$, $\forall i \geq 1$ e, fazendo $c = 4K^{1/2}\nu(\|\bar{\varphi}\|^2)$ obtemos, para a primeira parcela de $Var(\bar{L}_n)$, a seguinte expressão

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(\bar{S}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] \leq c\sum_{i=0}^{n-1} i\sqrt{\mathbb{P}(D_i = 0)}. \tag{3.2.6}$$

(F) Estudo da segunda parcela

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior e usando (2.2.11), encontramos

$$\mathbb{E}(\bar{S}_i\mathbf{1}\{D_i = 0\}) \leq 2[\mathbb{E}(\|\bar{Y}_i\|^2)\mathbb{P}(D_i = 0)]^{1/2} = 2\xi\sqrt{i\mathbb{P}(D_i = 0)}.$$

Portanto, para a segunda parcela de $Var(\bar{L}_n)$, temos

$$2\tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(\bar{S}_i\mathbf{1}\{D_i = 0\}) \leq 4\xi\tilde{\nu}(\bar{\rho})\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{i\mathbb{P}(D_i = 0)}. \tag{3.2.7}$$

3.2.2 Ordem de magnitude de $Var(L_n(x))$ no caso viesado

Agora, vamos comparar $Var(\bar{L}_n)$, dada em (3.2.2), com $Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n]$, em relação às sua ordens de magnitude em n. Observe que, a ordem de $Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n]$ é dada pela ordem do termo dominante da expressão, que é

$$a_n \;=\; \sigma_\mu^2 n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0), \quad \forall n \geq 1, \tag{3.2.8}$$

e, usando o Lema 3.3 [$A.6$], podemos dizer que

$$a_n \text{ é da ordem de } \begin{cases} n^{5/2}, & \text{se } d = 1 \\ n^2 \log n, & \text{se } d = 2 \\ n^2, & \text{se } d \geq 3. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Então, vamos comparar cada parcela de $Var(\bar{L}_n)$ com a_n e mostrar que, em relação à ordem de magnitude, a_n é o termo dominante. Ou seja, cada parcela tem ordem inferior à ordem de a_n e portanto, a ordem de magnitude em n de $Var(\bar{L}_n)$ é inferior à ordem de magnitude de $Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n]$, que é dada pela ordem de a_n. Sejam, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{i=0}^{n-1} I\!E[\tilde{\nu}(\bar{S}_i\bar{\varphi})^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}], \quad \text{e} \\ e_n &= 2\tilde{\nu}(\bar{\rho}) \sum_{i=0}^{n-1} I\!E(\bar{S}_i \mathbf{1}\{D_i = 0\}). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Para concluir que a_n é o termo dominante, vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{d_n}{a_n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{e_n}{a_n}) = 0.$$

Por (3.2.6) e (3.2.10), temos

$$d_n \leq c \sum_{i=0}^{n-1} i\sqrt{I\!P(D_i = 0)}.$$

Consideremos a distribuição de probabilidade dada por

$$p_j = k_n \frac{j}{n^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, (n-1), \tag{3.2.11}$$

sendo k_n tal que $\sum_{j=1}^{n-1} k_n \frac{j}{n^2} = 1$. Neste caso, temos $k_n = \frac{2n}{n-1} \to 2$, quando $n \to \infty$. Então,

$$d_n \leq \frac{n^2 c}{k_n} \sum_{i=0}^{n-1} k_n \frac{i}{n^2} \sqrt{I\!P(D_i = 0)}.$$

Usando a desigualdade de Jensen para uma função côncava, temos

$$d_n \leq \frac{n^2 c}{k_n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{k_n i}{n^2} I\!P(D_i = 0) \right)^{1/2} = \frac{nc}{\sqrt{k_n}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i I\!P(D_i = 0) \right)^{1/2}.$$

Portanto,

$$\frac{d_n}{a_n} \leq \frac{d_n}{n^2} \leq \frac{c\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} i\,\mathbb{P}(D_i = 0)}}{n\sqrt{k_n}}.$$

Como $i \leq n$, então

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} i\,\mathbb{P}(D_i^0 = 0)} \leq \sqrt{n}\,\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i^0 = 0)}.$$

Logo, usando o Lema 3.3 [A.6], temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{d_n}{a_n} \leq \frac{d_n}{n^2} &\leq \frac{c}{\sqrt{k_n}} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0)}}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{c\,K\,n^{1/4}}{\sqrt{k_n}\,n^{1/2}} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_n} = 0. \tag{3.2.13}$$

Isto é, d_n é de ordem menor que a_n, para todo $d \geq 1$.

Por (3.2.7) e (3.2.10), sabemos que

$$e_n \leq 4\xi\tilde{\nu}(\bar{\rho}) \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{i}\sqrt{\mathbb{P}(D_i = 0)} \leq 4\xi\tilde{\nu}(\bar{\rho}) \sum_{i=0}^{n-1} i\sqrt{\mathbb{P}(D_i = 0)}.$$

Daí, usando (3.2.11), como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{e_n}{a_n} \leq \frac{e_n}{n^2} &\leq \frac{4\xi\,\tilde{\nu}(\bar{\rho})}{\sqrt{k_n}} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0)}}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{4\xi\,\tilde{\nu}(\bar{\rho})\,K\,n^{1/4}}{\sqrt{k_n}\,n^{1/2}} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{a_n} = 0. \tag{3.2.15}$$

Portanto, de (3.2.13) e (3.2.15) garantimos que, neste caso viesado, a ordem de magnitude de $Var[(x+n\mu)\bar{Z}_n]$ domina a ordem de $Var(\bar{L}_n)$. Logo, usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz, como na seção anterior, e a expressão (3.2.1), temos que, a ordem

de magnitude de $Var(L_n(x))$ é dada pela ordem de $Var[(x + n\mu)\bar{Z}_n]$, que é o termo dominante. Então, concluímos a prova do seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 *Seja $L_n(x)$ como definido em (2.2.7). Se $u_n(i,j)$ é viesado, para todo $n \geq 1$ e $i, j \in \mathbb{Z}^d$, e $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|j - \mu\|^4 \, \pi(0,j) < \infty$ então*

$$Var(L_n(x)) \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} n^{5/2} & \text{se } d = 1 \\ n^2 \log n & \text{se } d = 2 \\ n^2 & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Isto é, no caso viesado as flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in Z^d$, são da ordem de: $n^{5/4}$, se $d = 1$; $n(\log n)^{1/2}$, se $d = 2$ e n , se $d \geq 3$. Ou seja, $L_n(x)$ não converge para o equilíbrio, para todo $d \geq 1$, no sentido que a altura do sítio x nunca se estabiliza, flutuando sempre em todas as dimensões.

Capítulo 4

O processo das alturas vistas da altura da origem

Neste capítulo definimos e estudamos o processo das alturas vistas da altura da origem a tempo discreto, denotado por $\hat{L}_n$.

Na Seção 4.1 definimos o processo $\hat{L}_n$ para o modelo CI e o escrevemos em função dos processos $(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$, $(\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0))$ e $\bar{Z}_n(x)$. Concluímos que no caso dos u's viesados $Var(\hat{L}_n(x))$ não converge, quando $n \to \infty$, porque seu termo dominante é da ordem de n^2. Para os u's simétricos, concluímos que o processo $\hat{L}_n(x)$ centrado é um martingal (ver 4.1.7). Calculamos a variância de $\hat{L}_n(x)$ para $\mu = 0$ e concluímos que o processo converge quase certamente e em $\mathcal{L}^2$, se $d \geq 5$, quando $n \to \infty$ (ver 4.1.25).

Na Seção 4.2 apresentamos um novo modelo que apresenta modificações em relação ao modelo original, tendo em vista as dificuldades que encontramos para estimar a primeira parcela de $V(\hat{L}_n(x))$ (ver 4.2.1). Denominamos tal modelo de *temporalmente independente* ou TI e argumentamos que todos os resultados obtidos para o modelo CI são válidos neste caso. Estudamos a convergência temporal de $\hat{L}_n(x)$ para o modelo TI no caso de alcance estritamente 1 e provamos que este converge, quase certamente e em $\mathcal{L}^2$, quando $n \to \infty$, para uma superfície aleatória denotada por $\hat{L}(x)$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$ (Teorema 4.2.1). Como conseqüência concluímos que neste caso $\hat{X}_n(x) = X_n(x) - X_n(0)$ converge fracamente para $\hat{L}(x)$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$.

Na Seção 4.3 determinamos a ordem de magnitude em x de $Var(\hat{L}(x))$ (Teorema 4.3.1)

e obtemos resultado que trata da forma e da ordem de magnitude em x das flutuações da superfície limite $\hat{L}(x)$ (Teorema 4.2.1).

Neste capítulo, nos concentramos apenas nos casos não triviais (em vista dos resultados do capítulo anterior) em que as flutuações são limitadas, o que exclui um exame mais detalhado da ordem de magnitude das flutuações em $d = 1$ e 2.

4.1 Definição, características e variância do processo visto da altura da origem

Seja L_n o processo das alturas, como definido em (2.2.7). Definimos o processo $(\hat{L}_n)_{n\geq 0}$ por

$$\hat{L}_n =: L_n - L_n(0), \tag{4.1.1}$$

sendo, para cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$, dado por

$$\hat{L}_n(x) = L_n(x) - L_n(0). \tag{4.1.2}$$

Isto é, $\hat{L}_n$ é o processo L_n, quando visto da altura da origem, em cada tempo $n \geq 0$. Então, podemos escrever

$$\hat{L}_n(x) = (\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) + 2n\mu(\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0)) + 2x\bar{Z}_n(x) + 2xn\mu + \|x\|^2. \tag{4.1.3}$$

Usando (2.2.3) e (4.1.2), temos

$$\mathbb{E}(\hat{L}_n(x)) = \|x\|^2 + 2nx\mu, \tag{4.1.4}$$

e portanto,

$$\hat{L}_n(x) - \mathbb{E}(\hat{L}_n(x)) = (\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) + 2n\mu(\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0)) + 2x\bar{Z}_n(x). \tag{4.1.5}$$

Observe que,

$$\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0) = \hat{Z}_n(x) - x \quad \text{e} \quad \bar{Z}_n(x) = \tilde{Z}_n(x) - x - n\mu, \tag{4.1.6}$$

sendo $\hat{Z}_n(x)$ e $\tilde{Z}_n(x)$ como na Definição 2 [A.6]. Da prova da Proposição 5.1 [A.6], temos que, $Var(\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0)) = Var(\hat{Z}_n(x))$ é uniformemente limitada em n, para todo $d \geq$

1. Portanto, $Var[2n\mu(\bar{Z}_n(x) - \bar{Z}_n(0))]$ é da ordem de n^2, se $\mu \neq 0$. Além disso, pela Proposição 2.3 e o Lema 3.3 [A.6], sabemos que, $Var(\bar{Z}_n(x))$ é de ordem inferior a n^2, para todo $d \geq 1$. Por outro lado, usando (3.2.2), (3.2.10), (3.2.13) e (3.2.15), sabemos que $Var(\bar{L}_n(x))$ é, também, de ordem inferior a n^2, para todo $d \geq 1$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, e portanto, o mesmo ocorre com $Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$. Então, quando $\mu \neq 0$, de (4.1.5) observe que, $Var(\hat{L}_n(x))$ não converge, quando $n \to \infty$, porque o termo dominante é da ordem de n^2. Sendo assim, basta estudar o caso de $\mu = 0$, que é o que faremos. Além disso, por razões técnicas, vamos considerar neste capítulo apenas o caso simétrico, no sentido da Definição 2.5.1 [A.6]. Portanto, temos

$$\hat{L}_n(x) - \mathbb{E}(\hat{L}_n(x)) = (\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) + 2x\bar{Z}_n(x), \tag{4.1.7}$$

que é um martingal em relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, quando $\mu = 0$, como conseqüência do Lema 2.2.1 (deste trabalho) e do Lema 2.2 [A.6].
De (4.1.7), temos que

$$\begin{aligned} Var(\hat{L}_n(x)) &= Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) + 4Var(x\bar{Z}_n(x)) \\ &\quad +2Cov[(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)), x\bar{Z}_n(x)]. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Cálculo de $Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$
Em (2.2.37), calculamos $Var(\bar{L}_n) = Var(\bar{L}_n(0)) = Var(\bar{L}_n(x))$ pois, a distribuição de $\bar{L}_n(x)$ não depende de x , pela invariância por translação do modelo. Logo, para encontrar $Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ basta calcular $Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0))$. Usando (2.2.5), (2.2.8) e as expressões de (2.2.12) a (2.2.20), temos

$$\bar{L}_n(x) = \bar{L}_{n-1}(x) + 2\bar{W}_n^x + \bar{W}_n^{*,x},$$

sendo

$$\bar{W}_n^x = \mathbb{E}(\bar{Y}_{n-1}^x \, \bar{\theta}_n(Y_{n-1}^x) \mid \mathcal{F}_n), \tag{4.1.9}$$

$$\bar{W}_n^{*,x} = \mathbb{E}(\theta_n^*(Y_{n-1}^x) \mid \mathcal{F}_n), \tag{4.1.10}$$

e, $\bar{\theta}_n(k)$ e $\theta_n^*(k)$ como antes. Como $\bar{L}_0(x) = 0$ então,

$$\bar{L}_n(x) = \sum_{j=1}^{n} 2\bar{W}_j^x + W_j^{*,x}. \tag{4.1.11}$$

Usando (2.2.20), podemos escrever

$$\bar{L}_n(x) - \mathbb{E}(\bar{L}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} \bar{V}_j^x, \tag{4.1.12}$$

sendo $\bar{V}_j^x = 2\bar{W}_j^x + \bar{W}_j^{*,x}$.

Então, usando (4.1.12), temos

$$\begin{aligned}
&[L_n(x) - \mathbb{E}(L_n(x))] = \sum_{j=1}^{n} \bar{V}_j^x = \sum_{j=1}^{n} 2\bar{W}_j^x + \bar{W}_j^{*,x} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} 2(k-x)\bar{\theta}_j(k)\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1}) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \bar{\theta}_j^*(k)\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1}) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} [2(k-x)\bar{\theta}_j(k) + \bar{\theta}_j^*(k)]\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1})].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0)) = \mathbb{E}\Bigg\{ &\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} [2(k-x)\bar{\theta}_j(k) + \bar{\theta}_j^*(k)] \\
&[2l\bar{\theta}_i(l) + \bar{\theta}_i^*(l)]\ P(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1})\ \mathbb{P}(Y_{i-1} = l \mid \mathcal{F}_{i-1}) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Observe que, se $i \neq j$ então $\bar{\theta}_j(k)$ e $\bar{\theta}_j^*(k)$ são não correlacionados com $\bar{\theta}_i(l)$ e $\bar{\theta}_i^*(l)$, $\forall\, k, l \in \mathbb{Z}^d$. Neste caso, em cada parcela com $i \neq j$ temos que o fator correspondente ao maior índice entre i e j é independente dos demais e tem esperança zero. Ou seja, toda as parcelas com $i \neq j$ são iguais a zero. Também, quando $k \neq l$ temos que $\bar{\theta}_j(k)$ e $\bar{\theta}_j^*(k)$ são não correlacionados com $\bar{\theta}_j(l)$ e $\bar{\theta}_j^*(l)$, respectivamente. Então, a esperança fatora e cada uma delas é igual a zero. Portanto, basta considerar a soma quando $k = l$. Como estamos tratando do caso de $\mu = 0$ usaremos, a partir de agora, $\theta_j(k), \theta_j^*(k), \sigma_*^2, \varphi$ e ρ como definidos em (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) e (3.1.6) respectivamente. Então temos

$$\begin{aligned}
Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0)) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[(2k\theta_j(k) + \theta_j^*(k))^2 - 2x\theta_j(k)(2k\theta_j(k) + \theta_j^*(k))] \times \\
&\quad \times \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1})\mathbb{P}(Y_{j-1} = k \mid \mathcal{F}_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} [4\nu(k\theta_j(k))^2 + 4\nu(k\theta_j(k)\theta_j^*(k)) + \nu(\theta_j^*(k))^2 - 4\nu(x\theta_j(k)k\theta_j(k)) - \\
&\quad - 2\nu(x\theta_j(k)\theta_j^*(k))]\mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k|\mathcal{F}_{j-1})\mathbb{P}(\hat{Y}_{j-1} = k|\mathcal{F}_{j-1})],
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

sendo $(\hat{Y}_n)_{n\geq 0}$ uma cópia de $(Y_n)_{n\geq 0}$, que dado $\mathcal{F}_n$ é independente de $(Y_n^x)_{n\geq 0}$ $\forall x \in \mathbb{Z}^d$. Denotando

$$S_n^{x,0} = Y_n^x + \hat{Y}_n \quad \text{e} \quad D_n^{x,0} = Y_n^x - \hat{Y}_n, \tag{4.1.15}$$

e considerando o equivalente a (2.2.29), podemos escrever

$$\begin{aligned} Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0)) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{x,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] \; + \\ &+ 2\tilde{\nu}(\rho) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(S_{j-1}^{x,0})\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] - 2\mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{x,0}\varphi x\varphi)\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] \; + \\ &+ (\sigma_*^2 + 2x\tilde{\nu}(\rho)) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_{j-1}^{x,0} = 0), \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Observe que, pelo Lema 2.5.3, podemos fazer uma transformação vertical no espaço (D, S) de tal forma que: $(D_n^{x,0}, S_n^{x,0}) \stackrel{d}{=} (D_n^{x,0}, S_n^{0,0} + x)$. Então, temos

$$\begin{aligned} (a)\ \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{x,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] &= \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{0,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] + \mathbb{E}[\tilde{\nu}(x\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] \; + \\ &\quad + 2\tilde{\nu}(\mathbb{E}[(S_{j-1}^{0,0}\varphi)(x\varphi)\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}]). \end{aligned}$$

$$(b)\ \mathbb{E}[(S_{j-1}^{x,0})\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] = \mathbb{E}[(S_{j-1}^{0,0})\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] + x\mathbb{P}(D_{j-1}^{x,0} = 0).$$

$$(c)\ \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{x,0}\varphi x\varphi)\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] = \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_{j-1}^{0,0}\varphi x\varphi)\mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}] + \mathbb{E}[\tilde{\nu}(x\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{x,0} = 0\}].$$

Logo, usando (a), (b) e (c) em (4.1.16) e fazendo $i = j - 1$, temos

$$\begin{aligned} Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i^{0,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^{x,0} = 0\}] + 2\tilde{\nu}(\rho) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(S_i^{0,0})\mathbf{1}\{D_i^{x,0} = 0\}] \; + \\ &\quad + \sigma_*^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i^{x,0} = 0) - \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i^{x,0} = 0). \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Como,

$$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) &= Var(\bar{L}_n(x)) + Var(\bar{L}_n(0)) \\ &\quad - 2Cov(\bar{L}_n(x), \bar{L}_n(0)) \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

então, substituindo (2.2.37) e (4.1.17) em (4.1.18), temos

$$Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) = 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i^{0,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{0,0}=0\}] - \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i^{0,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{x,0}=0\}]\right) +$$

$$+ 4\tilde{\nu}(\rho)\sum_{i=0}^{n-1}(\mathbb{E}[(S_i^{0,0})\mathbf{1}\{D_i^{0,0}=0\}] - \mathbb{E}[(S_i^{0,0})\mathbf{1}\{D_i^{x,0}=0\}]) +$$

$$+ 2\sigma_*^2\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i^{0,0}=0) - \mathbb{P}(D_i^{x,0}=0)] + 2\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i^{x,0}=0). \tag{4.1.19}$$

Observação: Para simplificar, até o final deste capítulo usaremos a notação S_n^x para representar $S_n^{x,0}$ e S_n para representar $S_n^{0,0}$, o mesmo valendo para a cadeia D_n.
Usando (2.2.41), sabemos que,

$$Var(x\,\bar{Z}_n(x)) = \sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i=0). \tag{4.1.20}$$

Portanto, usando (4.1.8) observe que, para encontrar $Var(\hat{L}_n(x))$, precisamos apenas calcular $Cov(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0),\ x\bar{Z}_n(x))$.

Cálculo de $Cov(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0),\ x\bar{Z}_n(x))$

Usando (2.2.20), deste trabalho, e (2.24) de [Ferrari/Fontes(1998)], temos que

$$Cov(\bar{L}_n(x),\ x\bar{Z}_n(x)) = \mathbb{E}[\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(2(k-x)\theta_j(k) + \theta_j^*(k))\,\mathbb{P}(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1})\} \times$$

$$\times\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}x\theta_i(l)\,\mathbb{P}(Y_{i-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{i-1})\}]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}(2k\theta_j(k)x\theta_j(k) - 2x\theta_j(k)x\theta_j(k) + x\theta_j(k)\theta_j^*(k))\mathbb{E}[\mathbb{P}^2(Y_{j-1}^x = k \mid \mathcal{F}_{j-1})]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}(2k\theta_j(k)x\theta_j(k) - 2x\theta_j(k)x\theta_j(k) + x\theta_j(k)\theta_j^*(k))\mathbb{P}\left(\frac{S_{j-1}^{2x}}{2} = k,\ D_{j-1} = 0\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(\tilde{\nu}[(S_{j-1}^{2x}\varphi).(x\varphi)]\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}) -$$

$$- 2\tilde{\nu}(x\varphi)^2\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_{j-1}=0) + x\tilde{\nu}(\rho)\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_{j-1}=0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(\tilde{\nu}[(S_{j-1}\varphi).(x\varphi)]\mathbf{1}\{D_{j-1}=0\}) + x\tilde{\nu}(\rho)\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_{j-1}=0), \tag{4.1.21}$$

usando o correspondente a (2.2.29) e a translação vertical descrita nos itens (a), (b) e (c). De maneira análoga, encontramos

$$Cov(\bar{L}_n(0),\ x\bar{Z}_n(x)) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\tilde{\nu}[(S_{j-1}\varphi)(x\varphi)]\mathbf{1}\{D_{j-1}^x = 0\}) + x\tilde{\nu}(\rho) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_{j-1}^x = 0) + \\ + \tilde{\nu}(x\varphi)^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_{j-1}^x = 0). \tag{4.1.22}$$

Então, usando (4.1.21), (4.1.22) e fazendo $i = j - 1$, encontramos

$$\begin{aligned} & Cov(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0),\ x\bar{Z}_n(x)) \\ = & \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbb{E}\left(\tilde{\nu}\left[(S_i\varphi)(x\varphi)\right]\mathbf{1}\{D_i = 0\}\right) - \mathbb{E}\left(\tilde{\nu}\left[(S_i\varphi)(x\varphi)\right]\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}\right)] + \\ & + x\tilde{\nu}(\rho)\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0)] - \sigma_x^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_i^x = 0). \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Portanto, substituindo (4.1.19), (4.1.20) e (4.1.23) em (4.1.8), encontramos

$$\begin{aligned} Var(\hat{L}_n(x)) = & 2\sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] - \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}\right]\right) + \\ & + 4\sum_{i=0}^{n-1} \left(\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}((S_i\varphi)(x\varphi))\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\right] - \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}((S_i\varphi)(x\varphi))\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}\right]\right) + \\ & + 4\tilde{\nu}(\rho)\sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{E}[(S_i)\mathbf{1}\{D_i = 0\}] - \mathbb{E}[(S_i)\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}]) + \\ & + 2(\sigma_x^2 + 2x\tilde{\nu}(\rho) + \sigma_*^2)\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0)] + \\ & + 2\sigma_x^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0). \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Note que, escrevendo S_n como soma dos seus incrementos, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\tilde{\nu}((S_i\varphi)(x\varphi))\mathbf{1}\{D_i = 0\}] = \tilde{\nu}(\mathbb{E}[(S_i\varphi)(x\varphi)\mathbf{1}\{D_i = 0\}]) \\ = & \tilde{\nu}((x\varphi)\mathbb{E}[(S_i\varphi)\mathbf{1}\{D_i = 0\}]) = \tilde{\nu}[(x\varphi)(\varphi\mathbb{E}(S_i\mathbf{1}\{D_i = 0\}))] \\ = & \tilde{\nu}[(x\varphi)(\varphi\sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}(\delta_j(D_{j-1})\{D_i = 0\}))]. \end{aligned}$$

Como estamos tratando o caso dos u's simétricos então, usando (3.1.12), como conseqüência do Lema 2.5.4, temos que $\mathbb{E}(S_i^0\mathbf{1}\{D_i = 0\}) = 0$. Logo, usando na expressão anterior, temos

$$\mathbb{E}[\tilde{\nu}((S_i\varphi)(x\varphi))\mathbf{1}\{D_i = 0\}] = 0,$$

e portanto, de maneira análoga, obtemos

$$\mathbb{E}[\tilde{\nu}((S_i\varphi)(x\varphi))\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}] = 0.$$

Então, neste caso, $Var(\hat{L}_n(x))$ é dada por

$$\begin{aligned} Var(\hat{L}_n(x)) &= 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i = 0\}] - \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}]\right) + \\ &+ 2(\sigma_x^2 + 2x\tilde{\nu}(\rho) + \sigma_*^2)\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0)] + \\ &+ 2\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i^0 = 0). \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Queremos verificar se $\hat{L}_n(x)$ converge em n, para um limite finito. Pelo Teorema 3.1.1, sabemos que $Var(L_n(x))$ é uniformemente limitada em n se $d \geq 5$. Então, usando o Teorema de Convergência em L^2, Durrett [5], temos que o processo $L_n(x)$ converge quase certamente neste caso. Portanto, se $d \geq 5$ temos convergência quase certa e em L^2 de $\hat{L}_n(x)$, pois cada termo de (4.1.2) converge separadamente. Logo, basta verificar se existe convergência nos casos de $1 \leq d \leq 4$. Tendo em vista as dificuldades que encontramos para estudar a primeira parcela de $Var(\hat{L}_n(x))$, não analisamos a convergência de $\hat{L}_n(x)$ no modelo original, denotado por CI. Sendo assim, adotamos algumas modificações no modelo CI, em relação à família U, e consideramos um novo modelo, denotado por Temporalmente Independente ou TI, que será estudado na próxima seção.

4.2 Convergência de $\hat{L}_n$ no modelo TI e alcance estritamente 1

Consideremos $(X_n)_{n\geq 0}$ o sistema das alturas, como definido em (2.1.1), e L_n como em (2.1.14). Seja U a família como definida em (2.1.2), de tal forma que

$$\begin{cases} u_n(k, k+e_j) = \mathbf{1}\{N_n = j\}\tilde{U}_n(k) \\ u_n(k, k-e_j) = \mathbf{1}\{N_n = j\}(1 - \tilde{U}_n(k)), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

sendo

(1) $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_d = (0, \ldots, 0, 1)$;

(2) $\{N_n, n \geq 1\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, uniformes em $\{1, 2, \ldots, d\}$ e independentes de $\tilde{U}_n(k)$, para todo $n \geq 1$ e $k \in \mathbb{Z}^d$;

(3) $\{\tilde{U}_n(k),\ n \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $\tilde{U}_n(k) \in [0, 1]$ e simétrica em torno de $1/2$.

Consideremos também que, $L_n(x)$ tem alcance estritamente 1, ou seja, que a distribuição dos coeficientes da combinação convexa aleatória (distribuição dos $u's$) satisfaz a:

$$u_n(i, j) = 0, \quad \text{se} \quad \|i - j\| \neq 1 \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}^d \quad \text{e} \quad \forall n \geq 1. \tag{4.2.2}$$

Portanto, $[N_n = j] \Leftrightarrow$ os passeios aleatórios Y_n^x e $\hat{Y}_n^x$ pulam, no tempo $(n-1)$, na direção $j \Leftrightarrow Y_n^x = Y_{n-1}^x \pm e_j$ e $\hat{Y}_n^x = \hat{Y}_{n-1}^x \pm e_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, d$. Logo, tendo escolhido a coordenada que irá saltar através da variável N_n, os passeios Y_n^x e $\hat{Y}_n^x$ pulam de k para $(k + e_j)$ com probabilidade $\nu[u_n(k, k + e_j)]$ e pulam de k para $(k - e_j)$ com probabilidade $\nu[u_n(k, k - e_j)]$, sendo $\nu[u_n(k, k + e_j)]$ como definido em (4.2.1). Daí, para todo $k \in \mathbb{Z}^d$ e $n \geq 1$, temos que

$$\nu[u_n(k, k + e_j)] = \mathbb{P}(N_n = j)\ \nu(\tilde{U}_n(k)) = \frac{1}{2d}, \quad \text{e} \tag{4.2.3}$$

$$\nu[u_n(k, k - e_j)] = \nu[u_n(k, k + e_j)] \ \Leftrightarrow\ \nu[u_n(0, e_j)] = \nu[u_n(0, -e_j)], \tag{4.2.4}$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, d$.

Sejam $\delta_n(D_{n-1})$ e $\gamma_n(D_{n-1})$ os incrementos de S_n e D_n, respectivamente, como definidos na seção 2.3. Então, neste caso, temos

$$\delta_n(D_{n-1}),\ \gamma_n(D_{n-1}) \ \in\ \{0,\ \pm 2e_i,\ i = 1, \ldots, d\},$$

$$\delta_n(D_{n-1}) = \ \pm 2e_i \ \Leftrightarrow\ \gamma_n(D_{n-1}) = 0 \quad \text{e}$$

$$\delta_n(D_{n-1}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \gamma_n(D_{n-1}) = \ \pm 2e_i, \quad \forall i = 1, \ldots, d.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\delta_n(D_{n-1}) = 2e_i) &= \mathbb{P}(Y_n = j + e_i, \hat{Y}_n = k + e_i \mid Y_{n-1} = j, \hat{Y}_{n-1} = k) \\
&= \begin{cases} \nu(u_n(j, j + e_i))\nu(u_n(k, k + e_i)) & \text{se } j \neq k \\ \nu(u_n(j, j + e_i)u_n(k, k + e_i)) & \text{se } j = k \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & \text{se } D_{n-1} \neq 0 \\ \frac{\beta}{d} & \text{se } D_{n-1} = 0, \end{cases}$$

sendo $\beta = \mathbb{E}(\tilde{U}_n^2(k)) = \nu(\tilde{U}_n^2(k)$, para todo $n \geq 1$ e $k \in \mathbb{Z}^d$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\delta_n(D_{n-1}) = 2e_i) &= \mathbb{P}(\delta_n(D_{n-1}) = -2e_i) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & \text{se } D_{n-1} \neq 0 \\ \frac{\beta}{d} & \text{se } D_{n-1} = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\mathbb{P}(\delta_n(D_{n-1}) = 0) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2d} & \text{se } D_{n-1} \neq 0 \\ 1 - 2\beta & \text{se } D_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Usando (4.2.1), temos

$$\begin{aligned} \theta_n(k) &= \sum_{j=1}^{d} [e_j \mathbf{1}\{N_n = j\} \tilde{U}_n(k) - e_j \mathbf{1}\{N_n = j\}(1 - \tilde{U}_n(k))] \\ &= (2\tilde{U}_n(k) - 1) \sum_{j=1}^{d} e_i \mathbf{1}\{N_n = j\}, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

sendo, para todo $k \in \mathbb{Z}^d$ e $n \geq 1$,

$$\nu(2\tilde{U}_n(k) - 1) = 0 \quad \text{e} \quad \nu(2\tilde{U}_n(k) - 1)^2 = 4\beta - 1,$$

o que implica,

$$\mathbb{E}(\theta_n(k)) = \nu(\theta_n(k)) = 0. \tag{4.2.8}$$

Além disso, como estamos tratando o caso de alcance estritamente 1 e $\mu = 0$ por (3.1.4), temos

$$\begin{aligned} \theta_n^*(k) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|j - k\|^2 u_n(k, j) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mathbf{1}\{N_n = i\} = 1, \ \forall n \geq 1 \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

e, como conseqüência, obtemos

$$\tilde{\nu}(\rho) = \nu(\theta_n(k)\theta_n^*(k)) = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_*^2 = Var(\theta_n^*(k)) = 0. \tag{4.2.10}$$

Para o novo modelo TI, temos que:

(a) a independência temporal dos θ's é preservada. Isto é, para tempos diferentes os θ's são independentes, pela independência dos componentes das famílias $\{\tilde{U}_n(k),\ n \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ e $\{N_n,\ n \geq 1\}$. Por isto, continua valendo a martingalidade citada no Lema 2.2.1 e em (4.1.7) pois, $u_n(k,\cdot)$ é função de N_n e de $\tilde{U}_n(k)$ que é independente de $\mathcal{F}_{n-1}$, para todo $n \geq 1$;

(b) Podemos garantir não correlação espacial pois, para todo n fixo, temos que $\theta_n(k)$ e $\theta_n(r)$, com $k \neq r$, são não correlacionados, pela independência entre $\tilde{U}_n(k)$ e $\tilde{U}_n(r)$.

Portanto, (a) e (b) nos garante que todos os resultados obtidos para o modelo CI, nos Capítulos 2 e 3 e na seção anterior, são válidos para o modelo TI.

