

**FATORES COMPETITIVOS DE RISCO
SOB O MÓDELO WEIBULL:
UMA PERSPECTIVA BAYESIANA**

Marcos Antonio Coque Júnior

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

Área de Concentração: **Estatística**
Orientador: **Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira**

São Paulo, Outubro de 2004

**FATORES COMPETITIVOS DE RISCO
SOB O MODELO WEIBULL:
UMA PERSPECTIVA BAYESIANA**

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e defendida
por Marcos Antonio Coque Júnior
e aprovada pela comissão julgadora.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Carlos Alberto Bragança Pereira (orientador) – IME - USP
- Prof. Dr. Wagner de Souza Borges – IME - USP
- Prof. Dr. Dani Gamerman - UFRJ

Agradecimentos

À minha Mãe (Miriam) e ao meu Pai (Marcos) pela educação e apoio que me deram durante toda a vida. Sem eles nada seria possível.

À minha namorada (Renata) pelo carinho e compreensão durante o período em que escrevi minha tese.

Ao meu orientador (Prof. Carlinhos) pela confiança depositada em mim.

Aos meus amigos Bianca, Fabio, Jacqueline, Kelly e Priscila pelas nossas conversas na graduação que enriqueceram o meu conhecimento em Estatística.

A todos os professores do Departamento de Estatística do IME –USP que contribuíram para a minha formação de Estatístico.

Resumo

Existem diversos fatores de risco de falha na vida de um sistema ao mesmo tempo. Por esta razão se diz que esses fatores estão competindo para provocar a falha do sistema. Neste trabalho estudou-se, sob a perspectiva Bayesiana, a aplicação do modelo de “fatores competitivos de risco” sob o modelo paramétrico Weibull. Métodos de simulação foram utilizados devido à complexidade matemática da distribuição posteriori, mais especificamente o método Metropolis-Hastings. Desta maneira, probabilidades de interesse e a medida de evidência para hipótese precisa (FBST - Full Bayesian Significance Test) foram calculadas baseadas na amostra gerada pelo método de simulação. Estas medidas auxiliaram no processo decisório de comparação dos fatores de riscos. Ao final, analisamos dois conjuntos de dados onde se pode aplicar a teoria descrita ao longo da dissertação.

Abstract

There are many factors of risk of failure in the life of a system at the same time. For this reason we say that these factors are competing to cause of the failure of the system. The application of "competing factors of risk model" was studied in this work, under the Bayesian perspective, with the Weibull parametric model. Simulation methods were used due to the mathematical complexity of the posteriori distribution, more specifically the Metropolis-Hastings method. Of this way, the probabilities of interesting and the measure of evidence to precious hypothesis (FBST - Full Bayesian Significance Test) were calculated based on the sample generated by the simulation method. This process helped on the comparison of the factors of risks. Finally, we analyze two data sets where we could apply the theory described in this thesis.

Capítulo 1

Introdução

No paradigma da teoria da confiabilidade, o intervalo de tempo para a ocorrência de um evento relevante é, talvez, o elemento aleatório de maior interesse para os estudiosos da área. Estes eventos são, na maioria dos casos, indesejáveis e usualmente chamados de falhas. A sofisticação das metodologias de análise de confiabilidade permite incorporar informações parciais que estão presentes em observações censuradas (ou suspensas ou mesmo omitidas). Informações censuradas, dependendo do tipo de censura, podem fornecer informações adicionais sobre o tempo de vida esperado de um produto.

Na vida de um sistema existem diversos fatores de risco de falha presentes ao mesmo tempo, por esta razão se diz que esses fatores estão competindo para provocar a falha do sistema. Entende-se que no modelo que se irá descrever, apenas um desses competidores é o responsável pela falha do sistema. No restante desse trabalho, por “fatores competitivos de risco” entender-se-á o conjunto de fatores de risco de falha presentes na vida de um sistema.

Não é raro o uso da palavra “riscos” para, indiscriminadamente, designar a causa da falha ou a probabilidade de ocorrer a falha. Para evitar confusão, usa-se risco para a probabilidade e fator de risco para a causa. Caso haja mais de um fator de risco presente na vida de um sistema, será usado o termo “*fatores competitivos de risco*”.

O comportamento de falha de um sistema é, na maioria das vezes, representado pela sua taxa de falha. Essa taxa pode ser crescente, decrescente ou constante ao longo do tempo, principalmente quando o sistema está exposto a diferentes fatores de risco. Assim, é desejável o uso de um modelo probabilístico que,

apenas por mudanças nos valores de seus parâmetros, possa representar cada uma dessas situações. A família de distribuições Weibull é rica o bastante para representar todos esses tipos de situações. Por esta razão foi escolhida essa família para o trabalho de descrever e estudar a confiabilidade de um sistema sob diferentes fatores de riscos.

Os objetivos desse nosso trabalho são os seguintes:

- Descrever o problema da construção do modelo de confiabilidade quando em presença de fatores competitivos de riscos.
- Usar a família Weibull como família de probabilidades do tempo de vida do sistema quando sujeitos a um fator de risco específico.
- Combinar a confiabilidade dos itens que compõem o sistema para obter-se a confiabilidade global do sistema.
- Usar a perspectiva Bayesiana nos processos decisório de estimação e testes de significância estatística.
- Utilizar a metodologia desenvolvida em exemplos reais de aplicação que foram coletados ao longo do trabalho de consultoria de responsabilidade do autor.

Em modelos complexos como a Weibull, eliciar a distribuição a priori para os parâmetros é tarefa árdua, não só pelo número de parâmetros envolvidos, como também pela forma da distribuição. A operação Bayesiana, “prior to posterior”, é também de difícil execução. Dessa forma, será utilizado o já consagrado método de simulação MCMC (Monte Carlo via Cadeias de Markov). Especificamente, o método Metropolis-Hastings será utilizado intensivamente para alguns problemas de estimação e significância.

Enfatiza-se aqui o objetivo de estudar, sob a perspectiva Bayesiana, a aplicação do modelo Weibull em problemas de confiabilidade sujeitos a fatores competitivos de risco. Quantidades de interesse para a melhora da confiabilidade serão avaliadas. Por exemplo, calculou-se a probabilidade de um determinado fator provocar a morte do sistema antes da possível ação de um outro fator. Calculou-se também a evidência de uma determinada hipótese precisa como a equivalência do efeito de dois fatores de risco. A medida de evidência usada é a descrita e desenvolvida em Pereira e Stern (1999).

O Capítulo 2 apresenta as definições básicas e a notação utilizada no modelo Weibull. O Capítulo 3 é dedicado à descrição do método MCMC com as adaptações e ajustes que se teve de recorrer para o este problema específico. É importante ressaltar que, embora o método seja bem geral, ele deve sofrer adaptações para muitos

problemas específicos. O Capítulo 4 apresenta as quantidades de interesse, bem como as suas estimativas e cálculos. Finalmente, o Capítulo 5 apresenta dois exemplos onde se pôde exercitar a teoria descrita ao longo da dissertação.

Capítulo 2

Fatores Competitivos de Risco sob o Modelo Weibull

Embora nas amostras observadas de tempos de vida de sistemas, as unidades amostrais apresentem diferentes fatores (causas) para suas falhas, e mesmo algumas não apresentem falhas, cada fator de risco pode ser estudado separadamente, sem, contudo, abandonarem-se os tempos de vida daqueles que sofreram falhas por outros fatores. Isto é, no estudo da distribuição do tempo t , de funcionamento do sistema, até a ocorrência de falha do sistema provocada por um fator específico, todas as unidades amostrais devem contribuir para esse estudo. As diversas distribuições devem ser estudadas separadamente e depois combinadas para a avaliação global do sistema e de seus fatores de risco. O objeto principal da teoria de fatores competitivos de risco é a distribuição do tempo de vida de um sistema que está sujeito, simultaneamente, a diferentes fatores.

Este capítulo apresenta as definições básicas e a notação utilizada na análise de tempo de falha, apresentando as relações básicas entre a função acumulada, densidade e taxa de falha. Na seção 2.1 são apresentadas as principais funções de confiabilidade e como determinar a verossimilhança na presença dos dados censurados. Na seção 2.2 será definido o Modelo de Fatores Competitivos de Risco e a função verossimilhança para este tipo de análise. A seção 2.3 apresenta a distribuição Weibull, bem como sua aplicação para o Modelo de Fatores

Competitivos de Risco. Finalmente, na seção 2.4 definir-se-á a priori não informativa utilizada e a posteriori para os parâmetros sob o modelo Weibull.

2.1 Modelo de Tempo de Falha

Na análise de dados de confiabilidade é ponto fundamental a caracterização da distribuição de probabilidade para o tempo de falha t . Esta distribuição pode ser descrita pela função de confiabilidade, pela função de densidade de falha ou pela função taxa de falha.

A função de confiabilidade avaliada no tempo t indica a probabilidade que um elemento da população irá apresentar um tempo de vida maior que t ,

$$R(t|\theta) = \Pr(T > t | \theta),$$

onde, θ são parâmetros do modelo.

A função de distribuição acumulada para t , avaliada no tempo t , indica a probabilidade de um elemento da população de interesse falhar até o tempo t ,

$$F(t|\theta) = \Pr(T \leq t | \theta)$$

Sendo assim $R(t|\theta)$ é um complemento de $F(t|\theta)$, portanto $R(t|\theta) = 1 - F(t|\theta)$.

A função de densidade de probabilidade para uma variável T é definida como a derivada de $F(t|\theta)$ com relação a t : $f(t|\theta) = dF(t|\theta)/dt$. A função densidade pode ser interpretada como uma frequência relativa dos tempos de falha em função do tempo.

A função taxa de falha é definida como:

$$h(t|\theta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t|\theta)}{R(t|\theta)}$$

Essa função expressa a propensão de falha no próximo intervalo de tempo “pequeno”, dado que sobreviveu até o tempo t .

A função verossimilhança dos dados é uma função dos parâmetros do modelo assumido e a sua forma depende dos dados obtidos (falha ou censura). Na análise de dados de confiabilidade, se não existem dados censurados, a função verossimilhança é somente relacionada à função de densidade $f(t|\theta)$, caso contrário a verossimilhança está relacionada com a $f(t|\theta)$ e com a $R(t|\theta)$.

Considere n tempos $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_i , definido como, $\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } t_i \text{ for tempo censurado.} \\ 1, & \text{se } t_i \text{ for tempo de falha.} \end{cases}$

Então a função verossimilhança é dada por,

$$L(\theta | t) = \prod_{i=1}^n f(t_i | \theta)^{\delta_i} R(t_i | \theta)^{1-\delta_i} \quad (2.1)$$

onde θ são os parâmetros de interesse.

2.2 Teoria de Fatores Competitivos de Risco

Em um estudo de confiabilidade é comum que existam diversos fatores de falha (ou morte) de um sistema, e somente um desses fatores irá causar a falha. Portanto, se diz que esses fatores competem na vida do sistema. O modelo para o tempo de vida sujeita a esses fatores é conhecido como *modelo de fatores competitivos de risco*.

Na terminologia da teoria de fatores competitivos, o problema é formulado como segue. Suponha-se que para um particular indivíduo de uma população, existam k ($k \geq 2$) independentes potenciais causas de falha. Cada membro da população está sujeito a k fatores de falha. Isso é chamado de *fatores competitivos de risco*.

Cada unidade está exposta a k ($k \geq 2$) fatores de risco independentes. Um e somente um irá causar a falha do sistema. Este fator é conhecido como causa da falha. Suponha-se que $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij}$ sejam variáveis aleatórias contínuas e positivas denominadas tempos de falha (ou tempo de vida) para uma determinada unidade i ($i=1, 2, \dots, n$) exposta aos j fatores ($j = 1, 2, \dots, k$). Em outras palavras, X_{ij} representa o tempo de vida do i -ésimo indivíduo sob o j -ésimo fator de risco. Contudo, todos os k fatores agem simultaneamente, mas como somente um irá aparecer, adotar-se-á outra variável aleatória $T_i = \min(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ij})$. Além disso será observado o label δ_{ij} que representa a causa da falha do i -ésimo indivíduo sob o j -ésimo fator de risco, ou seja:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{se o indivíduo } i \text{ falhou por } j, \text{ ou seja } T_i = X_{ij} \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se o indivíduo } i \text{ não falhou por } j, \text{ ou seja } T_i \neq X_{ij} \end{cases}$$

Se o i -ésimo indivíduo não apresentou nenhuma falha até um determinado tempo V_i , ou seja, $T_i > V_i$, então se considera $T_i = V_i$ e os labels δ_{ij} desse indivíduo são

todos iguais a zero. Neste caso, está-se determinando um *tempo de censura (ou suspensão)* para o i -ésimo indivíduo.

