

Castanhas-do-pará

Laura Leticia Ramos Rifo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTER O GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de concentração: Probabilidade

Orientador: Pablo Ferrari

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu suporte financeiro da FAPESP, CNPQ e CAPES

São Paulo, dezembro de 2001.

Castanhas-do-pará

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidamente
corrigida e defendida por
Laura Leticia Ramos Rifo
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2001.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Renato Fontes - IME-USP
- Prof. Dr. Hervé Guiol - IME-UNICAMP
- Prof. Dra. Maria Eulália Vares - IMPA
- Prof. Dr. Andrei Toom - UFPE

Resumo

Consideramos um sistema de partículas interagentes no plano inteiro bi-dimensional, composto por partículas de uma mesmo tamanho e uma partícula maior que as outras. A interação entre elas ocorre por exclusão com uma deriva para baixo, representando a força da gravidade. O fenômeno denominado *Brazil nuts* mostra experimentalmente que mediante uma agitação no sistema, a partícula maior se segrega das outras, movendo-se para cima com relação às menores. O que fazemos aqui é formalizar matematicamente este resultado observado, primeiramente para o caso em que as partículas estão inicialmente em equilíbrio utilizando a reversibilidade da medida, e, na segunda parte, para o caso fora do equilíbrio, utilizando a construção de um processo de ramificação dual. Em ambos os casos, estudamos o sistema quando a agitação cresce para infinito.

Abstract

We consider an interacting particles system in the bi-dimensional integer lattice, with two kinds of particles: many with the same size and one much larger than the others. The interaction is exclusion with a downward drift, describing the gravity. The *Brazil nuts* phenomena shows experimentally that under shaking, the particles segregate by size, leading the biggest one to the top. We formalize this empirical result. Firstly, we consider the system initially in equilibrium, that is, distributed according to an invariant measure; and in the second part, we treat the system out of equilibrium, using a dual branching process. In both cases, we study the behaviour when the shake increases to infinity.

probabilidade, sem recorrer a argumentos físicos, mas o paralelo é tão simples e bonito, que achamos interessante apresentá-lo aqui.

O processo fora do equilíbrio foi estudado no Capítulo 3, onde dedicamos as cinco primeiras seções ao sistema habitado por monômeros apenas. A Seção 3.6 estuda o sistema também com o polímero.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos e estudamos um passeio aleatório nos inteiros, a tempo contínuo, não-homogêneo nem temporal nem espacialmente. Este passeio apareceu em nosso estudo como uma alternativa a um problema que não pôde ser resolvido completamente: encontrar uma forma explícita para o processo limite no caso fora do equilíbrio, para uma condição inicial específica. O resultado mais interessante é o comportamento de renovação de tal passeio (cf. Teorema 4.2.1), inspirado no livro de Thorisson, [Tho00]. Os resultados são muito gráficos, e por isso mesmo muito intuitivos.

Os resultados do segundo capítulo foram publicados em Ferrari et al [FMRR00], com uma demonstração diferente à apresentada aqui. Os resultados do caso fora do equilíbrio estão em preparação ([FMRR02]).

O símbolo * foi usado para indicar o fim das demonstrações.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelo	1
1.2	Processo em equilíbrio	4
1.2.1	Distribuição gerada por uma medida reversível	4
1.2.2	Distribuição de Bernoulli	5
1.3	Caso não-estacionário	6
1.4	Estudo de um passeio não-homogêneo em \mathbb{Z}	7
2	Processo em Equilíbrio	9
2.1	Construção do processo independente	10
2.2	Prova do Teorema 1.2.1	11
2.3	Propriedades do polímero no limite	19
2.4	Apêndice - Circuitos elétricos	25
3	Processo Fora do Equilíbrio	29
3.1	Processo de ramificação dual (PRD)	29
3.2	Dualidade entre η_t e o PRD	33
3.3	Processo de ramificação independente (PRI)	35
3.4	Acoplamento entre o PRD e o PRI	36
3.5	Comportamento assintótico dos monômeros	39
3.6	Comportamento assintótico da barra	41
4	Estudo de um passeio não-homogêneo	45
4.1	Construção do Processo Z_t	45
4.2	X_t como processo de renovação	50

Lista de Figuras

1.1	Configuração dos monômeros e do polímero a uma altura y	1
1.2	Taxas de salto das partículas	2
1.3	Função de densidade da medida invariante ν_ρ	4
1.4	Densidade da distribuição inicial, $d_{\rho\lambda}$	6
2.1	Dinâmica entre discrepâncias (sítios com uma única partícula) e partículas acopladas (sítios com uma partícula de cada processo, diferenciadas pela cor)	14
2.2	Circuito elétrico	25
2.3	Circuito elétrico equivalente a um passeio em \mathbb{Z}	27
3.1	(i) uma realização do processo η_t em $[0, T]$; (ii) processo dual de η_t , R_i , para a realização anterior.	31
4.1	Taxas de transição do passeio Z_t	46
4.2	Uma realização do passeio Z_t	47

Notação

$A^N(y)$	1
$B^N(y)$	3
D_A	14
$D_{\hat{i}}$	31
$\mathbb{E}_{\eta\zeta}$	18
\mathbb{E}_{γ}	33
\mathbb{E}_{γ}^M	37
$\hat{\mathbb{E}}$	37
F_i	32
$I_{\hat{i}}(\hat{i})$	32
\mathbb{L}	2
\mathbb{L}_m	2
N_t^v	3
N_t^h	3
ν_{ρ}	4
ν_{ρ}^Y	4
$R_{\hat{i}}$	33
T_i	3
U_i	3
ξ_t	15
Y_i^{γ}	3
Y_t	5
Y_t^{γ}	2
W^N	10

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelo

Consideremos um processo de exclusão simples assimétrico em \mathbb{Z}^2 com partículas de dois tamanhos diferentes: monômeros, ocupando um sítio cada um, e um polímero ou barra em $A^N(y) = \{(1, y), \dots, (N, y)\}$ (Figura 1.1), com $N \in \mathbb{N}$ o tamanho do polímero e $y \in \mathbb{Z}$ sua posição vertical.

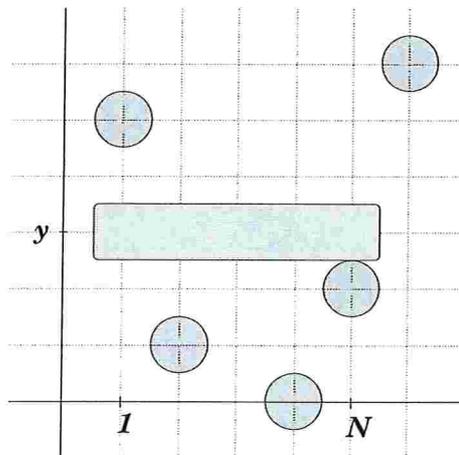


Figura 1.1: Configuração dos monômeros e do polímero a uma altura y

Cada monômero tenta pular uma unidade à direita ou à esquerda com taxa γ , uma unidade para cima com taxa p ou uma para baixo com taxa $q = 1 - p$, $p < q$. O polímero tenta dar saltos somente para cima, com taxa a , e para baixo, com taxa b , $a < b$ (cf. Figura 1.2). As tentativas de salto só se realizam quando o sítio de destino estiver vazio. Como a barra se move somente na vertical, sua altura define completamente sua posição. A deriva pra baixo representa a força da gravidade e estamos supondo que a posição do

polímero não é afetada pela agitação horizontal, definida pelo parâmetro γ .

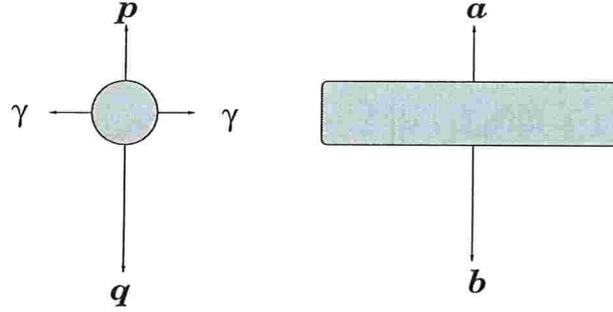


Figura 1.2: Taxas de salto das partículas

DEFINIÇÃO DO GERADOR DO PROCESSO

Formalmente, consideramos o processo $\{(\eta_t, Y_t^\gamma)\}_{t \geq 0}$ definido no espaço de configurações $\mathbf{X} = \{(\eta, y) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z} : \eta(x) = 0, x \in A^N(y)\}$, ou seja, $\eta_t \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e $Y_t^\gamma \in \mathbb{Z}$ indicam a configuração dos monômeros e a posição da barra no instante t , respectivamente. A condição sobre $\eta(x)$ diz que não pode haver monômeros no lugar do polímero.

O gerador do processo, $L = L^N$, está dado por

$$L f(\eta, y) = L_m f(\eta, y) + L_p f(\eta, y) \quad (1.1)$$

com

$$\begin{aligned} L_m f(\eta, y) &= \sum_{x, z \in \mathbb{Z}^2} p(x, z) \eta(x) (1 - \eta(z)) \mathbf{1}\{x, z \notin A^N(y)\} [f(\eta^{xz}, y) - f(\eta, y)] \\ L_p f(\eta, y) &= a \prod_{x \in A^N(y+1)} (1 - \eta(x)) [f(\eta, y+1) - f(\eta, y)] \\ &\quad + b \prod_{x \in A^N(y-1)} (1 - \eta(x)) [f(\eta, y-1) - f(\eta, y)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde

$$p(x, x+e) = \begin{cases} p & \text{se } e = (0, 1) \\ q & \text{se } e = (0, -1) \\ \gamma & \text{se } e = (\pm 1, 0), \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\eta^{xz}(w) = \begin{cases} \eta(w) & \text{se } w \neq x, z \\ \eta(x) & \text{se } w = z \\ \eta(z) & \text{se } w = x \end{cases}$$

e f é uma função real contínua para a topologia gerada pelos conjuntos cilíndricos.

CONSTRUÇÃO GRÁFICA

Graficamente, colocamos processos de Poisson (ou relógios ou marcas) nos sítios de \mathbb{Z}^2 com taxa $p + q = 1$, $\{N_t^v(\cdot)\}_t$, de modo que cada vez que apareça uma marca do processo (ou cada vez que toque o relógio) num determinado sítio, o monômero que estiver nesse sítio (se houver) resolverá dar um salto para cima com probabilidade p ou para baixo com probabilidade q . Para indicar as tentativas de salto na horizontal, associamos relógios com taxa γ , $\{N_t^h(\cdot, \cdot)\}_t$, a pares de vizinhos próximos com mesma ordenada. Quando aparece uma marca entre os sítios (x_1, x_2) e $(x_1 + 1, x_2)$, os valores destes sítios são intercambiados. Ambos os relógios são vistos apenas pelos monômeros e se algum dos saltos sai de ou vai a um sítio ocupado pelo polímero, ele é ignorado. A configuração dos monômeros no instante t será denotada η_t .

Denotemos por $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ o i -ésimo instante do processo de Poisson $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ em \mathbb{R}^+ com taxa $a + b$, e definamos as variáveis aleatórias U_i , independentes dos T_i e entre si, com distribuição

$$P(U_i = u) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{se } u = 1 \\ \frac{b}{a+b} & \text{se } u = -1. \end{cases}$$

Para as tentativas de salto do polímero, usamos os processos $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ definidos acima: no instante T_i , a barra tenta saltar uma unidade para cima se $U_i = 1$, ou uma para baixo, se $U_i = -1$. Denotamos por $Y_i = Y_i^\gamma$, a posição do polímero no instante T_i , $Y_i = Y_{T_i}^\gamma$.

Definamos o evento $B^N(y) = \{\eta : \sum_{x \in A^N(y)} \eta(x) = 0\}$, para indicar que não há monômeros em $A^N(y)$, e as variáveis ε_i da seguinte maneira

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{se } (U_i = 1 \text{ e } \eta_{T_i^-} \in B^N(Y_{i-1} + 1)) \text{ ou } (U_i = -1 \text{ e } \eta_{T_i^-} \in B^N(Y_{i-1} - 1)) \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, $\varepsilon_i = 1$ se o i -ésimo salto ocorreu e 0 se não. Desta maneira, podemos escrever

$$Y_i^\gamma = Y_0^\gamma + \sum_{k=1}^i \varepsilon_k U_k.$$

1.2 Processo em equilíbrio

1.2.1 Distribuição gerada por uma medida reversível

Suponhamos inicialmente que o plano \mathbb{Z}^2 está habitado por partículas do mesmo tipo e consideremos o processo de exclusão η_t com gerador L_m , definido em (1.1), com $A^N(y) = \emptyset$.

Definamos a medida produto ν_ρ em $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ com densidade

$$\rho(x, c) = \frac{c (p/q)^{x_2}}{1 + c (p/q)^{x_2}}, \quad (1.4)$$

i.e., $\nu_\rho\{\eta : \eta(x) = 1, \eta(\tilde{x}) = 1\} = \rho(x, c)\rho(\tilde{x}, c)$, onde x_2 é a segunda coordenada de x . Observemos que ρ é invariante horizontalmente; é como se em cada reta da forma $x = x_0$ puséssemos uma densidade unidimensional com o perfil como o da Figura 1.3.

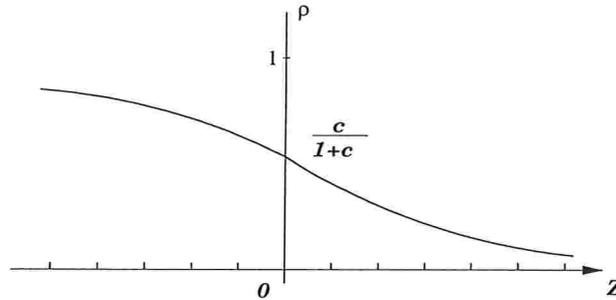


Figura 1.3: Função de densidade da medida invariante ν_ρ

A distribuição ν_ρ é invariante para o processo η_t e, mais ainda, tal invariância permanece com o polímero dentro do sistema, se ele estiver numa posição fixa $A^N(y)$, $y \in \mathbb{Z}$ (cf. Liggett [Lig85], pg. 97). Neste caso, estamos considerando uma região proibida para os monômeros: as tentativas de salto de e para $A^N(y)$ não são consideradas. O sistema se comporta como um fluxo ao redor de um obstáculo. Denotamos por ν_ρ^y a medida invariante definida pela a medida ν_ρ com a restrição $\nu_\rho\{\eta : \eta(x) = 0, x \in A^N(y)\} = 1$.

Observemos no entanto que a invariância se perde quando o polímero segue as marcas de seu relógio. De fato, quando o polímero salta, surge a condição “não há monômeros” no lugar que a barra ocupava antes do salto. Se não consegue saltar, surge “há um sítio ocupado” no lugar para onde a barra tentou ir. Ou seja, a cada tentativa de salto do polímero, surge uma nova condição sobre os monômeros nos sítios afetados pelo movimento da barra, modificando o perfil da medida inicial. Como consequência, temos que o movimento da barra não é Markoviano, intuitivamente, porque para conseguir realizar

o salto em um dado instante, precisamos conhecer a distribuição dos monômeros, que vai depender de todo o passado.

Denotemos por $A^N(Y_0)$ os sítios inicialmente ocupados pelo polímero e assumamos que os monômeros estão distribuídos de acordo com a medida $\nu_\rho^{Y_0}$. Quando a agitação do sistema aumenta, no limite $\gamma \rightarrow \infty$, a trajetória percorrida pelo polímero pode ser modelada por um passeio aleatório simples com taxas não-homogêneas. Tal passeio é recorrente se a deriva do polímero for proporcionalmente menor que a dos monômeros.

Teorema 1.2.1 *Com as hipóteses anteriores e a notação da Seção 1.1, a família de processos $\{Y_t^\gamma\}_\gamma$ converge em distribuição, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a um passeio aleatório em \mathbb{Z} , Z_t , com taxas de transição dadas por*

$$Q(y, z) := \begin{cases} a (1 - \rho(y + 1))^N & \text{se } z = y + 1 \\ b (1 - \rho(y - 1))^N & \text{se } z = y - 1 . \end{cases}$$

Proposição 1.2.2 *Se $a/b > (p/q)^N$, então o passeio aleatório dado no teorema anterior tem uma única medida reversível em \mathbb{Z} dada por*

$$m(y) = \frac{1}{\kappa} \frac{(a/b)^y}{(1 + (p/q)^y)^N},$$

onde κ é uma constante normalizadora. Em particular, o passeio aleatório é recorrente positivo e a moda de m , ou seja, a posição onde m alcança seu máximo é da ordem $\log N$, quando $N \rightarrow \infty$.

Teorema 1.2.3 *O processo Z_t é recorrente se e somente se $a/b \geq (p/q)^{2N}$.*

1.2.2 Distribuição de Bernoulli

Para $\rho \in [0, 1]$, denotemos por ν_ρ a medida produto de Bernoulli com densidade ρ . Ou seja, ν_ρ é a medida de probabilidade no espaço de configurações $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ obtida colocando em cada sítio uma partícula com probabilidade ρ independentemente dos outros sítios.