Observe que, a rede $\mathbb{Z}^d$ pode ser subdividida em duas sub-redes: a sub-rede par, denotada por $2\mathbb{Z}^d$, e a sub-rede ímpar, denotada por $(\mathbb{Z}^d \backslash 2\mathbb{Z}^d)$. Note que, neste caso de alcance 1, os processos nestas sub-redes são independentes porque as sub-famílias de u's, de que cada um depende são disjuntas. Portanto, se $x \notin 2\mathbb{Z}^d$ então x e 0 estão em sub-redes distintas. Logo, $L_n(x)$ e $L_n(0)$ são independentes. Então, usando (4.1.2), temos que $Var(\hat{L}_n(x)) = Var(L_n(x)) + Var(L_n(0))$ e, pelo Teorema 3.1.1, sabemos que cada uma dessas parcelas explode em $0 \leq d \leq 4$. Portanto, $Var(\hat{L}_n(x))$ não é limitada em n , se $x \notin 2\mathbb{Z}^d$. Então, a partir de agora, vamos analisar se $Var(\hat{L}_n(x))$ é uniformemente limitada em n, nos restringindo ao caso de $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $1 \leq d \leq 4$. Substituindo (4.2.10) em (4.1.25), temos que $Var(\hat{L}_n(x))$, neste caso, é dada por

$$Var(\hat{L}_n(x)) = 2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i = 0\}\right] - \mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x = 0\}\right]\right) +$$
$$+ 2\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0)] + 2\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i = 0). \tag{4.2.11}$$

Estudo da primeira parcela de $Var(\hat{L}_n(x))$

Como $\delta_n(D_{n-1}) \in \{0,\ \pm 2e_i, i = 1, \ldots, d\}$ então, usando (4.2.7), temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(\delta_n(D_{n-1})\varphi)^2 &= \nu\left(4\sum_{i=1}^{d}(2\tilde{U}_n(k) - 1)^2\mathbf{1}\{N_n = i\}\mathbf{1}\{\delta_n(D_{n-1}) = \pm 2e_i\}\right)\\ &= 4(4\beta - 1)\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\mathbf{1}\{\delta_n(D_{n-1}) = \pm 2e_i\}. \end{aligned}\tag{4.2.12}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}] = \mathbb{E}[\tilde{\nu}(\sum_{j=1}^{i}\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}] \\
= & \sum_{j=1}^{i}\mathbb{E}[\tilde{\nu}(\delta_j(D_{j-1})\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}] \\
= & \sum_{j=1}^{i}\mathbb{E}[4(4\beta-1)\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\mathbf{1}\{\delta_j(D_{j-1})=\pm 2e_k\}\mathbf{1}\{D_i=0\}] \\
= & 4(4\beta-1)\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{d}\mathbb{P}(\delta_j(D_{j-1})\pm 2e_k, D_i=0). \qquad (4.2.13)
\end{aligned}
$$

Mas, note que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\delta_j(D_{j-1})=\pm 2e_k,\ D_i=0) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(\delta_j(l)=\pm 2e_k,\ D_{j-1}=l,\ D_i=0) \\
= & \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(D_i=0, D_j=l, D_{j-1}=l) \\
= & \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(D_i=0 \mid D_j=l, D_{j-1}=l)\mathbb{P}(D_j=l|D_{j-1}=l)\mathbb{P}(D_{j-1}=l). \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

E, além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_j=l|D_{j-1}=l) &= \mathbb{P}(\delta_n(l)=\ \pm 2e_i, i=1,\ldots,d|D_{j-1}=l) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{se } l\neq 0 \\ 2\beta & \text{se } l=0 \end{cases}. \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo (4.2.15) em (4.2.14), temos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\delta_j(D_{j-1})=\pm 2e_k,\ D_i=0) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d, l\neq 0}\frac{1}{2d}\mathbb{P}(D_{i-1}=0|D_{j-1}=l)\mathbb{P}(D_{j-1}=l) \\
+ & \mathbb{P}(D_{i-1}=0|D_{j-1}=0)2\beta\mathbb{P}(D_{j-1}=0) \\
= & \frac{1}{2d}\sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}(D_{i-1}=0|D_{j-1}=l)\mathbb{P}(D_{j-1}=l) \\
+ & (2\beta-\frac{1}{2d})\mathbb{P}(D_{i-1}=0|D_{j-1}=0)\mathbb{P}(D_{j-1}=0) \\
= & \frac{1}{2d}\mathbb{P}(D_{i-1}=0)+(2\beta-\frac{1}{2d})\mathbb{P}(D_{i-1}=0|D_{j-1}=0), \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

independente de k, $\forall k=1,\ldots,d$, e a primeira igualdade do fato de D_n ser Markoviano e homogêneo no tempo.

Então, substituindo (4.2.16) em (4.2.13), obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}] \\
= \;& (4\beta-1)\left[\frac{2}{d}i\mathbb{P}(D_{i-1}=0)+(8\beta-\frac{2}{d})\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_{i-1}=0,D_{j-1}=0)\right]. \quad (4.2.17)
\end{aligned}$$

De maneira análoga à anterior, temos, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x=0\}]) \\
= \;& (4\beta-1)\left[\frac{2}{d}i\mathbb{P}(D_{i-1}^x=0)+(8\beta-\frac{2}{d})\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_{i-1}^x=0,D_{j-1}^x=0)\right]. \quad (4.2.18)
\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.2.17), (4.2.18) e fazendo a soma em i, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}\right]-\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x=0\}\right] \\
= \;& \frac{2(4\beta-1)}{d}\sum_{i=1}^{n-1}i[\mathbb{P}(D_{i-1}=0)-\mathbb{P}(D_{i-1}^x=0)] + \\
&+(4\beta-1)(8\beta-\frac{2}{d})\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_{i-1}=0,D_{j-1}=0)-\mathbb{P}(D_{i-1}^x=0,D_{j-1}^x=0)].
\end{aligned}$$

Fazendo $k=i-1$ e $l=j-1$, temos que, a primeira parcela de $Var(\hat{L}_n(x))$ fica da forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i=0\}\right]-\mathbb{E}\left[\tilde{\nu}(S_i\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^x=0\}\right] \\
= \;& (4\beta-1)\left(\frac{2}{d}\sum_{k=1}^{n-2}k[\mathbb{P}(D_k=0)-\mathbb{P}(D_k^x=0)]+\frac{2}{d}\sum_{k=0}^{n-2}[\mathbb{P}(D_k=0)-\mathbb{P}(D_k^x=0)] + \right. \\
&\left. + (8\beta-\frac{2}{d})\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{l=1}^{k}[\mathbb{P}(D_k=0,D_l=0)-\mathbb{P}(D_k^x=0,D_l^x=0)]\right). \quad (4.2.19)
\end{aligned}$$

Portanto, para o modelo TI de alcance 1, substituindo (4.2.19) em (4.2.11), temos

$$\begin{aligned}
Var(\hat{L}_n(x)) &= \frac{4}{d}(4\beta-1)\sum_{i=1}^{n-2}i[\mathbb{P}(D_i=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0)] \\
+ \;& (8\beta-2)(8\beta-\frac{2}{d})\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_i=0,D_j=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0,D_j^x=0)] \\
+ \;& 2M(x)\sum_{i=0}^{n-1}[\mathbb{P}(D_i=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0)]+2\sigma_x^2\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i=0), \quad (4.2.20)
\end{aligned}$$

sendo $M(x) = \sigma_x^2 + \frac{2(4\beta-1)}{d}$.

Note que, como $\nu(\tilde{U}_n(k)) = 1/2$, então $\beta = \nu(\tilde{U}_n^2(k)) \geq 1/4$. Logo, todos os coeficientes de (4.2.20), que dependem de β, são não negativos. Além disso, para a segunda parcela de (4.2.20), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_i = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0, D_j^x = 0)] \\
= & \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_{i-j} = 0)\mathbb{P}(D_j = 0) - \mathbb{P}(D_{i-j} = 0)\mathbb{P}(D_j^x = 0)] \\
= & \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_{i-j} = 0)[\mathbb{P}(D_j = 0) - \mathbb{P}(D_j^x = 0)],
\end{aligned}$$

e, por Ferrari and Fontes [6], sabemos que, $[\mathbb{P}(D_j = 0) - \mathbb{P}(D_j^x = 0)]$ é não negativo. Por outro lado, do Lema 3.3 [A.6], temos que $\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(D_i = 0)$ não é limitada se $d = 1$ ou $d = 2$. Sendo assim, concluímos que $Var(\hat{L}_n(x))$ não é limitada em n nesses dois casos e, então, $\hat{L}_n(x)$ não é limitada quando $d = 1$ ou $d = 2$. Portanto, basta analisar a convergência de $\hat{L}_n(x)$ quando $d = 3$ e $d = 4$. Observe também que, se $x \notin 2\mathbb{Z}^d$ então $\mathbb{P}(D_i^x = 0) = 0$ pois, partindo de x o passeio aleatório nunca chega no zero, qualquer que seja i. Então, neste caso, a primeira parcela de $Var(\hat{L}_n(x))$ fica da forma,

$$\frac{4}{d}(4\beta - 1)\sum_{i=1}^{n-2} i\mathbb{P}(D_i = 0),$$

sendo que,

$$\sum_{i=1}^{n-2} i\mathbb{P}(D_i = 0) \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Isto nos garante que, $Var(\hat{L}_n(x))$ explode, quando $x \notin 2\mathbb{Z}^d$, como já havíamos antecipado. Portanto, basta analisar a convergência de $\hat{L}_n(x)$, em n , se $d = 3$ ou $d = 4$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$, que faremos a partir de agora.

Note que, pelo Lema 3.3 e pela Proposição 5.1 [A.6] , a terceira e quarta parcelas de (4.2.20) são limitadas em n. Para a segunda parcela de (4.2.20), como $\mathbb{P}(D_i^x = 0, D_j^x = 0) \geq 0$ então,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_i = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0, D_j^x = 0)] \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_i = 0, D_j = 0) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_i = 0|D_j = 0)\mathbb{P}(D_j = 0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{P}(D_{i-j} = 0)\mathbb{P}(D_j = 0).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_i=0,D_j=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0,D_j^x=0)] &\leq \sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(D_{n-j}=0)\mathbb{P}(D_j=0)\\ &= (\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n=0))^2,\end{aligned}$$

e, já sabemos que, para $d \geq 3$,

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n=0)<\infty.$$

Portanto, temos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}[\mathbb{P}(D_i=0,D_j=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0,D_j^x=0)] \quad \text{é uniformemente limitada em} \tag{4.2.21}$$

No restante desta seção, vamos analisar a primeira parcela de (4.2.20), com o objetivo de mostrar que ela é limitada em n, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$. Portanto, vamos provar que

$$\sum_{n\geq 1} n[\mathbb{P}(D_n=0)-\mathbb{P}(D_n^x=0)]<\infty, \quad \forall x\in 2\mathbb{Z}^d. \tag{4.2.22}$$

Sejam $A(s)$ e $a(s)$, as seguintes séries de potência

$$A(s)=\sum_{n\geq 0}A_n s^n \quad \text{e} \quad a(s)=\sum_{n\geq 0}a_n s^n, \tag{4.2.23}$$

sendo

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{i=0}^{n}[\mathbb{P}(D_i=0)-\mathbb{P}(D_i^x=0)]\\ a_n &= [\mathbb{P}(D_n=0)-\mathbb{P}(D_n^x=0)].\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}A(s) &= \sum_{n\geq 0}A_n s^n = a_0+\sum_{n\geq 1}(a_n+A_{n-1})s^n = a_0+\sum_{n\geq 1}a_n s^n+\sum_{n\geq 1}A_{n-1}s^n\\ &= \sum_{n\geq 0}a_n s^n + s\sum_{n\geq 0}A_n s^n = a(s)+sA(s).\end{aligned}$$

Isto é,

$$a(s)=(1-s)A(s). \tag{4.2.24}$$

Portanto,

$$\lim_{s\to 1} a(s) = \lim_{s\to 1}(1-s)A(s), \tag{4.2.25}$$

sendo

$$\lim_{s\to 1} a(s) = \sum_{n\geq 0}[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)].$$

Obs.: Todos os limites acima existem (e podem, em princípio, ser $+\infty$), pela positividade de $\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)$ [Ferrari/Fontes(1998), página 23].

De (4.2.24), temos que

$$a'(s) = \sum_{n\geq 1} na_n s^{n-1} = \frac{1}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n.$$

Isto é,

$$sa'(s) = \sum_{n>0} na_n s^n = \sum_{n>0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)]s^n. \tag{4.2.26}$$

De (4.2.26), temos

$$\lim_{s\to 1} sa'(s) = \sum_{n>0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)]. \tag{4.2.27}$$

Portanto, para provar (4.2.22), basta mostrar que

$$\lim_{s\to 1} a'(s) < \infty,$$

de acordo com (4.2.27) e valendo a observação acima.

Seja $f(s)$ a série de potência de $\mathbb{P}(D_n = 0)$, isto é,

$$f(s) = \sum_{n>0} \mathbb{P}(D_n = 0)s^n. \tag{4.2.28}$$

Sabemos, pelo que foi feito no lema 3.2 [Ferrari/Fontes (1998), página 13], que

$$f(s) = \frac{1/(1-s)}{1+(1-\gamma)s\phi_T(s)}, \tag{4.2.29}$$

sendo T o tempo do primeiro retorno à origem do passeio D_n, que começa no zero,

$$\phi_T(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T > n)s^n = \frac{1-\mathbb{E}(s^T)}{1-s},$$

em que

$$\mathbb{E}(s^T) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T = n)s^n = \Psi_T(s),$$

e, por (3.1.16), temos

$$\gamma =: \gamma_D(0,0) = \sum_{j=1}^{d} \nu(u_1(0,e_j))^2 < 1.$$

Obs.: $\gamma = 1$ é, em princípio, possível; corresponde ao Modelo do Votante; podemos excluir este caso, em que os resultados desta tese não valem.

Do Lema 4.3 [Ferrari/Fontes (1998), pág. 20], sabemos que

$$A_n = \sum_{i=0}^{n}[\mathbb{P}(D_i = 0) - \mathbb{P}(D_i^x = 0)] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(D_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T_x > k), \tag{4.2.30}$$

sendo T_x o tempo de chegada na origem do passeio D_n, partindo de $x \in 2\mathbb{Z}^d$, $x \neq 0$.

Portanto, usando (4.2.23), (4.2.28), (4.2.29) e (4.2.30), temos

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(D_{n-k} = 0)\mathbb{P}(T_x > k)s^n = (\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n = 0)s^n)(\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T_x > n)s^n) \\ &= f(s)\phi_{T_x}(s) = \frac{1/(1-s)}{1+(1-\gamma)s\phi_T(s)}\phi_{T_x}(s) \\ &= \frac{1}{(1-s)}\frac{\phi_{T_x}(s)}{1+(1-\gamma)s\phi_T(s)}. \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Usando (4.2.31) e (4.2.25), temos

$$a(s) = \frac{\phi_{T_x}(s)}{1+(1-\gamma)s\phi_T(s)}. \tag{4.2.32}$$

Seja

$$\begin{aligned} \Psi_T(s) &= \mathbb{E}(s^T) = \sum_{x\neq 0} \mathbb{E}(s^T|X = x)\mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x\neq 0} \mathbb{E}(s^{T_x})p_x = \sum_{x\neq 0} \Psi_{T_x}(s)p_x, \end{aligned}$$

sendo p_x, $x \neq 0$, a distribuição do salto da origem. Portanto,

$$\phi_T(s) = \sum_{x\neq 0} \phi_{T_x}(s)p_x. \tag{4.2.33}$$

Usando (4.2.33) em (4.2.32), temos

$$a(s) = \frac{\phi_{T_x}(s)}{1 + \lambda s \sum_{x \neq 0} \phi_{T_x}(s) p_x}, \tag{4.2.34}$$

sendo $\lambda = 1 - \gamma$.

De (4.2.33) sabemos que $\phi_T(s) = \sum_{y \neq 0} \phi_{T_y}(s) p_y$, sendo os valores possíveis de $y \neq 0$ todos os sítios em $2\mathbb{Z}^d$ para onde o passeio D_n pode pular partindo do zero. No caso que estamos tratando esses sítios são os "vizinhos mais próximos" da origem. Se $\mathcal{N}$ denotar o conjunto de todos os sítios que são "vizinhos mais próximos" da origem então

$$\phi_T(s) = \sum_{y \in \mathcal{N}} \phi_{T_y}(s) p_y = \frac{1}{d} \sum_{y \in \mathcal{N}} \phi_{T_y}(s),$$

pois $p_y = \frac{1}{d}$, $\forall y \in \mathcal{N}$.

Portanto, as variáveis T_y, $\forall y \in \mathcal{N}$, são identicamente distribuídas. Seja $y_0 \in \mathcal{N}$, digamos $y_0 = 2e_1$, por exemplo. Então,

$$\phi_T(s) = \frac{1}{d} \sum_{y \in \mathcal{N}} \phi_{T_{y_0}}(s) = \phi_{T_{y_0}}(s). \tag{4.2.35}$$

Logo, sendo $y_0 \in \mathcal{N}$ e substituindo (4.2.35) em (4.2.34), temos

$$a(s) = \frac{\phi_{T_x}(s)}{1 + \lambda s \phi_{T_{y_0}}(s)}. \tag{4.2.36}$$

(I) Consideremos o caso em que $x = y_0 \in \mathcal{N}$. Então, obtemos

$$a(s) = \frac{\phi_{T_{y_0}}(s)}{1 + \lambda s \phi_{T_{y_0}}(s)}. \tag{4.2.37}$$

Daí,

$$a'(s) = \frac{\phi'_{T_{y_0}}(s) - \lambda \phi^2_{T_{y_0}}(s)}{(1 + \lambda s \phi_{T_{y_0}}(s))^2}.$$

Para todo $0 < s < 1$, temos

$$0 < \phi_{T_{y_0}}(s) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_{y_0} \geq n) s^n \geq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_{y_0} = \infty) s^n = p_0 \sum_{n \geq 0} s^n = p_0 \frac{1}{1 - s},$$

sendo $p_0 = \mathbb{P}(T_{y_0} = \infty) > 0$, pois, como estamos considerando $d \geq 3$ então o passeio aleatório D_n é transitório. Temos

$$0 < \frac{1}{\phi_{T_{y_0}}(s)} \leq \frac{1 - s}{p_0}, \quad p_0 > 0 \quad \text{e} \tag{4.2.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\phi'_{T_{y_0}}(s)}{\phi^2_{T_{y_0}}(s)} &= \frac{(\sum_{n\geq 0} I\!P(T\geq n)s^n)'}{(\sum_{n\geq 0} I\!P(T\geq n)s^n)^2} \leq \frac{(\sum_{n\geq 0} s^n)'}{(\sum_{n\geq 0} I\!P(T=\infty)s^n)^2} \\ &= \frac{(1/(1-s))'}{p_0^2(\frac{1}{1-s})^2} = \frac{1}{p_0^2} < \infty.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{\phi'_{T_{y_0}}(s)}{\phi^2_{T_{y_0}}(s)} \leq \frac{1}{p_0^2} < \infty. \tag{4.2.39}$$

Portanto, $\lim_{s\to 1} a'(s)$ é finito. Logo, provamos que, quando $x \in \mathcal{N}$ temos

$$\sum_{n\geq 0} n[I\!P(D_n^0 = 0) - I\!P(D_n^x = 0)] < \infty. \tag{4.2.40}$$

Então, usando (4.2.40) e (4.2.21), concluímos que $Var(\hat{L}_n(x))$ é uniformemente limitada em n , quando $x \in \mathcal{N}$.

(II) De (4.1.8), da Proposição 2.3 e do Lema 3.3 [A.6], basta mostrar que $Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ é limitada em n. De (I), sabemos que isto é válido para $y_0 \in \mathcal{N}$. Para $x \in 2\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, escrevemos $\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)$ como uma soma telescópica de "vizinhos mais próximos" (em $2\mathbb{Z}^d$), da seguinte forma

$$\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0) = \sum_{k=1}^{m}(\bar{L}_n(x_k) - \bar{L}_n(x_{k-1})), \tag{4.2.41}$$

sendo m o número de sítios do caminho a partir da origem até x, $x_m = x$ e $x_0 = 0$.

Note que,

$$\begin{aligned}Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) &\leq m\sum_{k=1}^{m} Var(\bar{L}_n(x_k) - \bar{L}_n(x_{k-1})) \\ &= m^2 Var(\bar{L}_n(y_0) - \bar{L}_n(0))\end{aligned} \tag{4.2.42}$$

sendo $y_0 \in \mathcal{N}$ arbitrário e a última igualdade seguindo da invariância por translação do modelo. A última expressão é limitada em n por (I).

Como $(\hat{L}_n(x) - I\!E(\hat{L}_n(x)))$ é um martingal então, usando o Teorema de Convergência em L^2, Durrett, [5], temos que

$$\hat{L}_n(x) \longrightarrow \hat{L}_\infty(x) \tag{4.2.43}$$

quase certamente e em L^2. Portanto, (4.2.43) completa a prova do seguinte Teorema:

Teorema 4.2.1 *Seja $\hat{L}_n$ o processo das alturas visto da altura da origem, no modelo TI, definido por*

$$\hat{L}_n(x) = L_n(x) - L_n(0), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Z}^d.$$

Se $d \geq 3$ então $\{\hat{L}_n(x),\ x \in 2\mathbb{Z}^d\}$ converge quase certamente e em L^2, quando $n \to \infty$ para uma superfície aleatória, que denotamos por $\hat{L} = \{\hat{L}(x),\ x \in 2\mathbb{Z}^d\}$.

As flutuações espaciais de $\hat{L}$ são da mesma ordem do que as de L, para $d \geq 5$, devido à independência em relação a x da distribuição de $\bar{L}_n(x)$ e da limitação em n de suas flutuações. Como veremos adiante (Teorema 4.3.2), o Teorema 3.1.2 do Capítulo 3 é válido se substituirmos L por $\hat{L}$.

4.3 A forma e a ordem de magnitude das flutuações espaciais no modelo TI

Pelo Teorema 4.2.1, da seção anterior, temos que o processo das alturas, visto da altura da origem, converge fracamente para para uma superfície aleatória $\hat{L}$, quando $d \geq 3$. Agora, vamos estudar a ordem de magnitude das flutuações espaciais dessa medida e a forma dessas flutuações.

Seja $f_n = \hat{L}_n - \mathbb{E}(\hat{L}_n)$, para todo $n \geq 1$. Para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$f_n(x) = \hat{L}_n(x) - \mathbb{E}(\hat{L}_n(x)).$$

Usando o Teorema 4.2.1, temos que

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{L}_n(x)) = Var(\hat{L}(x)). \tag{4.3.1}$$

Então, usando (4.3.1) em (4.2.20), temos

$$\begin{aligned} Var(\hat{L}(x)) &= k_1 \sum_{n\geq 1} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] + \\ &+ 2M(x) \sum_{n\geq 1} [\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] + 2\sigma_x^2 \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0) + \\ &+ k_2 \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} [\mathbb{P}(D_n = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0, D_j^x = 0)], \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

sendo $k_1 = \frac{4(4\beta-1)}{d}$, $k_2 = k_1 d(4\beta - \frac{1}{d})$ e $2M(x) = 2\sigma_x^2 + k_1$. Provamos, na seção anterior, que $Var(\hat{L}(x))$ é finita, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$. Portanto, nosso objetivo agora é estudar sua dependência em x e seu comportamento quando $\|x\| \to \infty$, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$. Mas, note que, se $d \geq 5$ então, pela independência em relação a x da distribuição de $\bar{L}_n(x)$ e por (3.1.43), sabemos que $Var(\bar{L}_n(x)) = Var(\bar{L}_n)$ é limitada em n, com limitantes que não dependem de x, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$. Logo, se $d \geq 5$, temos que $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) < \infty$, não depende de x. Como $(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ é um martingal (Lema 2.2.1), então pelo Teorema de Convergência de Martingais em L^2, Durrett [5], temos que $(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ converge quase certamente e em L^2, quando $n \to \infty$. Seja $\tilde{L}(x)$ este limite. Então, $\tilde{L}(x)$ tem flutuações limitadas em x, quando $d \geq 5$. Como, por (4.1.7), sabemos que

$$\hat{L}_n(x) = (\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) + 2x\bar{Z}_n(x) + \|x\|^2, \tag{4.3.3}$$

então, observe que, se $d \geq 5$, as flutuações espaciais de $\hat{L}_n(x)$ são provinientes, unicamente, das flutuações do termo $2x\bar{Z}_n(x)$, que já conhecemos do estudo do PMA linear. Portanto, basta analisar a ordem das flutuações espaciais de $Var(\hat{L}_\infty(x))$ quando $d = 3$ ou $d = 4$, sendo $x \in 2\mathbb{Z}^d$. Para isto, precisamos estudar o comportamento de $Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$, quando $d = 3$ ou $d = 4$. Usando (4.2.10) em (4.1.19), temos que

$$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) &= 2\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\nu(S_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i = 0\}] - \mathbb{E}[\nu(S_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^x = 0\}] \\ &\quad + 2\sigma_x^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i^x = 0). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Seja σ_x^2 como definido em (2.2.42). Então, usando (4.2.7), note que

$$\sigma_x^2 = \frac{4\beta - 1}{d}\|x\|^2. \tag{4.3.5}$$

Substituindo (4.2.19) e (4.3.5) em (4.3.4) e, considerando k_1 e k_2 como definidos em (4.3.2), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) &= k_1 \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] + \\ &+ k_2 \sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n} [\mathbb{P}(D_n = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0, D_j^x = 0)] + \\ &+ k_1\left(\frac{\|x\|^2}{2} - 1\right) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n^x = 0) + k_1 \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n = 0). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Observe que, $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) < \infty$, pelas seguintes razões:

(1) $\sum_{n\geq 0} I\!P(D_n^x = 0) \leq \sum_{n\geq 0} I\!P(D_n^0 = 0) < \infty$ pois, como vimos em [Ferrari/Fontes (1998), página 23], $[I\!P(D_n^0 = 0) - I\!P(D_n^x = 0)]$ é o incremento da variância de um martingal e portanto, tem que ser não negativo. Isto é,

$$I\!P(D_n^0 = 0) \geq I\!P(D_n^x = 0) \quad \forall n \geq 1.$$

(2) As parcelas restantes de $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ aparecem também na expressão de $Var(\hat{L}(x)$ e, já provamos na seção 4.2, que nesses casos $Var(\hat{L}(x)) < \infty$.

Para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ é um número par e o número total de passos para chegar ao sítio zero, partindo de x, é no mínimo igual a $\frac{\|x\|}{2}$. Isto é, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$,

$$I\!P(D_n^x = 0) = 0, \quad \forall\, n < \frac{\|x\|}{2}.$$

Então,

$$\sum_{n\geq 0} I\!P(D_n^x = 0) = \sum_{n\geq \frac{\|x\|}{2}} I\!P(D_n^x = 0) \leq \sum_{n\geq \frac{\|x\|}{2}} I\!P(D_n = 0),$$

e sabemos que $\sum_{n\geq 0} I\!P(D_n = 0)$ é uma série convergente. Portanto,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \sum_{n\geq 0} I\!P(D_n^x = 0) = 0. \tag{4.3.7}$$

Por outro lado, como vimos seção 4.2,

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n}[I\!P(D_n = 0, D_j = 0) - I\!P(D_n^x = 0, D_j^x = 0)] \leq (\sum_{n\geq 1} I\!P(D_n = 0))^2, \tag{4.3.8}$$

e não depende de x. Portanto, para entender o comportamento de $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)$, dado na expressão (4.3.6), quando $\|x\| \to \infty$, basta analisar

$$\sum_{n\geq 0} n[I\!P(D_n = 0) - I\!P(D_n^x = 0)].$$

Como sabemos, o passeio aleatório D_n é simétrico, com tempo de espera, isto é, $\gamma^* =: \gamma_D(0,0) > 0$ e perturbado na origem. Consideremos agora os passeios aleatórios H_n, como definido em (3.1.10), e H_n^*, definido da seguinte forma: passeio aleatório simétrico,

homogêneo, sem tempo de espera, isto é, $\gamma^* =: \gamma_{H^*}(0,0) = 0$, e com probabilidade de transição, dada por

$$\gamma_{H^*}(l,k) = \frac{\gamma_H(l,k)}{\sum_{m\in\mathbb{Z}^d, m\neq l}\gamma_H(l,m)}, \tag{4.3.9}$$

para todo $l \neq k$, $l,k \in 2\mathbb{Z}^d$. De (4.2.37), para o passeio D_n, temos

$$a_D(s) = \frac{\phi_{T_x}(s)}{1+\lambda s\phi_{T_{y_0}}(s)}, \tag{4.3.10}$$

sendo $y_0 \in \mathcal{N}$, o conjunto de todos os sítios que são "vizinhos mais próximos" da origem e T_x, como definido em (4.2.30), tal que

$$\phi_{T_x}(s) = \frac{1-\psi_{T_x}(s)}{1-s}, \tag{4.3.11}$$

sendo

$$\psi_{T_x}(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T_x = n)s^n. \tag{4.3.12}$$

Portanto, substituindo (4.3.11) em (4.3.10), temos

$$a_D(s) = \frac{1-\psi_{T_x}(s)}{(1-s)+\lambda s(1-\psi_{T_{y_0}})}. \tag{4.3.13}$$

De maneira análoga, para o passeio H_n, temos

$$a_H(s) = \frac{\phi_{\tilde{T}_x}(s)}{1+\bar{\lambda}s\phi_{\tilde{T}_y}(s)}, \tag{4.3.14}$$

sendo $\tilde{T}_x$ definido como T_x, porém relativo ao passeio H_n, $\bar{\lambda} = 1-\bar{\gamma}$ e

$$\bar{\gamma} =: \gamma_H(0,0) = \sum_{j=1}^{d} \nu^2(u_1(0,e_j)).$$

Observe que, a diferença entre os passeios D_n e H_n é a não homogeneidade na origem de D_n e que as variáveis T_x e $\tilde{T}_x$ não envolvem as transições neste sítio. Portanto,

$$\phi_{T_x}(s) = \phi_{\tilde{T}_x}(s). \tag{4.3.15}$$

Então, como conseqüência, temos

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{T}}(s) &= \sum_{y\in\mathcal{N}} \phi_{\tilde{T}_y}(s)\tilde{p}_y = \sum_{y\in\mathcal{N}} \phi_{T_y}(s)\tilde{p}_y \\ &= \phi_{T_{y_0}}(s)\sum_{y\in\mathcal{N}} \tilde{p}_y = \phi_{T_{y_0}}(s),\end{aligned}$$

para $y_0 \in \mathcal{N}$, digamos $y_0 = 2e_1 = (2, 0, \ldots, 0)$. Isto é,

$$\phi_T(s) = \phi_{\bar{T}}(s) = \phi_{T_{y_0}}(s), \quad \forall y_0 \in \mathcal{N}. \tag{4.3.16}$$

Logo, substituindo (4.3.15) e (4.3.16) em (4.3.14) e usando (4.3.11), temos

$$a_H(s) = \frac{1 - \psi_{T_x}(s)}{(1-s) + \bar{\lambda} s(1 - \psi_{T_{y_0}}(s))}. \tag{4.3.17}$$

Para o passeio H_n^*, analogamente, temos

$$a_{H^*}(s) = \frac{\phi_{T_x^*}(s)}{1 + s\phi_{T_{y_0}^*}(s)}, \tag{4.3.18}$$

sendo $\lambda^* = 1 - \gamma^* = 1$.

Portanto, usando (4.3.11), temos

$$a_{H^*}(s) = \frac{1 - \psi_{T_x^*}(s)}{(1-s) + s(1 - \psi_{T_{y_0}^*}(s))}. \tag{4.3.19}$$

Observe que a variável T_x, que aparece nas expressões de $a_D(s)$ e de $a_H(s)$, é da forma

$$T_x = \sum_{i=1}^{N_x} \tau_i, \tag{4.3.20}$$

sendo

(i) N_x a variável aleatória que conta o número de passos efetivos do passeio H_n (ou D_n) no caminho percorrido de x até zero;

(ii) τ_i a variável aleatória que representa o tempo de espera do passeio H_n (ou D_n) no i-ésimo sítio visitado, no caminho que vai de x até zero;

(iii) τ_i tem distribuição geométrica com parâmetro $\bar{\gamma}$ (o parâmetro é γ para o passeio D_n), $\forall i \geq 1$, isto é,

$$\mathbb{P}(\tau_i = k) = (\bar{\gamma})^{k-1}(1 - \bar{\gamma})\mathbf{1}\{1, 2, \ldots\}(k);$$

(iv) As variáveis $\tau_1, \tau_2, \ldots$, são independentes e identicamente distribuídas.