Considere-se uma amostra de n indivíduos nas condições anteriores. Então se têm disponíveis os dados $(T_1, \delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1k}), \dots, (T_n, \delta_{n1}, \delta_{n2}, \dots, \delta_{nk})$.

Do ponto de vista paramétrico, suponha-se que as variáveis para os k fatores de riscos independentes sejam contínuas e positivas, com parâmetros θ_j ($j=1, \dots, k$), e considere-se n tempos $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} , então a função de verossimilhança será,

$$L(\theta_1, \dots, \theta_k | t) = \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n f(t_i | \theta_j)^{\delta_{ij}} R(t_i | \theta_j)^{1-\delta_{ij}} \quad (2.2)$$

Pode-se notar que quando se está analisando um determinado fator j , o *modelo de fatores competitivos* considera como falha os tempos em que ocorreram falhas pelo fator j e considera como censura, além dos tempos que não apresentaram falhas, os tempos de falha provocados por fatores diferentes de j .

2.3 Modelo Weibull

A distribuição de Weibull foi proposta originalmente por Wallodi Weibull em estudos de tempo de falha devido à fadiga de metais. Em se tratando de fatores de falhas, a distribuição Weibull tem uma notável aceitação, pois apenas com mudanças nos valores dos seus parâmetros ela permite modelar comportamento de falha crescente, decrescente ou constante ao longo do tempo. Conseqüentemente, o ajuste do modelo Weibull é razoável dentro do contexto de fatores competitivos de risco, já que cada fator pode apresentar um comportamento distinto para um mesmo sistema.

Nesta seção serão apresentadas as principais funções e características da família de distribuição Weibull que possui, na sua forma mais completa, três parâmetros:

- β : Parâmetro de forma (ou inclinação);
- η : Parâmetro de escala (ou vida característica);
- γ : Parâmetro de localização.

Para o tempo $t \geq 0$, dados os parâmetros de forma ($\beta > 0$), escala ($\eta > 0$) e localização ($\gamma \leq t$), a função densidade de probabilidade da distribuição Weibull é definida por

$$f(t | \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.3)$$

Neste trabalho será considerado $\gamma = 0$, portanto a função densidade de probabilidade da distribuição Weibull dois parâmetros é dada por

$$f(t | \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.4)$$

Alterando o parâmetro de forma, β , tem-se uma variedade de comportamentos desta distribuição. Alguns valores desse parâmetro são casos especiais:

$\beta=1$, a Weibull é uma distribuição Exponencial;

$\beta=2$, a Weibull é uma distribuição Rayleigh;

$\beta=3,6$, a Weibull se aproxima de uma distribuição Normal;

$\beta=5$, a Weibull se aproxima de uma distribuição Normal com pouca variabilidade com relação à média.

O parâmetro de escala η representa aproximadamente o tempo do 63º percentil do tempo de vida do sistema.

A função de densidade acumulada da distribuição Weibull:

$$F(t | \beta, \eta) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.5)$$

A função de confiabilidade da distribuição Weibull:

$$R(t | \beta, \eta) = 1 - F(t | \beta, \eta) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.6)$$

A função taxa de falha da distribuição Weibull é dada por:

$$h(t | \beta, \eta) = \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta-1} \quad (2.7)$$

As principais formas da taxa de falha para a distribuição Weibull podem ser descritas por $\beta < 1$, taxa de falha decrescente, $\beta = 1$, taxa de falha constante e $\beta > 1$, taxa de falha crescente.

A média da distribuição Weibull é dada por:

$$E(T | \beta, \eta) = \eta \cdot \Gamma\left(\frac{\beta + 1}{\beta}\right) \quad (2.8)$$

$$\text{onde } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} \cdot e^{-s} ds$$

2.3.1 Verossimilhança sob o Modelo Weibull na aplicação de fatores competitivos de risco

Considere-se n tempos $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} ($j=1, 2, \dots, k$); suponha-se que para uma população que siga o modelo Weibull, existam k independentes fatores de falha. Tem-se, então, que a verossimilhança é o produto da função densidade e da função de confiabilidade. Substituindo-se (2.4) e (2.6) em (2.2), a função verossimilhança sob o modelo Weibull é definida,

$$\begin{aligned} L(\beta_j, \eta_j | t) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n \left[f(t | \beta_j, \eta_j)^{\delta_{ij}} \cdot R(t | \beta_j, \eta_j)^{1-\delta_{ij}} \right] \\ L(\beta_j, \eta_j | t) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\left\{ \frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta_j}\right)^{\beta_j}\right] \right\}^{\delta_{ij}} \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta_j}\right)^{\beta_j}\right] \right\}^{1-\delta_{ij}} \right) \\ L(\beta_j, \eta_j | t) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \right)^{\delta_{ij}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta_j}\right)^{\beta_j}\right] \cdot \delta_{ij} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta_j}\right)^{\beta_j}\right] \cdot (1-\delta_{ij}) \right) \\ L(\beta_j, \eta_j | t) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \right)^{\delta_{ij}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta_j}\right)^{\beta_j}\right] \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.4 Definição da Priori não-informativa e da Posteriori

O processo de estimação e testes de significância sob a perspectiva Bayesiana baseia-se na função verossimilhança dos dados e na distribuição a priori para a quantidade de interesse. Quando se espera que a informação dos dados seja dominante, no sentido de que a informação a priori é não-informativa, determina-se a priori não-informativa ou priori de referência.

A primeira idéia de “não-informação” a priori é que todos os valores do parâmetro são igualmente prováveis, isto é, representado por uma distribuição priori uniforme. Algumas dificuldades inerentes a essa escolha são que a priori é imprópria e não invariante para transformação de variáveis.

Não se dará importância à eventual impropriedade da distribuição a priori, pois o interesse é a distribuição a posteriori, e esta é, em geral, própria. Mas é interessante definir uma priori que fosse invariante, ou seja, o raciocínio que leva a especificação da priori do parâmetro de interesse ser não-informativa deverá levar a uma priori não-informativa da transformação do parâmetro. Então será utilizada a classe de prioris não-informativas propostas por Jeffreys (1961), que é eventualmente imprópria, porém invariante.

Considerando-se que a distribuição conjunta da distribuição a priori de Beta e Eta são independentes e utilizando-se o conceito proposto por Jeffreys, a função priori para os parâmetros desconhecidos será,

$$\pi(\beta_j, \eta_j) \propto \prod_{j=1}^k \frac{1}{\beta_j} \cdot \frac{1}{\eta_j} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.10)$$

Para maiores detalhes, veja-se Zellner (1971).

Considerando-se a priori não-informativa baseada na regra de Jeffreys e na verossimilhança definida em (2.9), tem-se a seguinte posteriori,

$$\begin{aligned} \pi(\beta_j, \eta_j | t) &\propto \pi(\beta_j, \eta_j) \cdot L(\beta_j, \eta_j | t) \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \pi(\beta_j, \eta_j | t) &\propto \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\beta_j} \cdot \frac{1}{\eta_j} \right) \cdot \left[\left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \right)^{\delta_{ij}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta_j} \right)^{\beta_j} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\delta_{ij}=1$ ($\delta_{ij}=0$) se a i -ésima observação do j -ésimo fator é uma falha (censura).

No processo decisório de estimação e testes de significância estatística sob a perspectiva Bayesiana, é interessante que se conheça a função posteriori como uma

densidade de probabilidade. Neste caso seria necessário determinar a constante de proporcionalidade, calculada pela integração de (2.11) para os parâmetros. Este cálculo é matematicamente complexo e de difícil execução, mas utilizando-se a forma funcional da posteriori dos parâmetros, pode-se recorrer a métodos de simulação para os cálculos das medidas de interesse. A metodologia mais adequada para este problema é a simulação de Monte Carlo via Cadeia de Markov, especificamente o método Metropolis-Hastings descrito no próximo capítulo.

Capítulo 3

Monte Carlo via Cadeia de Markov

Os métodos de simulação de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) vêm sendo largamente utilizados em diversas áreas e, particularmente, em Inferência Bayesiana, para avaliar a distribuição posteriori.

A idéia central deste método é simular uma cadeia de Markov, cuja distribuição estacionária seja a função de densidade posteriori dos parâmetros de interesse, onde a geração direta é complexa. Uma vez que existam evidências de que a cadeia tenha atingido a convergência, tem-se uma amostra da densidade conjunta dos parâmetros em questão e, então se utilizará essa amostra para aproximar a distribuição posteriori e proceder aos cálculos de estimação e testes de significância bayesianos.

Nas próximas seções apresenta-se o método para geração destas cadeias, bem como testes para avaliação de convergência e formação da amostra.

3.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

Uma forma de gerar valores de uma distribuição π é utilizando o algoritmo amostrador de Gibbs ou Metropolis-Hastings.

O amostrador de Gibbs é uma técnica para geração de uma amostra com base nas densidades condicionais completas, tendo ele a possibilidade de gerar valores diretamente, produzindo uma cadeia de Markov que tenha como distribuição estacionária a densidade posteriori.

No problema de fatores competitivos de risco, utilizando-se a distribuição Weibull, apenas se conhece a forma funcional da posteriori e não é possível gerar

valores diretamente da distribuição condicional dos parâmetros. Neste caso será utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, pois este método permite simular amostras da distribuição π , da qual é conhecida apenas sua forma funcional.

Para a definição do algoritmo, considere-se uma cadeia de Markov com núcleo de transição p . Para garantir a convergência para a distribuição π , devem-se tomar cadeias reversíveis (Gamerman, 1997), isto é, que satisfazem,

$$\pi(\theta) \cdot p(\theta, y) = \pi(y) \cdot p(y, \theta)$$

O próximo passo é encontrar $p(\theta, y)$ que satisfaça a condição de reversibilidade. Suponha-se que exista uma densidade $q(\theta, y)$ da qual se podem gerar candidatos. Assim, quando o processo está em θ , essa densidade gera um valor y . No entanto, quase sempre θ e y não satisfarão as condições de reversibilidade. Pode acontecer, por exemplo,

$$\pi(\theta) \cdot q(\theta, y) > \pi(y) \cdot q(y, \theta) \quad (3.1)$$

o que diz que θ se move para y com bastante frequência e y se move para θ raramente.

Para a resolução desse problema introduz-se uma chance de movimento $\alpha(\theta, y) < 1$. Assim, a probabilidade de transição é dada por $p(\theta, y) = q(\theta, y) \cdot \alpha(\theta, y)$. Além disso, determina-se $\alpha(\theta, y)$ de forma que a condição de reversibilidade seja satisfeita,

$$\pi(\theta) \cdot q(\theta, y) \cdot \alpha(\theta, y) = \pi(y) \cdot q(y, \theta) \cdot \alpha(y, \theta)$$

Considerando-se a desigualdade (3.1), é possível fazer $\alpha(y, \theta)$ tão grande quanto possível ($\alpha(y, \theta) = 1$), e para a garantia das condições de reversibilidade, define-se a probabilidade aceitação como:

$$\alpha(\theta, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y) \cdot q(\theta, y)}{\pi(\theta) \cdot q(y, \theta)}, 1 \right\} \quad (3.2)$$

É claro que se a desigualdade (3.1) for revertida, faz-se $\alpha(\theta, y) = 1$ e $\alpha(y, \theta)$ como descrito anteriormente. Perceba-se que $\alpha(\theta, y)$ e $\alpha(y, \theta)$ balanceiam os dois lados de (3.1), garantindo a condição de reversibilidade, assim a probabilidade de movimento deve ser dada por (3.2).

Esta técnica permite gerar valores de uma distribuição de interesse ($\pi(\theta)$) através de uma densidade proposta (q), e então aceitar ou rejeitar o valor gerado (y) segundo uma probabilidade de aceitação ($\alpha(\theta, y)$).