Tal medida é invariante para o processo assimétrico, mas não reversível. O Teorema 1.2.1 é válido para esta distribuição homogênea no espaço, no entanto, o passeio Z_t é transiente se $a \neq b$.

1.3 Caso não-estacionário

Assumamos novamente a ausência do polímero, mas agora com as demais partículas inicialmente fora do equilíbrio, mais especificamente, distribuídas de acordo com a medida produto $\nu_{\rho\lambda}$, com densidade $d_{\rho\lambda}$ em \mathbb{Z}^2 definida por

$$d_{\rho\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x_2 \geq 0 \\ \rho & \text{se } x_2 < 0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

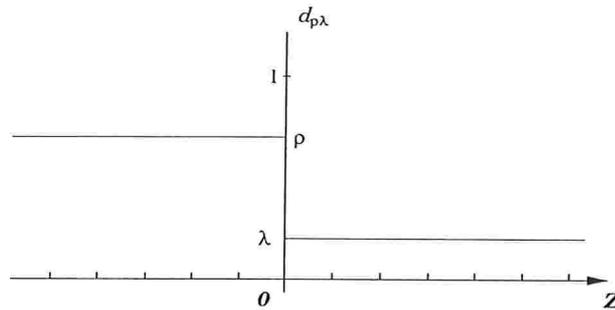


Figura 1.4: Densidade da distribuição inicial, $d_{\rho\lambda}$

Esta distribuição não é invariante para o processo η_t . Para conhecer sua evolução no tempo, observemos que ela é constante nas retas horizontais. O primeiro resultado nos diz justamente que, quando a vibração vai para infinito, a medida $\nu_{\rho\lambda}$ satisfaz uma equação de tipo Burgers unidimensional, que representa na verdade o seu comportamento na segunda coordenada.

Teorema 1.3.1 Denotemos por $\mathbb{E}_\gamma^{\nu_{\rho\lambda}}$ a esperança do processo definido pelo gerador (1.2), com $A^N(y) = \emptyset$, e distribuição inicial $\nu_{\rho\lambda}$. Para qualquer $t \geq 0$, a família de medidas $\mathbb{E}_\gamma^{\nu_{\rho\lambda}}(\eta_t(\cdot))$ converge à medida $\nu_{u(\cdot, t)}$, quando $\gamma \rightarrow \infty$, onde ν_u é a medida produto com densidade $u(\cdot, t)$ satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = & -pu(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) - qu(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) \\ & + pu(x - e_2, t)(1 - u(x, t)) + qu(x + e_2, t)(1 - u(x, t)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

com condição inicial dada por (1.5).

Fixando o polímero a uma altura y , obtemos o seguinte resultado, para o fluxo através do obstáculo $A^N(y)$.

Proposição 1.3.2 Para $y \in \mathbb{Z}$, fixo, seja $\nu_{\rho\lambda}^y = \mathbf{1}\{\eta(x) = 0, x \in A^N(y)\} \nu_{\rho\lambda}$ a medida produto inicial para o processo com gerador L_m , dado em (1.2). A família $\mathbb{E}_\gamma^{\nu_{\rho\lambda}^y}(\eta(\cdot, t))$ converge fracamente à medida produto $\nu_{u(\cdot, t)}$ com densidade $u(\cdot, t)$ satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= [-p u(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) + q u(x + e_2, t)(1 - u(x, t))] \mathbf{1}\{x, x + e_2 \notin A^N(y)\} \\ &+ [-q u(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) + p u(x - e_2, t)(1 - u(x, t))] \mathbf{1}\{x, x - e_2 \notin A^N(y)\} \end{aligned}$$

com condição inicial dada por (1.5).

E finalmente para o processo completo, temos que a distribuição limite do processo realizado pelo polímero se comporta como uma cadeia de Markov não-homogênea.

Teorema 1.3.3 Para $y \in \mathbb{Z}$, fixo, seja $\nu_{\rho\lambda}^y \times \delta_y$ a medida produto inicial para o processo (η_t, Y_t^γ) com gerador L , definido em (1.1). Para cada $t \geq 0$, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a família de processos $\{(Y_t^\gamma)_t\}_\gamma$ converge em distribuição ao passeio Z_t com taxas de transição dadas por

$$Q_t(y, z) := \begin{cases} a(1 - u(y + 1, t))^N & \text{se } z = y + 1 \\ b(1 - u(y - 1, t))^N & \text{se } z = y - 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

onde u satisfaz a equação da proposição anterior.

1.4 Estudo de um passeio não-homogêneo em \mathbb{Z}

A contraparte contínua da equação (1.6) é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial[u(1 - u)(q - p)]}{\partial r} = 0. \quad (1.8)$$

Considerando a condição inicial definida em (1.5), a solução fraca de (1.8) é $u(x, t) = u_0(x - vt)$, que assume o valor λ para $x \geq vt$ e ρ para $x < vt$. O valor v é a velocidade com que se propaga a descontinuidade, $v = (q - p)(1 - \rho - \lambda)$. Substituindo $u(x, t)$ na equação do Teorema 1.3.3, o que obtemos é uma cadeia de Markov, que chamaremos Z_t , em \mathbb{Z} , com taxas de transição $a(x, t)$ e $b(x, t)$ dadas por

$$\begin{aligned} a(x, t) &= p_t(x, x + 1) = a(1 - \rho)^N \mathbf{1}\{x < vt - 1\} + a(1 - \lambda)^N \mathbf{1}\{x \geq vt - 1\} \\ b(x, t) &= p_t(x, x - 1) = b(1 - \rho)^N \mathbf{1}\{x \leq vt\} + b(1 - \lambda)^N \mathbf{1}\{x > vt\}. \end{aligned}$$

Este passeio é claramente transiente, pois $a < b$. O interessante aqui é estudar a relação entre Z_t e a reta vt , $X_t = Z_t - vt$. Definindo o tempo aleatório

$$\tau_1 = \min \{t > 0 : Z_t = vt\}$$

obtemos o seguinte teorema de renovação.

Teorema 1.4.1 *Suponhamos que $X_0 = 0$. Se $a_\lambda - b_\lambda < v < a_\rho - b_\rho$ então os processos X_t e $X_{t+\tau_1}$ têm mesma distribuição.*

Capítulo 2

Processo em Equilíbrio

Neste capítulo provaremos os resultados da Seção 1.2. A ferramenta mais importante utilizada é a construção do acoplamento entre o nosso processo e outro sem memória para a dinâmica do polímero. O Lema 2.2.3 foi um dos pontos fundamentais da tese para conseguir provar os resultados do problema em equilíbrio e se encontra em Ferrari et al. [FMRR00], com uma prova diferente da apresentada aqui.

Começaremos este capítulo definindo um processo, $\{(\zeta_t, Z_t)\}$, com mesmas taxas de transição que $\{(\eta_t, Y_t)\}$, mas com um comportamento markoviano em ambas as coordenadas, ou seja, as tentativas de salto do polímero não afetam a distribuição dos monômeros (Lema 2.2.1). Apresentamos também uma medida reversível para tal processo (Proposição 2.3.1). Provamos que a família de processos $\{Y_t^\gamma\}_\gamma$ converge em distribuição à cadeia $\{Z_t\}$, quando $\gamma \rightarrow \infty$ (Proposição 2.2.2).

A prova do Teorema 1.2.1 (Seção 2.2) é feita segundo o seguinte esquema. Consideramos uma realização $\{t_n\}$ do processo de Poisson que rege o movimento do polímero e da cadeia $\{Z_t\}$, e para tal realização encontramos as probabilidades de transição do processo a tempo discreto, $Z_n = Z_{t_n}$ (Lema 2.2.1). A seguir provamos que quando $\gamma \rightarrow \infty$, as distribuições finito-dimensionais de $Y_n^\gamma = Y_{t_n}^\gamma$ convergem às de Z_n . Finalmente, no Lema 2.2.5, mostramos que a partir dos processos $\{Z_n\}$ podemos reobter o processo a tempo contínuo $\{Z_t\}$. Este último resultado é um resultado clássico e pode ser encontrado em Doob [Doo65], pg. 253.

No Apêndice, ao fim do capítulo, fazemos a apresentação típica de circuitos elétricos vinculados à teoria de passeios aleatórios: um circuito simples (isto é, com resistências em série e/ou em paralelo) pode ser associado a um passeio aleatório sobre um grafo, considerando *grosso modo* o inverso da resistência entre dois pontos diretamente proporcional à

probabilidade de ir de um desses pontos ao outro. Esta introdução está baseada em Doyle and Snell [DS84]. Um bom livro clássico sobre eletricidade é Alonso and Finn [AF67]. A prova do Teorema 1.2.3 poderia ter sido feita com elementos puramente probabilistas, mas é interessante dar uma olhada neste outro enfoque puramente físico.

2.1 Construção do processo independente

Construamos um novo sistema, $\{(\zeta_t, Z_t)\}$, usando as mesmas marcas definidas na Seção 1.1, T_i, U_i para Z_t e N_i^v, N_i^h para ζ_t , com a seguinte diferença: se em um dado instante os sítios em $A^N(y)$ forem afetados pela barra, ou porque a barra saíra da posição y ou porque ela tentara saltar para y e não conseguira, então colocaremos em $A^N(y)$ um vetor aleatório, $W^N(y)$, com distribuição de Bernoulli $\nu_\rho(\cdot, y)$ e independente de $\{T_i\}$, $\{U_i\}$, $\{N_i\}$.

Definimos a variável $W_i^N(\cdot)$ como o vetor que surge na i -ésima tentativa de salto do polímero. Este vetor, então, substitui a configuração de monômeros em $A^N(y)$ (sítios afetados pela barra) por outra distribuída de acordo com a medida produto $\nu_\rho(\cdot, y)$, independentemente de tudo.

Dados $S \subset \mathbb{Z}^2$ e uma configuração $\zeta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, denotaremos por $\zeta|_S$ a restrição $\{\zeta(x)\}_{x \in S}$. Formalmente podemos escrever o gerador de $\{(\zeta_t, Z_t)\}$ como $L^{rw} = L_m + L_Z$, onde L_m é o mesmo de (1.2)

$$L_m f(\zeta, y) = \sum p(x, z) \zeta(x) (1 - \zeta(z)) \mathbf{1}\{x, z \notin A^N(y)\} [f(\zeta^{xz}, y) - f(\zeta, y)]$$

e L_Z está dado por

$$\begin{aligned} L_Z f(\zeta, y) = & \sum_{w_y} q(w_y) \left\{ a \prod_{x \in A^N(y+1)} (1 - \zeta(x)) [f(\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y, y+1) - f(\zeta, y)] \right. \\ & \left. + b \prod_{x \in A^N(y-1)} (1 - \zeta(x)) [f(\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y, y-1) - f(\zeta, y)] \right\} \\ & + \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1}) a \mathbf{1}\left\{ \sum_{x \in A^N(y+1)} \zeta(x) > 0 \right\} [f(\zeta|_{[A^N(y+1)]^c} \otimes w_{y+1}, y) - f(\zeta, y)] \\ & + \sum_{w_{y-1}} q(w_{y-1}) b \mathbf{1}\left\{ \sum_{x \in A^N(y-1)} \zeta(x) > 0 \right\} [f(\zeta|_{[A^N(y-1)]^c} \otimes w_{y-1}, y) - f(\zeta, y)] , \end{aligned}$$

w_y é uma realização de $W^N(y)$, que ocorre com probabilidade

$$q(w_y) = (\rho(y))^{\sum_i (w_y)_i} (1 - \rho(y))^{N - \sum_i (w_y)_i} ,$$

e $\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y : [A^N(y)]^c \cup A^N(y) \rightarrow \{0, 1\}$ está definida como

$$\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y (x) = \begin{cases} \zeta(x) & \text{se } x \in [A^N(y)]^c \\ (w_y)_{x_1} & \text{se } x \in A^N(y) \end{cases} .$$

2.2 Prova do Teorema 1.2.1

Consideremos $\{t_n\}$ uma realização dos instantes T_n das tentativas de salto do polímero e da cadeia Z_t . Denotemos por Z_i a posição do passeio assim que toca seu relógio, $Z_i = Z_{T_i}$.

Lema 2.2.1 *Com a construção feita na Secção 2.1, o processo $\{Z_n\}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto em \mathbb{Z} com probabilidades de transição*

$$Q_d(y, z) := \begin{cases} \frac{a}{a+b} \nu(B^N(z)) & \text{se } z = y + 1 \\ \frac{b}{a+b} \nu(B^N(z)) & \text{se } z = y - 1 , \end{cases}$$

onde $B^N(y) = \{\zeta : \sum_{x \in A^N(y)} \zeta(x) = 0\}$.

Prova.

Sejam I um conjunto finito em \mathbb{Z}^2 e f_I definida por $f_I(\zeta) = \prod_{x \in I} \zeta(x)$.

Consideremos a primeira tentativa de salto de Z , no instante t_1 , dado que $Z_0 = y_0$. Temos que

$$\mathbb{E} f_I(\zeta_{t_1}) = \sum_{i=-1,0,1} \mathbb{P}(\zeta_{t_1}(x) = 1, x \in I, Z_1 = y_0 + i) .$$

Estudaremos o caso para $i = 1$, já que os outros são tratados analogamente. Observemos que se $I \cap A^N(y_0 + 1) \neq \emptyset$, esta probabilidade é zero. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_{t_1}(x) = 1, x \in I, I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset, Z_1 = y_0 + 1) &= \\ &= \mathbb{P}(\zeta_{t_1}(x) = 1, x \in (I \cap A^N(y_0)) \cup (I \cap [A^N(y_0)]^c) , \\ &\quad I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset, Z_1 = y_0 + 1) \\ &= \nu((W_1^N(y_0))_{x_i} = 1, (x_i, y_0) \in I \cap A^N(y_0)) \\ &\quad \mathbb{P}(\zeta_{t_1^-}(x) = 1, x \in I \cap [A^N(y_0)]^c, I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset, Z_1 = y_0 + 1) \\ &= \nu(\zeta(x) = 1, x \in I \cap A^N(y_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nu \left(\zeta(x) = 1, x \in I \cap [A^N(y_0)]^c, I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset \right) \mathbb{P}(Z_1 = y_0 + 1) \\ &= \nu_{y_0+1}(I) \mathbb{P}(Z_1 = y_0 + 1), \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade, usamos a independência de W_1^N , no instante t_1 . Para o segundo fator, notemos que os sítios de $I \cap [A^N(y_0)]^c$ não são afetados pelo salto, já que $I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset$. Assim eles têm a mesma distribuição em t_1 e t_1^- . Devido à condição $I \cap A^N(y_0 + 1) = \emptyset$, podemos definir $\nu(\zeta(x) = 1, x \in A^N(y_0 + 1)) = 0$, obtendo a última igualdade. Fazendo a soma sobre as outras possibilidades de Z_1 , temos

$$\mathbb{E}f_I(\zeta_t) = \nu_{y_1}(I) \quad \text{para todo } t_1 \leq t < t_2.$$

Em particular, deduzimos as probabilidades

$$Q_d(y_1, y_1 + 1) = \frac{a}{a+b} \mathbb{P}(\zeta_{t_2^-} \in B^N(y_1 + 1)) = \frac{a}{a+b} \nu(B^N(y_1 + 1))$$

e

$$Q_d(y_1, y_1 - 1) = \frac{b}{a+b} \mathbb{P}(\zeta_{t_2^-} \in B^N(y_1 - 1)) = \frac{b}{a+b} \nu(B^N(y_1 - 1)).$$

Suponhamos que a igualdade

$$\mathbb{E}f_I(\zeta_t) = \nu_{y_{i-1}}(I) \tag{2.1}$$

com $t_{i-1} \leq t < t_i$ e I tal que $I \cap A^N(y_{i-1}) = \emptyset$, se satisfaz para $i \leq n$. Para o caso $Z_n = y_{n-1} + 1$, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\zeta_{t_n}(x) = 1, x \in I, I \cap A^N(y_{n-1} + 1) = \emptyset, Z_n = y_{n-1} + 1 \right) = \\ &= \mathbb{P} \left(\zeta_{t_n}(x) = 1, x \in \left(I \cap A^N(y_{n-1}) \right) \cup \left(I \cap [A^N(y_{n-1})]^c \right), \right. \\ & \quad \left. I \cap A^N(y_{n-1} + 1) = \emptyset, Z_n = y_{n-1} + 1 \right) \\ &= \nu \left((W_n^N(y_{n-1}))_{x_i} = 1, (x_i, y_{n-1}) \in I \cap A^N(y_{n-1}) \right) \\ & \quad \mathbb{P} \left(\zeta_{t_n^-}(x) = 1, x \in I \cap [A^N(y_{n-1})]^c, I \cap A^N(y_{n-1} + 1) = \emptyset, Z_n = y_{n-1} + 1 \right) \\ &= \nu \left(\zeta(x) = 1, x \in I \cap A^N(y_{n-1}) \right) \nu_{y_n} \left(I \cap [A^N(y_{n-1})]^c \right) \mathbb{P}(Z_n = y_{n-1} + 1) \\ &= \nu_{y_n}(I) \mathbb{P}(Z_n = y_{n-1} + 1), \end{aligned}$$

onde para a terceira igualdade aplicamos a hipótese de indução.

