Sobre a Estimação da Intensidade dos Processos Pontuais via Ondaletas

José Carlos Simon de Miranda

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

- Para o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES -

São Paulo
2003

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por José Carlos Simon de Miranda e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de março de 2003.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin (orientador) (IME - USP)

Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro (IMECC - UNICAMP)

Profa. Dra. Chang Chiann (IME - USP)

Prof. Dr. Renato Martins Assunção (UFMG)

Profa. Dra. Silvia Regina da Costa Lopes (UFRGS)

Agradecimentos

Ao Senhor Deus Altíssimo Nosso Senhor e Salvador Jesus Cristo, pela presença constante, por me guardar e abençoar.

À Liliam Pereira de Lima pela inestimável ajuda, pelas diversas sugestões, pela programação em S-Plus que tornou possível a apresentação de uma aplicação das idéias aqui apresentadas, pelas inúmeras horas de trabalho no computador para a formação deste texto, pela paciência, pelo cuidado, pela simpatia e alegria que fizeram das horas de trabalho dias agradáveis.

Ao prof. Pedro Alberto Morettin por ter com sabedoria me dado a liberdade necessária para que eu pudesse ser criativo e a disciplina para escolher idéias e produzir este trabalho. Além disto, e em primeiro lugar, lhe agradeço por ter prontamente me ajudado aceitando, corajosamente, ser meu orientador numa situação delicada e de prazos curtíssimos.

À minha mãe, exemplo de bondade, dedicação, amor e carinho.

Ao meu falecido pai pela honestidade e pelo amor.

Confia no SENHOR e faze o bem;
habita na terra e alimenta-te da verdade.
Agrada-te do SENHOR,
e ele satisfará os desejos do teu coração.
Entrega o teu caminho ao SENHOR,
confia nele, e o mais ele fará.
Fará sobressair a tua justiça como a luz
e o teu direito, como o sol ao meio-dia.
Salmos 37.3-6

Então, disse Pedro a Jesus: Senhor, bom é estarmos aqui; se queres, farei aqui três tendas; uma será tua, outra para Moisés, outra para Elias.
Falava ele ainda, quando uma nuvem luminosa os envolveu; e eis, vindo da nuvem, uma voz que dizia: Este é meu Filho amado, em quem me comprazo; a ele ouvi.
Ouvindo-a os discípulos, caíram de bruços, tomados de grande medo.
Aproximando-se deles, tocou-lhes Jesus, dizendo: Erguei-vos e não temais!
Então, eles, levantando os olhos, a ninguém viram, senão Jesus.
Mateus 17.4-8

Respondeu-lhe Jesus: Eu sou o caminho, e a verdade, e a vida; ninguém vem ao Pai senão por mim.
João 14.6

Paz seja com os irmãos e amor com fé, da parte de Deus Pai e do Senhor Jesus Cristo.
A graça seja com todos os que amam sinceramente a nosso Senhor Jesus Cristo.
Efésios 6.23-24

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de estimar a intensidade de um processo pontual geral, isto é, que pode apresentar qualquer estrutura de dependência, homogêneo ou não, estacionário ou não, sobre a reta real. Caracterizamos a intensidade e as densidades produto de ordem m. Definimos seqüências inferentes e análise de inferência segura. Propomos estimadores para a intensidade e estudamos as suas propriedades, incluindo casos onde são utilizados limiares. Como caso particular, decorrem as propriedades para o processo de Poisson não homogêneo. Uma aplicação é feita utilizando dados da série do índice Dow Jones da bolsa de Nova York, na qual determinamos a intensidade e demonstramos o caráter não homogêneo do seu processo pontual de valores extremos advindo dos retornos logarítmicos. Fazemos também o estudo de processos pontuais submetidos à interferência de ruído e, finalmente, indicamos possíveis extensões deste trabalho.

Palavras chave: intensidade, ondaletas, processo de Poisson, processo de ruído, processo pontual, seqüências inferentes.

Abstract

In this work we consider the problem of estimating the intensity of a non-homogeneous point process on the real line. The approach used is via wavelet expansions. We define inferential sequences and sure inference analysis. Characterizations of the intensity and m-th order product density are given. Estimators of the intensity are proposed and its properties are studied, including the case of threshold versions. Properties for the non-homogeneous Poisson process follow as special cases. An application is given for the series of daily Dow Jones index showing the non-homogeneous character of the extreme value point process derived from its log-returns. Point processes under noisy conditions are also studied. Extensions to more general settings are also indicated.

Key words: inferential sequences, intensity, noisy point process, point processes, Poisson processes, wavelets.

Índice

Introdução

Nosso trabalho apresenta uma solução extremamente abrangente para o problema da estimação de intensidade de um processo pontual N sobre a reta real, denotada por $p_N(t)$. Este tópico é de importância central no estudo dos processos pontuais e tem sido discutido em diversos trabalhos, dentre os quais mencionamos Brillinger (1975, 1978), Snyder (1975), Rathbun e Cressie (1994) e Helmers e Zitikis (1999).

Contrariamente ao enfoque adotado em vários trabalhos, nós não assumimos que a intensidade $p_N(t)$ pertença a alguma família de modelos paramétricos, $p_N(t, \theta)$, caso em que o problema se reduz à estimação de um parâmetro vetorial desconhecido, θ, pertencente a um espaço de dimensão finita. O enfoque aqui adotado é o da expansão da intensidade em séries de ondaletas, semelhante ao feito em Donoho et al. (1996). O uso de ondaletas fornece uma maneira de estimar as intensidades de processos pontuais não-homogêneos devido ao fato destas poderem ajustar sinais com largura de faixa variável. Embora focalizemos nossa atenção em processos pontuais sobre a reta real, nosso trabalho pode ser estendido para espaços mais gerais, como desenvolvemos em de Miranda e Morettin (2002a). Como referências em processos pontuais e ondaletas citamos Brillinger (1997), Timmermann e Nowak (1997), Kolaczyk (1999a,1999b) e Besbeas et al.(2002).

Para manter o caráter geral de nosso trabalho, desenvolvemos a análise de inferência segura que nos permite obter substitutos aos intervalos de confiança e às bandas de confiança para valores reais e funções estimados, sem que precisemos saber a distribuição das variáveis aleatórias ou dos processos estocásticos a eles associada. Definimos o conceito de seqüência inferente, elemento central desta análise, que nos permite obter, a partir de seus valores calculados para um ponto $w \in \Omega$, espaço de probabilidade subjacente, intervalos ou bandas, conforme seja a seqüência inferente formada de variáveis aleatórias e variâncias ou de processos estocásticos e funções variância, para os quais podemos dizer que, com probabilidade maior ou igual a uma probabilidade pré-estabelecida, o número real ou função estimados com uso da seqüência inferente pertence aos intervalos mencionados ou apresenta cada ponto de seu gráfico com ordenada limitada pelas referidas bandas, independentemente da distribuição das variáveis aleatórias ou da estrutura probabilística dos processos estocásticos da seqüência inferente.

Para resolvermos o problema da estimação da intensidade de um processo pontual adotamos a seguinte metodologia. Expandimos a restrição da função intensidade, a um intervalo onde conhecemos os pontos de uma trajetória do processo pontual, em série de ondaletas. Propomos então estimadores não viesados para os coeficientes desta expansão em série assim como estimadores para a variância de cada um destes estimadores. Também obtemos uma seqüência inferente para os coeficientes de ondaleta para processos pontuais de Poisson. A partir dos estimadores dos coeficientes de ondaleta construímos, por síntese, um estimador não viesado para a função intensidade e, calculando este estimador sobre o conjunto de eventos no intervalo de observação para uma trajetória do processo pontual, obtemos a função intensidade estimada.

Para fazermos proveito, em toda a sua extensão, do poder dos métodos de estimação por ondaletas aqui desenvolvidos definimos as classes de processo pontuais *B e *A, isto é, dos processos pontuais que satisfazem às hipóteses *B e *A. Estas classes contém, respectivamente, as classes de processos sob as hipóteses B e A que são hipóteses desenvolvidas de uma maneira direta, a partir das condições clássicas (1.9), (1.10), (1.18) e (1.19) com limites definidores uniformes para p_N, a fim de fazer valer para estes processos os enunciados dos Lemas 2.3, 2.4 e 2.5 e seus corolários. Adotamos assim o procedimento de definir classes de objetos para os quais se torna válido o enunciado de proposições de interesse. No nosso caso, estas proposições são as de número 3.3, 3.4 e 3.5 que generalizam os lemas e corolários mencionados acima. Isto nos levou a criar as definições das classes *B e *A.

No Capítulo 1 apresentamos conceitos básicos sobre processos pontuais e ondaletas. No Capítulo 2 deduzimos alguns lemas e corolários necessários ao desenvolvimento da teoria de estimação via ondaletas apresentada nos Capítulos 4, 5 e 7. Para este fim, são particularmente importantes os Lemas 2.3, 2.4 e 2.5. Entretanto, notamos que todos são dependentes do Lema 2.2 cuja essência é dizer quando podemos negligenciar infinitésimos de ordem superior para concluir a igualdade de integrais. Este lema foi anteriormente estabelecido para h no conjunto das funções contínuas e depois no conjunto das funções Riemann integráveis. Na nossa procura pelo conjunto maximal de funções para o qual é válido o Lema 2.2, descobrimos o interessante resultado enunciado no Lema 2.1 sobre a integral de Lebesgue. Assim, pudemos aumentar nosso conhecimento da validade do Lema 2.2 para a classe das funções que são Lebesgue integráveis em intervalos limitados em $\mathbb{R}^m$. A Proposição 2.1 mostra que a intersecção desta classe maximal com o conjunto das funções mensuráveis Lebesgue que são limitadas em intervalos limitados do $\mathbb{R}^m$ está contida na classe das funções Riemann integráveis em intervalos limitados do $\mathbb{R}^m$. Para o caso da reta, isto é, $m = 1$, a classe maximal está contida na classe das funções contínuas. O estudo desta classe maximal é importante pois tanto a intensidade quanto as densidades produto dos processos pontuais ordenados, no sentido das condições (1.9), (1.10), (1.18) e (1.19) com a uniformidade dos limites definidores, pertencem a esta classe de funções. No Capítulo 3 caracterizamos as funções intensidade e densidade produto e definimos as classes de processos *B e *A. Este capítulo também é dedicado a estabelecer a análise de inferência segura. No Capítulo 4 desenvolvemos o método de estimação da intensidade e apresentamos os estimadores não viesados para os coeficientes de ondaleta assim como os estimadores não viesados de sua variância. Também, caso N seja um processo de Poisson, exibimos seqüências inferentes para os coeficientes de ondaleta. Apresentamos, então, o estimador não viesado de p, a intensidade restrita ao intervalo de observação, $\hat{p}$, e para ele determinamos sua função variância e também exibimos, para processos de Poisson, uma seqüência inferente de processos estocásticos para p. O Capítulo 5 faz o estudo de estimadores de p para os quais limitamos o número de escalas e também para aqueles em que submetemos os coeficientes de ondaleta a um procedimento limiar. São indicados limitantes superiores para o viés destes estimadores da intensidade, medido na norma de L^2, assim como a sua taxa de convergência que demonstramos ser exponencial com o número de escalas. Seqüências inferentes também são apresentadas. O Capítulo 6 é dedicado a uma aplicação. Como resultado estabelecemos a conclusão de que o processo pontual de valores extremos do retorno logarítmico advindo do índice DJIA da bolsa de Nova York é um processo claramente não homogêneo que apresenta forte variação temporal em sua intensidade. No Capítulo 7 fazemos o estudo de processos pontuais imersos em ruído, isto é, aos quais é somado outro processo pontual de forma que não distinguimos se os eventos são oriundos do processo inicial ou do ruído. É interessante observar que o processo observado é "estruturalmente" diferente dos processos que o originaram; assim, se os processos N e R são processos pontuais que satisfazem às condições (1.9) e (1.10), por exemplo, então já não podemos garantir que $M = N + R$ as obedeça, mas M satisfaz à condições similares que nos permitem desenvolver a teoria de estimação de maneira inteiramente similar ao que foi feito nos Capítulos 4 e 5. Para isto, foi importante estabelecer, na seção de lemas, o Corolário 2.4 e também a caracterização da intensidade e das densidades produto (neste caso p_2) como derivadas de Radon-Nikodyn, no Capítulo 3. Aqui notamos mais uma clara vantagem de se trabalhar com as classes *B e *A pois tais classes contêm, como subclasses bastante amplas, as classes *B+ e *A+ que são classes fechadas por soma independente, isto é, por soma de processos independentes nelas contidos. Na seção de comentários finais e nas referências apresentamos alguns trabalhos desenvolvidos a partir das idéias apresentadas nesta tese e outras em desenvolvimento. Outros virão.

Desejo uma leitura agradável!

Capítulo 1

Processos pontuais e ondaletas

Neste capítulo fazemos um resumo dos pontos principais sobre processos pontuais e ondaletas os quais utilizaremos posteriormente.

1.1 Processos Pontuais

Denotaremos por $N(A)$ o número de eventos que ocorre em $A \subset I\!R$. Se $A = (\alpha, \beta]$ escreveremos $N(\alpha,\beta]$ em vez de $N((\alpha,\beta])$. Também denotaremos por N a função a valores inteiros definida pelas igualdades $N(t) = N(0,t]$, se $t > 0, N(0) = 0$ e $N(t) = -N(t,0]$ se $t < 0$. Claramente $N(\alpha,\beta] = N(\beta) - N(\alpha)$. Escreveremos $\{\cdots, \tau_{-2} \leq \tau_{-1} \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots\}$ para denotar os tempos nos quais os eventos ocorrem. Então, $N(t) = n$ se e somente se $\tau_{n-1} \leq t < \tau_n$.

Se pudermos definir as probabilidades

$$P(N(\alpha_1,\beta_1] = n_1, \ldots, N(\alpha_k,\beta_k] = n_k) \tag{1.1}$$

de forma consistente para todo $k \in I\!N^* = \{1, 2, \ldots\}$, e todos $n_1, \ldots, n_k$ inteiros não negativos, poderemos também definir um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tal que existe uma função mensurável deste espaço em $(I\!R^Z, \mathcal{B}_{I\!R^Z})$ com imagem em $S \subset I\!R^Z$, o conjunto de todas as seqüências não decrescentes de números reais, isto é, de eventos no tempo, definindo assim, um processo pontual estocástico que também será chamado de N. Veja Cramér e Leadbetter (1967) e Daley e Vere-Jones (1988) para maiores detalhes e definições alternativas.

Um importante processo pontual é o processo de Poisson não homogêneo definido a partir de uma função não decrescente contínua à direita $\Lambda(t)$, e que satisfaz à relação

$$P(N(\alpha_1,\beta_1] = n_1, \ldots, N(\alpha_k,\beta_k] = n_k) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{[\Lambda(\beta_j) - \Lambda(\alpha_j)]^{n_j}}{n_j!} \exp\{\Lambda(\beta_j) - \Lambda(\alpha_j)\} \right) \tag{1.2}$$

sempre que $(\alpha_i, \beta_i] \cap (\alpha_j, \beta_j] = \emptyset$, para todos i, j, $i \neq j$.

Como conseqüência de (1.2), as variáveis aleatórias $N(\alpha_j, \beta_j]$ formam um conjunto completamente independente (têm a propriedade de independência completa) ou equivalentemente, eventos em intervalos disjuntos são independentes. Um caso especial importante é aquele para o qual $\Lambda(t) = \lambda t$, λ sendo a intensidade média do processo.

Outra classe importante de processos pontuais é a dos duplamente estocásticos formados a partir de uma realização $\Lambda(t)$ de um processo estocástico estacionário cujas trajetórias são funções não decrescentes contínuas à direita. Esta realização é tomada como a intensidade $\Lambda(t)$ de um processo pontual de Poisson.

Defina $dN(t) = N(t+dt) - N(t)$. Uma suposição básica é que existam medidas M_k limitadamente finitas tais que

$$E\{dN(t_1)\cdots dN(t_k)\} = M_k(dt_1, \ldots, dt_k), \tag{1.3}$$

ou seja, $E(\prod_{i=1}^{k} N) = M_k$.

No caso de um processo de Poisson com intensidade $\Lambda(t)$,

$$E\{dN(t_1)\cdots dN(t_k)\} = \Lambda(dt_1)\cdots\Lambda(dt_k), \tag{1.4}$$

para t_j distintos e intervalos $(t_j, t_j + dt_j)$ disjuntos. No caso em que $d\Lambda(t)/dt = \lambda(t)$, o lado direito da expressão acima torna-se $\lambda(t_1)\cdots\lambda(t_k)dt_1\cdots dt_k$.

Trabalharemos freqüentemente com integrais da forma

$$\int \varphi(t)dN(t) = \sum_j \varphi(\tau_j). \tag{1.5}$$

Suponha que $\varphi_i, 1 \leq i \leq k$, são funções mensuráveis (essencialmente) limitadas com suporte compacto. Então,

$$E\{\int \varphi_1(t_1)dN(t_1)\cdots\int \varphi_k(t_k)dN(t_k)\} = \int \varphi_1(t_1)\cdots\varphi_k(t_k)dM_k(t_1,\ldots,t_k). \tag{1.6}$$

Em particular, temos

Teorema 1.1 (Teorema de Campbell). *Seja N tal que $EN(A) < \infty$ para todo A limitado pertencente a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Então, para toda função φ mensurável limitada de suporte compacto, temos*

$$E\{\int \varphi(t)dN(t)\} = \int \varphi(t)EdN(t). \tag{1.7}$$

(Ver Daley e Vere-Jones (1988).)

Para o processo de Poisson com intensidade $\Lambda(t)$,

$$E\{\sum_j \varphi(\tau_j)\} = E\{\int \varphi(t)dN(t)\} = \int \varphi(t)\Lambda(dt). \tag{1.8}$$

A partir daqui, a menos de menção contrária, consideraremos somente processos ordenados. Isto significa que, quase certamente, o conjunto dos eventos não apresenta pontos de acumulação. De fato, assumiremos mais. Vamos supor que existe um número real positivo δ e uma constante $K_\delta > 0$ tal que para todos os intervalos $\Delta \subset \mathbb{R}$ com comprimento $|\Delta| < \delta$, todos os inteiros $n > 1$ e todos os $t \in \mathbb{R}$, não somente a relação

$$P\{N(\Delta) = n\} \leq K_\delta |\Delta|^n, \tag{1.9}$$

é válida, mas também, o limite

$$\lim_{|\Delta|\to 0, t\in\Delta} \frac{1}{|\Delta|} P\{N(\Delta) = 1\} = p_N(t), \tag{1.10}$$

existe uniformemente em t.

A desigualdade (1.9) implica que

$$P\{N(\Delta) > 1\} \leq K_\delta (\sum_{j\geq 2} |\Delta|^j) = O(|\Delta|^2). \tag{1.11}$$

Note que se a desigualdade (1.9) fosse válida para $n = 1$ então teríamos $P\{N(\Delta) = 1\}/|\Delta| \leq K_\delta$ e portanto, caso existisse, $p_N(t)$ seria uma função limitada em $\mathbb{R}$. Observe também que (1.10) implica que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P\{N(\{x\}) = 1\} = 0$ pois em caso contrário existiria $t \in \mathbb{R}$ para o qual o limite $p_N(t)$ seria infinito.

A relação (1.10) é equivalente a

$$P\{N(\Delta) = 1\} = p_N(t)|\Delta| + o_{t,\Delta}(|\Delta|), \tag{1.12}$$

para um infinitesimal $o_{t,\Delta}(z)$ com as seguintes propriedades:
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall\Delta \subset \mathbb{R}, t \in \Delta$, $(0 < |\Delta| < \delta) \to |o_{t,\Delta}(|\Delta|)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\Delta|$ e $o_{t,\Delta}(0) = 0$, ou seja,
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $(0 < z < \delta) \to \sup_{\substack{t\in\mathbb{R},\Delta\subset\mathbb{R}\\ t\in\Delta,|\Delta|=z}} |o_{t,\Delta}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} z < \varepsilon z$ e $o_{t,\Delta}(0) = 0$.

A quantidade $\sup_{\substack{t\in\mathbb{R},\Delta\subset\mathbb{R}\\ t\in\Delta,|\Delta|=z}} |o_{t,\Delta}(z)| = o(z)$ é um infinitesimal não negativo independente de t e Δ. Também escrevemos, com este sentido, $|o_{t,\Delta}(|\Delta|)| \leq o(|\Delta|)$.

Para facilidade de notação, escreveremos o_t ao invés de $o_{t,\Delta}$.

Proposição 1.1 *Sob as suposições estabelecidas acima, temos*

$$\begin{aligned} P\{N(\Delta) = 1\} \leq E\{N(\Delta)\} &\leq P\{N(\Delta) = 1\} + O(|\Delta|^2), \\ P\{N(\Delta) = 1\} - A \leq Var\{N(\Delta)\} &\leq P\{N(\Delta) = 1\} + B, \end{aligned}$$

nas quais A e B são $O(|\Delta|^2)$ sempre que $\sup_{t\in\Delta} p_N(t)$ é finito.

Assim podemos escrever

$$E\{N(\Delta)\} = p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|)$$

e

$$Var\{N(\Delta)\} = p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|).$$

Demonstração Para todo Δ tal que $|\Delta| < \min\{\delta, 1\}$ temos

$$E\{N(\Delta)\} = P\{N(\Delta) = 1\} + \sum_{j\geq 2} jP\{N(\Delta) = j\} \leq$$

$$\leq P\{N(\Delta) = 1\} + K_\delta \sum_{j\geq 2} j|\Delta|^j.$$

Como

$$\sum_{j\geq 2} j|\Delta|^j = \sum_{k\geq 2}\sum_{j\geq k} |\Delta|^j = \sum_{k\geq 2}(|\Delta|^k \sum_{j\geq 0} |\Delta|^j) =$$

$$\sum_{k\geq 2} |\Delta|^k (1/(1-|\Delta|)) = \frac{|\Delta|^2}{1-|\Delta|}\sum_{k\geq 0}|\Delta|^k = |\Delta|^2\left(\frac{1}{1-|\Delta|}\right)^2,$$

e $\lim_{|\Delta|\to 0}(1/(1-|\Delta|)^2) = 1$, podemos escrever

$$P\{N(\Delta) = 1\} \leq E\{N(\Delta)\} \leq P\{N(\Delta) = 1\} + O(|\Delta|^2).$$

Então,

$$E\{N(\Delta)\} = P\{N(\Delta) = 1\} + o_t(|\Delta|).$$

De $P\{N(\Delta) = 1\} = p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|)$, segue que $E\{N(\Delta)\} = p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|)$ e a primeira parte da demonstração fica estabelecida. Notamos que este último $o_t(|\Delta|)$ que aparece na expressão da esperança de $N(\Delta)$ é limitado em módulo por um infinitésimo independente de t e Δ pois é soma daquele relativo à probabilidade $P\{N(\Delta) = 1\}$ que tem esta propriedade e um infinitésimo independente de t e Δ, $O(|\Delta|^2)$.

Agora, para estimar a variância, observamos que

$$E\{N(\Delta)^2\} = P\{N(\Delta) = 1\} + \sum_{j\geq 2} j^2 P\{N(\Delta) = j\}$$

$$\leq P\{N(\Delta) = 1\} + K_\delta \sum_{j\geq 2} j^2|\Delta|^j.$$

Seja $f(z)$ a função analítica sobre o disco $|z| < 1$, definida por $f(z) = \sum_{n\geq 2} z^{n+2}$. Assim, $f(z) = z^4/(1-z)$ e

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) = \frac{12z^2}{(1-z)} + \frac{2(4-3z)z^3}{(1-z)^3}.$$

Por outro lado,

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) = \frac{d^2}{dz^2}\sum_{n\geq 2} z^{n+2} = \sum_{n\geq 2}\frac{d^2}{dz^2}z^{n+2} = \sum_{n\geq 2}(n+2)(n+1)z^n.$$

Então, para $0 \leq z < 1$ temos

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) = \sum_{n\geq 2}(n+2)(n+1)z^n \geq \sum_{n\geq 2} n^2 z^n,$$

e escrevemos

$$E\{N(\Delta)^2\} \leq P\{N(\Delta) = 1\} + K_\delta \frac{d^2}{dz^2}f(z)|_{z=|\Delta|} =$$

$$= P\{N(\Delta) = 1\} + \frac{12|\Delta|^2}{1-|\Delta|} + \frac{2(4-3|\Delta|)|\Delta|^3}{(1-|\Delta|)^3}.$$

Como, quando $|\Delta| \to 0$, $12/(1-|\Delta|) \to 12$ e $2(4-3|\Delta|)/(1-|\Delta|)^3 \to 8$, temos

$$E\{N(\Delta)^2\} \leq P\{N(\Delta) = 1\} + O(|\Delta|^2) + O(|\Delta|^3).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{N(\Delta)\} &\leq P\{N(\Delta) = 1\} + O(|\Delta|^2) + O(|\Delta|^3) - (p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|))^2 \\ &\leq P\{N(\Delta) = 1\} + O(|\Delta|^2). \end{aligned}$$

Também é verdade que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{N(\Delta)\} &= E\{N(\Delta)^2\} - (E\{N(\Delta)\})^2 \geq P\{N(\Delta) = 1\} - (p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|))^2 \\ &\geq P\{N(\Delta) = 1\} - (\sup_{t\in\Delta} p_N(t)|\Delta| + o(|\Delta|))^2 = P\{N(\Delta) = 1\} - O(|\Delta|^2). \end{aligned}$$

Combinando as duas inequações, temos a segunda parte da Proposição e, imediatamente,

$$\mathrm{Var}\{N(\Delta)\} = p_N(t)|\Delta| + o_t(|\Delta|).$$

■

Estes $o_t = o_{t,\Delta}$ podem depender de t e Δ mas seus valores absolutos são limitados por outros o que são independentes de t.

Dizemos que $p_N(t)$ é a **intensidade** de ocorrência de eventos no tempo t. Utilizaremos a notação diferencial

$$P\{dN(t) = 1\} = p_N(t)dt + o_t(dt), \tag{1.13}$$
$$P\{dN(t) > 1\} = o_t(dt), \tag{1.14}$$
$$P\{dN(t) = 0\} = 1 - p_N(t)dt + o_t(dt), \tag{1.15}$$
$$E\{dN(t)\} = p_N(t)dt + o_t(dt), \tag{1.16}$$
$$\mathrm{Var}\{dN(t)\} = p_N(t)dt + o_t(dt). \tag{1.17}$$

Para o processo de Poisson, $p_N(t) = \lambda(t)$.

Poderemos também supor a existência de um número real positivo δ e uma constante $k_{\delta,m}$ tal que para todos os intervalos $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ da reta real com comprimentos $0 < |\Delta_i| < \delta$, $1 \leq i \leq m$, todos inteiros $n_i \geq 1$ e todos vetores $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^m$ tais que $t_i \neq t_j$ para todos $i \neq j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ ambas as propriedades abaixo são válidas:

$$\text{se } (n_1, \ldots, n_m) \neq (1, \ldots, 1) \text{ então } P\{N(\Delta_i) = n_i, 1 \leq i \leq m\} \leq k_{\delta,m} \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i|^{n_i} \tag{1.18}$$

e para $\Delta = (|\Delta_1|, \ldots, |\Delta_m|) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$, $t_i \in \Delta_i$, $1 \leq i \leq m$, existe o limite

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|}P\{N(\Delta_i)=1, 1\le i\le m\}=p_m(t_1,\ldots,t_m), \tag{1.19}$$

uniformemente em $t=(t_1,\ldots,t_m)$.

Observamos que para $m=1$ o símbolo Δ possui dois significados diferentes, o intervalo e o comprimento; no entanto, isto não prejudicará o entendimento do leitor.

O limite acima mede a intensidade da ocorrência conjunta de eventos nos diferentes tempos $t_1,\ldots,t_m$. Poderíamos chamá-lo de intensidade conjunta. Como sob as relações (1.18) e (1.19) também é válido que $\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|}E\{\prod_{i=1}^{m}N(\Delta_i)\}=p_m(t_1,\ldots,t_m)$, p_m é chamado **densidade produto de ordem** m. A relação (1.19) implica que

$$P\{N(\Delta_i)=1, 1\le i\le m\}=p_m(t_1,\ldots,t_m)\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|+o_{t,\prod_{i=1}^{m}\Delta_i}(\Delta) \tag{1.20}$$

para $o_{t,\prod_{i=1}^{m}\Delta_i}(\Delta)$ um infinitésimo tal que

$$\sup_{\substack{t\in\mathbb{R}^m-\mathcal{E}^m,\prod_{i=1}^{m}\Delta_i\subset\mathbb{R}^m\\ t\in\prod_{i=1}^{m}\Delta_i,|\Delta_i|=z_i,1\le i\le m}}|o_{t,\prod_{i=1}^{m}\Delta_i}(z)|=o(z),$$

$z=(z_1,\ldots,z_m)\in(\mathbb{R}_+^*)^m$ é outro infinitésimo que é independente de $t\in\mathbb{R}^m-\mathcal{E}^m$ e $\prod_{i=1}^{m}\Delta_i\subset\mathbb{R}^m$ que satisfaz $\frac{o(\Delta)}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|}\to 0$ quando $\Delta\to 0$.

Denotamos por $\mathcal{E}^m$ o conjunto

$$\{(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m|t_i=t_j \text{ para algum } i\ne j\}.$$

Para facilidade de notação, escrevemos o_t ao invés de $o_{t,\prod_{i=1}^{m}\Delta_i}$.

Proposição 1.2 *Sob as hipóteses acima temos, para* $m\ge 1$,

$$P\{N(\Delta_i)=1,\ 1\le i\le m\}\le E\left\{\prod_{i=1}^{m}N(\Delta_i)\right\}$$

$$\le P\{N(\Delta_i)=1,\ 1\le i\le m\}+k_{\delta,m}\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2-1\right\}\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|.$$

Demonstração Seja $n=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m$, $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$.

$$E\left\{\prod_{i=1}^{m}N(\Delta_i)\right\}=\sum_{n\in(\mathbb{N}^*)^m}\left((\prod_{i=1}^{m}n_i)P\{N(\Delta_i)=n_i, 1\le i\le m\}\right)$$

$$\le P\{N(\Delta_i)=1, 1\le i\le m\}+\sum_{n\in(\mathbb{N}^*)^m-\{(1,\ldots,1)\}}\left(\prod_{i=1}^{m}n_i\right)k_{\delta,m}\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|^{n_i}$$

$$=P\{N(\Delta_i)=1, 1\le i\le m\}+\sum_{n\in(\mathbb{N}^*)^m}k_{\delta,m}\prod_{i=1}^{m}n_i|\Delta_i|^{n_i}-k_{\delta,m}\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|.$$

Agora,

$$\sum_{n\in(\mathbb{N}^*)^m}\prod_{i=1}^{m} n_i|\Delta_i|^{n_i} = \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{n_i\in\mathbb{N}^*} n_i|\Delta_i|^{n_i}\right) = \prod_{i=1}^{m}\left(|\Delta_i|\left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2\right).$$

Portanto,

$$E\left\{\prod_{i=1}^{m} N(\Delta_i)\right\} \leq P\{N(\Delta_i)=1, 1\leq i\leq m\} + k_{\delta,m}\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|\left(\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right)$$

■

Podemos também definir cumulantes para $N(t)$; e, em particular, definimos a covariância limite, para $u \neq v$, por

$$q_2(u,v) \quad = \quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{\operatorname{Cov}(N,N)(\Delta_1\times\Delta_2)}{|\Delta_1||\Delta_2|}.$$

Para processos pontuais que satisfazem (1.18) e (1.19), sob determinadas condições, como veremos no Capítulo 2, podemos escrever a igualdade de medidas em notação diferencial

$$\begin{aligned} E\{dN(t_1)dN(t_2)\} &= M_2(dt_1, dt_2) \\ &= p_2(t_1,t_2)dt_1dt_2, \\ &= P\{dN(t_1)=1, dN(t_2)=1\}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

para todos os pares (t_1, t_2) tais que $t_1 \neq t_2$.

Se $t_1 = t_2$, então $E\{dN(t)^2\} = E\{dN(t)\} = p_N(t)dt$; $E\{dN(t)^2\}$ é a restrição da medida $E(N\times N)$ à diagonal do $\mathbb{R}^2$.

Para processos de Poisson

$$E\{dN(t_1)dN(t_2)\} = \lambda(t_1)\lambda(t_2)dt_1dt_2,$$

portanto

$$p_2(t_1,t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_2), \quad t_1 \neq t_2.$$

Também teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\{dN(u), dN(v)\} &= E\{dN(u)dN(v)\} - E\{dN(u)\}E\{dN(v)\}, \\ &= q_2(u,v)dudv, \quad u\neq v, \end{aligned} \tag{1.22}$$

que é zero para os processos de Poisson.

1.2 Ondaletas

Ondaletas são funções "elementares" que utilizamos na construção de novas funções. Elas são obtidas de uma única função $\psi(t)$, chamada de ondaleta mãe, por translações e dilatações. A ondaleta mãe $\psi(t)$ satisfaz às condições

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0, \tag{1.23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} | \psi(t) | dt < \infty, \tag{1.24}$$

podendo satisfazer também

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{| \hat{\psi}(\omega) |^2}{| \omega |} d\omega < \infty, \tag{1.25}$$

na qual $\hat{\psi}(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$, isto é,

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Dada a ondaleta mãe $\psi(t)$, para todos os reais, $a, b(a \neq 0)$, construímos um conjunto de ondaletas por translações e dilatações de $\psi(t)$,

$$\psi^{(a,b)}(t) = | a |^{-1/2} \psi(\frac{t-b}{a}), \tag{1.26}$$

na qual a representa o parâmetro de dilatação e b o de translação.

Para escolhas especiais de ψ e a, b, o conjunto $\psi^{(a,b)}$ constitui uma base ortonormal de $L^2(I\!R)$. Em particular, se escolhermos $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, então existe ψ tal que

$$\psi_{k,j}(t) = \psi^{(a,b)}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \tag{1.27}$$

é uma base ortonormal de $L^2(I\!R)$.

Existem muitas formas diferentes de $\psi(t)$, todas satisfazendo às condições (1.23), (1.24) e (1.25). O mais antigo e simples exemplo de função ψ para o qual as $\psi_{k,j}$ definidas por (1.27) formam uma base ortonormal de $L^2(I\!R)$, é a função de Haar,

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.28}$$

De (1.28), temos

$$\psi_{k,j}^{(H)}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \leq t < 2^{-j}(k+1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma maneira de obter uma ondaleta é pelo uso da equação de dilatação

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_k l_k \phi(2t-k),$$

com $\phi(t)$ uma função que é chamada de função escala ou também de ondaleta pai que satisfaz $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)dt = 1$. A ondaleta mãe é então obtida da ondaleta pai por

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_k h_k \phi(2t-k),$$

com $h_k = (-1)^k l_{1-k}$, também chamada de relação de filtro de quadratura simétrica, na qual os coeficientes l_k e h_k são os coeficientes dos filtros passa-baixa e passa-alta dados pelas fórmulas

$$l_k = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\phi(2t-k)dt$$

e

$$h_k = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\phi(2t-k)dt,$$

respectivamente.

Para a ondaleta de Haar,

$$\phi^{(H)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,

$$l_k = \sqrt{2}\int \phi(t)\phi(2t-k)dt = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$h_0 = l_1 = 1/\sqrt{2}, \qquad h_1 = -l_0 = -1/\sqrt{2}.$$

Conseqüentemente,

$$\psi(t) = \sqrt{2}((1/\sqrt{2})\phi(2t) - (1/\sqrt{2})\phi(2t-1)),$$

e obtemos (1.28).

Exceto para casos especiais, não há "fórmulas analíticas" para as funções ondaleta.

Um tópico de importância no estudo das ondaletas é a análise de multi-resolução (ver Meyer (1992)). Uma análise de multi-resolução em $L^2(\mathbb{R})$ é uma seqüência crescente, $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfaz às seguintes propriedades:

(i) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Para toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$ e todo $j \in \mathbb{Z}$, $f(x) \in V_j$ se e somente se $f(2x) \in V_{j+1}$.

(iii) Para toda função $f \in V_0$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, $f(x-k) \in V_0$.

(iv) Existe um função $g \in V_0$ tal que $g(x-k), k \in \mathbb{Z}$, é uma base de Riesz de V_0.

Lembramos que, sendo H um espaço de Hilbert e $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ uma seqüência de vetores de H, dizemos que esta seqüência é uma base de Riesz quando existirem duas constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tais que para toda seqüência ξ_k de coeficientes escalares, tem-se para todo $m \geq 1$,

$$C_1 \left(\sum_{-m}^{m} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{-m}^{m} \xi_k e_k\right\| \leq C_2 \left(\sum_{-m}^{m} |\xi_k|^2\right)^{1/2}$$

e as somas finitas $\sum\limits_{-m}^{m} \xi_k e_k, m \geq 1$, formam um subespaço vetorial denso em H.