Para aplicações práticas pode-se utilizar o seguinte algoritmo para geração de cadeias por Metropolis-Hastings:

Algoritmo 3.1

1. Inicie o contador de interações em $m=1$ e estabeleça o valor inicial do parâmetro: $\theta^{(0)}$.
2. Gere um ponto da distribuição proposta, $y \sim q(\theta^{(m-1)}, \cdot)$.
3. Gere um valor u de uma Uniforme no intervalo 0 à 1, $u \sim U(0, 1)$.
4. Calcule o valor da probabilidade de aceitação segundo (3.2), $\alpha(\theta^{(m-1)}, y)$.
Se $u \leq \alpha(\theta^{(m-1)}, y)$, então o ponto gerado é aceito e $\theta^{(m)} = y$. Caso contrário, o ponto gerado é rejeitado e $\theta^{(m)} = \theta^{(m-1)}$.
5. Incremente o contador de iterações, $m=m+1$ e volte ao passo 2 do algoritmo até que a convergência tenha sido atingida.

O sucesso do método depende de uma densidade q fácil de simular, de convergência da simulação e de taxas de aceitação não muito baixas. A taxa de aceitação é definida como a razão entre o número de vezes que se aceita o valor proposto (y) e o número total de simulações. Gelman, Roberts e Gilks (1996) apontam para uma taxa de aceitação de 20% a 50%.

No algoritmo acima a densidade de interesse π só interfere através da razão da probabilidade de aceitação. Em particular, como π é a densidade posteriori, não é necessário que se conheça o valor de sua constante de proporcionalidade; basta apenas sua expressão funcional.

Outro ponto importante é que não existem regras definidas para a escolha da distribuição q ; algumas premissas é que o suporte da distribuição proposta cubra o da distribuição de interesse e que a geração seja direta. Entretanto, existem alguns casos particulares para o algoritmo de Metropolis-Hastings, sendo os seguintes os mais usuais:

Cadeia Independente: Este algoritmo pressupõe que a transição proposta seja independente da posição anterior da cadeia. Desta forma, $q(y, \theta) = q(y)$, então a probabilidade de aceitação dos valores gerados reduz-se a:

$$\alpha(\theta, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y)/q(y)}{\pi(\theta)/q(\theta)}, 1 \right\}$$

Cadeia Simétrica: O algoritmo original de Metropolis pressupõe simetria da densidade proposta, ou seja, $q(\theta, y) = q(y, \theta)$. Desta forma, a probabilidade de aceitação fica da forma:

$$\alpha(\theta, y) = \min \left\{ \frac{\pi(y)}{\pi(\theta)}, 1 \right\}$$

Será utilizado o algoritmo de Cadeia Independente para o parâmetro Beta, e Cadeia Simétrica para o parâmetro Eta, pois os resultados de simulação foram mais eficientes quanto à convergência da distribuição π quando utilizados esses casos particulares.

Para a aplicação do Algoritmo 3.1 utilizou-se a distribuição Gamma como densidade proposta q , pois esta apresenta como suporte valores estritamente positivos e apresentou resultados satisfatórios quanto à convergência.

A densidade da distribuição Gamma é definida por

$$q(y|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot y^{a-1} \cdot \exp(-by), \quad y > 0 \quad (3.3)$$

Os parâmetros da Gamma (a, b) serão determinados de tal forma que a média será a estimativa de máxima verossimilhança (EMV) do parâmetro de interesse, e a variância (VAR) será determinada com o objetivo de controlar-se a taxa de aceitação do método, pois se houver uma densidade muito dispersa, os candidatos gerados estarão longe do valor atual, portanto, haverá baixas probabilidades de aceitação e conseqüente baixa taxa de aceitação. Por outro lado, se a dispersão é reduzida por demais, a cadeia fará movimentos pequenos com alta taxa de aceitação. Portanto, a variância será determinada de forma a obter-se uma taxa de aceitação em torno de 20% a 50%, conforme sugerido por Gelman, Roberts e Gilks (1996).

Para distribuição Gamma definida em (3.3), $E(Y) = a/b$ e $Var(Y) = a/b^2$, então a escolha dos parâmetros será da seguinte forma:

$$a = \frac{(EMV)^2}{VAR} \quad b = \frac{EMV}{VAR}$$

Com essa escolha de a e b , tem-se que $E(Y) = EMV$ e $Var(Y) = VAR$.

3.2 Verificação de convergência

A monitoração da convergência de cadeias de Markov pode ser feita, informalmente, por meio de técnicas gráficas. Podem-se, por exemplo, observar médias ergódicas dos valores gerados em busca de comportamento assintótico. No entanto, as técnicas gráficas podem indicar uma constância não tão evidente caso uma outra escala seja escolhida para os gráficos, o que conduz ao desenvolvimento de procedimentos formais para avaliação da convergência.

Neste trabalho foram utilizados dois procedimentos de teste para convergência: um informal, através das médias ergódicas, e um procedimento formal, através do teste de Gelman e Rubin.

3.2.1 Gráfico das Médias ergódicas

As primeiras simulações dependem dos valores iniciais dos parâmetros. Essa etapa de iterações pré-convergência é conhecida como período de aquecimento da cadeia ou período de *burn-in*. Uma proposta informal de convergência é a verificação gráfica das médias ergódicas de uma cadeia ao longo das iterações. Através deste gráfico pode-se determinar o período de aquecimento e então serem excluídos esses valores iniciais.

Definição 3.1 – Teorema Ergódico: Seja $t(\theta)$ uma função dos parâmetros, as médias ergódicas (\bar{t}_m) onde,

$$\bar{t}_m = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m t(\theta^{(l)}), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

convergem quase certamente para $E[t(\theta)]$ quando $j \rightarrow \infty$. O gráfico de médias ergódicas é definido como a plotagem de \bar{t}_m ao longo das iterações. Então, a convergência pode ser verificada se esse gráfico, após um período inicial, apresentar um comportamento assintótico.

Embora essa técnica seja univariada, ela pode ser aplicada a posteriori como um todo bastando para isso tomar $t(\theta)$ como função da posteriori. Para verificar a convergência através do gráfico de médias ergódicas será definido $t(\theta) = -2 \log \pi(\theta)$, pois a posteriori é o nosso objetivo central, além disso $-2 \log \pi(\theta)$ é um bom resumo da posteriori.

3.2.2 Teste de Gelman e Rubin

Gelman e Rubin (1992) sugerem um teste baseado em técnicas de análise de variância. Partindo-se de m cadeias paralelas de tamanho n , com trajetórias $f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}$, para $i=1, 2, \dots, m$, iniciadas em pontos sobredispersos em relação à distribuição de interesse, o teste fornece indícios de convergência se a variância entre as cadeias, V_E , for menor que a variância dentro das cadeias, V_D . Estas variâncias são definidas a seguir:

$$V_E = \frac{n}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{f}_i - \bar{f})^2$$

$$V_D = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f_{ij} - \bar{f}_i)^2$$

onde \bar{f}_i é a média das observações da cadeia i , $i=1, 2, \dots, m$ e \bar{f} é a média de todas as observações. Um estimador consistente (Gamerman, 1997) para a variância de f é dado por,

$$\hat{V} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot V_D + \left(\frac{1}{n}\right) \cdot V_E$$

De acordo com Gamerman (1997), enquanto as cadeias não tiverem convergido, ainda haverá influência dos pontos iniciais, que foram escolhidos de forma a ter dispersão maior que f , portanto, \hat{V} superestima a verdadeira variância. Em contrapartida, antes de se atingir a convergência, V_D subestimaria a verdadeira variância, visto que cada cadeia não teria coberto adequadamente todo o espaço de estados.

Um indicador de convergência pode ser a redução potencial de escala. O fator de redução é dado por

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{\hat{V}}{V_D}}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, ambos os estimadores convergem para o valor exato da variância de f e $\hat{R} \rightarrow 1$. Devem-se aceitar indícios de convergência se os valores obtidos para a estimativa de R forem menores que 1,2. O critério anterior não assegura convergência, mas fornece indícios bastante confiáveis.

3.3 Formação da amostra

Um dos aspectos básicos do amostrador Metropolis-Hastings é a regra de formação da amostra. A seguir será apresentada uma forma de realizar essa tarefa.

Serão geradas três cadeias de tamanho n iniciadas em pontos diferentes, e para cada cadeia foi construído o gráfico de médias ergódicas e verificada a convergência informalmente, determinando a partir de qual iteração a cadeia apresentou indícios de convergência. Então, os valores pré-convergência serão excluídos de cada uma das três cadeias. A seguir aplicar-se-á o teste de Gelman e Rubin como procedimento formal de verificação da convergência.

Após a verificação da convergência, os valores gerados em cada cadeia formam uma cadeia de Markov e, portanto, não são independentes. Uma maneira que acomoda independência é tomar como elementos constituintes da amostra valores gerados pelo amostrador espaçados de algumas iterações. A forma mais usual para determinar-se um número apropriado de espaçamento é calcularem-se as autocorrelações em cada série e testar a partir de que ordem podem-se assumir autocorrelações nulas. No contexto de autocorrelações, o espaçamento é conhecido como *Lag*, então se utilizará a denominação *Lag* para designar-se a ordem de interação com correlação não significativa.

Uma amostra é formada tomando-se os valores espaçados de *Lag* iterações para cada uma das cadeias, e então todos os valores gerados de cada uma dessas cadeias são provenientes essencialmente da mesma distribuição de equilíbrio π .

Capítulo 4

Processos Decisórios utilizados na Teoria de Fatores Competitivos de Risco

Este capítulo descreve os procedimentos de estimação e testes de significância estatística para a comparação entre os fatores competitivos de risco. Iremos considerar a comparação entre dois fatores independentes, ou seja, $k=2$.

Três procedimentos serão definidos: a comparação entre tempos futuros de falha, comparação da confiabilidade sob os fatores de riscos e a medida de evidência para uma hipótese precisa, o FBST (Full Bayesian Significance Test).

4.1 Comparação entre tempos futuros de falha

Considerem-se dois fatores competitivos de risco, o fator 1 e o fator 2 ($j = 1, 2$), n tempos observados, $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} . Tem-se então Y_1 e Y_2 , respectivamente, o tempo de falha futura pelo fator 1 e o tempo de falha futura pelo fator 2, porém somente um dos fatores irá provocar a falha do sistema. Então se define o seguinte funcional:

$$\rho(Y_1, Y_2 | t) = \Pr(Y_1 < Y_2 | t)$$

Ou seja, a probabilidade da falha do sistema ocorrer primeiro pelo fator 1.

Para calcular-se este funcional, é necessário definir-se primeiramente a função preditiva posteriori. Se Y_j é um tempo futuro de falha para um fator j e $\theta_j = (\beta_j, \eta_j)$ seus parâmetros, então a função preditiva é definida por

$$f(Y_j | t) = \int_0^{\infty} f(Y_j | \theta_j) \cdot \pi(\theta_j | t) d\theta_j$$

onde $f(Y_j | \theta_j)$ é a função densidade Weibull e $\pi(\theta_j | t)$ é a função posteriori.

Pode-se determinar o funcional ρ por

$$\rho(Y_1, Y_2 | t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(Y_1 < Y_2) \cdot f(Y_1 | t) \cdot f(Y_2 | t) dY_1 dY_2$$

A função $I(Y_1 < Y_2)$ representará a função indicadora definida como,

$$I(Y_1 < Y_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } Y_1 \geq Y_2 \\ 1, & \text{se } Y_1 < Y_2 \end{cases}$$

O cálculo desta probabilidade não pode ser determinado analiticamente, por isso esta probabilidade será determinada utilizando-se os valores dos parâmetros gerados pelo método Metropolis-Hastings. A seguir, a definição do procedimento de cálculo.

Algoritmo 4.1 – Observe que ρ pode ser expresso como a esperança posterior da função $I(Y_1 < Y_2)$, ou seja, $\rho = E[I(Y_1 < Y_2) | t]$. Portanto com base em uma amostra dos parâmetros, de tamanho M , gerada pelo método Metropolis-Hastings para cada fator de risco, $\theta_{ij} = (\beta_{ij}, \eta_{ij})$, ou seja, a i -ésima amostra gerada dos parâmetros para o j -ésimo fator ($i=1, 2, \dots, M$ e $j=1, 2$).