Então,

$$\begin{aligned} \psi_{T_x}(s) &= \mathbb{E}(s^{T_x}) = \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^{N_x} \tau_i}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^{N_x} \tau_i} | N_x)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(s^{\tau_i})]^{N_x} = \mathbb{E}[\psi_{\tau_i}(s)]^{N_x} = \psi_{N_x}(\psi_{\tau_i}(s)) = \psi_{N_x} \circ \psi_{\tau_i}(s). \end{aligned}$$

Usando (iii) e (iv) de (4.3.20), temos

$$\psi_{\tau_1}(s) = \sum_{k\geq 1} s^k \mathbb{P}(\tau_1 = k) = \sum_{k\geq 1} s^k (\bar{\gamma})^{k-1}(1-\bar{\gamma}) = \frac{(1-\bar{\gamma})}{\bar{\gamma}} \frac{s\bar{\gamma}}{(1-s\bar{\gamma})} = \frac{(1-\bar{\gamma})s}{1-\bar{\gamma}s}.$$

Logo, para todo x,

$$\psi_{T_x}(s) = \psi_{N_x}\left(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{1-\bar{\gamma}s}\right). \tag{4.3.21}$$

Para o passeio H_n^*, temos $\tau_j \equiv 1$, $\forall j \geq 1$. Então,

$$T_x^* = \sum_{i=1}^{N_x^*} 1 = N_x^*, \tag{4.3.22}$$

sendo N_x^* a variável aleatória que conta o número de passos efetivos do passeio H_n^*, no caminho percorrido de x até zero, $x \neq 0$. Portanto,

$$\psi_{T_x^*}(s) = \psi_{N_x^*}(s) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N_x^* = n)s^n. \tag{4.3.23}$$

De maneira análoga, temos

$$\psi_{T_{y_0}}(s) = \psi_{N_{y_0}}\left(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{1-\bar{\gamma}s}\right) \tag{4.3.24}$$

e

$$\psi_{T_{y_0}^*}(s) = \psi_{N_{y_0}^*}(s) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N_{y_0}^* = n)s^n. \tag{4.3.25}$$

Sabemos, de (4.2.27), que

$$\lim_{s\uparrow 1} a'_D(s) = \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)]. \tag{4.3.26}$$

De maneira análoga, temos para os passeios H_n e H_n^*, respectivamente:

$$\lim_{s\uparrow 1} a'_H(s) = \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_n = 0) - \mathbb{P}(H_n^x = 0)] \tag{4.3.27}$$

$$\lim_{s\uparrow 1} a'_{H^*}(s) = \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_n^* = 0) - \mathbb{P}(H_n^{*x} = 0)]. \tag{4.3.28}$$

Lema 4.3.1: *Se $x \in 2\mathbb{Z}^d$ está localizado num dos eixos coordenados e $\|x\|$ é um múltiplo par de 2 então existem constantes c, $c' < \infty$ tais que*

$$\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)] \leq \begin{cases} c\,\|x\|, & \text{se } d = 3 \\ c'\,\log\|x\|, & \text{se } d = 4. \end{cases}$$

Prova: Ver Apêndice A.3.

Lema 4.3.2: *Seja $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\|$ é um múltiplo par de 2 e x tem apenas uma coordenada diferente de zero. Então,*

$$\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_n^* = 0) - \mathbb{P}(H_n^{*x} = 0)]$$

são da mesma ordem, para $d = 3$ ou 4. Isto é,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)]}{\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_n^* = 0) - \mathbb{P}(H_n^{*x} = 0)]} = \frac{1}{1-\gamma},$$

sendo $\gamma =: \gamma_D(0,0) = \sum_{j=1}^d \nu(u_1(0,e_j))^2 < 1$.

Prova: Ver Apêndice A.4.

Retornando à expressão (4.3.6), temos

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))}{\|x\|^2} = \lim_{\|x\|\to\infty} \left[\frac{k_1}{\|x\|^2} \sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] \right.$$
$$+ \frac{k_2}{\|x\|^2} \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} [\mathbb{P}(D_n = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0, D_j^x = 0)] + k_1 (\frac{1}{2} \frac{1}{\|x\|^2}) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n^x = 0)$$
$$\left. + \frac{k_1}{\|x\|^2} \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n = 0) \right]. \tag{4.3.29}$$

Portanto, utilizando os lemas 4.3.1 e 4.3.2 e as expressões (4.3.7) e (4.3.8), concluímos que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))}{\|x\|^2} = 0, \tag{4.3.30}$$

para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\|$ é múltiplo par de 2, x tem apenas uma coordenada diferente de zero e $d = 3$ ou 4.

Consideremos agora $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\|$ é múltiplo ímpar de 2, localizado num dos eixos coordenados. Ou seja, x tem apenas uma coordenada diferente de zero e $\|x\| = |x_i|$ é da forma $2(2k+1)$, para algum $k > 0$ e algum $i = 1, \ldots, d$.

Seja $x' \in 2\mathbb{Z}^d$ um múltiplo par de 2 que é o vizinho mais próximo de x no mesmo eixo coordenado. Entäo,

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) = \lim_{n\to\infty} Var[(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(x')) + (\bar{L}_n(x') - \bar{L}_n(0))]$$
$$\leq 2 \lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(x')) + Var(\bar{L}_n(x') - \bar{L}_n(0)). \tag{4.3.31}$$

Como $\bar{L}_n(x) \stackrel{d}{=} \bar{L}_n(0)$, pela invariância por translação do modelo, garantimos que

$$[\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(x')] \stackrel{d}{=} [\bar{L}_n(y_0) - \bar{L}_n(0)], \tag{4.3.32}$$

sendo y_0 vizinho mais próximo de zero e no mesmo eixo coordenado de x e x'. Portanto,

$$Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(x')) = Var(\bar{L}_n(y_0) - \bar{L}_n(0)), \tag{4.3.33}$$

e não depende de x e x'.

Observe que, $Var(\bar{L}_n(x') - \bar{L}_n(0))$ satisfaz (4.3.30). Então, usando (4.3.33) e (4.3.31), temos

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \left[\frac{\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))}{\|x\|^2}\right] = 0, \tag{4.3.34}$$

para $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que, $\|x\|$ é múltiplo ímpar de 2 e x localiza-se num dos eixos coordenados. Agora, seja $x \in 2\mathbb{Z}^d$ qualquer, com pelo menos duas coordenadas diferentes de zero $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) \leq & \lim_{n\to\infty} \Big[Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0)) \\ & + Var(\bar{L}_n(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) - \bar{L}_n(x_1, \ldots, x_{d-2}, 0, 0)) \\ & + \ldots + Var(\bar{L}_n(x_1, 0, \ldots, 0) - \bar{L}_n(0))\Big]. \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Note que, cada parcela de (4.3.35) é a variância da diferença de $\bar{L}_n$ entre sítios que diferem em apenas uma coordenada. Pela invariância por translação da distribuição de $\{\bar{L}_n(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$, cada variância é portanto a variância da diferença de $\bar{L}_n$ entre sítios num mesmo eixo coordenado. Então, podemos usar os dois casos analisados anteriormente. Logo, concluímos que,

$$\left[\frac{\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))}{\|x\|^2}\right] \tag{4.3.36}$$

converge a zero, quando $\|x\| \to \infty$. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) = O(\|x\|^2),$$

para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d = 3$ ou 4.

Teorema 4.3.1: *Se $d \geq 3$ então*

$$Var(\hat{L}(x)) \quad \text{é da ordem de} \quad \|x\|^2,$$

para $x \in 2\mathbb{Z}^d$, no caso de $\mu = 0$ e alcance 1. Isto é, as flutuações espaciais de $\hat{L}(x)$ são da ordem de $\|x\|$, $x \in 2\mathbb{Z}^d$, se $d \geq 3$.

Prova: Usando (4.3.2) e (4.3.5), podemos escrever a $Var(\hat{L}(x))$ da seguinte forma:

$$Var(\hat{L}(x)) = k_1 \sum_{n\geq 1} n[\mathbb{P}(D_n = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)] +$$
$$+ k_1(\|x\|^2 + 1) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0) - k_1(\frac{\|x\|^2}{2} + 1) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n^x = 0) +$$
$$+ k_2 \sum_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{n} [\mathbb{P}(D_n = 0, D_j = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0, D_j^x = 0)].$$

Então, usando (4.3.7), (4.3.8) e (4.3.36), para os casos de $d = 3$ ou 4, temos

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{Var(\hat{L}(x))}{\|x\|^2} = k_1 \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0) < \infty,$$

sendo k_1 como definido em (4.3.2) e usando o fato de que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0)$ é uma série convergente [Ferrari/Fontes (1998), página 16]. Para $d \geq 5$ o resultado do Teorema também é válido pois,

$$\lim_{n\to\infty} Var(x\bar{Z}_n(x)) = Var(x\bar{Z}(x)) = \sigma_x^2 \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0) = \frac{4\beta - 1}{d} \|x\|^2 \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(D_n = 0),$$

usando (4.3.5) e a Proposição 2.3 [A.6], o que completa a prova do Teorema. □

Agora, partimos para obter alguma informação a respeito da forma dessas flutuações espaciais. De (4.3.3) e (4.1.4), temos

$$\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0) = (\hat{L}_n(x) - \mathbb{E}(\hat{L}_n(x))) - 2x\bar{Z}_n(x), \tag{4.3.37}$$

sendo, $\mathbb{E}(x\bar{Z}_n(x)) = \mathbb{E}(x\tilde{Z}_n(x)) = 0$.

Do Lema 2.2.1, sabemos que $(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0))$ é um martingal em relação a $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$. Além disso, ja vimos que $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0)) < \infty$. Portanto, usando o Teorema de Convergência de Martingais em L^2, Durrett [5], temos que

$$\bar{L}_n(x) - \bar{L}_n(0) \to \tilde{L}(x), \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty. \tag{4.3.38}$$

Também usando o mesmo Teorema de Convergência, temos que

$$x\tilde{Z}_n(x) \to x\tilde{Z}(x), \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty, \tag{4.3.39}$$

utilizando Lema 2.2, Proposição 2.3 e Lema 3.3 [A.6], e sendo $\tilde{Z}_n(x)$ como na Definição 2 [A.6]. Então, de $\bar{Z}_n(x) \stackrel{d}{=} \tilde{Z}_n(0)$ e usando (4.3.5) e (4.3.39), temos

$$x\bar{Z}_n(x) \to x\bar{Z}(x), \quad \text{q.c. e em } L^2, \text{ quando } n \to \infty. \tag{4.3.40}$$

Logo, usando (4.3.37), (4.3.38), (4.3.40) e o Teorema 4.2.1, temos

$$\hat{L}(x) - \|x\|^2 = 2x\bar{Z}(x) + \tilde{L}(x), \quad \text{sendo} \quad \mathbb{E}(\hat{L}(x)) = \|x\|^2. \tag{4.3.41}$$

Então,

$$\frac{\hat{L}(x) - \|x\|^2}{\|x\|} = 2\frac{x}{\|x\|}\bar{Z}(x) + \frac{\tilde{L}(x)}{\|x\|} \tag{4.3.42}$$

sendo que

$$\frac{\tilde{L}(x)}{\|x\|} \stackrel{P}{\to} 0 \quad \text{quando } \|x\| \to \infty, \tag{4.3.43}$$

usando (4.3.36) e (4.3.38) e,

$$Var(2\frac{x}{\|x\|}\bar{Z}(x)) = \frac{4(4\beta - 1)}{d}\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0) = k_1\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0), \tag{4.3.44}$$

usando (4.3.40). Então, para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que

$$\frac{x}{\|x\|} \to \varphi, \quad \text{quando } x \to \infty, \tag{4.3.45}$$

temos

$$\frac{\hat{L}(x) - \|x\|^2}{\|x\|} \stackrel{d}{\Longrightarrow} 2\varphi\tilde{Z}(0), \tag{4.3.46}$$

sendo $\varphi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\varphi\| = 1$, $\mathbb{E}(2\varphi\tilde{Z}(0)) = 0$ e

$$\begin{aligned} Var(2\varphi\tilde{Z}_\infty(0)) &= 4\sigma_\varphi^2\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0) = \frac{4(4\beta - 1)}{d}\|\varphi\|^2\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0) \\ &= k_1\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0). \end{aligned}$$

Portanto, (4.3.45) e (4.3.46) completam a prova do seguinte teorema:

Teorema 4.3.2: *Seja $x \in 2\mathbb{Z}^d$ e $d \geq 3$ tal que $\frac{x}{\|x\|} \to \varphi$, quando $x \to \infty$, sendo $\varphi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Então,*

$$\frac{\hat{L}(x) - \|x\|^2}{\|x\|} \stackrel{d}{\Longrightarrow} 2\varphi\tilde{Z}(0) \quad \text{e} \quad \frac{Var(\hat{L}(x))}{\|x\|^2} \to Var(2\varphi\bar{Z}(0)) < \infty,$$

quando $\|x\| \to \infty$, com $\mathbb{E}(2\varphi\bar{Z}_\infty(0)) = 0$ e $Var(2\varphi\bar{Z}_\infty(0)) = k_1\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(D_n = 0)$, sendo k_1 como definido em 4.3.2.

Capítulo 5

Processo das alturas a tempo contínuo.

Neste capítulo estudamos o processo das alturas a tempo contínuo, denotado por η_t, $t \geq 0$, obtendo resultados análogos ao processo a tempo discreto.

Na Seção 5.1 fazemos uma discretização do processo contínuo considerando uma família de processos a tempo discreto, denotada por X_n^N, para todo $n \geq 0$, sendo N o indexador da família e provamos que $X_{[Nt]}^N$ converge em $\mathcal{L}^2$ para o processo η_t quando $N \to \infty$, para todo t fixo, supondo a existência do quarto momento (Teorema 5.1.1). De maneira análoga definimos L_n^N tal que $X_n^N \stackrel{d}{=} L_n^N$. A partir daí encontramos a variância de $\eta_t(x)$ como limite da variância de $X_{[Nt]}^N(x)$ quando $N \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Na Seção 5.2 tratamos do caso dos u's simétricos e alcance limitado e encontramos a ordem de magnitude em n de $Var(\eta_t(x))$. Provamos que neste caso as flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, somente se estabilizam quando $d \geq 5$ (Teorema 5.2.1).

Na Seção 5.3 estudamos o caso dos u's viesados e, assumindo a existência do quarto momento, mostramos que as flutuações da altura do sítio x nunca se estabilizam, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ (Teorema 5.3.1).

Na Seção 5.4 definimos o processo das alturas vistas da altura da origem denotado por $\hat{\eta}_t$ e estudamos sua convergência temporal no caso dos u's simétricos, alcance estritamente 1 e $d \geq 3$. Provamos que neste caso o processo $\hat{\eta}_t(x)$ converge fracamente para uma superfície aleatória $\hat{\eta}(x)$, quando $t \to \infty$. Este resultado envolve uma segunda discretização,

desta vez dos processos auxiliares D_t e S_t.

5.1 Discretização do processo contínuo

Nesta Seção consideraremos o modelo contínuo $\eta_t, t \geq 0$, como definido na Introdução. Denotaremos por $\mathbb{P}$ e $\mathbb{E}$ a medida de probabilidade e a esperança correspondentes ao espaço onde as famílias dos processos de Poisson $\{N_t(i), i \in \mathbb{Z}^d\}_{t\geq 0}$ e dos vetores de probabilidade aleatórios $\{u(i,\cdot), i \in \mathbb{Z}^d\}$ estão definidos. Sendo ν a distribuição comum dos vetores $u(i,\cdot)$, denotaremos por $\mathbb{P}_\nu$ e $\mathbb{E}_\nu$ a medida de probabilidade e a esperança associadas a ν. Como antes, usaremos a notaçao $\nu(X)$ para indicar $\mathbb{E}_\nu(X)$.

Para cada sítio $i \in \mathbb{Z}^d$ consideremos um processo de Poisson $(N_t(i))_{t\geq 0}$ de parâmetro 1, independente dos demais sítios. Então, sempre que o relógio exponencial toca para o sítio $i \in \mathbb{Z}^d$, a altura correspondente a este sítio é renovada por uma combinação convexa aleatória da sua própria altura e das alturas dos sítios vizinhos. Sejam $T(i,k)$ os sucessivos tempos do processo de Poisson do sítio i, $i \in \mathbb{Z}^d$, para todo $k \geq 1$. Isto é,

$$T(i,k) \quad \text{é o tempo da } k\text{−ésima marca de Poisson no sítio } i \in \mathbb{Z}^d. \tag{5.1.1}$$

Seja

$$u_k(i,\cdot) \quad \text{a } k\text{−ésima realização independente do vetor aleatório } u(i,\cdot). \tag{5.1.2}$$

Consideremos $\left\{\beta^N_{n,i}\ ;\ n \geq 1,\ i \in \mathbb{Z}^d\right\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, definidas por

$$\beta^N_{n,i} = \mathbf{1}\left\{T(i,k) \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right],\ \text{para algum } k \geq 1\right\}, \tag{5.1.3}$$

sendo N um inteiro positivo, denotado como parâmetro de escala.
Cada variável $\beta^N_{n,i}$ tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p dado por

$$p = \mathbb{P}(T(i,1) \leq 1/N) = 1 - e^{-1/N}. \tag{5.1.4}$$

Para cada sítio $i \in \mathbb{Z}^d$, o tempo contínuo é discretizado em intervalos de comprimento $1/N$ e

$$\begin{aligned} \beta^N_{n,i} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{ocorreu pelo menos uma marca do } i\text{-ésimo processo de Poisson no intervalo } \left[\tfrac{n-1}{N}, \tfrac{n}{N}\right]) \\ &\Leftrightarrow \quad (\text{a altura do sítio } i \text{ será renovada no tempo } n). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Seja

$$K_n^i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,i}^N, \tag{5.1.6}$$

o número de marcas do i-ésimo processo de Poisson no intervalo $[0, \frac{n}{N}]$. Então, o processo a tempo discreto, $(X_n^N)_{n\geq 0}$, será definido da seguinte forma: para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_0^N(i) &= X_0(i) \\ X_n^N(i) &= \beta_{n,i}^N \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{K_n^i}(i,j) X_{n-1}^N(j) + (1-\beta_{n,i}^N) X_{n-1}^N(i). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Seja $\mathcal{F}_n^N$ a $\sigma-$álgebra gerada por $\{\beta_{k,i}^N,\ u_k(i,\cdot)\ 1 \leq k \leq n,\ i \in \mathbb{Z}^d\}$. De (2.1.6) sabemos que

$$X_n^N(x) = \mathbb{E}\left[X_0^N\left(Y_n^{N,x,n}\right) | \mathcal{F}_n^N\right], \tag{5.1.8}$$

sendo $Y_k^{N,x,n}$, $k = 0, \ldots, n$, um passeio aleatório começando em x, dado pelas probabilidades de transição

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k^{N,x,n} = j | Y_{k-1}^{N,x,n}, \mathcal{F}_n^N) &= \beta_{n-k,i}^N u_{K_n^i - k}(i,j) + (1-\beta_{n-k,i}^N)\mathbf{1}\{i=j\} \\ &=: u_{n-k}^N(i,j). \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Assim, $U^N = \left\{u_k^N(i,\cdot) : k \geq 0,\ i \in \mathbb{Z}^d\right\}$ é uma família de vetores de probabilidade aleatórios independentes e identicamente distribuídos. Utilizando a configuração inicial dada em (2.2.1) temos

$$X_n^N(x) = \mathbb{E}(\|Y_n^{N,x,n}\|^2 \mid \mathcal{F}_n^N). \tag{5.1.10}$$

Consideremos agora o passeio aleatório $Y_n^{N,x}$, começando em $x \in \mathbb{Z}^d$, dado pelas probabilidades de transição

$$\mathbb{P}(Y_k^{N,x} = j | Y_{k-1}^{N,x} = i, \mathcal{F}_n^N) = \beta_{k,i}^N u_{K_k^i}(i,j) + (1-\beta_{k,i}^N)\mathbf{1}\{i=j\} =: u_k^N(i,j). \tag{5.1.11}$$

Então, analogamente a (2.2.2), temos

$$L_n^N(x) = \mathbb{E}(\|Y_n^{N,x}\|^2 \mid \mathcal{F}_n^N). \tag{5.1.12}$$

Sejam, para todo $n \geq 1$ e $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\theta_n^N(k) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}(j-k)u_n^N(k,j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}(j-k)[\beta_{n,k}^N u_{K_n^k}(k,j) + (1-\beta_{n,k}^N)\mathbf{1}\{k=j\}] \\ &= \beta_{n,k}^N \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}(j-k)u_{K_n^k}(k,j) = \beta_{n,k}^N \theta_{K_n}(k), \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

sendo a segunda igualdade decorrente de (5.1.11). Sejam $S_n^{N,x,y}$ e $D_n^{N,x,y}$ cadeias em $\mathbb{Z}^d$, definidas por

$$\begin{aligned} S_n^{N,x,y} &= Y_n^{N,x} + \hat{Y}_n^{N,y} \\ D_n^{N,x,y} &= Y_n^{N,x} - \hat{Y}_n^{N,y}, \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

sendo $\hat{Y}_n^{N,x}$ uma cópia do passeio aleatório $Y_n^{N,x}$, independentes dado $\mathcal{F}_n^N$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$. As probabilidades de transição da cadeia $D_n^{N,x,0}$ são

$$\begin{aligned} \gamma_D^N(l,k) &= \mathbb{P}(D_n^{N,x,0} = k \mid D_{n-1}^{N,x,0} = l) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[u_1^N(0,j)u_1^N(l,j+k)\right] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[\left(\beta_{1,0}^N u_{K_1^0}(0,j) + (1-\beta_{1,0}^N)\mathbf{1}\{j=0\}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\beta_{1,l}^N u_{K_1^l}(l,j+k) + \left(1-\beta_{1,l}^N\right)\mathbf{1}\{l=k+j\}\right)\right] \\ &= (1-e^{-1/N})^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu\left[u_1(0,j)u_1(l,j+k)\right] + e^{-1/N}(1-e^{-1/N})\nu\left[u_1(0,l-k)\right] + \\ &\quad + e^{-1/N}(1-e^{-1/N})\nu\left[u_1(l,k))\right] + e^{-2/N}\mathbf{1}\{l=k\}. \end{aligned}$$

Usando a invariância por translação do modelo temos

$$\begin{aligned} \gamma_D^N(l,k) &= \left(1-e^{-1/N}\right)^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu(u_1(0,j)u_1(l,j+k)) + \\ &\quad + e^{-1/N}\left(1-e^{-1/N}\right)\left(\nu[u_1(0,k-l)] + \nu[u_1(0,l-k)]\right) + \\ &\quad + e^{-2/N}\mathbf{1}\{l=k\}. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Observe que, como no Lema 2.5.3 as probabilidades de transição são homogêneas fora da origem. Para a cadeia $S_n^{N,x,0}$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_S^N(l,k) &= \mathbb{P}(S_n^{N,x} = k | S_{n-1}^{N,x} = l) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[u_1^N(l,k-j)u_1^N(0,j)\right] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[\left(\beta_{1,l}^N u_{K_1^l}(l,k-j) + (1-\beta_{1,l}^N)\mathbf{1}\{l=k-j\}\right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left(\beta_{1,0}^N u_{K_1^0}(0,j) + \left(1-\beta_{1,0}^N\right)\mathbf{1}\{j=0\}\right)\Big]$$

$$= (1-e^{-1/N})^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu\left[u_1(l,k-j)u_1(0,j)\right] + e^{-1/N}(1-e^{-1/N})\nu\left[u_1(0,k-l)\right] +$$

$$+ e^{-1/N}(1-e^{-1/N})\nu\left[u_1(l,k))\right] + e^{-2/N}\mathbf{1}\{l=k\}. \tag{5.1.16}$$

Observação: Denotando por $\gamma^N_{(D,S)}$ a probabilidade de transição da cadeia (D_n^N, S_n^N) então, para todo (l,k) e $(d,s) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, temos

$$\gamma^N_{(D,S)}[(l,k),(l+d,k+s)] = \mathbb{P}(D_n^N = l+d, S_n^N = k+s | D_{n-1}^N = l, S_{n-1}^N = k)$$

$$= \mathbb{E}\left[u_1^N\left(\frac{k+l}{2}, \frac{k+s+l+d}{2}\right) u_1^N\left(\frac{k-l}{2}, \frac{k+s-l-d}{2}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\beta^N_{1,\frac{k+l}{2}} u_{K_1^{\frac{k+l}{2}}}\left(\frac{k+l}{2}, \frac{k+l}{2}+\frac{s+d}{2}\right) + \left(1-\beta^N_{1,\frac{k+l}{2}}\right)\mathbf{1}\{s=-d\}\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\beta^N_{1,\frac{k-l}{2}} u_{K_1^{\frac{k-l}{2}}}\left(\frac{k-l}{2}, \frac{k-l}{2}+\frac{s-d}{2}\right) + \left(1-\beta^N_{1,\frac{k-l}{2}}\right)\mathbf{1}\{s=d\}\right)\right]$$

$$= \left(1-e^{-1/N}\right)^2 \nu\left[u_1\left(\frac{k+l}{2}, \frac{k+l}{2}+\frac{s+d}{2}\right) u_1\left(\frac{k-l}{2}, \frac{k-l}{2}+\frac{s-d}{2}\right)\right] +$$

$$+ e^{-1/N}\left(1-e^{-1/N}\right)\nu\left[u_1\left(\frac{k+l}{2}, \frac{k+l}{2}+\frac{s+d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s=d\} +$$

$$+ e^{-1/N}\left(1-e^{-1/N}\right)\nu\left[u_1\left(\frac{k-l}{2}, \frac{k-l}{2}+\frac{s-d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s=-d\} +$$

$$+ e^{-2/N}\mathbf{1}\{s=0, d=0\}.$$

Observe que também temos homogeneidade espacial da cadeia (D_n^N, S_n^N) em $\{0\}\times\mathbb{Z}^d$ e $(\mathbb{Z}^d \setminus \{0\})\times\mathbb{Z}^d$, separadamente, como no Lema 2.5.3. Isto é, se a cadeia está em $\{0\}\times\mathbb{Z}^d \iff l=0$, temos

$$\gamma^N_{(D,S)}[(0,k),(d,k+s)] = \left(1-e^{-1/N}\right)^2 \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] +$$

$$+ e^{-1/N}\left(1-e^{-1/N}\right)\nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s=d\} +$$

$$+ e^{-1/N}\left(1-e^{-1/N}\right)\nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s=-d\} +$$

$$+ e^{-2/N}\mathbf{1}\{s=0, d=0\}. \tag{5.1.17}$$

Se a cadeia está em $(\mathbb{Z}^d \setminus \{0\})\times\mathbb{Z}^d \iff l \neq 0$, temos

$$\gamma^N_{D,S}[(l,k),(l+d,k+s)] = \left(1-e^{-1/N}\right)^2 \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] +$$

$$+ e^{-1/N}\left(1 - e^{-1/N}\right)\left(\nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s = d\} + \right.$$
$$\left. + \nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right]\mathbf{1}\{s = -d\}\right) +$$
$$e^{-2/N}\mathbf{1}\{s = 0, d = 0\}. \tag{5.1.18}$$

Pela própria construção do passeio aleatório $Y_k^{N,x,n}$, $0 \leq k \leq n$, temos que

$$\lim_{N\to\infty} Y_{[Ns]}^{N,x,[Nt]} = Y_s^{x,t} \tag{5.1.19}$$

quase certamente, sendo $Y_s^{x,t}$, $0 \leq s \leq t$, um passeio aleatório a tempo contínuo, que utiliza as marcas de Poisson e as realizações dos u's "para trás", no intervalo de t a zero e com taxas de transição dadas pela distribuição de $\{u_\cdot(\cdot,\cdot)\}$. Portanto, como conseqüência, temos que

$$\lim_{N\to\infty} Y_{[Nt]}^{N,x} = Y_t^x \tag{5.1.20}$$

quase certamente, sendo Y_t^x o passeio aleatório "para frente" a tempo contínuo, que também utiliza as mesmas marcas de Poisson e as realizações dos u's "para frente" e com taxas de transição dadas pelos u's. Sejam $\mathcal{F}_t$ a $\sigma-$álgebra gerada pelos processos de Poisson e pelas realizações dos u's correspondentes às marcas de Poisson entre zero e t e, $Y_t^{x_0}$ e $\hat{Y}_t^{y_0}$ cópias de Y_t^x, independentes dado $\mathcal{F}_t$, para todo $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^d$. Usando (5.1.14) e (5.1.20), temos que

$$\begin{aligned} &(a) \quad \lim_{N\to\infty} D_{[Nt]}^{N,x_0,y_0} = D_t^{x_0,y_0} \\ &(b) \quad \lim_{N\to\infty} S_{[Nt]}^{N,x_0,y_0} = S_t^{x_0,y_0}. \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Observação: Vamos utilizar a notação (D_t, S_t) para representar a cadeia $(D_t^{0,0}, S_t^{0,0})$. Note que, $(Y_t^{x_0}, \hat{Y}_t^{y_0})$ é um processo de saltos (provaremos mais adiante que é Markoviano) com o seguinte comportamento:

(a) Se num dado instante t os passeios $Y_t^{x_0}$ e $\hat{Y}_t^{y_0}$ estão em sítios diferentes, o que equivale a dizer $D_t^{x_0,y_0} \neq 0$, então cada um deles espera um tempo exponencial de taxa 1, até aparecer a primeira marca de Poisson. Aquele que apresentar a primeira marca, depois do tempo t, pode saltar enquanto o outro permanece no mesmo sítio. Isto é,

o processo espera um tempo exponencial de taxa 2, dado pelo mínimo entre duas exponenciais de taxa 1 de cada um deles, e salta com probabilidade de transição dada pela distribuição dos u's.

(b) Se em t os passeios estão no mesmo sítio, o que significa $D_t^{x_0,y_0} = 0$, eles esperam um tempo exponencial de taxa 1 até aparecer a primeira marca de Poisson, que é a mesma para ambos. Nesse instante eles pulam de acordo com a distribuição dos u's.

Lema 5.1.1 *O processo $(Y_t^0, \hat{Y}_t^0)$ é um processo Markoviano de saltos com probabilidades de transição da cadeia imersa, nos instantes dos saltos, e tempos de espera τ_n dados por*

$$(i) \qquad \mathbb{P}(Y_{T_n}^0 = x + x', \hat{Y}_{T_n}^0 = x + y' \mid Y_{T_{n-1}}^0 = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^0 = x) \;=\; \nu(u_1(0,x')u_1(0,y')),$$

para todo x, x' e $y' \in \mathbb{Z}^d$.

$$(ii) \qquad \mathbb{P}(Y_{T_n}^0 = x + x', \hat{Y}_{T_n}^0 = y + y' | Y_{T_{n-1}}^0 = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^0 = y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\nu(u_1(0,x')), & y' = 0, x' \neq 0, \\ \frac{1}{2}\nu(u_1(0,y')), & x' = 0, y' \neq 0, \\ \nu(u_1(0,0)), & x' = 0, y' = 0, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

$x \neq y$, para todo x, y, x' e $y' \in \mathbb{Z}^d$.

(iii) *τ_n tem distribuição exponencial de taxa 1, no caso (i), e τ_n é exponencial de taxa 2, no caso (ii).*

Prova: (iii) já foi argumentado em (a) e (b) acima. Ver Apêndice A.5. para (i) e (ii).

Lema 5.1.2 *O processo (D_t, S_t) é um processo Markoviano de saltos, não homogêneo em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, com probabilidades de transição da cadeia imersa, dadas por*

$$(i) \qquad \mathbb{P}(D_{T_n} = d, S_{T_n} = s_{n-1} + s | D_{T_n-1} = 0, S_{T_n-1} = s_{n-1}) = \nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right],$$

para todo d, s, $s_{n-1} \in \mathbb{Z}^d$.

$$(ii) \qquad \mathbb{P}(D_{T_n} = d_{n-1} + d, S_{T_n} = s_{n-1} + s \mid D_{T_n-1} = d_{n-1}, S_{T_n-1} = s_{n-1})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\nu\left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\nu(u_1(0,s)), & s = d \neq 0 \\ \frac{1}{2}\nu\left[u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\nu(u_1(0,-d)), & s = -d \neq 0 \\ \nu\left[u_1\left(0,0\right)\right], & s = d = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

se $(d_{n-1}, s_{n-1}) \in (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}^d$.

(iii) *Os tempos de espera são exponenciais de taxa* 1, *se* $D_{T_n-1} = 0$, *e são exponenciais de taxa* 2, *se* $D_{T_n-1} \neq 0$.

Prova: Imediata, utilizando o Lema 5.1.1, o Lema 2.5.2 e as expressões (5.1.17) e (5.1.18). □

Seja η_t o processo das alturas a tempo contínuo, definido por

$$\eta_t = \lim_{N\to\infty} X^N_{[Nt]} \quad \text{e} \quad \eta_0 = X^N_0, \tag{5.1.22}$$

sendo, $X^N_{[Nt]}$ como definido em (5.1.8), no tempo $[Nt]$.