Caso tenhamos uma análise multi-resolução, observamos que, como $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, toda função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser aproximada por uma função dos subespaços V_j no seguinte sentido: $\forall\varepsilon > 0\ \exists j \in \mathbb{Z}\ \exists f_j \in V_j\ \|f_j - f\| < \varepsilon$. Os subespaços V_j e V_{j+1}, para qualquer $j \in \mathbb{Z}$, podem ser obtidos um a partir do outro por uma mudança de escala e, conseqüentemente, quaisquer subespaços V_j e V_l têm esta propriedade. Assim, $f(x) \in V_0$ se e somente se $f(2^j x) \in V_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Também temos as equivalências:

$$\begin{aligned} f(x) \in V_j &\leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0 \leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{Z}\ f(2^{-j}(x+\ell)) \in V_0 \\ &\leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{Z}\ f(2^{-j}x + \ell 2^{-j}) \in V_0 \leftrightarrow f(x + \ell 2^{-j}) \in V_j \end{aligned}$$

dito de outra maneira,

$$f(2^j x) \in V_j \leftrightarrow f(x) \in V_0 \leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{Z}\ f(x-\ell) \in V_0 \leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{Z}\ f(2^j x - \ell) \in V_j.$$

e, como de (iv) temos garantida a existência de $g \in V_0$ tal que $g(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ é base de Riesz de V_0, temos:
$f(x) \in V_j \leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$
$\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m \geq 1\ \exists \xi_k\ ,\ -m \leq k \leq m,\ \left\|\sum_{-m}^{m} \xi_k g(x-k) - f(2^{-j}x)\right\|^2 < \varepsilon^2$
$\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m \geq 1\ \exists \xi_k\ ,\ -m \leq k \leq m,\ \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{-m}^{m} \xi_k g(x-k) - f(2^{-j}x)\right|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon^2$
$\leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m \geq 1\ \exists \xi_k\ ,\ -m \leq k \leq m,\ \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{-m}^{m} \xi_k g(2^j y - k) - f(y)\right| \mathrm{d}y < \frac{\varepsilon^2}{2^j}$
$\leftrightarrow \forall\varepsilon' > 0\ \exists m \geq 1\ \exists \xi_k,\ -m \leq k \leq m,\ \left\|\sum_{-m}^{m} \xi_k g(2^j y - k) - f(y)\right\|^2 < (\varepsilon')^2$
$\leftrightarrow \{g(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$
é uma base de Riesz para V_j já que de

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{-m}^{m} \xi_k e_k\right\|^2 &= \left\langle \sum_{-m}^{m} \xi_k e_k, \sum_{-m}^{m} \xi_\ell e_\ell \right\rangle = \sum_{-m}^{m}\sum_{-m}^{m} \xi_k \xi_\ell \langle e_k, e_\ell\rangle \\ &= \sum_{-m}^{m}\sum_{-m}^{m} \xi_k \xi_\ell \int g(x-k) g(x-\ell) \mathrm{d}x \\ &= 2^j \sum_{-m}^{m}\sum_{-m}^{m} \xi_k \xi_\ell \int g(2^j x - k) g(2^j x - \ell) \mathrm{d}x \\ &= 2^j \sum_{-m}^{m}\sum_{-m}^{m} \xi_k \xi_\ell \langle e'_k, e'_\ell\rangle = 2^j \left\|\sum_{-m}^{m} \xi_k e'_k\right\|^2, \end{aligned}$$

com $e'_k = g(2^j x - k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, podemos obter: $\exists C'_1, C'_2$, $0 < C'_1 \leq C'_2$, $C'_1 = C_1/2^{j/2}$, $C'_2 = C_2/2^{j/2}$ tais que

$$C'_1 \left(\sum_{-m}^{m} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2^{j/2}} \left\| \sum_{-m}^{m} \xi_k e_k \right\| = \left\| \sum_{-m}^{m} \xi_k e'_k \right\| \leq C'_2 \left(\sum_{-m}^{m} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} .$$

A título de ilustração, citamos que, se definirmos o espaço V_0 com o auxílio da função g podemos obter vários exemplos de análises de multi-resolução de $L^2(\mathbb{R})$. Se tivermos $g = \chi_{[0,1)}$ função indicadora de $[0,1)$, então as funções de V_0 são aquelas que são constantes em cada intervalo $[k, k+1)$. Se escolhermos $g(x) = \theta(x) = 1 - |x|$ quando $|x| \leq 1$ e $\theta(x) = 0$ se $|x| > 1$ então as funções $f \in V_0$ são funções afins por partes, e $f(x) = a_k x + b_k$ se $k \leq x \leq k+1$. Se tivermos o produto de convolução $g = \theta * \theta$ então as funções $f \in V_0$ são os splines cúbicos que são funções de classe C^2 pertencentes à $L^2(\mathbb{R})$ para as quais a restrição a cada intervalo $[k, k+1)$ é um polinômio de grau menor ou igual a três. Dizemos que uma análise de multi-resolução é r-regular $r \in \mathbb{N}$ se pudermos escolher $g \in V_0$ de sorte que $g(x-k), k \in \mathbb{Z}$ seja uma base de Riesz de V_0 tal que, para todos $q, 0 \leq q \leq r$, e todos inteiros $m \geq 1$,

$$\left| \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^q g(x) \right| \leq C_m (1 + |x|)^{-m} \tag{1.29}$$

com $C_m \in \mathbb{R}_+$ constantes.

Partindo de uma análise de multi-resolução r-regular, obtém-se os seguintes resultados.

Teorema 1.2 *Existe uma função $\phi \in V_0$ que verifica (1.29) e tal que as funções $\phi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, formam uma base ortonormal de V_0. (Ver Meyer (1992).)*

Teorema 1.3 *Existe outra função $\psi \in V_1$ que verifica (1.29) e tal que as funções $\phi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, e $\psi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$, constituem uma base ortonormal de V_1. (Ver Meyer (1992).)*

Seja W_0 o complemento ortogonal de V_0 em V_1 ($V_1 = V_0 \oplus W_0$, $V_0 \perp W_0$). Então, as funções $\psi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ constituem uma base ortonormal de W_0. Definindo-se W_j por $f(x) \in W_0 \leftrightarrow f(2^j x) \in W_j$, temos que $\psi_{k,j}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ é uma base ortonormal de W_j. Também podemos escrever, para todo $j \in \mathbb{Z}$ e para qualquer que seja $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$V_j = \bigoplus_{\ell \leq j-1} W_\ell \text{ e } \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_\ell \oplus \bigoplus_{j \geq \ell} W_j .$$

Como $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$, podemos escrever $L^2(\mathbb{R})$ como a soma direta hilbertiana

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j} = \overline{V_\ell \oplus \left(\bigoplus_{j \geq \ell} W_j \right)}.$$

Assim, tanto $\{\psi_{k,j} | k, j \in \mathbb{Z}\}$ como $\{\phi_{k,\ell}, \psi_{k,j} | j, k \in \mathbb{Z}, j \geq \ell\}$ para qualquer $\ell \in \mathbb{Z}$, são bases ortonormais de $L^2(\mathbb{R})$.

Caso estejamos interessados em aproximar uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, notamos que sempre existe um $J \in \mathbb{Z}$ tal que existe $f_J \in V_J$ que aproxima f na norma de $L^2(\mathbb{R})$. Podemos então escrever $f \cong f_J = f_{J-1} + g_{J-1}$, $f_{J-1} \in V_{J-1}$, $g_{J-1} \in W_{J-1}$ de maneira única em $L^2(\mathbb{R})$, já que funções h e h' tais que $\|h - h'\| = 0$ são consideradas iguais. Continuando este processo, temos que

$$f \cong f_{J-M} + \sum_{i=J-M}^{J-1} g_i \quad , \; f_{J-M} \in V_{J-M} \text{ e } g_i \in W_i.$$

Um resultado importante, obtido por Daubechies, garante, para todo inteiro r, a existência de bases ortonormais para $L^2(\mathbb{R})$ da forma $2^{j/2}\psi_{(r)}(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, tendo as seguintes propriedades: o suporte de $\psi_{(r)}$ é o intervalo $[0, 2r+1]$ e

$$0 = \int \psi_{(r)}(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int x^r \psi_{(r)}(x)\mathrm{d}x,$$

e $\psi_{(r)}$ tem γr derivadas contínuas e a constante positiva γ é aproximadamente $1/5$. A base de Haar é um caso particular para o qual temos $r = 0$.

Neste trabalho, vamos supor que ϕ e ψ são (essencialmente) limitadas e de suporte compacto. Veja Daubechies (1992). Para generalizações veja de Miranda (2002a). Encerramos este capítulo com alguns comentários sobre análise de ondaletas e de Fourier (Priestley (1996)). Numa base de ondaletas, as funções são indexadas por dois parâmetros, ao passo que, numa base de Fourier, apenas a freqüência é necessária. As ondaletas são localizadas no tempo e são bons elementos na construção de sinais que não são suaves e que têm características variantes no tempo. Para este tipo de sinal, os coeficientes da série ou da transformada de Fourier não são bem apropriados. Intuitivamente, a escala pode ser interpretada como o inverso da freqüência, como mostra o seguinte argumento: quando j cresce, o fator de escala 2^j também cresce e há uma redução na escala de tempo. Simultaneamente, as oscilações na ondaleta mãe crescem e exibem um comportamento de alta freqüência. Por outro lado, quando j decresce e a escala cresce, obtemos um comportamento de baixa freqüência. Uma apresentação bastante abrangente da teoria e das aplicações de ondaletas pode ser encontrada em Morettin (1999).

Capítulo 2

Lemas

Neste capítulo provamos alguns lemas que serão necessários ao desenvolvimento da teoria de estimação via ondaletas da intensidade de um processo pontual apresentada nos Capítulos 4, 5 e 7.

Trabalharemos com funções mensuráveis Lebesgue, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ que são limitadas em intervalos limitados do $\mathbb{R}^m$ ou, equivalentemente, que são integráveis no sentido de Lebesgue e limitadas sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}^m$. Vamos chamar esta classe de funções $\mathcal{L}^m$. Denotaremos por $\overline{\mathcal{L}}^m$ a classe das funções Lebesgue integráveis sobre intervalos limitados de $\mathbb{R}^m$. A classe das funções $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ que são Riemann integráveis em intervalos limitados do $\mathbb{R}^m$ será indicada por $\mathcal{R}^m$. Como toda função Riemann integrável em intervalos limitados é limitada nestes intervalos, temos $\mathcal{R}^m \subset \mathcal{L}^m$.

Utilizamos a notação $|a,b|$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ para representar qualquer um dos 4^m possíveis intervalos de $\mathbb{R}^m$ que podem ser escritos na forma $\prod_{i=1}^m |a_i, b_i|$, na qual $|a_i, b_i|$ representa algum dos intervalos (a_i, b_i), $(a_i, b_i]$, $[a_i, b_i)$ ou $[a_i, b_i]$ da reta real. Entendemos, quando necessário, o intervalo (a, b) da reta como sendo o conjunto $\{x \in \mathbb{R} | min\{a, b\} < x < max\{a, b\}\}$ e, analogamente, o fazemos para $[a, b]$; caso $b < a$ entendemos $(a, b]$ como sendo o conjunto $\{x \in \mathbb{R} | b \leq x < a\}$ e $[a, b)$ como $\{x \in \mathbb{R} | b < x \leq a\}$. Também utilizamos a notação χ_C para a função característica, também chamada de indicadora, de um conjunto C ($\chi_C(x) = 1 \leftrightarrow x \in C \ \wedge \ \chi_C(x) = 0 \leftrightarrow x \notin C$). A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$ será denotada simplesmente por ℓ independentemente da dimensão m. Somente quando quisermos enfatizar a dimensão ou quando houver necessidade, indicaremos a dimensão escrevendo ℓ_m. Funções que diferem em um subconjunto de medida nula de seu domínio comum ou de extensões comuns de seus domínios são, naturalmente, quando necessário, consideradas idênticas.

2.1 Infinitésimos e medidas

Lema 2.1 *Sejam $h \in \mathcal{L}^m$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição de $[a, b]$, $a = \gamma_0 < \cdots < \gamma_p = b$, tal que a partição produto induzida em $[a, b]^m$, $P^m = \left\{\omega_z = \prod_{i=1}^m |\gamma_{z_i}, \gamma_{z_i+1}| \;\middle|\; z = (z_1, \ldots, z_m) \in \{0, \ldots, p-1\}^m\right\}$, tem a seguinte propriedade. De cada ω_z é possível escolher um ponto x_z^* e formar uma função degrau $*\varphi$,*

$$*\varphi = \sum_{z \in \{0, \ldots, p-1\}^m} h(x_z^*) \chi_{\omega_z},$$

que satisfaz à desigualdade

$$\int_{[a,b]^m} |*\varphi - h|\, d\ell = \sum_{z\in\{0,\ldots,p-1\}^m} \int_{\omega_z} |h(x_z^*) - h|\, d\ell < \varepsilon$$

e, conseqüentemente,

$$\left| \sum_{z\in\{0,\ldots,p-1\}^m} \int_{\omega_z} (h(x_z^*) - h) d\ell \right| < \varepsilon.$$

Demonstração Primeiro vamos provar que dada uma função simples φ definida em $A = [a,b]^m$ e $\varepsilon_1 > 0$, existe $\varphi^d : A = [a,b]^m \to \mathbb{R}$ uma função degrau tal que $\ell\{x \in [a,b]^m | \varphi(x) \neq \varphi^d(x)\} < \varepsilon_1$.

Como φ é simples, ela pode ser escrita como $\sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$, $a_i \in \mathbb{R}$, A_i conjuntos mensuráveis, $a_i \neq a_j$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo i e j, $i \neq j$. Seja $M_1 > |\varphi|_\infty$. Assumimos sem perda de generalidade que $\ell(A_i) > 0$ para todo i e tomamos $\varepsilon_1 < \min\{\ell(A_i) | 1 \leq i \leq k\}/(k+1)$ para evitar a possibilidade de qualquer dos conjuntos A_i^d, definidos abaixo, ser vazio.

Sendo Δ a diferença simétrica e A_i um conjunto mensurável limitado, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists V_i$ união finita de intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^m$ tal que $\ell(A_i \Delta V_i) < \varepsilon_1/k_1$, $k_1 = k(k+1)/2$.

Sejam $A_1^d = V_1$ e $A_n^d = V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$, $2 \leq n \leq k$. Para todo n, $1 \leq n \leq k$, A_n^d é também uma união finita de $\mathbb{R}^m$-intervalos disjuntos, assim como o conjunto $[a,b]^m - \bigcup_{i=1}^{k} V_i = [a,b]^m - \bigcup_{i=1}^{k} A_i^d$. Assim, podemos construir a função degrau

$$\varphi^d = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i^d} + (-M_1) \chi_{[a,b]^m - \bigcup_{i=1}^k V_i}.$$

Agora, $\varphi(x) = a_1$ se e somente se $x \in A_1$ e $\varphi^d(x) = a_1$ se e só se $x \in A_1^d$. Portanto, o conjunto $D_1 = \{x \in [a,b]^m | \varphi^d(x) = a_1 \neq \varphi(x) \vee \varphi^d(x) \neq a_1 = \varphi(x)\} = (A_1^d - A_1) \cup (A_1 - A_1^d) = A_1 \Delta A_1^d = V_1 \Delta A_1$ tem medida menor que ε_1/k_1. Também, $\varphi(x) = a_n$ se e só se $x \in A_n$ e $\varphi^d(x) = a_n$ se e só se $x \in A_n^d = V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$. Assim, o conjunto

$$\begin{aligned}
D_n &= \{x \in [a,b]^m | \varphi^d(x) = a_n \neq \varphi(x) \vee \varphi^d(x) \neq a_n = \varphi(x)\} = (A_n^d - A_n) \cup (A_n - A_n^d) \\
&= (V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \Delta A_n = ((V_n \Delta A_n) - (V_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i)) \cup (V_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i) \cap A_n) \\
&\subset (V_n \Delta A_n) \cup (A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i)) = (V_n \Delta A_n) \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_n \cap V_i)).
\end{aligned}$$

Como $(A_n \cap V_i) \subset A_n \cap (A_i \cup (A_i \Delta V_i)) = (A_n \cap A_i) \cup (A_n \cap (A_i \Delta V_i)) \subset \emptyset \cup (A_i \Delta V_i)$, para todo $i \neq n$, temos

$$D_n \subset (V_n \Delta A_n) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \Delta V_i) \right)$$

e, portanto, $\ell(D_n) < \sum\limits_{i=1}^{n} \ell(V_i \Delta A_i) = n\varepsilon_1/k_1$.

Como $D = \{x \in [a,b]^m | \varphi(x) \neq \varphi^d(x)\} \subset \bigcup_{i=1}^k D_i$, temos

$$\ell(D) \leq \sum_{i=1}^{k} \ell(D_i) < \sum_{i=1}^{k} i\varepsilon_1 = \frac{k(k+1)}{2}\frac{\varepsilon_1}{k_1} = \varepsilon_1.$$

Agora, como h é limitada em A, existe $M > \sup_A |h|$ e, como ela é Lebesgue integrável,

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{F}_s \\ \varphi \leq h}} \int_A \varphi d\ell = \int_A h d\ell = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{F}_s \\ \psi \geq h}} \int \psi d\ell,$$

sendo $\mathcal{F}_s$ a classe das funções simples.

Assim, $\forall n > 0$, $\exists \varphi_n \in \mathcal{F}_s$, $\varphi_n \leq h$, $\exists \psi_n \in \mathcal{F}_s$, $\psi_n \geq h$,

$$0 \leq \int_A h - \varphi_n d\ell < \frac{1}{4n},\ 0 \leq \int_A \psi_n - h d\ell < \frac{1}{4n}.$$

Para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe φ_n^d uma função degrau tal que

$$A_{\varphi,n} = \{x \in [a,b]^m | \varphi_n^d(x) \neq \varphi_n(x)\}$$

tem medida menor que ε_2. Analogamente, $\forall n > 0$, $\forall \varepsilon_2 > 0$, $\exists \psi_n^d$ função degrau tal que

$$A_{\psi,n} = \{x \in [a,b]^m | \psi_n^d(x) \neq \psi_n(x)\}$$

satisfaz $\ell(A_{\psi,n}) < \varepsilon_2$.

Formemos uma partição produto de $[a,b]^m$ a partir de φ_n^d e ψ_n^d.

Podemos escrever φ_n^d como

$$\varphi_n^d = \sum_{i=1}^{k_{\varphi_n}} a_{n,i} \chi_{A^d_{\varphi_n,i}} - M\chi_{[a,b]^m - \bigcup_{i=1}^{k_{\varphi_n}} V_{\varphi_n,i}}$$

e, analogamente,

$$\psi_n^d = \sum_{i=1}^{k_{\psi_n}} b_{n,i} \chi_{A^d_{\psi_n,i}} - M\chi_{[a,b]^m - \bigcup_{i=1}^{k_{\psi_n}} V_{\psi_n,i}},$$

sendo os conjuntos $A^d_{\varphi_n,i}$, $A^d_{\psi_n,i}$, $[a,b]^m - \bigcup\limits_{i=1}^{k_{\varphi_n}} V_{\varphi_n,i}$ e $[a,b]^m - \bigcup\limits_{i=1}^{k_{\psi_n}} V_{\psi_n,i}$ uniões de intervalos de $\mathbb{R}^m$.

Seja a coleção destes intervalos $\{|\alpha^i, \beta^i| \big| \alpha^i = (\alpha_1^i, \ldots, \alpha_m^i),\ \beta_i = (\beta_1^i, \ldots, \beta_m^i) \in \mathbb{R}^m,$ $i \in I\}$ e, a partir desta coleção, formemos o conjunto de números reais $\{\alpha_j^i, \beta_j^i |\ 1 \leq j \leq m,$ $i \in I\}$. Todos estes números pertencem ao intervalo $[a,b]$ e, ordenando-os, obtemos uma partição de $[a,b]$, $\{a_0 = \gamma_0 < \cdots < \gamma_p = b\}$. Tomemos a partição produto induzida pela partição anterior. Chamaremos w_z, $z \in \{0, \ldots, p-1\}^m$ o intervalo $\prod_{i=1}^m |\gamma_{z_i}, \gamma_{z_i+1}|$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$.

Esta partição é construída de tal forma que para todos os seus intervalos ω_j as funções φ_n^d e ψ_n^d são funções constantes quando restritas a qualquer um destes intervalos.

Queremos escolher de cada intervalo ω_z um ponto x_z^* tal que

$$\varphi_n^d(x_z^*) \leq h(x_z^*) \leq \psi_n^d(x_z^*). \tag{2.1}$$

Suponha que para um intervalo ω_z não possamos escolher $x_z^* \in \omega_z$ que satisfaça à condição (2.1). Então, para todos os pontos $x \in \omega_z$ temos $\varphi_n^d(x) > h(x)$ ou $h(x) > \psi_n^d(x)$ e, portanto, $\omega_z \subset (\{x \in [a,b]^m | \varphi_n^d(x) > h(x)\} \cup \{x \in [a,b]^m | \psi_n^d(x) < h(x)\})$. Lembremos que $\{x \in [a,b]^m | \varphi_n^d(x) > h(x)\} \subset \{x \in [a,b]^m | \varphi_n^d(x) \neq \varphi_n(x)\} = A_{\varphi,n}$ pois sempre vale $\varphi_n \leq h$ e também que $\{x \in [a,b]^m | \psi_n^d(x) < h(x)\} \subset \{x \in [a,b]^m | \psi_n^d(x) \neq \psi_n(x)\} = A_{\psi,n}$ pois $\psi_n \geq h$. Lembremos também que $\ell(A_{\varphi,n}) < \varepsilon_2$ e $l(A_{\psi,n}) < \varepsilon_2$. Assim, $\omega_z \subset A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n}$. Seja C_1 a união de todos os intervalos deste tipo, isto é, $C_1 = \cup\{\omega_z | \nexists x_z^* \in \omega_z$ tal que (2.1) é verdadeira$\}$. Claramente, $C_1 \subset (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})$ e $\ell(C_1) < 2\varepsilon_2$. Seja $C_2 = \cup\{\omega_z | \exists x_z^* \in \omega_z$ tal que (2.1) é verdadeira$\}$.

Como $C_1 \cup C_2 = [a,b]^m$, concluímos que para uma união disjunta de intervalos que mede pelo menos $(b-a)^m - 2\varepsilon_2$ podemos escolher pontos x_z^* que obedecem a relação (2.1). Vamos construir agora a função $*\varphi_n$.

Nos intervalos ω_z dos quais podemos escolher x_z^* colocamos

$$*\varphi_n(x) = h(x_z^*),$$

para todo $x \in \omega_z$, e nos outros intervalos ω_z escolhemos, para cada intervalo, um ponto qualquer x^* deste intervalo e definimos $*\varphi_n(x) = h(x^*)$ para todo $x \in \omega_z$. (Observamos que, para todo n, $| *\varphi_n|_\infty \leq |h|_\infty$.)

Para $*\varphi_n : |a,b|^m \to \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_A | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell &= \int_{C_1} | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell + \int_{C_2} | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell \\
&\leq \int_{C_1} 2M \mathrm{d}\ell + \int_{C_2 - (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})} | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell + \int_{C_3 = C_2 \cap (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})} | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell.
\end{aligned}$$

Como $C_3 \subset (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})$, $\ell(C_3) < 2\varepsilon_2$, para todo $x \in C_2 - (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})$, temos $\varphi_n^d(x) = \varphi_n(x)$ e $\psi_n^d(x) = \psi_n(x)$ e, também, $\varphi_n^d(x) = \varphi_n(x) \leq h(x) \leq \psi_n(x) = \psi_n^d(x)$. Assim, para todos $x \in \omega_z$, ω_z contidos em $C_2 - (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})$,

$$| *\varphi_n(x) - h(x)| = |h(x_z^*) - h(x)| \leq |\psi_n^d(x) - \varphi_n^d(x)|,$$

pois

$$\varphi_n^d(x) \leq h(x) \leq \psi_n^d(x), \; \varphi_n^d(x_z^*) \leq h(x_z^*) \leq \psi_n^d(x_z^*)$$

e ambas funções φ_n^d e ψ_n^d são constantes em ω_z.

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\int_A | *\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell &\leq 2M(\ell(C_1) + \ell(C_3)) + \int_{C_2 - (A_{\varphi,n} \cup A_{\psi,n})} |\psi_n^d - \varphi_n^d| \mathrm{d}\ell \\
&< 8M\varepsilon_2 + \int_A |\psi_n - \varphi_n| \mathrm{d}\ell \\
&\leq 8M\varepsilon_2 + \int_A |\psi_n - h| \mathrm{d}\ell + \int_A |h - \varphi_n| \mathrm{d}\ell \\
&< 8M\varepsilon_2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Assim, obtivemos $\forall n > 0$, $\forall \varepsilon_2 > 0$, $\exists *\varphi_n$ função degrau,

$$\int_A |*\varphi_n - h| \mathrm{d}\ell < 8M\varepsilon_2 + \frac{1}{2n}.$$

Tomemos $\varepsilon_2 = \frac{1}{16Mn}$ para obter, $\forall n > 0$, $\exists *\varphi_n \int_A |*\varphi_n - h|\mathrm{d}\ell < \frac{1}{n}$.
Como

$$\int_A |*\varphi_n - h|\mathrm{d}\ell = \sum_z \int_{\omega_z} |h(x_z^*) - h|\mathrm{d}\ell,$$

escolhendo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e $*\varphi = *\varphi_n$, o lema é estabelecido. ∎

Corolário 2.1 *O Lema 2.1 é válido para* $h \in \overline{\mathcal{L}}^m$.

Demonstração Seja $h \in \overline{\mathcal{L}}^m$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Definimos os conjuntos e a função $C_z' = \{x \in [a,b]^m \| h(x)| < z\}$ para todo $z \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \int\limits_{C_z'} |h(x)|\mathrm{d}\ell$. Claramente, $f(z)$ é monótona não-decrescente. Como $h \in \overline{\mathcal{L}}^m$ temos $f(z) \to \int\limits_{[a,b]^m} |h(x)|\mathrm{d}\ell \in \mathbb{R}$ quando $z \to \infty$. Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\int\limits_{[a,b]^m - C'_{M_\varepsilon}} |h(x)|\mathrm{d}\ell < \varepsilon/3$. Seja $C_{M_\varepsilon} = [a,b]^m - C'_{M_\varepsilon}$.

Definamos h_ε por $h_\varepsilon(x) = h(x)$ se $x \in C'_{M_\varepsilon}$ e $h_\varepsilon(x) = 0$ se $x \in C_{M_\varepsilon}$.

Pelo Lema 2.1, existe $*\varphi_\varepsilon$ tal que $\int\limits_{[a,b]^m} |*\varphi_\varepsilon - h_\varepsilon|\mathrm{d}\ell < \varepsilon/3$. Agora,

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]^m} |*\varphi_\varepsilon - h|\mathrm{d}\ell &= \int_{C'_{M_\varepsilon}} |*\varphi_\varepsilon - h_\varepsilon|\mathrm{d}\ell + \int_{C_{M_\varepsilon}} |*\varphi_\varepsilon - h|\mathrm{d}\ell \\
&\leq \int_{[a,b]^m} |*\varphi_\varepsilon - h_\varepsilon|\mathrm{d}\ell + \int_{C_{M_\varepsilon}} 2|h|\mathrm{d}\ell < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

pois, $\forall x \in [a,b]^m$,

$$|*\varphi_\varepsilon(x) - h(x)| \leq |*\varphi_\varepsilon(x)| + |h(x)| \leq |*\varphi_\varepsilon|_\infty + |h(x)|$$

e, $\forall x \in C_{M_\varepsilon}$, $|h(x)| \geq M_\varepsilon \geq |h_\varepsilon|_\infty \geq |*\varphi_\varepsilon|_\infty$ e, portanto, $|*\varphi_\varepsilon - h| \leq 2|h|$ em $C_{M\varepsilon}$.

Logo, basta tomarmos $*\varphi = *\varphi_\varepsilon$ e obtemos, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists *\varphi$,

$$\int_{[a,b]^m} |*\varphi - h|\mathrm{d}\ell < \varepsilon.$$

∎

Corolário 2.2 *Se, no enunciado do Corolário 2.1, substituirmos* $|a,b|^m$ *por qualquer intervalo limitado* $|c,d|$ *de* $\mathbb{R}^m$ *com* $\ell(|c,d|) > 0$ *obtemos, para uma partição produto afim, uma afirmação verdadeira.*

Demonstração Seja $T : [0,1]^m \to [c,d]$ uma transformação afim bijetora e $\det(JT)$ o determinante de sua matriz jacobiana. Para $\varepsilon > 0$ tome $*\varphi$ a função degrau associada à função $h \circ T$ dada pelo Corolário 2.1, tal que

$$\int_{[0,1]^m} |*\varphi - h \circ T|\mathrm{d}\ell < \varepsilon / |\det(JT)|.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_{[c,d]} |*\varphi\circ T^{-1} - h|\mathrm{d}\ell &= \int_{[0,1]^m} |*\varphi\circ T^{-1}\circ T - h\circ T||\det(JT)|\mathrm{d}\ell \\ &= |\det(JT)|\int_{[0,1]^m} |*\varphi - h\circ T|\mathrm{d}\ell < \varepsilon,\end{aligned}$$

$*\varphi\circ T^{-1}$ é a função procurada.

Os intervalos e pontos procurados são as imagens por T dos intervalos ω_z da partição e dos pontos x_z^* obtidas pelo Corolário 2.1 para $[0,1]^m$ e $h\circ T$. ∎

Lema 2.2 *Sejam $h\in\mathcal{L}^m$, $a=(a_1,\ldots,a_m)$, $b=(b_1,\ldots,b_m)\in\mathbb{R}^m$ e $[a,b)=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_m,b_m)$, $[a_i,b_i)\subset\mathbb{R}$. Seja $\mu:\Lambda_{\mathbb{R}^m}\to\mathbb{R}$ uma medida para a qual, sobre todos os intervalos de $\mathbb{R}^m$, vale a relação seguinte:*

$$\mu([a,b)) = h(a)\ell([a,b)) + o_{a,b}(\ell([a,b))) \tag{2.2}$$

para um infinitésimo $o_{a,b}(z)$ tal que $\sup_{a,b\in\mathbb{R}^m}|o_{a,b}(z)| = o(z)$ é ainda um infinitésimo que satisfaz $o(\ell([a,b)))/\ell([a,b))\to 0$ quando $b-a\to 0$ e $o(0)=0$, sendo $\Lambda_{\mathbb{R}^m}$ a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue e ℓ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$. Então, para toda $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, μ-integrável, temos

$$\int_{\mathbb{R}^m}\varphi\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^m}\varphi h\mathrm{d}\ell. \tag{2.3}$$

Se assumirmos a hipótese menos restritiva na qual

$$\sup_{a\in I,b\in\mathcal{O}}|o_{a,b}(z)| = o_I(z), o_I(\ell([a,b)))/\ell([a,b))\to 0 \tag{2.4}$$

quando $b-a\to 0$ e $o_I(0)=0$, para todo $I=[x,y]$ intervalo limitado de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ aberto que contém I, a conclusão é válida para toda função φ μ-integrável com suporte limitado.

Em notação diferencial, se pudermos escrever $\mathrm{d}\mu=\mu(\mathrm{d}\ell)=h\mathrm{d}\ell+o_{a,b}(\mathrm{d}\ell)$ para intervalos de $\mathbb{R}^m$, significando isto que (2.2) é satisfeita, então teremos a igualdade das integrais na relação (2.3). Diremos que negligenciamos infinitésimos de ordem superior para obtermos tal igualdade. As medidas $\mu=\Lambda_{\mathbb{R}^m}\to\mathbb{R}$ e $\nu:\Lambda_{\mathbb{R}^m}\to\mathbb{R}$, $\nu(A)=\int_A h\mathrm{d}\ell$ são iguais e diremos que $\mathrm{d}\mu$ e $h\mathrm{d}\ell$ são iguais como medidas.

Utilizaremos, por facilidade, as notações $o_{a,b}(\ell([a,b)))=o_{a,[a,b)}(\ell([a,b)))=o_a(\ell([a,b)))$.

Demonstração (a) Primeiramente provemos que $\mu\ll\ell$. Seja $A\subset\mathbb{R}^m$ tal que $\ell(A)=0$. Se A é tal que $\operatorname{diam}(A)<\infty$, então tome $[c,d]$ a intersecção de todos intervalos fechados de $\mathbb{R}^m$ que contêm A. Seja $C=\{[c_i,d_i)|c_i,d_i\in\mathbb{R}^m, i\in I\}$ tal que $\bigcup_{i\in I}[c_i,d_i)\supset A$ e $|C|=\sup_{i\in I}\operatorname{diam}([c_i,d_i))$. Também, seja $\mathcal{C}$ conjunto de todas coberturas de A desta forma. Então,

$$\mu(A)\le\sum_{i\in I}\mu([c_i,d_i)) = \sum_{i\in I}[h(c_i)\ell([c_i,d_i)) + o_{c_i,d_i}(\ell([c_i,d_i)))]$$

na qual $o_{w,w'}$ tem a propriedade

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall w, w' \in \mathbb{R}^m, \forall[x,y) \subset \mathbb{R}^m(\|x-y\| < \delta \to |o_{w,w'}(\ell([x,y)))| < \varepsilon\ell([x,y)) \vee$$

$$(\ell([x,y)) = 0 \ \wedge \ o_{w,w'}(\ell([x,y))) = 0)). \tag{2.5}$$

Assim, tomando C tal que $|C| < \delta$, temos

$$\mu(A) \leq \sum_{i\in I}(|h(c_i)| + \varepsilon)\ell([c_i, d_i)). \tag{2.6}$$

Como h é limitada em intervalos limitados, existe $M > 0$ tal que $\forall x \in [c,d]$, $|h(x)| < M$. Portanto,

$$\mu(A) \leq \sum_{i\in I}(M+\varepsilon)\ell([c_i,d_i)) = (M+\varepsilon)\sum_{i\in I}\ell([c_i,d_i)).$$

Seja $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}^m$. Agora, dada uma cobertura C de A, podemos formar uma nova cobertura

$$\begin{aligned} C' &= \{[c_j, d_j) | j \in J\} \\ &= \{[c_i, d_i) \cap [z\delta/(2\sqrt{m}), (z + (1, \ldots, 1))\delta/(2\sqrt{m})) \mid i \in I, z \in \mathbb{Z}^m\} \end{aligned}$$

de A que satisfaz às condições

$$|C'| \leq \delta/2 \text{ e } \sum_{j\in J}\ell([c_j,d_j)) = \sum_{i\in I}\ell([c_i,d_i)).$$

Seja $\mathcal{C}_\delta$ a coleção de todas coberturas deste tipo, isto é, coberturas tais que $|C| < \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \inf_{C\in\mathcal{C}_\delta}\{(M+\varepsilon)\sum_{j\in J}\ell([c_j,d_j))\} = (M+\varepsilon)\inf_{C\in\mathcal{C}_\delta}\sum_{j\in J}\ell([c_j,d_j)) \\ &= (M+\varepsilon)\inf_{C\in\mathcal{C}}\sum_{i\in I}\ell([c_i,d_i)) = (M+\varepsilon)\ell^*(A) = 0, \end{aligned}$$

já que para um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^m$ basta tomarmos coberturas de A por intervalos de $\mathbb{R}^m$ contidos em $[c,d]$ para calcular $\ell^*(A)$, a medida exterior de Lebesgue de A.

Se diam$(A) = \infty$, então tomemos $A = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^m}(A \cap [z, z+(1,\ldots,1)))$, $A_z = A \cap [z, z + (1,\ldots,1))$. Para todos z temos $\mu(A_z) = 0$ e, portanto, $\mu(A) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^m}\mu(A_z) = 0$. Assim, completamos a prova de que $\mu \ll \ell$.

(b) Como $\mu \ll \ell$, existe $f = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\ell$, a derivada de Radon-Nikodym, tal que para toda φ μ-integrável, temos $\int\varphi\mathrm{d}\mu = \int\varphi f\mathrm{d}\ell$. Agora vamos provar que μ e ν, $\nu(A) = \int_A h\mathrm{d}\ell$ são medidas iguais e, conseqüentemente, $f = h$ q.s$[\ell]$.

Primeiramente provemos que ν é uma medida positiva, mostrando que $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$.

Seja $x \in \mathbb{R}^m$ um ponto arbitrário. Para todo $y \in \mathbb{R}^m$ temos

$$0 \leq \mu([x,y)) = h(x)\ell([x,y)) + o_x(\ell([x,y))).$$

Se $h(x) \neq 0$, tomemos $0 < \varepsilon < |h(x)|/2$. Existe $\delta > 0$ tal que para todos $y \in \mathbb{R}^m$ tais que $\|y - x\| < \delta$ vale $|o_x(\ell([x,y)))| < \varepsilon \ell([x,y))$. Assim, sob esta condição,

$$0 \leq \mu([x,y)) < h(x)\ell([x,y)) + \frac{|h(x)|}{2}\ell([x,y)).$$

Se escolhermos $y_1 = x + (1,\ldots,1)\delta/(2\sqrt{m}) \in \mathbb{R}^m$, temos $\|y_1 - x\| < \delta$ e $\ell([x,y)) \neq 0$. Assim, se $h(x) < 0$ teríamos $0 \leq \frac{h(x)}{2}\ell([x,y)) < 0$, uma contradição. Logo, $h(x) \geq 0$ para todos $x \in \mathbb{R}^m$.

Agora vamos provar que μ e ν são iguais sobre os intervalos limitados de $\mathbb{R}^m$.

Como $\mu \ll \ell$ e $\nu \ll \ell$, a fronteira de qualquer intervalo é um conjunto de μ e ν medidas zero. Assim só mostraremos a igualdade em intervalos da forma $[c,d)$.

Seja $[c,d) \neq \emptyset$ um intervalo limitado arbitrário de $\mathbb{R}^m$. Seja $c = (c_1,\ldots,c_m)$, $d = (d_1,\ldots,d_m)$ e, portanto, $[c,d) = \prod_{i=1}^m [c_i,d_i)$. Para todo i, $1 \leq i \leq m$, dividamos o intervalo $[c_i,d_i)$ em n partes com o auxílio dos pontos $c_i = a_{i,0} < \cdots < a_{i,n} = d_i$ tais que para todos j_i, $0 \leq j_i \leq n-1$, $a_{i,j_i+1} - a_{i,j_i} = (d_i - c_i)/n$ e formemos a partição produto

$$P = \left\{ A_{(j_1,\ldots,j_m)} = \prod_{i=1}^m |a_{i,j_i}, a_{i,j_i+1}| \;\middle|\; \forall i, 1 \leq i \leq m, \forall j_i, 0 \leq j_i \leq n-1 \right\},$$

resumidamente denotada por $P = \{A_j \mid j = (j_1,\ldots,j_n) \in \{0,\ldots,n-1\}^m\}$.

Seja $x_j = (a_{1,j_1},\ldots,a_{m,j_m})$. Caso $\ell([c,d)) = 0$ já sabemos que $\mu([c,d)) = \nu([c,d)) = 0$. Caso contrário, como $\operatorname{diam}(A_j) = \|d - c\|/n$, para todo $\varepsilon_1 > 0$ podemos escolher n_1 tal que $\|d - c\|/n_1 < \delta_1$, δ_1 dado por (2.5), para o qual temos

$$\forall n > n_1 \quad \left|\sum_j o_{x_j}(\ell(A_j))\right| \leq \sum_j |o_{x_j}(\ell(A_j))| < \varepsilon_1 \sum_j \ell(A_j) = \varepsilon_1 \ell([c,d)).$$

Suponhamos que $\mu([c,d)) - \nu([c,d)) = \int f - h d\ell$ é positiva.

$$0 < \int_{[c,d]} f - h d\ell = \sum_j \int_{A_j} f d\ell - \sum_j \int_{A_j} h d\ell = \sum_j \left(\mu(A_j) - \int_{A_j} h d\ell\right).$$

Agora, para todo j e para qualquer ε_j, pelo Corolário 2.2, existem partições

$$P_j = \{\omega_{j,z} | z \in \{0,\ldots,p_j - 1\}^m\}, \; \ell\left(A_j \Delta \bigcup_{z \in \{0,\ldots,p_j-1\}^m} \omega_{j,z}\right) = 0,$$

e pontos $x^*_{j,z} \in \omega_{j,z}$ tais que

$$\sum_{z \in \{0,\ldots,p_j-1\}^m} \int_{\omega_{j,z}} |h(x^*_{j,z}) - h| d\ell < \varepsilon_j.$$

Como $\omega_{j,z}$ é um intervalo de $\mathbb{R}^m$, ele tem 2^m vértices, distintos ou não. Vamos chamá-los $b_{j,z,k}$, $1 \leq k \leq 2^m$. Formemos os intervalos $|x^*_{j,z}, b_{j,z,k}| = \omega_{j,z,k}$. Para estes intervalos temos $\ell\left(\omega_{j,z} \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{2^m} \omega_{j,z,k}\right)\right) = 0$ e, como $\ell\left(A_j \Delta \bigcup_{z \in \{0,\ldots,p_j-1\}^m} \omega_{j,z}\right) = 0$, temos também

$\ell\left(A_j\Delta\left(\bigcup_{z,k}\omega_{j,z,k}\right)\right)=0$, pois a relação $L\sim M$ definida por $L\sim M\leftrightarrow \ell(L\Delta M)=0$ é uma relação de equivalência fechada por união enumerável.