1. Gera-se amostra U_{ij} , ($i=1, 2, \dots, M$ e $j=1, 2$) de uma distribuição Uniforme entre zero e um.
2. Para cada $\theta_{ij} = (\beta_{ij}, \eta_{ij})$ e U_{ij} , utilizando-se o método de Monte Carlo, gera-se um tempo de falha para os dois fatores com base na distribuição acumulada da distribuição Weibull, ou seja,

$$Y_{i1} = [-\ln(U_{i1})]^{\frac{1}{\beta_{i1}}} \cdot \eta_{i1} \quad \text{e} \quad Y_{i2} = [-\ln(U_{i2})]^{\frac{1}{\beta_{i2}}} \cdot \eta_{i2}$$

3. Para determinar-se ρ é calculada a proporção do número de vezes em que o tempo de falha sob fator 1 (Y_{i1}) é menor que o tempo de falha sob fator 2 (Y_{i2}) para as M amostras, ou seja,

$$\hat{\rho}(Y_1, Y_2 | t) \approx \frac{\sum_{i=1}^M I(Y_{i1} < Y_{i2})}{M}$$

4.2 Comparação da Confiabilidade sob os Fatores de Risco

Considerem-se dois fatores de risco, o fator 1 e o fator 2, ($j = 1, 2$), n tempos observados $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} . Tem-se então $R(T/\beta_1, \eta_1) = R_1(T)$ e $R(T/\beta_2, \eta_2) = R_2(T)$, respectivamente, a função de confiabilidade no tempo T sob o fator 1 e a função de confiabilidade no tempo T sob o fator 2.

Então se define a seguinte medida:

$$\kappa(T | t) = \Pr(R_1(T) < R_2(T) | t)$$

que é a probabilidade da confiabilidade no tempo T sob o fator 1 ser menor que a confiabilidade no tempo T sob fator 2.

Pode-se determinar a medida κ da seguinte maneira:

$$\kappa(T | t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty I[R_1(T) < R_2(T)] \cdot \pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t) d\beta_1 d\eta_1 d\beta_2 d\eta_2$$

A função $I(R_1(T) < R_2(T))$ representará a função indicadora definida como

$$I(R_1(T) < R_2(T)) = \begin{cases} 0, & \text{se } R_1(T) \geq R_2(T) \\ 1, & \text{se } R_1(T) < R_2(T) \end{cases}$$

O cálculo de κ não pode ser determinado analiticamente, por isso esta probabilidade será determinada utilizando-se os valores dos parâmetros gerados pelo método Metropolis-Hastings.

Algoritmo 4.2 - Observe que κ pode ser expresso como a esperança posterior da função $I(R_1(T) < R_2(T))$, ou seja, $\kappa = E[I(R_1(T) < R_2(T)) | t]$. Portanto com base em uma amostra dos parâmetros, de tamanho M , gerada pelo método Metropolis-Hastings

para cada fator de risco, $\theta_{ij}=(\beta_{ij}, \eta_{ij})$, ou seja, a i -ésima amostra gerada dos parâmetros para o j -ésimo fator ($i=1,2,\dots,M$ e $j=1,2$).

1. Para cada $\theta_{ij}=(\beta_{ij}, \eta_{ij})$ da amostra gerada e dado um tempo T , calcula-se a confiabilidade sob os dois fatores com base na função confiabilidade Weibull, ou seja,

$$R_1(T) = R(T | \beta_{i1}, \eta_{i1}) = \exp\left[-\left(\frac{T}{\eta_{i1}}\right)^{\beta_{i1}}\right] \text{ e } R_2(T) = R(T | \beta_{i2}, \eta_{i2}) = \exp\left[-\left(\frac{T}{\eta_{i2}}\right)^{\beta_{i2}}\right]$$

2. Para determinar-se κ é calculada a proporção do número de vezes em que a confiabilidade no tempo T sob o fator 1 é menor que a confiabilidade no tempo T sob o fator 2, para as M amostras,

$$\hat{\kappa}(T|t) \approx \frac{\sum_{i=1}^M I[R(T | \beta_{i1}, \eta_{i1}) < R(T | \beta_{i2}, \eta_{i2})]}{M}$$

4.3 Medida de Evidência Bayesiana, FBST (Full Bayesian Significance Test)

O procedimento para o cálculo do FBST foi proposto por Pereira e Stern (1999). Eles consideram uma medida de evidência Bayesiana para testar uma hipótese precisa, ou seja, uma hipótese paramétrica com medida de Lebesgue nula baseada no cálculo da probabilidade posterior de uma região do espaço paramétrico.

Definição: Considere-se uma variável aleatória X , que, quando observada, produza os dados x . O espaço estatístico é representado pela tréplica (Ξ, Δ, Θ) onde Ξ é o espaço amostral, o conjunto de possíveis valores de x , Δ é a família de subconjuntos mensuráveis de Ξ e Θ é o espaço paramétrico.

Considere-se então:

- Um subconjunto Θ_0 de Θ é de interesse.
- Uma densidade posteriori de θ , dada a observação x , $\pi(\theta|x)$
- A medida $T(x) = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta|x) > \sup_{\Theta_0} \pi(\theta|x)\}$.

A medida de evidência FBST é definida como:

$$EV(\Theta_0, x) = 1 - \Pr[\theta \in T(x) | x]$$

De acordo com Pereira e Stern (1999), um valor grande da $EV(\Theta_0, x)$ significa que o subconjunto Θ_0 cai em uma região do espaço paramétrico de alta probabilidade posterior, portanto, os dados favorecem a hipótese nula. Por outro lado, um valor pequeno da $EV(\Theta_0, x)$ indica que Θ_0 está em uma região do espaço paramétrico de baixa probabilidade posterior, portanto, os dados levariam a desacreditar da hipótese nula. Discussões mais detalhadas são encontradas em Pereiras e Stern (1999) e Madruga (2002).

Neste trabalho será calculada a medida de evidência FBST para as seguintes hipóteses:

- Hipótese de igualdade dos parâmetros dos dois fatores de risco.
($EV[(\beta_1 = \beta_2)(\eta_1 = \eta_2), t]$)
- Hipótese de igualdade dos tempos médios de falha dos fatores de risco.
($EV[E(T|\beta_1, \eta_1) = E(T|\beta_2, \eta_2), t]$)
- Hipótese da confiabilidade sob o fator j em um tempo T ser igual a um valor fixo C .
($EV[R_j(T|\beta_j, \eta_j) = C, t]$).

4.3.1 Hipótese de Igualdade dos Parâmetros dos Dois Fatores de Risco

Considerem-se dois fatores de risco, o fator 1 e o fator 2, ($j = 1, 2$), n tempos observados $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} . O interesse é determinar-se a medida de evidência FBST para a hipótese do Beta do fator 1 ser igual ao Beta do fator 2 ($\beta_1 = \beta_2$) e o Eta do fator 1 ser igual ao Eta do fator 2 ($\eta_1 = \eta_2$).

Seja $\theta = (\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2)$ o parâmetro de interesse, e $\Theta = \{\theta : \beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 > 0\}$ o espaço paramétrico. A hipótese de interesse determina o seguinte subconjunto do espaço paramétrico $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \beta_1 = \beta_2, \eta_1 = \eta_2\}$.

Sendo $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$ a densidade posteriori de θ , dadas as observações amostrais t e $T(t) = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta | t) > \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)\}$, então a medida de evidência FBST é dada por:

$$EV[(\beta_1 = \beta_2)(\eta_1 = \eta_2), t] = 1 - \int_{T(t)} \pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t) d\beta_1 d\eta_1 d\beta_2 d\eta_2.$$

O cálculo desta medida não pode ser determinado analiticamente, por isso o FBST será determinado utilizando-se os valores dos parâmetros gerados pelo método Metropolis-Hastings.

Algoritmo 4.3 - Observe que a medida de evidência FBST pode ser expresso como um menos a esperança posterior da função $I(\theta \in T(t))$, ou seja, $EV[\Theta_0, t] = 1 - E[I(\theta \in T(t)) | t]$. Portanto com base em uma amostra dos parâmetros, de tamanho M , gerada pelo método Metropolis-Hastings para cada fator de risco, $\theta_i = (\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2})$, ($i=1, 2, \dots, M$).

1. Determinar o valor máximo da posteriori $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$, sob a restrição da hipótese de interesse, no caso $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \beta_1 = \beta_2, \eta_1 = \eta_2\}$, ou seja, encontrar o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$.
2. Para cada $\theta_i = (\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2})$, ($i=1, 2, \dots, M$) da amostra gerada, calcula-se o valor da densidade posteriori $\pi(\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2} | t)$.
3. Para determinar a medida de evidência $EV[(\beta_1 = \beta_2)(\eta_1 = \eta_2), t]$, é feita a proporção do número de vezes em que o valor da posteriori $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$, para as M amostras, é menor que o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$, ou seja,

$$\hat{EV}[(\beta_1 = \beta_2)(\eta_1 = \eta_2), t] \approx \frac{\sum_{i=1}^M I[\pi(\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2} | t) < \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)]}{M}$$

4.3.2 Hipótese de Igualdade dos Tempos Médios de Falha dos Fatores de Risco

Considerem-se dois fatores de risco, o fator 1 e o fator 2, ($j = 1, 2$), n tempos observados $t = (t_i ; i = 1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} . O interesse é determinar a medida de evidência FBST para a hipótese do tempo médio de falha do fator 1 ser igual ao tempo médio de falha do fator 2, ou seja, $E(T|\beta_1, \eta_1) = E(T|\beta_2, \eta_2)$.

Seja $\theta = (\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2)$ o parâmetro de interesse, e $\Theta = \{\theta : \beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 > 0\}$ o espaço paramétrico. A hipótese de interesse determina o seguinte subconjunto do espaço paramétrico $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : E(T|\beta_1, \eta_1) = E(T|\beta_2, \eta_2)\}$. Utilizando-se a equação (2.8), pode-se reescrever da seguinte maneira:

$$\Theta_0 = \left\{ \theta \in \Theta : \eta_1 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1}\right) = \eta_2 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_2 + 1}{\beta_2}\right) \right\}$$

Sendo $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$ a densidade posteriori de θ , dadas as observações amostrais t e $T(t) = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta | t) > \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)\}$, então a medida de evidência FBST é dada por

$$EV \left[\eta_1 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1}\right) = \eta_2 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_2 + 1}{\beta_2}\right), t \right] = 1 - \int_{T(t)} \pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t) d\beta_1 d\eta_1 d\beta_2 d\eta_2$$

O cálculo desta medida não pode ser determinado analiticamente, por isso a medida de evidência será determinada utilizando-se os valores dos parâmetros gerados pelo método Metropolis-Hastings.

Algoritmo 4.4 - Observe que a medida de evidência FBST pode ser expresso como um menos a esperança posterior da função $I(\theta \in T(t))$, ou seja, $EV[\Theta_0, t] = 1 - E[I(\theta \in T(t))/t]$. Portanto com base em uma amostra dos parâmetros, de tamanho M , gerada pelo método Metropolis-Hastings para cada fator de risco, $\theta_i = (\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2})$, ($i=1, 2, \dots, M$).

1. Determinar o valor máximo da posteriori $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$, sob a restrição da hipótese de interesse, no caso $\Theta_0 = \{ \theta \in \Theta : \eta_1 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1}\right) = \eta_2 \cdot \Gamma\left(\frac{\beta_2 + 1}{\beta_2}\right) \}$, ou seja, encontrar o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$.
2. Para cada $\theta_i = (\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2})$, ($i=1, 2, \dots, M$) da amostra gerada, calcula-se o valor da densidade posteriori $\pi(\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2} | t)$.
3. Para determinar a medida de evidência $EV[E(T|\beta_1, \eta_1) = E(T|\beta_2, \eta_2), t]$, é feita a proporção do número de vezes em que o valor da posteriori $\pi(\beta_1, \eta_1, \beta_2, \eta_2 | t)$, para as M amostras, é menor que o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$, ou seja,

$$\hat{EV}[E(T|\beta_1, \eta_1) = E(T|\beta_2, \eta_2), t] \approx \frac{\sum_{i=1}^M I[\pi(\beta_{i1}, \eta_{i1}, \beta_{i2}, \eta_{i2} | t) < \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)]}{M}$$

4.3.3 Hipótese da Confiabilidade sob o Fator j em um Tempo T ser igual a um Valor Fixo C

Considere-se um dos fatores de risco j , ($j = 1$ ou 2), n tempos observados $t = (t_i ; i=1, 2, \dots, n)$ com os respectivos labels δ_{ij} . O interesse é determinar a medida de evidência FBST para a hipótese da confiabilidade sob o fator j em um tempo T ser igual a um valor C , onde C é um valor fixo entre 0 e 1, $EV[R_j(T|\beta_j, \eta_j) = C, t]$.