Portanto, usando (5.1.19), podemos mostrar que

$$\eta_t(x) = \mathbb{E}(\eta_0(Y^{x,t}_t)|\mathcal{F}_t).$$

Usando a configuração inicial parabólica temos

$$\eta_t = \lim_{N\to\infty} X^N_{[Nt]} \tag{5.1.23}$$

e para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, vale

$$\eta_t(x) = \mathbb{E}(\|Y^{x,t}_t\|^2 \mid \mathcal{F}_t). \tag{5.1.24}$$

Agora, vamos mostrar que $X^N_{[Nt]} \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \eta_t$, quando $N \to \infty$, para t fixo. Observe que,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(X^N_{[Nt]}(x) - \eta_t(x)\right)^2 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\|Y^{N,x,[Nt]}_{[Nt]}\|^2 \mid \mathcal{F}^N_{[Nt]}\right) - \mathbb{E}\left(\|Y^{x,t}_t\|^2 \mid \mathcal{F}_t\right)\right]^2 \\ = \;& \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\|Y^{N,x,[Nt]}_{[Nt]}\|^2 - \|Y^{x,t}_t\|^2 \mid \mathcal{F}_t\right)\right]^2 \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\left(\|Y^{N,x,[Nt]}_{[Nt]}\|^2 - \|Y^{x,t}_t\|^2\right)^2 \mid \mathcal{F}_t\right]\right) \\ = \;& \mathbb{E}\left(\|Y^{N,x,[Nt]}_{[Nt]}\|^2 - \|Y^{x,t}_t\|^2\right)^2 = \mathbb{E}\left[\left(\|Y^{N,x,[Nt]}_{[Nt]}\|^2 - \|Y^{x,t}_t\|^2\right)^2 \mathbf{1}_{\{A^N_t\}}\right], \end{aligned}$$

sendo

(1) a segunda igualdade devido ao fato de $\mathcal{F}^N_{[Nt]} \subset \mathcal{F}_t$, para todo t;

(2) a terceira desigualdade verdadeira pela desigualdade de Jensen para a esperança condicional entre colchetes;

(3) a última iguladade válida porque A_t^N é definido, dado $x \in \mathbb{Z}^d$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} A_t^N &= \Big\{ Y_s^{x,t} \text{ pula duas vezes no intervalo de tempo } \Big[\tfrac{(n-1)}{N}, \tfrac{n}{N}\Big] \text{ para algum} \\ &\quad 1 \leq n \leq [Nt], \text{ ou pula uma vez no intervalo } \Big[\,[Nt],\ [Nt] + \tfrac{1}{N}\Big]\Big\} \end{aligned}$$

Ou seja, os passeios $Y_t^{x,t}$ e $Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}$ são iguais fora do evento A_t^N. Logo, fora de A_t^N a esperança se anula e só tem sentido examiná-la dentro de A_t^N.

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(L_{[Nt]}^N(x) - \eta_t(x))^2 \leq \mathbb{E}[(Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} - Y_t^{x,t} Y_t^{x,t})^2 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}] \\ = & \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} (\|j\|^2 - \|i\|^2)^2 \mathbb{P}(Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} = j, Y_t^{x,t} = i, A_t^N) \\ \leq & \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} (\|j\|^4 + \|i\|^4)^2 \mathbb{P}(Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} = j, Y_t^{x,t} = i, A_t^N) \\ = & \mathbb{E}[(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 + \|Y_t^{x,t}\|^4)^2 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}] = \mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}) + \mathbb{E}(\|Y_t^{x,t}\|^4 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}). \end{aligned}$$

Para todo $r \geq 1$, seja α_r o r-ésimo momento do incremento do passeio incondicional $Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}$, definido por

$$\alpha_r = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|j\|^r \nu(u_1(0,j)), \tag{5.1.25}$$

e vamos supor que, $\alpha_4 < \infty$.

Como $\mathbb{P}(A_t^N) \to 0$, quando $N \to \infty$, para todo t fixo, o passeio $Y_t^{x,t}$ não depende de N e tem quarto momento então, temos

$$\mathbb{E}(\|Y_t^{x,t}\|^4 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}) \to 0, \tag{5.1.26}$$

quando $N \to \infty$, para todo t fixo.

Agora vamos mostrar que

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{\{A_t^N\}}) = 0.$$

Escrevendo o passeio $Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}$ em função dos seus incrementos, temos

$$Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} = x + \sum_{i=1}^{[Nt]} \beta_{i,Y_{i-1}^{N,x}}^N \Delta_i(Y_{i-1}^{N,x}). \tag{5.1.27}$$

Então, usando (5.1.27) para calcular $\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4$, multiplicando por $\mathbf{1}_{A_t^N}$ e passando a esperança, temos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{A_t^N}) \leq \|x\|^4 \mathbb{P}(A_t^N) + 4\|x\|^2 \sum_{i=1}^{[Nt]} \mathbb{E}(\beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}} \mathbf{1}_{A_t^N}) \mathbb{E}(x\Delta_i(Y_{i-1}^{N,x,[Nt]})) \\
+ \; & 2\|x\|^2 \sum_{i,j=1}^{[Nt]} \mathbb{E}[(\beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}}) \mathbf{1}_{A_t^N}] \mathbb{E}(\Delta_i(Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}) \Delta_j(Y_{j-1}^{N,x,[Nt]})) \\
+ \; & 4 \sum_{i,j,k=1}^{[Nt]} \mathbb{E}[(\beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}} \beta^N_{k,Y_{k-1}^{N,x,[Nt]}}) \mathbf{1}_{A_t^N}] \\
& \mathbb{E}(x\Delta_i(Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}) \Delta_j(Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}) \Delta_k(Y_{k-1}^{N,x,[Nt]})) \\
+ \; & \sum_{i,j,k,l=1}^{[Nt]} \mathbb{E}[(\beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}} \; \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}} \; \beta^N_{k,Y_{k-1}^{N,x,[Nt]}} \; \beta^N_{l,Y_{l-1}^{N,x,[Nt]}}) \mathbf{1}_{A_t^N}] \\
& \mathbb{E}[(\Delta_i(Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}) \; \Delta_j(Y_{j-1}^{N,x,[Nt]})) \; (\Delta_k(Y_{k-1}^{N,x,[Nt]}) \; \Delta_l(Y_{l-1}^{N,x,[Nt]}))] \\
+ \; & 4 \sum_{i,j=1}^{[Nt]} \mathbb{E}[(\beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}} \; \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}}) \mathbf{1}_{A_t^N}] \mathbb{E}[(x\Delta_i(Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}))(x\Delta_j(Y_{j-1}^{N,x,[Nt]}))]. \qquad (5.1.28)
\end{aligned}
$$

Observe que, na expressão (5.1.28), a esperança dentro de cada soma pode ser fatorada, porque as variáveis Δ's dependem somente dos u's, enquanto os β's e o $\mathbf{1}_{A_t^N}$ dependem apenas das marcas de Poisson. Como $\alpha_4 < \infty$ então, existem constantes positivas, c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5, independentes, em todos os casos, de $N \geq 1$, tais que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{A_t^N}) \leq \|x\|^4 \mathbb{P}(A_t^N) + 4\|x\|^4 c_1 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \sum_{i=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x}}) \\
+ \; & 2\|x\|^2 c_2 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \sum_{i,j=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x}}) + 4c_3 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \sum_{i,j,k=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x}} \beta^N_{k,Y_{k-1}^{N,x}}) \\
+ \; & c_4 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \sum_{i,j,k,l=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x}} \beta^N_{k,Y_{k-1}^{N,x}} \beta^N_{l,Y_{l-1}^{N,x}}) + 4c_5 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \sum_{i,j=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x}} \beta^N_{j,Y_{j-1}^{N,x}}) \\
= \; & \|x\|^4 \mathbb{P}(A_t^N) + 4\|x\|^4 c_1 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \hat{K}_{N,t}(x)) + (2\|x\|^2 c_2 + 4c_5) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \hat{K}^2_{N,t}(x)) \\
+ \; & 4c_3 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \hat{K}^3_{N,t}(x)) + c_4 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} \hat{K}^4_{N,t}(x)), \qquad (5.1.29)
\end{aligned}
$$

sendo $\hat{K}_{N,t}(x) = \sum_{i=1}^{[Nt]} \beta^N_{i,Y_{i-1}^{N,x,[Nt]}}$ o número de vezes que o processo $Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}$ saltou pelo menos uma vez até o tempo $[Nt]$, começando em x.

Portanto,

$$\hat{K}_{N,t}(x) \leq N_t, \qquad (5.1.30)$$

sendo $N_t = N_t\left(Y_{\cdot}^{N,x,[Nt]}, x, N, N_s(i), i \in \mathbb{Z}^d, s \leq t,\right)$ o número de marcas de Poisson em

$$\bigcup_{i=0}^{[Nt]-1} Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]} \times \frac{1}{N}\left[[Nt]-i,\ [Nt]-i-1\right).$$

Note que N_t é um processo de Poisson em $\left(0, \frac{1}{N}[Nt]\right)$ devido à independência entre os saltos de $Y_{\cdot}^{N,x,[Nt]}$ (dado que houve salto) e os processos de Poisson $(N_t(i))_{t\geq 0, i\in\mathbb{Z}^d}$. Então temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{A_t^N}) \leq\ & \|x\|^4 \mathbb{P}(A_t^N) + 4\|x\|^4 c_1 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N}.N_t) \\
& +(2\|x\|^2 c_2 + 4c_5)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N}.N_t^2) + 4c_3\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N}.N_t^3) \\
& +c_4\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N}.N_t^4). \qquad (5.1.31)
\end{aligned}$$

Note que para todo $k \geq 1$, $\mathbb{E}(N_t^k)$ existe e é uniformemente limitada em N pois N_t é dominado estocasticamente por um processo de Poisson em $(0,t)$. Além disso, $\mathbb{P}(A_t^N) \to 0$, quando $N \to \infty$ para todo t. Logo, para todo $k \geq 1$, temos que

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_t^N} N_t^k) \to 0 \quad \text{quando } N \to \infty. \qquad (5.1.32)$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(\|Y_{[Nt]}^{N,x,[Nt]}\|^4 \mathbf{1}_{A_t^N}) \to 0 \quad \text{quando } N \to \infty. \qquad (5.1.33)$$

Então, de (5.1.26) e (5.1.33), temos que

$$\mathbb{E}(X_{[Nt]}^N(x) - \eta_t(x))^2 \to 0, \qquad (5.1.34)$$

quando $N \to \infty$, o que prova o seguinte Teorema.

Teorema 5.1.1 *Se* $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j\|^4 \nu(u_1(0,j)) < \infty$ *então o processo* $X_{[Nt]}^N$ *converge para* η_t, *em* L^2, *quando* $N \to \infty$, *para todo* t *fixo.*

Como conseqüência do Teorema 5.1.1, temos que

$$Var(X_{[Nt]}^N(x)) \to Var(\eta_t(x)), \qquad (5.1.35)$$

quando $N \to \infty$, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ fixo.

Observe que, vale a expressão (2.1.10) para os passeios $Y_n^{N,x,n}$ e $Y_n^{N,x,}$. Portanto, como conseqüência, temos

$$X_n^N \stackrel{d}{=} \left\{L_n^N(x),\ x\ \in \mathbb{Z}^d\right\} = L_n^N. \qquad (5.1.36)$$

Então, a partir de agora, vamos estabelecer resultados para L_n^N, o que é suficiente. Seja

$$\bar{Y}_n^{N,x} = Y_n^{N,x} - I\!E(Y_n^{N,x}), \tag{5.1.37}$$

sendo $Y_n^{N,x}$ como definido em (5.1.11). Observando que $(1 - \exp\{-1/N\})$ tem o mesmo comportamento de $1/N$, quando $N \to \infty$, podemos escrever $I\!E(Y_n^{N,x}) = x + n\mu/N$, sendo μ como em (2.1.11). De (2.2.10), sabemos que

$$\begin{aligned} Var(L_n^N(x)) &= Var\left[\bar{L}_n^N(x)\right] + 4Var\left[(x + n\frac{\mu}{N})\bar{Z}_n^N(x)\right] \\ &+ 4Cov\left[\bar{L}_n^N(x), \left(x + n\frac{\mu}{N}\right)\bar{Z}_n^N(x)\right], \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

sendo $\bar{L}_n^N(x)$ e $\bar{Z}_n^N(x)$ como definidos em (2.2.8) e (2.2.9), respectivamente, em relação ao passeio $\bar{Y}_n^{N,x}$ e com distribuições independentes de x, pela invariância por translação do modelo. Então, como já argumentamos antes, para determinar a ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ é suficiente encontrar $Var(\bar{L}_n^N(0)) = Var(\bar{L}_n^N)$ e $Var(\bar{Z}_n^N(0)) = Var(\bar{Z}_n^N)$. Usando (2.2.37), no caso de $\mu \neq 0$, para o processo $\bar{L}_n^N$, temos

$$\begin{aligned} Var(\bar{L}_n^N) &= \sum_{j=1}^{n} I\!E\left[\nu(\bar{S}_{j-1}^N\bar{\varphi}^N)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{N,0} = 0\}\right] \\ &+ 2\nu(\bar{\rho}^N)\sum_{j=1}^{n} I\!E\left(\bar{S}_{j-1}^N \mathbf{1}\{D_{j-1}^{N,0} = 0\}\right) + \sigma_*^{N^2}\sum_{j=1}^{n} I\!P(D_{j-1}^{N,0} = 0), \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

sendo $\bar{S}_{j-1}^N = S_{j-1}^N - 2(j-1)\frac{\mu}{N}$, $\bar{\rho}^N \stackrel{d}{=} \left(\bar{\theta}_n^N(k).\bar{\theta}_n^{N*}(k)\right)$, $\sigma_*^{N^2} = Var\left(\theta_n^{N*}(k)\right)$, e esses novos parâmetros são definidos da seguinte forma:

(1) Sejam $\bar{\beta}_{n,k}^N = \left(\beta_{n,k}^N - \frac{1}{N}\right)$ e $\theta_n^N(k)$ como definido em (5.1.13). Então,

$$\bar{\theta}_n^N(k) = \left(\theta_n^N(k) - \frac{\mu}{N}\right) = \left(\beta_{n,k}^N\,\theta_{K_n}(k) - \frac{\mu}{N}\right) = \beta_{n,k}^N\,\bar{\theta}_{K_n}(k) + \mu\,\bar{\beta}_{n,k}^N. \tag{5.1.40}$$

(2) Considerando $\bar{\theta}_{K_n}(k)$ e $\theta_{K_n}^*(k)$ como definidos em (2.2.12) e (2.2.13), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \theta_n^{N*}(k) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j - k - \frac{\mu}{N}\|^2\, u_n^N(k,j) = \beta_{n,k}^N\,\theta_{K_n}^*(k) \\ &+ 2\mu\left(1 - \frac{1}{N}\right)\beta_{n,k}^N\,\bar{\theta}_{K_n}(k) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \|\mu\|^2\,\beta_{n,k}^N, \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

(3) Sendo $\bar{\varphi}$ como definido em (2.2.31), temos

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^N &\stackrel{d}{=} \left(\theta_n^N(k) - \frac{\mu}{N}\right) = \left(\beta_{n,k}^N\, \bar{\theta}_{K_n}(k) \;+\; \mu\, \bar{\beta}_{n,k}^N\right) \\ &\stackrel{d}{=} \left(\beta_{n,k}^N\, \bar{\varphi} \;+\; \mu\, \bar{\theta}_{K_n}(k)\right), \end{aligned} \tag{5.1.42}$$

pois por (2.2.31) temos que $\bar{\varphi} \stackrel{d}{=} \bar{\theta}_1(0)$.

(4) Usando (5.1.41), temos que

$$\mathbb{E}\left(\theta_n^{N*}(k)\right) = \frac{1}{N}\xi + \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \|\mu\|^2, \quad \text{e} \tag{5.1.43}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n^{N*}(k) &= \theta_n^{N*}(k) - \left(\frac{1}{N}\xi + \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \|\mu\|^2\right) \\ &= \beta_{n,k}^N\, \bar{\theta}_{K_n}^*(k) + 2\mu\, \left(1 - \frac{1}{N}\right)\, \beta_{n,k}^N \bar{\theta}_{K_n}(k) \;+ \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \|\mu\|^2\; \bar{\beta}_{n,k}^N + \xi^2\, \bar{\beta}_{n,k}^N. \end{aligned} \tag{5.1.44}$$

(5) Usando (5.1.40), (5.1.44) e a definição de $\bar{\rho}^N$, dada em (5.1.39), temos

$$\begin{aligned}\nu(\bar{\rho}^N) &= \frac{1}{N}\,\nu(\bar{\rho}) + 2\frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\nu(\bar{\rho}_\mu) \;+\; \mu^3\, \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^3 \;+ \\ &\quad + \mu\, \xi^2\, \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \end{aligned} \tag{5.1.45}$$

sendo $\bar{\rho}$ como definido em (2.2.35) e $\bar{\rho}_\mu \stackrel{d}{=} \left(\bar{\theta}_{K_n}(k)\, \mu\, \bar{\theta}_{K_n}(k)\right)$.

(6) Utilizando (5.1.41) e a definição de $\sigma_*^{N^2}$, dada em (5.1.39), temos

$$\sigma_*^{N^2} = \frac{\sigma_*^2}{N} + \frac{\xi^4}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{4\sigma_\mu^2}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{4\gamma_\mu^*}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right), \tag{5.1.46}$$

sendo σ_*^2 e σ_μ^2 como definido em (2.2.34) e (2.2.43), respectivamente, e $\gamma_\mu^* = Cov[\theta_n^*(k),\ (\mu\theta_n(k))]$.

(7) Note que, utilizando (5.1.42), temos

$$\begin{aligned}\nu\left(\bar{S}_{j-1}^N \bar{\varphi}^N\right)^2 &= \nu\left[\beta_{n,k}^N\, \left(\bar{S}_{j-1}^N \bar{\varphi}\right)^2\right] + \nu\left(\bar{\beta}_{n,k}^N\, \mu\, \bar{S}_{j-1}^N\right)^2 \\ &= \frac{1}{N}\nu\left(\bar{S}_{j-1}^N \bar{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\mu\, \bar{S}_{j-1}^N\right)^2, \end{aligned} \tag{5.1.47}$$

pois, $\nu(\bar{\varphi}) = 0$, $\nu\left(\beta_{n,k}^N\right) = \frac{1}{N}$, $\nu\left(\bar{\beta}_{n,k}^N\right) = \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ e, $\bar{S}_{j-1}^N$ é constante em relação à medida ν.

Portanto, substituindo (5.1.45), (5.1.46) e (5.1.47) em (5.1.39), obtemos

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{L}_n^N(x)) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} I\!E\left[\nu\left(\bar{S}_{j-1}^N\bar{\varphi}\right)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{N,0}=0\}\right] \\
+ \quad & \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{j=1}^{n} I\!E\left[\left(\bar{S}_{j-1}^N\mu\right)^2 \mathbf{1}\{D_{j-1}^{N,0}=0\}\right] \\
+ \quad & \frac{1}{N}\left[2\nu(\bar{\rho})+4\nu(\bar{\rho}_\mu)\left(1-\frac{1}{N}\right)+2\mu^3\left(1-\frac{1}{N}\right)+2\mu\,\xi^2\left(1-\frac{1}{N}\right)\right] \\
& \sum_{j=1}^{n} I\!E\left(\bar{S}_{j-1}^N \mathbf{1}\{D_{j-1}^{N,0}=0\}\right) \\
+ \quad & \frac{1}{N}\left[\sigma_*^2+\xi^4\left(1-\frac{1}{N}\right)+4\sigma_\mu^2\left(1-\frac{1}{N}\right)+4\gamma_\mu^*\left(1-\frac{1}{N}\right)\right] \\
& \sum_{j=1}^{n} I\!P(D_{j-1}^{N,0}=0). \qquad (5.1.48)
\end{aligned}
$$

Utilizando a Proposição 2.3 [A.6], exatamente como foi feito em (2.2.41), temos

$$
Var\left[(x+n\frac{\mu}{N})\bar{Z}_n^N(x)\right] = \left(\sigma_x^{N^2}+\frac{n^2}{N^2}\sigma_\mu^{N^2}+\frac{2n}{N}\gamma_{x\mu}^N\right)\sum_{j=1}^{n} I\!P(D_{j-1}^{N,0}=0), \qquad (5.1.49)
$$

com os parâmetros dados por:

(i) Sendo σ_x^2 como definido em (2.2.42), temos

$$
\sigma_x^{N^2} = Var\left(x\ \theta_n^N(k)\right) = \frac{\sigma_x^2}{N}+\frac{(x\mu)^2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right). \qquad (5.1.50)
$$

(ii) Considerando σ_μ^2 como definido em (2.2.43), temos

$$
\sigma_\mu^{N^2} = Var\left(\mu\ \theta_n^N(k)\right) = \frac{\sigma_\mu^2}{N}+\frac{\|\mu\|^4}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right). \qquad (5.1.51)
$$

(iii) Seja $\gamma_{x\mu}$ como definido em (2.2.44). Então,

$$
\gamma_{x\mu}^N = Cov\left(x\ \theta_n^N(k), \mu\ \theta_n^N(k)\right) = \frac{\gamma_{x\mu}}{N}+\frac{(x\mu)\ \|\mu\|^2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right). \qquad (5.1.52)
$$

Substituindo (5.1.50), (5.1.51) e (5.1.52) em (5.1.49), temos

$$
\begin{aligned}
Var\left[(x+\frac{n\,\mu}{N})\bar{Z}_n^N(x)\right] &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} I\!P(D_{j-1}^{N,0}=0) \\
& \left[\sigma_x^2+(x\ \mu)^2\left(1-\frac{1}{N}\right)+n^2\frac{\sigma_\mu^2}{N^2}+n^2\frac{\|\mu\|^4}{N^2}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right. \\
& \left.+\ 2n\ \frac{\gamma_{x\mu}}{N}+2n\frac{(x\mu)\ \|\mu\|^2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right] \qquad (5.1.53)
\end{aligned}
$$

Observe que, utilizando (5.1.48), no tempo $[Nt]$ e passando o limite quando $N \to \infty$, no caso de $\mu \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} Var\left[\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right] &= \int_0^t I\!E\left[\left(\nu\left(\bar{S}^0_s\bar{\varphi}\right)^2 + \left(\bar{S}^0_s\mu\right)^2\right)\mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds \\
+ \quad & \left(2\nu(\bar{\rho}) + 4\nu(\bar{\rho}_\mu) + 2\mu^3 + 2\mu\,\xi^2\right)\int_0^t I\!E\left(\bar{S}^0_s\mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right) ds \\
+ \quad & \left(\sigma_*^2 + \xi^4 + 4\sigma_\mu^2 + 4\gamma_\mu^*\right)\int_0^t I\!P(D^0_s = 0)ds, \qquad (5.1.54)
\end{aligned}$$

e, usando (5.1.53), também no caso de $\mu \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} Var\left[(x + \frac{[Nt]\,\mu}{N})\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right] \\
&= (h_0 + h_1\,t + h_2\,t^2)\int_0^t I\!P(D^0_s = 0)ds, \qquad (5.1.55)
\end{aligned}$$

sendo $h_0 = \sigma_x^2 + (x\,\mu)^2$, $h_1 = 2\gamma_{x\mu} + (x\mu)\,\|\mu\|^2$ e $h_2 = \sigma_\mu^2 + \|\mu\|^4$.
Para o caso de $\mu = 0$, usando (5.1.48), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} Var\left[\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right] &= \int_0^t I\!E\left[\nu\left(\bar{S}^0_s\bar{\varphi}\right)^2\mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds \\
+ \quad & 2\nu(\bar{\rho})\int_0^t I\!E\left(\bar{S}^0_s\mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right) ds + \left(\sigma_*^2 + \xi^4\right)\int_0^t I\!P(D^0_s = 0)ds, \qquad (5.1.56)
\end{aligned}$$

e, usando (5.1.53), temos

$$\lim_{N\to\infty} Var\left(x\,\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right) = \sigma_x^2\int_0^t I\!P(D^0_s = 0)ds. \qquad (5.1.57)$$

5.2 Ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ no caso de alcance finito e $\mu = 0$

Nesta seção, estudamos a ordem de magnitude das flutuações da altura do sítio x, $x \in Z\!\!\!Z^d$, para o processo contínuo, no modelo original CI.
Usando (5.1.35), (5.1.36) e (5.1.38), para o caso de $\mu = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
Var\left(\eta_t(x)\right) &= \lim_{N\to\infty} Var\left(L^N_{[Nt]}(x)\right) = \lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right) \\
+ \quad & 4\lim_{N\to\infty} Var\left(x\,\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right) + 4\lim_{N\to\infty} Cov\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x), x\,\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right), \qquad (5.2.1)
\end{aligned}$$

e, por (5.1.56) e (5.1.57), sabemos que

$$\lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right) = \int_0^t I\!E\left[\nu\left(S^0_s\varphi\right)^2 \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds$$
$$+ \quad 2\nu(\rho)\int_0^t I\!E\left(S^0_s \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right) ds + \left(\sigma_*^2 + \xi^4\right)\int_0^t I\!P(D^0_s = 0) ds, \qquad (5.2.2)$$

sendo $\rho \stackrel{d}{=} \theta_1(0)\,\bar{\theta}^*_1(0)$, $\varphi \stackrel{d}{=} \theta_1(0)$, e

$$\lim_{N\to\infty} Var\left(x\,\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right) = \sigma_x^2 \int_0^t I\!P(D^0_s = 0) ds. \qquad (5.2.3)$$

Como fizemos nos capítulos anteriores, vamos analisar, separadamente, cada parcela de $\lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right)$.

(I) Estudo da primeira parcela

(a) Vamos encontrar uma cota superior para esta primeira parcela. Note que,

$$\int_0^t I\!E\left[\nu(S^0_s\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds = I\!E\left[\int_0^t \nu(S^0_s\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}) ds\right]$$
$$\leq \quad I\!E\left[\sum_{i=0}^{N_t} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\right] = I\!E\left[\sum_{i=0}^{N_t} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t \leq ct\}\right]$$
$$+ \quad I\!E\left[\sum_{i=0}^{N_t} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t > ct\}\right], \qquad (5.2.4)$$

para algum $0 < c$, grande, $ct > 0$, sendo $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ os tempos de espera entre os saltos e N_t o número de saltos até o tempo t.

Observe que,

$$I\!E\left[\sum_{i=0}^{N_t} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t \leq ct\}\right] \leq I\!E\left[\sum_{i=0}^{ct} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\right] \qquad (5.2.5)$$

e que

$$I\!E\left[\sum_{i=0}^{N_t} \nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t > ct\}\right]$$
$$= \sum_{k>ct}\sum_{i=0}^{k} I\!E\left[\nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right]. \qquad (5.2.6)$$

Então, substiuindo (5.2.5) e (5.2.6) em (5.2.4), temos:

$$\int_0^t I\!E\left[\nu(S^0_s\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds \leq \sum_{i=0}^{ct} I\!E\left[\nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\right]$$
$$+ \quad \sum_{k>ct}\sum_{i=0}^{k} I\!E\left[\nu(S^0_i\varphi)^2 \mathbf{1}\{D^0_i = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right]. \qquad (5.2.7)$$

Observe que, usando a desigualdade de Hölder para $p = q = 2$, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\nu(S_i^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \\ \leq & \left\{\mathbb{E}\left[(\nu(S_i^0\varphi)^2)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1})^2\right] \mathbb{P}(N_t = k)\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Note que, dado $D_i^0 = 0$ então τ_{i+1} é independente de (D_i^0, S_i^0) e $\mathbb{E}(\tau_{i+1}^2) = 1$, para todo $i \geq 0$. Além disso, usando o fato de que $S_i^0 = Y_i^0 + \hat{Y}_i^0$, temos

$$\left[\nu(S_i^0\varphi)^2\right]^2 = \left[\nu(Y_i^0\varphi + \hat{Y}_i^0\varphi)^2\right]^2 \leq 16\, \|Y_i^0\|^4\, [\nu(\|\varphi\|)^2]^2,$$

de maneira análoga a (3.2.3). Portanto, retornando para (5.2.8), podemos escrever

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\nu(S_i^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \leq \left\{\mathbb{E}\left[(\nu(S_i^0\varphi)^2)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\right] \mathbb{P}(N_t = k)\right\}^{1/2} \\ \leq & \left[\mathbb{E}(\nu(S_i^0\varphi)^2)^2\, \mathbb{P}(N_t = k)\right]^{1/2} \leq 4\nu(\|\varphi\|^2)\left[\mathbb{E}(\|Y_i^0\|^4)\, \mathbb{P}(N_t = k)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Seja $\alpha_4 < \infty$, como em (5.1.25). Então, existe constante $L > 0$, tal que

$$\mathbb{E}(\|Y_i^0\|^4) \leq L\, i^2, \quad \text{para todo } i \geq 1. \tag{5.2.10}$$

Substituindo (5.2.10) em (5.2.9), temos

$$\mathbb{E}\left[\nu(S_i^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \leq \bar{c}\, i\, [\mathbb{P}(N_t = k)]^{1/2}, \tag{5.2.11}$$

sendo $\bar{c} = 4\sqrt{L}\, \nu(\|\varphi\|^2)$.

Portanto, usando (5.2.11) e considerando que $i \leq k$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}\left[\nu(S_i^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \leq \sum_{i=0}^{k} \bar{c}i\, [\mathbb{P}(N_t = k)]^{1/2} \\ \leq & \sum_{i=0}^{k} \bar{c}k\, [\mathbb{P}(N_t = k)]^{1/2} = \bar{c}k^2\, [\mathbb{P}(N_t = k)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Por outro lado, escrevendo S_i^0 como soma dos seus incrementos e usando o que foi feito em (3.1.9), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{ct} \mathbb{E}\left[\nu(S_i^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\right] & \leq 4M^2\nu(\|\varphi\|^2) \sum_{i=0}^{ct} i\mathbb{P}(D_i^0 = 0) \\ & = c_1 \sum_{i=0}^{ct} i\mathbb{P}(D_i^0 = 0), \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

pois, dado que $D_i^0 = 0$, $\mathbb{E}(\tau_{i+1}) = 1$, sendo M o alcance do processo e $c_1 = 4M^2\nu(\|\varphi\|^2)$. Usando (5.2.12) e (5.2.13) em (5.2.7), temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds &\leq c_1 \sum_{i=0}^{ct} i\mathbb{P}(D_i^0 = 0) \\ &+ \bar{c} \sum_{k>ct} k^2 \left[\mathbb{P}(N_t = k)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Seja $T_k^{(2)}$ o instante do k-ésimo salto, de um processo Markoviano de saltos, homogêneo, cujos tempos de espera são exponenciais de taxa 2. Pelo comportamento dos tempos de espera do processo (D_t^0, S_t^0), descrito no item (iii) do Lema 5.1.2, temos

$$T_k^{(2)} \leq T_k \Longrightarrow \mathbb{P}(T_k \leq t) \leq \mathbb{P}(T_k^{(2)} \leq t). \tag{5.2.15}$$

Por outro lado, temos

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(T_k \leq t, T_{k+1} > t) \leq \mathbb{P}(T_k \leq t). \tag{5.2.16}$$

Logo, usando (5.2.15) em (5.2.16), temos

$$\mathbb{P}(N_t = k) \leq \mathbb{P}(T_k^{(2)} \leq t). \tag{5.2.17}$$

Usando a desigualdade de Chebychev, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T_k^{(2)} \leq t\right) &= \mathbb{P}\left(exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} \tau_i^{(2)}\right\} > exp\{-t\}\right) \\ \leq\ & exp\{t\}\ \mathbb{E}\left(exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} \tau_i^{(2)}\right\}\right) = exp\{t\}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \leq\ & exp\{k/c\}\ exp\{k\ log(2/3)\} = exp\{k\ [1/c + log(2/3)]\} \\ =\ & exp\{k\ \alpha\}, \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

pois, se $k > ct$ então $\exp\{t\} < \exp\{k/c\}$ e, sendo $\alpha = 1/c + log(2/3)$.
Portanto, para que se tenha $\alpha < 0$, devemos ter

$$c > \frac{1}{log(2/3)}. \tag{5.2.19}$$

Assim, usando (5.2.18) e (5.2.17) em (5.2.14), obtemos, para a primeira parcela, a seguinte cota superior

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \\ \leq\ & c_1 \sum_{i=0}^{ct} i\mathbb{P}(D_i^0 = 0) + \bar{c} \sum_{k>ct} k^2\ \exp\left\{\frac{k\ \alpha}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

sendo $\bar{c}$, c_1 e $\alpha < 0$ como definidos em (5.2.11).(5.2.13) e (5.2.18), respectivamente.

(b)Agora, vamos estabelecer uma cota inferior para a primeira parcela. Observe que,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \\
= \; & \mathbb{E}\left[\int_0^t \nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\} ds\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} \nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} \nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t \geq c^*t\}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} \nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right] \\
\geq \; & \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} \nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t \geq c^*t\}\right],
\end{aligned}$$

para algum $0 < c^*$, pequeno, $c^*t > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{c^*t} \nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t \geq c^*t\}\right] \\
= \; & \sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \left(1 - \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right)\right] \\
= \; & \sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i\right] - \sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right] \\
= \; & \sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\right] \\
- \; & \sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right], \qquad (5.2.21)
\end{aligned}$$

pois, como antes, dado que $D_{i-1}^0 = 0$, então τ_i é independente de (D_{i-1}^0, S_{i-1}^0) e $\mathbb{E}\tau_i) = 1$. Usando a desigualdade de Hölder ($p = q = 2$) para a última parcela de (5.2.21), exatamente como fizemos em (5.2.8), podemos escrever

$$\mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right] \leq \bar{c}i\left[\mathbb{P}(N_t < c^*t)\right]^{1/2}. \qquad (5.2.22)$$

Observe que,

$$T_k \leq T_k^{(1)} \Longleftrightarrow N_t \geq N_t^{(1)} \Longrightarrow \mathbb{P}(N_t < c^*t)) \leq \mathbb{P}(N_t^{(1)} < c^*t)), \qquad (5.2.23)$$

sendo $T_k^{(1)}$ o instante do k-ésimo salto e $N_t^{(1)}$ o número de saltos até o tempo t, referentes a um processo Markoviano de saltos, homogêneo, cujos tempos de espera são exponenciais

de taxa 1.