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_j\left(\mu(A_j)-\int_{A_j}h\mathrm{d}\ell\right)=\sum_j\left(\mu\left(\bigcup_{z,k}\omega_{j,z,k}\right)-\sum_{z,k}\int_{\omega_{j,z,k}}h\mathrm{d}\ell\right)\\
&= \sum_j\left(\sum_{z,k}\left(\mu(\omega_{j,z,k})-\int_{\omega_{j,z,k}}h\mathrm{d}\ell\right)\right)\\
&= \sum_{j,z,k}\left(h(x^*_{j,z})\ell(\omega_{j,z,k})+o_{x^*_{j,z}}(\ell(\omega_{j,z,k}))-\int_{\omega_{j,z,k}}h\mathrm{d}\ell\right)\\
&= \sum_{j,z,k}\left(\int_{\omega_{j,z,k}}h(x^*_{j,z})-h\mathrm{d}\ell+o_{x^*_{j,z}}(\ell(\omega_{j,z,k}))\right).
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{diam}(\omega_{j,z,k})\le\operatorname{diam}(A_j)$, tomando valores absolutos temos

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{[c,d)}f-h\mathrm{d}\ell<\sum_j\left(\sum_z\int_{\omega_{j,z}}|h(x^*_{j,z})-h|\mathrm{d}\ell\right)+\varepsilon_1\sum_{j,z,k}\ell(\omega_{j,z,k})\\
&< \sum_j\varepsilon_j+\varepsilon_1\ell([c,d)).
\end{aligned}$$

Assim, para $\varepsilon>0$ arbitrário, escolhemos $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2\ell([c,d))}$ e $\varepsilon_j=\frac{\varepsilon}{2n^m}$ para todo j e podemos escrever

$$0<\int_{[c,d)}f-h\mathrm{d}\ell<\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon\to0$, temos $0<\int_{[c,d)}f-h\mathrm{d}\ell\le0$, uma contradição.

Se supusermos que $\int_{[c,d)}f-h\mathrm{d}\ell$ é negativa, analogamente podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{[c,d)}h-f\mathrm{d}\ell\le\sum_j\left(\sum_z\int_{\omega_{j,z}}|h(x^*_{j,z})-h|\mathrm{d}\ell\right)-\sum_{j,z,k}o_{x^*_{j,z}}(\ell(\omega_{j,z,k}))\\
&\le \sum_j\varepsilon_j-0
\end{aligned}$$

e concluir que $0<\int_{[c,d)}h-f\mathrm{d}\ell\le0$, outra contradição.

Portanto, $\int_{[c,d)}h-f\mathrm{d}\ell=0$ para qualquer intervalo limitado $[c,d)\subset\mathbb{R}^m$.

Como todo intervalo de $\mathbb{R}^m$ é união enumerável de intervalos limitados, concluímos que $\int_{[c,d)}h-f\mathrm{d}\ell=0$ para todo intervalo $[c,d)$ do $\mathbb{R}^m$.

Seja agora $A\in\Lambda_{\mathbb{R}^m}$ um conjunto limitado.

Como A é um conjunto mensurável limitado, para todo $\varepsilon>0$ existe um conjunto aberto $\mathcal{O}\supset A$ tal que $\ell(\mathcal{O}-A)<\varepsilon$.

Para cada $n\ge1$, seja $\tilde{\mathcal{O}}_n\supset A$ um aberto tal que $\ell(\tilde{\mathcal{O}}_n-A)<1/n$ e para $n=1$, $\tilde{\mathcal{O}}_1$ limitado. Seja $\mathcal{O}_n=\bigcap_{k=1}^{n}\tilde{\mathcal{O}}_k$ para todo $n\ge1$. Claramente, $\mathcal{O}_{n+1}\subset\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_n$ é limitado para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{O}_n$ é aberto, podemos escolher intervalos abertos disjuntos (c_i, d_i) de $\mathbb{R}^m$, $i \in I_n$, contidos em $\mathcal{O}_n$, tais que $\ell(\mathcal{O}_n - \bigcup_{i \in I_n} (c_i, d_i)) = 0$, $\# I_n \leq \# \mathbb{N}$.

Observamos que, para todo conjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^m$, temos $\int_B f \mathrm{d}\ell < \infty$ pois, sendo B limitado $\exists$ I intervalo limitado de $\mathbb{R}^m$ tal que $B \subset I$ e podemos escrever $\int_B f \mathrm{d}\ell = \mu(B) \leq \mu(I) = \int_I h \mathrm{d}\ell < \infty$.

Suponhamos que $0 < \int_A f - h \mathrm{d}\ell$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &< \int_A f - h \mathrm{d}\ell = \int_{\mathcal{O}_n} f - h \mathrm{d}\ell - \int_{\mathcal{O}_n - A} f - h \mathrm{d}\ell \\ &= \sum_{i \in I_n} \int_{(c_i, d_i)} f - h \mathrm{d}\ell - \int_{\mathcal{O}_n - A} f - h \mathrm{d}\ell \\ &\leq \sum_{i \in I_n} 0 + \int_{\mathcal{O}_n - A} h \mathrm{d}\ell - \int_{\mathcal{O}_n - A} f \mathrm{d}\ell \\ &\leq \int_{\mathcal{O}_n - A} h \mathrm{d}\ell < \sup_{\mathcal{O}_1} |h| \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como h é limitada em $\mathcal{O}_1$, fazendo $n \to \infty$ obtemos uma contradição.

Por outro lado, se $\int_A f - h \mathrm{d}\ell$ é negativa então, para todo $n \geq 1$, temos

$$0 < \int_A h - f \mathrm{d}\ell = 0 - \int_{\mathcal{O}_n - A} h - f \mathrm{d}\ell \leq \int_{\mathcal{O}_n - A} f \mathrm{d}\ell = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_{(\mathcal{O}_n - A)} \mathrm{d}\ell.$$

Seja $f_n = f \chi_{(\mathcal{O}_n - A)}$. Então $f_n \downarrow f \chi_{(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n - A)}$ e como $\ell\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n - A\right) = 0$, $\chi_{(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n - A)} = 0$ q.s.$[\ell]$.

Portanto,

$$0 < \int_A h - f \mathrm{d}\ell \leq \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n \mathrm{d}\ell = \int_{\mathbb{R}^m} \lim f_n \mathrm{d}\ell = \int_{\mathbb{R}^m} 0 \mathrm{d}\ell = 0,$$

outra contradição. Assim, concluímos que para todo conjunto limitado $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^m}$, $\nu(A) = \mu(A)$.

Como podemos escrever qualquer conjunto não limitado $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^m}$ como uma união enumerável disjunta de conjuntos limitados pertencentes a $\Lambda_{\mathbb{R}^m}$, finalmente concluímos que $\nu = \mu$ em $\Lambda_{\mathbb{R}^m}$, $f = h$ q.s.$[\ell]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi f \mathrm{d}\ell = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi h \mathrm{d}\ell.$$

Para a segunda parte do lema, sendo $\operatorname{supp} \varphi$ um conjunto limitado, escolhemos I tal que $\operatorname{Int}(I) \supset \operatorname{supp} \varphi$ e repetimos o argumento acima para as medidas μ e ν restritas aos conjuntos mensuráveis contidos em I. Isto completa a demonstração do Lema 2.2. ∎

Corolário 2.3 *O Lema 2.2 é válido para* $h \in \overline{\mathcal{L}}^m$.

Demonstração Repetimos os passos da demonstração do Lema 2.2, com as seguintes modificações.

(a) Para provar que $\mu \ll \ell$. Sejam, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A \cap h^{-1}[n, n+1)$, $C_n = \{[c_i, d_i) | i \in I_n\}$ cobertura de A_n e $\mathcal{C}_n$ a classe destas coberturas. Seja $|C_n| = \sup_{i \in I_n} \operatorname{diam}[c_i, d_i)$. Para uma cobertura C_n de A_n sempre podemos formar uma cobertura C_n^* que é escrita como $C_n^* = \{[c_i^*, d_i] | i \in I_n^*, c_i^* \in A_n\}$ pois, se $[c_i, d_i) \in C_n$ é tal que $[c_i, d_i) \cap A_n = \emptyset$ não o incluímos em C_n^* e se $[c_i, d_i) \cap A_n \neq \emptyset$ escolhemos $c_i^* \in [c_i, d_i) \cap A_n$ e formamos os intervalos $[c_i^*, b_{i,k})$, $1 \leq k \leq 2^m$, $b_{i,k}$ é vértice de $[c_i, d_i)$ e os incluímos em C_n^*. Claramente, C_n^* assim formada é uma cobertura de A_n e $|C_n^*| \leq |C_n|$. Também temos que $C^* = \{[c_i^*, b_{i,k}] | i \in I^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n^*\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^*$ é uma cobertura de A e se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|C_n^*| < \delta$ então $|C^*| \leq \delta$. Seja $\mathcal{C}_{n,\delta}^*$ a classe de todas as coberturas C_n^* de A_n tais que $|C_n^*| < \delta/2$ e $u\mathcal{C}_{n,\delta}^*$ a classe de todas as coberturas de A formadas por uniões de coberturas em $\mathcal{C}_{n,\delta}^*$, isto é, das coberturas da forma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^*$, $C_n^* \in \mathcal{C}_{n,\delta}^*$. Claramente, $\forall C^* \in u\mathcal{C}_{n,\delta}^*$ temos $|C^*| < \delta$.

Observe que, para todo intervalo $[a,b)$ de dimensão m, $\mu([a,b]) = \mu([a,b))$ pois $[a,b] - [a,b) \subset \partial[a,b] = \bigcup_{j=1}^{f(m)} [\tilde{a}_j, \tilde{b}_j]$, $[\tilde{a}_j, \tilde{b}_j]$ face de codimensão 1 do intervalo $[a,b]$, sendo $f(m)$ o número de tais faces do hipercubo de dimensão m, e $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\mu([\tilde{a}_j, \tilde{b}_j]) &\leq \mu([\tilde{a}_j, \tilde{b}_j + \alpha(\tilde{b}_j - \tilde{a}_j))) \\
&= h(\tilde{a}_j)\ell([\tilde{a}_j, \tilde{b}_j + \alpha(\tilde{b}_j - \tilde{a}_j))) + o_{\tilde{a}_j, \tilde{b}_j + \alpha(\tilde{b}_j - \tilde{a}_j)}(\ell([\tilde{a}_j, \tilde{b}_j + \alpha(\tilde{b}_j - \tilde{a}_j)))) \\
&= h(\tilde{a}_j).0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Caso a dimensão de $[a,b)$ seja menor que m temos, com visto acima, $\mu([a,b]) = \mu([a,b)) = 0$. Observe que sempre temos $\mu(\partial[a,b]) = 0$.

Agora, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $0 \leq z \leq \delta \to o(z) \leq \varepsilon z$.

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \inf_{C^* \in u\mathcal{C}_{n,\delta}^*} \sum_{i \in I^*} \mu([c_i^*, b_{i,k}]) = \inf_{C^* \in u\mathcal{C}_{n,\delta}^*} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n^*} \mu([c_i^*, b_{i,k})) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \inf_{C_n^* \in \mathcal{C}_{n,\delta}^*} \sum_{i \in I_n^*} (h(c_i^*)\ell([c_i^*, b_{i,k})) + o_{c_i^*, b_{i,k}}(\ell([c_i^*, b_{i,k})))) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \inf_{C_n^* \in \mathcal{C}_{n,\delta}^*} \sum_{i \in I_n^*} (h(c_i^*) + \varepsilon)\ell([c_i^*, b_{i,k})) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n + 1 + \varepsilon) \inf_{C_n^* \in \mathcal{C}_{n,\delta}^*} \sum_{i \in I_n^*} \ell([c_i^*, b_{i,k})) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n + 1 + \varepsilon)0 = 0,
\end{aligned}$$

pois $\ell^*(A_n) = 0$ se $\ell(A) = 0$.

(b) Basta estabelecer a equação (2.7).

Como $\mathcal{O}_1$ é limitado, temos $\int_{\mathcal{O}_1} h d\ell \in \mathbb{R}$. Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\int_{C_M} h d\ell < \varepsilon$, $C_M = \{x \in \mathcal{O}_1 | h(x) > M\}$. Portanto,

$$\int_{\mathcal{O}_n - A} h d\ell = \int_{C_M \cap (\mathcal{O}_n - A)} h d\ell + \int_{(\mathcal{O}_n - A) - C_M} h d\ell < \varepsilon + M\ell((\mathcal{O}_n - A) - C_M) < \varepsilon + M\frac{1}{n}.$$

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1$, $\int\limits_{\mathcal{O}_n - A} h d\ell < \varepsilon + \frac{M}{n}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ e $n \to \infty$ temos $\int\limits_{\mathcal{O}_n - A} h d\ell \to 0$.

Sendo estas as únicas modificações necessárias na demonstração do Lema 2.2, fica o corolário estabelecido. ∎

Corolário 2.4 *O Corolário 2.3 é válido para toda função φ, μ-integrável, sob a hipótese de existência de uma cobertura $\{I_j\}_{j \in J}$ de $\mathbb{R}^m$, I_j intervalo de $\mathbb{R}^m$ e J enumerável, tal que, $\forall j \in J$, $\sup\limits_{a \in I_j, b \in \mathcal{O}^j} |o_{a,b}(z)| = o_{I_j}(z)$ com $\mathcal{O}^j$ aberto $\mathcal{O}^j \supset \overline{I}_j$,*

$$o_{I_j}(\ell([a,b)))/\ell([a,b)) \to 0 \text{ quando } b - a \to 0 \text{ e } o_{I_j}(0) = 0. \tag{2.8}$$

Infinitésimos que satisfazem (2.8) serão chamados infinitésimos do tipo o_I.

Demonstração Suponha, sem perda de generalidade, que $J = \mathbb{N}$ e que todo intervalo I_j é limitado, já que se não o fosse poderíamos escrevê-lo como uma união enumerável de intervalos limitados nele contidos e, portanto, para os quais (2.8) ainda seria válida.

Dada uma cobertura $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, construamos a partição $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^m$ fazendo $A_0 = I_0$ e $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = I_n - \bigcup\limits_{j=0}^{n-1} A_j$. Sendo $\partial A_n = \overline{A}_n - \text{Int}\,(A_n)$ temos, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell(\partial A_n) = 0$ e $\partial A_n \subset \bigcup\limits_{j=0}^{n} \partial I_j$. Já que $\mu(\partial I_J) = 0$, relação esta estabelecida para $h \in \overline{\mathcal{L}}^m$ no Corolário 2.3, também temos $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(\partial A_n) = 0$. Aqui notamos a necessidade de termos $\mathcal{O}^j \supset \overline{I}_j$, aberto, para podermos repetir o correspondente argumento do referido corolário.

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi d\mu = \int_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_n} \varphi d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\text{Int}\,(A_j)} \varphi d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{\text{Int}\,(A_j)} d\mu.$$

Agora, seja $B_{j,k} = \{x \in \text{Int}\,(A_j) \mid d(x, \partial A_j) > 1/k\}$. Claramente, $B_{j,k}$ é um conjunto aberto contido em $\text{Int}\,(A_j)$, para todo $k \geq 1$. Também temos $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} B_{j,k} = \text{Int}\,(A_j)$.

Como, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{supp}\,(\varphi \chi_{B_{j,k}}) \subset \{x \in \text{Int}\,(A_j) \mid d(x, \partial A_j) \geq 1/k\} \subset \text{Int}\, A_j \subset I_j$, podemos repetir a argumentação final da demonstração do Lema 2.2, já que o fato de $\text{Int}\,(A_j)$ ser um conjunto aberto garante a existência dos conjuntos $\mathcal{O}_n$ que aparecem na demonstração do Lema 2.2 (Corolário 2.3) e também temos garantida a condição de o_x ser um infinitésimo que é em módulo majorado pelo infinitésimo o_{I_j} que é independente do ponto $x \in \text{Int}\,(A_j) \supset \text{supp}\,\chi_{B_{j,k}}$ para todo k.

Portanto, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{B_{j,k}} d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{B_{j,k}} h d\ell.$$

Agora, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{\text{Int}\,(A_j)} d\mu &= \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{B_{j,k}} d\mu = \lim_{k \to \infty} \int \varphi \chi_{B_{j,k}} h d\ell \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{\text{Int}\,(A_j)} h d\ell\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{\mathrm{Int}\,(A_j)} \mathrm{d}\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \chi_{\mathrm{Int}\,(A_j)} h \mathrm{d}\ell = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi h \mathrm{d}\ell.$$

∎

Corolário 2.5 *O Corolário 2.3 é válido para toda função φ, μ-integrável, sob a hipótese da existência de uma cobertura $\{C_j\}_{j\in J}$ de $\mathbb{R}^m$, $C_j \in \Lambda_{\mathbb{R}^m}$, J enumerável com $\ell(\partial C_j) = \mu(\partial C_j) = 0$ para todo $j \in J$ tal que*

$$\forall j \in J, \quad \sup_{a,b\in C_j, b\in \mathcal{O}^j} |o_{a,b}(z)| = o_{C_j}(z), \ \mathcal{O}^j \textit{aberto que contém } C_j,$$

com $o_{C_j}(\ell([a,b)))/\ell([a,b)) \to 0$ quando $b - a \to 0$ e $o_{C_j}(0) = 0$.

Demonstração Imediata.

Para generalizações, ver de Miranda (2003).

O Lema 2.2 e os seus corolários podem ser estendidos para o caso em que μ é uma medida com sinal, fazendo-se a decomposição da medida μ com o auxílio dos conjuntos

$$A^+ = \{x \in \mathbb{R}^m | h(x) \geq 0\} \quad \text{e} \quad A^- = \{x \in \mathbb{R}^m | h(x) < 0\}$$

e colocando

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap A^+) \quad \text{e} \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap A^-),$$

para todo $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^m}$.

Como $\mu = \mu^+ - \mu^-$, μ^+ e μ^- medidas positivas que satisfazem as condições do Lema 2.2 e seus corolários para $h^+ = \max\{h, 0\}$ e $h^- = -\min\{h, 0\}$, temos

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \int \varphi \mathrm{d}\mu^+ - \int \varphi \mathrm{d}\mu^- = \int \varphi h^+ \mathrm{d}\ell - \int \varphi h^- \mathrm{d}\ell = \int \varphi h \mathrm{d}\ell.$$

Analisemos o exemplo. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(Q) = \{1\}$ e $h(\mathbb{R} - Q) = \{0\}$. A relação $\mu([a,b)) = h(a)\ell([a,b)) + o_{a,b}(\ell([a,b)))$ não gera uma medida em $\mathbb{R}$ pois se μ fosse uma medida teríamos, para uma partição de $[0,1)$ da forma $0 < \frac{1}{m} < \ldots < \frac{m-1}{m} < 1$, $m \geq 3$,

$$\mu([0,1)) = \sum_{n=1}^{m} \left(h\left(\frac{n-1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}\right) + o_{\frac{n-1}{m}}\left(\frac{1}{m}\right)\right) = 1 + \sum_{n=1}^{m} o_{\frac{n-1}{m}}\left(\frac{1}{m}\right) \to 1 \text{ quando } m \to \infty$$

pois para $I = [0,1]$,

$$\left|\sum_{n=1}^{m} o_{\frac{n-1}{m}}\left(\frac{1}{m}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{m} o_I\left(\frac{1}{m}\right) = m o_I\left(\frac{1}{m}\right) \to 0 \text{ quando } m \to \infty;$$

e, por outro lado, tomando a partição $0 = i_0 < i_1 < \frac{1}{m} < \ldots < i_{m-1} < \frac{m-1}{m} < i_m = 1$, i_k irracional para $1 \leq k \leq m-1$, temos

$$\mu([0,1)) = 0 + \sum_{n=1}^{m} o_{i_{n-1}}(i_n - i_{n-1}) \to 0 \text{ quando } m \to \infty$$

pois

$$\left|\sum_{n=1}^{m} o_{i_{n-1}}(i_n - i_{n-1})\right| \le \sum_{n=1}^{m} o_I(i_n - i_{n-1}) \le \sum_{n=1}^{m} \sup_{0<y<\frac{2}{m}} o_I(y) = m \sup_{0<y<\frac{2}{m}} o_I(y) \to 0,\ m \to \infty.$$

Este exemplo mostra que nem todas as funções $\overline{\mathcal{L}}^m$ geram medidas. Enunciamos então, o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *Se μ é uma medida sobre os intervalos de $\mathbb{R}^m$ definida pela relação $\mu([a,b)) = h(a)\ell([a,b)) + o_{a,b}(\ell([a,b)))$, na qual o infinitésimo $o_{a,b}$ satisfaz*

$$\sup_{(a,b)\in I\times\mathcal{O}} |o_{a,b}(z)| = o_I(z) \text{ é outro infinitesimal tal que } o_I(\ell([a,b)))/\ell([a,b)) \to 0$$

quando $b - a \to 0$ e $o_I(0) = 0$, para todo I intervalo finito de $\mathbb{R}^m$ e $\mathcal{O}$ algum aberto que contém I, e $h \in \mathcal{L}^m$, então a função h é Riemann-integrável nos intervalos limitados.

Demonstração Seja $[a,b) = \prod_{i=1}^{m}[a_i,b_i)$ arbitrário e P uma partição produto qualquer, P gerada pelas partições de $[a_i,b_i)$, $a_i = a_{i,0} < \cdots < a_{i,p_i} = b_i$, $1 \le i \le m$. Sejam $J = \prod_{i=1}^{m}\{0,\ldots,p_i-1\}$ e $A_j = \prod_{i=1}^{m} |a_{i,j_i}, a_{i,j_i+1}|$, $j = (j_1,\ldots,j_m) \in J$.

Para cada $j \in J$ existe uma seqüência $\{x_j^{*k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A_j$, $h(x_j^{*k}) \to \sup_{x\in A_j} h(x)$ quando $k \to \infty$ com $\sup_{x\in A_j} h(x) - h(x_j^{*k}) < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Analogamente, existe $\{x_{j*}^{k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A_j$, $h(x_{j*}^{k}) \to \inf_{x\in A_j} h(x)$ quando $k \to \infty$ tal que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $h(x_{j*}^{k}) - \inf_{x\in A_j} h(x) < \frac{1}{k}$.

Sejam $y_{j,\ell}$ os vértices dos intervalos A_j. Podemos então escrever para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $A_j \sim \bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_j^{*k}, y_{j,\ell}|$ e $A_j \sim \bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_{j*}^{k}, y_{j,\ell}|$ na qual $\sim$ é a relação equivalência $A \sim B \leftrightarrow \ell(A\Delta B) = 0$.

Temos

$$A_j - \bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_j^{*k}, y_{j,\ell}| \subset \bigcup_{\ell=1}^{2^m} \partial|x_j^{*k}, y_{j,\ell}| \quad \text{e} \quad A_j - \bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_{j*}^{k}, y_{j,\ell}| \subset \bigcup_{\ell=1}^{2^m} \partial|x_{j*}^{k}, y_{j,\ell}|.$$

Como estas fronteiras são formadas por uniões finitas de intervalos de $\mathbb{R}^m$ de medida de Lebesgue 0, pois estão contidos em hiperplanos de codimensão maior ou igual a 1, temos para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(A_j) = \sum_{\ell=1}^{2^m} \mu(|x_j^{*k}, y_{j,\ell}|) = \sum_{\ell=1}^{2^m} \mu(|x_{j*}^{k}, y_{j,\ell}|),$$

já que $\mu(\partial|x_j^{*k}, y_{j,\ell}|) = \mu(\partial|x_{j*}^{k}, y_{j,\ell}|) = 0$, para todo k e ℓ pois, sendo $[c,d)$ um intervalo de dimensão menor ou igual a $m-1$, temos $\ell([c,d)) = 0$ e assim, $\mu([c,d)) = h(c)\ell([c,d)) + o_{c,d}(\ell([c,d))) = h(c)0 + 0 = 0$ e estas fronteiras são uniões de tais intervalos.

Agora vamos mostrar que h é Riemann-integrável em $[a,b)$ e que $\mu([a,b)) = \int\limits_{[a,b)} h d\ell$. Para isto precisamos mostrar que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P$,

$$|P| = \max_{j \in J} \operatorname{diam}(A_j) < \delta, \; \forall x_j \in A_j, \; \left| \sum_{j \in J} h(x_j)\ell(A_j) - \mu[a,b) \right| < \varepsilon$$

ou, equivalentemente, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall P$, $|P| < \delta$,

$$\left(\left| \sum_{j \in J} \sup_{x \in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b)) \right| < \varepsilon \;\wedge\; \left| \sum_{j \in J} \inf_{x \in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b)) \right| < \varepsilon \right).$$

Como μ é uma medida sobre os intervalos, escrevendo para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$[a,b) \sim \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_{j*}^k, y_{j,\ell}| \right) \sim \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{\ell=1}^{2^m} |x_j^{*k}, y_{j,\ell}| \right),$$

temos

$$\begin{aligned} \mu([a,b)) &= \sum_{j \in J} \sum_{\ell=1}^{2^m} \mu([x_{j*}^k, y_{j,\ell})) \\ &= \sum_{j,\ell} (h(x_{j*}^k)\ell([x_{j*}^k, y_{j,\ell})) + o_{x_{j*}^k, y_{j,\ell}}(\ell([x_{j*}^k, y_{j,\ell})))) \\ &= \sum_{j \in J} h(x_{j*}^k)\ell(A_j) + \sum_{j,\ell} o_{x_{j*}^k, y_{j,\ell}}(\ell([x_{j*}^k, y_{j,\ell}))). \end{aligned}$$

Para o infinitesimal $o_{[a,b)}$ temos,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall [x,y) \subset \mathbb{R}^m (\|x-y\| < \delta_1 \to o_{[a,b)}(\ell([x,y))) < \varepsilon_1 \ell([x,y)) \\ &\qquad \vee \quad (\ell([x,y)) = 0 \;\wedge\; o_{[a,b)}(\ell([x,y))) = 0)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim, tomando $|P| < \delta_1$ temos

$$\sum_{j,\ell} o_{[a,b)}(\ell(|x_{j*}^k, y_{j,\ell}|)) < \sum_{j,\ell} \varepsilon_1 \ell(|x_{j*}^k, y_{j,\ell}|) = \varepsilon_1 \ell([a,b)).$$

Já que

$$\sum_j h(x_{j*}^k)\ell(A_j) < \sum_j \left(\inf_{x \in A_j} h(x) + \frac{1}{k} \right) \ell(A_j),$$

temos

$$\sum_j \inf_{x \in A_j} h(x)\ell(A_j) \le \sum_j h(x_{j*}^k)\ell(A_j) < \sum_j \inf_{x \in A_j} h(x)\ell(A_j) + \frac{1}{k}\ell([a,b)).$$

Portanto,

$$\left| \sum_j \inf_{x \in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b)) \right| < \frac{1}{k}\ell([a,b)) + \varepsilon_1 \ell([a,b)).$$

Analogamente,

$$\left|\sum_{j}\sup_{x\in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b))\right| < \frac{1}{k}\ell([a,b)) + \varepsilon_1\ell([a,b)).$$

Assim, obtivemos $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $\forall P$, $|P| < \delta_1$,

$$\left|\sum_{j\in J}\inf_{x\in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b))\right| < \left(\frac{1}{k} + \varepsilon_1\right)\ell([a,b)) \ \wedge$$

$$\left|\sum_{j\in J}\sup_{x\in A_j} h(x)\ell(A_j) - \mu([a,b))\right| < \left(\frac{1}{k} + \varepsilon_1\right)\ell([a,b)).$$

Basta agora, $\forall \varepsilon > 0$, escolher $k > \dfrac{2\ell([a,b))}{\varepsilon}$ e $\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{2\ell([a,b))}$. ∎

Observe que se modificarmos o enunciado da Proposição 2.1 escrevendo $\overline{I}$, o fecho de I no lugar de $\mathcal{O}$, obtemos outro enunciado verdadeiro.

Proposição 2.2 *(de Miranda, Tausk.) Se $\mu([a,b)) = h(a)\ell([a,b)) + o_{a,b}\ell([a,b))$, com $h \in \overline{\mathcal{L}}^1$ e $o_{a,b}$ como na Proposição 2.1 para $m = 1$, é uma medida sobre os intervalos de $\mathbb{R}$, então h é contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração De fato, do Corolário 2.3, se $h \in \overline{\mathcal{L}}^1$ então $\mu([a,b)) = \int_{[a,b)} h\mathrm{d}l$. Assim, para $b \neq a$ temos:

$$\frac{o_{a,b}(|b-a|)}{|b-a|} = \frac{\mu([a,b)) - h(a)|b-a|}{|b-a|} = \frac{\int_{[a,b)} h\mathrm{d}l}{|b-a|} - h(a) \to 0$$

quando $b \to a$, uniformemente em a.

Seja $f(t) = \int_a^t h\mathrm{d}l$. Como $f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{b\to a} \frac{\int_{[a,b)} h\mathrm{d}l}{|b-a|} = h(a)$, sendo este limite uniforme em a, a função f é uniformemente derivável e conseqüentemente f é de classe C^1. Logo $h = f'$ é contínua.

∎

2.2 Infinitésimos e processos pontuais

Lema 2.3 *Sejam $\mathcal{E}^m = \{x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m | x_i = x_j$ para algum par $i,j, i \neq j\}$, φ uma função $E\left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}N(t_i)\right)$-integrável em $\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m$, p_m a densidade produto de ordem m e $p_1 = p_N$ a função intensidade de um processo pontual N que satisfaz (1.18) e (1.19). Então, se $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m$, $m \geq 1$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \varphi E\left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}N(t_i)\right) = \int_{\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \varphi p_m \prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}t_i \ .$$

Observamos que este lema mostra que se a função intensidade ou a densidade produto p_m é definida q.s.[ℓ] como um limite uniforme e é Lebesgue integrável nos intervalos limitados de $\mathbb{R}^m$, então ela também é a derivada de Radon-Nikodym de $E\left(\prod_{i=1}^{m} N\right)$ com relação a ℓ.

Demonstração Utilizamos a notação $p_N = p_1$, $k_\delta = k_{\delta,1}$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $\Delta = (|\Delta_1|, \ldots, |\Delta_m|)$.

Para todo $m \geq 1$, pela Proposição (1.2)

$$P\{N(\Delta_i) = 1,\ 1 \leq i \leq m\} \leq E\left(\prod_{i=1}^{m} N(\Delta_i)\right)$$
$$\leq P\{N(\Delta_i) = 1,\ 1 \leq i \leq m\} + K_{\delta,m} \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| \left\{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right\}.$$

De (1.20),

$$E\left(\prod_{i=1}^{m} N(\Delta_i)\right) \leq p_m(t) \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| + o_t(\Delta) + K_{\delta,m} \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| \left\{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right\}.$$

Agora,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \left| o_t(\Delta) + K_{\delta,m} \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| \left\{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right\}\right|$$
$$\leq o(\Delta) + K_{\delta,m} \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| \left\{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right\} = o^1(\Delta).$$
$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o^1(\Delta)}{\prod_{i=1}^{m} |\Delta_i|} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\prod_{i=1}^{m} |\Delta_i|} + K_{\delta,m} \lim_{\Delta \to 0} \left\{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-|\Delta_i|}\right)^2 - 1\right\} = 0.$$

Assim, existe um infinitésimo $o_t^*(\Delta) = o^*_{t,\prod_{i=1}^m \Delta_i}$ tal que

$$E\left(\prod_{i=1}^{m} N(\Delta_i)\right) = p_m(t) \prod_{i=1}^{m} |\Delta_i| + o_t^*(\Delta),$$

com $o^* = \sup\limits_{t,\prod \Delta_i} o_{t,\prod \Delta_i}$ que satisfaz $\dfrac{o^*(\Delta)}{\prod_{i=1}^{m} |\Delta_i|} \to 0$ quando $\Delta \to 0$. Como $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m$, a hipótese do Corolário (2.3) está satisfeita para $\mu = E\left(\prod_{i=1}^{m} N\right)$. Assim, negligenciando infinitésimos de ordem superior, obtemos então

$$\int_{\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \varphi \mathrm{d}\left(E\left(\prod_{i=1}^{m} N\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \varphi E\left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}N(t_i)\right) = \int_{\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m} \varphi p_m \prod_{i=1}^{m} \mathrm{d}t_i.$$

A primeira igualdade é apenas uma notação. ∎

Claramente, $\mathcal{E}^1 = \emptyset$ e $\mathcal{E}^2 = D = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto diagonal de $\mathbb{R}^2$.

Lema 2.4 *Sejam N um processo pontual que satisfaz às condições (1.9), (1.10); (1.18) e (1.19) para $m = 2$ com $p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ e $p_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, p_2 essencialmente limitada em intervalos limitados e φ uma função $p_N\mathrm{d}t$-integrável, equivalentemente $\mathrm{E}\mathrm{d}N$-integrável, com suporte limitado. Então,*

$$\int \varphi(t)p_N(t)\mathrm{d}t = \int \varphi(t)\mathrm{Var}\,(\mathrm{d}N(t)), \tag{2.10}$$

igualdade na qual o segundo membro significa $\iint_D \varphi_1(u,v)\mathrm{Cov}\,(\mathrm{d}N(u), \mathrm{d}N(v))$, D sendo o conjunto diagonal em $\mathbb{R}^2$ e $\varphi(t) = \varphi_1(t,t)$.

A igualdade (2.10) continua válida para φ $p_N\mathrm{d}t$-integrável se $p_2 - p_1 \otimes p_1$ for essencialmente limitada em $\mathbb{R}^2 - D$ e p_1 limitada em $\mathbb{R}$.

Demonstração Seja $\mu = \mathrm{Cov}\,(N,N) : \Lambda_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ e definamos $\mu_1 : \Lambda_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ por $\mu_1(A) = \mu(A \cap D)$ e $\mu_2 : \Lambda_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ por $\mu_2(A) = \mu(A - D)$.

Sejam $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq v$, $|\Delta_1| > 0$, $|\Delta_2| > 0$ tais que $[u, u+\Delta_1) \times [v, v+\Delta_2)$ tem intersecção vazia com D. Temos

$$\begin{aligned} E(N[u,u+\Delta_1)N[v,v+\Delta_2)) &= p_2(u,v)|\Delta_1||\Delta_2| + o_{(u,v)}(\Delta) \\ E(N[u,u+\Delta_1))E(N[v,v+\Delta_2)) &= (p_1(u)|\Delta_1| + o_u(|\Delta_1|))(p_1(v)|\Delta_2| + o_v(|\Delta_2|)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}\,(N[u,u+\Delta_1), N[v,v+\Delta_2)) = (p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v))|\Delta_1||\Delta_2| + o_{(u,v)}(\Delta) \\ &-(p_1(u)|\Delta_1|o_v(|\Delta_2|) + p_1(v)|\Delta_2|o_u(|\Delta_1|) + o_u(|\Delta_1|)o_v(|\Delta_2|)) \\ &= (p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v))|\Delta_1||\Delta_2| + \tilde{o}_{(u,v)}(\Delta). \end{aligned}$$

Agora, seja $I \supset \mathrm{supp}\,\varphi_1$ tal que $I = [a,b]^2$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sup_{(u,v)\in I} |\tilde{o}_{(u,v)}(\Delta)| &\leq \sup_{(u,v)\in I} |o_{(u,v)}(\Delta)| + \sup_{(u,v)\in I} p_1(u)|\Delta_1| \sup_{(u,v)\in I} |o_v(|\Delta_2|)| \\ &+ \sup_{(u,v)\in I} p_1(v)|\Delta_2| \sup_{(u,v)\in I} |o_u(|\Delta_1|)| + \sup_{(u,v)\in I} |o_u(|\Delta_1|)| \sup_{(u,v)\in I} |o_v(|\Delta_2|)| \\ &\leq o(\Delta) + \sup_{(u,v)\in I} p_1(u)|\Delta_1|o(|\Delta_2|) + \sup_{(u,v)\in I} p_1(v)|\Delta_2|o(|\Delta_1|) \\ &+ o(|\Delta_1|)o(|\Delta_2|). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\to 0} \sup_{(u,v)\in I} \frac{|\tilde{o}_{(u,v)}(\Delta)|}{|\Delta_1||\Delta_2|} &\leq \lim_{\Delta\to 0} \frac{o(\Delta)}{|\Delta_1||\Delta_2|} + \sup_{(u,v)\in I} p_1(u) \lim_{\Delta\to 0} \frac{o(|\Delta_2|)}{|\Delta_2|} \\ &+ \sup_{(u,v)\in I} p_1(v) \lim_{\Delta\to 0} \frac{o(|\Delta_1|)}{|\Delta_1|} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{o(|\Delta_1|)}{|\Delta_1|}\frac{o(|\Delta_2|)}{|\Delta_2|} = 0, \end{aligned}$$

já que $\sup_{(u,v)\in I} p_1(u)$ e $\sup_{(u,v)\in I} p_1(v)$ são finitos pois, pela Proposição 2.2, p_1 é contínua e portanto é limitada nos conjuntos limitados.

Como $p_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$ e $p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ temos $p_2 - p_1 \otimes p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, podemos aplicar o Corolário 2.3 juntamente com a observação de sua validade para medidas com sinal e vem

$$\mathrm{dCov}\,(N,N) = (p_2 - p_1 \otimes p_1)\mathrm{d}\ell$$

para $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^2}$ tal que $A \subset \mathbb{R}^2 - D$, ou seja, $\mathrm{d}\mu_2 = (p_2 - p_1 \otimes p_1)\mathrm{d}\ell$.

