

Testes de raiz unitária em
sub-amostras para detectar
mudanças na persistência

Luz Marina Gómez Gómez

DISSERTAÇÃO
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística
Orientador: Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Tolo

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio
financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2008

Testes de raiz unitária em
sub-amostras para detectar
mudanças na persistência

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Luz Marina Gómez Gómez
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, março de 2008.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Clélia Maria de Castro Toloí (Presidente) - IME - USP
Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves - IME - USP
Prof. Dr Pedro Luiz Valls Pereira - IBMEC-SP

*A meus pais e irmãos
pela sua compreensão.*

Agradecimentos

A Deus por ter me permitido chegar até aqui.

A meus pais e irmãos pelo seu carinho e constante apoio e que, embora distantes, sempre estiveram ao meu lado.

A professora Clélia Maria de Castro Tolo por sua excelente orientação e pela dedicação para concluir esta dissertação.

A banca examinadora por seus valiosos aportes e sugestões.

Aos professores do IME-USP pelo conhecimento transmitido.

Agradeço a todos os meus colegas pelo constante apoio e companhia.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Um dos problemas na análise de séries temporais é verificar se uma série apresenta mudança na persistência em um determinado ponto da série, conhecido ou não. Esta é uma questão importante, porque tal mudança pode afetar bastante a eficiência dos testes de raiz unitária, levando a uma classificação incorreta da série.

Apresentamos várias técnicas desenvolvidas por Banerjee et al (1992), Leybourne et al. (2003), Taylor (2005) e Busetti e Taylor (2004) para resolver esse tipo de problema. Quando a hipótese nula especifica um processo $I(1)$ em toda a extensão da série a teoria é desenvolvida para uma série de estatísticas que podem ser recursivas, móveis ou seqüenciais, dependendo da maneira como são construídas as sub-amostras da série analisada. No caso da hipótese nula especificar um processo $I(0)$, serão utilizados testes do tipo razão. Em ambos os casos, a hipótese alternativa é de uma mudança na persistência. Alguns testes permitem a estimação do ponto de quebra, caso ele exista.

Finalmente aplicamos todas essas metodologias para analisar as séries brasileiras de Exportações, Importações por Categoria e Índices de Preços Internacionais de Commodities, utilizando comandos implementados no programa R.

Abstract

One of the problems in time series analysis is to test a change in persistence at some known or unknown point in the sample. This is an important issue, because a break in the series structure can affect the efficiency of unit root tests, leading to an incorrect classification.

We present several techniques developed by Banerjee et al. (1992), Leybourne et al. (2003), Taylor (2005), and Buseti and Taylor (2004) to solve this kind of problem. When the null hypothesis specifies a $I(1)$ process the theory is developed for a series of statistics that can be recursive, rolling or sequential, depending on how the subsamples of the data are defined. If the null hypothesis specify a $I(0)$ process, ratio tests will be used. The alternative hypothesis is always change in persistence. Some tests allow the break point estimation, if it exists.

Finally, we apply all these methodologies to analyze the Brazilian series of Exports, Imports by Category and International Index Prices of Commodities, using R software.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teste de Raiz Unitária para Modelos Auto-Regressivos	2
2.1	Introdução	2
2.2	Teste de Dickey Fuller para Modelos AR(1)	3
2.2.1	Teste de Dickey Fuller para Modelo AR(1) sem Constante	4
2.2.2	Teste de Dickey Fuller para Modelo AR(1) com Constante	6
2.3	Extensão do Teste de Dickey-Fuller	8
2.3.1	Modelo sem Constante	9
2.3.2	Modelo com Constante	12
2.3.3	Modelo com Tendência no Tempo	14
2.4	Teste de Phillips-Perron para Raiz Unitária	17
3	Testes Estatísticos Recursivo, "Rolling" e Seqüencial	22
3.1	Introdução	22
3.2	Testes Recursivos	23
3.3	Testes Móveis	28
3.4	Testes Seqüenciais	29
3.5	Resultados das Simulações Monte-Carlo	34
4	Detecção de Mudança na Persistência	38
4.1	Introdução	38
4.2	Teste para Estacionariedade contra Mudança na Persistência	38
4.2.1	Mudança de $I(0)$ para $I(1)$	38
4.2.2	Mudança de $I(1)$ para $I(0)$	43
4.2.3	Direção de Mudança Desconhecida	47
4.3	Mudança na Persistência contra a Hipótese Nula de Diferença Estacionária	48

4.3.1	Mudança na Persistência: Direção Especificada	49
4.3.2	Distribuição Assintótica da Estatística do Teste sob H^{11}	53
4.3.3	Comportamento do Teste sob H^{01} e H^{10} (hipóteses alternativas)	54
4.4	Testes Mínimos: Direção não Especificada	56
5	Generalização dos Testes Recursivos e Móveis	59
5.1	Introdução	59
5.2	Valores Críticos para Diferentes Escolhas de τ_0 e k	60
5.2.1	Valores Críticos para Diferentes Escolhas de τ_0 para o Teste Re- cursivo	60
5.2.2	Valores Críticos para Diferentes Escolhas de $k = [\tau_0 * n]$ para o Teste Móvel	61
5.3	Extensão dos Testes	61
5.3.1	Extensão do Teste Recursivo	61
5.3.2	Extensão do Teste Móvel	62
6	Aplicação	63
6.1	Introdução	63
6.2	Série de Exportações	63
6.3	Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral	74
6.4	Valor das Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital.	84
7	Conclusões	95
	Apêndices	96
	A Movimento Browniano	97
A.1	Introdução	97
A.2	Teorema do Limite Central Funcional	98
B	Programas Usados na Aplicação	102
B.1	Testes de Dickey Fuller	102
B.1.1	Dickey Fuller com Constante e termo no tempo	102
B.1.2	Dickey Fuller com Constante	103
B.1.3	Dickey Fuller Recursivo	104

B.1.4	Dickey Fuller Móvel	106
B.1.5	Testes t Seqüencial	108
B.1.6	Testes F Seqüencial	111
B.2	Testes Dickey Fuller para Metodologia GLS	114
B.2.1	Testes Recursivos	116
B.2.2	Teste Móvel	118

C Tabelas	120
Referências Bibliográficas	

Capítulo 1

Introdução

Muitas séries econômicas e financeiras apresentam um comportamento de tendência ou não estacionariedade na média, exemplo disto são os preços e taxas de câmbio. Para aplicar algumas técnicas de modelagem em séries temporais é importante determinar a forma correta da tendência dos dados, porque se existir alguma tendência deve-se aplicar primeiro uma transformação para eliminá-la.

Para remover a tendência são utilizadas principalmente duas metodologias. A primeira é tomar a diferença da série, que é apropriada quando os dados apresentam um comportamento $I(1)$ (tipo de não estacionariedade estocástica). A segunda, é fazer uma regressão com uma variável no tempo; esta metodologia é apropriada quando a série apresenta um comportamento estacionário ao redor de uma tendência linear.

Uma mudança na persistência neste contexto é definida como uma quebra estrutural caracterizada por uma mudança abrupta ou gradual, na inclinação ou no intercepto (nível) da função de tendência. De acordo com Perron (1989), uma quebra estrutural pode disfarçar a estacionariedade de uma série econômica, ou seja, a utilização de testes que não a consideram pode induzir a não aceitação da hipótese de estacionariedade de uma determinada série, quando na verdade ela não apresenta raiz unitária.

Os testes de raiz unitária são os mais usados para testar a existência de uma tendência estocástica; quando aplicados a séries que apresentam mudança na tendência podem levar a uma classificação incorreta.

Estudos realizados por Plosser(1992), que envolvem muitas variáveis macroeconômicas com uma estrutura de série temporal com raiz unitária, é o ponto de partida para o

desenvolvimento de uma série de procedimentos alternativos ao teste de raiz unitária. Um exemplo destes procedimentos é o teste sugerido por Phillips e Perron (1989), que propõem como uma alternativa ao modelo integrado, que a série seja estacionária em torno de uma tendência determinística, com uma inclinação que se altera em uma determinada fração da amostra. Este tipo de comportamento foi sugerido por Perron (1989), sendo o modelo denominado 'stationary/trend-shift model' em que a série Y_t é estacionária ao redor de uma tendência determinística no tempo e tem uma inclinação em uma fração da amostra e depois sua inclinação muda. Perron (1989,1990a) supôs que o instante (fração) de quebra é conhecido; aqui esta fração será tratada como desconhecida.

Neste trabalho são apresentadas varias técnicas propostas para resolver este tipo de problema. Foram desenvolvidas teorias sobre seqüências de estatísticas, avaliadas sobre diversos valores em um intervalo de possíveis datas de quebra, para ter indícios de possíveis mudanças na persistência. Também são apresentados testes que permitem estimar a possível data de quebra e determinar a possível direção de mudança (se a mudança na série é de $I(0)$ para $I(1)$ ou de $I(1)$ para $I(0)$). Os testes considerados são recursivos, móveis e seqüenciais, aplicados a diferentes modelos.

No Capítulo 2 são apresentados os testes de raiz unitária de Dickey-Fuller, Dickey-Fuller Aumentado e Philhips-Perron, como suas respectivas distribuições assintóticas.

No Capítulo 3 são apresentados os testes recursivos, móveis e seqüenciais, com suas respectivas distribuições assintóticas, para distinguir entre a presença de uma raiz unitária ou a existência de um comportamento estacionário ao redor de uma tendência determinística, que apresenta uma quebra em um determinado instante do tempo.

O Capítulo 4 apresenta os testes que permitem estimar o possível ponto de mudança da série (ponto de quebra). Os testes são divididos em duas classes: Os testes de razão e Invariante Localmente Ótimo (ILO), que permitem testar a hipótese nula H_0 : a série é gerada por um processo $I(0)$, série estacionária, e os testes recursivos Dickey-Fuller GLS que permitem testar H_0 : a série é gerada por um processo $I(1)$, série com tendência estocástica. As duas classes têm como hipótese alternativa mudança de $I(0)$ para $I(1)$ ou vice-versa. Além disso, são apresentadas suas distribuições assintóticas.

No Capítulo 5 são apresentadas extensão de alguns dos testes e tabelas de Valores críticos apresentados nos Capítulos 3 e 4.

O Capítulo 6 apresenta a aplicação das metodologias estudadas nos Capítulos 2, 3 e 4 para as séries de Exportação, Valor das Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital e Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral.

Capítulo 2

Teste de Raiz Unitária para Modelos Auto-Regressivos

2.1 Introdução

O modelo

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

é chamado um modelo auto-regressivo de ordem p e é denotado por $AR(p)$.

Definindo o operador auto-regressivo estacionário de ordem p ,

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

então, pode-se escrever o modelo (2.1) como $\phi(B)Y_t = e_t$. Logo, para estudar a estacionariedade do processo, definimos as G_i^{-1} , $i = 1, 2, \dots, p$, raízes da equação característica $\phi(B) = 0$, e escrevemos:

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B).$$

Expandindo em frações parciais,

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{1 - G_i B},$$

onde $\psi(B)$ deve convergir para $|B| \leq 1$, o que implica que $|G_i| \leq 1$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Esta condição é equivalente a que a equação característica $\phi(B) = 0$ tenha raízes fora do círculo unitário, que é a condição de estacionariedade do modelo auto-regressivo.

Quando o polinômio AR apresenta uma raiz sobre o círculo unitário, dizemos haver uma raiz unitária, isto implica que a série original não é estacionária e deve-se tomar

uma diferença antes de ajustar o modelo.

Neste capítulo é descrito o teste estatístico proposto por Dickey-Fuller (1979) para avaliar a hipótese de raiz unitária nos modelos AR(1) e AR(p), com constante e tendência linear, assim como as respectivas distribuições assintóticas em termos do movimento Browniano. Além disso, apresenta-se o teste proposto por Phillips (1987) e Phillips e Perron (1988) em que uma correlação serial é permitida no modelo, fazendo-se uma modificação na estatística para levar em conta tal correlação.

2.2 Teste de Dickey Fuller para Modelos AR(1)

Considere o modelo AR(1),

$$Y_t = \theta + \phi Y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (2.2)$$

Se $\hat{\phi}$ for o estimador de máxima verossimilhança de ϕ , sabe-se que para n observações do processo.

$$\hat{\phi} \rightarrow \mathcal{N}\left(\phi, \frac{(1 - \phi^2)}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Para testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \phi &= \phi_0 \\ H_1 : \phi &< \phi_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

utiliza-se a estatística

$$z = \frac{\hat{\phi} - \phi_0}{S_{\hat{\phi}}},$$

onde $S_{\hat{\phi}}$ indica o erro padrão estimado de $\hat{\phi}$. Sob a hipótese nula, a estatística tem uma distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade.

Observe que (2.3) pode ser escrito como

$$\sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \sim \mathcal{N}(0, (1 - \phi^2)), \quad (2.5)$$

podendo-se dizer que a taxa de convergência do estimador é $n^{-\frac{1}{2}}$, para $\phi_0 < 1$.

Se o interesse for avaliar as hipóteses,

$$\begin{aligned} H_0 : \phi &= 1 \\ H_1 : \phi &< 1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

então $\sqrt{n}(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{P} 0$, e a estatística $\hat{\phi}$ não é útil para avaliar as hipóteses (2.6), denominadas teste de raiz unitária.