Portanto, utilizando (5.2.23) e (5.2.22), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right] \leq \sum_{i=1}^{c^*t} \bar{c}i\,[\mathbb{P}(N_t < c^*t)]^{1/2} \\
\leq\ & \bar{c}(c^*t)^2 \left[\mathbb{P}(N_t^{(1)} < c^*t)\right]^{1/2}. \qquad (5.2.24)
\end{aligned}$$

Seja $\lambda < 1$. Então, utilizando a desigualdade de Chebychev, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N_t^{(1)} < c^*t \right) \leq \mathbb{P}\left(T_{c^*t}^{(1)} > t \right) = \mathbb{P}\left(\lambda T_{c^*t}^{(1)} > \lambda t \right) \\
=\ & \mathbb{P}\left(\exp\left\{\lambda T_{c^*t}^{(1)}\right\} > \exp\{\lambda t\} \right) = \exp\{-\lambda t\}\, \mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda T_{c^*t}^{(1)}\right\} \right). \qquad (5.2.25)
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\, T_{c^*t}^{(1)}\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{c^*t} \tau_i^{(1)}\right\}\right] = \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{c^*t} \\
=\ & \exp\{-(c^*t)\, \log(1-\lambda)\}. \qquad (5.2.26)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.2.26) em (5.2.25), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t^{(1)} < c^*t)\right) &\leq \exp\{-t\,[\lambda + c^* \log(1-\lambda)]\,\} \\
&= \exp\{-t\,\beta\}, \qquad (5.2.27)
\end{aligned}$$

sendo $\beta = \lambda + c^* \log(1-\lambda)$.

Portanto, para se conseguir $\beta > 0$, para qualquer $0 < \lambda < 1$, devemos ter

$$0 < c^* < -\left(\frac{\lambda}{\log(1-\lambda)}\right). \qquad (5.2.28)$$

Então, substituindo (5.2.27) em (5.2.24), temos

$$\sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\tau_i \mathbf{1}\{N_t < c^*t\}\right] \leq \bar{c}(c^*t)^2 \exp\left\{-\frac{t\,\beta}{2}\right\}. \qquad (5.2.29)$$

Usando (3.1.37) e (3.1.38), note que, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{c^*t} \mathbb{E}\left[\nu(S_{i-1}^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_{i-1}^0 = 0\}\right] \geq 4\varepsilon \sum_{i=1}^{i_0} i^{1-d/2} c_i(\varepsilon) + r \sum_{i=i_0+1}^{c^*t} i^{1-d/2}. \qquad (5.2.30)$$

Portanto, usando (5.2.29) e (5.2.30) em (5.2.21) obtemos, para a primeira parcela, a seguinte cota inferior

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \\
\geq\ & 4\varepsilon \sum_{i=1}^{i_0} i^{1-d/2} c_i(\varepsilon) + r \sum_{i=i_0+1}^{c^*t} i^{1-d/2} - \bar{c}(c^*t)^2 \exp\left\{\frac{-t\,\beta}{2}\right\}, \qquad (5.2.31)
\end{aligned}$$

sendo β e $\bar{c}$ como definidos em (5.2.27) e (5.2.11), respectivamente, e ε, $c_i(\varepsilon)$ e r como definidos em (3.1.37).

Retornando às expressões (5.2.20) e (5.2.31), observe que

$$\lim_{t\to\infty} \bar{c}(c^*t)\ \exp\left\{\frac{-t\,\beta}{2}\right\} = 0, \quad \text{pois} \quad \beta > 0, \quad \text{e} \qquad (5.2.32)$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>ct} k^2\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\} = 0. \qquad (5.2.33)$$

Pelo que vimos nas expressões de (3.1.23) a (3.1.28), em relação a $\sum_{i=0}^{ct} i\ \mathbb{P}(D_i^0 = 0)$, e nas expressões de (3.1.39) a (3.1.42), em relação a $4\varepsilon \sum_{i=1}^{i_0} i^{1-d/2} c_i(\varepsilon) + r \sum_{i=i_0+1}^{c^*t} i^{1-d/2}$, podemos concluir, usando (5.2.32) e (5.2.33), que

$$\int_0^t \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} t^{2-d/2}, & \text{se } d = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ \log t, & \text{se } d = 4 \\ \text{limitada}, & \text{se } d \geq 5. \end{cases} \qquad (5.2.34)$$

(II) Estudo da terceira parcela

Procedendo de maneira análoga ao ítem (a) de (I) e usando (5.2.7), podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0) ds = \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds = \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\} ds\right] \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{at} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\right] + \sum_{k>at} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1} \mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \qquad (5.2.35)
\end{aligned}$$

para algum $a > 0$ grande, $at > 0$.

Usando (5.2.8), (5.2.17), (5.2.18) e (5.2.19), para $a = c$, e considerando que $\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\right] \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1} \mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \leq \left[\mathbb{E}\left(\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}^2\right)\ \mathbb{P}(N_t = k)\right]^{1/2} \\
\leq\ & \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\}, \quad \text{sendo } \alpha < 0. \qquad (5.2.36)
\end{aligned}$$

Portanto, usando (5.2.36) em (5.2.35), temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0)ds &\leq \sum_{i=0}^{ct} \mathbb{P}(D_i^0 = 0) + \sum_{k>ct}\sum_{i=1}^{k} \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{ct} \mathbb{P}(D_i^0 = 0) + \sum_{k>ct} k\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\}. \qquad (5.2.37)\end{aligned}$$

Observe que,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>ct} k\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\} = 0, \qquad (5.2.38)$$

pois a série $\sum_{k\geq 0} k\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\}$ é convergente, já que $\alpha < 0$ e que $\sum_{i=0}^{ct} \mathbb{P}(D_i^0 = 0)$ é da ordem de $t^{1/2}$ se $d = 1$, $\log t$, se $d = 2$, e limitada se $d = 3$, pelo Lema 3.3 [A.6].

(III) Estudo da segunda parcela

Vamos mostrar que esta parcela se anula, pois estamos tratando do caso simétrico. Note que, sendo δ e γ os incrementos de S_n e D_n, respectivamente, como definidos em (2.3.2) e (2.3.3), temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathbb{E}\left[S_s^0 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds = \mathbb{E}\left[\int_0^t S_s^0 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}ds\right] \\ \leq\ & \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} S_i^0 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\right] = \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[S_i^0 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \\ =\ & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(D_{j-1}^0)\right) \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \\ =\ & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}\left[\delta_j(D_{j-1}^0)\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right] \\ =\ & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{i-1} \\ l_{i+1},\ldots,l_k}} \mathbb{E}\left[\delta_j(D_{j-1}^0)\mathbf{1}\{D_i^0 = 0, D_r = l_r, \forall r = 1,\ldots,k, r\neq i, N_t = k\}\tau_{i+1}\right].\end{aligned}$$

Observe que, dado todos os $D's$, a variável N_t fica independente de todo o resto e, dado que $D_i^0 = 0$, τ_{i+1} fica independente também. Portanto, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathbb{E}\left[S_s^0 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] ds \\ \leq\ & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{i-1} \\ l_{i+1},\ldots,l_k\in\mathbb{Z}^d}} \mathbb{P}(N_t = k) \sum_{z_1\in\mathbb{Z}^d} z_1 \mathbb{P}(\delta_j(l_{j-1}) = z_1, D_1^0 = l_1, \ldots,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& D^0_{i-1} = l_{i-1}, D^0_i = 0, D^0_{i+1} = l_{i+1}, \ldots, D^0_k = l_k) \\
= & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1} \\ \ldots,l_k,z_1\in\mathbb{Z}^d}} \mathbb{P}(N_t = k)\left[\prod_{n=0}^{k-i} \mathbb{P}(D^0_{k-n} = l_{k-n}|D^0_{k-n-1} = l_{k-n-1})\right] \\
& z_1 \mathbb{P}(\delta_j(l_{j-1}) = z_1, \gamma_j(l_{j-1}) = l_j - l_{j-1}|D^0_{j-1} = l_{j-1}, D^0_{j-2} = l_{j-2}, \ldots, D^0_1 = l_1) \\
& \mathbb{P}(D^0_{j-1} = l_{j-1}, D^0_{j-2} = l_{j-2}, \ldots, D^0_1 = l_1) \\
= & \sum_{k\geq 1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{i-1}, \\ l_{i+1}\ldots,l_k\in\mathbb{Z}^d}} \mathbb{P}(N_t = k)\prod_{n=0}^{k-i} \mathbb{P}(D^0_{k-n} = l_{k-n}|D^0_{k-n-1} = l_{k-n-1}) \\
& \mathbb{P}(D^0_{j-1} = l_{j-1}, D^0_{j-2} = l_{j-2}, \ldots, D^0_1 = l_1) \\
& \sum_{z_1\in\mathbb{Z}^d} z_1 \mathbb{P}(\delta_j(l_{j-1}) = z_1, \gamma_j(l_{j-1}) = l_j - l_{j-l}) = 0,
\end{aligned}
$$

pois, como conseqüência do Lema 2.5.4, temos que

$$
\mathbb{P}(\delta_j(l_{j-1}) = z_1, \gamma_j(l_{j-1}) = l_j - l_{j-l}) = \mathbb{P}(\delta_j(l_{j-1}) = -z_1, \gamma_j(l_{j-1}) = l_j - l_{j-l}).
$$

Usando o mesmo argumento no outro lado da desigualdade, concluímos que

$$
\int_0^t \mathbb{E}\left[S^0_s \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}\right] ds = 0. \tag{5.2.39}
$$

Portanto, usando (5.2.34), (5.2.37) e (5.2.38), concluímos que a ordem de magnitude, em t, de $\lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right)$ é superior à ordem de magnitude, em t, de $\lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right)$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, exatamente como argumentamos no Capítulo 3, não é necessário analisar a ordem de magnitude de $\lim_{N\to\infty} Cov\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x), x\ \bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right)$, que também é inferior. Sendo assim, retornando à expressão (5.2.1), podemos afirmar que a ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ é dada pela ordem do termo dominante, que é $\lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right)$. Portanto, concluímos a prova do seguinte Teorema.

Teorema 5.2.1 *Se o processo contínuo $\eta_t(x)$ tem alcance finito M, $M > 0$, $\mu = 0$ e $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|j\|^4 \nu(u_1(0,j)) < \infty$ então*

$$
Var(\eta_t(0)) \quad \text{é da ordem de} \begin{cases} t^{2-d/2}, & \text{se } d = 1, 2 \text{ , ou } 3 \\ \log t, & \text{se } d = 4 \\ \text{limitada}, & \text{se } d \geq 5 \end{cases}
$$

Isto é, no caso não viciado as flutuações temporais da altura do sítio x, $x \in \mathbb{Z}^d$ são da ordem de $t^{1-d/4}$ se $d = 1, 2$ ou 3; $(\log t)^{1/2}$, se $d = 4$ e limitadas se $d \geq 5$.

5.3 Ordem de magnitude de $Var(\eta_t(x))$ no caso de $\mu \neq 0$

Agora, nesta seção, nosso objetivo é determinar a ordem de magnitude das flutuações da altura do sítio x, $x \in \mathbb{Z}^d$, no caso de $\mu \neq 0$, para o processo contínuo η_t, no modelo CI.

Como antes, de (5.1.35), (5.1.36) e (5.1.38), temos

$$\begin{aligned} Var\left(\eta_t(x)\right) &= \lim_{N\to\infty} Var\left(L^N_{[N]}(x)\right) = \lim_{N\to\infty} Var\left(\bar{L}^N_{[N]}(x)\right) \\ + \; 4 \lim_{N\to\infty} Var\left[\left(x + [N]\frac{\mu}{N}\right)\bar{Z}^N_{[N]}(x)\right] &+ 4 \lim_{N\to\infty} Cov\left[\bar{L}^N_{[N]}(x), \left(x + [N]\frac{\mu}{N}\right)\bar{Z}^N_{[N]}(x)\right] \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

De (5.1.55), sabemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} Var\left[\left(x + \frac{[Nt]\,\mu}{N}\right)\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right] \\ &= (h_0 + h_1\, t + h_2\, t^2)\int_0^t \mathbb{P}(D^0_s = 0)ds, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Em (5.2.37), já determinamos uma cota superior para $\int_0^t \mathbb{P}(D^0_s = 0)ds$, dada por

$$\int_0^t \mathbb{P}(D^0_s = 0)ds \;\leq\; \sum_{i=0}^{ct} \mathbb{P}(D^0_i = 0) + \sum_{k>ct} k\, \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\}, \tag{5.3.3}$$

sendo $\alpha < 0$, como definido em (5.2.18). Portanto, precisamos encontrar uma cota inferior para esta expressão. Procedendo exatamente como em (5.2.21), temos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbb{P}(D^0_i = 0)ds = \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbf{1}\{D^0_s = 0\}ds\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{a^*t} \mathbb{P}(D^0_{i-1} = 0) - \sum_{i=1}^{a^*t} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}\{D^0_{i-1} = 0\}\tau_i)\mathbf{1}\{N_t < a^*t\}\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{a^*t} \mathbb{P}(D^0_{i-1} = 0) - (a^*t)\, \exp\{-\frac{\beta\, t}{2}\}, \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

sendo $a^* = c^*$, como definido em (5.2.28) e $\beta \geq 0$, como definido em (5.2.27).

Seja

$$a(t) = t^2 \int_0^t \mathbb{P}(D^0_s = 0)ds. \tag{5.3.5}$$

Então, usando (5.3.2), (5.3.3), (5.3.4) e o Lema 3.3 [A.6], concluímos que a ordem de magnitude, em t, de $\lim_{N\to\infty} Var\left[\left(x+\frac{[Nt]\,\mu}{N}\right)\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right]$ é dada pela ordem de $a(t)$, que é o termo dominante da expressão. Portanto, fazendo

$$\Delta(t) = \lim_{N\to\infty} Var\left[\left(x+\frac{[Nt]\,\mu}{N}\right)\bar{Z}^N_{[Nt]}(x)\right], \tag{5.3.6}$$

podemos afirmar que

$$\Delta(t) \text{ é da ordem de} \begin{cases} t^{5/2} & \text{se } d=1 \\ t^2\log t & \text{se } d=2 \\ t^2 & \text{se } d\geq 3. \end{cases} \tag{5.3.7}$$

De (5.1.54), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} Var\left[\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right] &= \int_0^t \mathbb{E}\left[\left(\nu\left(\bar{S}^0_s\,\bar{\varphi}\right)^2 + \left(\bar{S}^0_s\,\mu\right)^2\right)\mathbf{1}\{D^0_s=0\}\right]ds \\ + \quad & \left(2\nu(\bar{\rho}) + 4\nu(\bar{\rho}_\mu) + 2\mu^3 + 2\mu\,\xi^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left(\bar{S}^0_s\mathbf{1}\{D^0_s=0\}\right)ds \\ + \quad & \left(\sigma_*^2 + \xi^4 + 4\sigma_\mu^2 + 4\gamma_\mu^*\right)\int_0^t \mathbb{P}(D^0_s=0)ds. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Observe que, como $\bar{\varphi} = \varphi - \mu$, sendo φ como definido em (5.2.2), então

$$\nu\left(\bar{S}^0_s\,\varphi\right)^2 = \nu\left(\bar{S}^0_s\,\bar{\varphi} + \bar{S}^0_s\,\mu\right)^2 = \nu\left(\bar{S}^0_s\,\bar{\varphi}\right)^2 + \nu\left(\bar{S}^0_s\,\mu\right)^2, \tag{5.3.9}$$

pois $\nu(\bar{\varphi}) = 0$ e $\bar{S}^0_s$ é constante em relação à medida μ. Então, substituindo (5.3.9) em (5.3.8), temos

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} Var\left[\bar{L}^N_{[Nt]}(x)\right] &= \int_0^t \mathbb{E}\left[\nu\left(\bar{S}^0_s\,\varphi\right)^2\mathbf{1}\{D^0_s=0\}\right]ds \\ + \quad & \left(2\nu(\bar{\rho}) + 4\nu(\bar{\rho}_\mu) + 2\mu^3 + 2\mu\,\xi^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left(\bar{S}^0_s\mathbf{1}\{D^0_s=0\}\right)ds \\ + \quad & \left(\sigma_*^2 + \xi^4 + 4\sigma_\mu^2 + 4\gamma_\mu^*\right)\int_0^t \mathbb{P}(D^0_s=0)ds. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Agora, vamos analisar cada parcela de (5.3.10).

(1) Estudo da primeira parcela: Seja

$$d(t) = \int_0^t \mathbb{E}\left[\nu\left(\bar{S}^0_s\,\varphi\right)^2\mathbf{1}\{D_s=0\}\right]ds. \tag{5.3.11}$$

Vamos mostrar que, para todo $d \geq 1$, $d(t)$ tem ordem de magnitude menor que $\Delta(t)$. Usando (5.2.7), podemos escrever

$$d(t) \leq \sum_{i=0}^{ct} I\!E \left[\nu \left(\bar{S}_s^0 \, \varphi \right)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\} \tau_{i+1} \right]$$
$$+ \sum_{k>ct} \sum_{i=0}^{k} I\!E \left[\nu \left(\bar{S}_s^0 \, \varphi \right)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\} \tau_{i+1} \mathbf{1}\{N_t = k\} \right]. \tag{5.3.12}$$

Daí, utilizando (3.2.6), (5.2.12), (5.2.17) e (5.2.18) na expressão anterior, temos

$$d(t) \leq \bar{c} \sum_{i=0}^{ct} i \left(I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2} + \bar{c} \sum_{k>ct} k^2 \exp\left\{ \frac{k\,\alpha}{2} \right\}. \tag{5.3.13}$$

Agora, como fizemos em (3.2.11), consideremos

$$p_j = k(t) \frac{j}{[ct]^2}, \quad j = 1, \ldots, [ct]$$

sendo $k(t)$ tal que $\sum_{j=1}^{[ct]} k(t) \frac{j}{[ct]^2} = 1$. Ou seja, $k(t) = \frac{2\,[ct]}{[ct]+1}$ e $\lim_{t\to\infty} k(t) = 2$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{[ct]} i \left(I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2} = \frac{[ct]^2}{k(t)} \sum_{i=1}^{[ct]} k(t) \frac{i}{[ct]^2} \left(I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{[ct]^2}{k(t)} \left(\sum_{i=1}^{[ct]} \frac{k(t)}{[ct]^2} \, i \, I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2} = \frac{[ct]}{\sqrt{k(t)}} \left(\sum_{i=1}^{[ct]} i \, I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2}$$
$$\leq \frac{[ct]^{3/2}}{\sqrt{k(t)}} \left(\sum_{i=1}^{[ct]} I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2}, \tag{5.3.14}$$

usando Jensen na primeira desigualdade acima e considerando que $i \leq [ct]$. Substituindo (5.3.14) em (5.3.13), temos

$$d(t) \leq \bar{c} \frac{[ct]^{3/2}}{\sqrt{k(t)}} \left(\sum_{i=1}^{[ct]} I\!P(D_i^0 = 0) \right)^{1/2} + \bar{c} \sum_{k>ct} k^2 \exp\left\{ \frac{k\alpha}{2} \right\}. \tag{5.3.15}$$

Portanto, usando o Lema 3.3 [A.6] e a expressão (5.3.15), concluímos que, para todo $d \geq 1$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d(t)}{\Delta(t)} = 0. \tag{5.3.16}$$

Então, temos que a ordem de magnitude, em t, de $d(t)$ é inferior à ordem de $\Delta(t)$.

(2) Estudo da segunda parcela: Seja

$$b(t) = \int_0^t I\!E(\bar{S}_s^0 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}) ds. \tag{5.3.17}$$

Então, usando a desigualdade de Hölder para $p = q = 2$ e o fato de que dado $D_i^0 = 0$ então τ_{i+1} é independente de (D_i^0, S_i^0) e que $\mathbb{E}(\tau_{i+1}^2) = 1$, temos

$$\begin{aligned} b(t) &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(\bar{S}_i^0 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right) \\ &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \left|\mathbb{E}\left(\bar{S}_i^0 \mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}\mathbf{1}\{N_t = k\}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \left(\mathbb{E}\left[(\bar{S}_i^0)^2\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\tau_{i+1}^2\right]\mathbb{P}(N_t = k)\right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{k} \left(\mathbb{E}\left[(\bar{S}_i^0)^2\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\right]\mathbb{P}(N_t = k)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

De maneira análoga ao que fizemos em (3.2.3) e usando (2.2.11), temos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(\bar{S}_i^0)^2\mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] = \mathbb{E}\left[(\bar{Y}_i^0 + \bar{\hat{Y}}_i^0)^2\mathbf{1}\{D_i^0 = 0\}\right] \\ \leq\ & 4\mathbb{E}(\bar{Y}_i^0\bar{Y}_i^0) = 4\ i\ \xi^2. \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Portanto, substituindo (5.3.19) em (5.3.18), usando (5.2.17) e (5.2.18) e considerando que $i \leq k$, temos

$$b(t) \ \leq\ 2\,\xi \sum_{k\geq 1} k^{3/2}\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\} = 2\xi\ r, \tag{5.3.20}$$

para todo t, sendo $\alpha < 0$ como definido em (5.2.18) e $r = \sum_{k\geq 1} k^{3/2}\ \exp\left\{\frac{k\,\alpha}{2}\right\} < \infty$. Então, de (5.3.20), concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{\Delta(t)} = 0. \tag{5.3.21}$$

Ou seja, temos que a ordem de magnitude em t, de $b(t)$, é menor que a ordem de $\Delta(t)$, para todo $d \geq 1$.

(3) Estudo da terceira parcela: Seja

$$h(t) = \int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0)ds. \tag{5.3.22}$$

Então, usando a definição de $\Delta(t)$, é imediato que, para todo $d \geq 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\Delta(t)} = 0. \tag{5.3.23}$$

Portanto, usando a definição de $Var(\eta_t(x))$, dada em (5.3.1), o resultado de (5.3.7), (5.3.10), (5.3.16), (5.3.21) e (5.3.23), concluímos que a ordem de magnitude, em t, da variância da altura do sítio x, para o processo contínuo, no caso de $\mu \neq 0$, é dada pela ordem de $\Delta(t)$, que é o termo dominante da expressão em (5.3.1). Então, provamos o seguinte Teorema.

Teorema 5.3.1 *Seja $\eta_t, t \geq 0$. o processo das alturas a tempo contínuo. Se $\mu \neq 0$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \|j\|^4 \nu(u_1(0,j)) < \infty$ então*

$$Var(\eta_t(0)) \text{ é da ordem de } \begin{cases} t^{5/2} & \text{se } d = 1 \\ t^2 \log t & \text{se } d = 2 \\ t^2 & \text{se } d \geq 3 \end{cases}$$

Isto é, no caso viesado, as flutuações da altura do sítio x, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, são da ordem de: $t^{5/4}$, se $d = 1$; $t(\log t)^{1/2}$, se $d = 2$ e t, se $d \geq 3$. Ou seja, $\eta_t(x)$ nunca se estabiliza, flutuando sempre em todas as dimensões.

5.4 Processo contínuo visto da altura da origem, no caso de alcance 1 e $\mu = 0$

Nesta seção, analisamos o processo contínuo visto da altura da origem, denotado por $\hat{\eta}_t$, para $d \geq 3$, alcance estritamente 1 e $\mu = 0$, com o objetivo de aplicar os resultados obtidos para o processo em tempo discreto, estudado no Capítulo 4. Assim como no capítulo anterior, vamos supor que a distribuição dos u's é invariante por troca de coordenadas, isto é, que a distribuição de $u_1(0, e_k)$ não depende de k, para todo $k = 1, \cdots, d$.
Seja $L_n^N(x)$ como definido em (5.1.12). Então, usando (4.1.2), definimos o processo $L_n^N(x)$ visto da altura da origem, denotado por $\hat{L}_n^N(x)$, para cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$, por

$$\hat{L}_n^N(x) =: L_n^N(x) - L_n^N(0). \tag{5.4.1}$$

Observe que, de (5.4.1) e do Teorema 5.1.1, concluímos que

$$\hat{L}_{[Nt]}^N \longrightarrow \hat{\eta}_t \tag{5.4.2}$$

em L^2 , quando $N \to \infty$, para todo t fixo, sendo, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\hat{\eta}_t(x) = \eta_t(x) - \eta_t(0). \tag{5.4.3}$$

Portanto, como conseqüência de (5.4.2), temos

$$Var(\hat{L}^N_{[Nt]}(x)) \longrightarrow Var(\hat{\eta}_t(x)), \tag{5.4.4}$$

quando $N \to \infty$, para cada $x \in \mathbb{Z}^d$.

Utilizando (4.1.24), para o processo $\hat{L}^N_n(x)$, no tempo $n = [Nt]$, e considerando os valores dos parâmetros calculados em (5.1.42), (5.1.45), (5.1.46) e (5.1.50), no caso de $\mu = 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
Var(\hat{L}^N_{[Nt]}(x)) &= \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{[Nt]-1} \nu(\mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{N,0}=0\}] - \mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{N,x}=0\}]) \\
+ \quad & \frac{4}{N}\sum_{i=0}^{[Nt]-1} \nu(\mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)(x\varphi)\mathbf{1}\{D_i^{N,0}=0\}] - \mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)(x\varphi)\mathbf{1}\{D_i^{N,x}=0\}]) \\
+ \quad & \frac{4}{N}\nu(\rho)\sum_{i=0}^{[Nt]-1} (\mathbb{E}[S_i^{N,0}\mathbf{1}\{D_i^{N,0}=0\}] - \mathbb{E}[S_i^{N,0}\mathbf{1}\{D_i^{N,x}=0\}]) \\
+ \quad & \frac{2}{N}(\sigma_x^2 + 2x\nu(\rho) + \sigma_*^2 + (1-\frac{1}{N})\xi^2)\sum_{i=0}^{[Nt]-1} [\mathbb{P}(D_i^{N,0}=0) - \mathbb{P}(D_i^{N,x}=0)] \\
+ \quad & \frac{2}{N}\sigma_x^2\sum_{i=0}^{[Nt]-1} \mathbb{P}(D_i^{N,0}=0).
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Como estamos tratando o caso de alcance estritamente um e levando em conta a simetria dos u's então, usando (4.1.25) e (4.2.10), temos

$$\begin{aligned}
Var(\hat{L}^N_{[Nt]}(x)) &= \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{[Nt]-1} \nu\left(\mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{N,0}=0\}] - \mathbb{E}[(S_i^{N,0}\varphi)^2\mathbf{1}\{D_i^{N,x}=0\}]\right) \\
+ \quad & \frac{2}{N}(\sigma_x^2 + \left(1-\frac{1}{N})\xi^4\right)\sum_{i=0}^{[Nt]-1} [\mathbb{P}(D_i^{N,0}=0) - \mathbb{P}(D_i^{N,x}=0)] \\
+ \quad & \frac{2}{N}\sigma_x^2\sum_{i=0}^{[Nt]-1} \mathbb{P}(D_i^{N,0}=0).
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Portanto, usando (5.4.4) em (5.4.6), temos que, $Var(\hat{\eta}_t(x))$ é dada por

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\eta}_t(x)) &= 2\int_0^t (\mathbb{E}[\nu(S_s^0\varphi)^2\mathbf{1}\{D_s^0=0\}] - \mathbb{E}[\nu(S_s^0\varphi)^2\mathbf{1}\{D_s^x=0\}])ds \\
+ \quad & 2(\sigma_x^2+\xi^4)\int_0^t [\mathbb{P}(D_s^0=0) - \mathbb{P}(D_s^x=0)]ds + 2\sigma_x^2\int_0^t \mathbb{P}(D_s^0=0)ds.
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Observe que, se $d \geq 5$, temos que $\hat{\eta}_t(x)$ converge, porque $Var(\eta_t(x))$ é limitada para todo x, como vimos no teorema 5.2.1, e portanto, cada parcela de (5.4.3) converge separadamente. Então, basta analisar a convergência de $\hat{\eta}_t(x)$ nos casos de $d = 3$ e $d = 4$. Para isto, vamos fazer uma discretização do processo (D_t, S_t). Isto é, para cada sítio $i \in \mathbb{Z}^d$, o tempo contínuo é discretizado em intervalos de comprimento $1/N$, sendo N um inteiro positivo fixo. Seja $(\hat{D}_n^N, \hat{S}_n^N)_{n\geq 1}$ o processo a tempo discreto, que se comporta da seguinte maneira: a cadeia $(\hat{D}_n^N, \hat{S}_n^N)$ pula, no tempo n, se houver pelo menos uma marca de Poisson no intervalo $\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right)$. Como os tempos entre as marcas de Poisson são exponenciais e, levando em conta o comportamento do processo (D_t, S_t), descrito no Lema 5.1.2, temos que, a cadeia $(\hat{D}_n^N, \hat{S}_n^N)$ pular no tempo n é equivalente a dizer que o tempo transcorrido entre $(n-1)/N$ e a próxima marca de Poisson seja menor que $1/N$. Logo,

$$\mathbb{P}((\hat{D}_n^N, \hat{S}_n^N) \quad \text{pular no tempo } n) = \begin{cases} (1 - e^{-1/N}), & \text{se } \hat{D}_{n-1}^N = 0 \\ (1 - e^{-2/N}), & \text{se } \hat{D}_{n-1}^N \neq 0. \end{cases} \tag{5.4.8}$$

Sejam $\hat{T}_k(i)$ $k \geq 1$ e $i \in \mathbb{Z}^d$, os tempos do processo de Poisson. Isto é, $\hat{T}_k(i)$ representa o tempo da $k-$ésima marca de Poisson no sítio i. Seja $\{\hat{\beta}_{n,i}^N,\ n \geq 1 \ \ i \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias i.i.d., definidas por

$$\hat{\beta}_{n,i}^N = \mathbf{1}\{\hat{T}_k(i) \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right) \quad \text{para algum } k \geq 1\}. \tag{5.4.9}$$

Observe que, $\hat{\beta}_{n,i}^N$ tem distribuição Bernoulli com parâmetro p, sendo

$$p = \begin{cases} (1 - e^{-1/N}), & \text{se } \hat{D}_{n-1}^N = 0 \\ (1 - e^{-2/N}), & \text{se } \hat{D}_{n-1}^N \neq 0. \end{cases}$$

Usando as probabilidades de transição da cadeia imersa do processo (D_t, S_t), descritas no Lema 5.1.2, temos

(I) Se $(d, s) = 0$ então

$$\mathbb{P}(\hat{D}_n^N = d_{n-1}, \hat{S}_n^N = s_{n-1} | \hat{D}_{n-1}^N = d_{n-1}, \hat{S}_{n-1}^N = s_{n-1}) = \begin{cases} e^{-1/N}, & \text{se } d_{n-1} = 0; \\ e^{-2/N}, & \text{se } d_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

(II) Quando $(d, s) \neq 0$, temos a seguinte situação:

(a) Se $d_{n-1} \neq 0$ então,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\hat{D}_n^N = d_{n-1} + d, \hat{S}_n^N = s_{n-1} + s | \hat{D}_{n-1}^N = d_{n-1}, \hat{S}_{n-1}^N = s_{n-1}) \\
= &\begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, \frac{s+d}{2})) = \frac{1-e^{-2/N}}{2}\nu(u_1(0,s)), & \text{se } s = d, \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, \frac{s-d}{2})) = \frac{1-e^{-2/N}}{2}\nu(u_1(0,-d)), & \text{se } s = -d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Se $d_{n-1} = 0$ então,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\hat{D}_n^N = d_{n-1} + d, \hat{S}_n^N = s_{n-1} + s | \hat{D}_{n-1}^N = d_{n-1}, \hat{S}_{n-1}^N = s_{n-1}) \\
= &\left(1 - \exp\{-\frac{1}{N}\}\right) \nu \left[u_1\left(0, \frac{s+d}{2}\right) u_1\left(0, \frac{s-d}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Sejam $\hat{\gamma}_n^N(D_{n-1}^N)$ e $\hat{\delta}_n^N(D_{n-1}^N)$ os incrementos dos passeios $\hat{D}_n^N$ e $\hat{S}_n^N$, respectivamente, no tempo $n-1$, e consideremos o caso de alcance um, que estamos tratando. Então, no caso (a), quando $d_{n-1} \neq 0$, podemos ter: (a.1) $s = d = e_i$ ou $s = d = -e_i$ e (a.2) $s = e_i$ e $d = -e_i$ ou $s = -e_i$ e $d = e_i$. Logo, para todo $i = 1, \ldots, d$, temos

$$\left(\hat{\gamma}_n^N(d_{n-1}), \hat{\delta}_n^N(d_{n-1})\right) = \begin{cases} (e_i, e_i) & \text{com prob. } \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, e_i)), \\ (-e_i, e_i) & \text{com prob. } \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, e_i)), \\ (e_i, -e_i) & \text{com prob. } \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, -e_i)), \\ (-e_i, -e_i) & \text{com prob. } \frac{1}{2}(1 - e^{-2/N})\nu(u_1(0, -e_i)), \\ (0, 0) & \text{com prob. } e^{-2/N}. \end{cases} \tag{5.4.10}$$