Seja $\theta = (\beta_j, \eta_j)$ o parâmetro de interesse, e $\Theta = \{ \theta : \beta_j, \eta_j > 0 \}$ o espaço paramétrico. A hipótese de interesse determina o seguinte subconjunto do espaço paramétrico $\Theta_0 = \{ \theta \in \Theta : R_j(T|\beta_j, \eta_j) = C \}$ Utilizando-se a equação (2.6), pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\Theta_0 = \left\{ \theta \in \Theta : \eta_j = \frac{T}{[-\ln(C)]^{\frac{1}{\beta_j}}} \right\}$$

Sendo $\pi(\beta_j, \eta_j | t)$ a densidade posteriori de $\theta = (\beta_j, \eta_j)$ do fator j , dadas as observações amostrais t e $T(t) = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta | t) > \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)\}$, então a medida de evidência FBST é dada por

$$EV[R_j(T | \beta_j, \eta_j) = C, t] = 1 - \int_{T(t)} \pi(\beta_j, \eta_j | t) d\beta_j d\eta_j$$

O cálculo desta medida não pode ser determinado analiticamente, por isso o FBST para esta hipótese será determinado utilizando-se os valores dos parâmetros gerados pelo método Metropolis-Hastings.

Algoritmo 4.5 - Observe que a medida de evidência FBST pode ser expresso como um menos a esperança posterior da função $I(\theta \in T(t))$, ou seja, $EV[\Theta_0, t] = 1 - E[I(\theta \in T(t)) / t]$. Portanto com base em uma amostra dos parâmetros, de tamanho M , gerada pelo método Metropolis-Hastings para um dos riscos de falha j , $\theta_{ij} = (\beta_{ij}, \eta_{ij})$, ($i=1, 2, \dots, M$) e ($j = 1$ ou 2).

1. Determinar o valor máximo da posteriori $\pi(\beta_j, \eta_j | t)$, sob a restrição da hipótese de interesse, no caso $\Theta_0 = \left\{ \theta \in \Theta : \eta_j = \frac{T}{[-\ln(C)]^{\frac{1}{\beta_j}}} \right\}$, ou seja, encontrar o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$.
2. Para cada $\theta_{ij} = (\beta_{ij}, \eta_{ij})$, ($i=1, 2, \dots, M$), ($j = 1$ ou 2) da amostra gerada, calcula-se a o valor da densidade posteriori $\pi(\beta_{ij}, \eta_{ij} | t)$.
3. Para determinar a medida de evidência $EV[R_j(T | \beta_j, \eta_j) = C, t]$, é feita a proporção do número de vezes em que o valor da posteriori $\pi(\beta_{ij}, \eta_{ij} | t)$ para as M amostras, é menor que o valor de $\sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)$,

$$\hat{EV}[R_j(T | \beta_j, \eta_j) = C, t] \approx \frac{\sum_{i=1}^M I[\pi(\beta_{ij}, \eta_{ij} | t) < \sup_{\Theta_0} \pi(\theta | t)]}{M}$$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo se exercitará toda a teoria descrita anteriormente através de dois exemplos. A aplicação 1 foi desenvolvida com base em dados reais de consultoria, onde apenas os nomes das falhas e do sistema foram alterados para manter sigilo. E a aplicação 2 foi feita com dados do artigo Meeker (2002).

Como não há implementado em nenhum software a maioria dos algoritmos descritos neste trabalho, todos os cálculos e estimativas foram desenvolvidos pelo autor através do software R.

5.1 Aplicação 1

A bomba HDR-750CV fornece refrigeração aos mancais de uma prensa que está posicionada ao lado de um forno a 980 °C. A bomba também fica próxima ao forno e, portanto, sujeita à alta temperatura, por isso a degradação de alguns componentes da bomba é freqüente. A prensa mencionada trava frequentemente, pois a bomba apresenta dois fatores de risco de falha:

Fator A: Degradação da vedação do rotor;

Fator B: Degradação da lubrificação.

A empresa possui dados de falha da bomba em questão, onde algumas falhas são devido à degradação da vedação do rotor (fator A) e outras falhas, por degradação da lubrificação (fator B), os dados estão apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Histórico de falhas da bomba HDR-750CV

Dias	Fator de Risco	Dias	Fator de Risco	Dias	Fator de Risco	Dias	Fator de Risco
310	B	665	B	850	B	1400	A
320	A	670	A	870	A	1420	B
360	B	675	A	880	B	1430	A
380	B	690	A	930	A	1490	B
450	A	720	B	950	B	1540	B
525	B	730	B	1010	A	1660	B
530	B	800	A	1150	A	1740	A
565	A	810	A	1230	A	1850	B
620	A	810	B	1370	A	1930	B
648	A	840	A	1380	A		

A - Degradação da vedação do rotor

B - Degradação da lubrificação

O interesse da empresa é conhecer qual é o fator de risco mais crítico para a falha da bomba, para isso se determinará $\rho(Y_A, Y_B | t)$, e saber se existe equivalência do efeito dos dois fatores de risco, neste caso se calculará a medida de evidência FBST para a hipótese de igualdade dos parâmetros do fator A e B, ou seja, $(\beta_A = \beta_B)(\eta_A = \eta_B)$. Outras medidas serão calculadas para auxiliar a conclusão.

Considerando-se que existem dois fatores de risco, A e B ($k=2$), o primeiro passo é determinar a função posteriori dos parâmetros. Utilizando-se a priori definida em (2.10) e o modelo Weibull, tem-se a posteriori conforme descrita em (2.11) para estes dados:

$$\pi(\beta_A, \eta_A, \beta_B, \eta_B | t) \propto \prod_{j=1}^2 \prod_{i=1}^{39} \left(\frac{1}{\beta_j} \cdot \frac{1}{\eta_j} \right) \cdot \left(\left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \right)^{\delta_{ij}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta_j} \right)^{\beta_j} \right] \right)$$

O cálculo analítico de $\rho(Y_A, Y_B | t)$ é de difícil execução, para isso será gerada uma amostra da posteriori através do método Metropolis-Hastings, conforme descrito no Capítulo 3.

A densidade proposta (q) para a geração dos valores candidatos será uma densidade Gamma e os seus parâmetros (a, b) serão definidos de tal forma que a média desta distribuição seja igual ao valor da estimativa de máxima verossimilhança

do parâmetro e a variância igual a um valor tal que taxas de aceitação fiquem em torno de 20% a 50%. Os resultados obtidos estão na Tabela 5.2:

Tabela 5.2 - Estimativas de máxima verossimilhança e variâncias utilizadas no método Metropolis-Hastings e os Parâmetros da função Gamma

Parâmetros	Estimativa de máxima verossimilhança	Variância	a	b
Beta do fator A (β_A)	2,36	3	1,85	0,79
Eta do fator A (η_A)	1408,90	130000	15,27	0,01
Beta do fator B (β_B)	2,29	3	1,75	0,76
Eta do fator B (η_B)	1510,17	130000	17,54	0,01

Serão geradas três cadeias com 10.000 iterações e iniciadas de pontos distintos, seguindo o Algoritmo 3.1, do Capítulo 3. Na Tabela 5.3 estão os valores iniciais de cada cadeia e as taxas de aceitação obtidas.

Tabela 5.3 - Valores iniciais dos parâmetros e taxas de aceitação

Parâmetros	Cadeia 1		Cadeia 2		Cadeia 3	
	Valor inicial	Taxa de aceitação	Valor inicial	Taxa de aceitação	Valor inicial	Taxa de aceitação
Beta do fator A (β_A)	4	27%	4	28%	0,5	27%
Eta do fator A (η_A)	3000	43%	1000	43%	3000	43%
Beta do fator B (β_B)	0,5	28%	0,5	27%	4	28%
Eta do fator B (η_B)	500	49%	3000	49%	1000	47%

Para cada uma das cadeias foi verificada a convergência através do gráfico de médias ergódicas conforme descrito no tópico 3.2.1. Os gráficos estão no Apêndice A. Pode-se verificar que a partir da iteração 2.500 a cadeia apresenta convergência, então os 2.500 pontos iniciais gerados serão excluídos de cada cadeia (período de aquecimento) para a formação da amostra final.

Após a exclusão das iterações pré-convergência, foi aplicado o Teste de Gelman e Rubin (apresentado na seção 3.2.2) para verificar se as três cadeias apresentavam indícios de convergência. Obteve-se então $\hat{R} = 1,0006$. Este valor traz grandes indícios de convergência para a densidade posteriori dos parâmetros.

Em seguida, foi verificado se existe correlação dentro de cada uma das cadeias. Os gráficos de autocorrelação estão no Apêndice A, onde se pode verificar que a cadeia 1 apresenta correlação significativa até o 7º Lag, a cadeia 2 até o 9º Lag e a cadeia 3 até o 12º Lag. Após excluir as iterações com autocorrelação, tem-se uma amostra final de 2.265 valores dos parâmetros da posteriori.

Para verificar-se o resultado da simulação, na Figura 5.1 e 5.2, estão plotados, respectivamente, os valores simulados dos parâmetros dos fatores A e B e as curvas de nível da posteriori dos parâmetros dos fatores A e B.

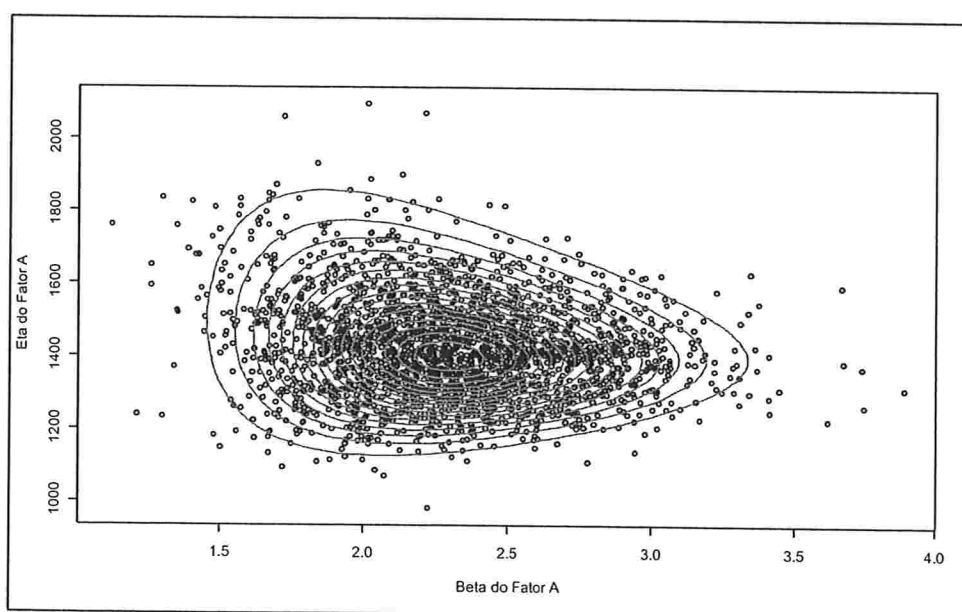


Figura 5.1 – Gráfico dos parâmetros do fator de risco A gerados pelo método Metropolis-Hastings e Curvas de nível da posteriori dos parâmetros do fator A.