2.2.1 Teste de Dickey Fuller para Modelo AR(1) sem Constante

Considere o modelo (2.2) com $\theta = 0$,

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2.7)$$

que pode ser escrito na forma:

$$\Delta Y_t = \phi^* Y_{t-1} + e_t \quad (2.8)$$

onde $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ e $\phi^* = (\phi - 1)$. Logo, fazer o teste (2.6) é equivalente a analisar as hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 : \phi^* &= 0 \\ H_1 : \phi^* &< 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

no modelo (2.8).

O estimador de máxima verossimilhança para ϕ^* é assintoticamente equivalente ao estimador de mínimos quadrados obtido por meio da regressão de ΔY_t sobre Y_{t-1} , logo

$$\hat{\phi}^* = (\hat{\phi} - 1) = \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2},$$

e para avaliar a hipótese de raiz unitária temos que estudar o comportamento da expressão:

$$n(\hat{\phi} - 1) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2}. \quad (2.10)$$

Da proposição A.1 (apêndice A) temos que:

$$n^{-1} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t \xrightarrow{D} \frac{1}{2} \sigma^2 \{ [w(1)]^2 - 1 \} \quad (2.11)$$

e

$$n^{-2} \sum_{t=2}^n Y_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \sigma^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr. \quad (2.12)$$

Sem perda de generalidade considera-se que $\sigma^2 = 1$, logo

$$n(\hat{\phi} - 1) \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right)}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr}, \quad (2.13)$$

onde $w(r)$ é o movimento Browniano (MB) padrão. Em particular $[w(1)]^2 \sim \chi_1^2$ e como $P(\chi_1^2 < 1) = 0.68$, da expressão anterior temos que a probabilidade de que o lado esquerdo de (2.13) seja negativo converge para 0.68, para $n \rightarrow \infty$. Ou seja, mesmo que tenhamos um passeio aleatório ($\phi = 1$), simulando-se muitas amostras de tal processo, em aproximadamente 2/3 delas o estimador $\hat{\phi}$ será menor que 1.

Na Tabela C.1, Caso 1, são apresentados os valores críticos assintóticos para a estatística (2.13) para diferentes tamanhos da amostra n .

Para testar (2.6) podemos utilizar a estatística

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\phi} - 1}{S_e \sqrt{c_{11}}}, \quad (2.14)$$

onde S_e^2 é a soma do quadrado médio residual da regressão (2.8), isto é,

$$S_e^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (\Delta y_t - \hat{\phi} y_{t-1})^2}{n-2} \quad \text{e} \quad c_{11} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{n-1} y_t^2}.$$

Assim, a estatística pode ser expressa na forma:

$$\hat{\tau} = \frac{n(\hat{\phi} - 1)}{n S_e \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^{n-1} Y_{t-1}^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.10) em (2.15), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}}{n S_e \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2} \right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} S_e \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t}{\frac{1}{n} S_e \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t}{S_e \left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Sabe-se que $S_e \xrightarrow{P} \sigma^2$ e pela proposição A.1 do Apêndice temos que:

$$\hat{\tau} \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right) / \left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr \right)}{\left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr \right)^{-\frac{1}{2}}},$$

assim,

$$\hat{\tau} \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right)}{\left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.16)$$

Os testes usando (2.13) ou (2.16) são chamados teste de Dickey-Fuller. Valores críticos de $\hat{\tau}$ para níveis de significância 0.01, 0.05 e 0.10 são dados, respectivamente, por $-2,60$, $-1,95$ e $-1,61$, para amostras de tamanho $n = 100$. Para amostras grandes, maiores que 500, esses valores são, respectivamente, $-2,58$, $-1,95$ e $-1,62$.

Na Tabela C.2, Caso 1, são apresentados os valores críticos assintóticos para a estatística (2.16) para diferentes tamanhos da amostra n

2.2.2 Teste de Dickey Fuller para Modelo AR(1) com Constante

Considere o seguinte modelo com média diferente de zero,

$$Y_t = \theta + \phi Y_{t-1} + e_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

Os estimadores de mínimos quadrados para os parâmetros θ e ϕ são:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \sum_{t=1}^n Y_t - \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t \sum_{t=1}^n Y_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2}, \quad (2.18)$$

e

$$\hat{\phi}_\mu = \frac{\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \sum_{t=1}^n Y_t + n \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Y_t}{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2}, \quad (2.19)$$

respectivamente. Assim,

$$n \left(\hat{\phi}_\mu - 1 \right) = \frac{n^2 \sum_{t=2}^n Y_{t-1} e_t - n \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \sum_{t=1}^n e_t}{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2}.$$

Multiplicando e dividindo a expressão anterior por n^{-2} temos:

$$n \left(\hat{\phi}_\mu - 1 \right) = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t - n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t}{n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2}. \quad (2.20)$$

As expressões (2.11) e (2.12) dão a distribuição limite de $n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t$ e $n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2$. Além disso, pela proposição A.1 obtemos:

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=2}^n Y_{t-1} \xrightarrow{D} \sigma \int_0^1 w(r) dr \quad (2.21)$$

e

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=2}^n e_t \xrightarrow{D} \sigma w(1), \quad (2.22)$$

portanto,

$$n \left(\hat{\phi}_\mu - 1 \right) \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right) - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\int_1^0 [w(r)]^2 dr - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2}. \quad (2.23)$$

Na Tabela C.1, Caso 2, são fornecidos os valores críticos para a distribuição da estatística (2.23).

A correspondente estatística $\hat{\tau}$ é denotada por $\hat{\tau}_\mu$ e é dada por:

$$\hat{\tau}_\mu = \frac{\hat{\phi}_\mu - 1}{(S_{e2} C_{22})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.24)$$

em que

$$C_{22} = \frac{n}{n \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n y_{t-1} \right)^2}$$

e

$$S_{e2} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (y_t - \hat{\theta} - \hat{\phi}_\mu y_{t-1})^2}{n-3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_\mu &= \frac{\frac{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t - \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \sum_{t=1}^n e_t}{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2}}{\left(S_{e2} \frac{n}{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{n \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t - \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \sum_{t=1}^n e_t}{n^{\frac{1}{2}} \left(n \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Multiplicando e dividindo por n^{-2} obtemos:

$$\hat{\tau}_\mu = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t - \left(n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right) \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t \right)}{\left(n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Das expressões (2.11),(2.12),(2.21) e (2.22) segue que

$$\hat{\tau}_\mu \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right) - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.26)$$

Na Tabela C.2 Caso 2, são fornecidos os valores críticos para a distribuição da estatística (2.26).

2.3 Extensão do Teste de Dickey-Fuller

Suponha agora que a série possa ser representada por um processo $AR(p)$,

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.27)$$

em que e_t é uma seqüência de variáveis aleatórias que tem distribuição normal, com média zero, variância σ^2 e quarto momento finito.

Vejamos outra forma de expressar o modelo (2.27). Seja

$$\phi^* = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \quad e \quad (2.28)$$

$$\varphi_j = -(\phi_{j+1} + \phi_{j+2} + \dots + \phi_p), \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \quad (2.29)$$

logo,

$$\begin{aligned} & (1 - \phi^* B) - (\varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \dots + \varphi_{p-1} B^{p-1})(1 - B) \\ &= (1 - \phi^* B) - (\varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \dots + \varphi_{p-1} B^{p-1} - \varphi_1 B^2 - \varphi_2 B^3 - \dots - \varphi_{p-1} B^p) \\ &= 1 - (\phi^* + \varphi_1) B - (\varphi_2 - \varphi_1) B^2 - \dots - (\varphi_{p-1} - \varphi_{p-2}) B^{p-1} - (-\varphi_{p-1}) B^p \\ &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p. \end{aligned}$$

Assim, $\phi(B)Y_t = e_t$ pode ser expresso como

$$\left[(1 - \phi^* B) - (\varphi_1 B + \dots + \varphi_{p-1} B^{p-1})(1 - B) \right] Y_t = e_t$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi^* Y_{t-1} + \varphi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \dots + \varphi_{p-1}(Y_{t-p+1} - Y_{t-p+2}) + e_t \\ Y_t - Y_{t-1} &= (\phi^* - 1)Y_{t-1} + \varphi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \dots + \varphi_{p-1}(Y_{t-p+1} - Y_{t-p+2}) + e_t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1^* Y_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-1} + \dots + \varphi_{p-1} Z_{t-p+1} + e_t,$$

em que $\phi_1^* = \sum_{i=1}^n \phi_i - 1$ e $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$.

Agora suponha que o processo gerado por Y_t tenha uma raiz unitária e todas as outras raízes fora do círculo unitário, logo

$$1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p = 0$$

e testar a hipótese que o polinômio auto-regressivo tem uma raiz unitária é equivalente a testar a hipótese que $\phi_1^* = 0$.

2.3.1 Modelo sem Constante

Consideremos agora o modelo

$$Z_t = \phi_1^* Y_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-1} + \dots + \varphi_{p-1} Z_{t-p+1} + e_t \quad (2.30)$$

em que ϕ_1^* pode ser estimado por mínimos quadrados, como o coeficiente de Y_{t-1} , na regressão de Z_t sobre $Y_{t-1}, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p+1}$. Em forma matricial o modelo pode ser expresso como:

$$Z_t = X_t' \beta, \quad (2.31)$$

em que $X_t' = (Y_{t-1}, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p+1})'$ e $\beta = (\phi_1^*, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1})$.

O desvio do estimador de mínimos quadrados b em relação ao vetor β é dado por

$$b - \beta = \left(\sum_{t=1}^n X_t e_t \right) \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right)^{-1} \quad (2.32)$$

com

$$\sum_{t=1}^n X_t e_t = \begin{pmatrix} Y_{t-1} e_t \\ Z_{t-1} e_t \\ Z_{t-2} e_t \\ \vdots \\ Z_{t-p+1} e_t \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

e

$$\sum_{t=1}^n X_t X_t' = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-1} & \cdots & \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-2} & \cdots & \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Z_{t-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Z_{t-1} & \cdots & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Sob a hipótese $\phi_1^* = 0$, temos que Y_t satisfaz à hipótese da proposição A.2 para $\lambda = \sigma$, logo dos resultados c, g e k pode-se ver que $\sum_{t=1}^n Z_t Z_{t-j}$, $\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2$ e $\sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-j}$ devem ser divididos, respectivamente, por n^{-1} , n^{-2} e $n^{-\frac{3}{2}}$, para se obter uma variável aleatória que converge em distribuição. Se calcularmos

$T \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right)^{-1} T' = \left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1}$, em que

$$T = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

obtemos

$$\left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1} = \begin{pmatrix} n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-1} & \cdots & n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-p+1} \\ n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Y_{t-1} & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 & \cdots & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-p+1} \\ n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Y_{t-1} & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-2} & \cdots & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Z_{t-p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Y_{t-1} & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Z_{t-1} & \cdots & n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1}^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Segue-se que a distribuição assintótica da expressão anterior é dada por

$$\left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} \int_1^0 [w(1)]^2 dr & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ 0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.36)$$

Particionando a matriz nos seguintes blocos,

$$Q = \left(\int_1^0 [w(1)]^2 dr \right) \text{ e } V = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

segue-se que,

$$\left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.38)$$

Pelo resultado dado,

$$E \left[\left(\sum_{t=1}^n Z_{t-j} e_t \right)^2 \right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

logo

$$\begin{pmatrix} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n (Z_{t-1} e_t) \\ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n (Z_{t-2} e_t) \\ \vdots \\ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n (Z_{t-p+1} e_t) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} h_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 V) \quad (2.40)$$

e

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t \xrightarrow{D} h_2 \sim \frac{\sigma^2}{2} [[w(1)]^2 - 1]. \quad (2.41)$$

Assim,

$$n \left(\hat{\phi}_1^* - \phi_1^* \right) \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1} h_2 \\ V^{-1} h_1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

com a primeira componente do vetor $b - \beta$ denotada por $\hat{\phi}_1^*$ e

$$n \hat{\phi}_1^* = n \left(\hat{\phi}^* - 1 \right) \xrightarrow{D} \left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} [[w(1)]^2 - 1] \right). \quad (2.43)$$

De modo similar pode-se obter que a distribuição limite da estatística $\hat{\tau}$:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\phi}_1^*}{\hat{e}p(\hat{\phi}_1^*)} \quad (2.44)$$

que é dada por

$$\hat{\tau} \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left([w(1)]^2 - 1 \right)}{\left(\int_0^1 [w(r)]^2 dr \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.45)$$

As estatísticas $n\hat{\phi}_1^*$ e $\hat{\tau}$ para os modelos $AR(p)$, têm as mesmas distribuições assintóticas que as respectivas estatísticas para o modelo $AR(1)$. Os testes usando (2.43) e (2.45) são denominados teste de Dickey Fuller aumentado, abreviadamente, teste *ADF*.

Na Tabela C.2, Caso 1, são apresentados os valores críticos assintóticos para a estatística (2.45) para diferentes tamanhos da amostra n .