E, no caso (b), quando $d_{n-1} = 0$, podemos ter: (b.1) $s = 2e_i$ e $d = 0$ ou $s = -2e_i$ e $d = 0$; (b.2) $s = 0$ e $d = 2e_i$ ou $s = 0$ e $d = -2e_i$; (b.3) $s = (e_i + e_j)$ e $d = (e_i - e_j)$ ou $s = -(e_i + e_j)$ e $d = -(e_i - e_j)$; (b.4) $s = (e_i - e_j)$ e $d = (e_i + e_j)$ ou $s = -(e_i - e_j)$ e $d = -(e_i + e_j)$. Então, para todo $i, j = 1, \ldots, d$, temos

$$(\hat{\gamma}_n^N(0), \hat{\delta}_n^N(0)) = \begin{cases} (e_i - e_j, e_i + e_j) & \text{com prob. } (1 - e^{-2/N})\nu[u_1(0, e_i)u_1(0, e_j)], \\ -(e_i - e_j, e_i + e_j) & \text{com prob. } (1 - e^{-2/N})\nu[u_1(0, -e_i)u_1(0, -e_j)], \\ (e_i + e_j, e_i - e_j) & \text{com prob. } (1 - e^{-2/N})\nu[u_1(0, e_i)u_1(0, -e_j)], \\ -(e_i + e_j, e_i - e_j) & \text{com prob. } (1 - e^{-2/N})\nu[u_1(0, -e_i)u_1(0, e_j)], \\ (0, 0) & \text{com prob. } e^{-1/N}. \end{cases} \tag{5.4.11}$$

Note que, podemos escrever a primeira parcela de $Var(\hat{\eta}_t(x))$, dada em (5.4.7), da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(I\!E\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] - I\!E\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^x = 0\}\right]\right) ds \\
= &\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{[Nt]-1} \left(I\!E\left[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right]\right. \\
- &\left. I\!E\left[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,x} = 0\}\right]\right). \qquad (5.4.12)
\end{aligned}$$

Observe que, escrevendo $\hat{S}_i^{N,0}$ como soma dos seus incrementos e usando (3.1.10), devido a simetria dos u's, temos

$$\begin{aligned}
&I\!E\left[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right] = \sum_{j=1}^{i} I\!E\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0,\ \hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right] \\
+ &\sum_{j=1}^{i} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d \\ l\neq 0}} I\!E\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(l)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l,\ \hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right]. \qquad (5.4.13)
\end{aligned}$$

Se $l \neq 0$ então, usando (5.4.10), note que $\hat{\delta}_j^N(l) \in \{0, \pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$. Pela definição de $\theta_1(0)$, dada em (3.1.3), temos que

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}_j^N(l) = \pm\, e_i, \iff (\hat{\delta}_j^N(l)\ \theta_1(0)) = \pm\,(u_1(0,e_i) - u_1(0,-e_i)) \\
\iff &\left(\hat{\delta}_j^N(l)\theta_1(0)\right)^2 = (u_1(0,e_i) - u_1(0,-e_i))^2, \quad \text{para todo } i = 1,\ldots,d,
\end{aligned}$$

e portanto, sendo φ como em (3.1.6), concluímos que

$$\nu\left(\hat{\delta}_j^N(l)\ \varphi\right)^2 = \nu\left(\hat{\delta}_j^N(l)\theta_1(0)\right)^2 = \sum_{k=1}^{d} \nu\left(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k)\right)^2 \mathbf{1}\{\hat{\delta}_j^N(l) = \pm\, e_k\}.$$

Então, para $l \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d \\ l\neq 0}} I\!E\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(l)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l,\ \hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right] \\
= &\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d \\ l\neq 0}} \sum_{k=1}^{d} a(k)\ I\!P(\hat{\delta}_j^N(l) = \pm\, e_k,\ \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l,\ \hat{D}_i^{N,0} = 0), \qquad (5.4.14)
\end{aligned}$$

sendo $a(k) = \nu(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k))^2,\ k = 1,\ldots,d.$

Se $l = 0$ então, utilizando (5.4.11), temos

$$\hat{\delta}_j^N(0) \in \{0, \pm\,(e_k + e_r),\ \pm\,(e_k - e_r),\ k,\ r = 1,\ldots,d\}.$$

$$(a) \qquad \hat{\delta}_j^N(0) = \pm\, 2e_k \Longleftrightarrow (\hat{\delta}_j^N(0)\ \theta_1(0)) = \pm\, 2(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k))$$
$$\Longleftrightarrow \quad \nu\left(\hat{\delta}_j^N(0)\ \varphi\right)^2 = 4\,(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k))^2 .$$

$$(b) \qquad \hat{\delta}_j^N(0) = \pm\,(e_k + e_r) \Longleftrightarrow (\hat{\delta}_j^N(0)\ \theta_1(0))$$
$$= \quad \pm[(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k)) + (u_1(0,e_r) - u_1(0,-e_r))]$$
$$\Longleftrightarrow \quad \nu\left(\hat{\delta}_j^N(0)\ \varphi\right)^2 = \nu\,[(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k)) + (u_1(0,e_r) - u_1(0,-e_r))]^2 .$$

$$(c) \qquad \hat{\delta}_j^N(0 = \pm\,(e_k - e_r) \Longleftrightarrow (\hat{\delta}_j^N(0)\ \theta_1(0))$$
$$= \quad \pm\ [(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k)) - (u_1(0,e_r) - u_1(0,-e_r))]$$
$$\Longleftrightarrow \quad \nu\left(\hat{\delta}_j^N(0)\ \varphi\right)^2 = \nu\,[(u_1(0,e_k) - u_1(0,-e_k)) - (u_1(0,e_r) - u_1(0,-e_r))]^2 .$$

Agora, usando o fato que a distribuição dos u's é invariante por troca de coordenadas, para todo $k, r = 1, \ldots, d$ e $\forall j \geq 1$, $r \neq k$, podemos escrever

$$\nu\left(\hat{\delta}_j^N(0)\ \varphi\right)^2 = c_1\ \mathbf{1}\{\hat{\delta}_j^N(0) = \pm\, 2e_k\}$$
$$+ \quad c_2\mathbf{1}\{\hat{\delta}_j^N(0) = \pm\,(e_k + e_r)\} + c_3\mathbf{1}\{\hat{\delta}_j^N(0) = \pm\,(e_k - e_r)\}.$$

Seja $c = \max\{c_1, c_2, c_3\}$. Então,

$$\nu\left(\hat{\delta}_j^N(0)\ \varphi\right)^2 \leq c\mathbf{1}\{\hat{\delta}_j^N(0) \neq 0\}.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2\mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0\hat{D}_i^{N,0} = 0\}]$$
$$\leq \quad c\ \mathbb{P}(\hat{\delta}_j^N(0) \neq 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0). \tag{5.4.15}$$

Usando, novamente, a suposição de invariância por troca de coordenadas da distribuição dos u's em (5.4.14), temos que, $a(k) = a$, para todo $k = 1, \ldots, d$, e

$$\sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{E}\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(l)\varphi)^2\mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0\}\right]$$
$$= \quad a \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \sum_{k=1}^{d} \mathbb{P}(\hat{\delta}_j^N(l) = \pm\ e_k, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0)$$
$$= \quad a \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{P}(\hat{\delta}_j^N(l) \neq 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0). \tag{5.4.16}$$

Por (5.4.10), observe que, quando $l \neq 0$, temos a segguinte equivalência

$$[\hat{\delta}_j^N(l) \neq 0] \Longleftrightarrow [\hat{\gamma}_j^N(l) \neq 0].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\hat{\delta}_j^N(l) \neq 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) = \mathbb{P}(\hat{\gamma}_j^N(l) \neq 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
= \; & \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{\gamma}_j^N(l) = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
= \; & \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_j^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0). \qquad (5.4.17)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.4.17) em (5.4.16), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{E}[\nu(\hat{\delta}_j^N(l)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0\}] \\
= \; & a \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} [\mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_j^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0)] \\
= \; & a[\sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) - \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_j^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0)] \\
= \; & a[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
- \; & \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0 \mid \hat{D}_j^{N,0} = l)\mathbb{P}(\hat{\gamma}_j^N(l) = 0)\mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l)] \\
= \; & a[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
- \; & \exp\{-\frac{2}{N}\} \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^d \\ l \neq 0}} \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0 \mid \hat{D}_j^{N,0} = l)\mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l)] \\
= \; & a[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
- \; & \exp\{-\frac{2}{N}\} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = l) + \exp\{-\frac{2}{N}\}\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0)] \\
= \; & a[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = l, \hat{D}_i^{N,0} = 0) \\
- \; & \exp\{-\frac{2}{N}\}\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0) + \exp\{-\frac{2}{N}\}\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0)]. \qquad (5.4.18)
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (5.4.18) em (5.4.13), obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,0} = 0\}] = \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0\}] \\
+ \; & a\, i\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0} = 0) - a\, \exp\{-\frac{2}{N}\}\, (i-1)\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0) - a\, \exp\{-\frac{2}{N}\}\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0) \\
- \; & a \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0) + a\, \exp\{-\frac{2}{N}\} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0). \qquad (5.4.19)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\nu(\hat{S}_i^{N,x}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,x}=0\}] = \sum_{j=1}^{i} \mathbb{E}[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,x}=0, \hat{D}_i^{N,x}=0\}] \\
+ \; & a\, i \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,x}=0) - a\, \exp\{-\frac{2}{N}\}\,(i-1)\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,x}=0) - a\, \exp\{-\frac{2}{N}\}\mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,x}=0) \\
- \; & a\sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(\hat{D}_{j-1}^{N,x}=0, \hat{D}_i^{N,x}=0) + a\, \exp\{-\frac{2}{N}\}\sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(\hat{D}_{i-1}^{N,x}=0, \hat{D}_{j-1}^{N,x}=0). \qquad (5.4.20)
\end{aligned}
$$

Portanto, usando (5.4.19) e (5.4.20) em (5.4.12), temos

$$
\begin{aligned}
& \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{[Nt]-1} \left(\mathbb{E}\left[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,0}=0\}\right] - \mathbb{E}\left[\nu(\hat{S}_i^{N,0}\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_i^{N,x}=0\}\right]\right) \\
= \; & 2a \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1-\exp\{-\frac{2}{N}\}}{2/N}\right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \frac{i}{N} \left[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,x}=0)\right] \\
+ \; & a \lim_{N\to\infty} \left(\frac{[Nt]-1}{N}\right) \left[\mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,x}=0)\right] \\
- \; & 2a \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1-\exp\{-\frac{2}{N}\}}{2/N}\right) \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \sum_{j=0}^{i-1} \left[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0}=0, \hat{D}_j^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,x}=0, \hat{D}_j^{N,x}=0)\right] \\
- \; & a \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \left[\mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,0}=0, \hat{D}_i^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,x}=0, \hat{D}_i^{N,x}=0)\right] \\
+ \; & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \sum_{j=0}^{i-1} (A_{i,j}^0 - A_{i,j}^x), \qquad (5.4.21)
\end{aligned}
$$

sendo:

$$
\begin{aligned}
A_{i,j}^0 &= \mathbb{E}\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,0}=0, \hat{D}_i^{N,0}=0\}\right] \geq 0 \quad \text{e} \\
A_{i,j}^x &= \mathbb{E}\left[\nu(\hat{\delta}_j^N(0)\varphi)^2 \mathbf{1}\{\hat{D}_{j-1}^{N,x}=0, \hat{D}_i^{N,x}=0\}\right] \geq 0.
\end{aligned}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \frac{i}{N} \left[\mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_i^{N,x}=0)\right] \\
= \; & \int_0^t s \left[\mathbb{P}(D_s^0=0) - \mathbb{P}(D_s^x=0)\right] ds; \qquad (5.4.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & \lim_{N\to\infty} \frac{[Nt]-1}{N} \left[\mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,0}=0) - \mathbb{P}(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,x}=0)\right] \\
= \; & t \left[\mathbb{P}(D_t^0=0) - \mathbb{P}(D_t^x=0)\right]. \qquad (5.4.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \sum_{j=0}^{i-1} \Big[I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0, \hat{D}_j^{N,0} = 0) - I\!P(\hat{D}_i^{N,x} = 0, \hat{D}_j^{N,x} = 0) \Big] \\
= \; & \int_0^t \int_0^s \Big[I\!P(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - I\!P(D_s^x = 0, D_r^x = 0) \Big] \, dr ds; \qquad (5.4.24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-2} \Big[I\!P(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0) - I\!P(\hat{D}_{[Nt]-1}^{N,x} = 0, \hat{D}_i^{N,x} = 0) \Big] \\
= \; & \int_0^t \Big[I\!P(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - I\!P(D_t^x = 0, D_s^x = 0) \Big] \, ds. \qquad (5.4.25)
\end{aligned}
$$

Por (5.4.15), temos que

$$
A_{i,j}^0 \leq c \, I\!P(\hat{\delta}_j^N(0) \neq 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_i^{N,0} = 0),
$$

e, observe que,

$$
\Big[\hat{\delta}_j^N(0) \neq 0\Big] \Longrightarrow \Big[\hat{\beta}_{j,0}^N = 1\Big] \Longleftrightarrow \quad \text{houve marca de Poisson no intervalo } \Big[\tfrac{j-1}{N}, \tfrac{j}{N}\Big).
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq A_{i,j}^0 \leq c \, I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0, \hat{\beta}_{j,0}^N = 1, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0, \hat{\beta}_{j,0}^N = 1, \hat{\gamma}_j(0) = w, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0, \hat{\gamma}_j^N(0) = w, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0 | \hat{\gamma}_j^N(0) = w, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) I\!P(\hat{\gamma}_j^N(0) = w | \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) I\!P(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0 | \hat{D}_j^{N,0} = w) I\!P(\hat{\gamma}_j^N(0) = w) I\!P(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \left(1 - \exp\{-\frac{1}{N}\}\right) \sum_{w\in\mathbb{Z}^d} I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0 | \hat{D}_j^{N,0} = w) I\!P(\hat{\gamma}_j(0) = w) I\!P(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
\leq \; & c \left(1 - \exp\{-\frac{1}{N}\}\right) I\!P(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0 | \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) I\!P(\hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0) \\
= \; & c \left(1 - \exp\{-\frac{1}{N}\}\right) I\!P(\hat{D}_{i-1}^{N,0} = 0, \hat{D}_{j-1}^{N,0} = 0), \qquad (5.4.26)
\end{aligned}
$$

considerando que,

$$
\begin{aligned}
& I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0 | \hat{D}_j^{N,0} = w) = I\!P(\hat{D}_{i-j+1}^{N,0} = 0 | \hat{D}_1^{N,0} = w) \\
\leq \; & I\!P(\hat{D}_{i-j+1}^{N,0} = 0 | \hat{D}_1^{N,0} = 0) = I\!P(\hat{D}_i^{N,0} = 0 | \hat{D}_j^{N,0} =),
\end{aligned}
$$

usando a expressão (5.8) [Ferrari/Fontes (1998), página 23] e pelo fato de $\hat{D}_n^{N,0}$ ser Markoviano e homogêneo no tempo. Substituindo (5.4.22), (5.4.23), (5.4.24) e (5.4.25) em (5.4.21) e depois usando (5.4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left(\mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^0 = 0\}\right] - \mathbb{E}\left[\nu(S_s^0\varphi)^2 \mathbf{1}\{D_s^x = 0\}\right]\right) ds \\
= \; & 2a \int_0^t s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)\right] ds \\
+ \; & a\, t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0)\right] \\
- \; & 2a \int_0^t \int_0^s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)\right] dr\, ds \\
- \; & a \int_0^t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0, D_s^x = 0)\right] ds \\
+ \; & \lim_{N|to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-1} \sum_{j=1}^{i} \left(A_{i,j}^0 - A_{i,j}^x\right). \qquad (5.4.27)
\end{aligned}$$

Então, substituindo (5.4.27) em (5.4.7) temos:

$$\begin{aligned}
& Var(\hat{\eta}_t(x)) = 4a \int_0^t s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)\right] ds \\
+ \; & 2(\sigma_x^2 + \xi^4) \int_0^t \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)\right] ds + 2\sigma_x^2 \int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0) ds \\
+ \; & 2a\, t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0)\right] \\
- \; & 4a \int_0^t \int_0^s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)\right] dr ds \\
- \; & 2a \int_0^t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0, D_s^x = 0)\right] ds \\
+ \; & 2 \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[Nt]-1} \sum_{j=1}^{i} \left(A_{i,j}^0 - A_{i,j}^x\right)\right]. \qquad (5.4.28)
\end{aligned}$$

(a) Como $[\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)] \geq 0$, então

$$\int_0^t \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)\right] ds \leq \int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0) ds,$$

e, usando(5.2.37), (5.2.38) e Lema 3.3 [A.6], garantimos que

$$\int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0) ds \quad \text{é limitada em } t, \qquad (5.4.29)$$

quando $d = 3$ ou $d = 4$ e, consequentemente,

$$\int_0^t [\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)] ds \quad \text{é limitada em } t, \qquad (5.4.30)$$

quando $d = 3$ ou $d = 4$. Além disso, como $[\mathbb{P}(D_t^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0)] \geq 0$, então, ainda usando (5.4.29), temos que

$$t\left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0)\right] \quad \text{é limitado em } t, \tag{5.4.31}$$

pois, $t\ [\mathbb{P}(D_t^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0)] \leq t\ \mathbb{P}(D_t^0 = 0) \leq \int_0^t \mathbb{P}(D_s^0 = 0)ds$.

(b) Como $[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)] \geq 0$ então

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)\right] drds \\
\leq\ & \int_0^t \int_0^s \mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0)drds = \int_0^t \int_0^s \mathbb{P}(D_{s-r}^0 = 0)\mathbb{P}(D_r^0 = 0)drds.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)\right] drds \\
\leq\ & \lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^s \mathbb{P}(D_{s-r}^0 = 0)\mathbb{P}(D_r^0 = 0)drds \\
=\ & \int_0^\infty \int_0^s \mathbb{P}(D_{s-r}^0 = 0)\mathbb{P}(D_r^0 = 0)drds \\
=\ & \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(D_y^0 = 0)\mathbb{P}(D_x^0 = 0)dxdy = \left(\int_0^\infty \mathbb{P}(D_y^0 = 0)dy\right)^2,
\end{aligned}$$

fazendo a seguinte transformação: $x = r$ e $y = s - r$. Logo, por (5.4.29) temos que

$$\int_0^t \int_0^s \left[\mathbb{P}(D_s^0 = 0, D_r^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0, D_r^x = 0)\right] drds \tag{5.4.32}$$

é limitada em t, para $d = 3$ ou $d = 4$.

(c) Também temos $[\mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0, D_s^x = 0)] \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0, D_s^x = 0)\right] ds \leq \int_0^t \mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0)ds \\
=\ & \int_0^t \mathbb{P}(D_{t-s}^0 = 0)\mathbb{P}(D_s^0 = 0)ds \leq \int_0^t \mathbb{P}(D_t^0 = 0)ds,
\end{aligned}$$

pois $\mathbb{P}(D_{t-s}^0 = 0) \leq 1$. Portanto, de (5.4.29), temos que

$$\int_0^t \left[\mathbb{P}(D_t^0 = 0, D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_t^x = 0, D_s^x = 0)\right] ds \quad \text{é limitada em } t. \tag{5.4.33}$$

(d) Usando (5.4.26), podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{[Nt]-1}\sum_{j=1}^{i}\left(A_{i,j}^{0}-A_{i,j}^{x}\right)\leq\sum_{i=1}^{[Nt]-1}\sum_{j=1}^{i}A_{i,j}^{0}$$
$$\leq\ c\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{N}\right\}\right)\sum_{i=1}^{[Nt]-1}\sum_{j=1}^{i}I\!P(\hat{D}_{i-1}^{N,0}=0,\hat{D}_{j-1}^{N,0}=0).$$

Logo,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{[Nt]-1}\sum_{j=1}^{i}\left(A_{i,j}^{0}-A_{i,j}^{x}\right)$$
$$\leq\ c\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-\exp\left\{-\frac{1}{N}\right\}}{1/N}\right)\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{[Nt]-2}\sum_{j=1}^{i}I\!P(\hat{D}_{i}^{N,0}=0,\hat{D}_{j}^{N,0}=0)$$
$$=\ c\int_0^t\int_0^s I\!P(D_s^0=0,D_r^0=0)drds=c\int_0^t\int_0^s I\!P(D_{s-r}^0=0)I\!P(D_r^0=0)drds,$$

que é limitada em t, como vimos no item (b). Portanto,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{[Nt]-1}\sum_{j=1}^{i}\left(A_{i,j}^{0}-A_{i,j}^{x}\right)\quad\text{é limitada em } t. \tag{5.4.34}$$

Retomando à expressão de $Var(\hat{\eta}_t(x))$, dada em (5.4.28), e observando as expressões de (5.4.29) a (5.4.34), temos que, para concluir que $Var(\hat{\eta}_t(x))$, é limitada em t, basta provar que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t s\ \left[I\!P(D_s^0=0)-I\!P(D_s^x=0)\right]ds<\infty.$$

Consideremos a série de potência, no caso contínuo, de $[I\!P(D_s^0=0)-I\!P(D_s^x=0)]$, dada por

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty\left[I\!P(D_s^0=0)-I\!P(D_s^x=0)\right]\exp\{\lambda s\}ds,\quad\lambda\leq 0. \tag{5.4.35}$$

Observe que,

$$\varphi'(\lambda)=\int_0^\infty s\ \left[I\!P(D_s^0=0)-I\!P(D_s^x=0)\right]\exp\{\lambda s\}ds. \tag{5.4.36}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t s\ \left[I\!P(D_s^0=0)-I\!P(D_s^x=0)\right]ds=\varphi'(0)=\lim_{\lambda\uparrow 0}\varphi'(\lambda). \tag{5.4.37}$$

Logo, para concluir que $Var(\hat{\eta}_t(x))$ é limitada em t, basta provar que $\varphi'(0) < \infty$.
Sejam g_i, $i = 1, 2, \ldots$ os sucessivos tempos de espera do passeio D_t na origem e T_i, $i = 1, 2, \ldots$ os sucessivos tempos de retorno para a origem, depois que saiu dela. Além disso, para todo $n \geq 1$, sejam

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} g_i, \quad \text{sendo } g_0 = 0 \text{ e } \quad \tau_n = \sum_{j=1}^{n} T_j, \quad \text{sendo } T_0 = 0.$$

Observe que,

$$[D_s^0 = 0] = \bigcup_{i \geq 0} [s \in [G_i + \tau_i, G_{i+1} + \tau_i)].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(D_s^0 = 0) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(s \in [G_i + \tau_i, G_{i+1} + \tau_i)) \\
= & \sum_{i \geq 0} \int_0^s \mathbb{P}(s \in [r, r + g_{i+1})) f_{G_i + \tau_i}(r) dr = \sum_{i \geq 0} \int_0^s \mathbb{P}(g_{i+1} > s - r) f_{G_i + \tau_i}(r) dr \\
= & \sum_{i \geq 0} \int_0^s \exp\{-(s-r)\} f_{G_i + \tau_i}(r) dr = \int_0^s \left(\sum_{i \geq 0} f_{G_i + \tau_i}(r) \right) \exp\{-(s-r)\} dr \\
= & \int_0^s g_1(r) g_2(s-r) dr,
\end{aligned}$$

sendo $g_1(r) = \sum_{i \geq 0} f_{G_i + \tau_i}(r)$ e $g_2(s-r) = \exp\{-(s-r)\}$. Seja

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(\lambda) = \int_0^\infty \mathbb{P}(D_s^0 = 0) \exp\{\lambda s\} ds = \int_0^\infty \int_0^s g_1(r) g_2(s-r) \exp\{\lambda s\} dr ds \\
= & \left(\int_0^\infty g_1(x) \exp\{x\} dx \right) \left(\int_0^\infty g_2(y) \exp\{\lambda y\} dy \right) \\
= & \left(\int_0^\infty \sum_{i \geq 0} f_{G_i + \tau_i}(x) \exp\{\lambda x\} dx \right) \left(\int_0^\infty \exp\{-y\} \exp\{\lambda y\} dy \right) \\
= & \sum_{i \geq 0} \int_0^\infty f_{G_i + \tau_i}(x) \exp\{\lambda x\} dx \int_0^\infty \exp\{(1-\lambda) y\} dy \\
= & \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i \geq 0} \mathbb{E}(\exp\{\lambda(G_i + \tau_i)\}) = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i \geq 0} [\mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{j=1}^{i} g_j\}) \mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{j=1}^{i} T_j\})] \\
= & \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i \geq 0} [\mathbb{E}(\exp\{\lambda g_1\}) \mathbb{E}(\exp\{\lambda T_1\})]^i = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{1 - \mathbb{E}(\exp\{\lambda g_1\}) \mathbb{E}(\exp\{\lambda T_1\})} \\
= & \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{1 - \frac{E(\exp\{\lambda T\})}{1-\lambda}} = \frac{1}{1 - \lambda - \Psi_t(\lambda)},
\end{aligned}$$

sendo $\Psi_t(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda T}) = \int_0^\infty e^{\lambda r} f_T(r)dr$.
De maneira análoga, encontramos

$$\mathbb{P}(D_s^0 = 0) \quad = \quad \int_0^s g_1(r)g_2(s-r)dr,$$

sendo $g_1(r) = \sum_{i\geq 0} f_{G_i+\tau_i+T_x}(r)$ e $g_2(s-r) = \exp\{-(s-r)\}$, e

$$\varphi_2(\lambda) \quad = \quad \frac{\Psi_{T_x}(\lambda)}{1-\lambda-\Psi_T(\lambda)},$$

sendo

$$\Psi_{T_x}(\lambda) = \mathbb{E}(\exp\{\lambda T_x\}) = \int_0^\infty \exp\{\lambda w\} f_{T_x}(w)dw.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \int_0^\infty [\mathbb{P}(D_s^0 = 0) - \mathbb{P}(D_s^x = 0)\exp\{\lambda s\}ds \\ &= \varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda) = \frac{1-\Psi_{T_x}(\lambda)}{1-\lambda-\Psi_T(\lambda)}. \end{aligned}$$

Usando (4.3.20), podemos escrever

$$T_x = \sum_{i=1}^{Nx} \tau_i,$$

sendo, τ_i o tempo de espera do passeio D_t no $i-$ésimo sítio visitado, no caminho que vai de x até zero, $\tau_i \sim \exp(2)$, $\forall i$ e N_x o número de sítios visitados no caminho de x até zero.

$$\begin{aligned} \Psi_{T_x}(\lambda) &= \mathbb{E}(\exp\{\lambda T_x\}) = \mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{i=1}^{Nx} \tau_i\}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\exp\{\lambda \sum_{i=1}^{Nx} \tau_i\}|Nx)\right] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\exp\{\lambda\tau_1\})]^{Nx} = \mathbb{E}(\Psi_{\tau_1}(\lambda))^{Nx} = (\Psi_{Nx} o \Psi_{\tau_1}(\lambda), \end{aligned}$$

sendo $\Psi_{Nx}(\lambda) = \mathbb{E}(\lambda^{Nx})$. Como $\Psi_{\tau_1}(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda\tau_1}) = \frac{2}{2-\lambda}$, então

$$\Psi_{T_x}(\lambda) = \mathbb{E}(\frac{2}{2-\lambda})^{Nx} = \Psi_{Nx}(\frac{2}{2-\lambda}).$$

De (4.2.36), sabemos que,

$$\Psi_T(\lambda) = \frac{1}{d}\sum_{x\in\mathcal{N}} \Psi_{T_{x_0}}(\lambda) = \Psi_{T_{x_0}}(\lambda),$$

pois as variáveis T_x, $\forall x \in \mathcal{N}$, são identicamente distribuídas e $p_x = \frac{1}{d}$, sendo $x_0 \in \mathcal{N}$, digamos $x_0 = 2e_1$. Logo,

$$\Psi_T(\lambda) = \Psi_{T_{x_0}}(\lambda) = \Psi_{N_{x_0}}(\frac{2}{2-\lambda}).$$

Então,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1 - \Psi_{N_x}(\frac{2}{2-\lambda})}{1 - \lambda - \Psi_{N_{x_0}}(\frac{2}{2-\lambda})}.$$

Portanto, temos

$$\lim_{\lambda \uparrow 0} \varphi'(\lambda) = \frac{1}{(1 - \Psi_{N_{x_0}}(1))^2} \left[\frac{1}{4}, \Psi'_{N_{x_0}}(1)(1 - \Psi_{N_x}(1)) - \frac{1}{4}\Psi'_{N_x}(1)(1 - \Psi_{N_{x_0}}(1)) + (1 - \Psi_{N_x}(1))\right],$$

sendo

$$\Psi_{N_x}(1) = \sum_{n \geq 0} I\!P(N_x = n) \quad 1 - \Psi_{N_x}(1) = I\!P(N_x = \infty) = \tilde{p}(x),$$

$$\Psi'_{N_x}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n \geq 1} n I\!P(N_x = n)\lambda^n.$$

Por (A.4.12), temos

$$l(s) = \Psi'_{N_{x_0}}(s)(1 - \Psi_{N_x}(s)) - \Psi'_{N_x}(s)(1 - \Psi_{N_{x_0}}(s)),$$

e, em (A.4.31), provamos que

$$\lim_{s \uparrow 1} l(s) = [\Psi'_{N_{x_0}}(1)(1 - \Psi_{N_x}(1)) - \Psi'_{N_x}(1)(1 - \Psi_{N_{x_0}}(1))] < \infty.$$

Então, concluímos que

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t s[I\!P(D_s^0 = 0) - I\!P(D_s^x = 0)]ds = \lim_{\lambda \uparrow 0} \varphi'(\lambda < \infty.$$

Logo, podemos afirmar que $Var(\eta_t(x))$ é limitada em t, quando $d \geq 3$. Portanto, usando o Teorema de Convergência em L^2 [Durrett (1996), página 252], concluímos a prova do seguinte Teorema.

Teorema 5.4.1 *Seja $\hat{\eta}_t$ o processo das alturas a tempo contínuo, visto da altura da origem, definido, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, por*

$$\hat{\eta}_t(x) = \eta_t(x) - \eta_t(0).$$

No caso de alcance 1, se $\mu = 0$ e a distribuição de $u_1(0, e_k)$ não depende de k então $\{\hat{\eta}_t(x),\ x \in \mathbb{Z}^d\}$ converge fracamente, quando $t \to \infty$, para uma superfície aleatória, que denotamos por $\hat{\eta} = \{\hat{\eta}(x),\ x \in \mathbb{Z}^d\}$.

Apêndice A

A.1 Prova do Lema 2.5.1

(a) Propriedade de Markov:

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1) \\
= \; & \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1) \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_n)] \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1, \mathcal{F}_n). \\
& \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_n)]. \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} = (I) \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \mathcal{F}_n) \\
& \mathbb{P}(\hat{Y}_n = k_n | \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, \hat{Y}_1 = k_1, \mathcal{F}_n) \\
& \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_{n-1})] \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} = (II) \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \mathcal{F}_n) \\
& \mathbb{P}(\hat{Y}_n = k_n | \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \mathcal{F}_n) \\
& \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_{n-1})]. \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} \\
= \; & \mathbb{E}[u_n(j_{n-1}, j_n).u_n(k_{n-1}, k_n)\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_{n-1})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} = (III) \\
= \; & \mathbb{E}[u_n(j_{n-1}, j_n).u_n(k_{n-1}, k_n)] \\
& \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1 | \mathcal{F}_{n-1})] \\
& [\mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1)]^{-1} \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \mathcal{F}_n) \\
& \mathbb{P}(\hat{Y}_n = k_n | \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \mathcal{F}_n)] \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1} \mathcal{F}_n)] \\
= \; & \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, Y_1 = j_1, \hat{Y}_1 = k_1) \\
= \; & \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1})
\end{aligned}
$$

(b) Probabilidade de transição:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | \mathcal{F}_n)] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{j_{n-1}, k_{n-1}} \mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \mathcal{F}_n) \\
&\quad \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1} | \mathcal{F}_n)] = (I) \\
&= \mathbb{E}[\sum_{j_{n-1}, k_{n-1}} \mathbb{P}(Y_n = j_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \mathcal{F}_n) \\
&\quad \mathbb{P}(\hat{Y}_n = k_n | \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}, \mathcal{F}_n) \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{j_{n-1}, k_{n-1}} u_n(j_{n-1}, j_n) u_n(k_{n-1}, k_n) \\
&\quad \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})] = (III) \\
&= \sum_{j_{n-1}, k_{n-1}} \mathbb{E}[u_n(j_{n-1}, j_n) u_n(k_{n-1}, k_n)] \\
&\quad \mathbb{P}(Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Portanto temos:

$$
\mathbb{P}(Y_n = j_n, \hat{Y}_n = k_n | Y_{n-1} = j_{n-1}, \hat{Y}_{n-1} = k_{n-1}) = \mathbb{E}[u_n(j_{n-1}, j_n) u_n(k_{n-1}, k_n)].
$$

As igualdades (I), (II) e (III) são justicadas da seguinte maneira:

(I) pela independência dos passeios Y_n e $\hat{Y}_n$, dado a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_n$;

(II) pelo fato de Y_n e $\hat{Y}_n$ serem Markovianos;

(III) pela independência entre u_n e a $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_{n-1}$.