Assim,

$$\mathbb{E}f_I(\zeta_t) = \nu_{y_n}(I) \quad \text{para todo } t_n \leq t < t_{n+1},$$

de onde deduzimos que

$$Q_d(y_n, y_n + 1) = \frac{a}{a+b} \mathbb{P}(\zeta_{t_2^-} \in B^N(y_n + 1)) = \frac{a}{a+b} \nu(B^N(y_n + 1))$$

e

$$Q_d(y_n, y_n - 1) = \frac{b}{a+b} \mathbb{P}(\zeta_{t_2^-} \in B^N(y_n - 1)) = \frac{b}{a+b} \nu(B^N(y_n - 1)).$$

Como isto vale para qualquer realização $\{t_n\}$, concluímos que $\{Z_n\}$ tem as probabilidades de transição dadas pelo lema.

*

Para uma realização $\{t_n\}$ de $\{T_n\}$, denotaremos por $P_{\nu_{y_0}}^{\gamma, \{t_n\}}(\eta_t \in \cdot)$ e $P_{y_0}^{\gamma, \{t_n\}}(Y_t \in \cdot)$ as distribuições marginais do processo (η_t, Y_t) no instante t começando com a medida $\nu_{y_0} \times \delta_{y_0}$, $y_0 \in \mathbb{Z}$, e por $P_{y_0}^{\{t_n\}}$ a distribuição do processo Z_t no instante t começando em y_0 .

Proposição 2.2.2 *Com a notação anterior, dados $Y_0 = Z_0 = y_0$, temos que quando $\gamma \rightarrow \infty$, as distribuições finito-dimensionais $P_{y_0}^{\gamma, \{t_n\}}(Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k)$ tendem a*

$$P_{y_0}^{\{t_n\}}(Z_1 = y_1, \dots, Z_k = y_k) = \prod_{i=1}^k Q_d(y_{i-1}, y_i).$$

Prova.

Faremos a prova por indução em k , mostrando que

$$\left| P_{y_0}^{\gamma, \{t_n\}}(Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) - \prod_{i=1}^k Q_d(y_{i-1}, y_i) \right| \leq \sum_{i=2}^k \frac{(i-1)N^2c}{(\gamma(t_i - t_{i-1}))^{1/2}}.$$

Construiremos o acoplamento entre Y_t e Z_t utilizando para ambos os processos as mesmas marcas de U_i , e tomando para os monômeros, η_t e ζ_t , a mesma realização de N_t^h e N_t^v , com $\eta_0 = \zeta_0$.

CONSTRUÇÃO DO ACOPLAMENTO ENTRE Y_t E Z_t

Definimos as discrepâncias no instante t por $\sigma_t = |\eta_t - \zeta_t|$. Tais discrepâncias vão aparecer em cada tentativa de salto do polímero, ou seja, nos instantes t_i , nos sítios ocupados pelo vetor aleatório W_i^N .

Para um conjunto cilíndrico $C \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ dado, definimos o conjunto de dependência ou base de C , D_C , por

$$D_C := \{x \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{1}_C(\eta) \neq \mathbf{1}_C(\eta^x) \text{ para algum } \eta\}.$$

Seja C_1 um cilindro com base $D_{C_1} = A^N(y_0) \cup A^N(y_0 + 1) \cup A^N(y_0 - 1)$. Tal conjunto satisfaz $\eta_{t_1}(x) = \zeta_{t_1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus D_{C_1}$ e em cada sítio $x \in D_{C_1}$ temos uma das três possibilidades seguintes: $\eta_{t_1}(x) - \zeta_{t_1}(x) = 0$, não há discrepância; $(\eta_{t_1}(x) - \zeta_{t_1}(x))^+ > 0$, chamada discrepância positiva; ou $(\eta_{t_1}(x) - \zeta_{t_1}(x))^- > 0$, uma discrepância negativa.

Seguindo a evolução das partículas, segundo as marcas $N_t^v(\cdot)$, podemos perceber que se uma discrepância positiva pula sobre uma negativa, então ambas colidem, dando lugar a uma partícula acoplada e a um espaço vazio, como na Figura 2.1(i). Se uma partícula acoplada tenta pular sobre uma discrepância, o salto acontece e elas trocam de lugar entre si (Figura (ii)). Inversamente, se uma discrepância tenta pular sobre uma partícula acoplada, nada acontece (Figura (iii)). Este comportamento só acontece nos saltos verticais. Nos horizontais, as discrepâncias e as partículas acopladas apenas intercambiam de posição de acordo com as marcas N_t^h (Figura (iv)). Observemos que não é possível criar novas discrepâncias.

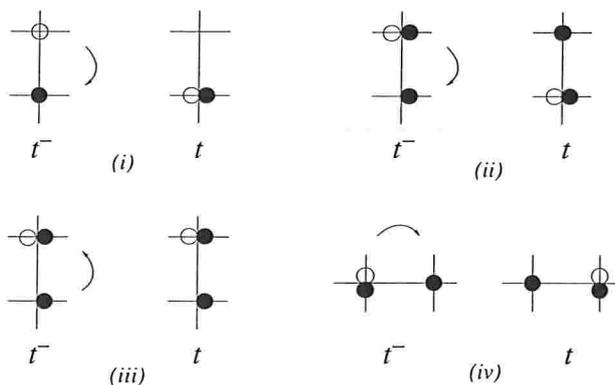


Figura 2.1: Dinâmica entre discrepâncias (sítios com uma única partícula) e partículas acopladas (sítios com uma partícula de cada processo, diferenciadas pela cor)

Dado que as partículas acopladas seguem uma dinâmica sem levar em conta as discrepâncias, dizemos que há uma partícula de primeira classe no sítio x no instante t se

$\xi_t(x) = \eta_t(x)\zeta_t(x) = 1$. Definimos uma partícula de segunda classe positiva $(\eta\zeta)_t$ como $(\eta\zeta)_t(x) = \eta_t(x) - \zeta_t(x) = 1$ e uma de segunda classe negativa como $(\zeta\eta)_t(x) = \zeta_t(x) - \eta_t(x) = 1$.

As partículas de primeira classe ocupam inicialmente os sítios x ocupados por η e ζ . Localmente no tempo, o movimento das partículas de primeira classe está dado pelo gerador L_m mais um processo de nascimento puro. Com taxa $p(\eta\zeta)_t(x_1, x_2 - 1)(\zeta\eta)_t(x_1, x_2)$ as partículas de segunda classe em $(x_1, x_2 - 1)$ e (x_1, x_2) se aniquilam e aparecem uma partícula de primeira classe em (x_1, x_2) e um sítio vazio em $(x_1, x_2 - 1)$; similarmente, com taxa $q(\eta\zeta)_t(x_1, x_2 + 1)(\zeta\eta)_t(x_1, x_2)$, as partículas de segunda classe em $(x_1, x_2 + 1)$ e (x_1, x_2) se eliminam deixando uma de primeira classe em (x_1, x_2) e um espaço vazio em $(x_1, x_2 + 1)$.

Na direção horizontal, a distribuição marginal de uma discrepância entre dois saltos, ou um salto e uma aniquilação, corresponde à lei de um processo de exclusão simples simétrico com reflexão na barra a altura y . Na direção vertical, o movimento não é Markoviano, pois depende da configuração das demais partículas no instante das tentativas de salto, podendo ocorrer uma aniquilação se no outro sítio houver uma discrepância, um salto se ele estiver vazio, ou nada se houver uma partícula acoplada.

O seguinte lema nos descreve o comportamento assintótico (em γ) dos monômeros quando assumimos uma restrição inicial sobre um conjunto finito de sítios, com o polímero fixo a uma certa altura, y ; é como se considerássemos o fluxo ao redor de um obstáculo fixo. Em poucas palavras, o que obtemos é que quando $\gamma \rightarrow \infty$, o processo esquece condições iniciais finitas, em qualquer instante.

Lema 2.2.3 *Fixemos $y \in \mathbb{Z}$. Seja A um conjunto no espaço de configurações, $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, que depende apenas de um número finito de sítios. Então, para todo $t > 0$ e todo conjunto cilíndrico $J \not\ni (0, y), (N + 1, y)$,*

$$\left| \mathbb{E}_{\nu_{\rho}^y(\cdot|A)}^{\gamma}(\mathbf{1}_J(\eta_t)) - \mathbb{E}_{\nu_{\rho}^y}^{\gamma}(\mathbf{1}_J(\eta_t)) \right| \leq \frac{c|D_A||D_J|}{(\gamma t)^{1/2}}.$$

Notemos que σ_t , além de seguir o comportamento de uma partícula de segunda classe, obedece também a um processo de nascimento logo após cada tentativa de salto do polímero, nos sítios $A^N(\cdot)$. Denotaremos por $X_{t-t_i}^{ij}$ a posição da j -ésima discrepância, $0 \leq j \leq N$, criada na i -ésima tentativa de salto da barra, no instante t . Se não houver, usamos a convenção $X^{ij} = \emptyset$.

PROVA DA HIPÓTESE DE INDUÇÃO PARA $k = 2$

Denotemos por D_2 a diferença

$$D_2 := |\mathbf{1}\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\} - \mathbf{1}\{Z_1 = y_1, Z_2 = y_2\}| .$$

Usando o acoplamento acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} D_2 &\leq \mathbf{1}\{Y_1 = Z_1 = y_1, Y_2 = y_2, Z_2 \neq y_2\} + \mathbf{1}\{Y_1 = Z_1 = y_1, Y_2 \neq y_2, Z_2 = y_2\} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \mathbf{1} \left\{ \sum_{x \in A^N(y_1+U_2)} X_{t_2-t_1}^{1j}(x) > 0 \right\} . \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\left| P_{y_0}^{\gamma, \{t_n\}}(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) - P_{y_0}^{\{t_n\}}(Z_1 = y_1, Z_2 = y_2) \right| \leq \mathbb{E} D_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{x \in A^N(y_1+U_2)} \mathbb{P} \left(X_{t_2-t_1}^{1j}(x) = 1 \right) \\ &\leq \frac{N^2 c}{(\gamma(t_2 - t_1))^{1/2}} , \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é dada pelo Lema 2.2.3, na página 18.

PROVA DA HIPÓTESE DE INDUÇÃO PARA $k = n$, DADO QUE É VALIDA PARA $k = n - 1$

Suponhamos que a hipótese de indução é verdadeira para $k = n - 1$. Escrevendo

$$\begin{aligned} D_n &:= |\mathbf{1}\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\} - \mathbf{1}\{Z_1 = y_1, \dots, Z_n = y_n\}| \\ &\leq |\mathbf{1}\{Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}\} - \mathbf{1}\{Z_1 = y_1, \dots, Z_{n-1} = y_{n-1}\}| \\ &\quad + \mathbf{1}\{Y_{n-1} = Z_{n-1} = y_{n-1}, Y_n = y_n, Z_n \neq y_n\} \\ &\quad + \mathbf{1}\{Y_{n-1} = Z_{n-1} = y_{n-1}, Y_n \neq y_n, Z_n = y_n\} . \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\left| P_{y_0}^{\gamma, \{t_n\}}(Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) - \prod_{i=1}^k Q(y_{i-1}, y_i) \right| \leq \mathbb{E} D_n \\ &\leq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i-1)N^2 c}{(\gamma(t_i - t_{i-1}))^{1/2}} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^N \sum_{x \in A^N(y_{n-1}+U_n)} \mathbb{P} \left(X_{t_n-t_i}^{ij}(x) = 1 \right) \\ &\leq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i-1)N^2 c}{(\gamma(t_i - t_{i-1}))^{1/2}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{N^2 c}{(\gamma(t_n - t_i))^{1/2}} \\ &\leq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(i-1)N^2 c}{(\gamma(t_i - t_{i-1}))^{1/2}} + \frac{(n-1)N^2 c}{(\gamma(t_n - t_{n-1}))^{1/2}} \\ &\leq \sum_{i=2}^n \frac{(i-1)N^2 c}{(\gamma(t_i - t_{i-1}))^{1/2}} . \end{aligned}$$

*

Proposição 2.2.4 *A família $\{Y_n^\gamma\}_\gamma$ converge em distribuição, com $\gamma \rightarrow \infty$, à cadeia $\{Z_n\}$.*

Prova.

O resultado anterior nos dá a convergência das distribuições finito-dimensionais. Para obtermos a convergência em distribuição, precisamos ter a condição de que a família $\{Y_n^\gamma\}_\gamma$ é tensa (tight) (cf. Billingsley). Observemos que as distribuições dos processos Y_n^γ e Z_n estão definidas no espaço \mathbb{Z}^N , e como bem lembrou a Professora Maria Eulalia Vares, durante a defesa, a propriedade de tightness sai de graça pela discreticidade de N .

*

Lema 2.2.5 *Com a notação anterior, o processo Z_t , dado por*

$$Z_t(\omega) = Z_{t_n}(\omega) \quad t_n(\omega) \leq t < t_{n+1}(\omega),$$

é uma cadeia de Markov, com taxas de transição dadas por $(a+b)Q_d(x,y)\mathbf{1}\{x \neq y\}$.

Prova.

Se temos uma variável aleatória positiva, T , com densidade $c \exp(-ct)$ ($c, t > 0$) e $s > 0$ qualquer então

$$P(T(\omega) > t) = P(T(\omega) - s > t / T(\omega) - s > 0).$$

Isto implica que se na lei construída no Lema 2.2.1 nós escolhermos algum $s > 0$ e pararmos o procedimento no primeiro t_j maior que s , de modo que Z_t fique definida somente para $t \leq s$; e se então a construção for recomeçada em $t = s$ da mesma forma que em $t = 0$, usando, no entanto, Z_s como valor inicial, então os t_n 's e Z_n 's seguintes terão a mesma distribuição que teriam tido se o processo não tivesse sido interrompido. A diferença agora é que:

- a) a distribuição de Z_t condicionada a valores dados de Z_τ , $\tau \leq s$, depende apenas de Z_s , ou seja, o processo tem a propriedade de Markov; e
- b) a probabilidade $P(Z_t = j / Z_s = i)$ é uma função de $t - s$, i.e., o processo tem probabilidades de transição estacionárias.

Além do mais, a condição de continuidade

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(Z_t = j / Z_0 = i) = \delta_{ij}$$

é trivialmente satisfeita.

Finalmente temos que a taxa de Z_t , que denotaremos $Q(x, y)$, é igual ao produto entre a taxa do relógio $\{T_n\}$ e $Q_d(x, y)$. Com isto terminamos a prova do Teorema 1.2.1.

*

Prova do Lema 2.2.3.

Seja D_A o conjunto de dependência de A .

Para calcular a diferença das esperanças, construímos o seguinte acoplamento: consideramos dois processos, η_t e ζ_t , com as mesmas marcas $N_s^y(\cdot)$, e $N_s^h(\cdot, \cdot)$ até o instante t e com configurações iniciais η e ζ , respectivamente. A fim de acoplar tais configurações iniciais, definimos a medida conjunta $\tilde{\mu}_A$ com marginais $\nu_\rho^y(\cdot|A)$ e ν_ρ^y , de tal maneira que $\eta(x) = \zeta(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus D_A$. Tal medida existe já que ν_ρ^y é uma medida produto.

Denotemos por $\mathbb{E}_{\eta\zeta}$ a esperança do processo acoplado começando com (η, ζ) e seja J um conjunto cilíndrico. Podemos escrever

$$\left| \mathbb{E}_{\nu_\rho^y(\cdot|A)}^\gamma(\mathbf{1}_J(\eta_t)) - \mathbb{E}_{\nu_\rho^y}^\gamma(\mathbf{1}_J(\zeta_t)) \right| = \int \tilde{\mu}_A(d(\eta, \zeta)) \mathbb{E}_{\eta\zeta}[\mathbf{1}_J(\eta_t) - \mathbf{1}_J(\zeta_t)].$$

Notemos que o número de discrepâncias iniciais é finito, já que

$$\sum_x \mathbf{1}(\eta(x) \neq \zeta(x)) \leq |D_A| < \infty. \quad (2.2)$$

Além do mais, o acoplamento tal como foi definido na prova da Proposição 2.2.2 tem a propriedade que o número de discrepâncias não pode aumentar com o tempo:

$$\mathbb{P}_{\eta\zeta} \left\{ \sum_x \mathbf{1}(\eta_{t_1}(x) \neq \zeta_{t_1}(x)) \geq \sum_x \mathbf{1}(\eta_{t_2}(x) \neq \zeta_{t_2}(x)) \right\} = 1 \text{ para todos } t_1 < t_2. \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3), obtemos a cota

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\eta\zeta}[\mathbf{1}_J(\eta_t) - \mathbf{1}_J(\zeta_t)] &= \mathbb{P}_{\eta\zeta}(\eta_t(x) \neq \zeta_t(x), x \in J) \\ &\leq \sum_{u \in D_A} \sum_{x \in D_J} \mathbb{P}(X^u(t) = x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $X^u(t)$ é a posição no instante t de uma partícula de segunda classe inicialmente em $u \in D_A$ e D_J é a base do cilindro J . Se o sítio u não tiver uma discrepância no instante

$t = 0$, usamos a convenção $X^u(t) \notin \mathbb{Z}^2$. Se temos discrepâncias u e v de signos opostos que colidem antes do instante t , temos também $X^u(t), X^v(t) \notin \mathbb{Z}^2$.