2.3.2 Modelo com Constante

Consideremos agora o modelo

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1^* Y_{t-1} + \varphi_1 Z_{t-1} + \dots + \varphi_{p-1} Z_{t-p+1} + e_t \quad (2.46)$$

Usando o procedimento da seção anterior, pode-se obter

$$\sum_{t=1}^n X_t X_t' = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} & \dots & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-1} & \dots & \sum_{t=1}^n Y_{t-1} Z_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^2 & \dots & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-2} & \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-1} Z_{t-2} & \dots & \sum_{t=1}^n Z_{t-2} Z_{t-p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Y_{t-1} & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} Z_{t-1} & \dots & \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1}^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\sum_{t=1}^n X_t e_t = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n e_t \\ \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-1} e_t \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-2} e_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^n Z_{t-p+1} e_t \end{pmatrix}.$$

Sob a hipótese que $\theta_0 = 0$ e $\phi_1^* = 1$, Y_t é um passeio aleatório e satisfaz a proposição A.1 para $\lambda = \sigma$, logo dos resultados c,h e f tem-se que $\sum_{t=1}^n Z_t Z_{t-j}$, $\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2$ e $\sum_{t=1}^n Y_{t-1}$ devem ser multiplicadas por n^{-1} , n^{-2} e $n^{-\frac{3}{2}}$, respectivamente, para obter uma distribuição assintótica em termos do processo Browniano padrão, assim

$$\left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} 1 & \int_1^0 w(r) dr & 0 & \dots & 0 \\ \int_1^0 w(r) dr & \int_1^0 [w(r)]^2 dr & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{p-1} \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_{p-1} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1},$$

em que T é dada pela expressão (2.35)

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{n} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{n} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Dividindo a matriz em blocos

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \int_1^0 w(r) dr \\ \int_1^0 w(r) dr & \int_1^0 [w(r)]^2 dr \end{pmatrix} \text{ e } V = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \dots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

definindo h_1 como na expressão (2.40) e utilizando o fato de que

$$\begin{pmatrix} n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t \\ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t \end{pmatrix} = h_2, \quad (2.49)$$

segue-se que

$$h_1 \sim (\mathcal{N}(0, \sigma^2 V)) \quad \text{e} \quad h_2 \xrightarrow{D} \left(\frac{\sigma W(1)}{\frac{1}{2}\sigma \{ [W(1)]^2 - 1 \}} \right). \quad (2.50)$$

Sob H_0 ,

$$n(\hat{\phi}^* - 1) \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2}\sigma \{ [w(r)]^2 - 1 \} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\int_0^1 [w(r)]^2 - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2} \quad (2.51)$$

A correspondente estatística τ tem a mesma distribuição que a estatística τ_μ na expressão (2.26). Na Tabela C.1, Caso 2, são fornecidos os valores críticos para a distribuição da estatística (2.26).

2.3.3 Modelo com Tendência no Tempo

Consideremos o modelo

$$Y_t = \theta + \delta t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p+1} + e_t. \quad (2.52)$$

O modelo pode ser escrito na forma

$$Y_t = \theta^* + \phi_1 \eta_{t-1} + \delta^* t + \phi_2 \xi_{t-1} + \dots + \phi_p \xi_{t-p+1} + e_t \quad (2.53)$$

em que

$$\theta^* = \theta + (\beta(1) - \phi) \bar{\theta}_0 \quad (2.54)$$

$$\bar{\theta}_0 = E[Z_t] = \frac{\theta}{1 - \phi(1)} \quad (2.55)$$

$$\delta^* = \delta + \phi_1 \bar{\theta}_0 \quad (2.56)$$

$$\xi_t = Z_t - \bar{\theta}_0 \quad (2.57)$$

$$\eta_{t-1} = Y_{t-1} - \bar{\theta}_0(t-1). \quad (2.58)$$

com $\phi(1)$ o polinômio de diferenças avaliado em 1.

A idéia de transformar o modelo (2.52) foi dada por Sims, Stock, e Watson (1990). O objetivo é re-escrever a regressão em termos de uma variável aleatória com média zero e estacionária em covariância, uma constante e um termo no tempo.

Seja $\beta = (\theta^*, \delta^*, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{p-1})'$ e $X_t = (1, t, \xi_{t-1}, t, \eta_{t-1}, \xi_{t-2}, \dots, \xi_{t-p+1})'$. O desvio

do estimador de mínimos quadrados b do vetor β é dado pela expressão (2.32). As hipótese testadas são:

$$H_0 : \quad \theta = 0, \phi_1 = 1, \delta = 0, \quad (\text{existência de uma raiz unitária}), \quad (2.59)$$

$$H_1 : \quad |\phi_1| < 1 \quad (\text{comportamento estacionário com uma tendência determinística}) \quad (2.60)$$

Sob H_0 o sistema transformado fica: $\theta^* = 0, \phi_1 = 1$ e $\delta^* = 0$, logo o estimador de mínimos quadrados para β é dado por

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}^* \\ \hat{\phi}_1^* - 1 \\ \hat{\delta}^* - \theta_0 \\ \hat{\phi}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{p-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} & \sum_{t=1}^n t & \cdots & \sum_{t=1}^n \xi_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} & \sum_{t=1}^n \xi_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1} & \cdots & \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \xi_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1} & \sum_{t=1}^n t^2 & \cdots & \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \xi_{t-p+1} \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-2} & \sum_{t=1}^n t \xi_{t-2} & \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \xi_{t-2} & \cdots & \sum_{t=1}^n \xi_{t-2} \xi_{t-p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-p+1} & \sum_{t=1}^n t \xi_{t-p+1} & \sum_{t=1}^n \xi_{t-p+1} \xi_{t-1} & \cdots & \sum_{t=1}^n \xi_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n e_t \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} e_t \\ \sum_{t=1}^n t e_t \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-2} e_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^n \xi_{t-p+1} e_t \end{pmatrix}$$

Sob a hipótese nula (2.59), ξ_t satisfaz as condições da proposição A.3 para $\lambda = \sigma$, logo dos resultados f, h e i do Apêndice A temos que $\sum_{t=1}^n \xi_t$, $\sum_{t=1}^n \xi_{t-1}^2$ e $\sum_{t=1}^n t \xi_t$ devem ser divididos por $n^{-\frac{3}{2}}$, n^{-2} e $n^{-\frac{5}{2}}$, respectivamente, para obtermos uma variável aleatória que converge em distribuição. Assim,

$$\left\{ T^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_t X_t' \right) T^{-1} \right\}^{-1} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} 1 & \int_1^0 w(r) dr & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \int_1^0 w(r) dr & \int_1^0 [w(r)]^2 dr & \int_1^0 r w(r) dr & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \int_1^0 r w(r) dr & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1}$$

e, como foi feito na seção anterior, particionamos a matriz em blocos

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \int_1^0 w(r) dr & \frac{1}{2} \\ \int_1^0 w(r) dr & \int_1^0 [w(r)]^2 dr & \int_1^0 r w(r) dr \\ \frac{1}{2} & \int_1^0 r w(r) dr & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Além disso, temos que

$$E \left[\left(\sum_{t=1}^n \xi_{t-j} e_t \right)^2 \right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

e

$$\begin{pmatrix} n^{-\frac{1}{2}} (Z_{t-1} e_t) \\ n^{-\frac{1}{2}} (Z_{t-2} e_t) \\ \vdots \\ n^{-\frac{1}{2}} (Z_{t-p+1} e_t) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} h_1 \sim N(0, \sigma^2 V) \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t \\ n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_t \\ -\frac{3}{2} \sum_{t=1}^n t e_t \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} \sigma w(1) \\ \frac{\sigma^2}{2} [w(1)]^2 - 1 \\ \sigma \left[w(1) - \int_0^1 w(r) dr \right] \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

logo obtemos:

$$n(\phi_1^* - 1) = \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr + A}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left\{ \int_0^1 w(r) dr \right\}^2 + B} \quad (2.65)$$

e o correspondente estimador $\tau_{\phi_1^*}$ é dado por:

$$\tau_{\phi_1^*} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr + A}{\left\{ \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2 + B \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.66)$$

em que A e B são definidos por:

$$A = 12 \left[\int_0^1 r w(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 w(r) dr \right] \left[\int_0^1 w(r) dr - \frac{1}{2} w(1) \right], \quad (2.67)$$

$$B = 12 \left[\int_0^1 r w(r) dr \int_0^1 r w(r) dr - \left(\int_0^1 r w(r) dr \right)^2 \right] - 3 \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2. \quad (2.68)$$

Valores críticos da estatística (2.66) para os níveis de 1%, 2.5% e 5%, quando $n \rightarrow \infty$, são dados por 3,96, -3,66, -3,41, respectivamente. Valores críticos para a distribuição da estatística são apresentados na Tabela C.2 (Caso 3).

2.4 Teste de Phillips-Perron para Raiz Unitária

Para ilustrar a idéia básica do teste de Phillips (1987) e Phillips-Perron (1988) para raiz unitária, discute-se em detalhe o tratamento proposto para o caso do modelo com constante

$$Y_t = \theta + \phi Y_{t-1} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (2.69)$$

Sob a suposição que os verdadeiros valores são $\theta = 0$, $\phi = 1$ e e_t é uma seqüência i.i.d, Phillips e Perron generalizam estes resultados para o caso em que e_t é serialmente correlacionada e, talvez, heteroscedástica. Assume-se que o verdadeiro processo é

$$Y_t - Y_{t-1} = e_t = \psi(L)\epsilon_t \quad (2.70)$$

em que $\psi(L)$ e ϵ_t satisfazem as condições da proposição A.3.

Se o modelo (2.69) for auto-regressivo estacionário com $|\phi| < 1$, o estimador de mínimos quadrados do parâmetro ϕ não será consistente quando e_t for uma série correlacionada. Entretanto, se $\phi = 1$, a taxa de convergência de $\hat{\phi}$ é n e faz com que $\hat{\phi} \xrightarrow{P} 1$, mesmo quando e_t é correlacionada.

Phillips e Perron (1988) propõem estimar o modelo (2.69) por mínimos quadrados ordinários, mesmo que e_t seja uma série correlacionada e então modificam a estatística para levar em conta a correlação serial.

Sejam $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ os estimadores de mínimos quadrados baseados no modelo (2.69), quando e_t é uma série não correlacionada, isto é, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ são as quantidades definidas em (2.18) e (2.19), respectivamente. Se os verdadeiros valores dos parâmetros são $\theta = 0$ e $\phi = 1$, então

$$Y_t = Y_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_t.$$

Se $e_t = \psi(L)\epsilon_t$ com $Y_0 = 0$, usando os resultados da proposição A.3 temos

$$n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \xrightarrow{D} \lambda \int_0^1 w(r) dr, \quad (2.71)$$

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{D} \lambda w(1), \quad (2.72)$$

$$n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \lambda^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr, \quad (2.73)$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} e_{t-j} \xrightarrow{D} \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \lambda^2 [w(1)]^2 - \gamma_0 \right\} & j = 0 \\ \frac{1}{2} \left\{ \lambda^2 [w(1)]^2 - \gamma_0 \right\} + \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{j-1} & j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.74)$$

em que $\lambda = \sigma \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j = \sigma\psi(1)$, e $\gamma_j = E(\Delta y_t \Delta y_{t-j})$, assim $n(\hat{\phi} - 1)$ é dado pela expressão (2.20), de onde obtemos:

$$\begin{aligned}
n(\hat{\phi} - 1) &\xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left\{ \lambda^2 [w(1)]^2 - \gamma_0 \right\} - \lambda w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\lambda^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\lambda \int_0^1 w(r) dr \right]^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \lambda^2 \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \lambda^2 - \gamma_0 \right\} - \lambda^2 w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\lambda^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\lambda \int_0^1 w(r) dr \right]^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2} + \frac{\frac{1}{2} \{1 - \gamma_0\}}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2}. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão (2.75) é igual á expressão (2.23) que descreve a distribuição assintótica de $n(\hat{\phi}^* - 1)$ quando e_t é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.. O termo final é uma correção para a série correlacionada. Note que se e_t é uma série não correlacionada então $\psi_0 = 1$ e $\psi_j = 0$, para $j = 1, 2, \dots$, Além disso, $\lambda^2 = \sigma^2 [\psi(1)]^2 = 1$ onde tem-se que (2.23) é um caso particular.

É fácil usar $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}$, o estimador de mínimos quadrados do desvio padrão de $\hat{\phi}$, para construir uma estatística amostral que possa ser usada para estimar a correção para a correlação serial. Seja s^2 o estimador de mínimos quadrados da variância de e_t ,

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \left(Y_t - \hat{\theta} - \hat{\phi} Y_{t-1} \right)^2}{n - 2}, \quad (2.76)$$

então a distribuição assintótica de

$$n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2 = \frac{s^2}{n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2} \quad (2.77)$$

pode ser obtida utilizando os resultados do Apêndice A.1. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{n^{-2} \sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2 - \left(n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Y_{t-1} \right)^2} &\xrightarrow{P} \frac{s^2}{\lambda^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left(\lambda \int_0^1 w(r) dr \right)^2} \\
&\xrightarrow{P} \left(\frac{s^2}{\lambda^2} \right) \frac{1}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2}, \quad (2.78)
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
n(\hat{\phi} - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2}{s^2} \right) (\lambda^2 - \gamma_0) &\xrightarrow{P} n(\hat{\phi} - 1) - \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2} \right) (\lambda^2 - \gamma_0) \\
&\xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

A estatística (2.79) tem a mesma distribuição assintótica que as estatísticas para os modelos AR(1) e AR(p) com constante, cujos percentis foram calculados por Dickey e Fuller e são apresentados na Tabela C.1 (Caso 2).