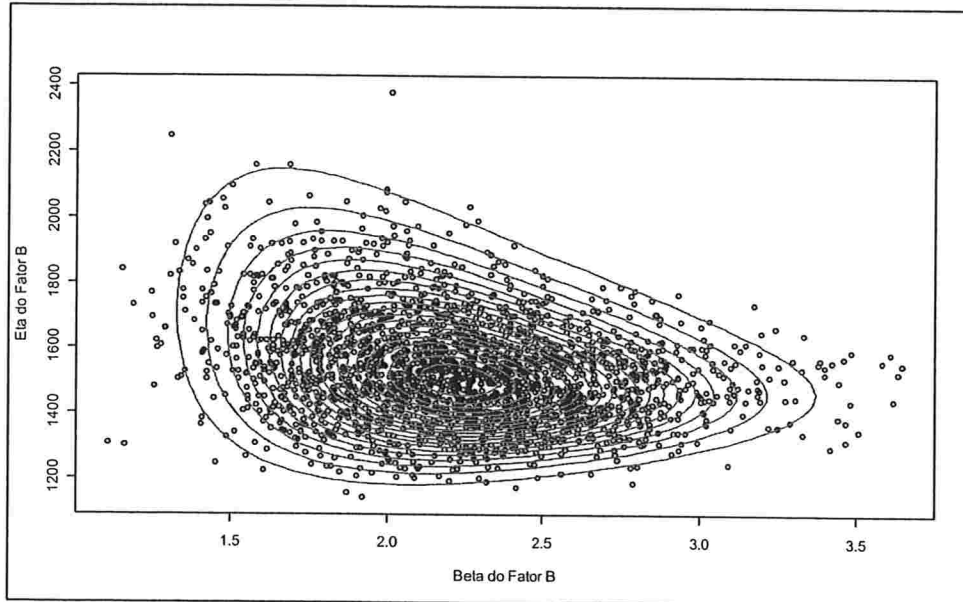


Figura 5.2 – Gráfico dos parâmetros do fator de risco B gerados pelo método Metropolis-Hastings e Curvas de nível da posteriori dos parâmetros do fator B.

Em ambos os gráficos podem-se verificar que o resultado da simulação foi bastante satisfatório, pois os pontos acompanham a tendência das curvas de nível. Com base nessa amostra gerada da densidade posteriori, far-se-ão as estimativas e cálculos de interesse.

Utilizando o Algoritmo 4.1 descrito no capítulo 4, pode-se determinar a probabilidade do fator A promover primeiro a falha do sistema:

$$\hat{\rho}(Y_A, Y_B | t) = 0,5321$$

Utilizando-se o Algoritmo 4.2 descrito no capítulo 4, pode-se determinar probabilidade da Confiabilidade sob o fator A para um dado tempo T ser menor que a Confiabilidade sob o fator B. Na Tabela 5.4 apresenta-se o valor de κ para vários valores de tempo T, e na Figura 5.3 está o gráfico com os valores plotados.

Tabela 5.4 – Valores de $\hat{\kappa}(T|t)$ para diferentes valores de T

T	$\hat{\kappa}(T t)$
10	0,4649
100	0,4764
200	0,4962
300	0,5174
400	0,5347
500	0,5523
600	0,5687
700	0,5828
800	0,5974
900	0,6102
1000	0,6406
1100	0,6675
1200	0,6870
1300	0,6958
1400	0,7007
1500	0,7077

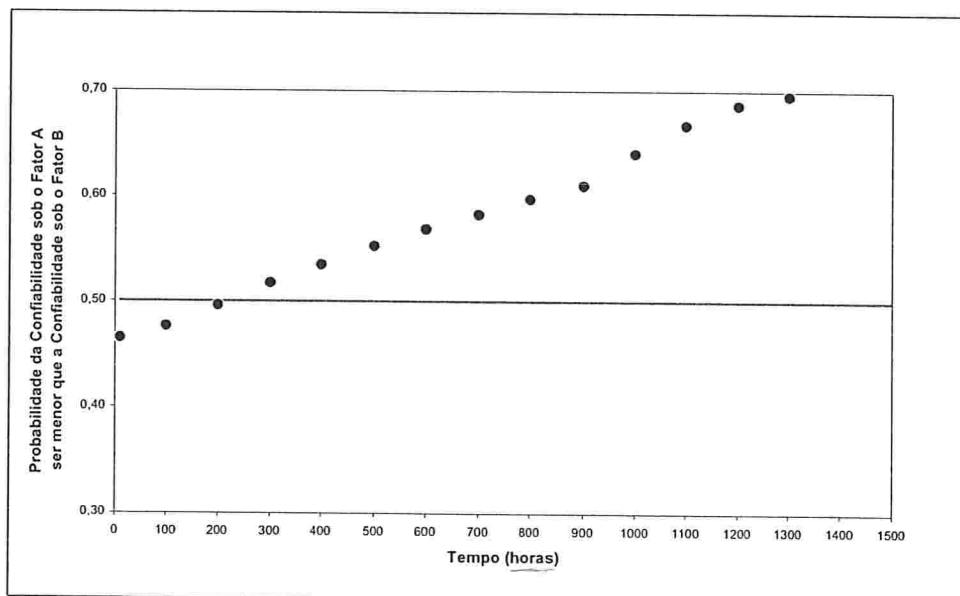


Figura 5.3 – Gráfico dos valores da Probabilidade da Confiabilidade sob o fator A ser menor que a Confiabilidade sob o fator B para diferentes tempos.

Para verificar-se se há equivalência do comportamento de falha do fator A e do fator B, será calculada a medida de evidência FBST. Utilizando-se o Algoritmo 4.3, obteve-se:

$$\hat{EV}[(\beta_A = \beta_B)(\eta_A = \eta_B), t] = 0,9894$$

O FBST comprova (confirma) a hipótese de igualdade dos parâmetros com uma evidência de 0,9894.

Será calculado o FBST para a hipótese de igualdade dos tempos médios de falha dos riscos A e B. Utilizando o Algoritmo 4.4, obteve-se:

$$\hat{EV}[E(T|\beta_A, \eta_A) = E(T|\beta_B, \eta_B), t] = 0,9894$$

O FBST confirma a hipótese de igualdade das médias com uma evidência de 0,9894.

Conclusão

Através da medida $\hat{\rho}(Y_A, Y_B | t) = 0,5321$, pode-se verificar que existe uma probabilidade de 0,5321 de o fator A provocar a falha do sistema antes da possível ação do fator B.

Analisando a probabilidade $\hat{\kappa}(T | t)$ ao longo do tempo, pode-se observar que a partir do tempo 210 a probabilidade de a confiabilidade sob o fator A ser menor que a do fator B é maior que 0,50. Portanto, a partir de 210 dias existe uma probabilidade maior de 0,50 de o fator A apresentar a menor confiabilidade do sistema.

Para se verificar se os comportamentos de falha dos fatores A e B são equivalentes, foi calculada a medida de evidência FBST para a hipótese de igualdade dos parâmetros $\hat{EV}[(\beta_A = \beta_B)(\eta_A = \eta_B), t]$, onde se obteve um valor de 0,9894. Então, pode-se aceitar que os parâmetros são iguais, ou ainda que o comportamento de falha do fator A e B são semelhantes.

Foi calculada a medida de evidência FBST para a hipótese de igualdade das médias dos tempos de falha dos fatores A e B, $\hat{EV}[E(T|\beta_A, \eta_A) = E(T|\beta_B, \eta_B), t]$, onde se obteve um valor de 0,9894. O valor foi igual ao da hipótese de igualdade dos parâmetros, comprovando a propriedade de invariância da medida de evidência FBST.

5.2 Aplicação 2

Os dados para esta aplicação foram extraídos de Meeker (2002). Este exemplo diz respeito a um novo projeto para isolamento dielétrico das barras da armação do gerador. A isolamento consiste de um sistema de mica fundido junto a um ligamento orgânico. Falhas de isolamento acontecem devido à degradação do material orgânico.

O novo projeto procura estender a vida do ligamento orgânico. Uma amostra de 58 eletrodos (segmentos cortados das barras) foi colocada em um teste de vida, resultados na Tabela 5.5. As falhas foram atribuídas a dois fatores de risco:

Fator D (falha por degradação): degradação do material orgânico;

Fator E (falhas prematuras): defeitos na isolamento devido a problemas no processo.

Tabela 5.5 - Resultados do teste de vida dos eletrodos

Horas	Fator de Risco	Horas	Fator de Risco	Horas	Fator de Risco	Horas	Fator de Risco
2	E	78	Susp	236	E	327	D
3	E	104	E	241	Susp	328	D
5	E	113	Susp	257	Susp	328	D
8	E	119	E	261	D	348	D
13	Susp	135	Susp	264	D	348	Susp
21	E	144	E	278	D	350	D
28	E	157	Susp	282	E	360	D
31	E	160	E	284	D	369	D
31	Susp	168	D	286	D	377	D
52	Susp	179	Susp	298	D	387	D
53	Susp	191	D	303	E	392	D
64	E	203	D	314	D	412	D
67	Susp	211	D	317	D	446	D
69	E	221	E	318	D		
76	E	226	D	320	D		

D - Degradação do material orgânico

E - Defeitos na isolamento devido a problemas no processo

Susp - Eletrodos que não falharam

O principal objetivo é avaliar se para 100 horas se terá menos de 1% de falha (ou mais de 99% de confiabilidade), pois este é o valor do sistema *benchmark* utilizado atualmente. Espera-se que o fator E possa ser removido, portanto, deseja-se avaliar a confiabilidade do novo projeto, assumindo somente o fator de risco D. Além disso, deseja-se saber qual o fator mais crítico, ou seja, qual fator tem maior chance de atuar primeiro na falha do sistema.

Considerando que se tem dois fatores D e E ($k=2$), o primeiro passo é determinar-se a função posteriori dos parâmetros,

$$\pi(\beta_D, \eta_D, \beta_E, \eta_E | t) \propto \prod_{j=1}^2 \prod_{i=1}^{58} \left(\frac{1}{\beta_j} \cdot \frac{1}{\eta_j} \right) \cdot \left[\left(\frac{\beta_j}{\eta_j^{\beta_j}} \cdot t_i^{\beta_j-1} \right)^{\delta_{ij}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\eta_j} \right)^{\beta_j} \right] \right]$$

O cálculo analítico das quantidades de interesse é de difícil execução, para isso será gerada uma amostra da posteriori através do método Metropolis-Hastings.

A densidade proposta (q) para a geração dos valores será uma densidade Gamma e os parâmetros (a,b), os resultados obtidos estão na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 - Estimativas de máxima verossimilhança e variâncias utilizadas no método Metropolis-Hastings e os Parâmetros da função Gamma

Parâmetros	Estimativa de máxima verossimilhança	Variância	a	b
Beta do fator D (β_D)	5,60	5	6,28	1,12
Eta do fator D (η_D)	344,30	3000	39,51	0,11
Beta do fator E (β_E)	0,64	0,25	1,61	2,54
Eta do fator E (η_E)	1170,18	800000	1,71	0,00

Utilizando-se a distribuição Gamma com os parâmetros mencionados anteriormente, serão geradas três cadeias com 10.000 iterações, iniciadas de pontos diferentes, utilizando-se o algoritmo de Metropolis-Hastings. Na Tabela 5.7 estão os valores iniciais e as taxas de aceitação.

Tabela 5.7 - Valores iniciais dos parâmetros e taxas de aceitação

Parâmetros	Cadeia 1		Cadeia 2		Cadeia 3	
	Valor inicial	Taxa de aceitação	Valor inicial	Taxa de aceitação	Valor inicial	Taxa de aceitação
Beta do fator D (β_D)	5	44%	2	43%	6	42%
Eta do fator D (η_D)	500	27%	1000	28%	300	26%
Beta do fator E (β_E)	2	24%	0,5	25%	1,5	24%
Eta do fator E (η_E)	1000	46%	500	46%	2000	46%

No Apêndice B estão os gráficos de médias ergódicas para cada cadeia, onde se pode verificar que a partir da interação 2.500 a cadeia apresenta sinais de convergência; portanto, o período de aquecimento da cadeia foi excluído.

Como método formal de verificação da convergência, o Teste de Gelman e Rubin foi aplicado, e então se obteve um valor de $\hat{R} = 1,0002$. Este valor traz indícios fortes de convergência para a densidade posteriori dos parâmetros.

Para formação da amostra final, será verificado se existe correlação dentro de cada uma das cadeias. Os gráficos de autocorrelação estão no Apêndice B, onde se pode verificar que a cadeia 1 apresenta correlação significativa até 11º Lag, a cadeia 2, até o 11º Lag, e a cadeia 3, até o 12º Lag.

Após a exclusão das iterações com autocorrelação, ter-se-á uma amostra de 2.000 valores gerados dos parâmetros da função posteriori.

Para verificar-se o resultado da simulação, na Figura 5.4 e 5.5 estão plotados, respectivamente, os valores simulados dos parâmetros dos fatores D e E, e as curvas de nível da posteriori dos parâmetros dos fatores D e E.