Logo, (a) e (b) provam o lema 2.5.1. □

A.2 Prova do Lema 3.1.1

Sejam

$$f(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(D_n = 0)s^n \quad \text{e} \quad g(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(H_n = 0)s^n.$$

Logo, suas derivadas em relação a s, são dadas por

$$f'(s) = s^{-1}\sum_{n\geq 1} nI\!P(D_n = 0)s^n \quad \text{e} \quad g'(s) = s^{-1}\sum_{n\geq 1} nI\!P(H_n = 0).$$

Pelo Lema 3.2 [Ferrari/Fontes(1998), página 13], temos que

$$f(s) = \frac{1}{(1-s) + (1-\gamma)s[1 - \Psi_T(s)]} \tag{A.2.1}$$

e, analogamente,

$$g(s) = \frac{1}{(1-s) + (1-\bar{\gamma})s[1 - \Psi_{\tilde{T}}(s)]} \tag{A.2.2}$$

sendo $\gamma = \gamma_D(0,0)$, $\bar{\gamma} = \gamma_H(0,0)$, T e $\tilde{T}$ os tempos do primeiro retorno à origem, depois de sair dela, dos passeios D_n e H_n, respectivamente, e,

$$\Psi_T(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(T = n)s^n \quad \text{e} \quad \Psi_{\tilde{T}}(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(\tilde{T} = n)s^n. \tag{A.2.3}$$

Então, derivando (A.2.1) e (A.2.2) em relação a s, temos

$$f'(s) = \frac{1 + (1-\gamma)\Psi_T(s) + (1-\gamma)s\Psi'_T(s) - (1-\gamma)}{((1-s) + (1-\gamma)s[1 - \Psi_T(s)])^2} \tag{A.2.4}$$

$$g'(s) = \frac{1 + (1-\bar{\gamma})\Psi_{\tilde{T}}(s) + (1-\bar{\gamma})s\Psi'_{\tilde{T}}(s) - (1-\bar{\gamma})}{((1-s) + (1-\bar{\gamma})s[1 - \Psi_{\tilde{T}}(s)])^2}. \tag{A.2.5}$$

Portanto,

$$\frac{f'(s)}{g'(s)} = \left(\frac{1+\lambda\Psi_T(s)+\lambda s\Psi'_T(s)-\lambda}{1+\bar{\lambda}\Psi_{\tilde{T}}(s)+\bar{\lambda}s\Psi'_{\tilde{T}}(s)-\bar{\lambda}}\right)\left(\frac{(1-s)+\bar{\lambda}s[1-\Psi_{\tilde{T}}(s)]}{(1-s)+\lambda s[1-\Psi_T(s)]}\right)^2. \tag{A.2.6}$$

Observe que, sendo p_0, $p_1 \geq 0$, temos

$$\lim_{s\to 1}\Psi_T(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(T=n) = 1 - I\!P(T=\infty) = 1-p_0, \tag{A.2.7}$$

$$\lim_{s\to 1}\Psi_{\tilde{T}}(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(\tilde{T}=n) = 1 - I\!P(\tilde{T}=\infty) = 1-p_1, \tag{A.2.8}$$

$$\tag{A.2.9}$$

Podemos escrever (A.2.6) da seguinte forma:

$$\frac{f'(s)}{g'(s)} = A(s).[B(s)]^2. \tag{A.2.10}$$

sendo

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{(1-s)+\bar{\lambda}s[1-\Psi_{\tilde{T}}(s)]}{(1-s)+\lambda s[1-\Psi_T(s)]} \\ A(s) &= \frac{[1/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]+\lambda[\Psi_T(s)/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]+\lambda s[\Psi'_T(s)/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]-[\lambda/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]}{[1/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]+\bar{\lambda}[\Psi_{\tilde{T}}(s)/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]+\bar{\lambda}s-[\bar{\lambda}/\Psi'_{\tilde{T}}(s)]} \end{aligned}$$

(i) Se D_n e H_n são transitórios então p_0 e p_1 são positivos. Então, temos

$$\lim_{s\to 1} B(s) = \frac{\bar{\lambda}p_1}{\lambda p_0} \tag{A.2.11}$$

(ii) Se D_n e H_n são recorrentes então $p_0 = p_1 = 0$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 1} B(s) &= \lim_{s\to 1}\frac{(\bar{\lambda}-1)-\bar{\lambda}s\Psi'_{\tilde{T}}(s)-\bar{\lambda}\Psi_{\tilde{T}}(s)}{(\lambda-1)-\lambda s\Psi'_T(s)-\lambda\Psi_T(s)} \\ &= \lim_{s\to 1}\frac{[(\bar{\lambda}-1)/\Psi'_T(s)]-\bar{\lambda}s[\Psi'_{\tilde{T}}(s)/\Psi'_T(s)]-\bar{\lambda}\Psi_{\tilde{T}}(s)/\Psi'_T(s)]}{[(\lambda-1)/\Psi'_T(s)]-\lambda s-\lambda[\Psi_T(s)/\Psi'_T(s)]} \end{aligned}$$

Usando (A.2.3), temos

$$\frac{\Psi'_T(s)}{\Psi'_{\tilde{T}}(s)} = \frac{\sum_{n\geq 1} nI\!P(T=n)s^n}{\sum_{n\geq 1} nI\!P(\tilde{T}=n)s^n} \quad \text{e} \tag{A.2.12}$$

$$I\!P(T=n) = \sum_{x\neq 0} I\!P(T=n|D_1=x)I\!P(D_1=x),$$

sendo $[D_1 = x] \iff$ [o salto da origem foi até x]. Denotando por $p(x)$, $x \neq 0$, a distribuição do salto da origem do passeio D_n, temos

$$\mathbb{P}(T = n) \;=\; \sum_{x \neq 0} \mathbb{P}(T_x = n)\, p(x), \tag{A.2.13}$$

sendo T_x o tempo de chegada na origem do passeio D_n, começando em x. Seja $\tilde{T}_x$ o análogo, em relação a H_n. Observe que, os tempos T_x e $\tilde{T}_x$ não envolvem os saltos da origem e que D_n e H_n só diferem neste ponto. Portanto,

$$T_x \;\stackrel{d}{=}\; \tilde{T}_x. \tag{A.2.14}$$

De maneira análoga a (A.2.13) e usando (A.2.14), temos

$$\mathbb{P}(\tilde{T} = n) \;=\; \sum_{x \neq 0} \mathbb{P}(\tilde{T}_x = n)\, \tilde{p}(x) = \sum_{x \neq 0} \mathbb{P}(T_x = n)\, \tilde{p}(x), \tag{A.2.15}$$

sendo $\tilde{p}(x)$, $x \neq 0$, a distribuição do salto da origem do passeio H_n. Substituindo (A.2.13) e (A.2.15) em (A.2.12), temos

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'_T(s)}{\Psi'_{\tilde{T}}(s)} &= \frac{\sum_{x \neq 0}(\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(T_x = n)s^n)p(x)}{\sum_{x \neq 0}(\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}(T_x = n)s^n)\tilde{p}(x)} \\ &= \frac{\sum_{x \neq 0} \Psi'_{T_x}(s)p(x)}{\sum_{x \neq 0} \Psi'_{T_x}(s)\tilde{p}(x)}, \end{aligned} \tag{A.2.16}$$

sendo $\Psi_{T_x}(s) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_x = n)s^n$. Por (3.1.10), sabemos que

$$\tilde{p}(x) = \gamma_H(0, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \nu(u_1(0, j))\nu(u_1(0, j + x)).$$

Logo, se para um $x \in \mathbb{Z}^d$, x fixo, $\tilde{p}(x) = 0$ então $\nu(u_1(0, j))\nu(u_1(0, j + x)) = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}^d$. Portanto, $\nu(u_1(0, j)) = 0$ ou $\nu(u_1(0, j + x)) = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}^d$. Então, $u_1(0, j) = 0$ q.c ou $u_1(0, j + x) = 0$ q.c, para todo j, o que equivale a dizer $[u_1(0, j))u(u_1(0, j + x)] = 0$, q.c $\forall j \in \mathbb{Z}^d$. Portanto,

$$\nu[u_1(0, j))u(u_1(0, j + x)] = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d,$$

e então, usando (3.1.12), temos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \nu[u_1(0, j)u_1(0, j + x)] = p(x) = 0.$$

Ou seja, se $\tilde{p}(x) = 0$ então $p(x) = 0$. Logo, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, $x \neq 0$, existe C_x, $0 < C_x < \infty$, tal que

$$p(x) \leq C_x\, \tilde{p}(x) \leq c\, \tilde{p}(x), \quad \tilde{p}(x) \neq 0, \tag{A.2.17}$$

sendo $c = \max\{C_x,\ x \in \mathbb{Z}^d, x \neq 0,\ \tilde{p}(x) \neq 0\}$, $c < \infty$.

Obs.: O conjunto $\{C_x,\ x \in \mathbb{Z}^d, x \neq 0,\ \tilde{p}(x) \neq 0\}$ é finito pelo fato de que o alcance é finito.

Substituindo (A.2.17) em (A.2.16), temos que existe constante c, $0 < c < \infty$, tal que

$$\lim_{s \to 1} \frac{\Psi'_T(s)}{\Psi'_{\tilde{T}}(s)} \leq c. \tag{A.2.18}$$

De maneira análoga mostramos que existe constante d, $0 < d < \infty$, tal que

$$\lim_{s \to 1} \frac{\Psi'_{\tilde{T}}(s)}{\Psi'_T(s)} \leq d. \tag{A.2.19}$$

(a) Supondo que $\lim_{s\uparrow 1} \Psi'_T(s) = \lim_{s \to 1} \Psi'_{\tilde{T}}(s) = \infty$, temos

(a.1) Se $p_0, p_1 > 0$ então usando (A.2.18), (A.2.11) e (A.2.10), temos

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1} A(s) &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \lim_{s\uparrow 1} \frac{\Psi'_{\tilde{T}}(s)}{\Psi'_T(s)} \leq \frac{\lambda\, c}{\bar{\lambda}} \quad \text{e} \\ \lim_{s \to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} &\leq \frac{\bar{\lambda}\, c}{\lambda} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2. \end{aligned}$$

(a.2) Se $p_0 = p_1 = 0$ então usando (A.2.18), (A.2.19), (A.2.10) e o ítem (ii), temos

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1} B(s) &= \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \lim_{s\uparrow 1} \frac{\Psi'_{\tilde{T}}(s)}{\Psi'_T(s)} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\, d \quad \text{e} \\ \lim_{s\uparrow 1} A(s) &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \lim_{s\uparrow 1} \frac{\Psi'_T(s)}{\Psi'_{\tilde{T}}(s)} \leq \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\, c. \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{s \to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\, c\, d^2.$$

(b) Supondo que $\lim_{s\uparrow 1} \Psi'_T(s) = a < \infty$ e $\lim_{s\uparrow 1} \Psi'_{\tilde{T}}(s) = b < \infty$, temos

(b.1) Se $p_0, p_1 > 0$ então usando (A.2.11), (A.2.10) e a expressão de $A(s)$ dada em (A.2.6), temos

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1} A(s) &= \frac{1 + \lambda(a - p_0)}{1 + \bar{\lambda}(b - p_1)} \quad \text{e} \\ \lim_{s \to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} &= \frac{1 + \lambda(a - p_0)}{1 + \bar{\lambda}(b - p_1)} \left(\frac{\bar{\lambda} p_1}{\lambda p_0}\right)^2. \end{aligned}$$

(b.2) Se $p_0 = p_1 = 0$ então usando o ítem (ii) e a expressão de $A(s)$ dada em (A.2.6), temos

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1} B(s) &= \frac{\bar{\lambda}\, b+1}{\lambda\, a+1} \quad \text{e} \\ \lim_{s\uparrow 1} A(s) &= \frac{\lambda\, a+1}{\bar{\lambda}\, b+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{s\to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} = \frac{\bar{\lambda}\, b+1}{\lambda}\, a+1.$$

Assim, concluímos a prova do Lema 3.1.1 pois, tanto no caso transitório como no recorrente, temos

$$\lim_{s\to 1} \frac{f'(s)}{g'(s)} \leq \text{constante.} \quad \square$$

A.3 Prova do Lema 4.3.1

Seja $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|$ é um múltiplo par de 2. Ou seja, $\|x\|$ é da forma $2(2k) = 4k$, para algum $k \geq 0$.

(a) Cálculo de $\mathbb{P}(H_n^* = 0)$

Para todo $n \geq 1$, $\mathbb{P}(H_{2n-1}^{*0} = 0) = 0$. Ou seja, o número total de passos para chegar ao zero, partindo dele, deve ser um número par, isto é, da forma $2n$, $\forall n \geq 1$. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_d$ variáveis aleatórias que reperesentam o número de passos do passeio H_n^* nas direções $1, 2, \ldots, d$, respectivamente. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{d} M_i = 2n. \tag{A.3.1}$$

Para todo $i = 1, 2, \ldots, d$,

$$\begin{aligned} M_i &\sim B(2n, \frac{1}{d}) \quad \text{e} \\ \mathbb{P}(M_1 = m_1, \ldots, M_d = m_d) &= \binom{2n}{m_1, \ldots, m_d} (\frac{1}{d})^{2n}. \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

Observe que, o passeio aleatório vai partir do zero e queremos que no tempo $2n$ haja um retorno ao zero. Então, em cada direção $i, \forall i = 1, 2, \ldots, d$, o número de passos para a

direita e para a esquerda são iguais. Ou seja, $\frac{m_i}{2}$ = número de passos à direita = número de passos à esquerda. Logo,

$$\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0 | M_1 = m_1, \ldots, M_d = m_d) = \binom{m_1}{m_1/2} (\frac{1}{2})^{m_1} \ldots \binom{m_d}{m_d/2} (\frac{1}{2})^{m_d} \quad \text{(A.3.3)}$$

Portanto, usando (A.3.2) e (A.3.3), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_d \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_d=2n}} \mathbb{P}(H_{2n}^* = 0 | M_1 = m_1, \ldots, M_d = m_d) \\
&\quad \mathbb{P}(M_1 = m_1, \ldots, M_d = m_d) \\
&= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_d \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_d=2n}} \binom{2n}{m_1, \ldots, m_d} \binom{m_1}{m_1/2} \ldots \binom{m_d}{m_d/2} (\frac{1}{2})^{2n} (\frac{1}{d})^{2n} \\
&= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_d \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_d=2n}} \frac{(2n)!}{(\frac{m_1}{2})!(\frac{m_1}{2})! \ldots (\frac{m_d}{2})!(\frac{m_d}{2})!} (\frac{1}{2d})^{2n}. \qquad \text{(A.3.4)}
\end{aligned}$$

(b) Cálculo de $\mathbb{P}(H_n^{*x} = 0)$

Como $\|x\|$ é um múltiplo par de 2 então, o número total de passos para chegar ao sítio zero, partindo de x, é um número par, Portanto,

$$\mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0) > 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(H_{2n-1}^{*x} = 0) = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Seja L_j a variável aleatória que conta o número de passos na direção j, para todo $j = 1, 2, \ldots, d$. Então, dado que $L_j = l_j$, sejam n_j e $(l_j - n_j)$ as variáveis que representam os números de passos para a direita e para a esquerda, respectivamente, na direção j, $\forall j = 1, 2, \ldots, d$. Então,

$$n_j - (l_j - n_j) = x_j \quad n_j = \frac{l_j + x_j}{2} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, d$$

Ou seja, o passeio aleatório dará $\frac{l_j+x_j}{2}$ passos para a direita e $\frac{l_j-x_j}{2}$ passos para a esquerda, na direçã de j. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_1 = l_1, \ldots, L_d = l_d) &= \binom{2n}{l_1, \ldots, l_d} (\frac{1}{d})^{2n}; \\
\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0 | L_1 = l_1, \ldots, L_d = l_d) &= \binom{l_1}{\frac{l_1-x_1}{2}} (\frac{1}{2})^{l_1} \ldots \binom{l_d}{\frac{l_d-x_d}{2}} (\frac{1}{2})^{l_d}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) = \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=2n}} \frac{(2n)!}{(\frac{l_1+x_1}{2})!(\frac{l_1+x_1}{2})!\ldots(\frac{l_d+x_d}{2})!(\frac{l_d+x_d}{2})!}(\frac{1}{2d})^{2n}. \tag{A.3.5}$$

Consideremos, em particular, x pertencente a um dos eixos coordenados, digamos $x = (x_1, 0, \ldots, 0)$, sendo $\|x\| = x_1$ um múltiplo par de 2. Então, usando (A.3.4) e (A.3.5), temos

$$\begin{aligned}
&[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)] \\
= &\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_d \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_d=2n}} \left[\frac{(2n)!}{(\frac{m_1}{2})!(\frac{m_1}{2})!\ldots(\frac{m_d}{2})!(\frac{m_d}{2})!}(\frac{1}{2d})^{2n} - \frac{(2n)!}{(\frac{m_1+x_1}{2})!(\frac{m_1+x_1}{2})!\ldots(\frac{m_d+x_d}{2})!(\frac{m_d+x_d}{2})!}(\frac{1}{2d})^{2n}\right] \\
= &\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n}} \left[\frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n} - \frac{(2n)!}{(l_1+z_1)!(l_1-z_1)!\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\right] \\
= &\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1!l_1!}{(l_1+z_1)!(l_1-z_1)!}\right] \\
= &\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)(l_1-2)\ldots(l_1-z_1+1)}{(l_1+z_1)(l_1+z_1-1)\ldots(l_1+1)}\right] \\
= &\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d \geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n} \\
&\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)(l_1-2)\ldots(l_1-z_1+2)(l_1-z_1+1)}{(l_1+1)(l_1+2)\ldots(l_1+z_1-2)(l_1+z_1-1)(l_1+z_1)}\right],
\end{aligned} \tag{A.3.6}$$

sendo $l_i = \frac{m_i}{2}$, $\forall i = 1, 2, \ldots d$ e $z_1 = \frac{x_1}{2} = \frac{\|x\|}{2}$.

Usando (4.3.28) do Capítulo 4, temos

$$\begin{aligned}
&sa'_{H^*}(s) = \sum_{n\geq 1} n[\mathbb{P}(H_n^* = 0) - \mathbb{P}(H_n^{*x} = 0)]s^n = \sum_{n\geq 1} 2n[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)]s^{2n} \\
= &\sum_{n=1}^{x_1^2} 2n[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)]s^{2n} + \sum_{n\geq x_1^2} 2n[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)]s^{2n} \\
\leq &\sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0)s^{2n} + \sum_{n=1}^{x_1^2} 2n[\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) - \mathbb{P}(H_{2n}^{*x} = 0)]s^{2n},
\end{aligned}$$

pois $\mathbb{P}(H^*_{2n-1}=0)=\mathbb{P}(H^{*x}_{2n-1}=0)=0$ para todo $x\in 2\mathbb{Z}^d$ tal que $\|x\|$ é múltiplo par de 2. Portanto, vale

$$sa'_{H^*}(s) \leq \sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)s^{2n} + \sum_{n=1}^{x_1^2} 2n[\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)-\mathbb{P}(H^{*x}_{2n}=0)]s^{2n}. \quad \text{(A.3.7)}$$

Substituindo (A.3.6) na desigualdade (A.3.7) temos:

$$\begin{aligned} sa'_{H^*}(s) \leq & \sum_{n=1}^{4z_1^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)s^{2n} + \sum_{n>4z_1^2} s^{2n}2n \\ & \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \\ & \left[1-\frac{l_1(l_1-1)(l_2-2)\dots(l_1-z_1+2)(l_1-z_1+1)}{(l_1+1)(l_1+2)\dots(l_1+z_1-2)(l_1+z_1-1)(l_1+z_1)}\right]. \\ & + \sum_{n>4z_1^2} s^{2n}2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n} \\ & \left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right], \end{aligned} \quad \text{(A.3.8)}$$

sendo $2z_1=x_1 \Leftrightarrow 4z_1^2=x_1^2=\|x\|^2$.

Por Spitzer (1964), página 75, temos que

$$\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)=O[(2n)^{\frac{-d}{2}}].$$

Logo, existe uma constante $c>0$ tal que

$$\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)\leq c(2n)^{\frac{-d}{2}} \quad \forall n\geq 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)s^{2n} &= \sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0) \leq \sum_{n=1}^{x_1^2} c(2n)(2n)^{\frac{-d}{2}} \\ &= c\sum_{n=1}^{x_1^2}(2n)^{1-\frac{d}{2}} = c2^{1-\frac{d}{2}}\sum_{n=1}^{x_1^2} n^{1-\frac{d}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

(i) Se $d=3$,

$$\sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0)s^{2n} \leq c2^{\frac{-1}{2}}\sum_{n=1}^{x_1^2}\frac{1}{\sqrt{n}} < c\,2^{\frac{-1}{2}}\int_0^{x_1^2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \sqrt{2}\,c\,x_1 = \tilde{c}_1x_1 = \tilde{c}_1\|x\|.$$

(ii) Se $d = 4$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{x_1^2} 2n\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0)s^{2n} &\leq \frac{c}{2}\sum_{n=1}^{x_1^2}\frac{1}{n} < \frac{c}{2}(1 + \int_1^{x_1^2}\frac{1}{y}dy) = \frac{c}{2}(1 + 2logx_1) \\ &= \tilde{c}_2(\frac{1}{2} + logx_1) = \tilde{c}_2(\frac{1}{2} + log\|x\|).\end{aligned}$$

Portanto, vale o seguinte: Se $x \in 2\mathbb{Z}^d$ está localizado num dos eixos coordenados e $\|x\|$ é múltiplo par de 2 então, existem constantes c_1 e $c_1' < \infty$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\|x\|^2} 2n\mathbb{P}(H_{2n}^* = 0) \leq \begin{cases} c_1\ \|x\| = x_1, & \text{se } d = 3; \\ c_1'\ log\|x\| = log|x_1|, & \text{se } d = 4. \end{cases} \tag{A.3.9}$$

Consideremos agora a segunda parcela da desigualdade (A.3.8), dada por:

$$\sum_{n>4z_1^2} s^{2n}2n \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d\geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n \\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}$$
$$\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\ldots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\ldots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right].$$

Observe que,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d\geq 0 \\ l_1+\ldots+l_d=n \\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\ldots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\ldots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right] \\ \leq &\sum_{l_1\leq\frac{n}{2d}} \mathbb{P}(H_{2n}^{*0} = 0, L_1 = l_1) \leq \mathbb{P}(L_1 \leq \frac{n}{2d}),\end{aligned}$$

sendo $L_1 = \frac{M_1}{2}$ e, de (A.3.2) sabemos que $M_1 \sim B(2n, \frac{1}{d})$. Daí, $M_1 = \sum_{i=1}^{2n} X_i$, $X_i \sim B(1, \frac{1}{d})$, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{d}$ para todo $i = 1, \ldots, 2n$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 \leq \frac{n}{2d}) &= \mathbb{P}(\frac{M_1}{2} \leq \frac{n}{2d}) = \mathbb{P}(M_1 \leq 2n\frac{n}{2d}) = \mathbb{P}(M_1 - \mathbb{E}(M_1) \leq -\frac{n}{d}) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n} \leq -\frac{n}{d}) = \mathbb{P}(-S_{2n} \leq \frac{n}{d}),\end{aligned}$$

sendo $(-S_{2n}) = -\sum_{i=1}^{2n}(X_i - \mathbb{E}(X_1)) = \sum_{i=1}^{2n}(-Z_i)$, $Z_1, Z_2, \ldots$ iid e $\mu = \mathbb{E}(Z_i) = 0$. Pela Teoria dos Grandes Desvios [Durret, Richard(1991), páginas 57-63], temos que se $\varphi(\theta) = \mathbb{E}[e^{-\theta Z_i}] < \infty$ para algum $\theta > 0$ e $a > \mu$ então $\mathbb{P}(-S_{2n} \geq 2na) \to 0$ exponencialmente rápido. Isto é,

$$\mathbb{P}(-S_{2n} \geq 2na) \leq e^{-2n\gamma(a)},$$

sendo $\gamma(a) = a\theta - k(\theta)$, $k(\theta) = log\varphi(\theta)$ e, para cada $a > \mu$ existe $\theta_a \geq 0$ tal que $a = \frac{\varphi'(\theta_a)}{\varphi(\theta_a)}$.
No nosso caso, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2d}, \\ \varphi(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta Z_i}] = \frac{d-1}{d}e^{\theta/d} + \frac{1}{d}e^{\frac{-\theta(d-1)}{d}} = e^{\theta/d}(d-1+e^{-\theta}), \\ \varphi'(\theta) &= \frac{d-1}{d^2}e^{\theta/d}(1-e^{-\theta}), \end{aligned}$$

e

$$\gamma(a) = a\theta - k(\theta) = a\theta - log\varphi(\theta) = log\frac{d}{d-1+e^{-\theta}} - \frac{\theta}{2d}. \tag{A.3.10}$$

Resolvendo a equação $a = \frac{\varphi'(\theta_a)}{\varphi(\theta_a)}$, temos

$$e^{-\theta} = \frac{d-1}{2d-1} \quad \text{e} \quad \theta = log\frac{2d-1}{d-1}. \tag{A.3.11}$$

Substituindo (A.3.11) em (A.3.10), encontramos

$$\gamma(a) = \gamma(\frac{1}{2d}) = log\frac{1}{2}(\frac{2d-1}{d-1})^{1-\frac{1}{2d}} > 0.$$

Então, temos

$$\mathbb{P}(-S_{2n} \geq 2n\frac{1}{2d}) \leq e^{-2n\sigma(d)},$$

sendo $\sigma(d) = log\frac{1}{2}(\frac{2d-1}{d-1})^{1-\frac{1}{2d}} > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} &\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n>4z_1^2} s^{2n-1}2n \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d\geq 0\\ l_1+\ldots+l_d=2\\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\ldots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\ldots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right] \\ = &\sum_{n>4z_1^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_d\geq 0\\ l_1+\ldots+l_d=2\\ l_1\leq\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\ldots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\ldots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\ldots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right] \\ \leq &\sum_{n>4z_1^2} 2n\mathbb{P}(L_1 \leq \frac{n}{2d}) = \sum_{n>4z_1^2} 2n\mathbb{P}(-S_{2n} \geq 2n\frac{1}{2d}) \\ \leq &\sum_{n>4z_1^2} 2ne^{-2n\sigma(d)} = \sum_{n>\|x\|^2} 2ne^{-2n\sigma(d)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \end{aligned}$$

pois a série $\sum_{n>0} 2ne^{-2n\sigma(d)}$ é convergente, já que $\sigma(d) > 0$.

Portanto, para a segunda parcela de (A.3.8) temos o seguinte: se $x \in 2\mathbb{Z}^d$ está localizado num dos eixos coordenados e $\|x\|$ é múltiplo par de 2 então

$$\sum_{n>\|x\|^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=2\\ l_1\leq \frac{n}{2d}}} \left(\frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}\right)\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}$$
$$\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right] \to 0, \qquad \text{(A.3.12)}$$

quando $\|x\| \to \infty$, sendo $z_1 = \frac{x_1}{2} = \frac{\|x\|}{2}$.

Tratemos agora da terceira parcela do lado direito da desigualdade (A.3.8), dada por

$$\sum_{n>4z_1^2} s^{2n}2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1>\frac{n}{2d}}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right].$$

Observe que,

$$\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)} = \frac{(1-\frac{1}{l_1})(1-\frac{2}{l_1})\dots(1-\frac{z_1-1}{l_1})}{(1+\frac{1}{l_1})(1+\frac{2}{l_1})\dots(1+\frac{z_1}{l_1})}$$
$$= \frac{\exp\{\log\prod_{i=1}^{z_1-1}(1-\frac{i}{l_1})\}}{\exp\{\log\prod_{i=1}^{z_1-1}(1+\frac{i}{l_1})\}} = \frac{\exp\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\}}{\exp\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\}}.$$

Então, temos

$$\sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=2n\\ l_1>\frac{n}{2d}}} \frac{(n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}\left(\frac{1}{2d}\right)^{2n}\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right]$$
$$= \sum_{l_1>\frac{n}{2d}} \mathbb{P}(H_{2n}^* = 0, L_1 = l_1)\left[1-\frac{\exp\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\}}{\exp\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\}}\right].$$

Como $\lim_{\frac{i}{l_1}\to 0}\frac{\log(1-\frac{i}{l_1})}{-\frac{i}{l_1}} = 1$ então $\frac{\log(1-\frac{i}{l_1})}{-\frac{i}{l_1}} = 1$ é limitada numa vizinhança de zero. Logo, existem $A > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\left|\frac{i}{l_1}\right| < \delta_1 \Longrightarrow \left|\frac{\log(1-\frac{i}{l_1})}{-\frac{i}{l_1}}\right| < A.$$

De $\frac{\log(1-\frac{i}{l_1})}{-\frac{i}{l_1}} < A$, temos

$$\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1}) > \frac{A}{l_1}\sum_{i=1}^{z_1-1} i = -\frac{Az_1(z_1-1)}{2l_1}.$$

Logo,

$$\exp\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\} > \exp\{-\frac{A}{2l_1}z_1(z_1-1)\}. \tag{A.3.13}$$

De maneira análoga, temos $\lim_{\frac{i}{l_1}\to 0}\frac{\log(1+\frac{i}{l_1})}{\frac{i}{l_1}} = 1$.Logo, existem $B > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$|\frac{i}{l_1}| < \delta_2 \Longrightarrow |\frac{\log(1+\frac{i}{l_1})}{\frac{i}{l_1}}| < B.$$

Então,

$$\exp\{-\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\} > \exp\{-\frac{B}{2l_1}z_1(z_1-1)\}. \tag{A.3.14}$$

Usando (A.3.13) e (A.3.14), temos

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\right\}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\right\}\\ &> \exp\left\{-\frac{A(z_1^2-z_1)+B(z_1^2+z_1)}{2l_1}\right\}.\end{aligned} \tag{A.3.15}$$

Seja $M = \max\{A, B\}$. Então,

$$\begin{aligned}\exp\{-\frac{A}{2l_1}(z_1^2-z_1)\} &> \exp\{-\frac{M}{2l_1}(z_1^2-z_1)\},\\ \exp\{-\frac{B}{2l_1}(z_1^2+z_1)\} &> \exp\{-\frac{M}{2l_1}(z_1^2+z_1)\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\right\}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\right\} > \exp\left\{-\frac{M}{2l_1}z_1^2\right\}.$$

Daí, temos

$$1-\frac{\exp\left\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\right\}}{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\right\}} \leq \left[1-\exp\left\{-\frac{M}{2l_1}z_1^2\right\}\right]. \tag{A.3.16}$$

Como $l_1 > \frac{n}{2d}$ então $\frac{Mz_1^2}{l_1} < \frac{2dMz_1^2}{n}$. Daí,

$$\begin{aligned}\exp\{\frac{Mz_1^2}{l_1}\} &> \exp\{\frac{2dMz_1^2}{n}\}\\ 1-\exp\{\frac{Mz_1^2}{l_1}\} &< 1-\exp\{\frac{2dMz_1^2}{n}\} = 1-\exp\{-\frac{dM}{2n}x_1^2\}.\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever:

$$1 - \frac{\exp\left\{\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1-\frac{i}{l_1})\right\}}{\exp\left\{-\sum_{i=1}^{z_1-1}\log(1+\frac{i}{l_1})\right\}} \leq \left[1-\exp\left\{-\frac{dM}{2n}x_1^2\right\}\right]. \tag{A.3.17}$$

Usando (A.3.17), temos

$$\sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1>n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right]$$

$$\leq \sum_{l_1>n/2d} I\!P(H_{2n}^{*0}=0, L_1=l_1)(1-e^{-\frac{d}{2n}M\|x\|^2}) \leq \sum_{l_1>n/2d} I\!P(H_{2n}^{*0}=0, L_1=l_1)\tilde{K}\frac{d}{2n}M\|x\|^2$$

$$\leq \tilde{K}M\|x\|^2\frac{d}{2n}I\!P(H_{2n}^{*0}=0, L_1>n/2d) \leq \tilde{K}M\|x\|^2\frac{d}{2n}I\!P(H_{2n}^{*0}=0).$$

Portanto, para a terceira parcela, temos

$$\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n>4z_1^2} s^{2n}2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1>n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}$$

$$\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right]$$

$$= \sum_{n>4z_1^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0\\ l_1+\dots+l_d=n\\ l_1>n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1-\frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right]$$

$$\leq \sum_{n>4z_1^2} 2n\frac{d}{2n}\tilde{K}M\,\|x\|^2\,I\!P(H_{2n}^{*}=0) = \tilde{K}Md\,\|x\|^2\sum_{n>\|x\|^2} I\!P(H_{2n}^{*}=0)$$

$$\leq \tilde{K}\,\tilde{c}\,Md\,\|x\|^2\sum_{n>\|x\|^2}\frac{1}{n^{d/2}} = A\,\|x\|^2\sum_{n>\|x\|^2} n^{-d/2},$$

sendo $A = \tilde{K}\,\tilde{c}\,Md$ uma constasnte positiva e,

$$I\!P(H_{2n}^{*}=0) = \frac{\tilde{c}}{n^{d/2}}, \quad \forall n\geq 1.$$

Como $\frac{d}{2} = \frac{3}{2}$ ou 2 então, a série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{d/2}}$ é convergente. Além disto, sabemos que, $\sum_{n\geq k}\frac{1}{n^{d/2-1}} = O(\frac{1}{k^{d/2-1}})$, se $d\geq 3$. Logo,

$$\sum_{n>\|x\|^2}\frac{1}{n^{d/2}} = O\left(\frac{1}{\|x\|^{d-2}}\right), \quad \text{quando } d\geq 3.$$