Sejam $u = v$ e $\Delta_1 = \Delta_2$.

$$\mathrm{Cov}\,(N,N)[(u,u),(u,u)+(\Delta_1,\Delta_2)) = E((N[u,u+\Delta_1))^2) - (E(N[u,u+\Delta_1)))^2.$$

Como

$$\begin{aligned} P\{N[u,u+1) = \Delta_1\} &\leq E((N[u,u+\Delta_1))^2) \\ &\leq P\{N[u,u+\Delta_1) = 1\} + O(|\Delta_1|^2) + O(|\Delta_1|^3), \end{aligned}$$

temos

$$E(N[u,u+\Delta_1))^2 = p_1(u)|\Delta_1| + o_u^*(|\Delta_1|)$$

com

$$\lim_{\Delta_1 \to 0} \sup_{u \in [a,b]} \frac{|o_u^*(|\Delta_1|)|}{|\Delta_1|} \leq \lim_{\Delta_1 \to 0} \sup_{u \in [a,b]} \frac{|o_u(|\Delta_1|)|}{|\Delta_1|} + \lim_{\Delta_1 \to 0} \frac{O(|\Delta_1|^2) + O(|\Delta_1|^3)}{|\Delta_1|} = 0. \quad (2.11)$$

Seja $[u,u+\Delta_1)^2 \cap D = D_u^{u+\Delta_1}$ o segmento de reta sobre a diagonal de $\mathbb{R}^2$ com extremos em (u,u) e $(u+\Delta_1, u+\Delta_1)$.

$$\begin{aligned} \mu_1(D_u^{u+\Delta_1}) &= \mu([u,u+\Delta_1)^2) - \mu_2([u,u+\Delta_1)^2 - D) \\ \mu_1(D_u^{u+\Delta_1}) &= \mathrm{Cov}\,(N[u,u+\Delta_1), N[u,u+\Delta_1)) - \int_{[u,u+\Delta_1)^2 - D} p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= (p_1(u)|\Delta_1| + o_u^*(|\Delta_1|) - (p_1(u)|\Delta_1| + o_u(|\Delta_1|))^2) - m(u,u+\Delta_1), \end{aligned}$$

com

$$m(u,u+\Delta_1) = \int_{[u,u+\Delta_1)^2 - D} p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Seja $M = \operatorname{ess\,sup}_{(u,v)\in I} |p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v)|$. Assim,

$$\mu_1(D_u^{u+\Delta_1}) = p_1(u)|\Delta_1| + o_u^{**}(|\Delta_1|),$$

na qual

$$o_u^{**}(|\Delta_1|) = -(p_1(u)|\Delta_1| + o_u(|\Delta_1|))^2 - m(u,u+\Delta_1) + o_u^*(|\Delta_1|).$$

Como

$$\begin{aligned} \sup_{(u,v)\in I} |o_u^{**}(|\Delta_1|)| &\leq \left(\sup_{u\in[a,b]} p_1(u)|\Delta_1| + o(|\Delta_1|)\right)^2 + M|\Delta_1|^2 \\ &+ \sup_{u\in[a,b]} |o_u^*(|\Delta_1|)|, \end{aligned}$$

temos, como decorrência de (2.11),

$$\lim_{\Delta \to 0} \sup_{(u,v)\in I} \frac{|o_u^{**}(|\Delta_1|)|}{|\Delta_1|} = 0.$$

Agora, seja $\pi_1 : D \to \mathbb{R}$ a primeira projeção. Como $\varphi(t) = \varphi_1(t,t)$, temos

$$\int_D \varphi_1 \mathrm{d}\mu = \int_D \varphi_1 \mathrm{d}\mu_1 = \int_D \varphi \circ \pi_1 \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\pi_1(D)} \varphi \mathrm{d}(\mu_1 \pi_1^{-1}).$$

Como $\pi_1^{-1}([u, u+\Delta_1)) = D_u^{u+\Delta_1}$, temos

$$\mu_1\pi_1^{-1}([u, u+\Delta_1)) = \mu_1(D_u^{u+\Delta_1}) = p_1(u)|\Delta_1| + o_u^{**}(|\Delta_1|),$$

ou seja, $\mathrm{d}(\mu_1\pi_1^{-1}) = p_1(u)\mathrm{d}u + o_u^{**}(\mathrm{d}u)$ sobre intervalos e estamos sob a hipótese do Lema 2.2 (Corolário 2.3). Assim, negligenciando infinitésimos de ordem superior para a medida $\mu^* = \mu_1\pi_1^{-1}$, escrevemos

$$\int_{\pi_1(D)} \varphi \mathrm{d}(\mu_1\pi_1^{-1}) = \int_{\pi_1(D)} \varphi p_1 \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \varphi p_1 \mathrm{d}u\ .$$

Finalmente, $\int_D \varphi_1 \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \varphi p_1 \mathrm{d}u$.

Se $p_2 - p_1 \otimes p_1$ for essencialmente limitada em $\mathbb{R}^2 - D$ e também p_1 for limitada em $\mathbb{R}$, então $\sup\limits_{v\in \operatorname{supp}\varphi} p_1(v)$, $\sup\limits_{u\in \operatorname{supp}\varphi} p_1(u)$ e $\sup\limits_{(u,v)\in \operatorname{supp}\varphi} |p_2(u,v) - p_1(u)p_1(v)|$ são finitos e podemos repetir a demonstração acima. Isto prova a segunda afirmação deste lema. ■

Corolário 2.6 *Seja N um processo pontual que satisfaz às condições (1.9), (1.18), para $m = 2$, e tal que existe o limite definidor de $p_m(t)$, $1 \le m \le 2$, para o qual o infinitésimo apresentado na equação (1.20) é do tipo o_I, sendo $p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ e $p_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, p_2 essencialmente limitada em intervalos limitados. Então para toda função φ, $p_N\mathrm{d}t$-integrável, equivalentemente $E\mathrm{d}N$-integrável, com suporte limitado temos*

$$\int \varphi(t)p_N(t)\mathrm{d}t = \int \varphi(t)\mathrm{Var}\,(\mathrm{d}N(t)).$$

Demonstração Basta repetir a demonstração do Lema 2.4 substituindo os infinitésimos o por o_I. ■

Definição 2.1 *Diremos que um processo pontual N satisfaz a*

(B): hipótese B: quando N satisfaz às relações (1.9) e (1.10) e $p_1 = p_N \in \overline{\mathcal{L}}^1$.

Como (1.9), (1.10) e $p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ implica $p_1 \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \subset \mathcal{R}^1 \subset \mathcal{L}^1 \subset \overline{\mathcal{L}}^1$, a hipótese B é equivalente a (1.9), (1.10) e p_1 contínua.

(A): hipótese A: quando N satisfaz à hipótese B e também às relações (1.18), (1.19) para $m = 2$ e $p_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, p_2 essencialmente limitada em intervalos limitados.

Lembramos que, para $u \neq v$,

$$\begin{aligned} q_2(u,v) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\mathrm{Cov}\,(N,N)(\Delta_1\times\Delta_2)}{|\Delta_1||\Delta_2|} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{E(N(\Delta_1)N(\Delta_2))}{|\Delta_1||\Delta_2|} - \lim_{\Delta\to 0} \frac{E(N(\Delta_1))}{|\Delta_1|}\frac{E(N(\Delta_2))}{|\Delta_2|} \\ &= p_2(u,v) - p_1(u)p_2(v) \end{aligned}$$

sempre que existirem $p_2(u,v)$, $p_1(u)$ e $p_2(v)$.

Observamos que, como foi visto na demonstração do Lema 2.4 para $u \neq v$, quando $p_1 \in \mathcal{L}^1$ e $p_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, p_2 essencialmente limitada em intervalos limitados, temos $q_2 = p_2 - p_1 \otimes p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, q_2 essencialmente limitada em intervalos limitados, e também $\mathrm{dCov}\,(N,N) = (p_2 - p_1 \otimes p_1)\mathrm{d}\ell$ como medidas, ou seja, $\mathrm{dCov}\,(N,N) = q_2(u,v)\mathrm{d}\ell$.

O lema a seguir é útil para o cálculo de covariâncias de variáveis aleatórias associadas a processos pontuais descritas como integrais.

Lema 2.5 *Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas pelas integrais estocásticas $X = \int_A f(t)\mathrm{d}N(t)$ e $Y = \int_B g(t)\mathrm{d}N(t)$. Também sejam D o conjunto diagonal de $\mathbb{R}^2$, $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\pi_1(x,y) = x$ e $A, B \in \Lambda_{\mathbb{R}}$. Então, se N satisfaz à hipótese A e $(A \cap \operatorname{supp} f) \times (B \cap \operatorname{supp} g)$ é limitado, temos*

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \iint_{(A\times B)-D} f(u)g(v)q_2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)p_N(t)\mathrm{d}t.$$

Além disto, se N é um processo de Poisson,

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)p_N(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração Como

$$E(XY) = E\left(\iint_{A\times B} f(u)g(v)\mathrm{d}N(u)\mathrm{d}N(v)\right) = \iint_{A\times B} f(u)g(v)E(\mathrm{d}N(u)\mathrm{d}N(v))$$

e também

$$E(X)E(Y) = \int_A f(u)E\mathrm{d}N(u) \int_B g(v)E\mathrm{d}N(v) = \iint_{A\times B} f(u)g(v)E\mathrm{d}N(u)E\mathrm{d}N(v),$$

temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \iint_{A\times B} f(u)g(u)\left[E(\mathrm{d}N(u)\mathrm{d}N(v)) - E\mathrm{d}N(u)E\mathrm{d}N(v)\right] \\ &= \iint_{A\times B} f(u)g(v)\mathrm{Cov}\,(\mathrm{d}N(u),\mathrm{d}N(v)).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.4 decorre que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \iint_{A\times B-D} f(u)g(v)\mathrm{Cov}\,(\mathrm{d}N(u),\mathrm{d}N(v)) \\ &\quad + \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)\mathrm{Var}\,(\mathrm{d}N(t)) \\ &= \iint_{A\times B-D} f(u)g(v)q_2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)p_N(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Se N é Poisson, então $q_2(u,v) = 0$ e o lema está estabelecido. ∎

Capítulo 3

Caracterizações, hipóteses e análise de inferência segura

3.1 Caracterização da intensidade e da densidade produto

Inicialmente observamos que, como decorrência do Lema 3, se existe o limite uniforme que define a densidade produto p_m $(m \geq 1)$ e se a função densidade produto (ou intensidade) pertence a $\overline{\mathcal{L}}^m$, então ela é a derivada de Radon-Nikokym de $E \prod_{i=1}^{m} N$, isto é, $p_m = \mathrm{d}E \prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$. Também, quando existe este limite uniforme e $p_m \in \mathcal{L}^m$ temos obrigatoriamente $p_m \in \mathcal{R}^m$ devido à Proposição 2.1. Em especial para $m = 1$, se $p_1 \in \overline{\mathcal{L}}^1$ então $p_1 \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$, como decorrência da Proposição 2.2. Uma pergunta importante é se é válida alguma afirmação recíproca, isto é, sob que condições podemos afirmar que se existir a derivada de Radon-Nikodym, que é obrigatoriamente uma função integrável, então ela será a densidade produto p_m. Aqui entendemos a densidade produto p_m, $m \geq 1$, como sendo a função que associa a cada ponto $t \in \mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m$, para o qual existe o limite definidor da densidade, o valor deste limite, isto é, $p_m(t)$ como dado pela equação (1.19) sem a necessidade da hipótese deste limite ser uniforme. Isto nos leva a propor os Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3. Antes, porém, recapitulemos os teoremas de diferenciação de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^m$.

Proposição 3.1 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue em $\mathbb{R}$) *Seja f integrável Lebesgue em $\mathbb{R}$ e seja $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$. Então temos $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = f$ q.s.[ℓ]. (Ver Fernandez (1976).)*

Proposição 3.2 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue em $\mathbb{R}^m$) *Seja f Lebesgue integrável em $\mathbb{R}^m$. Seja $Q(x, r)$ um hipercubo de centro x e aresta $2r > 0$. Então*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\ell(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \quad q.s.[\ell].$$

(Ver Fernandez (1976).)

Se fizermos a substituição de $Q(x,r)$ por $B(x,r)$ obtemos ainda um teorema mas, se substituirmos $Q(x,r)$ por $Q(x)$, hipercubo que contém x, ou $R(x)$, intervalo arbitrário de $\mathbb{R}^m$ que contém x, e fizermos o limite para diâmetros tendendo a zero não obtemos enunciados verdadeiros.

Definição 3.1 *Dizemos que $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\ell(\mathbb{R}^m - A) = 0$ pertence essencialmente a $\mathcal{L}^m$, equivalentemente, f é essencialmente limitada em intervalos limitados, quando existir um conjunto D, $\ell(D) = 0$ tal que a função $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^m - D} = f|_{\mathbb{R}^m - D}$, $\tilde{f}|_D = 0$, pertença a $\mathcal{L}^m$. Denotaremos tal fato por $f \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$ e chamaremos de $\operatorname{ess}\mathcal{L}^m$ o conjunto das funções essencialmente limitadas em intervalos limitados.*

Definição 3.2 *Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é essencialmente contínua em A quando existir um conjunto D, $\ell(D) = 0$ tal que $f|_{A-D}$ é uma função contínua. O conjunto das funções essencialmente contínuas será chamado de* $\operatorname{ess}\mathcal{C}^m$.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(Q^m) = \{1\}$, $f(\mathbb{R}^m - Q^m) = \{0\}$, é uma função que não é contínua em nenhum ponto; para todo A conjunto de interior não vazio, ela não é Riemann integrável sobre este conjunto pois o conjunto dos seus pontos de descontinuidade contém o interior de A que, por ser não vazio e aberto, tem medida maior que zero. Entretanto, esta função é essencialmente contínua já que $\ell(Q^m) = 0$ e em $\mathbb{R}^m - Q^m$ ela é identicamente 0. Ela também é Lebesgue integrável sobre todo A mensurável.

Claramente, sendo $\operatorname{ess}\mathcal{L}^m$ o conjunto das funções essencialmente limitadas em intervalos limitados e $\operatorname{ess}\mathcal{C}^m$ o conjunto das funções essencialmente contínuas de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ temos $\operatorname{ess}\mathcal{C}^m \subset \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$.

O teorema (3.1) fornece uma caracterização da intensidade $p_N = p_1$ entendida como seu limite definidor, pontualmente, sem a necessidade de ser um limite uniforme para processos pontuais que satisfazem (1.9).

Teorema 3.1 *Seja N um processo pontual que satisfaz (1.9) e EN sua medida de esperança. Então temos:*

(i) se existir p_N, satisfazendo (1.10) e $p_N \in \overline{\mathcal{L}}^1$, então existe $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$. Se além disto $p_N \in \mathcal{L}^1$ então $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$;

(ii) se existir $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$ então existe p_N q.s.[ℓ]. Em particular, se $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$, então existe $D \subset \mathbb{R}$, $\ell(D) = 0$, e existe a função intensidade em $\mathbb{R} - D$. Também, se $\tilde{p}_N = p_N$ em $\mathbb{R} - D$ e $\tilde{p}_N = 0$ em D, então $\tilde{p}_N \in \mathcal{L}^1$, ou seja, $p_N \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$.

Em todos os casos temos $p_N = \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$ q.s.[ℓ].

Demonstração (i) Pelo Lema 2.3, $\exists p_N \wedge p_N \in \overline{\mathcal{L}}^1 \to \exists \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} = p_N$ q.s.[ℓ].
$\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} = p_N$ q.s.[ℓ] $\wedge\ p_N \in \mathcal{L}^1 \to \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$.

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, calculemos o limite definidor de $p_N(t)$:

$$p_N(t) = \lim_{\substack{t\in\Delta \\ |\Delta|\to 0}} \frac{P\{N(\Delta)=1\}}{|\Delta|} = \lim_{\substack{t\in\Delta \\ |\Delta|\to 0}} \frac{EN(\Delta)-o_t(|\Delta|)}{|\Delta|} = \lim_{\substack{t\in\Delta \\ |\Delta|\to 0}} \frac{EN(\Delta)}{|\Delta|},$$

já que, para N satisfazendo (1.9), temos

$$P\{N(\Delta)=1\} \leq EN(\Delta) \leq P\{N(\Delta)=1\} + \sum_{j\geq 2} j|\Delta|^j = P\{N(\Delta)=1\} + O(|\Delta|^2)$$

e portanto $EN(\Delta) = P\{N(\Delta)=1\} + o_t(|\Delta|)$.

Sejam $f = \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$, $\varphi(x) = \int\limits_c^x f(y)\mathrm{d}y$, $\Delta = |a,b|$, $a<b$, $h_1 = b-t$ e $h_2 = t-a$. Assim,

$$p_N(t) = \lim_{\substack{h_1\to 0 \\ h_2\to 0}} \frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t-h_2)}{h_1+h_2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t-h_2)}{h_1+h_2} &= \frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t)}{h_1}\frac{h_1}{h_1+h_2} + \frac{\varphi(t-h_2)-\varphi(t)}{-h_2}\frac{h_2}{h_1+h_2} \\
&= (f(t)+o_t(h_1))\frac{h_1}{h_1+h_2} + (f(t)+o_t(-h_2))\frac{h_2}{h_1+h_2} \\
&= f(t) + \left(o_t(h_1)\frac{h_1}{h_1+h_2} + o_t(-h_2)\frac{h_2}{h_1+h_2}\right),
\end{aligned}$$

na qual, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, o_t é infinitesimal q.s.$[\ell]$.

Como $0 \leq \frac{h_1}{h_1+h_2} \leq 1$ e $0 \leq \frac{h_2}{h_1+h_2} \leq 1$, temos

$$\lim_{\substack{h_1\to 0 \\ h_2\to 0}} \frac{\varphi(t+h_1)-\varphi(t-h_2)}{h_1+h_2} = f(t) + 0 \quad \text{q.s.}[\ell].$$

Assim, $p_N(t) = \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$ q.s.$[\ell]$.

Se $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$, então existe D_1, $\ell(D_1)=0$ tal que para o conjunto $\mathbb{R}-D_1$ temos que $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}$ é limitada nos conjuntos limitados de $\mathbb{R}-D_1$. Como $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} = p_N$ q.s.$[\ell]$, $\exists D_2$, $\ell(D_2)=0$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} = p_N$ em $(\mathbb{R}-D_1)-D_2$.

Seja $D = D_1 \cup D_2$, $\ell(D)=0$.

Assim, $\tilde{p}_N$ definida por $\tilde{p}_N|_{\mathbb{R}-D} = \dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}|_{\mathbb{R}-D}$, $\tilde{p}_N|_D = 0$ é tal que $\tilde{p}_N \in \mathcal{L}^1$, já que $\dfrac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}|_{\mathbb{R}-D}$ é integrável e limitada sobre intervalos limitados. Portanto, $p_N \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^1$. ∎

Observamos que sob a hipótese B temos $\frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \in \operatorname{ess}\mathcal{C}^1$. Esta afirmação é na realidade, o item *(i)* do Teorema 3.1.

Teorema 3.2 *Seja N um processo pontual que satisfaz (1.18) ou, de maneira mais geral, que satisfaça a*

$$P\{N(\Delta_i) = 1,\ 1 \leq i \leq m\} = E\prod_{i=1}^{m} N\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i\right) - o_t\left(\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|\right).$$

Seja $f = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$ a derivada de Radon-Nikodyn de $E\prod_{i=1}^{m} N$. Se f é essencialmente contínua em $\mathbb{R}^m$, isto é, $\exists D \subset \mathbb{R}^m$, $\ell(D) = 0$, tal que $f|_{\mathbb{R}^m - D}$ é contínua, então existe $p_m : \mathbb{R}^m - D \to \mathbb{R}$ densidade produto de ordem m de N e $p_m = f$ em $\mathbb{R}^m - D$. Em particular $p_m \in \mathrm{ess}\mathcal{C}^m$.

Demonstração Seja $t \in (\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m) - D$.

$$\begin{aligned}
p_m(t) &= \lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{m}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{P\{N(\Delta_i) = 1, 1 \leq i \leq m\}}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|} \\
&= \lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{m}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{E\prod_{i=1}^{m} N\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i\right)}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|} = \lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{m}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{\int_{\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D} f\,\mathrm{d}\ell}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|}.
\end{aligned}$$

Como f é essencialmente contínua,

$$\forall t \in \mathbb{R}^m - D,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m - D,\ \|x - t\| < \delta \to \|f(x) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Assim, quando $\mathrm{diam}\,(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i) < \delta$,

$$(f(t) - \varepsilon)\ell\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D\right) \leq \int_{\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D} f\,\mathrm{d}\ell \leq (f(t) + \varepsilon)\ell\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D\right).$$

Logo,

$$\lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{m}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{\int_{\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D} f\,\mathrm{d}\ell}{\ell\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i - D\right)} = f(t)$$

e portanto, $p_N(t) = f(t)$ ∎

Novamente observamos que, para um processo pontual que satisfaz (1.9) ou (1.18), para $m \geq 1$, se existir o limite uniforme para p_m, $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m$, (se $p_m \in \mathcal{L}^m$ temos forçosamente $p_m \in \mathcal{R}^m$) então p_m é a derivada de Radon-Nikodym de $E\prod_{i=1}^{m} N$, $p_m = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$ q.s.[ℓ]. Entretanto, para $m > 1$, para um processo que satisfaz (1.18), se existir a derivada

$\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$, não é claro que exista p_m. Não podemos fazer uso do teorema da diferenciação de Lebesgue para o caso $m \geq 2$ como fizemos no caso $m = 1$ para o Teorema 3.1, pois o limite a ser calculado para p_m é um limite que utiliza $\mathbb{R}^m$-intervalos que contêm x. Assim, para o caso $m \geq 2$, a validade da recíproca que procurávamos vai depender de como é a derivada de Radon-Nikodym. O Teorema 3.2 mostra que para a classe das funções essencialmente contínuas a recíproca mencionada é verdadeira para qualquer processo pontual que satisfaz (1.18). Observamos que é crucial, para o caso $m \geq 2$, termos a existência de p_m garantida. Assim, enunciamos o teorema abaixo:

Teorema 3.3 *Se um processo pontual satisfaz às condições (1.18) e* **existe** p_m, *a função densidade produto, então:*

(i) se existir $\mathrm{d}E\prod_{i=n}^{m} N/\mathrm{d}\ell$, *então* $p_m = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{n} N/\mathrm{d}\ell$ *q.s.[ℓ] e, em particular, se* $\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$ *então* $p_m \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$;

(ii) se $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m$ *e o limite definidor de* p_m *for uniforme, então* $p_m = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{n} N/\mathrm{d}\ell$ *q.s.[ℓ]. Além disto, se* $p_m \in \mathcal{L}^m$ *então* $\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{n} N/\mathrm{d}\ell \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$.

Observe que em *(i)* podemos ter $\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{n} N/\mathrm{d}\ell \in (\overline{\mathcal{L}}^m - \operatorname{ess}\mathcal{L}^m)$, situação na qual o mesmo ocorre para p_m e em *(ii)* caso $p_m \in \mathcal{L}^m$ temos forçosamente $p_m \in \mathcal{R}^m$.

Demonstração (i) Pela hipótese, a existência $p_m : \mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m \to \mathbb{R}$ é garantida, ou seja, o limite definidor de p_m é existente em cada ponto t de $\mathbb{R}^m - \mathcal{E}^m$. Como tal limite existe, podemos calculá-lo por qualquer caminho e, em particular, calcularemos para os hipercubos centrados em t, já que para tal caminho podemos usar o teorema da diferenciação de Lebesgue para $\mathbb{R}^m$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
p_m(t) &= \lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{n}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{P\{N(\Delta_i)=1,\ 1\leq i\leq m\}}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|} = \lim_{\substack{t\in\prod_{i=1}^{n}\Delta_i \\ |\Delta_i|\to 0 \\ 1\leq i\leq m}} \frac{E\prod_{i=1}^{m} N\left(\prod_{i=1}^{m}\Delta_i\right)}{\prod_{i=1}^{m}|\Delta_i|} \\
&= \lim_{\substack{t\in Q(t,r) \\ r\to 0}} \frac{E\prod_{i=1}^{m} N(Q(t,r))}{\ell(Q(t,r))} = \lim_{\substack{t\in Q(t,r) \\ r\to 0}} \frac{\int_{Q(t,r)}(\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{n} N/\mathrm{d}\ell)\mathrm{d}\ell}{\ell(Q(t,r))} \\
&= \frac{\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N}{\mathrm{d}\ell}(t) \quad \text{q.s.}[\ell].
\end{aligned}
$$

(ii) Pelo Lema 3, $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m \to p_m = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$ q.s.[ℓ].

$\mathrm{d}E\prod_{i=n}^{m} N/\mathrm{d}\ell = p_m$ q.s.[ℓ] $\wedge\ p_m \in \mathcal{L}^m \to \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell \in \operatorname{ess}\mathcal{L}^m$.

■

Voltando à nossa pergunta inicial, obtivemos, resumidamente, as seguintes respostas.

Se o processo pontual satisfaz (1.9) e se existir a derivada de Radon-Nikodym de EN, então existirá p_N e $p_N = \mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell$ q.s.$[\ell]$.

Também, para processos pontuais que satisfazem (1.18), se a derivada de Radon-Nikodym de $E\prod_{i=1}^{m} N$ existir e for essencialmente contínua, então existe p_m e ambos são iguais.

Se o processo pontual satisfaz (1.18) e existe o limite definidor de p_m então, se existir a derivada de Radon-Nikodym de $E\prod_{i=1}^{m} N$, $\mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$, temos $p_m = \mathrm{d}E\prod_{i=1}^{m} N/\mathrm{d}\ell$ q.s.$[\ell]$. Note que não temos necessariamente $p_m \in \mathcal{L}^m$ ou, ainda melhor, $p_m \in \mathcal{R}^m$ pois não temos forçosamente a uniformidade do limite para p_m. Aliás, como sabemos, se tivéssemos estes fatos, a uniformidade e $p_m \in \overline{\mathcal{L}}^m \supset \mathcal{L}^m$, também já teríamos a existência da derivada de Radon-Nikodym garantida, assim como a sua igualdade a p_m q.s.$[\ell]$ e não haveria informação nova.

3.2 Classes de processos *B e *A

Faremos a seguir duas definições que permitirão uma maior abrangência, no sentido de englobar um conjunto maior de processos pontuais, nos métodos de estimação da intensidade apresentados nos Capítulos 4, 5 e 7.

Definição 3.3 *Um processo pontual N satisfaz à hipótese *B quando não somente sua medida de esperança é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, $EN \ll \ell$, ou seja, quando existe $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell \in \overline{\mathcal{L}}^1$, mas também quando é válida a relação $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall \Delta \subset \mathbb{R}$, Δ intervalo, $t \in \Delta$, $EN(\Delta) = P\{N(\Delta) = 1\} + o_{t,\Delta}(|\Delta|)$.*

Observamos que para tais processos existe p_N, limite definidor da intensidade, e $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell = p_N$ q.s.$[\ell]$. Aliás, este fato está provado na demonstração do Teorema 3.1 (ii).

Definição 3.4 *Um processo pontual N satisfaz à hipótese *A quando, além de obedecer a hipótese *B, satisfaz à igualdade*

$$E(N \times N)(A \cap D) = EN\pi_1(A \cap D)$$

para todo $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^2}$, na qual D é o conjunto diagonal de $\mathbb{R}^2$ e π_1 é a primeira projeção canônica.

Observamos que esta última condição é equivalente a dizer que a medida $E(N \times N)$ restrita à diagonal, $E(N \times N)|_D : \Lambda_D \to \mathbb{R}$, é a medida induzida na diagonal pela medida EN sobre a reta por π_1, isto é, $E(N \times N)|_D = EN\pi_1$.

Para processos pontuais que satisfazem à hipótese *B, temos a seguinte proposição análoga ao Lema 2.3.

Proposição 3.3 *Se N satisfaz à hipótese *B então, para toda função φ $E\mathrm{d}N$-integrável, temos $\int \varphi \mathrm{d}EN = \int \varphi p_N \mathrm{d}t$.*

Demonstração Imediata, já que $p_N = \mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell$ q.s.$[\ell]$. ■

Para processos pontuais que satisfazem à hipótese *A temos, analogamente ao Lema 2.4 e Corolário 2.6, a seguinte proposição.

Proposição 3.4 *Se N satisfaz à hipótese *A então, para toda função φ_1 integrável com relação à medida de covariância,* $\mathrm{Cov}\,(N,N)$*, temos:*

$$\int \varphi_1 \mathrm{dCov}\,(N,N) = \int_{\mathbb{R}^2-D} \varphi_1 \mathrm{dCov}\,(N,N) + \int_{\mathbb{R}} \varphi p_N \mathrm{d}t, \ \varphi(t) = \varphi_1(t,t).$$

Demonstração Basta provar que $\int_D \varphi_1 \mathrm{dCov}\,(N,N) = \int_{\mathbb{R}} \varphi p_N \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\int_D \varphi_1 \mathrm{dCov}\,(N,N) &= \int_D \varphi_1 \mathrm{d}(E(N\times N) - EN \times EN) \\
&= \int_D \varphi_1 \mathrm{d}E(N\times N) - \int_D \varphi_1 \mathrm{d}(EN\times EN) \\
&= \int_D \varphi\pi_1 \mathrm{d}E(N\times N) - \int_D \varphi_1 \frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \otimes \frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \mathrm{d}\ell \times \mathrm{d}\ell \\
&= \int_D \varphi\pi_1 \mathrm{d}(EN\pi_1) - 0 = \int_{\pi_1(D)} \varphi \mathrm{d}EN = \int_{\mathbb{R}} \varphi p_N \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

já que $\ell_2(D) = \ell \times \ell(D) = 0$. ■

De maneira similar ao que foi feito anteriormente, escrevemos

$$\int \varphi(t) p_N(t) \mathrm{d}t = \int \varphi(t) \mathrm{Var}\,(\mathrm{d}N(t))$$

para processos sob a hipótese *A.

O análogo ao Lema 2.5 é indicado abaixo.

Proposição 3.5 *Sejam X e Y variáveis aleatórias definidas pelas integrais estocásticas $X = \int_A f\mathrm{d}N$ e $Y = \int_B g\mathrm{d}N$, D o conjunto diagonal de $\mathbb{R}^2$, π_1 a primeira projeção canônica e $A, B \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ tais que* $(\mathrm{supp}\, f \cap A) \times (\mathrm{supp}\, g \cap B)$ *é limitado. Para N sob a hipótese *A temos*

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \int_{(A\times B)-D} f \otimes g \ \ \mathrm{Cov}\,(\mathrm{d}N, \mathrm{d}N) + \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} fgp_N \mathrm{d}t.$$

Caso $\mathrm{Cov}\,(\mathrm{d}N,\mathrm{d}N) \ll \mathrm{d}\ell \times \mathrm{d}\ell$, *isto é, existe* $q_2 \in \overline{\mathcal{L}}^2$, $\mathrm{dCov}\,(N,N) = q_2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \int_{(A\times B)-D} f(u)g(v)q_2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)p_N(t)\mathrm{d}t.$$

Se N é um processo de Poisson então

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \int_{\pi_1((A\times B)\cap D)} f(t)g(t)p_N(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração Fazendo uso da Proposição 3.4 ao invés do Lema 2.4, repetimos o argumento da demonstração do Lema 2.5. ∎

Lembramos que se N é um processo pontual simples então não há a ocorrência de eventos simultâneos.

Teorema 3.4 *Se N é um processo pontual simples e está sob a hipótese *B então N satisfaz a hipótese *A.*

Demonstração Sejam $A \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ limitado e $\Omega'_A = \{\omega \in \Omega | N_\omega(A) = \infty\}$. Como $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell \in \overline{\mathcal{L}}^1$ temos $\int_A (\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell)\mathrm{d}\ell = EN(A) < \infty$. Portanto $P(\Omega'_A) = 0$ pois, em caso contrário, teríamos $EN(A) = \int_{\Omega - \Omega'_A} N_\omega(A)\mathrm{d}P + \int_{\Omega'_A} N_\omega(A)\mathrm{d}P = \infty$.

Agora, $\forall A \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ limitado $\forall \omega \in \Omega - \Omega'_A$ podemos representar a medida $N_\omega|_A$ como uma medida de contagem $N_\omega|_A = \sum_{j \in J_A} n_j \delta_{x_j}$, J_A conjunto finito $\forall j \in J_A, x_j \in A$ e $N_\omega|_A(A) = \sum_{j \in J_A} n_j \delta_{x_j}(A) = \sum_{j \in J_A} n_j \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall \omega \in \Omega - \Omega'_A$ temos $N_\omega|_A \times N_\omega|_A = \sum_{j_1 \in J_A} n_{j_1} \delta_{x_{j_1}} \times \sum_{j_2 \in J_A} n_{j_2} \delta_{x_{j_2}} = \sum_{(j_1, j_2) \in J_A^2} n_{j_1} n_{j_2} \delta_{x_{j_1}} \times \delta_{x_{j_2}} = \sum_{(j_1, j_2) \in J_A^2} n_{j_1} n_{j_2} \delta_{(x_{j_1}, x_{j_2})}$.

Logo, $N_\omega \times N_\omega|_{A \times A}((A \times A) \cap D) = \sum_{(j_1, j_2) \in J_A^2} n_{j_1} n_{j_2} \delta_{(x_{j_1}, x_{j_2})}(\{(x, x) | x \in A\}) = \sum_{k \in J_A} n_k^2 \delta_{(x_k, x_k)}(\{(x, x) | x \in A\}) = \sum_{k \in J_A} n_k^2 \delta_{x_k}(A)$.

Como N é simples, para todo k, $n_k^2 = n_k = 1$ e temos $N_\omega \times N_\omega|_{A \times A}((A \times A) \cap D) = \# J_A = N_\omega|_A(A)$.

Assim, obtivemos $\forall A \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ limitado $\forall \omega \in \Omega - \Omega'_A$, $P(\Omega'_A) = 0$, $(N_\omega \times N_\omega)((A \times A) \cap D) = N_\omega(A)$.

Logo, $E(N_\omega \times N_\omega)((A \times A) \cap D) = \int_{\Omega - \Omega'_A} (N_\omega \times N_\omega)((A \times A) \cap D)\mathrm{d}P = \int_{\Omega - \Omega'_A} N_\omega(A)\mathrm{d}P = EN_\omega(A)$. Ou seja $E(N \times N)((A \times A) \cap D) = EN(A)$.

Seja agora $C \in \Lambda_{\mathbb{R}^2}$. Se C é limitado então $E(N \times N)(C \cap D) = E(N \times N)((\pi_1(C \cap D) \times \pi_1(C \cap D)) \cap D) = EN(\pi_1(C \cap D))$. Caso C não seja limitado, sendo $I_z^D = [z, z+1)^2 \cap D$, $C \cap I_z^D$ é limitado e temos $E(N \times N)(C \cap D) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} E(N \times N)(C \cap D \cap I_z^D) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} EN(\pi_1(C \cap D \cap I_z^D)) = EN(\pi_1(C \cap D))$. Assim fica estabelecido o teorema. ∎

3.3 Análise de inferência segura

Vamos assumir que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ seja um estimador não viesado para x e que $\mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2$. Suponhamos também que tenhamos uma seqüência de estimadores não-negativos e variâncias finitas, $\hat{V}_n$ e V_n para todo $n \geq 1$ tais que $V_1 = \mathrm{Var}(X)$, $V_{n+1} = \mathrm{Var}\,\hat{V}_n$ e $E\hat{V}_n = V_n$. Então, pela desigualdade de Tchebichev teremos para $\lambda_1 > 0$, $P\{X(\omega) \in [x - \lambda_1\sigma_1, x + \lambda_1\sigma_1]\} \geq 1 - 1/\lambda_1^2$ e, equivalentemente, $P\{x \notin [X(\omega) - \lambda_1\sigma_1, X(\omega) + \lambda_1\sigma_1]\} \leq 1/\lambda_1^2$. Sejam $\sigma_n = \sqrt{V_n}$ e $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{V}_n}$. Analogamente, podemos escrever $P\{\sigma_n \notin [\hat{\sigma}_n(\omega) - \lambda_{n+1}\sigma_{n+1}, \hat{\sigma}_n(\omega) + \lambda_{n+1}\sigma_{n+1}]\} \leq 1/(\lambda_{n+1})^2$, para todos $n \geq 1$. Pode ocorrer, e esta é a situação mais freqüente na prática, que não conheçamos o valor de σ_1 e usemos $\hat{\sigma}_1(\omega)$ e $X(\omega)$ para formar intervalos de confiança para x quando a distribuição de $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é conhecida. Nestas situações poder-se-ia, após ter sido feita alguma análise, concluir que, com probabilidade p, x pertence ao intervalo $[X(\omega) - \lambda_1\hat{\sigma}_1(\omega), X(\omega) + \lambda_1\hat{\sigma}_1(\omega)]$. Estamos interessados na situação na qual não conhecemos a distribuição de X e queremos diminuir a incerteza devido à substituição de σ_1 por $\hat{\sigma}_1(\omega)$.

Como $P\{\sigma_1 \notin [\hat{\sigma}_1(\omega) - \lambda_2\sigma_2, \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2]\} \leq 1/\lambda_2^2$, temos

$$\begin{aligned} P\{\sigma_1 \leq \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2\} &= 1 - P\{\sigma_1 > \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2\} \\ &\geq 1 - P\{\sigma_1 \notin [\hat{\sigma}_1(\omega) - \lambda_2\sigma_2, \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2]\} \geq 1 - \frac{1}{\lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Sejam $L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2)$, $A(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = X(\omega) - L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)$ e $B(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = X(\omega) + L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)$.

Sejam, também,

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{\omega \in \Omega | \sigma_1 \leq \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2\}, \\ \Omega^0 &= \{\omega \in \Omega | x \in [X(\omega) - \lambda_1\sigma_1, X(\omega) + \lambda_1\sigma_1]\}, \\ \Omega^1 &= \{\omega \in \Omega | x \in [X(\omega) - L(\omega, \lambda_1, \lambda_2), X(\omega) + L(\omega, \lambda_1, \lambda_2)]\}. \end{aligned}$$

Temos portanto $P(\Omega^0) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)$ e $P(\Omega^+) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)$.