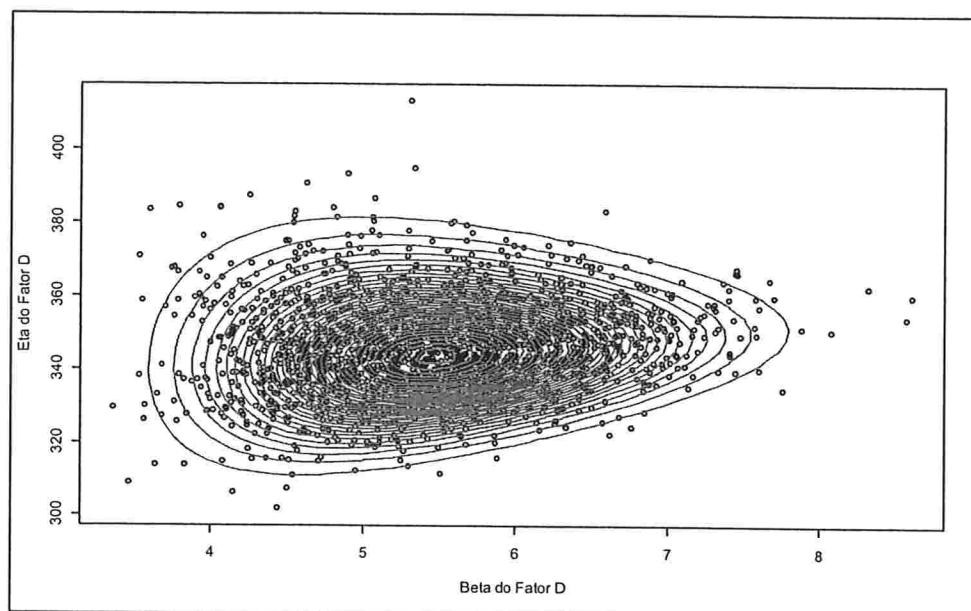


Figura 5.4 – Gráfico dos parâmetros do fator de risco D gerados pelo método Metropolis-Hastings e Curvas de nível da posteriori dos parâmetros do fator D.

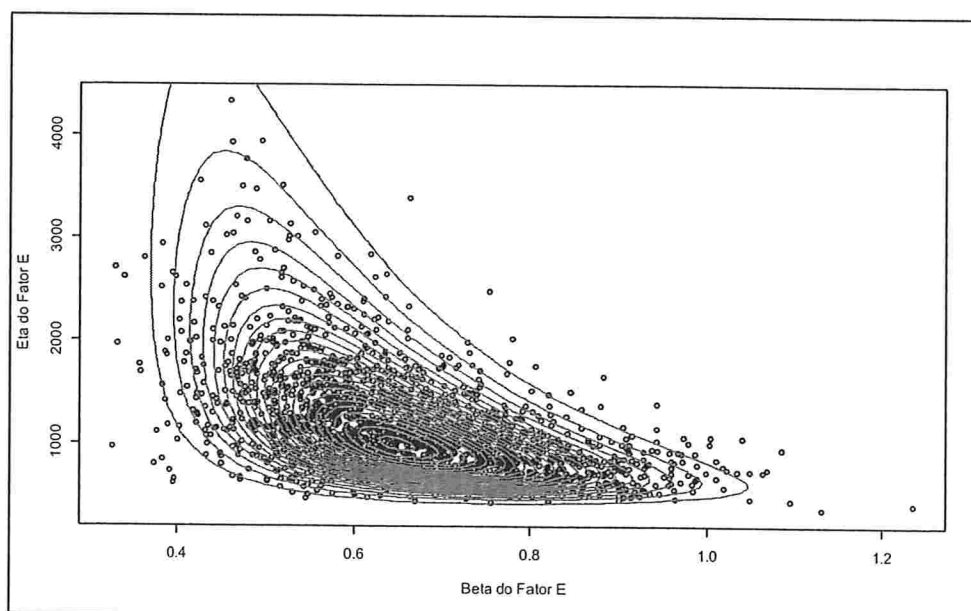


Figura 5.5 – Gráfico dos parâmetros do fator de risco E gerados pelo método Metropolis-Hastings e Curvas de nível da posteriori dos parâmetros do fator E.

Em ambos os gráficos pode-se verificar que o resultado da simulação foi bastante satisfatório, pois os pontos simulados estão muito próximos das curvas de nível. Tem-se uma amostra da densidade posteriori, da qual se pode determinar as probabilidades e medidas de evidência de interesse.

Utilizando-se o Algoritmo 4.1 descrito no Capítulo 4, pode-se determinar a probabilidade de a falha ocorrer primeiro por causa do fator D:

$$\hat{\rho}(Y_D, Y_E | t) = 0,6395$$

Utilizando-se o Algoritmo 4.2 descrito no Capítulo 4, pode-se determinar a probabilidade de a confiabilidade para um dado tempo sob o fator D ser menor que a confiabilidade sob o fator E, os resultados estão na Tabela 5.8 e plotados no gráfico da Figura 5.6.

Tabela 5.8 – Valores de $\hat{\kappa}(T | t)$ para diferentes valores de T

T	$\hat{\kappa}(T t)$
210	0,0005
220	0,0010
230	0,0040
240	0,0060
250	0,0135
260	0,0355
270	0,0850
280	0,1865
290	0,3495
300	0,5590
310	0,7350
320	0,8820
330	0,9575
340	0,9870
350	0,9985
360	0,9995
370	1,0000

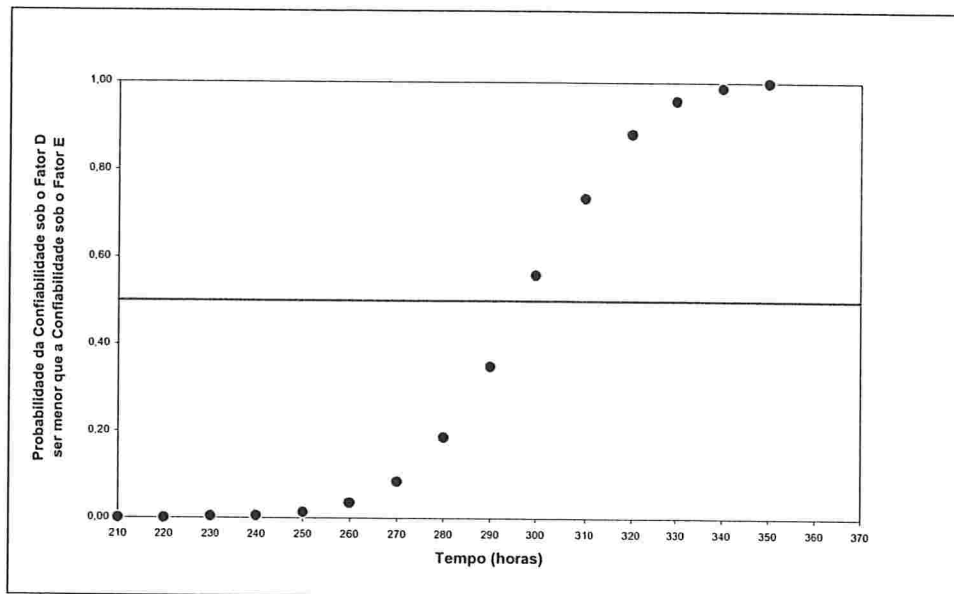


Figura 5.6 – Gráfico dos valores da Probabilidade de a Confiabilidade sob o fator D ser menor que a Confiabilidade sob o fator E para diferentes tempos.

Para verificar se os comportamentos de falha do fator D e do fator E são iguais, será calculada a medida de evidência FBST. Primeiro será calculado o FBST para a hipótese de igualdade dos parâmetros. Utilizando-se o Algoritmo 4.3, obteve-se:

$$\hat{E}V[(\beta_D = \beta_E)(\eta_D = \eta_E), t] = 0$$

O FBST comprova (confirma) a hipótese de igualdade dos parâmetros com uma evidência de zero.

Será calculado o FBST para a hipótese de igualdade dos tempos médios de falha dos fatores D e E. Utilizando-se o Algoritmo 4.4, obteve-se:

$$\hat{E}V[E(T|\beta_D, \eta_D) = E(T|\beta_E, \eta_E), t] = 0$$

O FBST comprova a hipótese de igualdade das médias com uma evidência de zero.

Espera-se que o fator E possa ser removido, portanto, deseja-se avaliar a confiabilidade do novo projeto assumindo somente a existência do fator de risco D.

Para isso será calculado o FBST, definido no Algoritmo 4.5, para diferentes hipóteses de confiabilidade em 100 horas sob o fator D.

$$\hat{EV}[R_D(100|\beta_D, \eta_D) = 0,99, t] = 0,061$$

$$\hat{EV}[R_D(100|\beta_D, \eta_D) = 0,993, t] = 0,156$$

$$\hat{EV}[R_D(100|\beta_D, \eta_D) = 0,995, t] = 0,293$$

$$\hat{EV}[R_D(100|\beta_D, \eta_D) = 0,997, t] = 0,613$$

$$\hat{EV}[R_D(100|\beta_D, \eta_D) = 0,999, t] = 0,9925$$

Graficamente, podem ser vistos os valores da medida de evidência FBST para a hipótese de a confiabilidade em 100 horas ser igual a 0,99, 0,993, 0,995, 0,997 e 0,999.

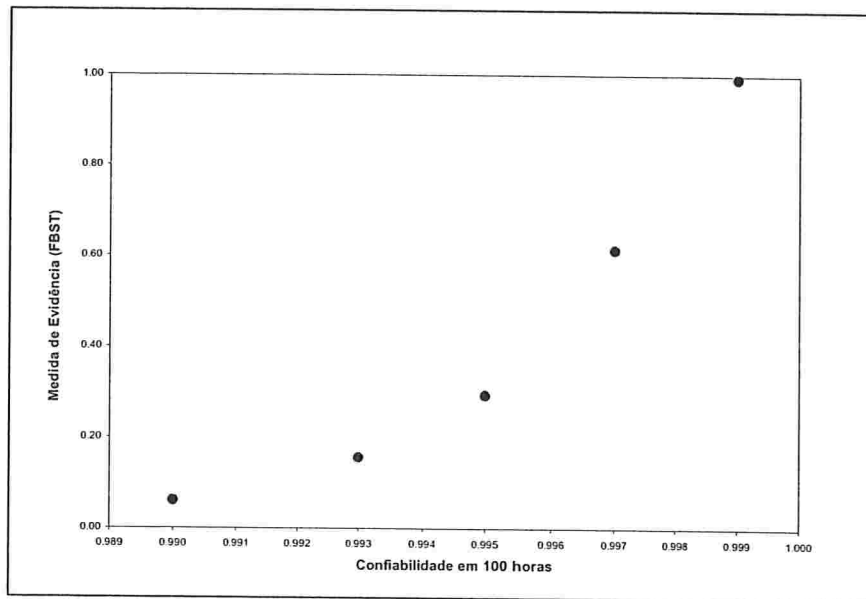


Figura 5.7 – Gráfico dos valores da Medida de Evidência FBST para diferentes hipóteses para a Confiabilidade em 100 horas sob o fator D.

Conclusão

Através da probabilidade $\hat{\rho}(Y_D, Y_E | t) = 0,6395$, pode-se verificar que a probabilidade do fator D atuar antes do fator E na falha do sistema é de 0,6395.

Analisando-se a probabilidade $\hat{\kappa}(T|t)$ ao longo do tempo, pode-se observar que, a partir do tempo 300, a probabilidade de a confiabilidade sob o fator D ser menor que a do fator E é maior que 0,50. Portanto, a partir de 300 horas existe uma probabilidade maior de 0,50 de o fator D apresentar a menor confiabilidade do sistema.

Para se verificar se os comportamentos de falha dos fatores D e E são iguais foi calculada a medida de evidência FBST para a hipótese de igualdade dos parâmetros $\hat{EV}[(\beta_D = \beta_E)(\eta_D = \eta_E), t]$, onde se obteve um valor zero. Neste caso, rejeitamos a hipótese de que o comportamento de falha do fator D e o do E são equivalentes.