A expressão (2.78) também é usada para encontrar a distribuição assintótica da estatística τ^* , de mínimos quadrados, para testar $\phi = 1$,

$$\tau^* = \frac{(\hat{\phi} - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}} = \frac{n(\hat{\phi} - 1)}{\{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.80}$$

Segue-se que

$$\tau^* \xrightarrow{P} \frac{\left\{ \frac{1}{2} \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int_0^1 w(r) dr + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2}{s^2} \right) (\lambda^2 - \gamma_0) \right\}}{\{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2.81}$$

$$= \frac{\left\{ \frac{1}{2} \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int_0^1 w(r) dr \right\}}{\{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2s^2} (\lambda^2 - \gamma_0) \{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.82}$$

$$= \frac{\left\{ \frac{1}{2} \{ [w(1)]^2 - 1 \} - w(1) \int_0^1 w(r) dr \right\}}{\left(\frac{s^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left(\int_0^1 w(r) dr \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2s^2} (\lambda^2 - \gamma_0) \{n^2 \hat{\sigma}_{\hat{\phi}}^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.83}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\left\{ \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\lambda^2}{s^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2s} (\lambda^2 - \gamma_0) \left\{ \frac{n^2 \hat{\sigma}_\phi^2}{s^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso,

$$s^2 \xrightarrow{P} E[e_t^2] = \gamma_0, \quad (2.84)$$

portanto

$$\left(\frac{\gamma_0}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^* \xrightarrow{P} \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\left\{ \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 - \gamma_0) \left\{ \frac{n^2 \hat{\sigma}_\phi^2}{s^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\left(\frac{\gamma_0}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^* - \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 - \gamma_0) \left\{ \frac{n^2 \hat{\sigma}_\phi^2}{s^2} \right\} \xrightarrow{D} \frac{\frac{1}{2} \left\{ [w(1)]^2 - 1 \right\} - w(1) \int_0^1 w(r) dr}{\left\{ \int_0^1 [w(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 w(r) dr \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.85)$$

que é a mesma distribuição assintótica da estatística τ dada pelas expressões (2.26) e (2.51), utilizada nos modelos AR(1) e AR(p).

As distribuições (2.79) e (2.85) requerem o conhecimento dos parâmetros populacionais γ_0 e λ^2 , que podem ser estimados consistentemente por:

$$\hat{\gamma}_0 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2$$

em que $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\theta} - \hat{\phi}Y_{t-1}$ é o estimador de mínimos quadrados do resíduo. Phillips e Perron (1988) utilizam o estimador

$$s_n^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2}{n-2}.$$

Similarmente, λ^2 é a variância assintótica da média amostral de e_t

$$n^{-\frac{1}{2}} \bar{e} = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{D} N(0, \lambda^2).$$

Sabemos também que

$$\lambda^2 = \sigma^2 [\psi(1)]^2 = \gamma_0 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = 2\pi f(0), \quad (2.86)$$

em que γ_j é a j -ésima auto-covariância de e_t e $f(0)$ é a densidade espectral de e_t na frequência zero.

Sob a suposição de que somente as primeiras q auto-covariâncias são relevantes, podemos utilizar o estimador de Newey-West,

$$\hat{\lambda}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^q \left[\frac{1-j}{q+1} \right] \hat{\gamma}_j \quad (2.87)$$

em que

$$\hat{\gamma}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-j}}{n} \quad (2.88)$$

e $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\theta} - \hat{\phi}Y_{t-1}$.

Em resumo, sob a hipótese nula de que a primeira diferença de Y_t é um processo estacionário de média zero, Phillips e Perron estimaram o modelo (2.69) por mínimos quadrados ordinários e utilizaram a fórmula padrão para calcular $\hat{\phi}$ e seu erro padrão $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}$, junto com o erro padrão da regressão, s . A j -ésima auto-covariância de $\hat{e}_t = Y_t - \hat{\theta} - \hat{\phi}Y_{t-1}$ é então calculada utilizando (2.88). Os estimadores resultantes $\hat{\gamma}_0$ e $\hat{\lambda}^2$ são utilizados em (2.79) para construir uma estatística que tem a mesma distribuição assintótica da estatística τ utilizada para os modelos $AR(1)$ e $AR(p)$. Tabela C.2 (Caso 2).

Capítulo 3

Testes Estatísticos Recursivo, "Rolling" e Seqüencial

3.1 Introdução

Existe uma vasta literatura sobre persistência, em particular se a série é caracterizada como sendo um processo $I(1)$. Uma alternativa ao modelo integrado é que a série seja estacionária em torno de uma tendência determinística, com uma inclinação que se altera em uma determinada fração da amostra; este tipo de comportamento foi sugerido por Perron (1989) e Rappoport e Reichlin (1989), sendo o modelo denominado "stationary/trend-shift model". Evans (1989) e Perron (1990 a) sugerem um modelo que apresenta uma mudança no intercepto, juntamente com uma mudança na inclinação da tendência determinística. Do ponto de vista inferencial é de grande importância evitar que séries estacionárias com quebra na tendência sejam incorretamente classificadas como integradas e vice-versa. Perron (1989,1990a) supôs que o instante (fração) de quebra é conhecido; aqui esta fração será tratada como desconhecida.

A seguir serão apresentadas várias técnicas para resolver esse problema; a idéia é desenvolver uma teoria para uma seqüência (série) de estatísticas, avaliadas sobre um intervalo de possíveis datas de quebras. Essas técnicas permitem analisar a distribuição de funcionais contínuos dessas estatísticas, por exemplo, o máximo de uma seqüência (um para cada possível instante de quebra) de testes de raiz unitária.

Três classes de estatísticas são consideradas:

- i Recursivas: Calculadas utilizando sub-amostras, $t = 1, 2, \dots, k$, $k = k_0, \dots, n$, em que k_0 é um valor inicial e n é o tamanho completo da amostra.
- ii "Móveis": Calculadas utilizando sub-amostras de tamanho $n\tau_0$ (fração constante),

que se movem dentro da amostra completa.

iii Seqüenciais: Calculadas utilizando todos os elementos da amostra, alternando seqüencialmente a data de quebra hipotética.

3.2 Testes Recursivos

O objetivo agora é estudar o comportamento de seqüências de testes t de Dickey-Fuller para testar a presença de raiz unitária.

Suponha que os dados são gerados de acordo com o seguinte modelo:

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \alpha Y_{t-1} + \beta(L)\Delta Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n; \quad (3.1)$$

em que $\beta(L)$ é o polinômio de diferença de ordem p conhecida, com raízes de $(1 - \beta(L))L$ fora do círculo unitário. A hipótese nula é

$$H_0 : \alpha = 1; \quad \mu_1 = 0. \quad (3.2)$$

Os erros satisfazem a seguinte suposição:

Suposição 3.1 ϵ_t é uma seqüência de diferenças martingais satisfazendo

- a) $E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \dots] = \sigma^2$.
- b) $E[|\epsilon_t|^i | \epsilon_{t-1}, \dots] = k_i$ ($i = 3, 4$).
- c) $\text{Sup}_t E[|\epsilon_t|^{4+\gamma} | \epsilon_{t-1}, \dots] = k < +\infty$ para algum $\gamma > 0$.

Quando (3.1) é estimado por mínimos quadrados ordinários (OLS), sem restrição sobre os parâmetros μ_0 , μ_1 ou α , a estatística t para testar $\alpha = 1$ é a estatística padrão de Dickey-Fuller, dada pela expressão (2.65), para testar a presença de raiz unitária contra uma alternativa de tendência estacionária. Nesta seção estendemos este teste para o caso recursivo, isto é, consideramos a série temporal dos estimadores e das estatísticas t calculadas recursivamente. Devido à presença de uma raiz unitária, sob a hipótese nula, é conveniente definir variáveis regressoras Z_t e um vetor θ de parâmetros transformados, de tal forma que (3.1) possa ser reescrito como:

$$Y_t = \theta' Z_{t-1} + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

com

$$Z_t = [Z_t^1, Z_t^2, Z_t^3, Z_t^4] \quad (3.4)$$

em que

$$Z_t^1 = (\Delta Y_{t-1} - \bar{\mu}_0, \dots, \Delta Y_{t-p+1} - \bar{\mu}_0)' \quad (3.5)$$

$$Z_t^2 = 1 \quad (3.6)$$

$$Z_t^3 = (Y_t - \mu_0 t)' \quad (3.7)$$

$$Z_t^4 = (t + 1) \quad (3.8)$$

$$\bar{\mu}_0 = E\Delta Y_t = \frac{\mu_0}{(1 - \beta(1))}. \quad (3.9)$$

e

$$\theta' = (\theta_1', \theta_2, \theta_3, \theta_4)' \quad (3.10)$$

com

$$\theta_1 = (\beta_1, \dots, \beta_p)' \quad (3.11)$$

$$\theta_2 = \mu_0 + (\beta(1) - \alpha) \bar{\mu}_0$$

$$\theta_3 = \alpha$$

$$\theta_4 = \mu_1 + \alpha \bar{\mu}_0.$$

Sob a hipótese nula de que $\alpha = 1$, as variáveis regressoras Z_t transformadas são combinações lineares das regressoras originais em (3.1); a combinação linear é escolhida de forma a isolar as regressoras com propriedades estocásticas diferentes. Especificamente, Z_t^1 são variáveis regressoras estacionárias com média zero e $Y_t - \mu_0 t$ é um processo integrado sem componente determinística.

Como os elementos de θ convergem com diferentes taxas, então para obter distribuições limites não degeneradas define-se a matriz:

$$T_n = \text{diag} \left(n^{\frac{1}{2}} I_p, n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{3}{2}} \right),$$

particionada em concordância com Z_t e θ . Seja Ω_p a matriz de covariâncias de $\Delta Y_t, \dots, \Delta Y_{t-p+1}$, de forma que $E[Z_t^1 Z_t^{1'}] = \Omega_p$. Além disso suponha que as observações Y_s , $s = -p, \dots, 0$ existam de forma que Z_0 seja bem definida.

O estimador de mínimos quadrados recursivo, para o vetor de coeficientes é

$$\hat{\theta}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{[n\tau]} Z_{t-1} Y_t}{\sum_{t=1}^{[n\tau]} Z_{t-1} Z_{t-1}'} \quad 0 < \tau_0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.12)$$

Assim:

$$T_n \left(\hat{\theta}(\tau) - \theta \right) = V_n(\tau)^{-1} \phi_n(\tau) \quad (3.13)$$

em que

$$V_n(\tau) = T_n^{-1} \left(\sum_{t=1}^{[n\tau]} Z_{t-1} Z'_{t-1} \right) T_n^{-1} \quad \text{e} \quad \phi_n(\tau) = T_n^{-1} \sum_{t=1}^{[n\tau]} Z_{t-1} \epsilon_t. \quad (3.14)$$

Existem expressões análogas para calcular recursivamente as estatísticas de Wald e as estatísticas t de Dickey-Fuller para testar a hipótese de que $\alpha = 1$. Suponha que a estatística de Wald teste as q hipóteses $R\theta = r$, onde sem perda de generalidade as hipóteses são organizadas de modo que R seja bloco triangular superior com partição em concordância com θ , ou seja, a primeira restrição envolve coeficientes de Z_t^1 (e talvez Z_t^2, Z_t^3, Z_t^4), a restrição seguinte envolve coeficientes em Z_t^2 (e talvez Z_t^3, Z_t^4) e assim sucessivamente. As estatísticas dos testes de Wald e Dickey-Fuller são:

$$\hat{F}_n(\tau) = \left(R\hat{\theta}(\tau) - r \right)' \left[R \left(\sum_{t=1}^{[n\tau]} Z_{t-1} Z'_{t-1} \right)^{-1} R' \right]^{-1} \frac{\left(R\hat{\theta}(\tau) - r \right)}{q\hat{\sigma}^2(\tau)}, \quad \tau_0 \leq \tau \leq 1 \quad (3.15)$$

e

$$\hat{t}_{DF}(\tau) = \frac{n \left(\hat{\theta}_3(\tau) - 1 \right)}{\left[V_n^{33}(\tau) \hat{\sigma}^2(\tau) \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau_0 \leq \tau \leq 1, \quad (3.16)$$

em que

$$\hat{\sigma}^2(\tau) = ([n\tau] - p - 3)^{-1} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \left(Y_t - \hat{\theta}(\tau)' Z_{t-1} \right)^2, \quad (3.17)$$

e $V_n(\tau)^{ij}$ denota o elemento (i,j) de $V_n(\tau)^{-1}$. Finalmente, define-se R^* (particionado em conformidade com θ) de tal forma que $R_{ii}^* = R_{ii}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, $R_{12}^* = R_{12}$ e $R_{ij}^* = 0$ caso contrário.

Teorema 3.1 *Suponha que Y_t é gerado pelo modelo (3.1) em que $\mu_1 = 0$, $\alpha = 1$ e que a suposição (3.1) esteja satisfeita. Então para $0 < \tau_0 \leq \tau \leq 1$,*

- a) $V_n(\cdot) \rightarrow V(\cdot)$, $\phi_n(\cdot) \rightarrow \phi(\cdot)$ e $T_n(\hat{\theta}(\cdot) - \theta) \rightarrow \hat{\theta}^*(\cdot)$
em que $\hat{\theta}^*(\tau) \equiv V(\tau)^{-1} \phi(\tau)$, $V(\tau)$ e $\phi(\tau)$ são particionadas em conformidade com T_n e,

$$\phi(\tau) = \sigma \left[B(\tau), w(\tau), \frac{1}{2} b\sigma (w(\tau)^2 - \tau), \tau w(\tau) - \int_0^\tau w(\lambda) d\lambda \right]', \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \tau \Omega_p, & V_{1j} &= 0, j = 2, 3, 4, \\
V_{22} &= \tau, & V_{23} &= \sigma b \int_0^\tau w(\lambda) d\lambda, \\
V_{24} &= \frac{1}{2} \tau^2, & V_{33} &= \sigma^2 b^2 \int_0^\tau w(\lambda)^2 d\lambda, \\
V_{34} &= \sigma b \int_0^\tau \lambda w(\lambda) d\lambda, & V_{44} &= \frac{1}{3} \tau^3.
\end{aligned}$$

em que $w(\tau)$ é um movimento Browniano padrão em $[0, 1]$, $B(\tau)$ é um movimento Browniano p -dimensional com matriz de covariância Ω_p , w e B são independentes e $b = (1 - \beta(1))^{-1}$.

b) Suponha que $R\theta = r$, então; $\hat{F}_n(\cdot) \xrightarrow{D} \left[R^* \hat{\theta}^*(\cdot) \right]' \left[R^* V(\cdot)^{-1} R^{*'} \right]^{-1} \frac{R^* \hat{\theta}^*(\cdot)}{q\sigma^2} \equiv \hat{F}^*(\cdot)$.

c) $\hat{t}_{DF}(\cdot) \xrightarrow{D} [\sigma^2 V(\cdot)]^{-\frac{1}{2}} \hat{\theta}_3^*(\cdot) \equiv \hat{t}_{DF}^*(\cdot)$.