O comportamento horizontal de X_t^u é o de um passeio aleatório simétrico de taxa γ , exceto quando ele se encontra a um dos lados da barra, em $(0, y)$ ou $(N + 1, y)$, já que neste caso ele não pode saltar para nenhum dos sítios $(1, y)$ e (N, y) . Consideremos então a partição entre o evento $(X_s^u \neq (0, y), (N + 1, y), s < t)$ e seu complemento, para escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^u(t) = x) &= \mathbb{P}(X_t^u = x, X_s^u \neq (0, y), (N + 1, y), s < t) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_t^u = x, (X_s^u \neq (0, y), (N + 1, y), s < t)^C) \\ &\leq \mathbb{P}((X_t^u)_1 = x_1, X_s^u \neq (0, y), (N + 1, y), s < t) \\ &\quad + \mathbb{P}((X_t^u)_1 = x_1, (X_s^u \neq (0, y), (N + 1, y), s < t)^C) \\ &\leq c_x (t\gamma)^{-1/2} + \sum_{M_\gamma} c_{M_\gamma} (s_1(s_2 - s_1) \dots (t - s_{M_\gamma})\gamma)^{-1/2} \frac{(\gamma t)^{M_\gamma}}{M_\gamma!} e^{-t\gamma}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $(z)_1$ é a primeira coordenada de z ; M_γ é uma realização do número de marcas horizontais entre 0 e t que liga $(0, y)$ a $(-1, y)$ e $(N + 1, y)$ a $(N + 2, y)$ (depende de γ), que são as marcas mais prováveis de acontecer para $\gamma > \gamma'_0$, e $\{s_i\}_{i=1}^{M_\gamma}$ é uma realização dos instantes destas marcas. Como o somatório vai para zero mais rapidamente que o primeiro somando quando $\gamma \rightarrow \infty$, temos, portanto, que existe γ_0 tal que

$$\mathbb{P}(X^u(t) = x) \leq c (t\gamma)^{-1/2} \quad \forall \gamma > \gamma_0.$$

Substituindo isto em (2.4), obtemos finalmente

$$\mathbb{E}_{\eta\zeta}[\mathbf{1}_J(\eta_t) - \mathbf{1}_J(\zeta_t)] \leq \frac{c|D_A||D_J|}{(\gamma t)^{1/2}}.$$

*

2.3 Propriedades do polímero no limite

Proposição 2.3.1 *A medida em $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} \times \mathbb{Z}$, μ , definida por*

$$\mu(\zeta(x_1, x_2) = 1, (x_1, x_2) \in J, Z = y) = \prod_{x \in J} \frac{c(p/q)^{x_2}}{1 + c(p/q)^{x_2}} \frac{(a/b)^y}{(1 + c(p/q)^y)^N} \mathbf{1}\{J \cap A^N(y) = \emptyset\}$$

é reversível para (ζ_t, Z_t) .

Prova.

Queremos provar que $\int g L^{rw} f d\mu = \int f L^{rw} g d\mu$ para todas f, g locais em Ω (cf. Liggett [Lig85], p. 90). Para tanto basta tomar f e g da forma $\prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = a_i\} \mathbf{1}\{Z = y\}$. Como μ é uma medida produto, é suficiente considerar os casos

$$f(\zeta, Z) = \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \mathbf{1}\{Z = y\}$$

e

$$g(\zeta, Z) = \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = g_i\} \mathbf{1}\{Z = y\},$$

de modo que $f_i = g_i$, para todo $i \in I \setminus \{j, k\}$, $f_k = g_j \neq f_j = g_k$, com j e k vizinhos próximos, $\langle j, k \rangle$, e

$$h(\zeta, Z) = \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \mathbf{1}\{Z = y + 1\}.$$

Suponhamos para fixação de idéias que $f_j = 0$. Então

$$\begin{aligned} & L^{rw} f(\zeta, Z) \\ &= \sum_{\langle x, j \rangle} p(j, x) \zeta(j) (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta^{jx}(i) = f_i\} \\ &\quad - \sum_{\langle x, j \rangle} p(x, j) \zeta(x) (1 - \zeta(j)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \\ &\quad + \sum_{\langle x, k \rangle} p(x, k) \zeta(x) (1 - \zeta(k)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta^{kx}(i) = f_i\} \\ &\quad - \sum_{\langle x, k \rangle} p(k, x) \zeta(k) (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \\ &\quad + \sum_{w_{y-1}} q(w_{y-1}) a \prod_{A^N(y)} (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y - 1\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y-1)]^c} \otimes w_{y-1}(i) = f_i\} \\ &\quad - \sum_{w_y} q(w_y) a \prod_{A^N(y+1)} (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y(i) = f_i\} \\ &\quad + \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1}) b \prod_{A^N(y)} (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y + 1\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y+1)]^c} \otimes w_{y+1}(i) = f_i\} \\ &\quad - \sum_{w_y} q(w_y) b \prod_{A^N(y-1)} (1 - \zeta(x)) \mathbf{1}\{Z = y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y(i) = f_i\} \\ &\quad + \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1}) a \mathbf{1}\left\{ \sum_{A^N(y+1)} \zeta(x) > 0 \right\} \mathbf{1}\{Z = y\} \left[\mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y+1)]^c} \otimes w_{y+1}(i) = f_i\} - \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \right] \\ &\quad + \sum_{w_{y-1}} q(w_{y-1}) b \mathbf{1}\left\{ \sum_{A^N(y-1)} \zeta(x) > 0 \right\} \mathbf{1}\{Z = y\} \left[\mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y-1)]^c} \otimes w_{y-1}(i) = f_i\} - \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \right] \end{aligned}$$

e

$$L^{rw} g(\zeta, Z)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\langle x,j \rangle} p(x,j)\zeta(x)(1-\zeta(j))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta^{jx}(i) = g_i\} \\
&- \sum_{\langle x,j \rangle} p(j,x)\zeta(j)(1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = g_i\} \\
&+ \sum_{\langle x,k \rangle} p(k,x)\zeta(k)(1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta^{kx}(i) = g_i\} \\
&- \sum_{\langle x,k \rangle} p(x,k)\zeta(x)(1-\zeta(k))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = g_i\} \\
&+ \sum_{w_{y-1}} q(w_{y-1})a \prod_{A^N(y)} (1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y-1\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y-1)]^c} \otimes w_{y-1}(i) = g_i\} \\
&- \sum_{w_y} q(w_y)a \prod_{A^N(y+1)} (1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y(i) = g_i\} \\
&+ \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1})b \prod_{A^N(y)} (1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y+1\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y+1)]^c} \otimes w_{y+1}(i) = g_i\} \\
&- \sum_{w_y} q(w_y)b \prod_{A^N(y-1)} (1-\zeta(x))\mathbf{1}\{Z=y\} \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y)]^c} \otimes w_y(i) = g_i\} \\
&+ \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1})a \mathbf{1}\left\{ \sum_{A^N(y+1)} \zeta(x) > 0 \right\} \mathbf{1}\{Z=y\} \left[\mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y+1)]^c} \otimes w_{y+1}(i) = f_i\} - \mathbf{1}\{\zeta(i) = g_i\} \right] \\
&+ \sum_{w_{y-1}} q(w_{y-1})b \mathbf{1}\left\{ \sum_{A^N(y-1)} \zeta(x) > 0 \right\} \mathbf{1}\{Z=y\} \left[\mathbf{1}\{\zeta|_{[A^N(y-1)]^c} \otimes w_{y-1}(i) = f_i\} - \mathbf{1}\{\zeta(i) = g_i\} \right].
\end{aligned}$$

Assim

$$fL^{rw}g(\zeta, Z) = 2p(k, j)\zeta(k)(1-\zeta(j))\mathbf{1}\{Z=y\}$$

e

$$gL^{rw}f(\zeta, Z) = 2p(j, k)\zeta(j)(1-\zeta(k))\mathbf{1}\{Z=y\}.$$

Se j e k têm mesma ordenada, então

$$\begin{aligned}
\int [fL^{rw}g - gL^{rw}f] d\mu &= 2\gamma \mu(Z=y) [\mu(\zeta(j)=0, \zeta(k)=1) - \mu(\zeta(j)=1, \zeta(k)=0)] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois μ é invariante horizontalmente.

Se j e k estão na mesma vertical com $j_2 = k_2 - 1$,

$$\begin{aligned}
&\int [fL^{rw}g - gL^{rw}f] d\mu \\
&= 2\mu(Z=y) [p(k, j)\mu(\zeta(j)=0, \zeta(k)=1) - p(j, k)\mu(\zeta(j)=1, \zeta(k)=0)] \\
&= 2\mu(Z=y) \\
&\quad \left[q \left(1 - \frac{c(p/q)^{j_2}}{1+c(p/q)^{j_2}} \right) \frac{c(p/q)^{j_2+1}}{1+c(p/q)^{j_2+1}} - p \frac{c(p/q)^{j_2}}{1+c(p/q)^{j_2}} \left(1 - \frac{c(p/q)^{j_2+1}}{1+c(p/q)^{j_2+1}} \right) \right] \\
&= 2\mu(Z=y)
\end{aligned}$$

$$= 0. \left[q \frac{1}{1 + c(p/q)^{j_2}} \frac{c(p/q)^{j_2+1}}{1 + c(p/q)^{j_2+1}} - p \frac{c(p/q)^{j_2}}{1 + c(p/q)^{j_2}} \frac{1}{1 + c(p/q)^{j_2+1}} \right]$$

Fazendo os mesmos cálculos para h , temos

$$fL^{rw}h(\zeta, Z) = \sum_{w_y} q(w_y) a \prod_{A^N(y+1)} (1 - \zeta(x)) \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \mathbf{1}\{Z = y\}$$

e

$$hL^{rw}f(\zeta, Z) = \sum_{w_{y+1}} q(w_{y+1}) b \prod_{A^N(y)} (1 - \zeta(x)) \prod_{i \in I} \mathbf{1}\{\zeta(i) = f_i\} \mathbf{1}\{Z = y + 1\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int [fL^{rw}h - hL^{rw}f] d\mu &= \mu(\zeta(i) = f_i, \forall i \in I) \left[a \mu(\zeta(x) = 0, \forall x \in A^N(y+1), Z = y) \right. \\ &\quad \left. - b \mu(\zeta(x) = 0, \forall x \in A^N(y), Z = y + 1) \right] \\ &= \mu(\zeta(i) = f_i, \forall i \in I) \left[a \left(1 - \frac{c(p/q)^{y+1}}{1 + c(p/q)^{y+1}} \right)^N \frac{(a/b)^y}{(1 + c(p/q)^y)^N} \right. \\ &\quad \left. - b \left(1 - \frac{c(p/q)^y}{1 + c(p/q)^y} \right)^N \frac{(a/b)^{y+1}}{(1 + c(p/q)^{y+1})^N} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos provar.

*

Prova da Proposição 1.2.2.

A reversibilidade de $m(y)$ é imediata e a condição $a/b > (p/q)^N$ nos garante que m é de fato uma medida de probabilidade. A recorrência positiva vem do fato da existência de uma medida reversível para o processo.

Para encontrar a moda de m , escrevamos a seguinte continuação da distribuição:

$$m(dx) = \frac{\exp(-\alpha x)}{(1 + \exp(-\beta x))^N} \frac{1}{\kappa(\alpha, \beta, N)} dx,$$

onde

$$\kappa(\alpha, \beta, N) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha x)}{(1 + \exp(-\beta x))^N} dx$$

e $e^{-\alpha} = a/b$, $e^{-\beta} = p/q$.

A função m alcançará seu valor máximo no ponto que satisfizer

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{\exp(-\alpha x)}{(1 + \exp(-\beta x))^N} \right) \\ &= -\alpha - N \frac{-\beta e^{-\beta x}}{1 + e^{-\beta x}}. \end{aligned}$$

Daqui,

$$\begin{aligned} \text{Mo}(m) &= \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} N - 1 \right) \\ &= (-\ln(p/q))^{-1} \ln \left(\frac{\ln(p/q)^N}{\ln(a/b)} - 1 \right) \\ &\simeq \frac{1}{-\log(p/q)} \log N, \text{ quando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

*

Prova do Teorema 1.2.3.

Podemos representar o passeio Z_t como uma rede elétrica, conforme apresentado no apêndice ao fim deste capítulo. Consideramos uma fonte ligada à origem e a $+\infty$ e $-\infty$, de modo que o potencial em 0 seja um, e nos extremos, seja zero, como se a origem fosse um interruptor para duas lâmpadas.

Dessa maneira, a conductância entre i e $i + 1$ será

$$C_{i,i+1} = \begin{cases} \prod_{k=0}^i a(k)/b(k) & \text{se } i \geq 0 \\ 1 & \text{se } i = -1 \\ \prod_{k=i+1}^{-1} b(k)/a(k) & \text{se } i < -1, \end{cases}$$

onde $a(k)$ e $b(k)$ são as taxas de transição

$$a(k) = a \left(1 - \frac{c(p/q)^{k+1}}{1 + c(p/q)^{k+1}} \right)^N = a \left(1 + c(p/q)^{k+1} \right)^{-N}$$

e

$$b(k) = b \left(1 - \frac{c(p/q)^{k-1}}{1 + c(p/q)^{k-1}} \right)^N = b \left(1 + c(p/q)^{k-1} \right)^{-N},$$

e o valor 1 foi assumido arbitrariamente para poder estabelecer a relação entre a resistência e as taxas de transição acima.

Como as resistências para cada lado da origem estão em série, o sistema anterior é equivalente a um sistema com duas resistências, uma entre 0 e $+\infty$, R^+ , e outra entre 0 e $-\infty$, R^- , com

$$\begin{aligned} R^+ &= \sum_{i \geq 0} \prod_{k=0}^i b(k)/a(k) \\ &= (1+c)^{-N} (1+cp/q)^{-N} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{b}{a}\right)^{i+1} (1+c(p/q)^i)^N (1+c(p/q)^{i+1})^N \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R^- &= 1 + \sum_{i \geq 1} \prod_{k=1}^i a(-k)/b(-k) \\ &= 1 + (1+c)^{-N} (1+c(p/q)^{-1})^{-N} \sum_{i \geq 1} \left(\frac{a}{b}\right)^i (1+c(p/q)^{-1})^N (1+c(p/q)^{-i-1})^N. \end{aligned}$$

O sistema será recorrente se e somente se a corrente total do sistema for zero, ou seja, sse $R^+ = R^- = \infty$. Observemos que R^+ é sempre divergente, já que $a < b$. Para R^- , o i -ésimo termo, c_i , é da ordem de

$$c_i \sim \left(\frac{a}{b}\right)^i \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{2N}\right)^{-i}.$$

Portanto, $R^- = \infty$ se e somente se $a/b \geq (p/q)^{2N}$, como afirmado.

*

Observação. Se $\rho(y) = \rho$, para todo $y \in \mathbb{Z}$, $R^- = 1 + \sum_i (a/b)^i < \infty$ se $a < b$ e $R^+ = \sum_i (b/a)^i < \infty$ se $b < a$. Portanto, se $a \neq b$, o processo Z_t é transiente.

2.4 Apêndice - Circuitos elétricos

Genericamente falando, definimos um *grafo*, G , como um conjunto de pontos unidos por laços. Dizemos que G é um *grafo conexo* se for possível comunicar dois pontos quaisquer através dos laços.

Num grafo conexo, podemos imaginar um circuito elétrico da seguinte forma:

- escolhamos dois pontos, a e b , como nossa fonte de energia, ou seja, colocamos entre eles uma diferença de potencial, com voltagens $v_a = 1$ e $v_b = 0$, digamos, e
- em cada laço xy colocamos uma resistência (uma lâmpada, por exemplo) cujo valor será um número real não-negativo que chamaremos resistência do laço, R_{xy} .

É claro que estamos supondo que nosso grafo é “bem-comportado”, apto para formar um circuito com resistores em série e paralelo, sem interseções entre os laços, assim como o da Figura 2.2.

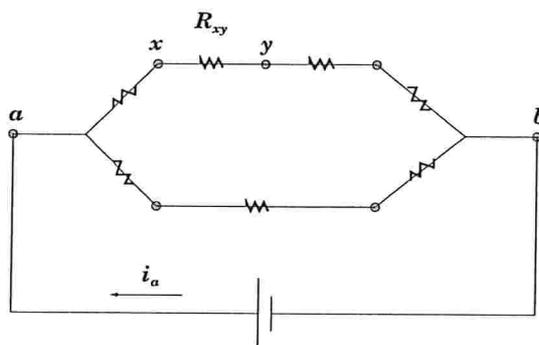


Figura 2.2: Circuito elétrico

Na contraparte estocástica, podemos associar este circuito a uma cadeia de Markov sobre G , definindo a probabilidade de transição entre x e y , p_{xy} , para x e y pontos unidos por um laço, como

$$p_{xy} = \frac{C_{xy}}{C_x},$$

onde $C_{xy} = 1/R_{xy}$ é a *conductância* do laço xy e $C_x = \sum_y C_{xy}$. Isto nos dá o paralelo entre resistência e probabilidade de transição.