Portanto,

$$\|x\|^2 \sum_{n>\|x\|^2} n^{-d/2} = \begin{cases} O(\|x\|), & \text{se } d=3 \\ O(1), & \text{se } d=4. \end{cases}$$

Portanto, para a terceira parcela de (6.2.8) temos o seguinte: se $x \in 2\mathbb{Z}^d$ está localizado num dos eixos coordenados e $\|x\|$ é um múltiplo par de 2 então

$$\sum_{n>\|x\|^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0 \\ l_1+\dots+l_d=n \\ l_1>n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}$$
$$\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right] \to 0 \tag{A.3.18}$$

quando $\|x\| \to \infty$, sendo $\|x\| = 2z_1$.
Usando (4.3.28) e (A.3.8) temos:

$$\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H^*_{2n}=0) - \mathbb{P}(H^{*x}_{2n}=0)] \leq G_1(x) + G_2(x) + G_3(x), \tag{A.3.19}$$

sendo:

$$G_1(x) = \sum_{n=1}^{\|x\|^2} 2n\mathbb{P}(H^*_{2n}=0),$$
$$G_2(x) = \sum_{n>\|x\|^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0 \\ l_1+\dots+l_d=n \\ l_1\leq n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right],$$
$$G_3(x) = \sum_{n>\|x\|^2} 2n \sum_{\substack{l_1,\dots,l_d\geq 0 \\ l_1+\dots+l_d=n \\ l_1>n/2d}} \frac{(2n)!}{(l_1!)^2\dots(l_d!)^2}(\frac{1}{2d})^{2n}\left[1 - \frac{l_1(l_1-1)\dots(l_1-(z_1-1))}{(l_1+1)\dots(l_1+(z_1-1))(l_1+z_1)}\right].$$

Então, usando (A.3.19), (A.3.18), (A.3.12) e (A.3.9), concluímos a prova do Lema 4.3.1. □

A.4 Prova do Lema 4.3.2

Substiuíndo (4.3.21) e (4.3.24) na expressão (4.3.17) e, (4.3.23) e (4.3.25) na expressão (4.3.19), temos

$$a_H(s) = \frac{1 - \Psi_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})}{(1-s) + \bar{\lambda}s(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)}))} \tag{A.4.1}$$

e

$$a_{H^*}(s) = \frac{1 - \Psi_{N_x^*}(s)}{(1-s) + s(1 - \Psi_{N_{y_0}^*}(x))}. \tag{A.4.2}$$

Derivando ambos os membros de (A.4.1) e (A.4.2), em relação a s, encontramos:

$$\begin{aligned}
a'_H(s) &= [(1-s) + (1-\bar{\gamma}s)(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)}))]^{-2} \\
&\{(1 - \Psi_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})) - (1-s)\frac{(1-\bar{\gamma})}{(1-\bar{\gamma}s)^2}\Psi'_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)}) \\
&-(1-\bar{\gamma})(1 - \Psi_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)}))(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})) \\
&+\frac{(1-\bar{\gamma})^2 s}{(1-\bar{\gamma}s)^2}[\Psi'_{N_{y_0}}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})(1 - \Psi_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})) \\
&-\Psi'_{N_x}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)})(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)}))]\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a'_{H^*}(s) &= [(1-s) + s(1 - \Psi_{N_{y_0}^*}(s))]^{-2} \\
&+\{(1 - \Psi_{N_x^*}(s)) - (1-s)\Psi'_{N_x^*}(s) - (1 - \Psi_{N_x^*}(s))(1 - \Psi_{N_{y_0}^*}(s)) \\
&+s[\Psi'_{N_{y_0}^*}(s)(1 - \Psi_{N_x^*}(s)) - \Psi'_{N_x^*}(s)(1 - \Psi_{N_{y_0}^*}(s))]\}.
\end{aligned}$$

Seja

$$\alpha(s) = \frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)},$$

cuja derivada, em relação a s, é dada por:

$$\alpha'(s) = \frac{(1-\bar{\gamma})}{(1-\bar{\gamma}s)^2}. \tag{A.4.3}$$

Além disso, como $N_x^* \stackrel{d}{=} N_x$, $\forall\, x \in 2\mathbb{Z}^d$, então

$$\Psi_{N_x^*}(s) = \Psi_{N_x}(s). \tag{A.4.4}$$

Daí, substiuíndo (A.4.3) e (A.4.4) nas expressões de $a'_H(s)$ e $a'_{H^*}(s)$, temos

$$\begin{aligned}
a'_H(s) &= [(1-s) + \bar{\lambda}s(1 - \Psi_{N_{y_0}^*}(\alpha(s)))]^{-2} \\
&+\{(1 - \Psi_{N_x}(\alpha(s))) - (1-s)\alpha'(s)\Psi'_{N_x}(\alpha(s)) - \bar{\lambda}(1 - \Psi_{N_x}(\alpha(s)))(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s))) \\
&+\bar{\lambda}\alpha'(s)[\Psi'_{N_{y_0}}(\alpha(s))(1 - \Psi_{N_x}(\alpha(s))) - \Psi'_{N_x}(\alpha(s))(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s)))]\}
\end{aligned} \tag{A.4.5}$$

e,

$$
\begin{aligned}
a'_{H^*}(s) &= \frac{1}{[(1-s)+s(1-\Psi_{N^*_{y_0}}(s))]^{-2}} \\
&\quad +\{(1-\Psi_{N_x}(s))-(1-s)\Psi'_{N_x}(s)-(1-\Psi_{N_x}(s))(1-\Psi_{N_{y_0}}(s)) \\
&\quad +s[\Psi'_{N_{y_0}}(s)(1-\Psi_{N_x}(s))-\Psi'_{N_x}(s)(1-\Psi_{N_{y_0}}(s))]\}. \qquad \text{(A.4.6)}
\end{aligned}
$$

De (A.4.5) e (A.4.6), podemos escrever

$$
\frac{a'_H(s)}{a'_{H^*}(s)} = \left(\frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)}\right)^2 \frac{[c(\alpha(s))-\bar{\lambda}d(\alpha(s))]+\bar{\lambda}sl(\alpha(s))}{[c(s)-d(s)]+sl(s)}, \qquad \text{(A.4.7)}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}(s) &= (1-s)+s(1-\Psi_{N_{y_0}}(s)), && \text{(A.4.8)} \\
\tilde{N}(s) &= (1-s)+\bar{\lambda}s(1-\Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s))), && \text{(A.4.9)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
c(s) & = [(1-\Psi_{N_x}(s))-(1-s)\Psi'_{N_x}(s)] \\
c(\alpha(s)) & = [(1-\Psi_{N_x}(\alpha(s)))-(1-s)(\Psi_{N_x}(\alpha(s)))'] \\
 & \quad [(1-\Psi_{N_x}(\alpha(s)))-(1-s)\alpha'(s)\Psi'_{N_x}(\alpha(s))],
\end{cases} \qquad \text{(A.4.10)}
$$

$$
\begin{cases}
d(s) & = (1-\Psi_{N_x}(s))(1-\Psi_{N_{y_0}}(s)) \\
d(\alpha(s)) & = (1-\Psi_{N_x}(\alpha(s)))(1-\Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s))),
\end{cases} \qquad \text{(A.4.11)}
$$

$$
\begin{cases}
l(s) & = [\Psi'_{N_{y_0}}(s)(1-\Psi_{N_x}(s))-\Psi'_{N_x}(s)(1-\Psi_{N_{y_0}}(s))] \\
l(\alpha(s)) & = \alpha'(s)[\Psi'_{N_{y_0}}(\alpha(s))(1-\Psi_{N_x}(\alpha(s)))-\Psi'_{N_x}(\alpha(s))(1-\Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s)))].
\end{cases} \qquad \text{(A.4.12)}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\uparrow 1}(1-\Psi_{N_{y_0}}(s)) &= 1-\Psi_{N_{y_0}}(1) = 1-\sum_{n\geq 0} I\!P(N_{y_0}=n) \\
&= I\!P(N_{y_0}=\infty) = \tilde{p}(y_0), \quad 0<\tilde{p}(y_0)<1, \qquad \text{(A.4.13)}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{s\uparrow 1}\alpha(s) = \lim_{s\uparrow 1}\frac{(1-\bar{\gamma})s}{(1-\bar{\gamma}s)} = 1. \qquad \text{(A.4.14)}
$$

Então, usando (A.4.13) em (A.4.8), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} \tilde{M}(s) = \tilde{p}(y_0) < 1. \tag{A.4.15}$$

Usando (A.4.13), (A.4.14) e o fato de que $\Psi_{N_{y_0}}$ é uma função contínua de s, em (A.4.9), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} \tilde{N}(s) = \bar{\lambda}\tilde{p}(y_0) < \infty. \tag{A.4.16}$$

Logo, de (A.4.15) e (A.4.16), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} \left(\frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)}\right)^2 = (\bar{\lambda})^2 = (1-\bar{\gamma})^{-2}, \tag{A.4.17}$$

sendo $\bar{\lambda}$ como definido em (4.3.14).

Como $\Psi_{N_x}(s) = \sum_{n\geq 0} I\!P(N_x = n)s^n$ então

$$\Psi'_{N_x}(s) = \frac{1}{s}\sum_{n\geq 1} nI\!P(N_x = n)s^n.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} nI\!P(N_x = n)s^n &= \sum_{n\geq 1} ns^n[I\!P(n-1 < N_x < \infty) - I\!P(n < N_x < \infty)] \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)s^{n+1}I\!P(n < N_x < \infty) - \sum_{n\geq 1} ns^n I\!P(n < N_x < \infty) \\
&= sI\!P(n < N_x < \infty) + \sum_{n\geq 1}(n+1)s^{n+1}I\!P(n < N_x < \infty) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1} ns^n I\!P(n < N_x < \infty) \\
&= s(1-\tilde{p}(x)) + s\sum_{n\geq 1}(n+1)s^n I\!P(n < N_x < \infty) \\
&\quad - \sum_{n\geq 1} ns^n I\!P(n < N_x < \infty),
\end{aligned}$$

sendo

$$\tilde{p}(x) = I\!P(N_x = \infty). \tag{A.4.18}$$

Somando e subtraindo a expressão $\sum_{n\geq 1}(n+1)s^n I\!P(n < N_x < \infty)$ no desenvolvimento anterior e agrupando os termos, temos

$$\sum_{n\geq 1} nI\!P(N_x = n)s^n = s(1-\tilde{p}(x)) - (1-s)\sum_{n\geq 1}(n+1)s^n I\!P(n < N_x < \infty)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n\geq 1} s^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty) \\
= \; & s(1-\tilde{p}(x)) - (1-s)\sum_{n\geq 1} ns^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty) + s\sum_{n\geq 1} s^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty).
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N_x = n)s^n &= s(1-\tilde{p}(x)) - (1-s)\sum_{n\geq 1} ns^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty) \\
&\quad + s\sum_{n\geq 0} s^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty). \qquad \text{(A.4.19)}
\end{aligned}
$$

Usando (A.4.19), temos que

$$
\begin{aligned}
(1-s)\Psi'_{N_x}(s) &= \frac{(1-s)}{s}\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N_x = n)s^n \\
&= (1-s)(1-\tilde{p}(x)) + (1-s)\sum_{n\geq 0} s^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty) \\
&\quad - \frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} ns^n \mathbb{P}(n < N_x < \infty).
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
(1-s)\Psi'_{N_x}(s) = (1-s)(1-\tilde{p}(x)) + (1-s)\sum_{n\geq 0} a_n s^n - \frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n, \quad \text{(A.4.20)}
$$

sendo $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ e $A_n = [n < N_x < \infty]$.

Como $A_n \downarrow \emptyset$ então $a_n \to 0$, quando $n \to \infty$, o que equivale a dizer: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, $a_n = \mathbb{P}(A_n) < \varepsilon$. Portanto, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_n s^n &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n s^n + \sum_{n\geq n_0} a_n s^n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n s^n + \varepsilon \sum_{n\geq n_0} s^n \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n s^n + \frac{\varepsilon s^{n_0}}{1-s}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\forall\, \varepsilon > 0$ e para todo $0 < s < 1$, temos

$$
0 \leq (1-s)\sum_{n\geq 0} a_n s^n < (1-s)\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n s^n + \varepsilon s^{n_0}.
$$

Isto é, $\forall \varepsilon > 0$,

$$
0 \leq \lim_{s\uparrow 1}[(1-s)\sum_{n\geq 0} a_n s^n] < \varepsilon. \quad \text{Então,}
$$

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-s)\sum_{n\geq 0} a_n s^n = 0. \tag{A.4.21}$$

De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n &= (1-s)^2\sum_{n\geq 1} na_n s^{n-1} = (1-s)^2[\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n s^{n-1} + \sum_{n\geq n_0} na_n s^{n-1}] \\
\leq\ & (1-s)^2[\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n s^{n-1} + \varepsilon(\sum_{n\geq n_0} s^n)'] = (1-s)^2[\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n s^{n-1} + \varepsilon(\frac{s^{n_0}}{1-s})'] \\
=\ & (1-s)^2[\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n s^{n-1} + \frac{\varepsilon((1-s)n_0 s^{n_0-1} + s^{n_0})}{(1-s)^2}].
\end{aligned}$$

Para todo $0 < s < 1$ e $\forall \varepsilon > 0$, temos

$$0 \leq \frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n < [(1-s)^2[\sum_{n=1}^{n_0-1} na_n s^n + \varepsilon((1-s)n_0 s^{n_0-1} + s^{n_0})].$$

Ou seja,

$$0 \leq \lim_{s\uparrow 1}[\frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n] < \varepsilon.$$

Portanto, temos

$$\lim_{s\uparrow 1}\frac{(1-s)^2}{s}\sum_{n\geq 1} na_n s^n = 0. \tag{A.4.22}$$

Então, de (A.4.20), (A.4.21) e (A.4.22), concluímos que

$$\lim_{s\uparrow 1}(1-s)\Psi'_{N_x}(s) = 0. \tag{A.4.23}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{s\uparrow 1}(1-\Psi_{N_x}(s)) &= 1-\Psi_{N_x}(1) = 1-\sum_{n\geq 0} I\!P(N_x = n) \\
&= I\!P(N_x = \infty) = \tilde{p}(x). \qquad (A.4.24)
\end{aligned}$$

Usando (A.4.23) e (A.4.24) em (A.4.10), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} c(s) = \tilde{p}(x). \tag{A.4.25}$$

Como c é uma função contínua de s então, usando (A.4.14) e (A.4.25), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} c(\alpha(s)) = \tilde{p}(x). \tag{A.4.26}$$

Como d também é uma função contínua de s, usando (A.4.13), (A.4.14) e (A.4.24) em (A.4.11), temos

$$\lim_{s\uparrow 1} d(\alpha(s)) = \lim_{s\uparrow 1} d(s) = \tilde{p}(x)\tilde{p}(y_0). \tag{A.4.27}$$

Portanto, usando (A.4.25), (A.4.26) e (A.4.27) concluímos que:

$$\lim_{s\uparrow 1}(c(s) - d(s)) = \tilde{p}(x)(1 - \tilde{p}(y_0)), \tag{A.4.28}$$

sendo $0 < \tilde{p}(x)(1 - \tilde{p}(y_0)) < \infty$ e

$$\lim_{s\uparrow 1}[c(\alpha(s)) - \bar{\lambda}d(\alpha(s))] = \tilde{p}(x)(1 - \bar{\lambda}\tilde{p}(y_0)), \tag{A.4.29}$$

sendo $0 < \tilde{p}(x)(1 - \bar{\lambda}\tilde{p}(y_0)) < \infty$.

Observe que

$$a'_{H^*}(s) = (\tilde{M}(s))^{-2}[(c(s) - d(s)) + sl(s)]$$

e, pelo Lema 4.3.1, concluímos que

$$\lim_{s\uparrow 1} a'_{H^*}(s) < \infty, \tag{A.4.30}$$

para todo $x \in 2\mathbb{Z}^d$ tal que x encontra-se localizado num dos eixos coordenados e $\|x\|$ é um múltiplo par de 2.

Então, usando (A.4.15), (A.4.28) e (A.4.30) podemos garantir que, neste caso,

$$\lim_{s\uparrow 1} l(s) < \infty \tag{A.4.31}$$

e, como conseqüência, obtemos

$$\lim_{s\uparrow 1} l(\alpha(s)) < \infty. \tag{A.4.32}$$

Note que, podemos garantir que esses limites, descritos em (A.4.31) e (A.4.32), são finitos mas, ainda não conhecemos a sua dependência com x. Como,

$$a'_H(s) = (\tilde{N}(s))^{-2}[(c(\alpha(s)) - \bar{\lambda}d(\alpha(s))) + \bar{\lambda}sl(\alpha(s))]$$

então, usando (A.4.16), (A.4.29) e (A.4.32), temos que

$$\lim_{s\uparrow 1} a'_H(s) < \infty. \tag{A.4.33}$$

Observe que:

(i) $\lim_{s\uparrow 1} \tilde{M}(s)$ não depende de x;

(ii) $\lim_{s\uparrow 1}(c(s) - d(s))$ depende de x porém não cresce quando $\|x\| \to \infty$.

(iii) $(\lim_{s\uparrow 1} a'_{H^*}(s))$ vai para $+\infty$ quando $\|x\| \to \infty$, pelo Lema 4.3.1.

Seja

$$f(x) = \lim_{s\uparrow 1} l(s). \tag{A.4.34}$$

Então, da expressão de $a'_{H^*}(s)$ e levando em conta os itens (i), (ii) e (iii), temos que a dependência de $f(x)$ com x é tal que $f(x)$ cresce quando $\|x\|$ cresce. Isto é,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} (\lim_{s\uparrow 1} l(s)) = \infty. \tag{A.4.35}$$

Como l é função contínua de s e $\alpha(s) \to 1$ quando $s \uparrow 1$, então

$$f(x) = \lim_{s\uparrow 1} l(\alpha(s)). \tag{A.4.36}$$

Portanto, usando (A.4.7), (A.4.17), (A.4.28), (A.4.29), (A.4.34) e (A.4.36) temos

$$\begin{aligned} \lim_{s\uparrow 1} \frac{a'_H(s)}{a'_{H^*}(s)} &= (1-\bar{\gamma})^{-2}[\frac{\tilde{p}(x)(1-\bar{\lambda}\tilde{p}(y_0)) + \bar{\lambda} f(x)}{\tilde{p}(x)(1-\tilde{p}(y_0)) + f(x)}] \\ &= (1-\bar{\gamma})^{-2}\left[\frac{\frac{\tilde{p}(x)(1-\bar{\lambda}\tilde{p}(y_0))}{f(x)} + (1-\bar{\gamma})}{\frac{\tilde{p}(x)(1-\tilde{p}(y_0))}{f(x)} + 1}\right] =: F(x). \end{aligned} \tag{A.4.37}$$

E, de (A.4.35), temos que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} (\lim_{s\uparrow 1} \frac{a'_H(s)}{a'_{H^*}(s)}) = \lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = \frac{1}{1-\bar{\gamma}} \tag{A.4.38}$$

Portanto, usando (4.3.27), (4.3.28) e (A.4.38), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\sum_{n\geq 0} n[I\!P(H_n^0 = 0) - I\!P(H_n^x = 0)]}{\sum_{n\geq 0} n[I\!P(H_n^{*0} = 0) - I\!P(H_n^{*x} = 0)]} &= \lim_{\|x\|\to\infty} (\lim_{s\uparrow 1} \frac{a'_H(s)}{a'_{H^*}(s)}) \\ &= (1-\bar{\gamma})^{-1} = \text{cte}. \end{aligned} \tag{A.4.39}$$

Substiuindo (4.3.21) e (4.3.24) em (4.3.13) e derivando essa nova expressão de $a_D(s)$ em relação a s, temos

$$a'_D(s) = (N(s))^{-2}[c(\alpha(s)) - \lambda d(\alpha(s)) + \lambda s l(\alpha(s))], \tag{A.4.40}$$

utilizando tudo o que foi feito no caso de $a'_H(s)$ e sendo

$$N(s) = (1-s) + \lambda s(1 - \Psi_{N_{y_0}}(\alpha(s))).$$

Usando (A.4.13) e (A.4.14) temos

$$\lim_{s\uparrow 1} N(s) = \lambda \tilde{p}(y_0) < \infty. \tag{A.4.41}$$

Da expressão de $a'_H(s)$ e de (A.4.40) obtemos:

$$\frac{a'_D(s)}{a'_H(s)} = (\frac{\tilde{N}(s)}{N(s)})^2 \frac{[c(\alpha(s)) - \lambda d(\alpha(s)) + \lambda s l(\alpha(s))]}{[c(\alpha(s)) - \bar{\lambda} d(\alpha(s)) + \bar{\lambda} s l(\alpha(s))]}. \tag{A.4.42}$$

De maneira análoga à comparação anterior podemos concluir que,

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{a'_D(s)}{a'_H(s)} = (\frac{\bar{\lambda}}{\lambda})^2 \left[\frac{\tilde{p}(x)(1-\lambda\tilde{p}(y_0)) + \lambda f(x)}{\tilde{p}(x)(1-\bar{\lambda}\tilde{p}(y_0)) + \bar{\lambda} f(x)}\right]. \tag{A.4.43}$$

Portanto, como antes, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\|} \frac{\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(D_n^0 = 0) - \mathbb{P}(D_n^x = 0)]}{\sum_{n\geq 0} n[\mathbb{P}(H_n^0 = 0) - \mathbb{P}(H_n^x = 0)]} &= \lim_{\|x\|\to\infty} (\lim_{s\uparrow 1} \frac{a'_D(s)}{a'_H(s)}) \\ &= \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{1-\bar{\gamma}}{1-\gamma} = \text{constante}, \end{aligned} \tag{A.4.44}$$

levando em conta que $\tilde{p}(x)$ não cresce quando $\|x\| \to \infty$, $\tilde{p}(y_0)$ não depende de x e (A.4.35).

Portanto, (A.4.39) e (A.4.44) completam a prova do Lema 4.3.2. □

A.5 Prova do Lema 5.1.1

Sejam $T_1, T_2, \ldots$, os instantes de salto do processo $(Y_t^{x_0}, \hat{Y}_t^{y_0})$. Vamos analisar as probabilidades de transição, condicionadas a $\mathcal{F}_t$, nesses instantes. Dado que $(Y_{T_{n-1}}^{x_0}, \hat{Y}_{T_{n-1}}^{y_0}) = (x, y)$, temos os seguintes casos para analisar: $x \neq y$ e $x = y$

(1) Se $x \neq y$ isto é, $D_{T_n-1}^{x_0-y_0} \neq 0$, usando o ítem (i) do texto, temos:

(1.1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x + x', \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = y | Y_{T_{n-1}}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^{y_0} = y, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2} u_n(x, x+x') \\ &= \frac{1}{2} u_1(0, x'), \quad \forall x' \neq 0. \end{aligned}$$

(1.2)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = y + y' | Y_{T_{n-1}}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^{y_0} = y, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2}u_n(y, y + y') \\ &= \frac{1}{2}u_1(0, y'), \quad \forall y' \neq 0.\end{aligned}$$

(1.3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = y | Y_{T_{n-1}}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^{y_0} = y, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2}u_n(x, x') + \frac{1}{2}u_n(y, y') \\ &= \frac{1}{2}u_1(0, 0) + \frac{1}{2}u_1(0, 0) \\ &= u_1(0, 0)\end{aligned}$$

(2) Se $x = y$, isto é, $D_{T_n-1}^{x_0-y_0} = 0$, por (ii) (no texto), temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x + x', \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = y + y' | Y_{T_{n-1}}^{x_0} = x, \hat{Y}_{T_{n-1}}^{y_0} = x, \mathcal{F}) &= u_n(x, x + x')u_n(x, x + y') \\ &= u_1(0, x')u_1(0, y'), \\ &\quad \forall x', y' \in \mathbb{Z}^d.\end{aligned}$$

Procedendo exatamente como na prova do Lema 2.5.1, mostramos que a cadeia imersa $(Y_{T_n}^0, \hat{Y}_{T_n}^0)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, isto é,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x_n, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = z_n \mid Y_{T_{k-1}}^0 = x_{k-1}, \hat{Y}_{T_{k-1}}^0 = z_{k-1}, \ \forall\, 1 \leq k \leq n) \\ = \ &\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x_n, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = z_n \mid Y_{T_{n-1}}^0 = x_{n-1}, \hat{Y}_{T_{n-1}}^0 = z_{n-1}), \qquad \text{(A.5.1)}\end{aligned}$$

com probabilidades de tansição, nos tempos de salto, dadas por

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x_n, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = z_n \mid Y_{T_{n-1}}^0 = x_{n-1}, \hat{Y}_{T_{n-1}}^0 = z_{n-1}) \\ = \ &\mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_{T_n}^{x_0} = x_n, \hat{Y}_{T_n}^{y_0} = z_n \mid Y_{T_{n-1}}^0 = x_{n-1}, \hat{Y}_{T_{n-1}}^0 = z_{n-1}, \mathcal{F}_{T_n})]. \qquad \text{(A.5.2)}\end{aligned}$$

Sejam $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, sendo $T_0 = 0$, os tempos de espera entre o $(n-1)-$ésimo e o $n-$ésimo saltos. Portanto, usando (A.5.1), (A.5.2) e as probabilidades condicionais descritas em (1) e (2), concluímos a prova do Lema 5.1.1. □

A.6 Resultados de Ferrari and Fontes [6]

Definição 1: *Seja $X_0(x) = x\,\lambda^*$ para algum vetor determinístico λ. Então,*

$$X_n(x) = \mathbb{E}\left(Y_n^{x,n} \mid \mathcal{F}_n\right)\,\lambda^*.$$

Definição 2: *Para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ sejam*

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= \mathbb{E}\left(Y_n^{x,n} \mid \mathcal{F}_n\right), \quad \tilde{Z}_n(x) = \mathbb{E}\left(\tilde{Y}_n^{x} \mid \mathcal{F}_n\right), \\ \mathcal{Z}_n(x) &= Z_n(x)\,\lambda^* \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{Z}}_n(x) = \tilde{Z}_n(x)\,\lambda^*. \end{aligned}$$

Resultado 1: *Para todo $n \geq 1$, temos $\mathcal{Z}_n(x) \stackrel{d}{=} \tilde{\mathcal{Z}}_n(x)$.*

Lema 2.2: *O processo $\tilde{\mathcal{Z}}_n - n\mu$ é um martingal em relação à filtragem $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$.*

Proposição 2.3: *Seja $\mathcal{P}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0|D_0 = 0)$. Então,*

$$Var(\tilde{\mathcal{Z}}_n(0)) = \sigma^2 \mathcal{P}_n,$$

sendo $\sigma^2 = Var[\theta_n(0)\lambda^*]$ e $\theta_n(0) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} j u_n(0,j)$.
Desde que $\tilde{\mathcal{Z}}_n(x) \stackrel{d}{=} \tilde{\mathcal{Z}}_n(0) + x\lambda^*$, o resultado acima vale para $\tilde{\mathcal{Z}}_n(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$.

Corolário 2.4: *Quando X_n começa com um hiperplano, isto é, $X_0(i) = i\lambda^*$ para todo $i \in \mathbb{Z}^d$ sendo λ um vetor determinístico então*

$$Var(X_n(0)) = \sigma^2 \mathcal{P}_n.$$

Lema 3.1: *$\mathbb{P}(D_n = 0|D_0 = 0)$ é não crescente em n.*

Definição 3: *Sejan*

$$f(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(D_n = 0|D_0 = 0)s^n \quad \text{e} \quad g(s) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(H_n = 0|H_0 = 0)s^n$$

as séries de potência de $\mathbb{P}(D_n = 0|D_0 = 0)$ e de $\mathbb{P}(H_n = 0|H_0 = 0)$, respectivamente, sendo H_n o passeio aleatório homogêneo definido em (3.1.10).

Lema 3.2: *$f(t)$ é da ordem de $g(t)$.*

Lema 3.3: *Em $d = 1$ e 2, $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(D_i = 0|D_0 = 0)$ é da ordem de $\sqrt{n}$ e $\log n$, respectivamente. Se $d \geq 3$, ela é limitada.*

Corolário 3.4: *Seja λ um vetor determinístico não nulo em $\mathbb{Z}^d$ e asuma que $\sigma^2 \geq 0$.*

Então,

$$Var(\tilde{\mathcal{Z}}_n(0)) \text{ é da ordem de } \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } d = 1 \\ \log n, & \text{se } d = 2 \\ constante, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Corolário 3.5: *Seja $X_0(i) = i\lambda^*$ para todo i sendo λ um vetor determinístico não nulo em $\mathbb{Z}^d$ e asuma que $\sigma^2 \geq 0$. Então,*

$$Var(X_n(0)) \text{ é da ordem de } \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } d = 1 \\ \log n, & \text{se } d = 2 \\ constante, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Definição 5: *Seja $\hat{\mathcal{Z}}_n := \tilde{\mathcal{Z}}_n - \tilde{\mathcal{Z}}_n(0)$, isto é, $\hat{\mathcal{Z}}_n(x) := \tilde{\mathcal{Z}}_n(x) - \tilde{\mathcal{Z}}_n(0)$, para todo x.*
Proposição 5.1: *$\hat{\mathcal{Z}}_n$ converge quase certamente. Seja $\hat{\mathcal{Z}}_\infty$ este limite. Se $\sigma^2 \geq 0$, então*

$$Var[\hat{\mathcal{Z}}_\infty(x) - \hat{\mathcal{Z}}_\infty(y)] \text{ é da ordem de } \begin{cases} |x-y|, & \text{se } d = 1 \\ \log|x-y|, & \text{se } d = 2 \\ constante, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Se $\sigma^2 = 0$, então $\hat{\mathcal{Z}}_n(x) - \hat{\mathcal{Z}}_n(y) = \hat{\mathcal{Z}}_0(x) - \hat{\mathcal{Z}}_0(y)$ para todo $n \geq 0$.
Corolário 5.2: *Quando X_n começa com um hiperplano, isto é, $X_0 = \{i\lambda^*, i \in \mathbb{Z}^d\}$, sendo λ um vetor determinístico de $\mathbb{Z}^d$, então $\hat{X}_n$ converge fracamente. Seja $\hat{X}_\infty$ este limite fraco. Se $\sigma^2 \geq 0$, então*

$$Var[\hat{X}_\infty(x) - \hat{X}_\infty(y)] \text{ é da ordem de } \begin{cases} |x-y|, & \text{se } d = 1 \\ \log|x-y|, & \text{se } d = 2 \\ constante, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Se $\sigma^2 = 0$, então $\hat{X}_n(x) - \hat{X}_n(y) = \hat{X}_0(x) - \hat{X}_0(y)$ para todo $n \geq 0$.

Referências Bibliográficas

[1] ANDJEL, E. (1985). Invariant measures and long time behavior of the smoothing process. *Ann. Probability* **13** (1), 62-71.

[2] BOLTHAUSEN, E. (1996). Large deviations and perturbations of random walks and random surfaces. *European Congress of Mathematics*, **Vol. I** 108–120, (Budapest, 1996), Progr. Math., 168, Birkhäuser, Basel, 1998.

[3] BRICMONT, J. Random surfaces in statistical mechanics. *Wetting phenomena (Mons, 1988)*, 93–99, *Lecture Notes in Phys.*, 354, Springer, Berlin, 1990.

[4] DAVID, F. Introduction to the statistical mechanics of random surfaces and membranes. Two-dimensional quantum gravity and random surfaces. *Jerusalem Winter School Theoret. Phys.*, **8**, 81–124 (Jerusalem, 1990/1991), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[5] DURRETT, R. (1996). *Probability: Theory and Examples.* Duxbury Press. U.S.A.

[6] FERRARI, P.A. e FONTES, L.R.G (1998). Fluctuations of a surface submitted to a random average process. *Electronic Journal of Probability* **3** (6), 1-34.

[7] FRÖHLICH, J. (1985). Survey of random surface theory. Recent developments in quantum field theory. (Copenhagen, 1985), 67–93, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[8] HALL, P. e HEYDE, C.C (1980). *Martingale Limit Theory and its Application.* Academic Press. New York.

[9] LIGGETT, T. M. and SPITZER, F. (1981). Ergodic Theorems for coupled random walks and others systems with locally interacting components. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **56** (4), 443-468.

[10] LIGGETT, T. M. (1985). *Interacting Particle Systems.* Springer-Verlag. Belin.

[11] SPITZER, F. (1976). *Principles of Random Walk.* Springer-Verlag. New York.