No caso em que $\tau = 1$, $V(\cdot)$ é bloco diagonal. Assim as estimações recursivas dos parâmetros de perturbação $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ não afetam a distribuição assintótica da estatística recursiva $\hat{t}_{DF}(\tau)$ de Dickey-Fuller. A característica nova deste resultado é que ele é aplicado uniformemente em τ ; a distribuição marginal para todo τ fixo pode ser obtida utilizando teoria assintótica convencional. Por exemplo, $\hat{t}_{DF}(\tau')$, avaliado em um τ' fixo, $0 < \tau_0 < \tau' \leq 1$, tem a distribuição da estatística \hat{t} , dada pela expressão (2.66), e deduzida por Dickey-Fuller (1979a). Assim, os processos estocásticos limites $\hat{t}_{DF}(\cdot)$ podem ser pensados como um processo de estatísticas t de Dickey-Fuller. Pelo fato de que $V(\cdot)$ é uma matriz bloco diagonal, quando a restrição em R^* envolve só coeficientes de Z'_{t-1} , $\hat{F}(\cdot)$ pode ser pensado como um processo χ_q/q . Além disso, a distribuição da estatística recursiva de Dickey-Fuller pode ser obtida como um caso especial, omitindo t como variável regressora no modelo (3.1). Estas representações assintóticas valem para $0 < \tau_0 < \tau \leq 1$, levando em conta um início com $n\tau_0$ observações.

Ainda que o Teorema (3.1) esteja condicionado ao modelo nulo com $\alpha = 1$ e $\mu_1 = 0$, os resultados são suficientemente gerais para lidar com o caso em que $|\alpha| < 1$, $\mu_1 \neq 0$. Isto pode ser feito redefinindo as variáveis do modelo (3.1). Especificamente, considere a variável do lado esquerdo como sendo ΔY_t , ao invés de Y_t e exclua Y_{t-1} da regressão. Então as regressoras são $(Z^1_{t-1}, 1, t)$, em que Z^1_{t-1} tem média zero e é estacionária. Assim, associando as regressoras $I(0)$ com $\Delta Y_t, \dots, \Delta Y_{t-p+1}$, na notação de (3.1) e omitindo os termos em Y_t na formulação do Teorema (3.1), temos o processo limite para os estimadores recursivos, no caso de um processo autoregressivo estacionário

quando $\mu_1 = 0$. Se $\mu_1 \neq 0$, uma modificação adicional de tal forma que Z_t^1 permaneça estacionária com média zero (subtraindo $\mu_1(t)$ de ΔY_t) resulta no Teorema (3.1), aplicado ao caso de uma regressão envolvendo um processo autoregressivo de ordem p , que é estacionário ao redor de uma tendência no tempo. Com estas modificações, os resultados referentes a $\hat{F}_n(\cdot)$ aplicam-se diretamente.

Uma outra alternativa é calcular as estatísticas recursivas reversas, estimando os parâmetros sobre os dados $t = k + 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, n - \tau_0$. Seja $\hat{\theta}_B(\tau)$ o estimador recursivo reverso, assim

$$T_n \left(\hat{\theta}_B(\cdot) - \theta \right) = V_{n,rr}(\tau)^{-1} \phi_{n,B}(\tau) \quad (3.19)$$

em que

$$V_{n,B}(\tau) = T_n^{-1} \sum_{t=n\tau+1}^n Z_{t-1} Z'_{t-1} T_n^{-1} \quad (3.20)$$

e

$$\phi_{n,B}(\tau) = T_n^{-1} \sum_{\tau n+1}^n Z_{t-1} \epsilon_t, \quad (3.21)$$

$$V_{n,B}(\tau) = V_n(1) - V_n(\tau), \quad (3.22)$$

$$\phi_{n,B}(\tau) = \phi_n(1) - \phi_n(\tau), \quad (3.23)$$

logo

$$T_n(\hat{\theta}_B(\cdot) - \theta) \rightarrow \{V(1) - V(\cdot)\}^{-1} \{\phi(1) - \phi(\cdot)\}, \quad (3.24)$$

$$\hat{F}_{nB}(\tau) \rightarrow \left(R\hat{\theta}_B(\tau) - r \right)' \left[R \left(\sum_{t=1}^{n\tau} Z_{t-1} Z'_{t-1} \right)^{-1} R' \right]^{-1} \frac{\left(R\hat{\theta}_B(\tau) - r \right)}{q\hat{\sigma}^2(\tau)} \quad (3.25)$$

e

$$\hat{t}_{DFB}(\tau) = \frac{n \left(\hat{\theta}_{3B}(\tau) - 1 \right)}{\left[V_{n,B}(\tau)^{33} \hat{\sigma}^2(\tau) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.26)$$

Uma versão alternativa da estatística recursiva reversa é proposta por Leybourne et al (2003). Os valores críticos da estatística são apresentados na Tabela C.3

3.3 Testes Móveis

Na maioria das vezes a análise de dados de séries temporais financeiras usando um modelo estatístico, supõe que os parâmetros são constantes no tempo. Uma técnica comum para verificar a constância dos parâmetros do modelo, é calcular a estimação dos parâmetros sobre uma janela móvel de um tamanho fixo, através de toda a amostra. Se os parâmetros são verdadeiramente constantes sobre toda a amostra, então os estimadores sobre as janelas móveis não devem mudar muito. Se os parâmetros mudam em algum ponto da amostra, então os estimadores móveis poderão capturar esta instabilidade.

No caso da estatística móvel, o modelo (3.1) é estimado por mínimos quadrados ordinários, utilizando a seqüência $t = [n\tau] + 1, \dots, [n\tau] + [n\tau^*]$, com $\tau \in [0, 1 - \tau^*]$, sendo τ^* a largura da janela.

Supondo o modelo (3.1) e sua reparametrização (3.3), a representação assintótica para os estimadores móveis e as estatísticas do teste é obtida como consequência do Teorema (3.1). Devido ao fato que uma fração fixa τ^* da amostra é usada, a variabilidade amostral dos estimadores dos coeficientes móveis é (em média) constante. O estimador móvel $\tilde{\theta}$ é dado por

$$\tilde{\theta}(\tau; \tau^*) = \frac{\sum_{t=[n(\tau-\tau^*)+1]}^{[n\tau]} Z_{t-1} Y_t}{\sum_{t=[n(\tau-\tau^*)+1]}^{[n\tau]} Z_{t-1} Z'_{t-1}}, \quad (3.27)$$

de tal forma que

$$T_n(\tilde{\theta}(\tau; \tau^*) - \theta) = V_n(\tau; \tau^*)^{-1} \phi_n(\tau; \tau^*), \quad (3.28)$$

em que

$$V_n(\tau; \tau^*) = T_n^{-1} \left(\sum_{t=[n(\tau-\tau^*)+1]}^{[n\tau]} Z_{t-1} Z'_{t-1} \right) T_n^{-1} \quad (3.29)$$

$$= V_n(\tau) - V_n(\tau - \tau^*) \quad (3.30)$$

e

$$\phi_n(\tau; \tau^*) = T_n^{-1} \left(\sum_{t=[n(\tau-\tau^*)+1]}^{[n\tau]} Z_{t-1} \epsilon_t \right) = \phi_n(\tau) - \phi_n(\tau - \tau^*). \quad (3.31)$$

Do Teorema (3.1) temos que:

$$V_n(\cdot; \tau^*) \rightarrow V(\cdot; \tau^*), \quad \text{em que} \quad V(\cdot; \tau^*) = V(\tau) - V(\tau - \tau^*) \quad (3.32)$$

e

$$\phi_n(\cdot; \tau^*) \rightarrow \phi(\cdot; \tau^*), \quad \text{em que} \quad \phi(\tau; \tau^*) = \phi(\tau) - \phi(\tau - \tau^*). \quad (3.33)$$

Assim,

$$T_n \left(\tilde{\theta}(\cdot; \tau^*) - \theta \right) \rightarrow \theta^*(\cdot; \tau^*), \quad \text{em que} \quad \theta^*(\tau, \tau^*) = V(\tau; \tau^*)^{-1} \phi(\tau; \tau^*). \quad (3.34)$$

Representações para as estatísticas F e t móveis são obtidas utilizando argumentos análogos:

$$\tilde{F}_n(\tau, \tau^*) = \left(R\tilde{\theta}(\tau, \tau^*) - r \right)' \left[R \left(\sum_{t=1}^{\lfloor n\tau \rfloor} Z_{t-1} Z'_{t-1} \right)^{-1} R' \right]^{-1} \frac{\left(R\tilde{\theta}(\tau, \tau^*) - r \right)}{q\tilde{\sigma}^2(\tau, \tau^*)}$$

e

$$\tilde{t}_{DF}(\tau, \tau^*) = \frac{n \left(\tilde{\theta}_3(\tau, \tau^*) - 1 \right)}{\left[V_n(\tau, \tau^*) \tilde{\sigma}^2(\tau, \tau^*) \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.35)$$

Aproximações dos valores críticos assintóticos para as estatísticas recursivas e móveis são reportados na Tabela C.3, em que n representa o número de observações usadas na regressão. Os valores críticos foram calculados usando realizações discretas artificiais do movimento Browniano, para aproximar as funções limites que aparecem no teorema (3.1).

3.4 Testes Seqüenciais

Agora analisaremos as estatísticas seqüenciais utilizando a amostra completa. Considere o seguinte modelo:

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 \varsigma_{1t}(k) + \mu_2 t + \alpha Y_{t-1} + \beta(L) \Delta Y_{t-1} + \omega' X_{t-1}(k) + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.36)$$

em que $\beta(L)$ é o polinômio de diferenças de ordem conhecida p . Diferentemente do modelo (3.1), o modelo (3.36) permite adicionar um vetor m -dimensional de variáveis regressoras, $X_{t-1}(k)$, assumidas estacionárias com média zero. Da mesma forma que na seção 3.2, transformamos as variáveis regressoras para

$$Z_t = \left[Z_t', 1, (Y_t - \bar{\mu}_0 t), \varsigma_{1t+1}(k), t + 1 \right]' \quad (3.37)$$

em que

$$Z_t^1 = \left(\Delta Y_t - \bar{\mu}_0, \dots, \Delta Y_{t-p+1} - \bar{\mu}_0, X_t'(k) \right)', \quad \bar{\mu}_0 = E \Delta Y_t, \quad (3.38)$$

$$\theta = [\theta_1', \theta_2, \dots, \theta_5] \text{ com } \theta_1 = [\beta', \omega']', \theta_2 = \mu_0 + (\beta(1) - \alpha) \bar{\mu}_0, \theta_3 = \alpha, \theta_4 = \mu_1 \text{ e } \theta_5 = \mu_2 + \alpha \bar{\mu}_0$$

A variável regressora determinística $\varsigma_{1t}(k)$ captura a possibilidade de uma mudança ou salto na tendência no k -ésimo instante.

Perron (1989,1990) considera dois casos:

$$\text{Caso A} \quad (\text{mudança na tendência}): \quad \varsigma_{1t}(k) = (t - k) 1(t > k) \quad (3.39)$$

$$\text{Caso B} \quad (\text{mudança na média}): \quad \varsigma_{1t}(k) = 1(t > k) \quad (3.40)$$

em que $1(\cdot)$ é a função indicadora e $k = k_0, k_0 + 1, \dots, n - k_0$.

Para o caso A a estatística t do teste $\mu_1 = 0$ fornece informação sobre a existência de uma mudança na inclinação da tendência. Para o caso B, a mesma estatística fornece informação sobre a existência de um salto ou quebra na tendência.