Pela Lei de Ohm, a corrente através do resistor xy está determinada pela relação entre a diferença de potencial entre x e y , e a resistência do laço xy ,

$$i_{xy} = \frac{v_x - v_y}{R_{xy}} = (v_x - v_y) C_{xy}.$$

Sabemos também, pela Lei de Kirchhoff, que o fluxo de corrente total em qualquer ponto entre a e b deve ser zero, ou seja, a quantidade de corrente que chega deve ser igual à quantidade de corrente que sai do ponto, lembrando que a corrente vai do maior para o menor potencial, $\sum_y i_{xy} = 0$. Portanto

$$v_x = \sum_y \frac{C_{xy}}{C_x} v_y = \sum_y p_{xy} v_y ,$$

para $x \neq a, b$. Esta equação é por definição a equação de uma função harmônica para a cadeia $\{p_{xy}\}$, isto é, uma função cujo valor em um ponto interior do domínio, x , é igual à p_{xy} -média dos valores sobre qualquer bola centrada em x .

Seja h_x a probabilidade de, começando em x , alcançar o estado a antes do b . Observe-mos que h também é harmônica para a cadeia, já que $h_x = \sum_y p_{xy} h_y$. Além disso, temos $h_a = v_a = 1$, $h_b = v_b = 0$. O problema de encontrar uma função harmônica, conhecidos seus valores na fronteira é chamado problema de Dirichlet. O chamado princípio de unicidade nos assegura que não existe mais de uma função harmônica satisfazendo tais valores. Tomando como fronteira do nosso domínio os pontos a e b , encontramos que $h = v$. Em outras palavras, *quando colocamos uma diferença de potencial unitário entre dois pontos a e b , com $v_a = 1$ e $v_b = 0$, a voltagem v_x representa a probabilidade de que um passeio começando em x chegue a a antes de alcançar b .*

Denotemos por $i_a = \sum_y i_{ay}$, a corrente total que entra no circuito. Definimos a *resistência efetiva* do sistema como $R_{ef} = v_a/i_a = 1/i_a$. A quantidade recíproca $C_{ef} = 1/R_{ef} = i_a$ é a *conductância efetiva* do sistema. Podemos interpretar este valor como uma probabilidade de escape. De fato,

$$\begin{aligned} i_a &= \sum_y (v_a - v_y) C_{ay} = \sum_y (v_a - v_y) \frac{C_{ay}}{C_a} C_a \\ &= C_a \left(v_a - \sum_y p_{ay} v_y \right) \\ &= C_a \left(1 - \sum_y p_{ay} h_y \right) \\ &=: C_a p_{escape} , \end{aligned}$$

onde usamos p_{escape} para denotar a probabilidade de que, começando em a , o passeio alcance b antes de retornar a a .

Com a analogia estabelecida acima, para provar que um passeio aleatório é recorrente, devemos provar que a corrente total do sistema elétrico associado é nula ou, equivalentemente, que a resistência efetiva do sistema é infinita. No caso de um passeio em \mathbb{Z} , o

respectivo circuito pode ser visualizado partindo da origem com duas séries em paralelo indo para o infinito (Figura 2.3).

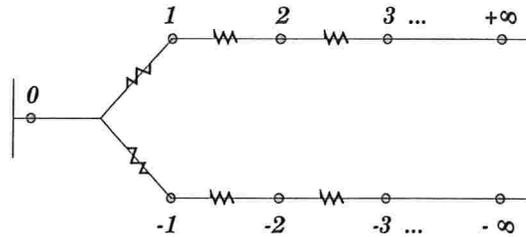


Figura 2.3: Circuito elétrico equivalente a um passeio em \mathbb{Z} .

Tal sistema pode ser reduzido a uma rede iniciando-se na origem com apenas uma resistência ligando a $+\infty$, R^+ , e outra a $-\infty$, R^- . Cada uma destas resistências é igual à soma das resistências do circuito original, no respectivo ramo,

$$R^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} R_{i,i+1} \quad , \quad R^- = \sum_{i=0}^{+\infty} R_{-i,-i-1}.$$

Este passeio será então recorrente se ambas as séries forem divergentes, que foi o argumento utilizado na prova do Teorema 1.2.3.

Capítulo 3

Processo Fora do Equilíbrio

Nas cinco primeiras seções nos dedicamos a provar o Teorema 1.3.1 referente ao sistema apenas com monômeros, e na Seção 3.6, a provar a Proposição 1.3.2 e o Teorema 1.3.3.

No capítulo anterior, no estudo da distribuição do processo limite (ζ_t, Z_t) , usamos fortemente o fato da medida ν_ρ ser invariante para η_t (cf. Lema 2.2.1). Agora, se começarmos com uma medida inicial ν não invariante para o processo original, não podemos utilizar o mesmo argumento de análise quando $\gamma \rightarrow \infty$. Para contornar este problema, introduziremos a noção de processo dual. No caso de um processo de exclusão simples não simétrico, o processo dual não é um processo dual *stricto sensu* (cf. Liggett [Lig85]), mas sim, um processo de ramificação, como veremos a seguir. Esta técnica está desenvolvida em De Masi et al. [DMFL86] e Durret and Neuhauser [DN94], para citar alguns.

As duas primeiras seções estão dedicadas a definir e relacionar o processo dual com o processo original. Na terceira seção introduzimos o conceito de processo de ramificação independente e na seção seguinte o comparamos com o dual, fazendo o acoplamento entre eles. Na Seção 3.5, obtemos os resultados para o processo dos monômeros usando as propriedades da dualidade.

3.1 Processo de ramificação dual (PRD)

Consideremos o processo η_t com gerador L_m^\emptyset definido como o gerador L_m dado por (1.2) com a condição $A^N(y) = \emptyset$, para todo $y \in \mathbb{Z}$; ou seja, η_t é um processo de exclusão simples em \mathbb{Z}^2 com taxa $p(x, z)$ como em (1.3).

Seja $T \in \mathbb{R}^+$, fixo. Dada uma configuração η_0 no instante inicial e uma realização em $[0, T]$ das marcas N^ν e N^h definidas na Seção 1.1, queremos saber se existe uma partícula

em um sítio x no instante $t = T$. Para tal precisamos conhecer o estado inicial dos sítios que interferem em $\eta_T(x)$ e de que modo eles interferem. Isto será feito através da construção do processo dual a η_t .

Tomemos o sítio x e observemos a primeira marca antes de T , em t_1 digamos. Se esta marca for do tipo N^h (tentativa de salto horizontal) entre x e $\tilde{x} = x + \alpha e_1$ ($\alpha = -1, 1$), então x terá uma partícula no instante T se e somente se $\eta_{t_1^-}(\tilde{x}) = 1$. Sigamos então as marcas de \tilde{x} anteriores a t_1 . Se a primeira marca, em t_2 , for do tipo N^h , procedemos como antes. Se for um salto vertical (marca N^v) de \tilde{x} para $\tilde{x} + \alpha e_2$, então $\eta_T(x) = 1$ se e só se $\eta_{t_2^-}(\tilde{x}) = \eta_{t_2^-}(\tilde{x} + \alpha e_2) = 1$. Se for um salto de $\tilde{x} + \alpha e_2$ até \tilde{x} , $\eta_T(x) = 0$ sse $\eta_{t_2^-}(\tilde{x}) = \eta_{t_2^-}(\tilde{x} + \alpha e_2) = 0$. Em ambos os casos, precisamos agora conhecer as marcas anteriores a t_2 tanto em \tilde{x} quanto em $\tilde{x} + \alpha e_2$; ou seja, em uma marca do tipo N^v , aparece mais um sítio afetando $\eta_T(x)$, dito de outra maneira, nas marcas N^v , o processo dual se ramifica. Continuamos com este procedimento até o instante $t = 0$. Observemos que novos “ramos” podem aparecer em sítios já ocupados por um ramo mais velho; neste caso, claramente, ambos os ramos se movem juntos.

Sabemos que, com probabilidade 1, somente um número finito de ramos pode aparecer em um intervalo finito de tempo, já que o processo N^v tem taxa 1. Assim, poderemos determinar o valor de $\eta_T(x)$ conhecendo a ramificação completa de x em $[0, T]$ e a configuração η_0 no conjunto finito determinado por ela no instante $t = 0$, como exemplificaremos a seguir.

A Figura 3.1 (i) representa uma realização das marcas em $\mathbb{Z}^2 \times [0, T]$, com o tempo t indo para baixo. Os saltos horizontais são representados por um elo entre os sítios, e as tentativas dos saltos verticais por uma seta no sentido da tentativa.

Suponhamos que os sítios $x + e_2$, $x + e_1$ e $x + e_1 - e_2$ estejam originalmente ocupados por monômeros. Neste caso, seguindo as marcas, teremos que no instante $t = T$, os sítios ocupados serão x , $x + e_1$ e $x + 2e_1$, se não houver nenhuma outra interação além das da figura.

O processo de ramificação ilustrado na Figura 3.1 (ii), é o que aparece no dual de η_t , ao estudar o sítio x , com a realização da Figura 3.1 (i). Neste caso, os sítios que determinam o estado em x no instante T são x , $x + e_2$, $x + 2e_1$ e $x + e_1 - e_2$.

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DO PRD

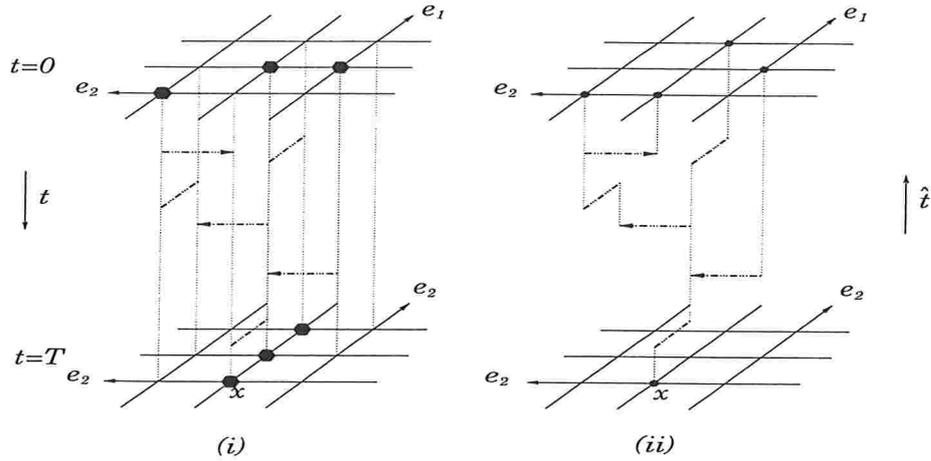


Figura 3.1: (i) uma realização do processo η_t em $[0, T]$; (ii) processo dual de η_t , R_i , para a realização anterior.

Para estudar a correlação entre n sítios, devemos olhar n processos de ramificação que interagem entre si; esta interação ocorre nas marcas entre os ramos dos diversos processos.

Chamemos $D_{\hat{0}} = D^n$, o vetor em $(\mathbb{Z}^2)^n$ dos n sítios diferentes cujo estado no instante T queremos conhecer. Denotamos por $D_{\hat{t}}$ a componente espacial do processo de ramificação dual (PRD) e a definimos como o vetor cujas coordenadas são os sítios no instante $\hat{t} = T - t$, $t \in [0, T]$, que determinam o estado dos sítios em $D_{\hat{0}}$.

A fim de relacionarmos $D_{\hat{0}}$ com $D_{\hat{t}}$, denotaremos por x_i , $i = 1 \dots, n$, cada coordenada de D^n e a interpretaremos como a posição no instante $\hat{0}$ de uma partícula, que chamaremos i -partícula. Estas partículas obedecerão a seguinte dinâmica.

A cada par de sítios vizinhos $x, z \in \mathbb{Z}^2$, associamos independentemente um dos processos de Poisson a seguir:

- um processo de taxa 2γ , $N_{x,z}^h$, se $x - z = \pm e_1$; e
- se $x - z = \pm e_2$, um processo $N_{x,z}^v$ com taxa $p + q = 1$, que com probabilidade p escolhe o sentido e_2 , e com q escolhe o sentido $-e_2$.

Se uma partícula encontra uma marca do tipo N^h , ela simplesmente muda de sítio; se a marca for do tipo N^v e ela estiver no sítio x (respectivamente, z), então uma nova partícula é criada no sítio z (resp., x) que começa a seguir as marcas que encontrar no caminho, independentemente da partícula do sítio x (resp., z). Se uma partícula for criada em um sítio ocupado por outra partícula, ambas passam a seguir as mesmas marcas horizontais para se moverem, e é criada apenas uma nova partícula por cada marca vertical que elas encontrarem.

Para todo $\hat{t} \geq 0$, definimos as seguintes variáveis aleatórias

$\mathcal{N}_{\hat{t}}$: o número de partículas no instante \hat{t} ;

\hat{T}_l : instante da l -ésima marca do tipo N^v em alguma das partículas existentes em \hat{T}_{l-1} ,
 $\hat{T}_0 = \hat{0}$;

$\mathcal{M}_{\hat{t}} = \mathcal{N}_{\hat{t}} - n$: número total de marcas do tipo N^v até o instante \hat{t} ;

$\mathcal{T}_{\hat{t}} = \{\hat{T}_l : l = 1, \dots, \mathcal{M}_{\hat{t}}\}$.

Chamaremos $n + l$ a partícula criada em \hat{T}_l , $l \geq 1$. Definimos $x_i(\hat{t})$ como a posição no instante \hat{t} da i -partícula, e $D_{\hat{t}} = (x_1(\hat{t}), \dots, x_{\mathcal{N}_{\hat{t}}}(\hat{t}))$, a posição de todas as partículas existentes no instante \hat{t} . Chamaremos a i -partícula de primeira classe (respectivamente, segunda classe) se $x_i(\hat{T}_{i-n}) \neq x_k(\hat{T}_{i-n})$, para todo $k < i$ (resp., se $x_i(\hat{T}_{i-n}) = x_k(\hat{T}_{i-n})$, para algum $k < i$), $i > n$. As n primeiras partículas são todas de primeira classe.

Assim, no exemplo da Figura 3.1, temos $D_{\hat{0}} = (x)$ e $D_{\hat{T}} = (x + 2e_1, x + e_1 - e_2, x + e_2, x)$, e que todas as partículas são de primeira classe.

As partículas $1, \dots, n$ serão chamadas de primeira geração de cada uma das n famílias. Notemos que as partículas de segunda classe podem pertencer a mais de uma família. Dado $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\hat{t} \geq 0$, definimos

$\mathcal{N}_{\hat{t}}(i)$: o número de partículas da família i no instante \hat{t} ;

$\mathcal{M}_{\hat{t}}(i)$: número total de marcas do tipo N^v até o instante \hat{t} , na família i ;

$\mathcal{T}_{\hat{t}}(i) = \{\hat{T}_l(i) : l = 1, \dots, \mathcal{M}_{\hat{t}}(i)\}$,

$I_{\hat{t}}(i)$: conjunto de índices das partículas pertencentes à família i no instante \hat{t} ;

$D(i, \hat{t}) = (x_{\alpha}(\hat{t}), \alpha \in I_{\hat{t}}(i))$.

Podemos ver que $|I_{\hat{t}}(i)| = \mathcal{N}_{\hat{t}}(i)$ e que $\mathcal{N}_{\hat{t}} \leq \sum_i \mathcal{N}_{\hat{t}}(i)$, onde a desigualdade estrita ocorre se e só se as partículas de segunda classe pertencentes a mais de uma família tiverem descendentes.

As variáveis definidas até agora, $\mathcal{N}_{\hat{t}}$, $\mathcal{T}_{\hat{t}}$ e $D(\hat{t})$, nos dizem o número de partículas existentes no instante \hat{t} , o momento em que elas foram criadas e sua posição em \hat{t} ; mas não dizem nada sobre a genealogia da ramificação.

Para cada i -partícula do instante \hat{t} , $i = n + 1, \dots, \mathcal{N}_{\hat{t}}$, definimos a variável $F_i \in \{0, 1\}^{i-1}$, que entrega o(s) índice(s) da(s) partícula(s) geradora(s) de i . No nosso exemplo, para $\hat{t} = \hat{T}$, $F_2^{-1}(1) = \{1\}$, $F_3^{-1}(1) = \{1\}$, $F_4^{-1}(1) = \{3\}$.