Então, como $L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) \geq \lambda_1\sigma_1$ quando $\sigma_1 \leq \hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2$, temos $(\Omega^+ \cap \Omega^1) \supset (\Omega^+ \cap \Omega^0)$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} &P\{x \in [A(\omega, \lambda_1, \lambda_2), B(\omega, \lambda_1, \lambda_2)]\} = P(\Omega^1) \\ &\geq P(\Omega^1 \cap \Omega^+) \geq P(\Omega^0 \cap \Omega^+) \\ &\geq P(\Omega^0) + P(\Omega^+) - 1 \geq 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos permite obter conclusões como a seguinte: com pelo menos probabilidade $\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)$, x pertence ao intervalo $[X(\omega) - \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2), X(\omega) + \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\sigma_2)]$.

Este intervalo pode ser substituído na prática por

$$[X(\omega) - \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\hat{\sigma}_2(\omega)), X(\omega) + \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2\hat{\sigma}_2(\omega))]$$

e esta substituição é acompanhada por alguma incerteza. Podemos continuar o processo de analisar o pior caso e obter probabilidades da forma $1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}$ para intervalos da forma $[X(\omega) - L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), X(\omega) + L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)]$ com

$$L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2(\cdots + \lambda_{m-1}(\hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m)\cdots)).$$

Definição 3.5 *A terna $(X, (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (\hat{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ formada por uma variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{R}$, uma seqüência de números positivos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e uma seqüência de variáveis aleatórias $(\hat{V}_n : \Omega \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$, é uma* **seqüência inferente para** *$x \in \mathbb{R}$ se e somente se valerem*

(i) $EX = x$, $V_1 = Var(X)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $V_{n+1} = Var(\hat{V}_n)$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $E\hat{V}_n = V_n$,

(vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\hat{V}_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

Também utilizaremos a notação $(X,\ V_n,\ \hat{V}_n)$ para representar uma seqüência inferente e por vezes diremos apenas que as seqüências V_n e $\hat{V}_n$ formam uma seqüência inferente para x. Observe que nesta definição já está embutido o fato de todas as variáveis aleatórias, isto é, X e $\hat{V}_n$, $n \geq 1$, terem esperança e variância finitas, condição esta necessária para podermos usar a desigualdade de Tchebichev para cada uma delas.

Teorema 3.5 (Da seqüência inferente de variáveis aleatórias.) *Seja* $(X,\ V_n,\ \hat{V}_n)$ *uma seqüência inferente para* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\sigma_n = \sqrt{V_n}$, $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{V}_n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Se*

$$L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega) + \lambda_2(\cdots + \lambda_{m-1}(\hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m \sigma_m)\cdots)),$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ *para* $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}^*$, *então*

$$P\{x \in [X(\omega) - L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), X(\omega) + L_m(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)]\} \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

Demonstração Se $m = 1$, então

$$P\{x \in [X(\omega) - \lambda_1\sigma_1, X(\omega) + \lambda_1\sigma_1]\} = 1 - P\{x \notin [X(\omega) - \lambda_1\sigma_1, X(\omega) + \lambda_1\sigma_1]\} \geq 1 - \frac{1}{\lambda_1^2},$$

pela desigualdade de Tchebichev.

Para facilidade de notação, seja $A_k(\omega) = X(\omega) - L_k(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ e $B_k(\omega) = X(\omega) + L_k(\omega, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Supondo a afirmação válida para $m-1$, temos

$$\begin{aligned} P\{x \in [A_m(\omega), B_m(\omega)]\} &\geq P\{x \in [A_m(\omega), B_m(\omega)] \ \wedge\ \sigma_{m-1} \leq \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m\} \\ &\geq P\{x \in [A_{m-1}(\omega), B_{m-1}(\omega)] \ \wedge\ \sigma_{m-1} \leq \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m\} \end{aligned}$$

pois

$$[A_{m-1}(\omega), B_{m-1}(\omega)] \subset [A_m(\omega), B_m(\omega)]$$

quando $\sigma_{m-1} \leq \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m$.

Assim, $P\{x \in [A_m(\omega), B_m(\omega)]\}$

$$\begin{aligned} &\geq P\{x \in [A_{m-1}(\omega), B_{m-1}(\omega)]\} + P\{\sigma_{m-1} \leq \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m\} - 1 \\ &\geq \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_i^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_m^2}\right) - 1 \ = \ 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}, \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} P\{\sigma_{m-1} \leq \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m\} &\geq 1 - P\{\sigma_{m-1} \notin [\hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m, \hat{\sigma}_{m-1}(\omega) + \lambda_m\sigma_m]\} \\ &\geq 1 - \frac{1}{\lambda_m^2}. \end{aligned}$$

■

Se substituirmos σ_m por $\hat{\sigma}_m(\omega)$ alguma incerteza será introduzida em nossa análise. Este tipo de incerteza pode ser eliminada se conhecermos o valor de σ_J para algum J ou alguma cota superior para σ_J. Podemos, para raciocínios teóricos, tomar o limite $1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$ quando nos for possível escolher λ_i, $i \geq 1$, tais que o somatório infinito convirja para algum valor menor do que um.

Observamos que, ao aplicar esta análise de inferência segura, podemos obter estes intervalos de confiança de "pelo menos probabilidade p" para x seja qual for a distribuição de X. Além disso, esta análise é mais conservadora que aquela feita se assumirmos uma distribuição e fizermos uma análise de intervalos de confiança, onde quer que esta última possa ser aplicada.

Assim como variáveis aleatórias são estimadores de números reais, processos estocásticos podem ser entendidos como estimadores de funções.

Se $X : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um processo estocástico que é um estimador não viesado para a função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou seja, que as funções EX e x são iguais, e temos seqüências de estimadores, neste caso processos estocásticos, $\hat{V}_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não negativos e de variâncias, mais claramente funções variância, $V_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para $n \geq 1$, tais que

$$\begin{aligned} V_1 = \operatorname{Var} X : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \\ & t \to \operatorname{Var}(X(t) : \Omega \to \mathbb{R}) \end{aligned} \qquad V_{n+1} = \operatorname{Var}(\hat{V}_n) \;\text{ e }\; E\hat{V}_n = V_n,$$

podemos desenvolver uma análise de inferência segura e obter bandas de confiança de "pelo menos probabilidade p" de uma maneira totalmente similar àquela apresentada acima para variáveis aleatórias.

Definição 3.6 *A terna $(X, (V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (\hat{V}_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ formada por um processo estocástico $X : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, uma seqüência de funções $(V_n : I \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ e uma seqüência de processos estocásticos $(\hat{V}_n : \Omega \times I \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma* **seqüência inferente para** *$x : I \to \mathbb{R}$ se e somente se valerem*

(i) $EX = x$, $V_1 = Var(X)$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; V_{n+1} = Var(\hat{V}_n)$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; E\hat{V}_n = V_n$,

(vi) $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \hat{V}_n(\Omega \times I) \subset \mathbb{R}_+$.

Teorema 3.6 (Da seqüência inferente de processos estocásticos). *Seja $(X, V_n, \hat{V}_n)$ uma seqüência inferente para $x : I \to \mathbb{R}, \sigma_n = \sqrt{V_n}$ e $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\hat{V}_n}$. Definindo para todo $m \in \mathbb{N}^*$, $L_m : \Omega \times I \times (\mathbb{R}_+^*)^m \to \mathbb{R}_+$ por*

$$L_m(\omega, t, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1(\hat{\sigma}_1(\omega, t) + \lambda_2(\ldots + \lambda_{m-1}(\hat{\sigma}_{m-1}(\omega, t) + \lambda_m \sigma_m(t)) \ldots)),$$

temos, para todo $t \in I$, e todo $m \in \mathbb{N}^*$,

$$P\{x(t) \in [X(\omega, t) - L_m(\omega, t, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), X(\omega, t) + L_m(\omega, t, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)]\} \geq 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2}.$$

Demonstração Basta observar que, para cada t arbitrário fixo, temos como conseqüência direta das definições (3.5) e (3.6) que $(X(t), (V_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}, (\hat{V}_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*})$ é uma seqüência inferente para $x(t)$ e aplicar o Teorema 3.4. ∎

Capítulo 4

Estimação da Intensidade

Seja N um processo pontual sobre o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, com função intensidade desconhecida p_N.

Seja $\{\psi_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortonormal de ondaletas da forma $\psi_{ij}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - i)$ ou $\psi_{ij}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - iT)$ para alguma ondaleta mãe ψ obtida, se necessário, pela composição de uma ondaleta padrão com uma transformação afim de forma que seu suporte seja $[0, T]$. Seja ϕ a ondaleta pai a ela correspondente.

Analogamente, seja $\{\phi_{k,\ell i}, \psi_{ij} : i, k \in \mathbb{Z},\ j \geq \ell i, j,\ \ell i \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortonormal de ondaletas que apresenta todas as escalas a partir de um número inteiro ℓi fixo.

É extremamente agradável adotar a seguinte notação. Seja ${}_d\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq d\}, d \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ e $Ze(\ell i) = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z})$ se $\ell i \in \mathbb{Z}$. Caso $\ell i = -\infty$ então, $Ze(\ell i) = \mathbb{Z}^2$.

Vamos utilizar letras gregas para índices em $Ze(\ell i)$ e escreveremos $\psi_\eta = \phi_{\eta,\ell i}$ se e só se $\eta \in \mathbb{Z}$ e $\psi_\eta = \psi_{i,j}$ se e só se $\eta = (i, j) \in \mathbb{Z}^2$.

Assim, as expansões em ondaletas

$$f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{ij}\psi_{ij}(t) \tag{4.1}$$

e

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \phi_{k,\ell i}(t) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in_{\ell i} \mathbb{Z}} \delta_{ij}\psi_{ij}(t) \tag{4.2}$$

serão simplesmente escritas na forma

$$f = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)} \alpha_\eta \psi_\eta, \tag{4.3}$$

com os coeficientes α_η dados por

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f\psi_\eta dt &= \int_{\mathbb{R}} (\sum_\xi \alpha_\xi \psi_\xi)\psi_\eta dt = \sum_\xi \int_{\mathbb{R}} \alpha_\xi \psi_\xi \psi_\eta dt \\ &= \sum_\xi \alpha_\xi < \psi_\xi, \psi_\eta >= \alpha_\eta. \end{aligned} \tag{4.4}$$

O nosso objetivo é obter a restrição de p_N para o intervalo $[0,T]$ com base nos pontos de uma trajetória do processo contidos neste intervalo. Defina

$$p = \begin{cases} p_N & \text{se } t \in [0,T], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.5}$$

A partir daqui assumimos $p \in L^2[0,T]$. Portanto, para a expansão em ondaletas de p temos

$$p = \sum_{\eta} \beta_\eta \psi_\eta, \tag{4.6}$$

com

$$\beta_\eta = \int_{\mathbb{R}} p\psi_\eta dt = \int_0^T p\psi_\eta dt. \tag{4.7}$$

O objetivo principal é estimar p através da expansão (4.6) e para isto, precisamos estimar os coeficientes de ondaleta β_η dados por (4.7).

Nos teoremas e proposições que seguem, neste capítulo e também nos Capítulos 5 e 7, as demonstrações são feitas para o caso de N satisfazer às hipóteses B ou A. Estas demonstrações são igualmente válidas para as hipóteses *B ou *A sendo que as modificações necessárias são a substituição dos Lemas 2.3, 2.4 (ou seu Corolário 2.6) e 2.5 pelas Proposições 3.3, 3.4 e 3.5 respectivamente. Na verdade, bastaria provar estes teoremas para as hipóteses *B ou *A pois todo processo sob a hipótese B está sob a hipótese *B e, como pode ser visto na demonstração da Proposição 5.3 (ii), todo processo sob a hipótese A está sob a hipótese *A . Caso não tenhamos dCov $(N,N) \ll \ell_2$, a substituição de $q_2(u,v)dudv$ por dCov (N,N) mantém a veracidade dos enunciados dos teoremas e proposições.

4.1 Estimação dos coeficientes de ondaleta

Propomos um estimador de β_η dado por

$$\hat{\beta}_\eta = \int_0^T \psi_\eta dN(t). \tag{4.8}$$

As propriedades principais do estimador (4.8) são indicadas no seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Se N satisfaz à hipotese B (*B), então*

(i) o estimador $\hat{\beta}_\eta$ é não viesado.

*Se N satisfaz à hipótese A (*A), então*

(ii) para todos η e ξ,

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}_\eta, \hat{\beta}_\xi) &= \int\int_C \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)q_2(u,v)dudv \\ &+ \int_0^T \psi_\eta(u)\psi_\xi(u)p(u)du, \end{aligned} \tag{4.9}$$

na qual $C = [0,T]^2 - \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le T\}$ e $q_2(u,v)$ é dado por (1.22).

(iii) Em particular,

$$Var(\hat{\beta}_\eta) = \int\int_C \psi_\eta(u)\psi_\eta(v)q_2(u,v)dudv + \int_0^T \psi_\eta^2(u)p(u)du. \quad (4.10)$$

Demonstração (i) Como

$$E(\hat{\beta}_\eta) = E\int_0^T \psi_\eta dN(t) = \int_0^T \psi_\eta p_N(t)dt = \int_0^T \psi_\eta p dt = \beta_\eta,$$

$\hat{\beta}_\eta$ é não viesado.

(ii) Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_\eta, \hat{\beta}_\xi) &= E\left(\int_0^T \psi_\eta(u)dN(u)\int_0^T \psi_\xi(v)dN(v)\right) - \int_0^T \psi_\eta(u)EdN(u)\int_0^T \psi_\xi(v)EdN(v) \\
&= \int_0^T\int_0^T \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)E(dN(u)dN(v)) - \int_0^T\int_0^T \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)E(dN(u))E(dN(v)) \\
&= \int_0^T\int_0^T \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)\mathrm{Cov}(dN(u), dN(v)).
\end{aligned}$$

Separando em duas integrais, uma sobre C e a outra sobre o conjunto $\{(x,x) \in I\!R^2 | 0 \leq x \leq T\}$ e fazendo uso do Lema 2.4, obtemos (4.9).

(iii) Imediato de (ii). ■

Assumamos que N é um processo de Poisson. Neste caso, $q_2(u,v) = 0$ e (4.9) torna-se

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_\eta, \hat{\beta}_\xi) = \int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt = E\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)dN(t) \quad (4.11)$$

e (4.10) reduz-se a

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) = \int_0^T \psi_\eta^2(t)p(t)dt = \int_0^T \psi_\eta^2(t)E\{dN(t)\} = E\int_0^T \psi_\eta^2(t)dN(t). \quad (4.12)$$

Isto nos leva a propor as seguintes expressões para estimadores de (4.11) e (4.12),

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_\eta, \hat{\beta}_\xi) = \int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)dN(t) \quad (4.13)$$

e

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_\eta) = \int_0^T \psi_\eta^2(t)dN(t), \quad (4.14)$$

respectivamente, que são evidentemente não viesados.

Vamos utilizar a seguinte notação para uma seqüência de estimadores e variâncias:

$$V_{\xi,0} = \beta_\xi,\ \hat{V}_{\xi,0} = \hat{\beta}_\xi,\ V_{\xi,n+1} = \mathrm{Var}(\hat{V}_{\xi,n}),\ n \geq 0. \tag{4.15}$$

Notamos, por substituição direta de (4.6) em (4.12) que

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\xi) = \int_0^T \psi_\xi^2(t) \sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta(t) dt = \sum_\eta \beta_\eta \int_0^T \psi_\xi^2(t)\psi_\eta(t)dt.$$

Definindo

$$K_{\xi,2}^\eta = \int_0^T \psi_\xi^2(t)\psi_\eta(t)dt, \tag{4.16}$$

temos que (4.12) pode ser escrita como

$$V_{\xi,1} = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_\xi) = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2}^\eta. \tag{4.17}$$

Agora, calculemos a variância do estimador (4.14):

$$\begin{aligned}
V_{\xi,2} &= \mathrm{Var}(\hat{V}_{\xi,1}) = \mathrm{Var}\left(\int_0^T \psi_\xi^2(t)dN(t)\right) \\
&= E\left(\hat{V}_{\xi,1} - E\hat{V}_{\xi,1}\right)^2 = E\left(\hat{V}_{\xi,1} - V_{\xi,1}\right)^2 \\
&= E\left(\int_0^T \psi_\xi^2(t)dN(t) - \int_0^T \psi_\xi^2(t)EdN(t)\right)^2 \\
&= E\left(\int_0^T \psi_\xi^2(t)\left[dN(t) - EdN(t)\right]\right)^2 \\
&= E\int_0^T \int_0^T \psi_\xi^2(u)\psi_\xi^2(v)[dN(u) - EdN(u)][dN(v) - EdN(v)] \\
&= \int\int_C \psi_\xi^2(u)\psi_\xi^2(v)\mathrm{Cov}(dN(u), dN(v)) + \int_0^T \psi_\xi^4(u)\mathrm{Var}(dN(u))
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Lema 2.4 (Proposição 3.4) temos

$$V_{\xi,2} = \int\int_C \psi_\xi^2(u)\psi_\xi^2(v)q_2(u,v)dudv + \int_0^T \psi_\xi^4(u)p(u)du. \tag{4.18}$$

Já que $q_2(u,v) = 0$ para um processo de Poisson, temos

$$V_{\xi,2} = \int_0^T \psi_\xi^4(t)p(t)dt = \int_0^T \psi_\xi^4(t)EdN(t) = E\int_0^T \psi_\xi^4(t)dN(t). \tag{4.19}$$

Como anteriormente, defina

$$\hat{V}_{\xi,2} = \int_0^T \psi_\xi^4(t)dN(t), \tag{4.20}$$

que é um estimador não viesado para $V_{\xi,2}$. Se escrevermos

$$K_{\xi,4}^{\eta} = \int_0^T \psi_\xi^4(t)\psi_\eta(t)dt, \tag{4.21}$$

temos, de maneira similar a $V_{\xi,1}$,

$$V_{\xi,2} = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,4}^{\eta}. \tag{4.22}$$

Definindo

$$K_{\xi,m}^{\eta} = \int_0^T \psi_\xi^m(t)\psi_\eta(t)dt, \tag{4.23}$$

$$K_{\xi,m} = \int_0^T \psi_\xi^m(t)dN(t), \tag{4.24}$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Se N é um processo de Poisson que está sob a hipótese A (*A), então*

$$V_{\xi,n} = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2^n}^{\eta} \; n \geq 1, \;\; \hat{V}_{\xi,n} = K_{\xi,2^n}, \; n \geq 0, \tag{4.25}$$

são seqüências tais que $\hat{V}_{\xi,n}$ é um estimador não viesado de $V_{\xi,n}$, $V_{\xi,n+1} = Var(\hat{V}_{\xi,n})$ e $\hat{V}_{\xi,0} = \hat{\beta}_\xi$.

Demonstração Inicialmente provamos que $\hat{V}_{\xi,0} = \hat{\beta}_\xi$ e que os estimadores são não viesados. Para $n = 0$, como

$$\hat{V}_{\xi,0} = K_{\xi,1} = \int_0^T \psi_\xi(t)dN(t) = \hat{\beta}_\xi$$

temos que

$$E(\hat{V}_{\xi,0}) = E\int_0^T \psi_\xi(t)dN(t) = \int_0^T \psi_\xi(t)p(t)dt =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\xi(t)p(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \psi_\xi(t)\sum_\eta \beta_\eta\psi_\eta(t)dt = \sum_\eta \beta_\eta \int_{\mathbb{R}} \psi_\eta\psi_\xi dt =$$

$$\sum_\eta \beta_\eta < \psi_\xi, \psi_\eta > = \beta_\eta = V_{\xi,0}.$$

Para $n \geq 1$ obtemos

$$E(\hat{V}_{\xi,n}) = E(K_{\xi,2^n}) = E\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t) =$$

$$\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)p(t)dt = \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)\sum_\eta \beta_\eta\psi_\eta(t)dt =$$

$$\sum_\eta \beta_\eta \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)\psi_\eta(t)dt = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2^n}^\eta = V_{\xi,n}.$$

Agora, voltamos nossa atenção para a seqüência de variâncias. Para $n = 0$ temos, de $\hat{V}_{\xi,0} = \hat{\beta}_\xi$ e de (4.17) que

$$V_{\xi,1} = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2}^\eta = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_\xi) = \mathrm{Var}(\hat{V}_{\xi,0}).$$

Para $n \geq 1$,

$$\mathrm{Var}(\hat{V}_{\xi,n}) = E(\hat{V}_{\xi,n} - V_{\xi,n})^2 = E(K_{\xi,2^n} - \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2^n}^\eta)^2$$

$$= E\left(\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t) - \sum_\eta \beta_\eta \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)\psi_\eta(t)dt\right)^2$$

$$= E\left(\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t) - \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)\sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta(t)dt\right)^2$$

$$= E\left(\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t) - \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)p(t)dt\right)^2 = E\left(\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)[dN(t) - EdN(t)]\right)^2$$

$$= \int\int_C \psi_\xi^{2^n}(u)\psi_\xi^{2^n}(v)q_2(u,v)dudv + \int_0^T \psi_\xi^{2^{n+1}}(t)\mathrm{Var}(dN(t)).$$

Como $q_2(u,v) = 0$, pelo Lema 2.4, obtemos

$$\mathrm{Var}(\hat{V}_{\xi,n}) = \int_0^T \psi_\xi^{2^{n+1}}(t)p(t)dt = \int_0^T \psi_\xi^{2^{n+1}}(t)\sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta(t)dt =$$

$$\sum_\eta \beta_\eta \int_0^T \psi_\xi^{2^{n+1}}(t)\psi_\eta(t)dt = \sum_\eta \beta_\eta K_{\xi,2^{n+1}}^\eta = V_{\xi,n+1}.$$

■

Teorema 4.3 (Da seqüência inferente para os coeficientes de ondaleta.) *Sob a hipótese do Teorema 4.2, temos: para todo $\xi \in Ze(\ell i)$ as seqüências $\hat{V}_{\xi,n}$ e $V_{\xi,n}$, $n \geq 0$ formam uma seqüência inferente de variáveis aleatórias para β_ξ.*

Demonstração Dado o conhecimento do Teorema 4.2, basta provar que $\forall \xi \in Ze(\ell i)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\hat{V}_{\xi,n}(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Como $\forall \omega \in \Omega$

$$\hat{V}_{\xi,n}(\omega) = \left(\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t)\right)(\omega) = \int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN_\omega(t) \geq 0 ,$$

o teorema está estabelecido. ■

Portanto, no caso de N ser um processo de Poisson, os estimadores para β_ξ e as respectivas e sucessivas variâncias são fáceis de calcular, sendo todas da forma $\int_0^T \psi_\xi^{2^n}(t)dN(t)$, e para uma trajetória particular com m pontos no intervalo $[0,T]$, nos instantes de tempo $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$, esta expressão se reduz a $\sum_{i=0}^{m-1} \psi_\xi^{2^n}(\tau_i)$.

Para obter as variâncias sucessivas, para fins de simulação, pode ser necessário conhecer os valores de $K_{\xi,2^n}^\eta$, que dependem da família de ondaletas utilizada.

Para a família de ondaletas de Haar, é válido o seguinte resultado.

Proposição 4.1 *Para as ondaletas de Haar reescalonadas para o intervalo $[0,T]$ tais que $\|\psi_{(0,0)}\| = 1$, os $K_{\xi,2^n}^\eta$ dados por (4.23) são escritos por*

(i) Se $\xi, \eta \in \mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}$, $\xi = (x_1, y_1)$, $\eta = (x_2, y_2)$ então:
Para $n > 0$ temos

(a) Se $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$, então

$$K_{\xi,2^n}^\eta = \begin{cases} 2^{(2^{n-1}y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}-1/2)} & \text{quando } x_1 = x_2 = 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Se $y_1 \geq 0$ ou $y_2 \geq 0$, então

$$K_{\xi,2^n}^\eta = \begin{cases} 2^{((2^{n-1}-1)y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}-1/2)} & \text{quando valer } A \text{ ou } B, \\ -2^{((2^{n-1}-1)y_1 + y_2/2)} T^{(2^{n-1}-1/2)} & \text{se valer } C, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para A sendo $(y_1 \geq 0 > y_2 \wedge 0 \leq x_1 \leq 2^{y_1} - 1)$,
B sendo $(y_1 > y_2 \geq 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2^{y_2} - 1 \wedge 2^{y_1-y_2}x_2 \leq x_1 < 2^{y_1-y_2} + 2^{y_1-y_2-1})$
e C sendo $(y_1 > y_2 \geq 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq 2^{y_2} - 1 \wedge 2^{y_1-y_2}x_2 + 2^{y_1-y_2-1} \leq x_1 < 2^{y_1-y_2}(x_2+1))$.

Para $n = 0$ temos

(a) Se $y_1 \geq 0$ ou $y_2 \geq 0$ então

$$K_{\xi,1}^\eta = \begin{cases} \delta_{\xi,\eta} & \text{se } 0 \leq x_1 \leq 2^{y_1} - 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Se $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$, então

$$K_{\xi,1}^\eta = \begin{cases} 2^{(y_1+y_2)/2} & \text{se } x_1 = x_2 = 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) Se $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$, então

(a) *Para* $\ell i \geq 0$,

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \begin{cases} \delta_{\xi,\eta}\left(\dfrac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\left(\frac{2^n-1}{2}\right)} & \textit{quando } 0 \leq \eta \leq 2^n - 1, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) *Para* $\ell i < 0$,

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \delta_{\xi,\eta}\delta_{\eta,0}\left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\frac{2^n+1}{2}} T.$$

(iii) *Se* $\xi = x_1 \in \mathbb{Z}$ *e* $\eta = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}$, *então*

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \begin{cases} 2^{((2^{n-1}\ell i)+y_2/2)}T^{-(2^n-1/2)} & \textit{quando } \ell i \leq y_2 < 0 \textit{ e } x_1 = 0, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

(iv) *Se* $\xi = (x_1, y_1) \in \mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}$ *e* $\eta = x_2 \in \mathbb{Z}$, *então*

(a) *Para* $n \geq 1$ *temos*

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \begin{cases} 2^{(2^{n-1}y_1+\ell i/2)}T^{-(2^{n-1}-1/2)} & \textit{para } y_1 < 0 \textit{ e } x_1 = x_2 = 0, \\ 2^{((2^{n-1}-1)y_1+\ell i/2)}T^{-(2^{n-1}-1/2)} & \textit{para } (y_1 \geq 0, 0 \leq x_1 \leq 2^{y_1} - 1, \\ & \textit{e } x_2 = 0) \textit{ ou } (\ell i \geq 0, 0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1 \\ & \textit{e } 2^{y_1 - \ell i}\eta \leq x_1 < 2^{y_1-\ell i}(\eta+1)), \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) *Para* $n = 0$, *temos*

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \begin{cases} \delta_{\eta,0}\delta_{x_1,0}2^{(y_1+\ell i)/2} & \textit{se } y_1 < 0, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração Seja $\psi = \psi_{(0,0)} = T^{-1/2}(I_{[0,T/2)} - I_{[T/2,T)})$ a ondaleta mãe para a família de Haar reescalonada para o intervalo $[0,T]$ tal que $\|\psi_{(0,0)}\| = 1$. I_A representa a função característica (indicadora) do conjunto A. Colocando $\xi = (x_1, y_1)$ e $\eta = (x_2, y_2)$, temos

$$\psi_\xi = 2^{y_1/2}\psi(2^{y_1}t - x_1T) \text{ e } \psi_\eta(t) = 2^{y_2/2}\psi(2^{y_2}t - x_2T).$$

Como $t \in \operatorname{supp}\psi_\xi \leftrightarrow 2^{y_1}y - x_1T \in [0,T] \leftrightarrow t \in [x_1T/2^{y_1}, (x+1)T/2^{y_1}]$, temos

$$\operatorname{supp}\psi_\xi = [x_1T/2^{y_1}, (x_1+1)T/2^{y_1}]$$

e, analogamente,

$$\operatorname{supp}\psi_\eta = [x_2T/2^{y_2}, (x_2+1)T/2^{y_2}].$$

A ondaleta pai, $\phi = \phi_{(0,0)} = T^{-1/2} I_{[0,T)}$, é tal que $\|\phi\| = 1$. Temos

$$\phi_{\xi,\ell i} = 2^{\ell i/2} \phi(2^{\ell i} t - \xi T), \quad \xi \in \mathbb{Z},$$

e

$$\operatorname{supp} \phi_{\xi,\ell i} = [\xi T/2^{\ell i}, (\xi+1)T/2^{\ell i}].$$

(i) Para $n > 0$, temos

(a) Se $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ e $x_1 = x_2 = 0$, então

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = \int_0^T \left(\frac{2^{y_1/2}}{T^{1/2}}\right)^{2^n} \left(\frac{2^{y_2/2}}{T^{1/2}}\right) \mathrm{d}t = 2^{(2^{n-1} y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}-1/2)}.$$

Se $y_1 < 0$ e $x_1 \neq 0$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap [0,T) = \emptyset$ e, analogamente, para $y_2 < 0$ e $x_2 \neq 0$, $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap [0,T) = \emptyset$. Logo, $K^{\eta}_{\xi,2^n} = 0$ nestas condições.

(b) Se $y_1 \geq 0$ ou $y_2 \geq 0$, então,

Se $y_2 > y_1$ temos obrigatoriamente $y_2 \geq 0$ e, portanto, $\operatorname{supp} \psi_\eta \subset [0,T]$ ou $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap [0,T] = \emptyset$. Também, $(\operatorname{supp} \psi_\eta \subset \operatorname{supp} \psi_\xi \vee \operatorname{supp} \psi_\eta \cap \operatorname{supp} \psi_\xi = 0)$. Assim,

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = c \int_0^T I_{\operatorname{supp} \psi_\xi} \psi_\eta \mathrm{d}t = 0, \quad c = \left(\frac{2^{y_1/2}}{T^{1/2}}\right)^{2^n}.$$

Se $y_2 = y_1$, então $\operatorname{supp} \psi_\eta = \operatorname{supp} \psi_\xi$ ou $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap \operatorname{supp} \psi_\xi = \emptyset$ e, em ambos os casos, $K^{\eta}_{\xi,2^n} = 0$.

Se $y_1 > y_2$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \operatorname{supp} \psi_\eta$ ou $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap \operatorname{supp} \psi_\eta = \emptyset$. Além disto, caso $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \operatorname{supp} \psi_\eta$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi$ está contido num semi-suporte de ψ_η, isto é, $\operatorname{supp} \psi_\xi$ está contido em $\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_+)$ ou em $\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_-)$.

Vamos dividir em casos.

Se $y_1 \geq 0 > y_2$, então

$$\begin{aligned} K^{\eta}_{\xi,2^n} &= \int_0^T \psi_\xi^{2^n} \psi_\eta \mathrm{d}t = \left(\frac{2^{y_1/2}}{T^{1/2}}\right)^{2^n} |\operatorname{supp} \psi_\xi| \frac{2^{y_2/2}}{T^{1/2}} \\ &= 2^{(2^{n-1} y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}+1/2)} T/2^{y_1} \\ &= 2^{((2^n - 1) y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}-1/2)}, \end{aligned}$$

sempre que $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset [0,T]$, ou seja, que $x_1 \in \{0, \ldots, 2^{y_1} - 1\}$. Se $x_1 \notin \{0, \ldots, 2^{y_1} - 1\}$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap [0,T) = \emptyset$ e $K^{\eta}_{\xi,2^n} = 0$.

Se $y_1 > y_2 \geq 0$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_+) \leftrightarrow [x_1 T/2^{y_1}, (x_1+1)T/2^{y_1}) \subset [x_2 T/2^{y_2}, (2x_2+1)T/2^{y_2+1}] \leftrightarrow 2^{y_1-y_2} x_2 \leq x_1 < 2^{y_1-y_2} x_2 + 2^{y_1-y_2-1}$ e, também, $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_-) \leftrightarrow [x_1, T/2^{y_1}, (x_1+1)T/2^{y_1}) \subset [(2x_2+1)T/2^{y_2+1}, (x_2+1)T/2^{y_2}) \leftrightarrow 2^{y_1-y_2} x_2 + 2^{y_1-y_2-1} \leq x_1 < 2^{y_1-y_2}(x_2+1)$. Para termos $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap [0,T] \neq \emptyset$ devemos satisfazer à condição $0 \leq x_2 \leq 2^{y_2} - 1$. Logo, neste caso temos

$$\begin{aligned} K^{\eta}_{\xi,2^n} &= 2^{(2^{n-1} y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}+1/2)} \int_0^T I_{\operatorname{supp} \psi_\xi} \left(I_{\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_+)} - I_{\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_-)}\right) \mathrm{d}t \\ &= 2^{((2^{n-1}-1) y_1 + y_2/2)} T^{-(2^{n-1}-1/2)} \left(I_{\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_+)} - I_{\psi_\eta^{-1}(\mathbb{R}^*_-)}\right)(z), \end{aligned}$$

para qualquer $z \in \operatorname{supp} \psi_\xi$.

Para $n = 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $y_2 \geq y_1$.

(a) Suponha $y_2 \geq 0$ e $y_2 > y_1$. Então,

$$K^\eta_{\xi,1} = c \int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}t = 0, \quad c \in \mathbb{R},$$

pois $\operatorname{supp} \psi_\eta \subset [0, T]$ ou $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap [0, T] = \emptyset$ e $\operatorname{supp} \psi_\eta$ está contido num semi-suporte de ψ_ξ. Caso $y_2 = y_1$, se $x_1 \neq x_2$ temos $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap \operatorname{supp} \psi_\eta = \emptyset$ e portanto $K^\eta_{\xi,1} = 0$; se, entretanto, $x_1 = x_2$ temos

$$K^\eta_{\xi,1} = \int_0^T \psi^2_\eta \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{0, \ldots, 2^{y_1} - 1\}, \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Se $x_1 \neq 0$, como $y_1 < 0$, temos $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap [0, T) = \emptyset$ e, analogamente, para $x_2 \neq 0$ obtemos $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap [0, T) = \emptyset$. Nestes casos, $K^\eta_{\xi,1} = 0$. Se $x_1 = x_2 = 0$, então

$$K^\eta_{\xi,1} = \int_0^T \frac{2^{y_1/2}}{T^{1/2}} \frac{2^{y_2/2}}{T^{1/2}} \mathrm{d}t = \frac{2^{(y_2+y_2)/2}}{T} T = 2^{(y_1+y_2)/2}.$$

(ii) Se $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$, então

$$K^\eta_{\xi,2^n} = \int_0^T \phi^{2^n}_{\xi,\ell i} \phi_{\eta,\ell i} \mathrm{d}t = \delta_{\xi,\eta} \int_0^T \phi^{2^n+1}_{\eta,\ell i} \mathrm{d}t,$$

com

$$\phi^{2^n+1}_{\eta,\ell i} = \left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\left(\frac{2^n+1}{2}\right)} I_{\left[\frac{\eta T}{2^{\ell i}}, \frac{(\eta+1)T}{2^{\ell i}}\right)}.$$

Se $\ell i \geq 0$, então

$$[\eta T/2^{\ell i}, (\eta+1)T/2^{\ell i}) \cap [0, T) = \begin{cases} [\eta T/2^{\ell i}, (\eta+1)T/2^{\ell i}) & \text{quando } 0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1, \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\ell i < 0$, então $[\eta T/2^{\ell i}, (\eta+1)T/2^{\ell i}) \cap [0, T) \neq \emptyset$ se e somente se $\eta = 0$ e neste caso a intersecção é $[0, T)$.

Portanto, para $\ell i \geq 0$, temos

$$K^\eta_{\xi,2^n} = \delta_{\xi,\eta} \left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\left(\frac{2^n+1}{2}\right)} \frac{T}{2^{\ell i}} = \delta_{\xi,\eta} \left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\left(\frac{2^n-1}{2}\right)},$$

quando $\eta \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ e $K^\eta_{\xi,2^n} = 0$ caso contrário.

Já, para $\ell i < 0$, temos $K^\eta_{\xi,2^n} = \left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{\left(\frac{2^n+1}{2}\right)} T$ se $\eta = 0$ e $K^\eta_{\xi,2^n} = 0$ se $\eta \neq 0$.

(iii) $\forall \eta = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}$, $\exists! \xi^* (\xi^* = \lfloor x_2 2^{\ell i - y_2} \rfloor)$ $(\operatorname{supp} \psi_\eta \subset \operatorname{supp} \phi_{\xi^*, \ell i} \wedge (\forall \xi \neq \xi^*,$ $\operatorname{supp} \psi_\eta \cap \operatorname{supp} \phi_{\xi, \ell i} = \emptyset))$.

Se $\ell i \geq 0$,

$$\operatorname{supp} \phi_{\xi,\ell i} \cap [0, T) = \begin{cases} \operatorname{supp} \phi_{\xi,\ell i} & \text{quando } \xi \in \{0, \ldots, 2^{\ell i} - 1\}, \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

portanto,

$$K^\eta_{\xi,2^n} = \int_{\operatorname{supp} \phi_{\xi,\ell i}} \phi^{2^n}_{\xi,\ell i} \psi_\eta \mathrm{dt} = \delta_{\xi,\xi^*} \int_{\operatorname{supp} \phi_{\xi^*,\ell i}} \phi^{2^n}_{\xi^*,\ell i} \psi_\eta \mathrm{dt} = 0.$$

Se $\ell i < 0$, então: para $x_1 \neq 0$ temos $\operatorname{supp} \phi_{\xi,\ell i} \cap [0, T) = \emptyset$ e portanto $K^\eta_{\xi,2^n} = 0$, para $x_1 = 0$ temos os casos $\ell i \leq y_2 < 0$ e $y_2 \geq 0$.

Se $y_2 \geq 0$, então $\int_0^T \psi_\eta \mathrm{dt} = 0$, donde $K^\eta_{\xi,2^n} = 0$.

Se $\ell i \leq y_2 < 0$, então

$$\begin{aligned} K^\eta_{\xi,2^n} &= \int_0^T \phi^{2^n}_{\xi,\ell i} \psi_\eta \mathrm{dt} = \int_0^T \left(\frac{2^{\ell i}}{T}\right)^{2^{n-1}} \left(\frac{2^{y_2/2}}{T^{1/2}}\right) dt \\ &= 2^{(2^{n-1}\ell i + y_2/2)} T^{-(2^{n-1} - 1/2)}. \end{aligned}$$

(iv) $\xi = (x_1, y_2) \in \mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}$, $\eta = x_2 \in \mathbb{Z}$. Temos, neste caso, como $\ell i \leq y_1$, que $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i}$ ou $\operatorname{supp} \psi_\xi \cap \operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i} = \emptyset$.