As hipóteses a ser testadas são:

$$H_0 : \quad \mu_1 = \mu_2 = 0, \alpha = 1 \quad (\text{existência de raiz unitária sem tendência}) \quad (3.41)$$

$$H_1 : \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{modelo estacionário com uma tendência determinística}) \quad (3.42)$$

Seja ω_0 o valor de ω sob a hipótese nula. Assume-se que os termos X_t relacionados com k não entram na hipótese nula. As perturbações e $\{X_t(k)\}$ satisfazem a seguinte suposição:

Suposição 3.2 *Seja $M_t(k)$ a sigma álgebra gerada por $\{\epsilon_t, X_t(k), \epsilon_{t-1}, X_{t-1}(k), \dots\}$.*

Então:

$$a) \quad E[\epsilon_t | M_{t-1}] = 0, \quad E[\epsilon_t^2 | M_{t-1}] = \sigma^2, \quad E[|\epsilon_t|^i | M_{t-1}] = k_i, \quad (i = 3, 4) \\ E[|\epsilon_t|^{4+\gamma} | M_{t-1}] \leq \bar{k} < \infty \text{ para algum } \gamma > 0 \text{ uniformemente em } k.$$

$$b) \quad \{X_t[n\tau]\} \text{ é tal que } E[X_t([n\tau])] = 0, \text{ para todo } t.$$

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^1([n\tau]) Z_{t-1}^1([n\tau])' \xrightarrow{P} \Sigma(\tau).$$

$$\begin{aligned}
n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^1 ([n\tau]) \epsilon_t &\rightarrow \sigma G(\tau). \\
n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}^1 ([n\tau]) Y_t &\rightarrow 0. \\
\left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \epsilon, n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \omega'_0 X_t([n\tau]) \right) &\rightarrow (\sigma w(\tau), \pi H(\tau))
\end{aligned}$$

uniformemente em τ , em que w e H são movimentos Brownianos padrão uni-dimensionais; w e H não são necessariamente independentes, $\Sigma(\cdot)$ é uma matriz não aleatória, positiva semidefinida, assumindo valores em $[0, 1]$; $G(\cdot)$ é um processo estocástico $(p + m)$ dimensional de quadrado somável em $D[0, 1]$ e π é uma constante.

Neste caso a Suposição 3.2 é satisfeita quando $\alpha = 1$, $(1 - B(L))L$ tem todas as raízes fora do círculo unitário e $\{X_{t-1}(k)\}$ é omitido. Assim Z_{t-1}^1 consiste de $\Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-p}$ e o modelo (3.36) introduz uma quebra, na tendência determinística, na regressão (3.1) de Dickey-Fuller. Na notação da Suposição 3.2, $\Sigma(\tau) = \Omega_p$ e $G(\tau) = B(1)$, em que $B(\cdot)$ é um movimento Browniano $p \times 1$ com matriz de covariâncias Ω_p , independente de (w, H) .

A expressão (3.36) generaliza esse último caso incluindo variáveis regressoras estacionárias com média zero e certas regressoras que dependem de k . Por exemplo escolhendo

$$X_t(k) = [(\Delta Y_t - \bar{\mu}_0) 1(t > k), \dots, (\Delta Y_{t-p+1} - \bar{\mu}_0) 1(t > k)]', \quad (3.43)$$

(que satisfaz a suposição (3.2)), permitindo testar se os coeficientes em $\Delta Y_{t-1}, \dots, \Delta Y_{t-p}$, no modelo (3.36), são constantes, contra a alternativa de que ocorra ao menos uma mudança em uma data conhecida. Neste caso $G(\tau) = [B(1)', (B(1) - B(\tau))']'$ em que $B(\cdot)$ é um movimento Browniano de ordem $p \times 1$, com covariância Ω_p . Além disso, $\Sigma(\tau)$ é $2p \times 2p$, com blocos $\Sigma(\tau)_{11} = \Omega_p$ e $\Sigma(\tau)_{12} = \Sigma(\tau)_{21} = \Sigma(\tau)_{22} = (1 - \tau)\Omega_p$. Sob a hipótese nula, assumimos que $E[X_t] = 0$, sem perda de generalidade, desde que se inclua uma constante na regressão.

Os estimadores e as estatísticas dos testes são calculados utilizando o número completo de observações n para $k = k_0, k_0 + 1, \dots, n - k_0$, em que $k_0 = [n\tau^*]$. Como é usual, sejam R e r com dimensões $q \times (m + p + 4)$ e $q \times 1$, respectivamente, matrizes de restrições lineares sobre θ . Os processos estocásticos construídos utilizando os estimadores seqüenciais das estatísticas dos testes de Wald para $\tau^* \leq \tau \leq 1 - \tau^*$, são

dados por:

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}([n\tau]) Y_t}{\sum_{t=1}^n Z_{t-1}([n\tau]) Z_{t-1}([n\tau])'}, \quad (3.44)$$

$$T_n (\bar{\theta}(\tau) - \theta) = \Gamma_n(\tau)^{-1} \psi_n(\tau) \quad e$$

$$\bar{F}(\tau) = [R\bar{\theta}(\tau) - r]' \times \left[R \left(\sum_{t=1}^n Z_{t-1}([n\tau]) Z_{t-1}([n\tau])' \right)^{-1} R' \right]^{-1} \times \frac{[R\bar{\theta}(\tau) - r]}{q\hat{\sigma}^2(\tau)}$$

em que

$$\bar{\sigma}^2(\tau) = (n - p - m - 4)^{-1} \sum_{t=1}^n \left(Y_t - \bar{\theta}(\tau)' Z_{t-1}([n\tau]) \right)^2 \quad (3.45)$$

$$\Gamma_n(\tau) = T_n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}([n\tau]) Z_{t-1}([n\tau])' T_n^{-1} \quad (3.46)$$

e

$$\psi_n(\tau) = T_n^{-1} \sum_{t=1}^n Z_{t-1}([n\tau]) \epsilon_t. \quad (3.47)$$

Aqui $T_n = T_{An}$ no Caso A e $T_n = T_{Bn}$ no caso B, em que $T_{An} = \text{diag} \left(n^{\frac{1}{2}} I_{p+m}, n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{3}{2}}, n^{\frac{3}{2}} \right)$ e $T_{Bn} = \text{diag} \left(n^{\frac{1}{2}} I_{p+m}, n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{3}{2}} \right)$. O teorema seguinte fornece uma representação assintótica para os coeficientes seqüenciais padronizados.

Teorema 3.2 *Suponha que Y_t é gerado de acordo com o modelo (3.36) com $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\alpha = 1$ e que a Suposição 3.2 é satisfeita. Então:*

a) *No caso A, (expressão (3.39)), $T_{An} (\bar{\theta}(\cdot) - \theta) \rightarrow \Gamma(\cdot)^{-1} \Psi(\cdot)$, em que*

$$\Psi(\tau) = \sigma \left[G(\tau)', w(1), \int_0^1 J(\lambda) dw(\lambda), (1 - \tau)w(1) - \int_\tau^1 w(\lambda) d\lambda, w(1) - \int_0^1 w(\lambda) d\lambda \right]'$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Sigma(\tau), & \Gamma_{1j} &= 0 \quad j = 2, \dots, 5, \\ \Gamma_{22} &= 1, & \Gamma_{23} &= \int_0^1 J(\lambda) d\lambda, \\ \Gamma_{24} &= \frac{1}{2}(1 - \tau)^2, & \Gamma_{25} &= \frac{1}{2}, \\ \Gamma_{33} &= \int_0^1 J(\lambda)^2 d\lambda, & \Gamma_{34} &= \int_\tau^1 (\lambda - \tau) J(\lambda) d\lambda, \\ \Gamma_{35} &= \int_0^1 \lambda J(\lambda) d\lambda, & \Gamma_{44} &= \frac{(1-\tau)^3}{3}, \\ \Gamma_{45} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\tau + \frac{\tau^3}{6}, & \Gamma_{55} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Além disso, $w(\tau)$ é um movimento Browniano, $b = (1 - \beta(1))^{-1}$ e $J(\lambda) = b\pi H(\lambda) + \sigma b w(\lambda)$.

b) No Caso B, $T_{Bn}(\bar{\theta}(\cdot) - \theta) \rightarrow \Gamma(\cdot)^{-1}$,

em que Ψ é como em (a), exceto que $\Psi_4(\tau) = \sigma[w(1) - w(\tau)]$ e Γ é como em (a) exceto que $\Gamma_{24} = 1 - \tau$, $\Gamma_{34} = \int_{\tau}^1 J(\lambda)d\lambda$, $\Gamma_{44} = 1 - \tau$ e $\Gamma_{45} = \frac{1}{2}(1 - \tau^2)$. w , J e b também são definidos em (a).

Quando $X_{t-1}(k)$ não aparece como variável regressora e τ é fixado, temos o modelo apresentado por Perron (1989). O Teorema 3.2 generaliza esses resultados para o caso em que o estimador e a estatística do teste são elementos aleatórios de $D[0, 1]$, indexados por τ . Além disso, Perron considera o caso em que a parte auto-regressiva é de ordem desconhecida (possivelmente infinita), enquanto aqui p é assumido conhecido e finito.

Os resultados do Teorema 3.2 valem para $0 < \tau^* \leq \tau \leq (1 - \tau^*) < 1$. Assim, o teste para a mudança nos coeficientes tem a restrição de não ocorrer nos extremos da amostra. Na prática, isto requer escolher um valor inicial $k_0 = [n\tau^*]$.

Uma estatística seqüencial relacionada é a estatística razão de verossimilhanças de Quant (1960), que testa a existência de uma quebra em alguns ou em todos os coeficientes. Isto envolve a estimação de $2(n - 2k_0)$ regressões, da forma (3.1), em subamostras $1, 2, \dots, [n\tau^*]$ e $[n\tau^*] + 1, \dots, n$. A estatística de razão de verossimilhança é calculada para cada possível ponto de quebra, e a estatística de razão de verossimilhanças de Quant (Q_{LR}), é o máximo dessas estatísticas, isto é

$$Q_{LR} = \max_{k_0 \leq k \leq n - k_0} (2 \ln \tilde{\lambda}(k)) \quad (3.48)$$

em que

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{\tilde{\sigma}_{1,k}^k \tilde{\sigma}_{k+1,n}^{n-k}}{\tilde{\sigma}_{1,n}^n} \quad (3.49)$$

em que $\tilde{\sigma}_{t_1, t_2}^2$ é o estimador de máxima verossimilhança gaussiano do erro na regressão sobre as observações t_1, \dots, t_2 . Ainda que Q_{LR} seja baseado na amostra completa ou seja, sendo um estatística seqüencial, a distribuição assintótica é obtida utilizando os resultados anteriores. Cálculos baseados no Teorema 3.1 (fornecidos por Banerjee et al 1990) mostram que, para o modelo (3.1), sob a hipótese nula (3.2) sem quebras, temos que

$$-2 \ln (\tilde{\lambda}[n, \cdot]) \rightarrow 2 \ln \tilde{\lambda}^*(\cdot) \quad (3.50)$$

em que

$$\begin{aligned}
-2\ln\tilde{\lambda}^*(\tau) &= \sigma^{-2}\phi(\tau)' \left\{ v(\tau)^{-1} + (v(1) - v(\tau))^{-1} \right\} \phi(\tau) \\
&\quad - \sigma^{-2}\phi(1)' \left\{ v(1)^{-1} - (v(1) - v(\tau))^{-1} \right\} \phi(1) \\
&\quad - 2\sigma^{-2}\phi(\tau)' \{v(1) - v(\tau)\}^{-1} \phi(1)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

em que $\phi(1)$ e $V(\cdot)$ são definidos no Teorema 3.1, pelo teorema de mapeamento contínuo dado no Apêndice A, temos

$$Q_{LR} \text{Sup}_{\tau^* \leq \tau \leq 1-\tau^*} \left(-2\ln\tilde{\lambda}^*(\tau) \right). \tag{3.52}$$

Devido ao fato de que Q_{LR} é apropriado para testar quebra em qualquer coeficiente, sua distribuição depende de p .

Este resultado se adapta ou correspondente de Chu's (1989) para a estatística QL em que somente são incluídas p variáveis regressoras estacionárias e uma constante; então

$$Q_{LR} \rightarrow \sup_{\tau^* \leq \tau \leq 1-\tau^*} \left\{ w_{p+1}^*(\tau)w_{p+1}^*(\tau) / (\tau(1-\tau)) \right\} \tag{3.53}$$

em que w_{p+1}^* é uma ponte Browniana padrão de dimensão $p+1$.

Aproximações dos valores críticos para as estatísticas sequenciais são apresentados na Tabela C.4.

3.5 Resultados das Simulações Monte-Carlo

Nesta seção apresentamos os valores críticos assintóticos, o tamanho e poder das estatísticas recursivas, móveis e seqüenciais apresentados por Banerjee, Lumsdaine e Stock (1990). Todas as regressões incluem $(1, t)$ para permitir uma possível tendência no tempo, sob a hipótese alternativa, exceto $\tilde{t}_{\zeta 1t}(\cdot)$ no modelo restrito (3.36) ($\alpha = 1, \mu_2 = 0$), em que t é excluído.

As primeiras estatísticas são: teste recursivo de Dickey-Fuller para raiz unitária \hat{t}_{DF} , a estatística maximal de Dickey-Fuller,

$$\hat{t}_{DF}^{max} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq n} \hat{t}_{DF}(k/n), \tag{3.54}$$

a estatística mínima de Dickey-Fuller,

$$\hat{t}_{DF}^{min} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq n} \hat{t}_{DF}(k/n) \tag{3.55}$$

Em todos os casos $\hat{t}_{DF}(k/n)$ é calculada usando (6.40).

O segundo conjunto de estatísticas é constituído pelas estatísticas móveis de Dickey-Fuller,

$$\tilde{t}_{DF}^{max} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq n} \tilde{t}_{DF}(k/n; \tau^*) \quad (3.56)$$

$$\tilde{t}_{DF}^{min} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq n} \tilde{t}_{DF}(k/n; \tau^*) \quad (3.57)$$

em que $\tilde{t}_{DF}(k/n, \tau^*)$ é a estatística t de raiz unitária de Dickey-Fuller testando $\alpha = 1$ na regressão (3.1), estimada sobre $t = k - [n\tau^*] + 1, \dots, k$.