Definimos a história da ramificação até o instante \hat{t} , $\mathcal{A}_{\hat{t}}$, como o vetor

$$\mathcal{A}_{\hat{t}} = (\mathcal{T}_{\hat{t}}, N_{x_k(\hat{T}_{k-n}), x_j(\hat{T}_{k-n})}^v, j \in F_k, k = n + 1, \dots, \mathcal{N}_{\hat{t}}).$$

No exemplo que estamos seguindo,

$$\mathcal{A}_{\hat{T}} = (\{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3\}, e_2(x_2(\hat{t}_1), x_1(\hat{t}_1)), e_2(x_3(\hat{t}_2), x_1(\hat{t}_2)), -e_2(x_4(\hat{t}_3), x_3(\hat{t}_3))).$$

Com $D(\hat{t}) \in \cup_{i \geq 1} (\mathbb{Z}^2)^i$ construído acima, definimos o PRD, $R_{\hat{t}}$, como $R_{\hat{t}} = (\{D(s)\}_{s \leq \hat{t}}, \mathcal{A}_{\hat{t}})$.

Denotamos por $\mathcal{P}_{D^n}^\gamma$ (ou simplesmente \mathcal{P}_γ) a lei de $R_{\hat{t}}$ com estado inicial D^n , e por $\mathbb{E}_{D^n}^\gamma$ (ou \mathbb{E}_γ) a esperança com relação à medida $\mathcal{P}_{D^n}^\gamma$, definidas no espaço de probabilidade resultante do produto dos processos de Poisson $\{N_{x,y}^h(s), N_{x,y}^v(s), x, y \in \mathbb{Z}^2, s \leq \hat{t}\}$.

3.2 Dualidade entre η_t e o PRD

Fixemos n sítios em \mathbb{Z}^2 , $D^n = (x_1, \dots, x_n)$, $T \geq 0$, $\eta_0 \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ e uma realização de $\{N_t^v\}$ e $\{N_t^h\}$, $t \in [0, T]$.

A partir de D^n , de T e da realização das marcas horizontais e verticais, construímos o processo $R_{\hat{t}}$, como anteriormente. Estabelecemos que as partículas em $x_i(\hat{T})$, $i \in \{1, \dots, N_{\hat{T}}\}$, assumem o estado $\eta_0(x_i(\hat{T}))$, $\mathcal{N}_{\hat{T}} = N_{\hat{T}}$. Agora refazemos o caminho das ramificações no sentido original do tempo.

Cada vez que uma partícula encontrar uma marca horizontal, ela trocará de posição, seguindo a marca, sem interferir em seu estado. Cada vez que aparecer uma marca vertical entre duas ramificações, observamos o comportamento seguinte. Sejam k e h os índices das partículas de primeira classe conectadas por N^v em \hat{T}_l , digamos. Se a marca for $x_h(\hat{T}_l) - x_k(\hat{T}_l)$ (de k para h) e $\eta_{\hat{T}_l^-}(x_k(\hat{T}_l^+)) = 1$ e $\eta_{\hat{T}_l^-}(x_h(\hat{T}_l^+)) = 0$, então os estados da k - e da h -partícula trocam entre si no instante \hat{T}_l (assim como o estado das partículas de segunda classe que as acompanham); nos demais casos, os estados das partículas não mudam.

Se a partícula criada em \hat{T}_l for de primeira classe, então ela desaparece em \hat{T}_l^- ; se for de segunda classe, então em \hat{T}_l^- temos duas partículas de segunda classe a menos, nada acontecendo com as partículas de primeira classe envolvidas.

Com a descrição acima, o estado de todas as partículas fica bem especificado no intervalo de tempo $[0, T]$.

Para cada i -partícula da primeira geração, $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos a i -ramificação ou i -família como

$$R_i(i) = (\{(D_j(s))_{j \in I_s(i)}\}_{s \leq \hat{t}}, \mathcal{A}_i(i)),$$

e usamos a notação $\eta_0(D_i(\hat{T}))$ para o vetor $(\eta_0(x_j(\hat{T})))_{j \in I_{\hat{T}}(i)} \in \{0, 1\}^{\mathcal{M}_{\hat{T}}(i)}$.

Usando o critério descrito para a mudança dos estados das partículas, podemos chegar até o valor do estado na partícula raiz de cada família no instante T . Denotaremos a função que nos entrega tal valor por $H(\eta_0(D_i(\hat{T})), R_{\hat{T}}(i))$. No nosso exemplo da Figura 3.1, $H(\eta_0(D_1(\hat{T})), R_{\hat{T}}(1)) = 1$ se e somente se $\eta_0(x + e_1 - e_2) = 1$ ou $\eta_0(x + 2e_1) = \eta_0(x) = \eta_0(x + e_2) = 1$. Um tratamento mais extenso em processos de ramificação está dado em [Har89], Capítulo 6.

Teorema 3.2.1 (Dualidade) *Para qualquer $T \geq 0$, $D^n = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^2)^n$, e $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, existe uma probabilidade conjunta, \mathbb{P}_γ , dos processos $(D(\cdot, \hat{t}), \mathcal{A}_i)$ e $\eta(\cdot, t)$ com configuração inicial D^n e η , respectivamente, tal que*

$$\prod_{i=1}^n \eta(x_i, T) = \prod_{i=1}^n H(\eta_0(D(i, \hat{T})), \mathcal{A}_{\hat{T}}(i)) \quad , \quad \mathbb{P}_\gamma - \text{quase certamente.} \quad (3.1)$$

Prova.

Faremos a construção de $\{\eta_t, t \geq 0\}$ e $\{(D(\hat{t}), \mathcal{A}_i), \hat{t} \geq 0\}$ no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P}_\gamma)$, definido como o produto direto entre $\prod_{x,z \in \mathbb{Z}^2} (\Omega_{x,z}^h, \mathbb{P}_{x,z}^h)$ e $\prod_{x,z \in \mathbb{Z}^2} (\Omega_{x,z}^v, \mathbb{P}_{x,z}^v)$, onde $(\Omega_{x,z}^h, \mathbb{P}_{x,z}^h)$ é um processo de Poisson com taxa γ para cada $x \in \mathbb{Z}^2$, $z = x + \alpha e_1$, $\alpha = -1, 1$, e $(\Omega_{x,z}^v, \mathbb{P}_{x,z}^v)$ é um processo de Poisson com taxa p se $z = x + e_2$, e taxa q se $z = x - e_2$. Usaremos a notação $\omega^h \in \Omega^h$ e $\omega_{x,z}^v \in \Omega_{x,z}^v$. Assumimos que não aparecem duas marcas ao mesmo tempo.

Dado um $\omega \in \Omega$, uma trajetória de $\{\eta_t, 0 \leq t \leq T\}$ está dada pela construção feita no Capítulo 1.

Sejam $T \geq 0$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^2$ fixos. Qualquer $\omega \in \Omega$ dado determina um caminho, $\tilde{\omega}$, do processo de ramificação, primeiramente restringindo ω a $[0, T]$ e depois revertendo o tempo, $\hat{t} = T - t$, como fizemos acima. Observemos que o estado $\eta_T(x_i)$ depende dos estados no instante $t = 0$ dos sítios $x_j(\hat{T})$, $j \in I_{\hat{T}}(i)$ e da história da ramificação $R_{\hat{T}}(i)$. Esta dependência é a que vem dada pela função H .

Agora que já estabelecemos a dualidade, simplificaremos a notação do processo $R_{\hat{T}}$ para R_t simplesmente.

3.3 Processo de ramificação independente (PRI)

Na construção feita, vimos que R_t não é um processo de ramificação independente, ou seja, um processo no qual as partículas se movem de acordo com uma exclusão simples e criam novas partículas independentemente umas das outras. No entanto, pode-se provar que o comportamento na coordenada vertical de ambos os processos é o mesmo salvo termo de ordem $\gamma^{-1/2}$. Denotaremos o processo independente definido a seguir de R_t^0 .

Para qualquer inteiro $n \geq 1$ e qualquer vetor $D^n = (x_1, \dots, x_n)$, a i -partícula independente começa seu movimento em $x_i \in \mathbb{Z}^2$, $i = 1, \dots, n$. Consideremos a família de processos de Poisson, $\{N_{x,y}^{0,i}\}_{i \geq 1}$, com a mesma distribuição dos $N_{x,y}$, e independentes entre si e com relação a $N_{x,y}$. O processo R_t^0 usa as marcas $N_{x,y}$ e $N_{x,y}^0$ da seguinte maneira.

Todas as partículas usam as marcas N^h para se moverem horizontalmente e as marcas N^v para gerar novas partículas; a menos que exista mais de uma partícula no mesmo sítio. Isto pode acontecer quando uma nova partícula é criada em um sítio já ocupado. Neste caso, a primeira partícula continua seguindo as marcas N^v , enquanto que cada partícula que chegar depois dela, i , digamos, passa a seguir as marcas $N^{\cdot,0,i}$ desse momento em diante.

Chamamos i -família independente, o processo de ramificação independente que começa em x_i no instante zero e, para todo $t \geq 0$, denotaremos por $x_k^0(t)$ a posição no instante t da k -partícula independente e por $D^0(t) = (x_k^0(t), k = 1, \dots, \mathcal{N}_t^0)$. Definimos \mathcal{A}_t^0 e $\mathcal{A}_t^0(i)$ da mesma forma que antes.

A diferença fundamental entre o PRD e o PRI é que neste, todas as partículas se comportam como partículas de primeira classe. Notemos também que não é possível definir uma função H , já que o PRI não é o dual de um processo de exclusão. No entanto, podemos comparar a distribuição de ambos os processos, como veremos na seguinte seção.

3.4 Acoplamento entre o PRD e o PRI

Construímos o acoplamento entre o PRD e o PRI, realizando ambos os processos no espaço de probabilidade gerado pelo produto dos processos de Poisson $\{N_{x,y}(t), N_{x,y}^{0,i}(t), x, y \in \mathbb{Z}^2, i \in \mathbb{N}, \cdot \in \{h, v\}, t \geq 0\}$, de modo que as distribuições marginais sejam as esperadas.

Pela definição do PRI nos instantes $T_l^0 \in \mathcal{T}_l^0$, $l = 1, \dots, \mathcal{M}_T^0$, uma partícula independente é criada por outra partícula independente, digamos k . Por outro lado, uma partícula (dual) será criada no instante T_l^0 se e somente se a k -partícula (dual) for uma partícula de primeira classe. Dado um instante $T > 0$ e uma realização das marcas, tomamos $D(0) = D^0(0)$ e indexamos as partículas de modo que as \mathcal{N}_T partículas independentes e duais tenham os mesmos índices dados de acordo com a ordem em que elas são criadas. As $\mathcal{N}_T^0 - \mathcal{N}_T$ partículas independentes excedentes têm índice diferente das outras.

Observemos que a k -partícula dual e a k -partícula independente se movem juntas, exceto quando a k -partícula dual for uma partícula de segunda classe, pois então ela se move de acordo com a correspondente partícula de primeira classe e não de forma independente. No entanto, a probabilidade de, num dado instante fixo, T_l , criar uma nova partícula em um sítio já ocupado é dominada pela probabilidade de que um passeio aleatório simples esteja nesse sítio no instante T_l . No nosso caso, tal passeio tem taxa γ , logo essa probabilidade é da ordem de $(\gamma T_l)^{-1/2}$. De fato, temos o seguinte resultado.

Lema 3.4.1 *No contexto acima, dado $T > 0$, consideremos o evento*

$$\mathcal{C}(T) = \mathbf{1}\{ \text{para todo } k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}, k \text{ é uma partícula de primeira classe} \}.$$

Então existe $d = d(T) > 0$ tal que

$$\mathbb{E}_\gamma(\mathcal{C}(T)) \geq 1 - d\gamma^{-1/2}.$$

Prova.

Para provar o lema, usaremos os seguintes eventos para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j}(T) &= \mathbf{1}\{ \text{existem somente duas partículas de segunda classe, } \tilde{\alpha} \in I_T(i) \text{ e } \tilde{k} \in I_T(j) : \\ &\quad x_{\tilde{\alpha}}(T) = x_k(T), x_\alpha(T) = x_{\tilde{k}}(T), \text{ onde } \alpha \text{ e } k \text{ são as correspondentes} \\ &\quad \text{partículas de primeira classe que geram } \tilde{\alpha} \text{ e } \tilde{k}, \text{ respectivamente} \} \text{ e} \\ \mathcal{B}(T) &= \mathbf{1}\{ \text{existem mais de duas partículas de segunda classe} \}. \end{aligned}$$

Podemos escrever o conjunto \mathcal{C} como segue

$$1 - \mathcal{C}(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathcal{B}_{i,j}(T) + \mathcal{B}(T).$$

A seguir provaremos que existe um número positivo $d = d(T) > 0$ que satisfaz

$$\mathbb{E}_\gamma(\mathcal{B}_{i,j}(T)) \leq d\gamma^{-1/2} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.2)$$

$$\mathbb{E}_\gamma(\mathcal{B}(T)) \leq d\gamma^{-1}, \quad (3.3)$$

obtendo assim a desigualdade desejada.

Denotemos por $\hat{\mathbb{E}}(\cdot)$ a esperança com relação à lei de \mathcal{N}_T , $\{T_l, l = 1, \dots, \mathcal{M}_T\}$, e por $\mathbb{E}_\gamma^M(\cdot)$ a esperança com relação à lei do PRD condicionada a \mathcal{N}_T , $\{T_l, l = 1, \dots, M\}$, com $\mathcal{M}_T = M$, ou seja, condicionada ao número de novas partículas no instante T .

Observemos que para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}_\gamma(\mathcal{B}_{i,j}(T)) \leq \hat{\mathbb{E}} \left[\sum_{\substack{\alpha \in I_T(i), k \in I_T(j) \\ \alpha \neq k}}^{\mathcal{N}_T} \mathbb{E}_\gamma^M \mathbf{1}\{x_\alpha(T_M) = x_{\tilde{k}}(T_M), x_{\tilde{\alpha}}(T_M) = x_k(T_M)\} \right],$$

onde $\tilde{\alpha}$ e \tilde{k} são as partículas de segunda classe e α e k suas respectivas “progenitoras”; lembremos que $\tilde{\alpha}$ e \tilde{k} são criadas na mesma marca. Para todos $\alpha, k, \tilde{\alpha}, \tilde{k} \in \{1, \dots, n + M\}$, podemos escrever a esperança dentro da soma, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\gamma^M \mathbf{1}\{x_\alpha(T_M) = x_{\tilde{k}}(T_M), x_{\tilde{\alpha}}(T_M) = x_k(T_M)\} \\ & \leq \mathbb{E}_\gamma^M \mathbf{1}\{|(x_\alpha(T_{M-1}) - x_k(T_{M-1}))_2| = 1\} P^\gamma(\alpha, k, M) \\ & \quad + \mathbb{E}_\gamma^M \mathbf{1}\{x_\alpha(T_{M-1}) = x_{\tilde{k}}(T_{M-1}), x_{\tilde{\alpha}}(T_{M-1}) = x_k(T_{M-1})\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $P^\gamma(\alpha, k, M)$ é a probabilidade que duas partículas começando em $x_\alpha(T_{M-1})$ e $x_k(T_{M-1})$ e movendo-se por exclusão com intensidade γ estejam a distância 1 no instante $T_M - T_{M-1}$ sabendo que esses sítios iniciais estão em linhas horizontais vizinhas. Fazemos esta restrição, pois lembremos que as partículas de segunda classe só aparecem nas marcas verticais. Com isto temos duas realizações independentes do mesmo processo de exclusão simétrico em \mathbb{Z} , com uma partícula marcada cada um, que chamaremos para efeito dos cálculos de Y e \tilde{Y} , começando em $x_\alpha(T_{M-1})$ e $x_k(T_{M-1})$, respectivamente, e queremos que elas estejam no mesmo sítio em $T_M - T_{M-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} P^\gamma(\alpha, k, M) &= \mathbb{P}\left(Y_{x_\alpha(T_{M-1})}(T_M - T_{M-1}) = \tilde{Y}_{x_k(T_{M-1})}(T_M - T_{M-1})\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left[Y_{x_\alpha(T_{M-1})} - \tilde{Y}_{x_k(T_{M-1})}\right](T_M - T_{M-1}) = 0\right) \\ &\leq b \gamma^{-1/2} (T_M - T_{M-1})^{-1/2}, \quad b \text{ constante.} \end{aligned}$$

A última desigualdade provém do fato de que o processo $Y_{x_\alpha(T_{M-1})} - \tilde{Y}_{x_k(T_{M-1})}$ se comporta como um passeio aleatório simétrico de taxa γ ; e, portanto, a probabilidade de estar em zero depois de um tempo $T_M - T_{M-1}$ é proporcional a $(\gamma(T_M - T_{M-1}))^{-1/2}$.

Iterando a equação (3.4) até o instante 0 e aplicando a majoração anterior, temos

$$\mathbb{E}_\gamma(B_{i,j}(T)) \leq b \gamma^{-1/2} \hat{\mathbb{E}} \left[\mathcal{N}_T^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{N}_T-1} (T_{l+1} - T_l)^{-1/2} \right].$$

Lembremos que os incrementos $T_{l+1} - T_l$ têm distribuição exponencial de parâmetro 1 e são independentes entre si e com relação a \mathcal{N}_T . Assim, para cada $l \in \{0, \dots, M-1\}$,

$$P((T_{l+1} - T_l)^{-1/2} > t) = P(T_{l+1} - T_l < t^{-2}) = 1 - e^{-\frac{1}{t^2}}$$

e

$$E(T_{l+1} - T_l)^{-1/2} = \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{t^2}}) dt = \pi^{1/2} < \infty.$$

Por independência de $T_{l+1} - T_l$ e \mathcal{N}_T , para todo $l \in \{0, \dots, \mathcal{N}_T - 1\}$, e dado que $\mathbb{E}(\mathcal{N}_T) = n + T$, temos finalmente

$$\hat{\mathbb{E}} \left[\mathcal{N}_T^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{N}_T-1} (T_{l+1} - T_l)^{-1/2} \right] \leq \hat{b}(n + T)^3 < \infty,$$

o que nos dá (3.2).