Para $n = 0$ temos:

se $y_1 \geq 0$, então $K^\eta_{\xi,1} = c \int_0^T \psi_\eta \mathrm{dt} = 0$, $c \in \mathbb{R}_+$;

se $y_1 < 0$, temos $\ell i \leq y_1 < 0$ e

$$\begin{aligned} K^\eta_{\xi,1} &= \delta_{\eta,0} \delta_{x_1,0} \int_0^T \psi_\xi \phi_{\eta,\ell i} \mathrm{dt} \\ &= \delta_{\eta,0} \delta_{x_1,0} \int_0^T \frac{2^{y_1/2}}{T^{1/2}} \frac{2^{\ell i/2}}{T^{1/2}} dt = \delta_{\eta,0} \delta_{x_1,0} 2^{(\ell i + y_1)/2}. \end{aligned}$$

Para $n > 0$, temos:

$$\begin{aligned} K^\eta_{\xi,2^n} &= \int_0^T \psi^{2^n}_\xi \phi_{\eta,\ell i} \mathrm{dt} \\ &= 2^{(2^{n-1} y_1 + \ell i/2)} T^{-(2^{n-1} + 1/2)} \int_0^T I_{\operatorname{supp} \psi_\xi} I_{\operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i}} dt. \end{aligned}$$

Agora, $(\operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i} \cap [0, T) \neq \emptyset) \leftrightarrow ((0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1 \wedge \ell i \geq 0) \vee (\eta = 0 \wedge \ell i < 0))$.

Caso $\eta = 0$ e $\ell i < 0$, temos $\operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i} \cap [0, T) = [0, T)$.

De $\int_0^T I_{\operatorname{supp} \psi_\xi} \mathrm{dt} = \frac{T}{2^{y_1}}$, para $y_1 \geq 0$ e $0 \leq x_1 \leq 2^{y_1} - 1$, e $\int_0^T I_{\operatorname{supp} \psi_\xi} \mathrm{dt} = T$, para $y_1 < 0$ e $x_1 = 0$, temos

$$K^\eta_{\xi,2^n} = 2^{((2^{n-1} - 1) y_1 + \ell i/2)} T^{-(2^{n-1} - 1/2)},$$

para $y_1 \geq 0$, $\eta = 0$ e $0 \leq x_1 \leq 2^{y_1} - 1$,

$$K^\eta_{\xi,2^n} = 2^{(2^{n-1} y_1 + \ell i/2)} T^{-(2^{n-1} - 1/2)},$$

para $y_1 < 0$, $\eta = 0$ e $x_1 = 0$, e $K^{\eta}_{\xi,2^n} = 0$ nos outros casos.

Se $\ell i \geq 0$ e $0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1$, então $\operatorname{supp} \psi_\xi \subset \operatorname{supp} \phi_{\eta,\ell i} \leftrightarrow [x_1, T/2^{y_1}, (x+1)T/2^{y_1}) \subset [\eta T/2^{\ell i}, (\eta+1)T/2^{\ell i}) \leftrightarrow 2^{y_1 - \ell i}\eta \leq x_1 \leq x_1 + 1 \leq 2^{y_1-\ell i}(\eta+1) \leftrightarrow 2^{y_1-\ell i}\eta \leq x_1 < 2^{y_1-\ell i}(\eta+1)$.

Assim,

$$K^{\eta}_{\xi,2^n} = 2^{(2^{n-1}y_1 + \ell i/2)} T^{-(2^{n-1}+1/2)} \frac{T}{2^{y_1}}$$

quando $\ell i \geq 0$, $0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1$ e $2^{y_1-\ell i}\eta \leq x_1 < 2^{y_1-\ell i}(\eta+1)$; e $K^{\eta}_{\xi,2^n} = 0$ caso contrário. ■

4.2 Estimação da função intensidade via ondaletas

Agora estamos aptos a estimar a função intensidade p por um procedimento de síntese utilizando as estimativas dos coeficientes de ondaleta.

Teorema 4.4 *Seja* $\hat{p} = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)} \hat{\beta}_\eta \psi_\eta$.

*Se N satisfaz à hipótese B (*B), então*

(i) a função $\hat{p}$ é um estimador não viesado para a função intensidade p.

*Se N satisfaz à hipótese A (*A), então*

(ii) a variância de $\hat{p}$ é dada por

$$Var(\hat{p}) = \sum_{\eta,\xi} \left(\int\int_C \psi_\eta(u)\psi_\xi(v) q_2(u,v) du dv + \int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t) p(t) dt \right) \psi_\eta \psi_\xi.$$

*Se N satisfaz à hipótese A (*A) e é processo de Poisson, então*

(iii)

$$Var(\hat{p}) = \sum_{\eta,\xi} \left(\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t) p(t) dt \right) \psi_\eta \psi_\xi,$$

(iv) e um estimador não viesado para $Var(\hat{p})$ é

$$\widehat{Var}(\hat{p}) = \sum_{\eta,\xi} \left(\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t) dN(t) \right) \psi_\eta \psi_\xi.$$

Demonstração (i) Como E é um funcional linear contínuo,

$$E(\hat{p}) = E(\sum_\eta \hat{\beta}_\eta \psi_\eta) = \sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta = p.$$

(ii) $\text{Var}(\hat{p}) = E(\sum_\eta(\hat{\beta}_\eta - \beta_\eta)\psi_\eta)^2 = E\left(\sum_\xi \sum_\eta(\hat{\beta}_\eta - \beta_\eta)(\hat{\beta}_\xi - \beta_\xi)\psi_\eta\psi_\xi\right) =$

$= \sum_\xi \sum_\eta \text{Cov}(\hat{\beta}_\eta, \hat{\beta}_\xi)\psi_\eta\psi_\xi.$

Portanto, no caso geral,

$$\text{Var}\,(\hat{p}) = \sum_\eta \sum_\xi \left(\int\int_C \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)q_2(u,v)dudv + \int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt \right) \psi_\eta\psi_\xi.$$

(iii) Para um processo de Poisson, como $q_2(u,v) = 0$, a expressão acima se reduz à soma do segundo termo dentro do parênteses.

(iv) Imediato pois $p(t)dt = EdN(t)$. ∎

Seqüências inferentes para p podem ser obtidas utilizando os resultados dos dois teoremas a seguir.

Teorema 4.5 *Seja $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2^n}) \in (Ze(\ell i))^{2^n}$ um elemento do produto cartesiano de $Ze(\ell i)$ por ele próprio 2^n vezes, e N um processo de Poisson que satisfaz à hipótese A (*A). Seja*

$$V_n(\hat{p}) = \sum_{\eta \in (Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} p dt \right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}$$

e

$$\hat{V}_n(\hat{p}) = \sum_{\eta \in (Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} dN \right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}, \text{ para todos } n \geq 1.$$

Então, $V_n(\hat{p})$ e $\hat{V}_n(\hat{p})$ são seqüências de variâncias e estimadores, respectivamente, tais que:

(i) $V_1(\hat{p}) = Var(\hat{p})$.

(ii) $V_{n+1}(\hat{p}) = Var(\hat{V}_n(\hat{p}))$.

(iii) $\hat{V}_n(\hat{p})$ é uma estimador não viesado para $V_n(\hat{p})$.

Demonstração (i) Imediato.
(ii) Temos que, devido ao fato de E ser um funcional linear contínuo,

$$\text{Var}(\hat{V}_n(\hat{p})) = \text{Var}\left(\sum_{\eta \in (Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} dN \right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \right) =$$

$$\sum_{\eta,\xi \in (Ze(\ell i))^{2^n}} \text{Cov}\left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} dN, \int_0^T \prod_{m=1}^{2^n} \psi_{\xi_m} dN \right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \prod_{m=1}^{2^n} \psi_{\xi_m}.$$

Usando o Lema 2.5 obtemos

$$\mathrm{Var}(\hat{V}_n(\hat{p})) = \sum_{\eta,\xi\in(Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \prod_{m=1}^{2^n} \psi_{\xi_m} p dt\right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \prod_{m=1}^{2^n} \psi_{\xi_m} =$$

$$= \sum_{\mu\in(Ze(\ell i))^{2^{n+1}}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^{n+1}} \psi_{\mu_\ell} p dt\right) \prod_{\ell=1}^{2^{n+1}} \psi_{\mu_\ell} = V_{n+1}(\hat{p}).$$

(iii) A igualdade $E\hat{V}_n(\hat{p}) = V_n(\hat{p})$ decorre da linearidade e continuidade de E, do Teorema de Campbell e do Lema 2.3. ■

Teorema 4.6 (Da seqüência inferente para a intensidade.) *Para processos de Poisson sob a hipótese A (*A), as seqüências $\hat{V}_n(\hat{p})$ e $V_n(\hat{p})$, $n \geq 1$, constituem uma seqüência inferente de processos estocásticos para a intensidade p, ou seja, $(\hat{p},\ V_n(\hat{p}),\ \hat{V}_n(\hat{p})\ )$ é uma seqüência inferente para p.*

Demonstração Basta provar que $\forall n \geq 1$, $\hat{V}_n(\hat{p})(\Omega \times [0,T]) \subset \mathbb{R}_+$. Como $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall t \in [0,T]$,

$$\hat{V}_n(\hat{p})(\omega,t) = \sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} dN_\omega\right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}(t) =$$

$$= \sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^n}} \int_0^T \left(\prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}\right) \left(\prod_{j=1}^{2^n} \psi_{\eta_j}(t)\right) dN_\omega = \sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^n}} \int_0^T \left(\prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}\psi_{\eta_\ell}(t)\right) dN_\omega =$$

$$= \int_0^T \sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^n}} \left(\prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}\psi_{\eta_\ell}(t)\right) dN_\omega =$$

$$= \int_0^T \sum_{\eta,\xi\in(Ze(\ell i))^{2^{n-1}}} \left(\prod_{\ell=1}^{2^{n-1}} \psi_{\eta_\ell}\psi_{\eta_\ell}(t)\right) \left(\prod_{m=1}^{2^{n-1}} \psi_{\xi_m}\psi_{\xi_m}(t)\right) dN_\omega =$$

$$= \int_0^T \sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^{n-1}}} \left(\prod_{\ell=1}^{2^{n-1}} \psi_{\eta_\ell}(t)\psi_{\eta_\ell}\right) \sum_{\xi\in(Ze(\ell i))^{2^{n-1}}} \left(\prod_{m=1}^{2^{n-1}} \psi_{\xi_m}(t)\psi_{\xi_m}\right) dN_\omega =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{\eta\in(Ze(\ell i))^{2^{n-1}}} \prod_{\ell=1}^{2^{n-1}} \psi_{\eta_\ell}(t)\psi_{\eta_\ell}\right)^2 dN_\omega \geq 0\ ,$$

é estabelecida a validade do teorema. ■

Para generalizações veja de Miranda (2002b).

Capítulo 5

Estimação com uso de limiares

Sejam ${}_d\mathbb{Z}_e = \{z \in \mathbb{Z} | d \leq z \leq e\}, d, e \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$; $Ze(\ell i)_J = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} \times_{\ell i} \mathbb{Z}_J)$ se $\ell i \in \mathbb{Z}$ e $Ze(\ell i)_J = \mathbb{Z} \times \{z \in \mathbb{Z} | z \leq J\}$ se $\ell i = -\infty$.

Utilizaremos a notação

$$\hat{p}_J = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} \hat{\beta}_\eta \psi_\eta = \sum_{j \leq J} \hat{\beta}_\eta \psi_\eta, \tag{5.1}$$

para a função intensidade estimada por ondaletas ψ_η com escalas até a J-ésima ordem, $J \geq 0$, lembrando que quando η é um par ordenado o representamos por (i, j). Observamos que se $J < \ell i$ então a função intensidade é estimada apenas por ondaletas $\phi_{\eta, \ell i}$ e se $\ell i = -\infty$ a expansão é feita apenas por ondaletas escalonadas a partir da ondaleta mãe. Usamos a notação

$$\hat{p}_{J,\lambda}^T = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} T\left(\hat{\beta}_\eta, \lambda \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)}\right) \hat{\beta}_\eta \psi_\eta = \sum_{j \leq J} T\left(\hat{\beta}_\eta, \lambda \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)}\right) \hat{\beta}_\eta \psi_\eta \tag{5.2}$$

para a função intensidade estimada formada a partir dos coeficientes de ondaleta submetidos a um procedimento limiar.

Uma função limiar $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável tal que $0 \leq T(x, y) \leq 1$ e, para todo $y, T(x, y) = 1$ se $|x| \geq y, T(x, y)$ é não decrescente em $[0, y]$ e não crescente em $[-y, 0]$.

Observamos que o símbolo T possui dois significados diferentes, o número real que indica o extremo do intervalo $[0, T]$ e a função limiar $T(x, y)$. No entanto, isto não prejudicará o entendimento do leitor.

Seja ℓ a medida de Lebesgue na reta. Denotaremos $\mathrm{ess\,sup}_A f (\mathrm{ess\,inf}_A f)$ o supremo (ínfimo) essencial de uma função f sobre o conjunto A. Para facilidade de notação, escreveremos $\mathrm{ess\,sup}_\eta f$ no lugar de $\mathrm{ess\,sup}_{\mathrm{supp}\psi_\eta} f = \mathrm{ess\,sup}_{x \in \mathrm{supp}\psi_\eta} f(x)$, na qual supp ψ_η significa o suporte da ondaleta ψ_η. Se $f = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)} \alpha_\eta \psi_\eta$, escrevemos $f_J = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} \alpha_\eta \psi_\eta$ e $f_{J,\lambda}^T = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} T(\alpha_\eta, L(\lambda, \eta)) \alpha_\eta \psi_\eta \quad L : \mathbb{R}_+ \times Ze(\ell i)_J \to \mathbb{R}_+$.

Definição 5.1 *Diremos que a função f é essencialmente α- Hölderiana em $A \subset \mathbb{R}$ se e somente se existem duas constantes, K e α, e um conjunto $D \subset \mathbb{R}$, $\ell(D) = 0$, tal que para todo x e y em $A - D$ temos $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha, \alpha > 0$.*

Esta definição pode ser imediatamente estendida para $f : X \to Y$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida; $(X, d_1), (Y, d_2)$ espaços métricos.

Definição 5.2 *Definimos* $\text{ess}\lim_{x\to y} f(x) = L$, *quando existe um conjunto* $D \subset I\!R$, $\ell(D) = 0$, *tal que o limite quando* $x \to y$ *da função* $f|_{A-D}$, *restrição de* f *a* $A - D$, *é o número real* L.

Analogamente, podemos estender o conceito de limite essencial, definir funções essencialmente diferenciáveis, etc.

5.1 Velocidade de convergência e limitantes para o viés

Os resultados a seguir fornecem limitantes superiores para a magnitude do viés, medido na norma L^2, dos estimadores (5.1) e (5.2), no caso de p essencialmente α-Hölderiana.

Teorema 5.1 *Seja* $\{\psi_\eta | \eta \in Ze(\ell i)\}$, $\ell i \leq 0$, $\ell i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *uma base ortonormal de ondaletas tal que supp* $\psi_{(0,0)} = [0, T]$ *e* $\psi_{(0,0)}$ *é essencialmente limitada.*

Seja N *um processo pontual que satisfaz a hipótese B (*B). Suponha que* p, *a função intensidade de* N *restrita a* $[0, T]$, *seja essencialmente* α-*Hölderiana com constantes* K *e* $\alpha > 0$. *Então,*

$$\|p - E(\hat{p}_J)\|^2 \leq \frac{K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)}}{(1 - 2^{-2\alpha})} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1} \chi_{(0,1]}(\alpha), \tag{5.3}$$

para todo $J \geq 0$, *na qual* $M = \max\{|\text{ess}\inf_{[0,T]} \psi_{(0,0)}|, \text{ess}\sup_{[0,T]} \psi_{(0,0)}\}$.

Demonstração Para todo p e $J \geq 0$ vale a seguinte igualdade:

$$\|p - E(\hat{p}_J)\|^2 = \|\sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta - E \sum_{j\leq J} \hat{\beta}_\eta \psi_\eta\|^2 =$$

$$\|\sum_{j\leq J} (\beta_\eta - E(\hat{\beta}_\eta))\psi_\eta + \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2, j>J} \beta_\eta \psi_\eta\|^2 = \|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2, j>J} \beta_\eta \psi_\eta\|^2 = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2, j>J} \beta_\eta^2.$$

Agora, encontraremos para cada η, limitantes superiores e inferiores para β_η. Seja $\psi_\eta^+ = \max\{\psi_\eta, 0\}$, $\psi_\eta^- = \max\{-\psi_\eta, 0\}$ e supp $\psi_\eta = [a_\eta, b_\eta]$. Como p é não negativa,

$$\beta_\eta = \int \psi_\eta p dt = \int \psi_\eta^+ p dt - \int \psi_\eta^- p dt$$

$$\leq \int \psi_\eta^+ \text{ess sup}_\eta p dt - \int \psi_\eta^- \text{ess inf}_\eta p dt =$$

$$= \int (\psi_\eta^+ - \psi_\eta^-) \text{ess inf}_\eta p dt + \int \psi_\eta^+ (\text{ess sup}_\eta p - \text{ess inf}_\eta p) dt =$$

$$= \text{ess inf}_\eta p \int \psi_\eta dt + (\text{ess sup}_\eta p - \text{ess inf}_\eta p) \int \psi_\eta^+ dt$$

$$\leq 0 + K(b_\eta - a_\eta)^\alpha (b_\eta - a_\eta)\text{ess sup}_\eta \psi_\eta^+ =$$

$$= K(b_\eta - a_\eta)^{\alpha+1} 2^{j/2} \text{ess sup}_{(0,0)} \psi_{(0,0)}.$$

Analogamente,

$$\beta_\eta \geq \int \psi_\eta^+ \text{ess inf}_\eta p dt - \int \psi_\eta^- \text{ess sup}_\eta p dt$$

$$\geq 0 - K(b_\eta - a_\eta)^\alpha \int \psi_\eta^- dt \geq -K(b_\eta - a_\eta)^{\alpha+1} 2^{j/2} |\text{ess inf}_{(0,0)} \psi_{(0,0)}|.$$

Seja $M = \max\{\text{ess sup}_{[0,T]}\psi_{(0,0)}, -\text{ess inf}_{[0,T]}\psi_{(0,0)}\}$. Então podemos escrever

$$|\beta_\eta| \leq KM(b_\eta - a_\eta)^{\alpha+1} 2^{j/2} = KM \left(\frac{|\text{supp}\psi_{(0,0)}|}{2^j} \right)^{\alpha+1} 2^{j/2},$$

$$\beta_\eta^2 \leq K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)} 2^{-(2\alpha+1)j}.$$

Como a j-ésima escala tem no máximo 2^j coeficientes de ondaleta não nulos,

$$\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2, j>J} \beta_\eta^2 \leq \sum_{j>J} 2^j (K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)} 2^{-(2\alpha+1)j}) =$$

$$= K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)} \sum_{j>J} 2^{-2\alpha j} =$$

$$= K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)} \frac{(2^{-2\alpha})^{J+1}}{(1 - 2^{-2\alpha})}.$$

Agora, se $\alpha > 1$ e $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da reta, toda função essencialmente α-Hölderiana é constante em $A - D$ pois, sendo x e $y \in A - D$, $x < y$, podemos escrever $|f(y) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} K(x_{i+1} - x_i)^\alpha \leq K(max_{0\leq i \leq n-1}(x_{i+1} - x_i))^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = K(max_{0\leq i\leq n-1}(x_{i+1} - x_i))^{\alpha-1}(y - x)$, na qual $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y$ e para todo i, $0 \leq i \leq n$, $x_i \in A - D$. Como $\forall \varepsilon > 0$ podemos escolher tais pontos de forma a termos $max_{0\leq i\leq n-1}(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, pois caso contrário teríamos um intervalo contido em D e este não obedeceria a $\ell(D) = 0$, temos $\forall \varepsilon > 0$ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ e portanto $f(y) = f(x)$ para todos x e y em $A - D$.

Sendo p essencialmente constante, temos $\beta_\eta = \int \psi_\eta p\mathrm{d}t = 0$ para todo $J \geq 0$ donde

$$\|p - E(\hat{p}_J)\|^2 = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^2, j>J} \beta_\eta^2 = 0.$$

∎

Teorema 5.2 *Sob as condições acima e a hipótese adicional de que N é um processo de Poisson sob a hipótese A (*A), que $Ze(\ell i) = \mathbb{Z}^2$ e que existe $\text{ess}\lim_{t\to 0} \psi_{(0,0)}(t) = L$, temos para qualquer função limiar T e $\lambda \geq 0$,*

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq \frac{K^2 M^2 |\text{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)}}{(1-2^{-2\alpha})} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1} \chi_{(0,1]}(\alpha) + \lambda^2 (k_1 + 2^{(J+1)} - 1) \operatorname{ess\,sup}_{[0,T]} p, \tag{5.4}$$

para alguma constante $k_1 \in I\!R$.

Demonstração Temos que

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 = \|\sum_\eta \beta_\eta \psi_\eta - E(\sum_{j\leq J} T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta \psi_\eta)\|^2 =$$

$$= \|\sum_{j>J} \beta_\eta \psi_\eta + \sum_{j\leq J} (\beta_\eta - E(T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta))\psi_\eta\|^2,$$

assim

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 = \sum_{j>J} \beta_\eta^2 + \sum_{j\leq J} (\beta_\eta - E(T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta))^2. \tag{5.5}$$

Agora,

$$\beta_\eta - E(T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta) = E(\hat{\beta}_\eta - T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta).$$

Seja $v = \hat{\beta}_\eta - T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta$. Disto decorre que v é uma variável aleatória tal que $v = 0$ se $|\hat{\beta}_\eta| \geq \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)}$, $0 \leq v \leq \hat{\beta}_\eta$ se $0 \leq \hat{\beta}_\eta < \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)}$ and $\hat{\beta}_\eta \leq v \leq 0$ if $-\lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)} < \hat{\beta}_\eta \leq 0$. Assim, separando a integral $\int v dP$ em duas integrais sobre os intervalos $(-\lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)}, 0]$ e $[0, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})$, temos

$$E(v) \leq \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)} P([0, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})).$$

Analogamente,

$$E(v) \geq -\lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)} P((-\lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)}, 0]).$$

Segue que

$$|E(v)|^2 \leq \lambda^2 \text{Var}(\hat{\beta}_\eta).\max\{(P((-\lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)}, 0]))^2, (P([0, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})))^2\}$$

e obtemos

$$\sum_{\eta, j\leq J} (\beta_\eta - E(T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta))^2 \leq \sum_{\eta, j\leq J} \lambda^2 \text{Var}(\hat{\beta}_\eta). \tag{5.6}$$

Como, para processos de Poisson,

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_\eta) = \int \psi_\eta^2 p(t)dt \leq \text{ess sup}_\eta p \int \psi_\eta^2 dt =$$

$$= \text{ess sup}_\eta p \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p,$$

podemos escrever, para $\eta \in \mathbb{Z}^2$ e m não negativo,

$$\sum_{\{j=m\}} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq \sum_{\{j=m\}} \text{ess sup}_\eta p \leq 2^m \text{ess sup}_{[0,T]} p,$$

devido à existência de exatamente 2^m ondaletas de escala m com suporte não disjunto de $[0,T]$. Desta maneira

$$\sum_{0 \leq j \leq J} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p (\sum_{m=0}^{J} 2^m) = (2^{J+1} - 1)\text{ess sup}_{[0,T]} p.$$

Para j negativo, estamos interessados somente naqueles η da forma $(0,j)$. Assim é devido ao fato de que, para $\eta = (i,j)$, $i \neq 0$ temos $\mathrm{supp}\psi_{(i,j)} \cap [0,T] = \phi$. Como

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) = \int \psi_\eta^2 p dt = \int_0^T \psi_\eta^2 p dt,$$

obtemos

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^T \psi_\eta^2 dt = \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^T \{2^{j/2}\psi_{(0,0)}(2^j t - iT)\}^2 dt.$$

Já que $i = 0$,

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^T 2^j \psi_{(0,0)}^2 (2^j t) dt = \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^{T2^j} \psi_{(0,0)}^2 (x) dx.$$

Da existência do limite essencial $\text{ess}\lim_{x \to 0^+} \psi_{(0,0)}(x) = L$ temos que existe $D \subset I\!R$, $\ell(D) = 0$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [0,T] - D$ temos a implicação $0 < x < \delta \to \psi_{(0,0)}(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Assim, para todo j tal que $2^j T < \delta$ temos

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^{T2^j} \psi_{(0,0)}^2 (x) dx$$

$$\leq (\text{ess sup}_{[0,T]} p) 2^j T \max\{(L-\varepsilon)^2, (L+\varepsilon)^2\}.$$

Seja j_* o maior inteiro j tal que $2^j T < \delta$. Então,

$$\sum_{\eta=(0,j), j \leq j_*} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta) \leq 2^{j_*+1} (\text{ess sup}_{[0,T]} p) T \max\{(L-\varepsilon)^2, (L+\varepsilon)^2\}.$$

Estas desigualdades implicam que

$$\sum_{\eta,j<0}\mathrm{Var}(\hat\beta_\eta)\le(\text{ess sup}_{[0,T]}p)2^{j_*+1}T\max\{(L-\varepsilon)^2,(L+\varepsilon)^2\}$$

$$+(\text{ess sup}_{[0,T]}p)\sum_{j=j_*+1}^{-1}\int_0^{2^jT}\psi^2_{(0,0)}(x)dx.$$

Seja

$$k_1=2^{j_*+1}T\max\{(L-\varepsilon)^2,(L+\varepsilon)^2\}+\sum_{j=j_*+1}^{-1}\int_0^{2^jT}\psi^2_{(0,0)}(x)dx.$$

Então escrevemos

$$\sum_{\eta,j\le J}\lambda^2\mathrm{Var}(\hat\beta_\eta)=\lambda^2\left(\sum_{0\le j\le J}\mathrm{Var}(\hat\beta_\eta)+\sum_{j<0}\mathrm{Var}(\hat\beta_\eta)\right)$$

$$\le\lambda^2(k_1+2^{J+1}-1)\text{ess sup}_{[0,T]}p.$$

Finalmente, do Teorema 5.1, (5.5) e (5.6) deduzimos

$$\|p-E(\hat p^T_{J,\lambda})\|^2\le\frac{K^2M^2|\mathrm{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)}}{(1-1/2^{2\alpha})}\left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1}\chi_{(0,1]}(\alpha)$$

$$+\lambda^2(k_1+2^{J+1}-1)\text{ess sup}_{[0,T]}p.$$

■

Teorema 5.3 *Seja $\{\psi_\eta|\eta\in Ze(\ell i)\}$, $\ell i\in\mathbb{Z}$, $\ell i\le 0$ uma base ortonormal de ondaletas tal que* $\mathrm{supp}\psi_{(0,0)}=[0,T)$ *e* $\psi_{(0,0)}$ *é essencialmente limitada. Seja N um processo pontual de Poisson sob a hipótese A (*A) com p essencialmente α-Hölderiana com constantes K e $\alpha>0$. Então, para qualquer função limiar T e $\lambda\ge 0$ temos*

$$\|p-E(\hat p^T_{J,\lambda})\|^2\le\frac{K^2M\|\mathrm{supp}\psi_{(0,0)}\|^{2(\alpha+1)}}{(1-2^{-2\alpha})}\left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1}\chi_{(0,1]}(\alpha)$$

$$+\lambda^2(k_1+2^{J+1}-1)\text{ess sup}_{[0,T]}p,$$

para alguma constante $k_1\in\mathbb{R}$.

Demonstração Basta notar que, neste caso,

$$\|p-E(\hat p^T_{J,\lambda})\|^2=\sum_{\eta\in Ze(\ell i)-Ze(\ell i)_J}\beta_\eta^2+\sum_{\eta\in Ze(\ell i)_J}E(v)^2\le\sum_{\eta\in Ze(\ell i)-Ze(\ell i)_J}\beta_\eta^2+\sum_{\eta\in Ze(\ell i)_J}\lambda^2\mathrm{Var}(\hat\beta_\eta).$$

De $\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\mathrm{Var}(\hat\beta_{\eta,\ell i})+\sum_{\ell i\le j\le -1}\mathrm{Var}(\hat\beta_{(0,j)})+\sum_{j=0}^J\mathrm{Var}(\hat\beta_{(i,j)})$

$$\leq \int_0^T \phi^2_{(0,\ell i)} p\ dt + (\text{ess sup}_{[0,T]} p) \left(\sum_{j=\ell i}^{-1} \int_0^{2^j T} \psi^2_{(0,0)}(x) dx + (2^{J+1} - 1) \right)$$

e $\int_0^T \phi^2_{(0,\ell i)} p\ dt \leq \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^T \phi^2_{(0,\ell i)} dt$ =

$$= \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^T (2^{\ell i/2})^2 \phi^2_{(0,0)}(2^{\ell i} t) dt = \text{ess sup}_{[0,T]} p \int_0^{2^{\ell i} T} \phi^2_{(0,0)}(x) dx \ ,$$

pelo Teorema 5.1 estabelecemos a desigualdade com

$$k_1 = \int_0^{2^{\ell i} T} \phi^2_{(0,0)}(x) dx + \sum_{j=\ell i}^{-1} \int_0^{2^j T} \psi^2_{(0,0)}(x) dx.$$

■

Para as ondaletas de Haar, o Teorema 5.2 se reduz a seguinte proposição.

Proposição 5.1 *Sob a hipótese do Teorema 5.2 ou a do Teorema 5.3, para a família de ondaletas de Haar temos*

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq \frac{K^2 T^{2\alpha+1}}{(1 - 2^{-2\alpha})} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} \right)^{J+1} \chi_{(0,1]}(\alpha) + \lambda^2 2^{(J+1)} \text{ess} \sup_{[0,T]} p. \tag{5.7}$$

Demonstração Basta dizer que para ondaletas de Haar, $M = T^{-1/2} = L$ e observar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq \frac{K^2 T^{-1} T^{2(\alpha+1)}}{(1 - 1/2^{2\alpha})} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} \right)^{J+1} \chi_{(0,1]}(\alpha)$$

$$+\lambda^2 \left(2^{j_*+1} T \max\{(T^{-1/2} + \varepsilon)^2, (T^{-1/2} - \varepsilon)^2\} \right) \text{ess sup}_{[0,T]} p$$

$$+\lambda^2 \left(\sum_{j=j_*+1}^{-1} 2^j T T^{-1} + 2^{J+1} - 1 \right) \text{ess sup}_{[0,T]} p$$

$$= \frac{K^2 T^{2\alpha+1}}{(1 - 1/2^{2\alpha})} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} \right)^{J+1}$$

$$+\lambda^2 \left(\sum_{j=j_*+1}^{-1} 2^j + 2^{j_*+1} \max\{(1 + \varepsilon T^{1/2})^2, (1 - \varepsilon T^{1/2})^2\} + 2^{J+1} - 1 \right) \text{ess sup}_{[0,T]} p.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos (5.7). Também, se $\ell i \in \mathbb{Z}$ temos

$$k_1 = \int_0^{2^{\ell i} T} \frac{1}{T} \mathrm{d}x + \sum_{j=\ell i}^{-1} \int_0^{2^j T} \frac{1}{T} \mathrm{d}x = \left(\sum_{j=\ell i}^{-1} 2^j + 2^{\ell i} \right) = \sum_{j<-1} 2^j = 1$$

donde vem (5.7).

■

A próxima proposição nos fornece uma maneira de escolher um valor "ótimo" para J.

Proposição 5.2 *Sob as hipóteses do Teorema 5.2 ou do Teorema 5.3, dado $\lambda \geq 0$, podemos escolher J tal que*

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq g(\lambda) = \min(A, B),$$

com

$$A = k_0 \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{\lfloor a \rfloor + 1} \chi_{(0,1]}(\alpha) + \lambda^2 (k_1 + 2^{\lfloor a \rfloor \chi_{(0,1]}(\alpha)+1} - 1) \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p,$$

$$B = k_0 \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{\lceil a \rceil + 1} \chi_{(0,1]}(\alpha) + \lambda^2 (k_1 + 2^{\lceil a \rceil \chi_{(0,1]}(\alpha)+1} - 1) \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p,$$

$$k_0 = \frac{K^2 M^2 |\mathrm{supp}\psi_{(0,0)}|^{2(\alpha+1)}}{(1 - 2^{-2\alpha})},$$

k_1 dada na prova do Teorema 5.2 ou da prova do Teorema 5.3,

$$a = \frac{\ell n(2\alpha k_0 / \mathrm{ess\,sup}_{[0,T]}\, p) - 2\ell n \lambda}{(2\alpha + 1)\ell n 2} - 1,$$

e, caso $\alpha \leq 1$, J será $\lfloor a \rfloor$ ou $\lceil a \rceil$, dependendo de qual destes dois valores minimiza $g(\lambda)$; caso contrário, isto é, $\alpha > 1$, J será zero e $A = B = g(\lambda) = \lambda^2(k_1 + 1)\mathrm{ess\,sup}_{[0,T]}\, p$.

Demonstração Do Teorema 5.2 ou do Teorema 5.3, temos

$$\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq k_0 \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1} + \lambda^2(k_1 + 2^{J+1} - 1)\mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p = f(J, \lambda).$$

Estenda $f : I\!N \times I\!R_+ \to I\!R$ a $f : I\!R_+ \times I\!R_+ \to I\!R$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial J}(J, \lambda) = k_0 \ell n \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right) \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1} + \lambda^2 \ell n 2 . 2^{J+1} \mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}(J, \lambda) = k_0 \left(\ell n \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)\right)^2 \left(\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^{J+1} + \lambda^2 (\ell n 2)^2 . 2^{J+1} \mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p,$$

portanto, a segunda derivada é positiva para todo J e λ. A primeira derivada é zero se e somente se

$$(J + 1)(2\alpha + 1) = log_2 \left(\frac{2\alpha k_0}{\lambda^2 \mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p}\right),$$

a qual fornece o valor de a mencionado nesta proposição. Como, para um dado λ, $f(J, \lambda)$ tem somente um ponto crítico que é um ponto de mínimo, $f(J, \lambda)$ assumirá seu valor mínimo sobre os inteiros para $J = \lceil a \rceil$ ou $J = \lfloor a \rfloor$. Caso $\alpha > 1$, então $\|p - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 \leq \lambda^2(k_1 + 2^{J+1} - 1)\mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p$ cujo mínimo é assumido para $J = 0$. ■

5.2 Seqüências inferentes para as intensidades estimadas

Finalmente temos as seguintes propriedades para $\hat{p}_J$ e $\hat{p}^T_{J,\lambda}$.

Teorema 5.4 *Se N satisfaz a hipótese B (*B), então*

(i) $\hat{p}_J$ é um estimador assintoticamente não viesado para a função intensidade p.
*Para N sob a hipótese A (*A):*

(ii) $Var(\hat{p}_J) = \sum_{Ze(\ell i)_J} \sum_{Ze(\ell i)_J} (\int \int_C \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)q_2(u,v)dudv)\psi_\eta\psi_\xi$
$+ \sum_{Ze(\ell i)_J} \sum_{Ze(\ell i)_J} (\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt)\psi_\eta\psi_\xi.$
*Se N é um processo de Poisson satisfazendo à hipótese A (*A), então*

(iii) $Var(\hat{p}_J) = \sum_{Ze(\ell i)_J} \sum_{Ze(\ell i)_J} \left(\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt\right)\psi_\eta\psi_\xi$, *e*

(iv) $\widehat{Var}(\hat{p}_J) = \sum_{Ze(\ell i)_J} \sum_{Ze(\ell i)_J} \left(\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)dN(t)\right)\psi_\eta\psi_\xi$ *é um estimador não viesado para $Var(\hat{p}_J)$.*

Demonstração
(i) $\lim_{J\to\infty} E(\hat{p}_J) = \lim_{J\to\infty} E(\sum_{\eta,j\leq J} \hat{\beta}_\eta\psi_\eta) =$
$= \lim_{J\to\infty} \sum_{\eta,j\leq J} E(\hat{\beta}_\eta\psi_\eta) = \lim_{J\to\infty} \sum_{\eta,j\leq J} \beta_\eta\psi_\eta = \sum_\eta \beta_\eta\psi_\eta = p$, em $L^2[0,T]$.

(ii), (iii) e (iv): basta repetir o argumento da prova do Teorema 4.4, observando que $\eta, \xi \in Ze(\ell i)_J$. ∎

Teorema 5.5 *Seja $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{2^n}) \in (Ze(\ell i)_J)^{2^n}$ e N um processo de Poisson sob a hipótese A (*A). Seja $V_n(\hat{p}_J) = \sum_{\eta\in(Ze(\ell i)_J)^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{l=1}^{2^n} \psi_{\eta_l} p dt\right) \prod_{l=1}^{2^n} \psi_{\eta_l}$ e*
$\hat{V}_n(\hat{p}_J) = \sum_{\eta\in(Ze(\ell i)_J)^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{l=1}^{2^n} \psi_{\eta_l} dN\right) \prod_{l=1}^{2^n} \psi_{\eta_l}$ para todos $n \geq 1$.

Então, $V_n(\hat{p}_J)$ e $\hat{V}_n(\hat{p}_J)$ são, respectivamente, seqüências de variâncias e estimadores tais que

(i) $V_1(\hat{p}_J) = Var(\hat{p}_J)$

(ii) $V_{n+1}(\hat{p}_J) = Var(\hat{V}_n(\hat{p}_J))$

(iii) $\hat{V}_n(\hat{p})$ é um estimador não viesado para $V_n(\hat{p})$.

Demonstração

(i) Teorema 5.4 *(iii)* e *(iv)*.

(ii) Basta substituir $Ze(\ell i)$ por $Ze(\ell i)_J$ na demonstração do Teorema 4.5.