O último conjunto é de estatísticas seqüenciais, a estatística LR de Quandt, (Q_{LRP}), sendo o número de defasagens de ΔY_t , na regressão; o máximo da seqüência de estatísticas F,

$$\bar{F}_n^{max} \equiv \max_{k_0 \leq k \leq n-k_0} \bar{F}_n(k/n) \quad (3.58)$$

testando a hipótese que $\mu_1 = 0$ em (3.36); a estatística seqüencial de Dickey-Fuller avaliada no valor k (\bar{k} equivalente a $\bar{\tau} = \bar{k}/n$) que maximiza $\bar{F}(k/n)$, $\bar{t}_{DF}(\bar{\tau})$;

$$\bar{t}_{DF}^{min*} \equiv \min_{k_0 \leq k \leq n-k_0} \bar{t}_{DF}(k/n) \quad (3.59)$$

a estatística minimal sobre toda a seqüência calculada das estatísticas de Dickey-Fuller.

Christiano (1988) propôs \bar{F}_n^{max} , $\bar{t}_{DF}(\bar{\tau})$ e \bar{t}_{DF}^{min*} para estender a análise de Perron, para o caso em que k é desconhecido. Valores críticos assintóticos para as estatísticas seqüenciais são apresentados para a mudança na tendência e mudança na média da regressão (3.36).

Os parâmetros utilizados são:

- i) para as estatísticas recursivas e estatística Q_{LR} , $\tau^* = 0, 25$;
- ii) para as estatísticas móveis, $\tau^* = 1/3$;
- iii) Para as estatísticas seqüenciais, $\tau^* = 0, 15$.

A seleção de τ^* requer uma escolha entre a necessidade de observações suficientes na regressão recortada, para suportar a aproximação gaussiana, e falha na captura de possíveis quebras no começo e no final da amostra. A escolha dos valores τ^* é representativa dos testes usados na prática. O número de réplicas são 10000 para $n=100$ e

$n=250$, para $n=500$ são 5000 réplicas.

Aproximações dos valores críticos assintóticos para os testes recursivos, móveis e seqüenciais são reportados nas Tabelas C.3 e C.4. Aqui n representa o número de observações usadas na regressão. Os valores críticos foram calculados usando realizações discretas artificiais do movimento Browniano para aproximar as várias funções limites que aparecem nos Teoremas (3.1) e (3.2). Isto é equivalente a executar uma simulação Monte-Carlo para o modelo nulo $\Delta Y_t = \epsilon_t$, com $\epsilon_t \sim IIDN(0, 1)$. Os valores críticos para as estatísticas recursivas \hat{t}_{DF}^{min} e móveis \tilde{t}_{DF}^{min} foram menores que os valores críticos das estatísticas t_{DF} para a amostra completa. Os maiores valores críticos da estatística seqüencial \bar{F}_n^{max} são comparáveis com os encontrados por Christiano (1988). Comparações dos diferentes percentis para diferentes valores de n , indicam convergência rápida para o limite assintótico, assim para $n = 500$ os valores podem ser tratados como aproximações assintóticas dos valores críticos.

Tamanho e poder nominal para as estatísticas recursivas, móveis e seqüenciais de quebra na tendência são resumidos na Tabela 3 de BLS (Banerjee, Lumsdaine et Stock 1992) para $n = 100$. Os testes foram calculados utilizando regressões com $p = 4$, e os valores críticos das Tabelas C.3 e C.4. A parte A da Tabela C.5 apresenta o tamanho quando o modelo é $AR(1)$ gaussiano. Com a exceção da estatística móvel \tilde{t}_{DF}^{max} todas as estatísticas têm tamanho perto de seus níveis.

Para as estatísticas de raiz unitária seqüencial de quebra na média \tilde{t}_{DF}^{min*} , o tamanho fica próximo do nível fixado, 8,2% e 8,8% para um nível de significância de 10%, com $\beta = 0.4$ e 0.6, respectivamente.

A parte B da Tabela C.5 apresenta o poder contra a alternativa de que a raiz é maior que 1 na primeira metade da amostra e menor que 1 na outra metade. As estatísticas \hat{t}_{DF}^{min} e Q_{LR} tipicamente tem melhor poder contra a alternativa $\alpha_1 < 1, \alpha_2 = 1$. A estatística móvel tem menor poder contra a alternativa $\alpha_1 < 1$ que a estatística recursiva. Q_{LR} tem um melhor desempenho contra ambos conjuntos de alternativas.

A estatística de Dickey-Fuller para a amostra completa falha para rejeitar a hipótese nula de raiz unitária contra a alternativa de mudança na tendência, como os testes t_{DF} maximal recursivo e móvel.

Perron (1989, 1990a.) conclue que a mudança permanente na tendência determinística é confundida por uma inovação persistente para uma tendência estocástica. A seqüência de estatísticas \hat{F}_n^{max} (testando o coeficiente de tendência) tem alto poder contra esta alternativa, particularmente para quebras no final da amostra; Q_{LR} tem poder baixo, porque ele testa uma quebra em todos os coeficientes. As \tilde{t}_{DF}^{min*} e $\tilde{t}_{DF}(\tilde{\tau})$ tem desempenho idêntico.

Finalmente o ponto de quebra é estimado de forma bastante adequada: Uma grande fração dos dados de quebra estimados \tilde{k} caem dentro do intervalo $\pm 0,05n$ em torno do verdadeiro ponto de quebra.

Embora as estatísticas façam a data de quebra dependente dos dados, elas ainda requerem a escolha de p , que é raramente conhecida na prática. O tamanho e poder foram calculados e reportados para $p = 8$.

Os resultados apresentados em BLS (Banerjee, Lumsdaine et Stock 1992) sugerem várias conclusões:

- i) A estatística móvel tem a vantagem da habilidade para detectar a existência de múltiplas quebras, isto está associado com a redução de poder contra uma alternativa de quebra única. Mais geralmente, uma vez que valores críticos uniformes são usados, as estatísticas extremas recursiva e móvel têm poder razoavelmente baixo.
- ii) Aqui é particularmente importante não interpretar a não rejeição, por estas estatísticas, como aceitação da hipótese nula. Estes resultados também sugerem que a estatística Q_{LR} pode ser poderosa e confiável no diagnóstico; adicionalmente o teste seqüencial de quebra na tendência tem alto poder contra a alternativa que é designada para detectar.

Capítulo 4

Detecção de Mudança na Persistência

4.1 Introdução

Para verificar se existe mudança na persistência, iremos apresentar dois tipos de testes:

1. Os testes propostos por Bussetti and Taylor (2004) que são da forma:
 H_0 : a série é gerada por um processo $I(0)$
 H_1 : existe uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ ou de $I(1)$ para $I(0)$.
2. Os testes propostos por Leybourne et al (2003) são da forma:
 H_0 : a série é gerada por um processo $I(1)$
 H_1 : existe uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ ou de $I(1)$ para $I(0)$.

4.2 Teste para Estacionariedade contra Mudança na Persistência

Quando se assume que a fração de quebra (ponto de mudança) é conhecida, o teste invariante localmente ótimo (OLI) é deduzido sob a suposição de normalidade. Quando esta fração de quebra é desconhecida, três testes são construídos como funções do teste OLI, analisados sob todos os possíveis pontos de quebra.

4.2.1 Mudança de $I(0)$ para $I(1)$

Considere o modelo

$$Y_t = d_t + u_t + \epsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

em que

$$u_t = \begin{cases} u_{t-1} & t = 1, 2, \dots, [\tau^*n], \\ u_{t-1} + \eta_t & t = [\tau^*n] + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.2)$$

com ϵ_t e η_t processos gaussianos i.i.d. com média zero e variâncias σ^2 e σ_η^2 , respectivamente. O modelo permite quebras estruturais no nível; em particular neste, a quebra ocorre no tempo $t = [\tau^*n] + 1$. Daqui em diante usaremos τ^*n em lugar de $[\tau^*n]$, com $0 < \tau^* < 1$. Denominaremos τ^* como fração de quebra. Embora a suposição de normalidade esteja sendo assumida os resultados também valem se $\{\epsilon_t, \eta_t\}$ forem diferenças martingais.

Nesta seção, também assumiremos que a componente determinística $d_t \equiv \beta_0$ (constante) e que o teste para a hipótese de estacionariedade contra a mudança na persistência, dado no contexto de (4.1) e (4.2), pode ser formulado como:

$$H_0 : \sigma_\eta^2 = 0, \quad (4.3)$$

$$H_1 : \sigma_\eta^2 > 0, \quad (4.4)$$

ou, de acordo com Tanaka (1996) e Stock (1994), podemos utilizar como hipótese alternativa

$$H_c : \sigma_\eta^2 = c^2/n^2, \quad c \geq 0. \quad (4.5)$$

Assim sob a hipótese nula, u_t permanece constante e igual a zero e ϵ_t é um processo estacionário, logo Y_t é um processo estacionário ($I(0)$) em toda sua extensão. Sob a hipótese alternativa, Y_t é um processo estacionário até o tempo $t = \tau^*n$ e depois é um processo $I(1)$.

4.2.1.1 Testes Razão.

BT e Kim et al (2002) propuseram, independentemente, o teste razão mencionado a seguir:

$$\mathcal{KM}(\tau) = \frac{[(1-\tau)n]^{-2} \sum_{t=[\tau n]+1}^n \left(\sum_{i=[\tau n]+1}^t \hat{\epsilon}_{1,i} \right)^2}{[\tau n]^{-2} \sum_{t=1}^{[\tau n]} \left(\sum_{i=1}^t \hat{\epsilon}_{0,i} \right)^2}. \quad (4.6)$$

em que $\hat{\epsilon}_{0,t}$, são resíduos de MQ da regressão de Y_t sobre um intercepto, $t = 1, 2, \dots, \tau n$ e $\hat{\epsilon}_{1,t}$ os resíduos de MQ da regressão de Y_t sobre um intercepto, $t = \tau n + 1, \dots, n$.

Quando a fração de quebra τ^* é conhecida, a estatística $\mathcal{KM}(\cdot)$ é calculada em $\tau = \tau^*$; quando τ^* é desconhecido calcula-se a estatística \mathcal{KM} para cada valor $\tau \in \mathcal{T}$, em que \mathcal{T} é um sub-intervalo compacto de $[0, 1]$, escolhendo uma função adequada da seqüência de estatísticas resultantes. Alguns autores estudaram as seguintes funções:

i) Andrews (1993).

$$H_1(\mathcal{KM}(\cdot)) = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \mathcal{KM}(\tau). \quad (4.7)$$

ii) Hansen's (1991)

$$H_2(\mathcal{KM}(\cdot)) = \int_{\tau \in \mathcal{T}} \mathcal{KM}(\tau) d\tau, \quad (4.8)$$

denominado teste "score mean".

iii) Andrews e Ploberger (1994)

$$H_3(\mathcal{KM}(\cdot)) = \log \left\{ \int_{\tau \in \mathcal{T}} \exp \left[\frac{1}{2} \mathcal{KM}(\tau) \right] d\tau \right\}, \quad (4.9)$$

denominado teste "mean exponencial".

em todos os casos, H_0 é rejeitada para valores grandes das estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))$, para $j = 1, 2, 3$.

Apresentaremos agora as distribuições limites dessas estatísticas, sob H_c (expressão 4.5).

Teorema 4.1 *Suponha que Y_t é gerado por (4.1) e (4.2) e sob H_c de (4.5). Então, para $0 < \tau < 1$*

$$i) \mathcal{KM}(\tau) \Rightarrow \frac{(1-\tau)^{-2} \int_{\tau}^1 [V_1^{**}(r)]^2 dr}{\tau^{-2} \int_0^{\tau} [V_1^{***}]^2 dr} \equiv \mathcal{KM}_{\infty} \text{ e}$$

$$ii) H_j(\mathcal{KM}(\tau)) \Rightarrow H_j(\mathcal{KM}_{\infty}),$$

em que

$$V_1^{**}(r) \equiv V_1(r) - V_1(\tau) - (r - \tau)(1 - \tau)^{-1} (V_1(1) - V_1(\tau)),$$

$$V_1^{***}(r) \equiv V_1(r) - r\tau^{-1}V_1(\tau),$$

$$V_1(r) \equiv W_0(r) + c \int_{\tau^*}^r W_c^*(s) ds,$$

$$W_c^*(s) = W_c(s) - W_c(\tau^*),$$

$H_j(\cdot)$ é a estatística em cada um dos procedimentos de (4.7)-(4.9), $W_c(\cdot)$ e $W_0(r)$ são movimentos Brownianos independentes. Além disso o símbolo \Rightarrow indica convergência

em distribuição.

Os resultados do Teorema 4.1 também valem para $\tau^* = 0$, implicando no processo constante $I(1)$.

Teorema 4.2 *Considere o processo gerador de Y_t dado por:*

$$Y_t = d_t + Z_{t,1}, \quad t = 1, 2, \dots, \tau^*n, \quad (4.10)$$

$$Y_t = d_t + Z_{t,0}, \quad t = \tau^*n + 1, \dots, n, \quad (4.11)$$

em que $\tau^* \in (0, 1)$, $Z_{t,0} = Z_{t-1,0} + u_t$, $Z_{t,1}$ e u_t são processos estacionários que satisfazem as seguintes condições:

- i) $E[Z_t] = 0$,
- ii) $E[|Z_t|^{\gamma+\epsilon}] < \infty$ para algum $\gamma > 0$,
- iii) $\{Z_t\}_0^\infty$ é ρ -mixing com coeficiente mixing ρ_m tal que $\sum_{m=1}^\infty \rho_m^{1-\frac{2}{\gamma}} < \infty$,
- iv) a variância de longo termo $\sigma_Z^2 = \sum_{j=0}^\infty E[Z_{j+1}Z_1']$ existe,
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{s_n} Z_t \right) = s\sigma_s^2$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=s_n+1}^n Z_t \right) = (1-s)\sigma_s^2$ para cada $s \in (0, 1)$.