Para mostrar (3.3), notemos que temos o limitante

$$\mathbb{E}_\gamma(\mathcal{B}(T)) \leq \hat{\mathbb{E}} \left[\sum_{\substack{\alpha_i, k_i, \bar{\alpha}_i, \bar{k}_i=1 \\ \alpha_i \neq k_i, \bar{\alpha}_i \neq \bar{k}_i}}^{\mathcal{N}_T} \mathbb{E}_\gamma^M \mathbf{1}\{x_{\alpha_i}(T_M) = x_{\bar{k}_i}(T_M), x_{\bar{\alpha}_i}(T_M) = x_{k_i}(T_M), i = 1, 2\} \right]$$

e que nele podemos aplicar o mesmo raciocínio que usamos para (3.2).

*

Corolário 3.4.2 *Os processos R_t^γ e $R_t^{0,\gamma}$ têm mesma distribuição, quando $\gamma \rightarrow \infty$.*

Prova.

Como havíamos observado antes, as diferenças entre R_t^γ e $R_t^{0,\gamma}$ aparecem como nascimento de partículas de segunda classe. Mas pelo lema anterior, a probabilidade de ter partículas de segunda classe vai para zero com $\gamma \rightarrow \infty$, e daqui o corolário.

*

3.5 Comportamento assintótico dos monômeros

Em cada reta horizontal, $Y = y$, as partículas do processo $\{R_t^{0,\gamma}\}_t$ que nascem em um sítio já ocupado, se movem de forma independente de acordo com um passeio aleatório simétrico unidimensional. As que nascem em sítios vazios, têm a dinâmica de passeios aleatórios simétricos unidimensionais e que interagem por exclusão. Como a taxa de nascimento é limitada igual a 1, para todo γ , temos que em um intervalo finito de tempo, haverá um número finito dessas partículas. O comportamento assintótico (em t) destes passeios interagentes foi estudado e comparado com a dinâmica de partículas independentes movendo-se simetricamente em Ferrari et al. [FGL00].

Assumamos que inicialmente os monômeros estão distribuídos de acordo com uma medida produto invariante por translações horizontais, não invariante para a dinâmica vertical, ν .

Proposição 3.5.1 *Seja η_0 uma configuração distribuída de acordo com a medida produto ν e fixemos $t \geq 0$ e $n \geq 1$. Para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^2$, diferentes entre si,*

$$\left| \mathbb{E}_\gamma^\nu \left(\prod_{i=1}^n \eta(x_i, t) \right) - \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_\gamma^\nu (\eta(x_i, t)) \right| \rightarrow 0 \quad , \quad \gamma \rightarrow \infty \quad ,$$

onde \mathbb{E}_γ^ν é a esperança \mathbb{E}_γ com a condição inicial dada por ν .

Prova.

Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^2$ diferentes entre si. Aplicando a fórmula de dualidade dada por (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\gamma \left(\prod_{i=1}^n \eta(x_i, t) = 1 \right) &= \mathbb{P}_\gamma \left(\prod_{i=1}^n H(\eta_0(D(i, \hat{t})), \mathcal{A}_i(i)) = 1 \right) \\ &= \sum_{\omega} \mathbb{P}_\gamma(\omega) \nu \left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j_i=1}^{J_i} \{ \eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \}}_{D(\omega)} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde, para cada família i , $\alpha_{i_{j_i}} \in \{0, 1\}^{N\hat{t}^{(i)}}$ depende de ω e é escolhido de modo a ter uma partição do espaço de probabilidade tal que $\eta(x_i, t) = 1$. Por exemplo, para a realização da Figura 3.1, temos $J_1 = 2$ e

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1_1} &= (\cdot, 1, \cdot, \cdot) && \Leftrightarrow \eta_0(x + e_1 - e_2) = 1 \\ \alpha_{1_2} &= (1, 0, 1, 1) && \Leftrightarrow \eta_0(x + 2e_1) = \eta_0(x) = \eta_0(x + e_2) = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \eta(x, T) = 1.$$

Podemos reescrever $\nu(D(\omega))$ como

$$\nu(D(\omega)) = \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \nu \left(\eta_0(D(1, \hat{t}) = \alpha_{1_{j_1}}, \dots, \eta_0(D(n, \hat{t}) = \alpha_{n_{j_n}}) \right). \quad (3.6)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x_i, t)) &= \prod_{i=1}^n \nu \left(\bigcup_{j_i=1}^{J_i} \{ \eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{j_i=1}^{J_i} \nu \left(\eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \right) \\ &= \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \prod_{i=1}^n \nu \left(\eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Fazendo a diferença entre (3.5) e (3.7), trajetória a trajetória, e usando (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{P}_\gamma \left(\prod_{i=1}^n \eta(x_i, t) = 1 \right) - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\gamma(\eta(x_i, t) = 1) \right| \\ &= \sum_{\omega} \mathbb{P}_\gamma(\omega) \left| \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \nu \left(\eta_0(D(1, \hat{t}) = \alpha_{1_{j_1}}, \dots, \eta_0(D(n, \hat{t}) = \alpha_{n_{j_n}}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \prod_{i=1}^n \nu \left(\eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \right) \right| \\ &= \sum_{\omega \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_\gamma(\omega) \left| \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \nu \left(\eta_0(D(1, \hat{t}) = \alpha_{1_{j_1}}, \dots, \eta_0(D(n, \hat{t}) = \alpha_{n_{j_n}}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j_n=1}^{J_n} \dots \sum_{j_1=1}^{J_1} \prod_{i=1}^n \nu \left(\eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \right) \right|, \end{aligned}$$

onde \mathcal{S} é o conjunto das realizações que tem partículas de segunda classe entre ramas de famílias diferentes. Vejamos que isto acontece porque quando não há este tipo de interação entre as famílias, o primeiro termo pode ser escrito simplesmente como o produto

$$\nu \left(\eta_0(D(1, \hat{t}) = \alpha_{1_{j_1}}, \dots, \eta_0(D(n, \hat{t}) = \alpha_{n_{j_n}}) \right) = \prod_{i=1}^n \nu \left(\eta_0(D(i, \hat{t})) = \alpha_{i_{j_i}} \right).$$

Finalmente, pelo Lema 3.4.1, $\mathbb{P}_\gamma(\mathcal{S}) \rightarrow 0$, quando $\gamma \rightarrow \infty$, e como a diferença entre a interseção e o produto permanece limitada para todo γ , temos o resultado estabelecido pela proposição.

*

Lema 3.5.2 A função $u(x, t) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x, t))$ satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -p u(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) - q u(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) \\ &\quad + p u(x - e_2, t)(1 - u(x, t)) + q u(x + e_2, t)(1 - u(x, t)). \end{aligned}$$

Prova.

Escrevendo a diferença

$$\begin{aligned} &u(x, t + h) - u(x, t) \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ p h \mathbb{E}_\gamma^\nu[\eta(x - e_2)(1 - \eta(x, t))] + q h \mathbb{E}_\gamma^\nu[\eta(x + e_2)(1 - \eta(x, t))] + o(h) \right. \\ &\quad \left. - p h \mathbb{E}_\gamma^\nu[\eta(x, t)(1 - \eta(x + e_2, t))] - q h \mathbb{E}_\gamma^\nu[\eta(x, t)(1 - \eta(x - e_2, t))] + o(h) \right\} \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left\{ p h \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x - e_2)) \mathbb{E}_\gamma^\nu(1 - \eta(x, t)) + q h \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x + e_2)) \mathbb{E}_\gamma^\nu(1 - \eta(x, t)) \right. \\ &\quad \left. - p h \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x, t)) \mathbb{E}_\gamma^\nu(1 - \eta(x + e_2, t)) - q h \mathbb{E}_\gamma^\nu(\eta(x, t)) \mathbb{E}_\gamma^\nu(1 - \eta(x - e_2, t)) + o(h) \right\} \\ &= p h u(x - e_2)(1 - u(x, t)) + q h u(x + e_2)(1 - u(x, t)) \\ &\quad - p h u(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) - q h u(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) + o(h), \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, t + h) - u(x, t)}{h} &= -p u(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) - q u(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) \\ &\quad + p u(x - e_2, t)(1 - u(x, t)) + q u(x + e_2, t)(1 - u(x, t)). \end{aligned}$$

*

Prova do Teorema 1.3.1

A Proposição 3.5.1 nos garante que no limite $\gamma \rightarrow \infty$ a distribuição dos monômeros se comporta como uma medida produto, em cada instante t , cuja densidade, pelo Lema 3.5.2, satisfaz a equação de diferenças finitas dada no enunciado do teorema.

*

3.6 Comportamento assintótico da barra

Todos os resultados da seção anterior para o sistema apenas com os monômeros continuam válidos para o processo adicionado do polímero.

Consideremos o polímero fixo a uma altura y . Notemos que as tentativas de saltos verticais dos monômeros até a barra funcionam como tentativas de saltos a um sítio

ocupado por outro monômero. De fato, se temos uma marca indo do sítio $(x_1, y \pm 1)$ a (x_1, y) , com $x_1 \in \{1, \dots, N\}$, no processo dual, definido na Seção 3.1, nasce uma partícula com estado zero e que não segue as marcas N enquanto o polímero estiver nessa posição. Já no PRI, que não tem o polímero, nesta tentativa de salto nasce uma partícula independente no sítio (x_1, y) , que pode estar em outro sítio quando a partícula dual associada tentar saltar novamente.

De maneira análoga à demonstração do Lema 3.4.1, provamos que a probabilidade de uma partícula se encontrar exatamente abaixo ou acima do polímero em um instante t é limitado por $c(\gamma t)^{-1/2}$, com c constante para γ e t . Portanto a probabilidade da ocorrência de um salto vertical sobre o polímero, tende a zero com $\gamma \rightarrow \infty$.

Vejam os que acontece com os saltos até a barra vindos dos sítios $(0, y)$ e $(N + 1, y)$. No processo dual, a partícula não pode pular, ficando no mesmo sítio; já a partícula independente vai para o sítio ocupado pela barra, sem nenhum problema. Quando uma destas duas partículas quiser saltar na vertical, a outra não vai acompanhá-la, pois as marcas foram definidas nos sítios. Isto faria com que o processo de criação dos ramos no processo dual fosse diferente ao do independente. Para evitar tal separação, estabeleceremos que os relógios de Poisson N^v e N^h encontram-se nas partículas e não nos sítios, de modo que o relógio da partícula independente seja o mesmo da partícula dual relacionada. Isto claramente não muda a lei exponencial das marcas, já que o relógio de um par de sítios só era considerado se houvesse uma partícula em um deles, e tanto a partícula de primeira classe quanto a independente usavam as mesmas marcas. Redefinamos os saltos do processo independente da seguinte maneira. Suponhamos que a partícula dual ficou em $(N + 1, y)$ e a independente relacionada com ela saltou para (N, y) . Quando tocar o relógio vertical delas, ambas as partículas gerarão outras em sítios diferentes; a fim de eliminar também esta diferença, criamos as duas novas ramificações no sítio definido pela posição da partícula dual nesse instante. O ponto chave desta definição é que nas linhas imediatamente acima e abaixo do polímero, o processo de nascimento é o mesmo em ambos os processos. Com esta construção, obtemos o seguinte resultado para o processo com o polímero fixo a uma altura y .

Proposição 1.3.2 *Para $y \in \mathbb{Z}$, fixo, seja $\nu^y = \mathbf{1}\{\eta(x) = 0, x \in A^N(y)\}\nu$ a medida produto inicial para o processo com gerador L_m , dado em (1.2), com ν satisfazendo as propriedades dadas no início da Seção 3.5. A família $\mathbb{E}_\gamma^{\nu^y}(\eta(\cdot, t))$ converge fracamente à*

medida produto $\nu_{u(\cdot, t)}$ com densidade $u(\cdot, t)$ satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= [-p u(x, t)(1 - u(x + e_2, t)) + q u(x + e_2, t)(1 - u(x, t))] \mathbf{1}\{x, x + e_2 \notin A^N(y)\} \\ &+ [-q u(x, t)(1 - u(x - e_2, t)) + p u(x - e_2, t)(1 - u(x, t))] \mathbf{1}\{x, x - e_2 \notin A^N(y)\} \end{aligned}$$

com condição inicial ν^y .

Consideremos novamente o comportamento dos monômeros à altura do polímero: enquanto que no PRI os ramos se movem segundo um passeio aleatório simétrico, no PRD as ramificações ficam barradas pelos sítios (N, y) , pelo lado esquerdo, e $(1, y)$, pelo direito. No entanto, depois que o polímero muda de posição, a vibração horizontal faz com que as partículas duais voltem a seguir um passeio aleatório, se comportando como o processo independente: as partículas associadas entre si seguem as mesmas marcas N^h , ainda que defasadas na mesma linha horizontal. O importante é que o comportamento produto dos monômeros descrito na Proposição 3.5.1 continua ocorrendo no limite, de onde concluímos o teorema 1.3.3 enunciado no primeiro capítulo.

Teorema 1.3.3 *Para $y \in \mathbb{Z}$, fixo, seja $\nu_{\rho\lambda}^y \times \delta_y$ a medida produto inicial para o processo (η_t, Y_t^γ) com gerador L , definido em (1.1). Para cada $t \geq 0$, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a família de processos $\{(Y_t^\gamma)_t\}_\gamma$ converge em distribuição ao passeio Z_t com taxas de transição dadas por*

$$Q_t(y, z) := \begin{cases} a(1 - u(y + 1, t))^N & \text{se } z = y + 1 \\ b(1 - u(y - 1, t))^N & \text{se } z = y - 1. \end{cases}$$

onde u satisfaz a equação da proposição anterior.

Exemplo 3.6.1 *Se considerarmos o problema com valor inicial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial[u(1 - u)(p - q)]}{\partial x} = 0,$$

$$u_0(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \geq 0 \\ \rho & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

com $p + q = 1$ e $0 \leq p < q$, obtemos que a velocidade com que se propaga o choque inicialmente na origem é

$$v_s = \frac{\lambda(1 - \lambda)(p - q) - \rho(1 - \rho)(p - q)}{\lambda - \rho} = (p - q)(1 - \rho - \lambda).$$

A solução determinista desta equação com tal condição inicial é $u(x, t) = u_0(x - v_s t)$,

$$u(x, t) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \geq v_s t \\ \rho & \text{se } x < v_s t \end{cases}. \quad (3.8)$$

OBSERVAÇÕES

1. Podemos relacionar choque micro e macroscópico da seguinte maneira. Intuitivamente, seja $R(0)$ tal que a densidade à sua esquerda é ρ e à sua direita é λ . Se esta situação se mantiver para todo t , então concluímos que a velocidade esperada de $R(t)$, i.e., a taxa de salto à direita menos a taxa de salto à esquerda, será

$$\begin{aligned} v_R &= (p(1 - \lambda) + q\lambda) - (q(1 - \rho) + p\rho) \\ &= (p - q)(1 - \rho - \lambda), \end{aligned}$$

que é exatamente a velocidade do choque macroscópico para a equação do Exemplo 3.6.1.

2. Lembremos que a densidade dos monômeros no instante t , satisfaz a equação (1.6), que pode ser vista como a versão discretizada da equação 1.8. No entanto, a solução (3.8) dada no Exemplo 3.6.1 não é solução da equação (1.6). Alguma informação sobre equações de diferenças finitas não lineares pode ser encontrada em Boole [Boo58], p.166-169. Alguns textos-base para estudar melhor a noção de choque são Smoller [Smo83], Lax [Lax72] e Ferrari [Fer91].

3. Observemos que se $\rho = \lambda$, estamos no caso da Seção 1.2.2 de uma distribuição de Bernoulli. O choque $R(t)$, no caso homogêneo, tem velocidade $v = (p - q)(1 - 2\rho)$.

Capítulo 4

Estudo de um passeio não-homogêneo

Com o resultado obtido no capítulo anterior para o movimento do polímero no limite $\gamma \rightarrow \infty$, dado pela equação (1.7), o caminho natural a seguir foi procurar uma solução estacionária para a equação (1.6) e substituí-la em (1.7). Nossa primeira aproximação foi tentar achar uma solução do tipo tangente hiperbólica,

$$u(x, t) = \lambda + (\rho - \lambda) \frac{c(p/q)^{x-vt}}{1 + c(p/q)^{x-vt}},$$

pois ela seria uma extensão natural do caso $\lambda = 1 - \rho = 0$, apresentado na Seção 1.2.1. Esta tentativa falhou, assim como a de encontrar uma solução por meios analíticos, através de métodos para equações de diferenças finitas não lineares (cf. Boole [Boo58], p.166-169).