(iii) Mesmo argumento da demonstração do Teorema 4.5. ∎

Teorema 5.6 (Da seqüência inferente para p_J.) *Para N processo de Poisson sob a hipótese A (*A), a seqüência $(\hat{p}_J, V_n(\hat{p}_J), \hat{V}_n(\hat{p}_J))$ constitui uma seqüência inferente de processos estocásticos para $p_J = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} \beta_\eta \psi_\eta$, aproximação da intensidade por ondaletas até a J-ésima escala.*

Demonstração Basta substituir $Ze(\ell i)$ por $Ze(\ell i)_J$ na demonstração do Teorema 4.6. ∎

Proposição 5.3 *Se N satisfaz à hipótese A (*A) então, para todas as funções limiares, temos*

(i) $\|E\hat{p}_J - E\hat{p}^T_{J,\lambda}\|^2 \to 0$, *quando $\lambda \to 0$, para p e $\psi_{0,0}$ satisfazendo às hipóteses do Teorema 5.2 ou do Teorema 5.3.*

(ii) $Var(\hat{p}^T_{J,\lambda}) \leq \sum_{\xi,\eta \in Ze(\ell i)_J} (\int\int_C |\psi_\eta(u)\psi_\xi(v)| p_2(u,v)dudv) \, |\psi_\eta \psi_\xi|$

$+ \sum_{\xi,\eta \in Ze(\ell i)_J} \left(\int_0^T |\psi_\eta(t)\psi_\xi(t)| p(t) dt\right) |\psi_\eta \psi_\xi| + \sum_{\xi,\eta \in Ze(\ell i)_J} ||\psi_\eta p||_1 ||\psi_\xi p||_1 |\psi_\eta \psi_\xi|.$

Se N também é um processo de Poisson, temos:

(iii) $Var(\hat{p}^T_{J,\lambda}) \leq \sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} \left(\int_0^T |\psi_\eta(t)\psi_\xi(t)| p(t) dt + 2||\psi_\eta p||_1 ||\psi_\xi p||_1\right) |\psi_\eta \psi_\xi|.$

(iv) $\widehat{MVar}(\hat{p}^T_{J,\lambda}) =$

$\sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} \left(2 \int_0^T |\psi_\eta(t)| dN(t) \int_0^T |\psi_\xi(t)| dN(t) - \int_0^T |\psi_\eta(t)\psi_\xi(t)| dN(t)\right) |\psi_\eta \psi_\xi|$

é um estimador não viesado para o lado direito da inequação acima.

Observamos que (iii) e (iv) fornecem limitantes independentes de λ.

Demonstração (i) Devido ao argumento usado na demonstração dos Teoremas 5.2 e 5.3, podemos escrever

$$\|E(\hat{p}_J) - E(\hat{p}^T_{J,\lambda})\|^2 =$$

$$= \| \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} E(\hat{\beta}_\eta - E(T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta))\psi_\eta\|^2 \leq \lambda^2(k_1 + 2^{J+1} - 1) \mathrm{ess\ sup}_{[0,T]} p.$$

Assim, o lado esquerdo da inequação tende a zero quando $\lambda \to 0$.

(ii) Escreva $\hat{T}_\eta$ para representar $T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)})$ e $\hat{x}_\eta = \hat{T}_\eta \hat{\beta}_\eta$. Então

$$\mathrm{Var}(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = E(\hat{p}^T_{J,\lambda} - E(\hat{p}^T_{J,\lambda}))^2 = E(\sum_{Ze(\ell i)_J} \hat{x}_\eta \psi_\eta - \sum_{Ze(\ell i)_J} E(\hat{x}_\eta)\psi_\eta)^2 =$$

$$= E(\sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} (\hat{x}_\eta - E(\hat{x}_\eta))(\hat{x}_\xi - E(\hat{x}_\xi))\psi_\eta\psi_\xi) = \sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} \mathrm{Cov}(\hat{x}_\eta, \hat{x}_\xi)\psi_\eta\psi_\xi.$$

Portanto,

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_{J,\lambda}^{T}) \leq \sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} |\mathrm{Cov}(\hat{x}_\eta, \hat{x}_\xi)||\psi_\eta \psi_\xi|.$$

Agora,

$$|\mathrm{Cov}(\hat{x}_\eta, \hat{x}_\xi)| \leq |E(\hat{T}_\eta \hat{T}_\xi \hat{\beta}_\eta \hat{\beta}_\xi)| + |E(\hat{T}_\eta \hat{\beta}_\eta)||E(\hat{T}_\xi \hat{\beta}_\xi)|$$

$$\leq E|\hat{T}_\eta \hat{T}_\xi \hat{\beta}_\eta \hat{\beta}_\xi| + E|\hat{T}_\eta \hat{\beta}_\eta| E|\hat{T}_\xi \hat{\beta}_\xi|$$

$$\leq E|\hat{\beta}_\eta \hat{\beta}_\xi| + E|\hat{\beta}_\eta| E|\hat{\beta}_\xi|,$$

pois $|T_\eta| \leq 1$ e $|T_\xi| \leq 1$. De $\hat{\beta}_\eta = \int \psi_\eta dN(t)$ temos $|\hat{\beta}_\eta| \leq \int |\psi_\eta| dN(t)$ e, conseqüentemente, $E|\hat{\beta}_\eta| \leq \int |\psi|_\eta p dt = \|\psi_\eta p\|_1$. Analogamente, $E|\hat{\beta}_\xi| \leq \|\psi_\xi p\|_1$.

De

$$\hat{\beta}_\eta \hat{\beta}_\xi = \int \int \psi_\eta(u) \psi_\xi(v) dN(u) dN(v)$$

temos

$$E|\hat{\beta}_\eta \hat{\beta}_\xi| \leq \int \int_C |\psi_\eta(u) \psi_\xi(v)| p_2(u,v) du dv + \int \int_{D_1} |\psi_\eta(u) \psi_\xi(v)| E(dN(u) dN(v)),$$

$D_1 = [0,T]^2 \cap D$.

Agora, representando por du tanto o número quanto o intervalo $[u, u+du)$, escrevemos:

$$E(N \times N)(du \times du) = E\left(N[u, u+du) N[u, u+du)\right)$$

$$P\{N[u,u+du) = 1\} \leq E\{N[u,u+du)^2\} \leq P\{N[u,u+du) = 1\} + \sum_{j \geq 2} j^2 P\{N[u,u+du) = j\}.$$

Portanto, $E\{N[u,u+du)^2\} = P\{N[u,u+du)\} + o_u'(du) = p_N(u)du + o_u(du)$.

$E(N \times N)((du \times du) - D) = \int_u^{u+du} \int_u^{u+du} p_2 dl < M(du)^2$, pois, como N satisfaz a hipótese A, existe$M > 0$, $p_2(x,y) < M$ em $du \times du$.

Seja $E(N \times N)|_D(A) = E(N \times N)(A \cap D)$, para todo $A \in \Lambda_{\mathbb{R}^2}$.

Assim, $p_N(u)du + o_u(du) - M(du)^2 \leq E(N \times N)|_D(du \times du) \leq p(u)du + o_u(du)$ e, portanto, $E(N \times N)|_D(du \times du) = p(u)du + o_u''(du)$.

Negligenciando infinitesimais de ordem superior, temos

$$\int \int_{D_1} |\psi_\eta(u) \psi_\xi(v)| E(dN(u) dN(v)) = \int_{D_1} |\psi_\eta \psi_\xi| dE(N \times N)|_D = \int_0^T |\psi_\eta(u) \psi_\xi(u)| p(u) du\ .$$

A igualdade acima é imediata sob a hipótese *A. Observe que o argumento acima mostra que os processos sob a hipótese A estão sob a hipótese *A.

Portanto,

$$|\mathrm{Cov}(\hat{x}_\eta, \hat{x}_\xi)| \leq \int\int_C |\psi_\eta(u)\psi_\xi(v)| p_2(u,v)dudv +$$

$$+ \int_0^T |\psi_\eta(u)\psi_\xi(u)| p(u)du + \|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1$$

e

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_{J,\lambda}) \leq \sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} \left(\int\int_C |\psi_\eta(u)\psi_\xi(v)| p_2(u,v)dudv \right) |\psi_\eta \psi_\xi| +$$

$$+ \sum_{\eta,\xi \in Ze(\ell i)_J} \left(\int_0^T \psi_\eta(u)\psi_\xi(u)p(u)du + \|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1 \right) |\psi_\eta \psi_\xi|.$$

(iii) Para N um processo de Poisson, temos $p_2(u,v) = p(u)p(v), \ u \neq v$. Seja $p^*(u,u) = p^2(u)$ e $p^*(u,v) = p_2(u,v), \ u \neq v$. Então

$$\int\int_C |\psi_\eta(u)\psi_\xi(v)| p_2(u,v)dudv = \int_0^T \int_0^T |\psi_\eta(u)\psi_\xi(v)| p^*(u,v)dudv =$$

$$= \int_0^T |\psi_\eta(u)| p(u)du \int_0^T |\psi_\xi(v)| p(v)dv = \|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1.$$

A conclusão segue por direta substituição na expressão em (ii).
(iv) Como $\|\psi_\eta p\|_1 = \int_0^T |\psi_\eta| p dt = E\int_0^T |\psi_\eta| dN(t)$, podemos escrever

$$\|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1 =$$

$$E\left(\int_0^T |\psi_\eta| dN(t) \int_0^T |\psi_\xi| dN(t) \right) - \mathrm{Cov}\left(\int_0^T |\psi_\eta| dN(t), \int_0^T |\psi_\xi| dN(t) \right).$$

Pelo Lema 2.5, para processos de Poisson, a covariância no lado direito da equação acima é igual a $\int_0^T |\psi_\eta||\psi_\xi| p dt = E\int_0^T |\psi_\eta \psi_\xi| dN(t)$, assim

$$\|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1 = E\left(\int_0^T |\psi_\eta| dN(t) \int_0^T |\psi_\xi| dN(t) \right) - E\int_0^T |\psi_\eta \psi_\xi| dN(t),$$

e

$$\int_0^T |\psi_\eta(t)\psi_\xi(t)| p(t)dt + 2\|\psi_\eta p\|_1 \|\psi_\xi p\|_1 =$$

$$= E\left(2\int_0^T |\psi_\eta| dN(t) \int_0^T |\psi_\xi| dN(t) - \int_0^T |\psi_\eta \psi_\xi| dN(t) \right).$$

Somando para todos os η e ξ in $Ze(\ell i)_J$, a proposição é estabelecida. ∎

Proposição 5.4 *Seja N satisfazendo à hipótese A (*A). Se escolhermos $T(x,y) = 1$ quando $|x| \geq y$ e $T(x,y) = 0$ caso contrário, e fizermos*

$$TZe(\ell i)_J = \{\eta \in Ze(\ell i)_J | T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{Var(\hat{\beta}_\eta)}) = 1\},$$

então

(i) $Var(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \sum_{\eta,\xi \in TZe(\ell i)_J} \left(\int\int_C \psi_\eta(u)\psi_\xi(v)q_2(u,v)dudv + \int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt\right)\psi_\eta\psi_\xi.$

Se N também é um processo de Poisson, temos (ii) e (iii) abaixo:

(ii) $Var(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \sum_{\eta,\xi \in TZe(\ell i)_J} (\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)p(t)dt)\psi_\eta\psi_\xi.$

(iii) $\widehat{Var}(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \sum_{\eta,\xi \in TZe(\ell i)_J} (\int_0^T \psi_\eta(t)\psi_\xi(t)dN(t))\psi_\eta\psi_\xi$ *é um estimador não viesado para* $Var(\hat{p}^T_{J,\lambda})$.

Demonstração Como

$$\hat{p}^T_{J,\lambda} = \sum_{\eta \in Ze(\ell i)_J} T(\hat{\beta}_\eta, \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)})\hat{\beta}_\eta\psi_\eta = \sum_{\eta \in TZe(\ell i)_J} \hat{\beta}_\eta\psi_\eta,$$

basta repetir o argumento usado na prova do Teorema 4.4. ■

Teorema 5.7 *Seja N um processo de Poisson sob a hipótese A (*A) e $T(x,y) = 1$ quando $|x| \geq y$ e $T(x,y) = 0$ caso contrário. Sejam $TZe(\ell i)_J = \{\xi \in Ze(\ell i)_J | T(\hat{\beta}_\xi, \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\xi)} = 1\}$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2^n}) \in (TZe(\ell i)_J)^{2^n}$. Então,*

$$V_n(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \sum_{\eta \in (TZe(\ell i)_J)^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \mathrm{pdt}\right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} \quad e$$

$$\hat{V}_n(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \sum_{\eta \in (TZe(\ell i)_J)^{2^n}} \left(\int_0^T \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell} E\mathrm{d}N\right) \prod_{\ell=1}^{2^n} \psi_{\eta_\ell}, \text{ para todo } n \geq 1,$$

são, respectivamente, seqüências de variâncias e estimadores tais que

(i) $V_1(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = \mathrm{Var}(\hat{p}^T_{J,\lambda})$,

(ii) $V_{n+1}(\hat{p}^T_{J,\lambda}) = Var(\hat{V}_n(\hat{p}^T_{J,\lambda}))$,

(iii) $\hat{V}_n(\hat{p}^T_{J,\lambda})$ *é um estimador não viesado para* $V_n(\hat{p}^T_{J,\lambda})$.

Demonstração

(i) Proposição 5.4 *(ii)* e *(iii)*.

(ii) e (iii) Imediatas.

■

Teorema 5.8 (Da seqüência inferente para $p^T_{J,\lambda}$.) *Para N um processo de Poisson sob a hipótese A (*A), a seqüência $(\hat{p}^T_{J,\lambda},\ V_n(\hat{p}^T_{J,\lambda})\ ,\ \hat{V}_n(\hat{p}^T_{J,\lambda}))$, $n \geq 1$, constitui uma seqüência inferente de processos estocásticos para a função $p^T_{J,\lambda}$, aproximação sob limiar da intensidade por ondaletas até a J-ésima escala, com $L : \mathbb{R}_+ \times Ze(\ell i)_J \to \mathbb{R}_+$ definida por $L(\lambda, \eta) = \lambda\sqrt{Var(\hat{\beta}_\eta)}$, $T(x, y) = 1$ quando $|x| \geq y$ e $T(x, y) = 0$ caso contrário.*

Demonstração Imediata. ∎

Capítulo 6

Aplicação

Apresentaremos aqui uma aplicação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Estimaremos a intensidade de um processo pontual advindo dos retornos logarítmicos do índice da bolsa de Nova York "Dow-Jones Industrial Average". O processo pontual que estudaremos é formado da seguinte maneira. Um evento deste processo ocorre no tempo t se e somente se o valor absoluto do retorno logarítmico é maior do que um nível limiar pré estabelecido. Um conjunto de $T = 4225$ dados de retornos, correspondentes ao período de 2 de janeiro de 1986 a 26 de setembro de 2002 será utilizado, e o nível limiar será de 0,01452 equivalente a 1,28 vezes o desvio padrão destes retornos.

Este procedimento gera 558 eventos, os quais vamos assumir que sejam uma realização de um processo de Poisson com intensidade $p_N(t)$. Uma vez que é necessário limitar o número dos coeficientes de ondaleta que serão estimados e usados para a síntese de $\hat{p}$, escolhemos um conjunto de coeficientes que engloba exatamente todos os coeficientes de todas as escalas de ordem menor ou igual a um número positivo J. Se a intensidade fosse constante, esperaríamos $(558/4225)c$ eventos dentro de um intervalo de comprimento c. Sob esta suposição, esperaríamos ter $558/2^6 \approx 8$ eventos dentro do suporte de cada ondaleta da sexta escala e se a intensidade em algum intervalo de tempo é a metade da intensidade média, esse número pode diminuir para 4. Ondaletas que possuem poucos pontos em seu suporte podem fornecer informações enganosas. Esse argumento heurístico nos levou a escolher todas as ondaletas até a quinta ordem para o nosso processo de síntese.

Uma importante vantagem do nosso método de estimação é que temos acesso direto à variância de $\hat{\beta}_\eta$, por meio de $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_\eta)$, para cada η individualmente e não por uma estimativa para esta variância que dependa de todo um conjunto de coeficientes de ondaleta de uma dada escala ou de qualquer outro subconjunto do conjunto de todos os coeficientes de ondaleta. Observamos que quando é usado um estimador de $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_\eta)$, para um dado η, baseado na variância dos valores de todos os $\hat{\beta}_\xi$, que podem pertencer à mesma escala que β_η ou a um conjunto maior de coeficientes, o que estamos realmente fazendo é calculando um estimador da variância dos coeficientes pertencentes a este conjunto, e esta variância, provavelmente, na sua maior parte é devida à diversidade dos índices ξ's, isto é, dos inúmeros β_ξ's diferentes neste conjunto, e esta variância pode não ter nenhuma relação com a variância de $\hat{\beta}_\eta$ para aquele η de particular interesse.

Vale notar que, quando o processo está na presença de ruído, pode acontecer que todos os coeficientes de ondaleta sejam afetados e a variância do conjunto dos coeficientes das escalas de ordem superior é uma medida da intensidade do processo pontual de ruído. De fato, se o ruído que é adicionado a N é um processo pontual homogêneo de Poisson, com intensidade λ, então a variância dos coeficientes que pertencem a J-ésima escala é um estimador assintoticamente não viesado de λ, ou seja, $E\{\text{Var}(\hat{\beta}_{0,J},\ldots,\hat{\beta}_{2^J-1,J})\} \to \lambda$ quando $J \to \infty$. Neste caso, ainda podemos obter a intensidade estimada do processo N por meio de síntese feita sobre o processo observado e posteriormente subtraindo-se da intensidade estimada do processo observado a intensidade estimada do ruído.

Utilizamos nesta aplicação ondaletas de Haar. Assim,

$$\psi_{(0,0)} = T^{-1/2}(I_{[0,T/2)} - I_{[T/2,T)}) \,, \; \phi_{(0,0)} = T^{-1/2} I_{[0,T)} \,, \; T = 4225$$

e

$$\psi_{i,j} = \frac{2^{j/2}}{T^{1/2}} \left(I_{[iT/2^j,(2i+1)T/2^{j+1})} - I_{[(2i+1)T/2^{j+1},(i+1)T/2^j)} \right),$$

$$\psi^2_{i,j} = \frac{2^j}{T} I_{[iT/2^j,(i+1)T/2^j)}.$$

Os estimadores $\hat{\beta}_\eta$ e $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_\eta)$ foram obtidos pelas fórmulas

$$\hat{\beta}_{i,j} = \int \psi_{i,j} dN(t) = \sum_{\tau_k \in \text{supp}\psi_{i,j}} \psi_{i,j}(\tau_k) =$$

$$= \frac{2^{j/2}}{T^{1/2}} \left(\#\{\tau_k \in [iT/2^j, (2i+1)T/2^{j+1})\} - \#\{\tau_k \in [(2i+1)T/2^{j+1}, (i+1)T/2^j)\} \right)$$

e

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{i,j}) = \int \psi^2_{i,j} dN(t) = \sum_{\tau_k \in \text{supp}\psi_{i,j}} \psi^2_{i,j}(\tau_k) =$$

$$= \frac{2^j}{T} \left(\#\{\tau_k \in [iT/2^j, (i+1)T/2^j)\} \right).$$

Analogamente, obtivemos $\hat{p}_0$ e $\text{Var}\hat{\beta}_0$. Também

$$\hat{\beta}_0 \phi_{(0,0)} = \frac{1}{T^{1/2}} \frac{1}{T^{1/2}} \#\{\tau_k \in [0,T]\} = \frac{\#\{\tau_k \in [0,T]\}}{T}.$$

Esta é a intensidade média, 558/4225, que é o valor médio de p.

A função limiar escolhida foi $T(x,y) = 0$ para $|x| < y$ e $T(x,y) = 1$ para $|x| > y$. Este procedimento limiar é equivalente a adotar uma política de teste de hipótese bilateral para determinar se um coeficiente de ondaleta é igual ou diferente de zero. Lembramos que para $\lambda = 3$ temos, devido à desigualdade de Tchebichev, um "nível de confiança" de pelo menos $1 - (1/3)^2 = 8/9$ ou, aproximadamente, 88,8%, para qualquer que seja a distribuição de β_η.

A Figura 1 mostra o número acumulado de eventos e a Figura 2 a intensidade estimada, onde se observa claramente o caráter não estacionário do processo. As Figuras 3 e 4 apresentam, respectivamente, o desvio padrão estimado da função intensidade e a sua versão sob limiar, como fornecidos pelas proposições 5.3 e 5.5.

As Figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, a intensidade estimada e a intensidade estimada sob limiar acompanhadas de suas bandas de confiança não negativas. Novamente, estas figuras confirmam a não homogeneidade do processo pontual de Poisson ajustado.

Nas Figuras 5 e 6, as bandas de confiança são calculadas somando ou subtraindo-se μ vezes a função desvio padrão à função intensidade, limitadas inferiormente por zero.

Se não assumirmos que N é um processo de Poisson, tanto a intensidade estimada como a sua versão submetida a limiar continuam sendo aquelas já apresentadas mas, neste caso, não podemos calcular as bandas de confiança.

Figura 1: Número acumulado de eventos.

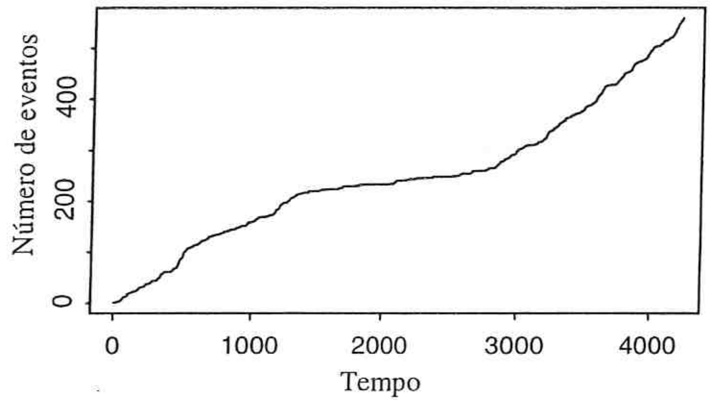


Figura 2: Intensidade estimada.

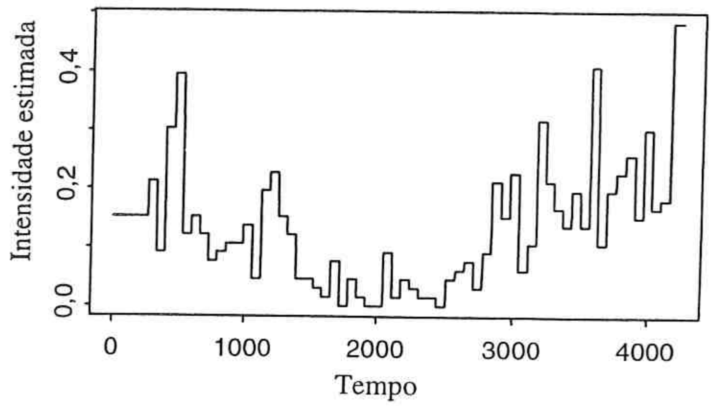


Figura 3: Desvio padrão estimado.

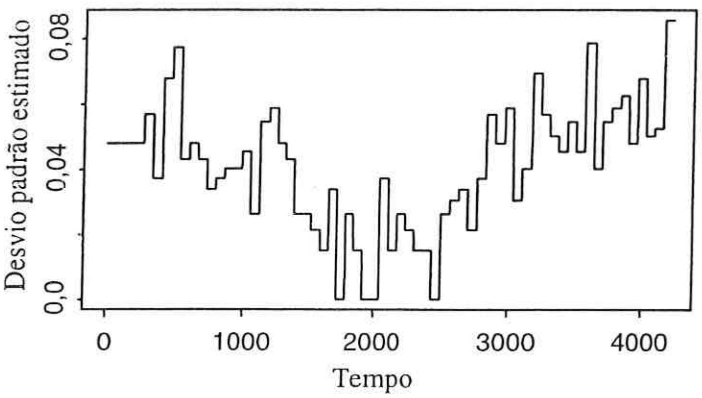


Figura 4: Desvio padrão estimado sob limiar (λ=3).

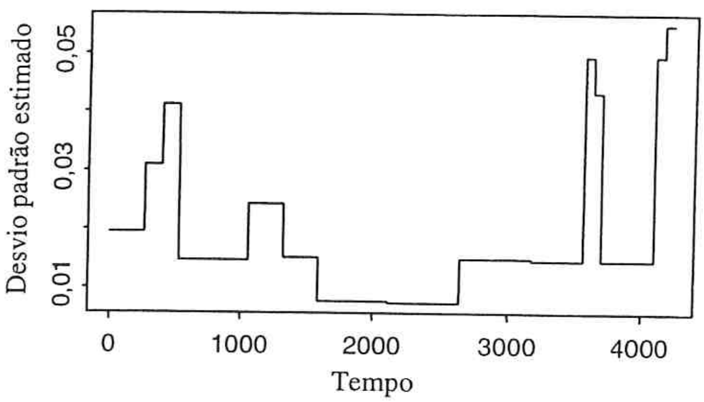


Figura 5: Intensidade estimada com bandas de confiança não negativas (μ=3).

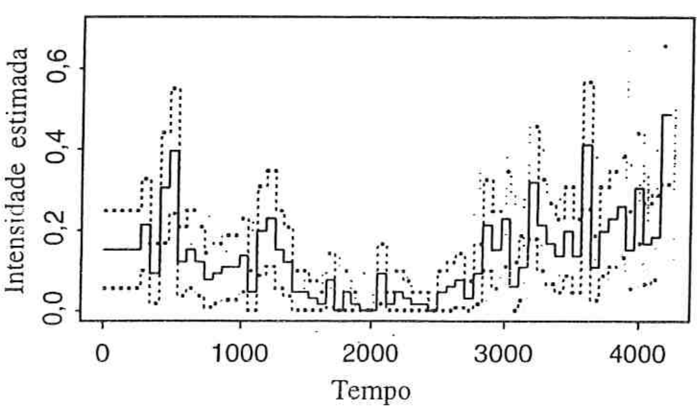
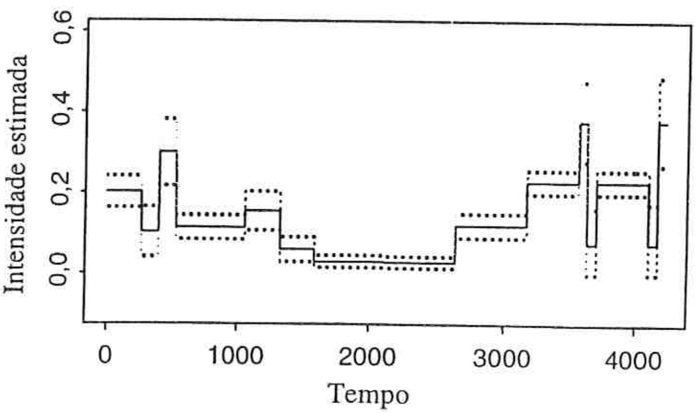


Figura 6: Intensidade estimada sob limiar com bandas de confiança não negativas (λ=3, μ=3).



Capítulo 7

Estimação da intensidade de processos sob interferência de ruído

Agora estudaremos uma situação na qual um processo pontual ocorre sob condições de ruído. Temos inicialmente, um processo pontual N que é objeto do nosso estudo. A este processo pontual é somado um outro processo pontual que será chamado de processo pontual de ruído, ou simplesmente, ruído. O processo pontual resultante M é aquele possível de ser observado. Escrevemos $M = N + R$ e isto irá significar que para todo $A \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $M(A) = N(A) + R(A)$. Vamos assumir que N e R são independentes. Formalmente, tomemos dois processos pontuais $(\Omega_N, \mathcal{A}_N, P_N) \xrightarrow{N} (\hat{N}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\hat{N}_{\mathbb{R}}})$ e $(\Omega_R, \mathcal{A}_R, P_R) \xrightarrow{R} (\hat{N}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\hat{N}_{\mathbb{R}}})$ e definamos o processo $(\Omega_N \times \Omega_R, \mathcal{A}_N \times \mathcal{A}_R, P_N \times P_R) \xrightarrow{M} (\hat{N}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\hat{N}_{\mathbb{R}}})$, $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_N \times \Omega_R \to M((\omega_1, \omega_2)) = N(\omega_1) + R(\omega_2)$, com $\hat{N}_{\mathbb{R}}$ o conjunto das medidas limitadamente finitas a valores inteiros definidas sobre os conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$.

7.1 Processos pontuais sob ruído

Proposição 7.1 *Sejam N e R processos pontuais que satisfazem às relações (1.9) e (1.10). Sejam p_N e r suas intensidades, respectivamente. Então, existem números reais $\delta > 0$ e $K_\delta > 0$ tais que para todos $t \in \mathbb{R}$ e Δ intervalo de $\mathbb{R}$ com $|\Delta| < \delta$ a relação a seguir é válida:*

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad P\{M(\Delta) = j\} \leq K_\delta (j-1)|\Delta|^j + P\{N(\Delta) = 1\}P\{R(\Delta) = j-1\} \\ + P\{N(\Delta) = j-1\}P\{R(\Delta) = 1\}. \tag{7.1}$$

Temos também

$$\lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ t \in \Delta}} \frac{P\{M(\Delta) = 1\}}{|\Delta|} = m(t) = p_N(t) + r(t) \tag{7.2}$$

e, se p_N e r pertencem a $\overline{\mathcal{L}}^1$, ou seja, N e R estão sob a hipótese B, então

$$P\{M(\Delta) = 1\} = m(t)|\Delta| + o_{1,\Delta}(t, |\Delta|)$$

e $o_{1,\Delta}(t,|\Delta|)$ *tem a propriedade: para todo intervalo limitado* $I \subset \mathbb{R}$ *existe* o_I *infinitesimal tal que*

$$\sup_{\substack{t\in I\\ t\in\Delta}} \sup_{\substack{\Delta\subset\mathbb{R}\\ |\Delta|=z}} |o_{1,\Delta}(t,z)| \leq o_I(z) \text{ com } o_I(|\Delta|)/|\Delta| \to 0 \text{ quando } |\Delta| \to 0 \text{ e } o_I(0)=0. \tag{7.3}$$

Denotamos $o_{1,\Delta}(t,|\Delta|)$ simplesmente por $o_1(t,|\Delta|)$.

Um infinitésimo que satisfaz à relação $\sup_{t\in\mathbb{R}} |o_t(x)| \leq o(x)$, $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ e $o(0)=0$, será chamado infinitésimo uniformemente limitado. Claramente, o conjunto dos infinitésimos uniformemente limitados, com as operações usuais de multiplicação por escalar, soma e produto de funções, formam uma álgebra comutativa sem unidade sobre $\mathbb{R}$. Um infinitésimo que satisfaz à relação 7.3 será chamado de infinitésimo uniformemente limitado sobre intervalos limitados. Novamente, é imediato que o conjunto destes infinitésimos é uma álgebra comutativa sem unidade sobre $\mathbb{R}$. Claramente os infinitésimos uniformemente limitados em intervalos limitados satisfazem a relação (2.8) pois basta, para cada I intervalo, tomar $\mathcal{O}$ intervalo aberto tal que $\mathcal{O} \supset I$ para verificar tal relação. Assim, estes infinitésimos são do tipo o_I. Estendemos naturalmente estes conceitos para infinitésimos O.

Demonstração Primeiro provamos a relação (7.1).

Da condição (1.9) para N, observando que sempre podemos escolher $k_{\delta_1} \geq 1$ de modo a fazer valer $P\{N(\Delta)=0\} \leq k_{\delta_1}|\Delta|^0 = k_{\delta_1}$, e, analogamente, para R vem

$$\exists\delta_1 > 0, \exists K_{\delta_1}, \forall j \in \mathbb{N}-\{1\}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall\Delta \subset \mathbb{R}, |\Delta| < \delta_1, P\{N(\Delta)=j\} \leq K_{\delta_1}|\Delta|^j,$$
$$\exists\delta_2 > 0, \exists K_{\delta_2}, \forall j \in \mathbb{N}-\{1\}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall\Delta \subset \mathbb{R}, |\Delta| < \delta_2, P\{R(\Delta)=j\} \leq K_{\delta_2}|\Delta|^j.$$

Donde obtemos, devido à independência de N e R,

$$\exists\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\},\ \exists K_\delta = K_{\delta_1}K_{\delta_2},\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R},\ \forall\Delta \subset \mathbb{R},\ |\Delta| < \delta,$$

$$\begin{aligned} P\{M(\Delta)=j\} &= \sum_{k=0}^{j} P\{N(\Delta)=k, R(\Delta)=j-k\} = \sum_{k=0}^{j} P\{N(\Delta)=k\}P\{R(\Delta)=j-k\} \\ &= P\{N(\Delta)=1\}P\{R(\Delta)=j-1\} + P\{N(\Delta)=j-1\}P\{R(\Delta)=1\} \\ &\quad + \sum_{\substack{k=0\\ k\notin\{1,j-1\}}}^{j} P\{N(\Delta)=k\}P\{R(\Delta)=j-k\} \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k\notin\{1,j-1\}}}^{j} P\{N(\Delta)=k\}P\{R(\Delta)=j-k\} \leq \sum_{\substack{k=0\\ k\notin\{1,j-1\}}}^{j} K_{\delta_1}|\Delta|^k K_{\delta_2}|\Delta|^{j-k}$

$$= K_{\delta_1}K_{\delta_2}\sum_{k=0}^{j}|\Delta|^j - 2K_{\delta_1}K_{\delta_2}|\Delta|^j = K_{\delta_1}K_{\delta_2}(j-1)|\Delta|^j,$$

(7.1) está estabelecida.

Agora voltamos nossa atenção para as intensidades. Como (1.11) e (1.12) decorrem das hipóteses da proposição (7.1),

$$P\{M(\Delta)=1\} = P\{N(\Delta)=1, R(\Delta)=0\} + P\{N(\Delta)=0, R(\Delta)=1\}$$
$$= P\{N(\Delta)=1\}P\{R(\Delta)=0\} + P\{N(\Delta)=0\}P\{R(\Delta)=1\}.$$

Como $P\{N(\Delta)=0\} = 1-P\{N(\Delta)=1\}-P\{N(\Delta)\geq 2\} = 1-p_N(t)|\Delta|-o'_{t,N}(|\Delta|)-o''_{t,N}(|\Delta|)$, $o'_{t,N}(|\Delta|)$ e $o''_{t,N}(|\Delta|)$ infinitésimos uniformemente limitados, pois por hipótese $o'_{t,N}(|\Delta|)$ o é, e também temos $o''_{t,N}(|\Delta|) \leq O(|\Delta|^2)$, temos $P\{N(\Delta)=0\} = 1-p_N(t)|\Delta|-o_{t,N}(|\Delta|)$, $o_{t,N}$ infinitésimo uniformemente limitado.

Analogamente, $P\{R(\Delta)=0\} = 1-r(t)|\Delta|-o_{t,R}(|\Delta|)$, $o_{t,R}$ infinitésimo uniformemente limitado.

Assim,

$$\begin{aligned}
P\{M(\Delta)=1\} &= (p_N(t)|\Delta| + o'_{t,N}(|\Delta|))(1-r(t)|\Delta|-o_{t,R}(|\Delta|)) \\
&\quad +(r(t)|\Delta| + o'_{t,R}(|\Delta|))(1-p_N(t)|\Delta|-o_{t,N}(|\Delta|)) \\
&= (p_N(t)+r(t))|\Delta| + o'_{t,N}(|\Delta|)(1-r(t)|\Delta|-o_{t,R}(|\Delta|)) \\
&\quad +o'_{t,R}(|\Delta|)(1-p_N(t)|\Delta|-o_{t,N}(|\Delta|)) \\
&\quad -p_N(t)|\Delta|(r(t)|\Delta|+o_{t,R}(|\Delta|)) - r(t)|\Delta|(p_N(t)|\Delta|+o_{t,N}(|\Delta|)) \\
&= (p_N(t)+r(t))|\Delta| + o_1(t,|\Delta|)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t\in\Delta}} \frac{P\{M(\Delta)=1\}}{|\Delta|} = \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t\in\Delta}} (p_N(t)+r(t)) + \lim_{|\Delta|\to 0} \frac{o_1(t,|\Delta|)}{|\Delta|} = p_N(t)+r(t) = m(t)$$

Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se p_N e r pertencem a $\overline{\mathcal{L}}^1$, pela proposição 2.2, p_N e r pertencem a $\mathcal{C}^1$ e temos que $\pi = \sup_I p_N$ e $\rho = \sup_I r$ são finitos.

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in I} |o_1(t,|\Delta|)| \leq\ & o'_N(|\Delta|)(1+\rho|\Delta|+o_R(|\Delta|)) + o'_R(|\Delta|)(1+\pi|\Delta|+o_N(|\Delta|)) \\
& +\pi|\Delta|(\rho|\Delta|+o_R(\Delta)) + \rho|\Delta|(\pi|\Delta|+o_N(\Delta)),
\end{aligned}$$

logo, $\sup_{t\in I}|o_1(t,|\Delta|)|/|\Delta| \to 0$ quando $|\Delta|\to 0$ e $\sup_{t\in I}|o_1(t,0)| = 0$.

Portanto, $o_1(t,|\Delta|)|$ satisfaz (7.3).

■

Proposição 7.2 *Se N e R satisfazem (1.9) e (1.10) então*

(i) $P\{M(\Delta)>1\} \leq O(t,|\Delta|^2)$;

(ii) $P\{M(\Delta)=1\} \leq E\{M(\Delta)\} \leq P\{M(\Delta)=1\} + O(t,|\Delta|^2)$;

(iii) $E\{M(\Delta)\} = m(t)|\Delta| + o_1(t,|\Delta|)$. *Se N e R estão sob a hipótese B então $o_1(t,|\Delta|)$ satisfaz (7.3).*

Em notação diferencial escrevemos $E\mathrm{d}M(t) = m(t)\mathrm{d}t + o_1(t, \mathrm{d}t)$.

Demonstração (i)

$$
\begin{aligned}
P\{M(\Delta) > 1\} &\leq \sum_{j>1} (K_\delta (j-1)|\Delta|^j + P\{N(\Delta) = 1\} P\{R(\Delta) = j-1\} \\
&\quad + P\{N(\Delta) = j-1\} P\{R(\Delta) = 1\}) \\
&= P\{N(\Delta) = 1\} \sum_{j>1} P\{R(\Delta) = j-1\} + P\{R(\Delta) = 1\} \sum_{j>1} P\{N(\Delta) = j-1\} \\
&\quad + K_\delta \sum_{j>1} (j-1)|\Delta|^j .
\end{aligned}
$$

Observamos que a função $f(z) = \sum\limits_{j \geq 2} (j+1) z^j$ é analítica no disco $|z| < 1$. Então

$$
\begin{aligned}
\sum_{j \geq 2} (j+1) z^j &= \sum_{j \geq 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^{j+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{j \geq 2} z^{j+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^3 \sum_{j \geq 0} z^j \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^3 \frac{1}{1-z} \right) = \frac{3z^2(1-z) - z^3(-1)}{(1-z)^2} \\
&= \frac{3z^2 - 2z^3}{(1-z)^2} = z^2 \frac{(3-2z)}{(1-z)^2} = O(z^2).
\end{aligned}
$$

Agora, de $\sum_{j>1} P\{R(\Delta) = j-1\} = P\{R(\Delta) = 1\} + \sum_{j>1} P\{R(\Delta) = j\} = r(t)|\Delta| + o'_{t,R}(|\Delta|) + o''_{t,R}(|\Delta|)$ e de sua análoga para N temos, para $0 \leq |\Delta| < 1$,

$$
\begin{aligned}
P\{M(\Delta) > 1\} &\leq (p_N(t)|\Delta| + o'_{t,N}(|\Delta|))(r(t)|\Delta| + o_{t,R}(|\Delta|)) \\
&\quad + (r(t)|\Delta| + o'_{t,R}(|\Delta|))(p_N(t)|\Delta| + o_{t,N}(|\Delta|)) + k_\delta O(|\Delta|^2)
\end{aligned}
$$

já que $\sum_{j>1} (j-1)|\Delta|^j \leq \sum_{j>1} (j+1)|\Delta|^j$.