Um outro interesse é verificar se o valor da confiabilidade do produto atinge o valor do *benchmark* (menos de 1% de falha em 100 horas) apenas sob o fator D. Analisando a medida de evidência FBST para diferentes valores de confiabilidade para 100 horas, somente sob o fator de risco D, pode-se verificar que à medida que o valor da confiabilidade C cresce, a medida de evidência confirma que o sistema atingirá a confiabilidade do *benchmark*.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho estudou-se, sob a perspectiva Bayesiana, a aplicação do modelo Weibull em problemas de confiabilidade sujeitos a fatores competitivos de risco. A utilização da distribuição Weibull foi um modelo adequado para representar os diferentes fatores de riscos, pois devido apenas a mudanças nos valores de seus parâmetros podemos representar diversas situações de falha, o que é comum na presença de diversos fatores de falha.

A distribuição posteriori para este caso apresenta grande dificuldade de manipulação matemática para os cálculos das medidas de interesse. Por isso recorreu-se ao método MCMC, mais especificamente para o caso Metropolis-Hastings. A escolha da distribuição proposta e verificação da convergência é um ponto importante para obtenção de resultados satisfatórios.

Com base na amostra obtida pelo método Metropolis-Hastings foi possível calcular as probabilidades de interesse e a medida de evidência para hipótese precisa (FBST), que auxiliaram no processo decisório de comparação dos fatores de riscos.

Destaca-se como tópico de pesquisas futuras, a necessidade de:

- generalizar este trabalho para mais de dois fatores de risco avaliados em conjunto e não dois a dois.
- utilizar outras distribuições como modelo de confiabilidade, como, por exemplo, a distribuição Gamma Generalizada.

Apêndice A

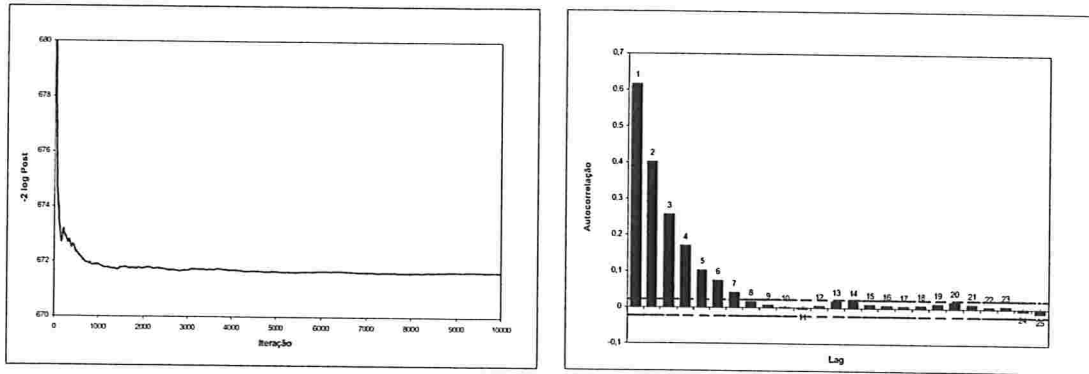


Figura A.1 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 1 para os valores gerados da aplicação 1.

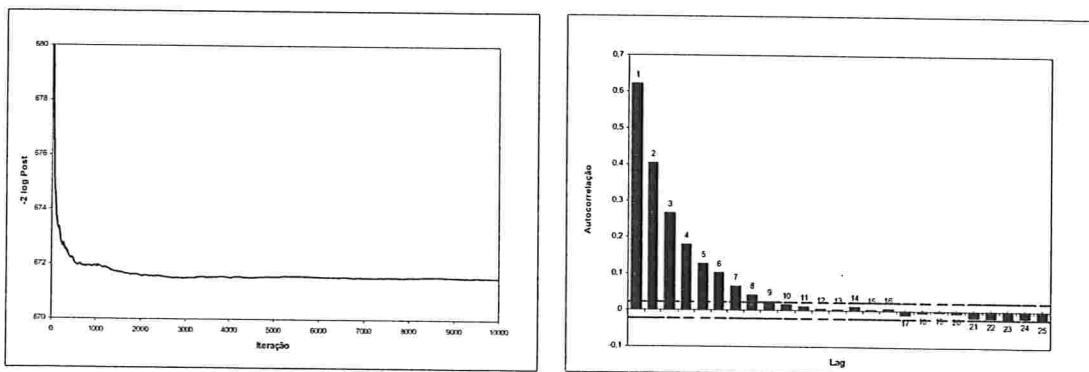


Figura A.2 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 2 para os valores gerados da aplicação 1.

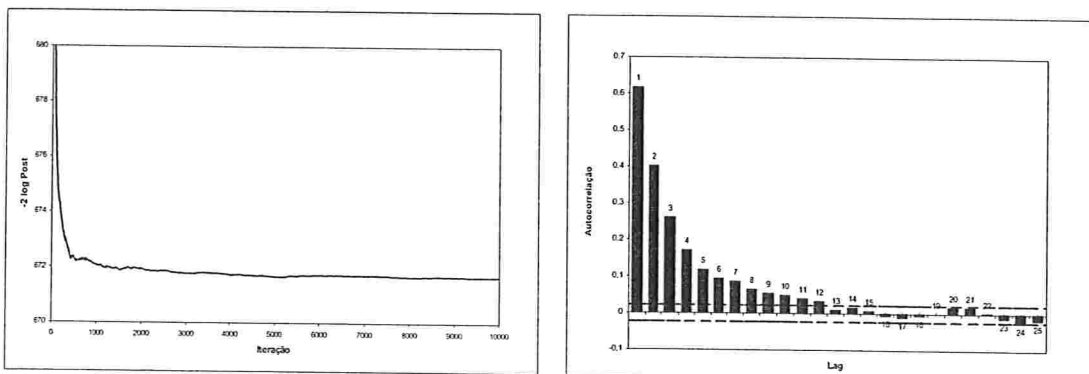


Figura A.3 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 3 para os valores gerados da aplicação 1.

Apêndice B

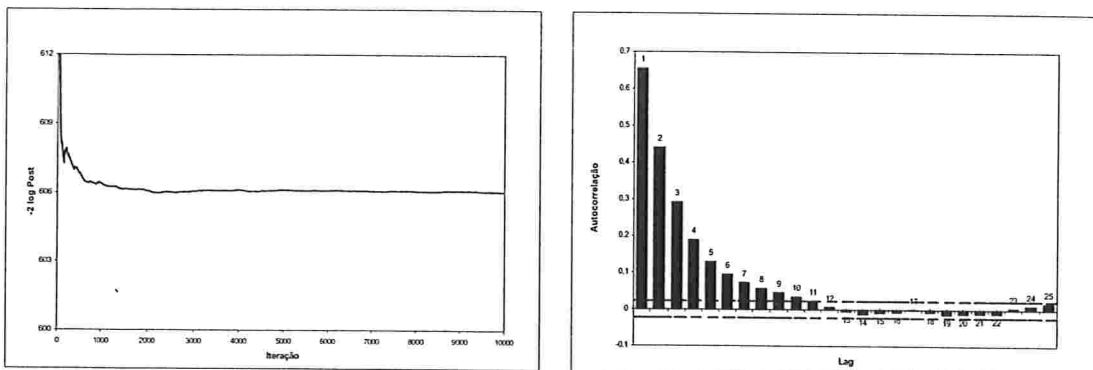


Figura B.1 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 1 para os valores gerados da aplicação 2.

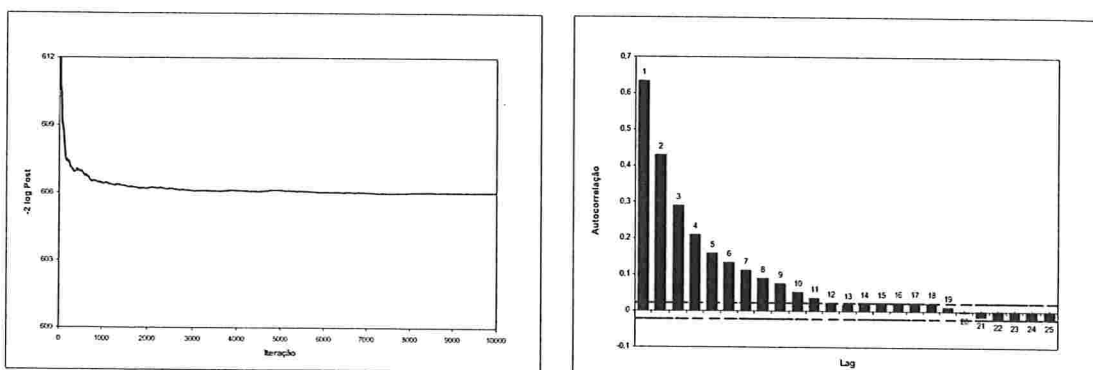


Figura B.2 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 2 para os valores gerados da aplicação 2.

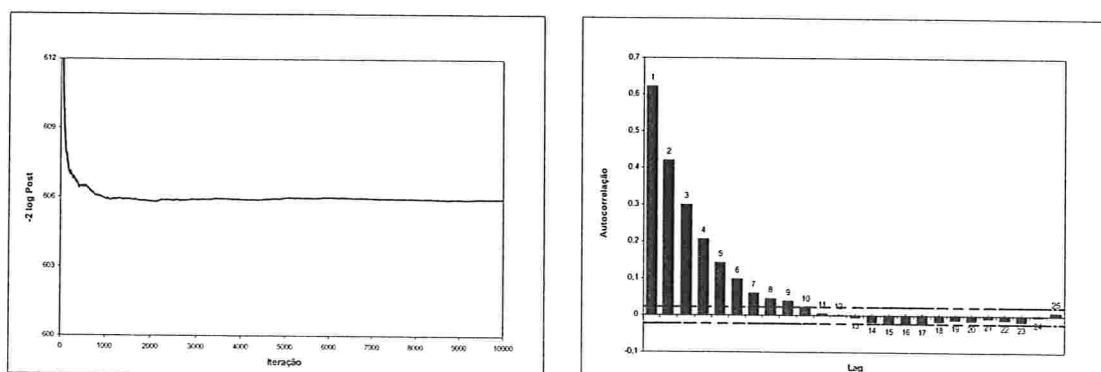


Figura B.3 – Gráfico das médias ergódicas e gráficos das autocorrelações da cadeia 3 para os valores gerados da aplicação 2.

Referências Bibliográficas

Box, G.E.P. and Tiao. G.C. (1973). **Bayesian Inference in Statistical Analysis**. Reading, Addison-Wesley.

David, H.A e Moeschberger, M.L. (1978). **The theory of competing risks**. *Monographs & Courses No.39*. London, Charles Griffin & Company LTD.

Gamerman, D. (1997). **Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference**. London, England, Chapman and Hall.

Gelman, A. e Rubin, D.R. (1992) **A single series from the Gibbs sampler provides a false sense of security**. Em Bayesian Statistics 4 (eds.: J. M. Bernardo et al.), pp. 625-631. Oxford: University Press.

Gelman, A., Roberts, G.O. e Gilks, W.R. (1996). **Efficient Metropolis jumping rules**. *Bayesian Statistics 5*, 599-608, Oxford: University Press.

Irony, T.Z., Lauretto, M., Pereira, C.A de B. e Stern, J.M. (2000). **A weibull wearout test: full bayesian approach**. *Relatório técnico RT-MAC-2000-5*, Departamento de ciência da Computação, IME-USP.

Jeffreys, H. (1961). **Theory of Probability**. Oxford: Clarendon Press.

Madruça, M.R (2002). **Teste de Significância: Uma proposta genuinamente bayesiana**. *Tese de Doutorado, Departamento MAE, IME-USP*.

Martz, H.F e Waller, R.A. (1942). **Bayesian reliability analysis**. New York, John Wiley & Sons.

Meeker, W.Q., Hahn, G.J. e Doganaksoy, N. (2002). **Reliability Analysis by Failure Mode**. *Quality Progress*, Jun/2002,35, 47-52.

Meeker, W.Q and Escobar, L.A. (1998). **Statistical Methods for Reliability Data**. New York, John Wiley & Sons.

Qian, J. (1994). **A bayesian weibull survival model**. *Tese de doutorado, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University*.

Pereira, C.A. de B. e Stern, J.M. (1999). **Evidence and Credibility: a full bayesian test of precise hypothesis**. *Entropy*, 1, 104-115.

Torres, V.H.S. (1992). **Análise Bayesiana não-paramétrica na teoria de riscos competitivos**. *Tese de doutorado, IME-USP*.

Zellner, A. (1971). **An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**. New York, John Wiley & Sons.