Decidimos então estudar o passeio como gostaríamos que ele fosse idealmente falando, ou seja, estudamos o passeio com taxas obtidas supondo que ele se move num meio com densidade de monômeros dada pela solução fraca do Exemplo 3.6.1. Assim, temos um passeio, que chamaremos Z_t , não homogêneo no tempo e no espaço, claramente transiente, e cuja diferença com a reta vt nos dá um processo com propriedades interessantes para certos valores dos parâmetros, como recorrência e estacionariedade cíclica (cf. Thorisson [Tho00]).

Na primeira seção construímos a cadeia de Markov Z_t e definimos um tempo de parada que nos será útil para provar o Teorema 1.4.1, sobre estacionariedade, na seção seguinte.

4.1 Construção do Processo Z_t

Sejam $a < b$, $p < q$, com $p + q = 1$, e $\lambda < \rho < 1$ reais positivos e N um inteiro positivo. Consideremos a cadeia de Markov em \mathbb{Z} a tempo contínuo, Z_t , definida pelas taxas de

transição

$$p_t(x, y) = \begin{cases} a_\rho \mathbf{1}\{x < vt - 1\} + a_\lambda \mathbf{1}\{x \geq vt - 1\} & y = x + 1 \\ b_\rho \mathbf{1}\{x \leq vt\} + b_\lambda \mathbf{1}\{x > vt\} & y = x - 1 \\ 0 & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

onde $a_\rho = a(1 - \rho)^N$, $b_\rho = b(1 - \rho)^N$, a_λ e b_λ definidas analogamente, e $v = (p - q)(1 - \rho - \lambda)$. Ou seja, a cada certo tempo determinista, dado por $1/v$, as taxas de transição se transladam uma posição à esquerda, se v for negativo ou à direita se for positivo. Se $v = 0$, $p_t(x, y) = p_0(x, y)$, para todo $t \geq 0$.

Relacionando com o contexto dos capítulos anteriores, podemos interpretar estas taxas como as de um polímero de comprimento N que se move em um meio de monômeros com densidade $u(x, t)$ definida por

$$u(x, t) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \geq vt \\ \rho & \text{se } x < vt \end{cases}.$$

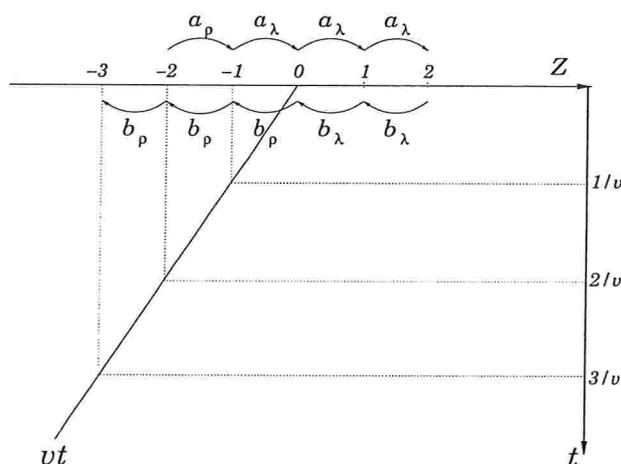


Figura 4.1: Taxas de transição do passeio Z_t .

Graficamente, o que temos são três processos de Poisson em \mathbb{Z} que definem o movimento do passeio: inicialmente nos sítios $z > 0$, colocamos um relógio de Poisson $\{T_n^\lambda\}_{n \geq 1}$ com taxa $a_\lambda + b_\lambda$, dirigindo o salto para a esquerda com probabilidade $b_\lambda / (a_\lambda + b_\lambda)$ ou para a direita com probabilidade complementar; nos sítios 0 e -1 , colocamos um relógio, $\{T_n^{\rho\lambda}\}_{n \geq 1}$, com taxa $a_\lambda + b_\rho$, e probabilidade de salto para a esquerda igual a $b_\rho / (a_\lambda + b_\rho)$ e para a direita, $a_\lambda / (a_\lambda + b_\rho)$; finalmente, nos sítios $z < -1$, definimos o processo $\{T_n^\rho\}_{n \geq 1}$ com taxa $a_\rho + b_\rho$ e probabilidades de salto como as anteriores. A cada intervalo de tempo

de comprimento $1/v$, cada sítio recomeça com um relógio com taxas iguais às do seu vizinho da direita, se v for negativo, ou às do vizinho da esquerda, se v for positivo. Os relógios são independentes entre si.

Chamaremos $\{\tau_k\}_k$ a seqüência crescente de instantes que satisfaz

$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : Z_t = vt\}, k \geq 1,$$

$\tau_0 = 0$, com a convenção que $\tau_k = \infty$ se o conjunto for vazio. Definimos a variável $S_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k \geq 1$, o comprimento do intervalo de tempo entre dois instantes de encontro do passeio e da reta vt .

OBSERVAÇÕES

1. As variáveis S_k , $k \geq 1$, são independentes entre si. De fato, no instante τ_k é quando ocorre a troca de relógios nos sítios, tornando qualquer evento que dependa da informação posterior a τ_k independente do que aconteceu antes, em particular S_n e S_m são independentes entre si, para todos $n \leq k$ e $m > k$. Como isto vale para todo k , temos a afirmação.

2. As variáveis S_k , $k > 1$, têm mesma distribuição, e se $Z_0 = 0$, também S_0 tem a mesma distribuição. Para ver isto, notemos que no instante τ_k , o passeio Z_t se encontra com relação à reta $z = vt$, nas mesmas condições em que ele se encontrava no instante 0, se $Z_0 = 0$, com os mesmos relógios de Poisson, ou taxas de transição, regendo seu movimento.

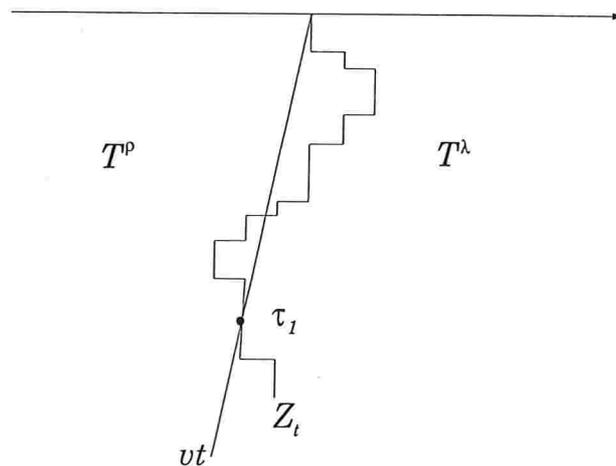


Figura 4.2: Uma realização do passeio Z_t .

Notemos que o passeio Z_t se comporta como um passeio homogêneo em cada uma das regiões: $z > vt$ e $z < vt - 1$ (ver Figura 4.2).

Teorema 4.1.1 Se $a_\lambda - b_\lambda < v < a_\lambda + b_\lambda$, $\mathbb{E}(S_k) < \infty$. Em particular, se $Z_0 = 0$, $\mathbb{E}(\tau_1) < \infty$.

Prova.

Faremos a prova em dois passos. Primeiro, supondo que $Z_0 > 0$, provaremos que o passeio atravessa a reta vt em um tempo esperado finito. O mesmo ocorre se $Z_0 < -1$ em relação à reta $vt - 1$.

CONDIÇÃO INICIAL $Z_0 > 0$

Definamos o tempo de parada $\xi^+ = \inf\{t \geq 0 : Z_t \leq vt\}$. Observemos que Z_t segue o relógio $\{T_n^\lambda\}_{n \geq 1}$ até o instante ξ^+ , logo podemos tratá-lo como um passeio homogêneo com taxa $a_\lambda + b_\lambda$, para $t < \xi^+$.

Lema 4.1.2 Nas condições acima, se $t < \xi^+$

$$\mathbb{E}Z_t = (a_\lambda - b_\lambda)t \quad e \quad \text{Var}Z_t = (a_\lambda + b_\lambda)t.$$

Prova. Denotemos por $\zeta_i \in \{-1, 1\}$ o sentido do i -ésimo salto do passeio, de modo que $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i$, com N_t o número de marcas que o passeio encontra até o instante t . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_t &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i\right) = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i / N(t)\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\{N_t \mathbb{E}(\zeta_1)\} = t(a_\lambda + b_\lambda)(a_\lambda - b_\lambda)/(a_\lambda + b_\lambda) = (a_\lambda - b_\lambda)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}Z_t &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i\right) = \text{Var}\left\{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i / N(t)\right)\right\} + \mathbb{E}\left\{\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i / N(t)\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}^2(\zeta_1)\text{Var}(N_t) + \mathbb{E}\{N_t \text{Var}(\zeta_1)\} \\ &= \frac{(a_\lambda - b_\lambda)^2}{(a_\lambda + b_\lambda)^2}(a_\lambda + b_\lambda)t + \frac{4ab}{(a_\lambda + b_\lambda)^2}(a_\lambda + b_\lambda)t \\ &= (a_\lambda + b_\lambda)t \end{aligned}$$

Fim da prova do Lema 4.1.2.

Lema 4.1.3 Nas condições anteriores, se $a_\lambda - b_\lambda < v$

$$\mathbb{P}(Z_t > vt) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Prova.

Isto é claro, pois usando o teorema central do limite para Z_t , temos

$$\mathbb{P}(Z_t > vt) \approx \mathbb{P}\left(\phi > \frac{vt - v_\lambda t}{((a_\lambda + b_\lambda)t)^{1/2}}\right) \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$ se $v_\lambda < v$, onde ϕ é uma variável aleatória com distribuição normal.

Fim da prova do Lema 4.1.3.

Lema 4.1.4 Se $a_\lambda - b_\lambda < v$,

$$\mathbb{E}\xi^+ < \infty .$$

Prova.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi^+ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi^+ > t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\bigcap_{s \in (0,t]} \{Z_s \geq vs\}\right) dt \\ &\leq \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_t \geq vt) dt \\ &\approx \int_0^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{t^{1/2}v - (a_\lambda - b_\lambda)}{(a_\lambda + b_\lambda)^{1/2}}\right)\right] dt \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\frac{t^{1/2}(a_\lambda - b_\lambda) - v}{(a_\lambda + b_\lambda)^{1/2}}\right) dt . \end{aligned}$$

Desenvolvendo Φ como integral e aplicando Fubini, obtemos que $\mathbb{E}\xi^+$ é limitada quando $a_\lambda - b_\lambda < v$.

Fim da prova do Lema 4.1.4.

CONDIÇÃO INICIAL $Z_0 < -1$

Definamos o tempo de parada $\xi^- = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq vt - 1\}$. Observemos que Z_t segue o relógio $\{T_n^\rho\}_{n \geq 1}$ até o instante ξ^- , logo podemos tratá-lo como um passeio homogêneo com taxa $a_\rho + b_\rho$, quando $t < \xi^-$, para obter um resultado análogo ao Lema 4.1.4.

Lema 4.1.5 Se $a_\rho - b_\rho > v$,

$$\mathbb{E}\xi^- < \infty .$$

$$\mathbb{E}(S_k) < \infty$$

Denotemos por X_t o processo diferença $Z_t - vt$. Dos lemas 4.1.4 e 4.1.5 obtemos que

$$\mathbb{P}(|X_t| < 1, \text{ infinitas vezes}) = 1 ,$$

ou mais especificamente que

$$\mathbb{P}(-1 < X_t \leq 0, \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

Denotemos por $\{I_n\}_n = \{(u_n, v_n)\}_n$ o conjunto de intervalos tais que $-1 < X_t \leq 0$ se e só se $t \in \cup_n I_n$, e $X_{u_n} \notin (-1, 0]$. Notemos que u_n e v_n podem ser tanto um instante de salto da cadeia Z_t quanto um instante do conjunto $C_v = \{-k/v, k \in \mathbb{N}\}$. Como v é negativa, estamos considerando o caso em que Z_t está à esquerda da reta vt , e X_t é decrescente. Para ter $X_t = 0$ é necessário que $v_n \in C_v$. Isto ocorre se o passeio Z_t não saltar entre u_n e o primeiro elemento de C_v maior que u_n , para o correspondente I_n .

Pela propriedade exponencial dos tempos de salto do passeio Z_t , o passeio não saltará em um intervalo de tempo de comprimento $1/v$, infinitas vezes com probabilidade 1, e portanto $(\cup I_n) \cap C_v$ tem um número infinito de elementos, com probabilidade 1. Assim, teremos que $X_t = 0$ infinitas vezes com probabilidade 1 e portanto $\mathbb{E}(S_k) < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$. *

4.2 X_t como processo de renovação

Teorema 4.2.1 *Com a notação anterior, se $\tau_1 < \infty$ e $Z_0 = 0$, o processo $\hat{X}_t = Z_{t+\tau_1} - [v(t+\tau_1)]$ tem mesma distribuição que o processo X_t .*

Prova.

Consideremos o processo X_t nas condições do Teorema 4.1.1, de modo que ele passe infinitas vezes por zero. Seja s_1 o instante do último salto de Z_t antes de τ_1 . Enquanto o passeio não mudar de posição, o processo X_t seguirá uma lei determinista, dada pelo movimento da reta vt . Portanto consideremos o instante das marcas do passeio, e denotemos por $T_t^{s_1}$ o instante da primeira marca de $\{Z_t\}$ depois de s_1 , em $s_1 + t$.

Para $t > 0$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_t^{s_1} > \tau_1 - s_1) &= \mathbb{P}(T_t^{\tau_1} > 0) \\ &= \mathbb{P}(T_t^{\rho\lambda} > 0) \end{aligned}$$

onde $T_t^{\rho\lambda}$ é o instante da primeira marca do passeio Z_t começando na origem.

Como, além disso, $X_{\tau_1} = X_0 = 0$, temos que $X_{t+\tau_1}$ e X_t têm mesma distribuição. *

Referências Bibliográficas

- [AF67] M. Alonso and E. Finn. *Fundamental University Physics*, volume II. Addison-Wesley, 1967.
- [AL90] F.J. Alexander and J.L. Lebowitz. Driven diffusive systems with a moving obstacle: a variation on the brazil nuts problem. *J. Phys.*, A 23(8):L375–L381, 1990.
- [Boo58] G. Boole. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publ.Co., 4th. edition, 1958.
- [DL95] S. Dippel and S. Luding. Simulations on size segregation: geometrical effects in the absence of convection. *J. Phys. I*, 5:1527–1537, 1995.
- [DMFL86] A. De Masi, P.A. Ferrari, and J.L. Lebowitz. Reaction-diffusion equations for interacting particle systems. *J. Stat. Phys.*, 44(3/4), 1986.
- [DN94] R. Durrett and C. Neuhauser. Particle systems and reaction-diffusion equations. *Ann. Probab.*, 22(1):289–333, 1994.
- [Doo65] J.L. Doob. *Stochastic Processes*. Wiley, 1965.
- [DS84] P.G. Doyle and J.L. Snell. *Random Walks and Electric Networks*, volume 22 of *The Carus Math. Monographs*. The Math. Assoc. of America, 1984.
- [Fer91] P.A. Ferrari. Microscopic shocks in one dimensional driven systems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Physique théorique*, 55(2):637–655, 1991.
- [FGL00] P.A. Ferrari, A. Galves, and C. Landim. Rate of convergence to equilibrium of symmetric simple exclusion processes. *Markov Processes and Related Fields*, 6:73–88, 2000.
- [FMRR00] P.A. Ferrari, C. Maes, L. Ramos, and F. Redig. On the hydrodynamic equilibrium of a rod in a lattice fluid. *J. Phys. A*, 33(26):4725–4740, 2000.

- [FMRR02] P.A. Ferrari, C. Maes, L. Ramos, and F. Redig. *in preparation*, 2002.
- [Har89] T.E. Harris. *The Theory of Branching Processes*. Dover Publications, 1989.
- [HM98] H.J. Herrmann and H.A. Makse. Macroscopic model for granular stratification and segregation. *Europhys. Lett.*, 43(1):1–6, 1998.
- [HP95] H.J. Herrmann and T. Poschel. Size segregation and convection. *Europhys. Lett.*, 29(2):123–128, 1995.
- [JMP93] R. Julien, P. Meakin, and A. Pavlovitch. Particle size segregation by shaking in two-dimensional disc packings. *Europhys. Lett.*, 22(7):523–528, 1993.
- [Lax72] P.D. Lax. The formation and decay of shock waves. *Am. Math. Monthly*, March 1972.
- [Lig85] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*, volume 276 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1985.
- [RSPS87] A. Rosato, K.J. Strandburg, F. Prinz, and R.H. Swendsen. Why the brazil nuts are on top: size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 58(10):1038–1040, 1987.
- [Sai00] E.A. Saied. On the brazil nuts problem: is it of relevance to hydrodynamics? *J. Stat. Phys.*, 98(5/6):1395–1407, 2000.
- [Smo83] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equation*, volume 258 of *Ser. Comp. Studies in Math*. Springer, 1983.
- [Tho00] H. Thorisson. *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Springer, 2000.