Portanto, $P\{M(\Delta) > 1\} \leq 2 p_N(t) r(t) |\Delta|^2 + o(t, |\Delta|^2) = O(t, |\Delta|^2)$. Observe que, como $o'_{t,N}$, $o_{t,N}$, $o'_{t,R}$ e $o_{t,R}$ são uniformemente limitados, se p_N e r pertencem a $\mathcal{L}^1$, $o(t, |\Delta|^2)$ é uniformemente limitado sobre intervalos limitados, assim como $O(t, |\Delta|^2)$.

(ii)

$$
\begin{aligned}
E\{M(\Delta)\} &= P\{M(\Delta) = 1\} + \sum_{j \geq 2} j P\{M(\Delta) = j\} \\
&\leq P\{M(\Delta) = 1\} + P\{N(\Delta) = 1\} \sum_{j>1} j P\{R(\Delta) = j-1\} \\
&\qquad + P\{R(\Delta) = 1\} \sum_{j>1} j P\{N(\Delta) = j-1\} + \sum_{j \geq 2} K_\delta j (j-1) |\Delta|^j \\
&\leq P\{M(\Delta) = 1\} + P\{N(\Delta) = 1\} \sum_{j \geq 1} (j+1) P\{R(\Delta) = j\} \\
&\qquad + P\{R(\Delta) = 1\} \sum_{j \geq 1} (j+1) P\{N(\Delta) = j\} + K_\delta |\Delta| \sum_{j \geq 2} j(j+1) |\Delta|^{j-1} \\
&\leq P\{M(\Delta) = 1\} + 2(P\{N(\Delta) = 1\} E(R(\Delta)) \\
&\qquad + P\{R(\Delta) = 1\} E(N(\Delta))) + O(|\Delta|^2),
\end{aligned}
$$

já que

$$
\begin{aligned}
K_\delta z \sum_{j\geq 2} j(j+1)z^{j-1} &= K_\delta z \sum_{j\geq 2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} z^{j+1} = K_\delta z \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \sum_{j\geq 2} z^{j+1} \\
&= K_\delta z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^2(3-2z)}{(1-z)^2}\right) = K_\delta z \left(\frac{(6z-6z^2)(1-z)^2 - z^2(3-2z)2(1-z)(-1)}{(1-z)^4}\right) \\
&= K_\delta z \frac{6z(1-z)^3 + 2z^2(1-z)(3-2z)}{(1-z)^4} \\
&= 6K_\delta z^2 \left(\frac{1}{1-z} + \frac{z(1-2z/3)}{(1-z)^3}\right) = O(z^2).
\end{aligned}
$$

Como $P\{N(\Delta) = 1\} = p_N(t)|\Delta| + o'_{t,N}(|\Delta|)$, $E(N(\Delta)) = p_N(t)|\Delta| + \tilde{o}_{t,N}(|\Delta|)$, existindo expressões análogas para R, sendo todos estes infinitesimais uniformemente limitados, temos $E(M(\Delta)) \leq P\{M(\Delta) = 1\} + O(t, |\Delta|^2)$, sendo $O(t, |\Delta|^2)$ uniformemente limitado em intervalos limitados se tivermos p_N e $r \in \mathcal{L}^1$.

(iii) $P\{M(\Delta) = 1\} \leq E\{M(\Delta)\} \leq m(t) + o_1(t, |\Delta|) + O(t, |\Delta|^2)$. Assim

$$E\{M(\Delta)\} = m(t) + o'_1(t, |\Delta|),$$

sendo que o'_1 tem as mesmas propriedades de $o_1(t, |\Delta|)$ quando p_N e r pertencem a $\mathcal{L}^1$ e podemos escrever $E\{M(\Delta)\} = m(t) + o_1(t, |\Delta|)$. Portanto, em particular, se N e R estão sob a hipótese B então $o_1(t, |\Delta|)$ satisfaz (7.3).

$\blacksquare$

Definição 7.1 *Um processo pontual N satisfaz à hipótese *B+ se e somente se satisfaz à hipótese *B e $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell \in ess\mathcal{L}^1$.*

Definição 7.2 *Um processo pontual N satisfaz à hipótese *A+ se e somente se satisfaz à hipótese *A e $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell \in ess\mathcal{L}^1$.*

A hipótese *A+ é equivalente às hipóteses *B+ e *A simultaneamente.

Proposição 7.3 *Para φ EM-integrável, se N e R satisfazem a hipótese B (*B), temos*

$$\int \varphi(t) E\mathrm{d}M(t) = \int \varphi(t) m(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstração Como $m(t) = p_N(t) + r(t) \in \mathcal{L}^1$ e $E\mathrm{d}M = m(t)\mathrm{d}t + o_1(t, \mathrm{d}t)$ sendo $o_1(t, \mathrm{d}t)$ um infinitésimo uniformemente limitado sobre intervalos limitados, negligenciando infinitésimos de ordem superior, pelo Corolário 2.4, obtemos

$$\int \varphi(t) E\mathrm{d}M(t) = \int \varphi(t) m(t)\mathrm{d}t.$$

Veja a demonstração da Proposição (7.6) para o caso de N e R estarem sob a hipótese *B. $\blacksquare$

Proposição 7.4 *Sejam N e R sob a hipótese A (*A) e*

$$E\{\mathrm{d}N(t_1)\mathrm{d}N(t_2)\} = p_2^N(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2, \; E\{\mathrm{d}R(t_1)\mathrm{d}R(t_2)\} = p_2^R(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,$$
$$\mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}N(t_1),\mathrm{d}N(t_2)\} = q_2^N(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2, \; \mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}R(t_1),\mathrm{d}R(t_2)\} = q_2^R(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

Então

$$E\{\mathrm{d}M(t_1)\mathrm{d}M(t_2)\} = p_2^M(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

e

$$\mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}M(t_1),\mathrm{d}M(t_2)\} = q_2^M(t_1,t_2),$$

com

$$p_2^M(t_1,t_2) = p_2^N(t_1,t_2) + p_2^R(t_1,t_2) + p_N(t_1)r(t_2) + p_N(t_2)r(t_1)$$

e

$$q_2^M(t_1,t_2) = q_2^N(t_1,t_2) + q_2^R(t_1,t_2).$$

Demonstração

$$\begin{aligned}
&E\{\mathrm{d}M(t_1)\mathrm{d}M(t_2)\} = E\{(\mathrm{d}N(t_1)+\mathrm{d}R(t_1))(\mathrm{d}N(t_2)+\mathrm{d}R(t_2))\} \\
&= E\{\mathrm{d}N(t_1)\mathrm{d}N(t_2)\} + E\{\mathrm{d}N(t_1)\mathrm{d}R(t_2)\} + E\{\mathrm{d}R(t_1)\mathrm{d}N(t_2)\} + E\{\mathrm{d}R(t_1)\mathrm{d}R(t_2)\} \\
&= p_2^N(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + p_N(t_1)r(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + r(t_1)p_N(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + p_2^R(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}M(t_1),\mathrm{d}M(t_2)\} = \mathrm{Cov}\,\{(\mathrm{d}N(t_1)+\mathrm{d}R(t_1)),(\mathrm{d}N(t_2)+\mathrm{d}R(t_2))\} \\
&= \mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}N(t_1),\mathrm{d}N(t_2)\} + \mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}N(t_1),\mathrm{d}R(t_2)\} + \mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}N(t_2),\mathrm{d}R(t_1)\} \\
&+\mathrm{Cov}\,\{\mathrm{d}R(t_1)\mathrm{d}R(t_2)\} \\
&= q_2^N(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + 0 + 0 + q_2^R(t_1,t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,
\end{aligned}$$

devido à independência de R e N. ■

Proposição 7.5 *Se N e R satisfazem à hipótese A (*A) e são processos pontuais de Poisson, então*

$$p_2^M(t_1,t_2) = p_N(t_1)(p_N(t_2)+r(t_2)) + r(t_1)(p_N(t_2)+r(t_2))$$

e $q_2^M(t_1,t_2) = 0$.

Demonstração Imediata. ■

Proposição 7.6 *Se N e R satisfazem à hipótese *B+ então $M = N + R$ também a satisfaz. Se N e R satisfazem à hipótese *A então $M = N + R$ também a satisfaz e, conseqüentemente, se N e R satisfazem à hipótese *A+ então M também a satisfaz.*

Demonstração Se N e R satisfazem à hipótese *B então existem $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell$ e $\mathrm{d}ER/\mathrm{d}\ell$ e, portanto, existe

$$\frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\mathrm{d}ER}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mathrm{d}(EN + ER)}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mathrm{d}E(N + R)}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mathrm{d}EM}{\mathrm{d}\ell},$$

a derivada de Radon Nikodyn da medida de esperança de M. Dito de outra maneira, como $EN \ll \ell$ e $ER \ll \ell$ temos $EM = E(N + R) = EN + ER \ll \ell$. Como $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell$ e $\mathrm{d}ER/\mathrm{d}\ell$ pertencem à ess$\mathcal{L}^1$, pois N e R satisfazem à hipótese *B+, $\mathrm{d}EM/\mathrm{d}\ell \in$ ess$\mathcal{L}^1$.

Como N e R satisfazem à hipótese *B temos

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; \forall \Delta \subset \mathbb{R} \;\; t \in \Delta \;\; EN(\Delta) = P\{N(\Delta) = 1\} + o^N_{t,\Delta}(|\Delta|)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; \forall \Delta \subset \mathbb{R} \;\; t \in \Delta \;\; ER(\Delta) = P\{R(\Delta) = 1\} + o^R_{t,\Delta}(|\Delta|).$$

Assim, $EM(\Delta) - P\{M(\Delta) = 1\} = EN(\Delta) + ER(\Delta) - P\{N(\Delta) = 1, R(\Delta) = 0\} - P\{R(\Delta) = 1, N(\Delta) = 0\} = EN(\Delta) - (EN(\Delta) - o^N_t(|\Delta|))\; P\{R(\Delta) = 0\} + ER(\Delta) - (ER(\Delta) - o^R_t(|\Delta|))\; P\{N(\Delta) = 0\} \leq EN(\Delta)(1 - P\{R(\Delta) = 0\}) + ER(\Delta)(1 - P\{N(\Delta) = 0\})$.

Seja Δ_1 intervalo tal que $t \in int\Delta_1$ e $k_1 = \operatorname{ess\,sup}_{\Delta_1}(\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell)$, $k_2 = \operatorname{ess\,sup}_{\Delta_1}(\mathrm{d}ER/\mathrm{d}\ell)$. Como N satisfaz à hipótese *B+, $\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell \in$ ess$\mathcal{L}^1$ e portanto, k_1 é finito. Analogamente, k_2 também é finito. Para todo $\Delta \subset \Delta_1$ temos

$$\frac{EN(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{\int_\Delta (\mathrm{d}EN/\mathrm{d}\ell)\mathrm{d}\ell}{|\Delta|} \leq \frac{k_1|\Delta|}{|\Delta|} = k_1.$$

Também é verdade que $(1 - P\{R(\Delta) = 0\}) \to 0$ quando $|\Delta| \to 0$ pois, em caso contrário teríamos $P\{R(\Delta) \geq 1\} \to z$, $z > 0$ quando $|\Delta| \to 0$ e, conseqüentemente, $ER(\Delta) \geq z$ para todo Δ intervalo que contém t, desigualdade esta contraditória com o fato de termos R sob a hipótese *B+ já que neste caso temos

$$ER(\Delta) = \int_\Delta (\mathrm{d}ER/\mathrm{d}\ell)\mathrm{d}\ell \leq \sup_{\Delta_1}(\mathrm{d}ER/\mathrm{d}\ell)|\Delta| = k_2|\Delta|$$

para todo $\Delta \subset \Delta_1$ e, portanto, $ER(\Delta) \to 0$ quando $|\Delta| \to 0$.

Assim, $\lim_{|\Delta|\to 0, t\in\Delta} \frac{EN(\Delta)}{|\Delta|}(1 - P\{R(\Delta) = 0\}) = 0$. Analogamente, $\lim_{|\Delta|\to 0, t\in\Delta} \frac{ER(\Delta)}{|\Delta|}(1 - P\{N(\Delta) = 0\}) = 0$.

Temos então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\Delta\to 0, t\in\Delta} \frac{EM(\Delta) - P\{M(\Delta) = 1\}}{|\Delta|} \\ &\leq \lim_{|\Delta|\to 0, t\in\Delta} \frac{EN(\Delta)}{|\Delta|}(1 - P\{R(\Delta) = 0\}) + \lim_{|\Delta|\to 0, t\in\Delta} \frac{ER(\Delta)}{|\Delta|}(1 - P\{N(\Delta) = 0\}) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, podemos escrever $EM(\Delta) = P\{M(\Delta) = 1\} + o^M_{t,\Delta}(|\Delta|)$. Isto completa a prova de que M está sob a hipótese *B+.

Agora, como N e R são independentes, temos

$$\begin{aligned} E(M \times M) &= E((N + R) \times (N + R)) = E(N \times N + R \times N + N \times R + R \times R) \\ &= E(N \times N) + ER \times EN + EN \times ER + E(R \times R). \end{aligned}$$

Se N e R satisfazem a hipótese *A temos, para todo $A \subset \Lambda_{\mathbb{R}^2}$,

$$\begin{aligned} E(M \times M)(A \cap D) &= E(N \times N)(A \cap D) + E(R \times R)(A \cap D) + (ER \times EN)(A \cap D) \\ &\quad +(EN \times ER)(A \cap D) \\ &= EN\pi_1(A \cap D) + ER\pi_1(A \cap D) + \int_{A\cap D} \frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell} \otimes \frac{\mathrm{d}ER}{\mathrm{d}\ell}\mathrm{d}\ell \times \mathrm{d}\ell \\ &\quad + \int_{A\cap D} \frac{\mathrm{d}ER}{\mathrm{d}\ell} \otimes \frac{\mathrm{d}EN}{\mathrm{d}\ell}\mathrm{d}\ell \times \mathrm{d}\ell \\ &= E(N\pi_1(A \cap D) + R\pi_1(A \cap D)) + 0 \\ &= E((N + R)\pi_1(A \cap D)) = EM\pi_1(A \cap D) \end{aligned}$$

já que $(\ell \times \ell)(D) = 0$. Portanto M satisfaz a hipótese *A.

Se N e R satisfazem à hipótese *A+ então satisfazem às hipóteses *B+ e *A e , assim, M satisfaz às hipóteses *B+ e *A e portanto à hipótese *A+.

■

7.2 Estimação da intensidade sob ruído

Seja $m_* = m|_{[0,T]}$ a restrição de m ao intervalo $[0, T]$ e $r_* = r|_{[0,T]}$.

Sejam

$$\beta_\eta^M = \int_0^T \psi_\eta m_* \mathrm{d}t \ \text{ e } \ \hat{\beta}_\eta^M = \int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}M$$

e também

$$\gamma_\eta = \int_0^T \psi_\eta r_* \mathrm{d}t \ \text{ e } \ \hat{\gamma}_\eta = \int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}R$$

os coeficientes de ondaleta das expansões de m_* e r_* e seus estimadores.

Proposição 7.7 *Se substituirmos β_η por β_η^M, $\hat{\beta}_\eta$ por $\hat{\beta}_\eta^M$, $p(t)$ por $m_*(t)$, $p_2(u,v)$ por $p_2^M(u,v)$, $q_2(u,v)$ por $q_2^M(u,v)$, $\hat{p}_J$ por $\hat{m}_{*J}$, $\hat{p}_{J,\lambda}^T$ por $\hat{m}_{*J,\lambda}^T$, $\hat{p}$ por $\hat{m}_*$ e assumirmos que R satisfaz às mesmas hipóteses que N, em particular, r é suposta essencialmente α-Hölderiana quando p o é, R é processo de Poisson quando N o é, e, especialmente, N e R satisfazem a hipótese A (*A+) ou B (*B+) se N satisfaz a hipótese A (*A) ou B (*B), nos enunciados dos Lemas 2.3 a 2.5; Corolário 2.6; Teoremas 4.1 a 4.6; Proposições 5.1 a 5.4 e Teoremas 5.1 a 5.8, obtemos novos enunciados válidos que chamaremos Lemas 2.3* a 2.5*; Corolário 2.6*; Teoremas 4.1* a 4.6*; Proposições 5.1* a 5.4* e Teoremas 5.1* a 5.8*.*

Demonstração Se fizermos também as mesmas substituições nas demonstrações dos teoremas obteremos novas provas para os lemas, corolário, teoremas e proposições correspondentes. Notamos aqui, a importância do Corolário 2.4, pois os infinitésimos associados a M são do tipo o_I; e o fato de que precisamos, para garantir a existência de p_m^M, densidade produto de ordem m para M, ter a existência de p_n^N e p_n^R as densidades produto de ordem n, de N e R, para todos os n, $1 \leq n \leq m$, para podermos estabelecer o Lema 2.3*.

■

Assim, a partir do Teorema 4.1*, podemos escrever

$$\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \iint_C \psi_\eta(u)\psi_\eta(v)q_2^M(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^T \psi_\eta^2(u)m_*(u)\mathrm{d}u,$$

e da Proposição 7.4,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) &= \iint_C \psi_\eta(u)\psi_\eta(v)q_2^N(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^T \psi_\eta^2(u)p(u)\mathrm{d}u \\ &\quad + \iint_C \psi_\eta(u)\psi_\eta(v)q_2^R(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^T \psi_\eta^2(u)r_*(u)\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \mathrm{Var}\,(\hat{\gamma}_\eta).\end{aligned}$$

Em particular, se impusermos restrição apenas sobre o ruído, podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 7.1 *Sob as hipóteses do Teorema 4.1*, se* $\mathrm{supp}\,\psi_{(0,0)} = [0,T]$ *e o ruído é Poisson homogêneo com intensidade* ε, *então* $\hat{\beta}_\eta^M$ *é um estimador de* β_η *com as seguintes propriedades:*

(i) para todo η, $\eta = (i,j)$, $j \geq 0$, $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta$, $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \varepsilon$ *se* $0 \leq i \leq 2^j - 1$, *e* $0 = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta)$ *caso contrário;*

(ii) para todo η, $\eta = (0,j)$, $j < 0$, $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta + \varepsilon.2^{-j/2}\int_0^{2^jT}\psi_{(0,0)}(t)\mathrm{d}t$ *e* $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \varepsilon\int_0^{2^jT}\psi_{(0,0)}^2(t)\mathrm{d}t$;

(iii) para todo η, $\eta = (i,j)$, $i \neq 0$ *e* $j < 0$, $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta = 0$ *e* $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) = 0$;

(iv) para todo $\eta \in \mathbb{Z}$ *temos: se* $\ell i \geq 0$ *e* $0 \leq \eta \leq 2^{\ell i} - 1$ *então* $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta + 2^{-\ell i/2}\varepsilon$ *e* $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \varepsilon$,
se $\ell i < 0$ *e* $\eta = 0$ *então* $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta + \varepsilon 2^{-\ell i/2}\int_0^{2^{\ell i}T}\phi_{(0,0)}(t)\mathrm{d}t$ *e* $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \varepsilon\int_0^{2^{\ell i}T}\phi_{(0,0)}^2(t)\mathrm{d}t$,
e $E\hat{\beta}_\eta^M = \beta_\eta = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) = 0$ *caso contrário.*

Demonstração

$$\begin{aligned}E\hat{\beta}_\eta^M &= E\int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}M = \int_0^T \psi_\eta E\mathrm{d}M = \int_0^T \psi_\eta E\mathrm{d}N + \int_0^T \psi_\eta E\mathrm{d}R \\ &= \beta_\eta + \varepsilon\int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}t, \\ \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta^M) &= \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \mathrm{Var}\,(\hat{\gamma}_\eta) = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \int_0^T \psi_\eta^2\varepsilon\mathrm{d}t = \mathrm{Var}\,(\hat{\beta}_\eta) + \varepsilon\int_0^T \psi_\eta^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(i) Se $\eta = (i,j)$, $j \geq 0$, então

$$\int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}t = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T \psi_\eta^2\mathrm{d}t = 1 \text{ se e somente se } 0 \leq i \leq 2^j - 1,$$

sendo esta última integral igual a zero caso contrário. Como $\ell(\operatorname{supp}(\psi_\eta \otimes \psi_\eta) \cap C) = 0$ quando $i < 0$ ou $i \geq 2^j$, temos $\operatorname{Var}(\hat{\beta}_\eta) = 0$ e o resultado segue.

(ii) Se $i = 0$ e $j < 0$, então

$$\int_0^T \psi_\eta \mathrm{d}t = \int_0^T 2^{j/2}\psi_{(0,0)}(2^j t)\mathrm{d}t = 2^{-j/2}\int_0^{2^j T} \psi_{(0,0)}(x)\mathrm{d}x$$

e

$$\int_0^T \psi_\eta^2 \mathrm{d}t = \int_0^T 2^j \psi_{(0,0)}^2(2^j t)\mathrm{d}t = \int_0^{2^j T} \psi_{(0,0)}^2(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) Se $i \neq 0$ e $j < 0$, então $\operatorname{supp}\psi_{(i,j)} \cap [0, T) = \emptyset$. Por isso,

$$\hat{\beta}_\eta^M = 0, \; E\hat{\beta}_\eta^M = 0, \; \hat{\beta}_\eta = 0 = \beta_\eta, \; \operatorname{Var}(\hat{\beta}_\eta^M) = 0 \; \text{ e } \; \operatorname{Var}(\hat{\beta}_\eta) = 0.$$

(vi) Se $\ell i \geq 0$ temos

$$\int_0^T \phi_{\eta,\ell i}\mathrm{d}t = \int_0^T 2^{\ell i/2}\phi(2^{\ell i}t - \eta T)\mathrm{d}t = 2^{-\ell i/2}\int_{-\eta T}^{2^{\ell i}T-\eta T} \phi_{(0,0)}(u)\mathrm{d}u = 2^{-\ell i/2} I_{\eta \in \{0,\ldots,2^{\ell i}-1\}}$$

e $\int_0^T \phi_{\eta,\ell i}^2 \mathrm{d}t = \int_0^T \phi_{(0,0)}^2 \mathrm{d}t I_{\eta \in \{0,\ldots,2^{\ell i}-1\}}$.
Se $\ell i \leq 0$ temos $\operatorname{supp}\phi_{(\eta,\ell i)} \cap [0, T] \neq \emptyset$ se e só se $\eta = 0$, e assim

$$\int_0^T \phi_{\eta,\ell i}\mathrm{d}t = 2^{-\ell i/2}\int_0^{2^{\ell i}T} \phi_{(0,0)}(t)\mathrm{d}t$$

e $\int_0^T \phi_{\eta,\ell i}^2 \mathrm{d}t = \int_0^{2^{\ell i}T} \phi_{(0,0)}^2 \mathrm{d}t.$ ∎

Então, estamos interessados em encontrar um método para estimar ε. Para este fim, apresentamos o seguinte lema.

Lema 7.1 *Seja $\{X_{i,k} | 1 \leq i \leq n_k\}$, $n_k \geq 2$ para todo k, um conjunto de variáveis aleatórias tal que para todo $k \in \mathbb{N}^*$ e todo $i, j \in \{1, \ldots, n_k\}$, $\operatorname{Var} X_{i,k} = \varepsilon + \mathcal{O}_i(k)$, com $\max_{1\leq i\leq n_k} |\mathcal{O}_i(k)| \to 0$ quando $k \to \infty$ e também, para $i \neq j$, $\operatorname{Cov}(X_{i,k}, X_{j,k}) = 0$. Seja $\mu_{i,k} = EX_{i,k}$ e $v_{i,k} = \mu_{i,k} - (\sum_{l=1}^{n_k} \mu_{l,k})/n_k$. Se $v_{i,k}$ é tal que $\max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}| \to 0$ quando $k \to \infty$, então*

$$\hat{\varepsilon}(k) = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k}\left(X_{i,k} - \left(\sum_{l=1}^{n_k} X_{l,k}\right)/n_k\right)^2$$

é um estimador assintoticamente não viesado de ε.

Demonstração Sejam $Y_{i,k} = X_{i,k} - \mu_{i,k}$ e $Z_{i,k} = Y_{i,k} - \left(\sum_{l=1}^{n_k} Y_{l,k}\right)/n_k$. Então $EZ_{i,k} = 0$. Já que

$$
\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}(k) &= \frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k}\left(X_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}X_{l,k}}{n_k}\right)^2\\
&= \frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k}\left(X_{i,k}-\mu_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}(X_{l,k}-\mu_{l,k})}{n_k}+\mu_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}\mu_{l,k}}{n_k}\right)^2\\
&= \frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k}\left[\left(Y_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}Y_{l,k}}{n_k}\right)+\left(\mu_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}\mu_{l,k}}{n_k}\right)\right]^2\\
&= \frac{1}{n_k-1}\sum_{i=1}^{n_k}(Z_{i,k}-v_{i,k})^2\\
&= \frac{1}{n_k-1}\left(\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}^2-2\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}v_{i,k}+\sum_{i=1}^{n_k}v_{i,k}^2\right).
\end{aligned}
$$

Temos

$$
E\hat{\varepsilon}(k)=\frac{1}{n_k-1}\left(E\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}^2-2\sum_{i=1}^{n_k}(EZ_{i,k})v_{i,k}+\sum_{i=1}^{n_k}v_{i,k}^2\right)=\frac{1}{n_k-1}\left(E\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}^2+\sum_{i=1}^{n_k}v_{i,k}^2\right) \tag{7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
E\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}^2 &= E\sum_{i=1}^{n_k}\left(Y_{i,k}-\frac{\sum_{l=1}^{n_k}Y_{l,k}}{n_k}\right)^2=E\sum_{i=1}^{n_k}\left[\frac{n_k-1}{n_k}Y_{i,k}-\frac{1}{n_k}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n_k}Y_{l,k}\right]^2\\
&= E\sum_{i=1}^{n_k}\left[\left(\frac{n_k-1}{n_k}\right)^2Y_{i,k}^2+\frac{1}{n_k^2}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n_k}Y_{l,k}^2+\sum_{s=1}^{n_k}\sum_{\substack{t=1\\ s\neq t}}^{n_k}a_{s,t}Y_{s,k}Y_{t,k}\right]\\
&= E\left[\left(\frac{n_k-1}{n_k}\right)^2\sum_{i=1}^{n_k}Y_{i,k}^2+\frac{1}{n_k^2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{\substack{l=1\\ i\neq l}}^{n_k}Y_{l,k}^2\right]+\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{n_k}\sum_{t=1}^{n_k}a_{s,t}E(Y_{s,k}Y_{t,k}).
\end{aligned}
$$

Como $E(Y_{s,k}Y_{t,k})=\mathrm{Cov}\,(X_{s,k},X_{t,k})=0$, para $s\neq t$ temos

$$
\begin{aligned}
E\sum_{i=1}^{n_k}Z_{i,k}^2 &= E\left[\left(\frac{n_k-1}{n_k}\right)^2\sum_{i=1}^{n_k}Y_{i,k}^2+\frac{1}{n_k^2}(n_k-1)\sum_{i=1}^{n_k}Y_{i,k}^2\right]\\
&= \left[\left(\frac{n_k-1}{n_k}\right)^2+\left(\frac{n_k-1}{n_k^2}\right)\right]\sum_{i=1}^{n_k}E(Y_{i,k}^2)\\
&= \frac{(n_k-1)n_k}{n_k^2}\sum_{l=1}^{n_k}\mathrm{Var}\,(X_{i,k})=\frac{n_k-1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\mathrm{Var}\,(X_{i,k}).
\end{aligned}
$$

De 7.4, temos

$$E\hat{\varepsilon}(k) = \frac{1}{n_k - 1}\left(\frac{n_k - 1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} \mathrm{Var}\,(X_{i,k}) + \sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2\right).$$

Já que $\mathrm{Var}\, X_{i,k} = \varepsilon + \mathcal{O}_i(k)$,

$$\begin{aligned} E\hat{\varepsilon}(K) &= \frac{1}{n_k}\left(n_k\varepsilon + \sum_{i=1}^{n_k}\mathcal{O}_i(k)\right) + \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2 \\ &= \varepsilon + \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\mathcal{O}_i(k) + \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\mathcal{O}_i(k)\right| &\leq \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}|\mathcal{O}_i(k)| \leq \frac{1}{n_k} n_k \max_{1\leq i\leq n_k} |\mathcal{O}_i(k)| \\ &= \max_{1\leq i\leq n_k} |\mathcal{O}_i(k)| \to 0 \text{ quando } k \to \infty \end{aligned}$$

e

$$\left|\frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2\right| \leq \frac{n_k}{n_k - 1}\max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}^2| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}^2|.$$

Como $\max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}| \to 0$ com $k \to \infty$, existe M_1 tal que para todo $k > M_1$, $\max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}^2| \leq \max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}|$ e obtemos

$$\left|\frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2\right| \leq 2 \max_{1\leq i\leq n_k} |v_{i,k}| \to 0 \text{ com } k \to \infty.$$

Então, combinando estes dois limites, temos

$$E\hat{\varepsilon}(k) = \varepsilon + \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\mathcal{O}_i(k) + \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} v_{i,k}^2 \to \varepsilon \text{ com } k \to \infty.$$

■

Teorema 7.2 *Seja $\{\psi_\eta, \eta \in Ze(\ell i)\}$ uma base ortonormal de ondaletas tais que* $\operatorname{supp}\psi_{(0,0)} = [0, T]$ *e $\psi_{(0,0)}$ seja essencialmente limitada. Sejam N e R processos pontuais que satisfazem à hipótese A (*A+). Se o ruído é Poisson com intensidade ε, então*

$$\hat{\varepsilon}(n) = \frac{1}{2^n - 1}\sum_{\substack{\eta \\ j=n}}\left(\hat{\beta}_\eta^M - \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\substack{\xi \\ j=n}}\hat{\beta}_\xi^M\right)\right)^2$$

é um estimador assintoticamente não viesado de ε.

Demonstração Aplicação direta do Lema 7.1 para $X_{i,k} = \hat{\beta}_{(i,k)}^M$.

Observemos que

(i) Se $i \neq j$, $\mathrm{Cov}\,(\hat\beta^M_{(i,k)}, \hat\beta^M_{(j,k)}) = \int\limits_0^T \psi_{(i,k)}\psi_{(j,k)} m \mathrm{d}t = 0$ como uma conseqüência do fato de que $\mathrm{supp}\,\psi_{(i,k)} \cap \mathrm{supp}\,\psi_{(j,k)} = \emptyset$.

(ii) $\mathrm{Var}\,\hat\beta^M_\eta = \varepsilon + \mathrm{Var}\,(\hat\beta_\eta) = \varepsilon + \int\limits_0^T \psi^2_\eta p \mathrm{d}t$ e $\int\limits_0^T \psi^2_{(i,k)} p \mathrm{d}t$

$\leq (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p) \int_0^T 2^k \psi^2_{(0,0)}(2^k t - iT)\mathrm{d}t$

$\leq (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p) M_*^2 \int\limits_{iT/2^k}^{((i+1)/2^k)T} \mathrm{d}t = (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p) M_*^2 T/2^k, M_* = \mathrm{ess\,sup}\,|\psi_{(0,0)}|$,

isto é, $\mathrm{Var}\,\hat\beta^M_{(i,k)} = \varepsilon + \mathcal{O}_i(k)$, $\max_{0\leq i \leq n_k = 2^k - 1} \mathcal{O}_i(k) \leq M_*^2 (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p) T/2^k \to 0$ quando $k \to \infty$.

(iii) $\mu_{i,k} = E\hat\beta^M_{(i,k)} = E\int\limits_0^T \psi_{(i,k)}(t)\mathrm{d}M(t) = \int\limits_0^T \psi_{(i,k)} m \mathrm{d}t = \int\limits_0^T \psi_{(i,k)}(p+\varepsilon)\mathrm{d}t$,

$|\mu_{i,k}| \leq \int_0^T |\psi_{(i,k)}|(p+\varepsilon)\mathrm{d}t \leq 2^{k/2} M_* (\mathrm{ess\,sup}_{[0,T]}\, p + \varepsilon) \int\limits_{iT/2^k}^{((i+1)/2^k)T} \mathrm{d}t =$

$= M_* (\mathrm{ess\,sup}_{[0,T]}\, p + \varepsilon) T/2^{k/2}$,

$|v_{i,k}| = \left| \mu_{i,k} - \frac{\sum\limits_{l=0}^{n_k - 1} \mu_{l,k}}{n_k} \right| \leq |\mu_{i,k}| + \frac{\sum\limits_{l=0}^{n_k-1} |\mu_{l,k}|}{n_k} \leq |\mu_{i,k}| + \frac{n_k}{n_k} M_* (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p + \varepsilon) T/2^{k/2} =$

$2M_* (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p + \varepsilon) T/2^{k/2}$, $n_k = 2^k$.

Então, $\max\limits_{0 \leq i \leq 2^k - 1} |v_{i,k}| \leq M_* (\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} p + \varepsilon) T/2^{k/2-1} \to 0$ quando $k \to \infty$. ■

Agora podemos calcular um estimador de p, a função intensidade do processo pontual que está sob a interferência do ruído.

Utilizamos a estimativa de ε, a intensidade do ruído, e escrevemos:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\hat p} &= \hat m - \hat\varepsilon = \sum_\eta \hat\beta^M_\eta \psi_\eta - \hat\varepsilon, \quad \hat\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \hat\varepsilon(n), \\
\widetilde{\hat p_{J,L}} &= \sum_{Ze(\ell i)_J} \hat\beta^M_\eta \psi_\eta - \hat\varepsilon(L), \quad L \geq J, \\
\widetilde{\hat p^T_{J,L,\lambda}} &= \sum_{Ze(\ell i)_J} T\left(\hat\beta^M_\eta, \lambda\sqrt{\mathrm{Var}\,\hat\beta^M_\eta}\right) \hat\beta^M_\eta \psi_\eta - \hat\varepsilon(L), \quad L \geq J,
\end{aligned}
$$

e, na prática, utilizamos $\widehat{Var}\hat\beta^M_\eta$ ao invés de $\mathrm{Var}\,\hat\beta^M_\eta$.

Para mais detalhes, propriedades dos estimadores, limitantes para o viés, velocidade de convergência, seqüências inferentes e análise de inferência segura, veja de Miranda e Morettin (2002b).

Comentários Finais

Neste trabalho, lidamos com o problema de estimar a intensidade dependente do tempo de um processo pontual não homogêneo sobre a reta real e em particular de processos de Poisson. Um tratamento semelhante pode ser feito para processos pontuais em geral (Daley e Vere-Jones, 1988). Nesta situação, consideramos X um espaço métrico completo separável, N um processo pontual sobre X e definimos μ-densidade e μ-densidade produto com respeito a uma medida limitadamente finita. Este tópico não será apresentado aqui, mas este trabalho está desenvolvido em de Miranda e Morettin (2002a). Outra situação de interesse aparece quando temos tais processos pontuais sujeitos à interferência de ruído e o objetivo então é estimar a intensidade de N que vai depender da estimativa da intensidade do ruído. Resultados similares aos obtidos aqui podem ser enunciados nesta situação (ver de Miranda e Morettin (2002b)). As técnicas aqui apresentadas são diretamente estendidas para processos pontuais marcados (ver de Miranda e Morettin (2003)).

Bibliografia

Besbeas, P., De Feis, I. and Sapatinas, T. (2002). A comparative simulation study of wavelet shrinkage estimators for Poisson counts. *Rapporto Tecnico*, 240/02. Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"- Sezione di Napoli, CNR, Italy.

Brillinger, D.R. (1975). Statistical inference for stationary point processes. *Stochastic Processes and Related Topics*, **1**, 55–99.

Brillinger, D.R. (1978). Comparative aspects of the study of ordinary time series and point processes. *Developments in Statistics*, **1**, 33–133.

Brillinger, D.R. (1997). Some wavelet analyses of point processes data. The Third First Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. IEEE Computer Society, 1087–1091.

Cramér, H. and Leadbetter,M.R. (1967). *Stationary and Related Stochastic Processes.* New York: Wiley.

Daley, D.J. and Vere-Jones, D. (1988) *An Introduction to the Theory of Point Processes.* New York: Springer.

Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM.

de Miranda, J.C.S. (2002a). Abstract wavelet theory. Preprint.

de Miranda, J.C.S. (2002b). α-cummulants and the theorem of estimation. Preprint.

de Miranda, J.C.S. (2003). Neglecting higher order infinitesimals. Preprint.

de Miranda, J.C.S. and Morettin, P.A. (2002a). On point processes μ–density functions. Preprint.

de Miranda, J.C.S. and Morettin, P.A. (2002b). On the estimation of the intensity of a point process immersed in noise. Preprint.

de Miranda, J.C.S. and Morettin, P.A. (2003). Wavelet estimators for marked point processes. Preprint.

Donoho, D.L., Johnstone, I.M., Kerkyacharian, G. and Picard, D. (1996). Density estimation by wavelet shrinkage. *The Annals of Statistics*, **24**, 508–539.

Fernandez, P.J. (1976). *Medida e Integração.* Projeto Euclides.

Helmers, R. and Zitikis, R. (1999). On estimation of Poisson intensity functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **51**, 265–280.

Kolaczyk, E.D. (1999a). Bayesian multiscale models for Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 92–933.

Kolaczyk, E.D. (1999b). Wavelet shrinkage estimation of certain Poisson intensity signals using corrected thresholds. *Statistica Sinica*, **9**, 119–135.

Meyer, Y. (1992). *Ondelettes et algorithmes concurrents.* Hermann.

Morettin, P.A. (1999). *Ondas e Ondaletas. Da análise de Fourier à análise de ondaletas.* Edusp.

Priestley, M.B. (1996). Wavelets and time-dependent spectral analysis. *Journal of Time Series Analysis*, **17**, 85–103.

Rathbun, S.L. and Cressie, N. (1994). Asymptotic properties of estimators for the parameters of spatial inhomogeneous Poisson point processes. *Advances in Applied Probability*, **26**, 122–154.

Snyder, D.L. (1975). *Random Point Processes.* New York: Wiley.

Timmermann, K.E. and Nowak, R.D. (1997). Multiscale modelling and estimation of Poisson processes with application to photon-limited imaging. *IEEE Transactions on Information Theory*, **45**, 846–862.