Então $\mathcal{KM}(\tau)$, $0 < \tau \leq \tau^*$, é de ordem $O_p(n^2)$, e para $\tau^* < \tau \leq 1$, $\mathcal{KM}(\tau)$ é de ordem $O_p(1)$. Consequentemente, se a intersecção dos intervalos $[0, \tau^*]$ e \mathcal{T} não é vazia então $H_j(\mathcal{KM}(\tau))$, $j = 1, 2, 3$ são todos de ordem $O_p(n^2)$; caso contrário a ordem de convergência é $O_p(1)$

Quando τ^* é desconhecido, as estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\tau))$, $j = 1, 2, 3$ não produzem inferências consistentes se a intersecção dos intervalos $[0, \tau^*]$ e \mathcal{T} é vazia. Busseti and Taylor (2004) e Kim et al (2002) propõem independentemente $\hat{\tau}_M = \text{argmax}_{\tau \in \mathcal{T}} \Lambda_M(\tau)$ como um estimador do ponto de quebra τ^* , no contexto de (4.10) e (4.11), em que

$$\Lambda_M(\tau) = \frac{[(1-\tau)n]^{-2} \sum_{t=[\tau n]+1}^n \hat{\epsilon}_{1,t}^2}{[\tau n]^{-2} \sum_{t=1}^{[\tau n]} \hat{\epsilon}_{0,t}^2}. \quad (4.12)$$

Este estimador é n-consistente para τ^* , dado que $\tau^* \in \mathcal{T}$.

4.2.1.2 Teste Invariante Localmente Ótimo (ILO)

Considere o processo gerado por (4.1) e (4.2), quando τ^* é conhecido. Segundo King e Hiller (1985) o teste invariante localmente ótimo de H_0 contra H_1 é definido pela região crítica

$$\mathcal{L}_1(\tau^*) = \hat{\sigma}^{-2} (n - [\tau^*n])^{-2} \hat{\epsilon}' A(\tau^*) \hat{\epsilon} > l, \quad (4.13)$$

em que $\hat{\epsilon} \equiv (\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_n)'$, $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{\epsilon}_t^2$ e l é uma constante positiva, $A(\tau^*)$ em (4.13) é a matriz de covariâncias de $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$ que tem como elementos (i, j) o $\min\{i - [\tau^*n], j - [\tau^*n]\}$, $i, j = [\tau^*n] + 1, \dots, n$ e todos os outros elementos iguais a zero. Além disso, (4.13) pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_1(\tau^*) = \hat{\sigma}^{-2} (n - [\tau^*n])^{-2} \sum_{t=[\tau^*n]+1}^n \left(\sum_{j=t}^n \hat{\epsilon}_j \right)^2. \quad (4.14)$$

Note que $\mathcal{L}_1(0)$ é precisamente o teste de estacionariedade proposto por Nyblorne and Mäkeläinen (1983),

$$\mathcal{NM} = \hat{\sigma}^{-2} n^{-2} \sum_{t=1}^n \left(\sum_{j=1}^t \hat{\epsilon}_j \right)^2. \quad (4.15)$$

Quando τ^* é desconhecido não há nenhum teste ILO de H_0 contra H_1 . Aqui nós consideramos outra vez as funções H_j , $j = 1, 2, 3$ de (4.7)-(4.9) aplicado na seqüência $\{\mathcal{L}_1(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$.

Agora apresentamos as distribuições limites das estatísticas anteriores sob H_c (expressão (4.5)) e verificamos que elas são $O_p(n)$, sob uma alternativa fixada.

Teorema 4.3 *Seja Y_t gerado por (4.1) e (4.2), então para $0 \leq \tau < 1$.*

$$\mathcal{L}_1(\cdot) \Rightarrow \xi_1(\cdot), \quad (4.16)$$

$$H_j(\mathcal{L}_1(\cdot)) \Rightarrow H_j(\xi_1(\cdot)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

em que $\xi_1(\tau) = (1 - \tau)^{-2} \int_{\tau}^1 [V_1(r) - rV_1(1)]^2 dr$, com $V_1(r)$ definido como no Teorema (4.1). Valores críticos assintóticos relevantes são dados na Tabela C.6.

Teorema 4.4 *Se Y_t é gerado por (4.10) e (4.11), então $\mathcal{L}_1(\tau)$ com $0 \leq \tau < 1$ e $H_j(\mathcal{L}_1(\cdot))$ para $j = 1, 2, 3$ são de ordem $O_p(n)$. Estes resultados valem para $\tau^* = 0$ em (4.10) e (4.11).*

Quando τ^* é conhecido, o teste \mathcal{NM} de (4.15) não faz uso de nenhuma informação que se encontra antes da fração de quebra. Conseqüentemente, parece vantajoso aplicar a estatística \mathcal{NM} somente nas últimas $n - [\tau^*n]$ observações, ou seja

$$\mathcal{NM}(\tau^*, 1) = \hat{\sigma}_1^{-2}(n - (\tau^*n))^{-2} \sum_{j=\tau^*n+1}^n \left(\sum_{j=\tau^*n+1}^t \hat{\epsilon}_j \right)^2, \quad (4.18)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = (n - [\tau^*n])^{-1} \sum_{t=\tau^*n+1}^n \hat{\epsilon}_{1,t}^2, \quad (4.19)$$

em que $\hat{\epsilon}_{1,t}$ é definido na seção (4.2.1.1) e $\mathcal{NM}(\tau^*, 1)$ é o numerador de $\mathcal{KM}(\tau^*)$ de (4.6), padronizado pelo estimador da variância $\hat{\sigma}_1^2$. Se τ^* é desconhecido, as funções $H_j(\mathcal{NM}(0, 1))$, $j = 1, 2, 3$ de (4.7)-(4.9) aplicadas à seqüência $\{\mathcal{NM}(\tau, 1), \tau \in \mathcal{T}\}$ podem ser consideradas.

Apresentamos agora as distribuições limites das estatísticas acima, sob H_c de (4.5), verificando que elas são $O_p(n)$ sob alternativas fixas.

Teorema 4.5 *Seja Y_t gerado por (4.1) e (4.2). Então, sob H_c de (4.5), para $0 < \tau < 1$,*

$$\mathcal{NM}(\tau, 1) \Rightarrow (1 - \tau)^{-2} \int_{\tau}^1 [V_1^{**}(r)]^2 dr. \quad (4.20)$$

$$H_j(\mathcal{NM}(\cdot, 1)) \Rightarrow H_j(A_1(\cdot)); \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.21)$$

em que $A_1(\cdot) \equiv (1 - \tau)^{-2} \int_{\tau}^1 [V_1^{**}(r)]^2 dr$

Teorema 4.6 *Se Y_t é gerado por (4.10) e (4.11), então ambos $\mathcal{NM}(\cdot, 1)$, $0 < \tau < 1$ e $H_j(\mathcal{NM}(\cdot, 1))$, $j = 1, 2, 3$ são de ordem $O_p(n)$. Estes resultados também valem para o processo constante $I(1)$ ($\tau^* = 0$).*

4.2.2 Mudança de $I(1)$ para $I(0)$

Suponha agora que em (4.1)

$$u_t = \begin{cases} u_{t-1} + \eta_t & t = 1, 2, \dots, \tau^*n, \\ u_{t-1} & t = \tau^*n + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.22)$$

com u_0 e η_t como definidos na seção anterior. Assim o processo Y_t é $I(1)$ até o instante $([\tau^*n])$ se $\sigma_{\eta}^2 > 0$, mas reverte para $I(0)$ depois do ponto de quebra. Conseqüentemente, um teste para estacionariedade contra uma mudança na persistência, de uma raiz unitária para estacionariedade, pode ser formulado novamente utilizando as hipóteses (4.3)-(4.4) e os modelos (4.1) e (4.22).

4.2.2.1 Testes Razão

Quando os dados são gerados por (4.25)-(4.26), $\mathcal{KM}(\tau)$ converge em probabilidade para zero, com taxa $O_p(n^{-2})$, para $0 < \tau^* \leq \tau < 1$, e é de $O_p(1)$ se $\tau < \tau_0 \leq 1$. Os testes da seção (4.2.1), que rejeitam para valores grandes de $\mathcal{KM}(\tau)$, $0 < \tau < 1$, e $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, serão assim inconsistentes. Agora, se τ^* fosse conhecido, rejeitar para valores pequenos de $\mathcal{KM}(\tau^*)$ forneceria claramente um teste consistente utilizando (4.10) e (4.11). Entretanto, quando τ^* é desconhecido, as estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, são todas de ordem $O_p(1)$, e assim os testes que rejeitam para valores pequenos destas estatísticas não fornecem inferência consistente.

Dos resultados anteriores vê-se que os testes que rejeitam para valores grandes das estatísticas baseadas no recíproco de $\mathcal{KM}(\tau)$ podem fornecer inferência consistente. Apresentamos agora suas distribuições limites sob H_c de (4.5) e exploramos seu comportamento sob alternativas fixas.

Teorema 4.7 *Seja Y_t gerado por (4.1) e (4.22) sob H_c . Então, para $0 < \tau < 1$,*

$$\mathcal{KM}(\cdot)^{-1} \Rightarrow \frac{\tau^{-2} \int_0^\tau [V_2^{***}]^2 dr}{(1-\tau)^{-2} \int_\tau^1 [V_2^{**}]^2 dr} \equiv \eta_1(\cdot), \quad (4.23)$$

$$H_j((\mathcal{KM}(\cdot))^{-1}) \rightarrow H_j(\eta_1(\cdot)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.24)$$

com

$$V_2^{**} = V_2(r) - V_2(\tau) - (r - \tau)(1 - \tau)^{-1} (V_2(1) - V_2(\tau)), \quad V_2^{***}(r) = V_2(r) - r\tau^{-1}V_2(\tau),$$

e $V_2(r) \equiv W_0(r) + c \left\{ \int_0^{\min(r, \tau^*)} W_c(s) ds + 1(r > \tau_0)[(r - \tau^*)W_c(\tau^*)] \right\}$.

Para $c = 0$ a distribuição assintótica de $\mathcal{KM}(\tau)^{-1}$ é igual mas não independente da distribuição da estatística $\mathcal{KM}(\tau)$. Pela mesma razão dado que \mathcal{T} é simétrica ao redor de 0,5, os valores críticos assintóticos para as estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\tau)^{-1})$ coincidirão com aquela da estatística correspondente de $H_j(\mathcal{KM}(\tau))$, para $j = 1, 2, 3$. Os valores críticos assintóticos para estes testes são apresentados na Tabela C.6.

Teorema 4.8 *Considere o processo Y_t gerado por*

$$Y_t = d_t + Z_{t,0}, \quad t = 1, 2, \dots, \tau^*n, \quad \tau^* \in (0, 1), \quad (4.25)$$

$$Y_t = d_t + Z_{\tau^*n,0} + Z_{t,1} \quad t = \tau^*n + 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

em que $Z_{t,j}$, $j = 0, 1$ e u_t são definidos no Teorema (4.2). Então para $\tau \geq \tau^*$, $(\mathcal{KM}(\tau))^{-1}$ é de $O_p(n^2)$ enquanto que para $\tau < \tau^*$, $(\mathcal{KM}(\tau))^{-1}$ é de ordem $O_p(1)$. Consequentemente, se a intersecção dos intervalos $[\tau^*, 1]$ e \mathcal{T} é não vazia então as estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))^{-1}$, $j = 1, 2, 3$ são $O_p(n^2)$, e de $O_p(1)$ caso contrário.

No contexto de (4.25)-(4.26), $(\mathcal{KM}(\tau))^{-1}$, $0 < \tau < 1$, e $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))^{-1}$, $j = 1, 2, 3$, são $O_p(1)$ e fornecendo testes inconsistentes se $\tau^* = 1$ (o modelo constante $I(1)$). Além disso, quando τ^* é desconhecido, as estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, não fornecerão inferências consistentes se a intersecção dos intervalos $[\tau^*, 1]$ e \mathcal{T} é vazia. Finalmente, por analogia aos resultados na seção (4.2.1), o estimador $\hat{\tau}_M = \operatorname{argmin}_{\tau \in \mathcal{T}} \Lambda_M(\tau)$, em que $\Lambda_M(\tau)$ é definido como na seção (4.2.1), é n-consistente, desde que $\tau^* \in \mathcal{T}$, para o ponto de quebra τ^* no contexto de (4.25)-(4.26).

Os valores críticos para $H_j(\mathcal{KM}(\tau))^{-1}$ coincidem com os correspondentes valores críticos das estatísticas $H_j(\mathcal{KM}(\tau))$ para $j = 1, 2, 3$. Valores críticos assintóticos para estas estatísticas são apresentados na Tabela C.6. A hipótese nula é rejeitada para valores grandes da estatística.

4.2.2.2 Teste Invariante Localmente Ótimo (ILO)

Consideremos o processo Y_t gerado por (4.1) e (4.22) com τ^* conhecido. Utilizando King e Hillier (1985), o teste OLI de H_0 de (4.3) contra H_1 de (4.4) é definido pela região crítica

$$\mathcal{L}_0(\tau^*) := \hat{\sigma}^{-2} ([\tau^*n])^{-2} \hat{\epsilon}' A_1(\tau^*) \hat{\epsilon} > l \quad (4.27)$$

em que $\hat{\epsilon}$ e $\hat{\sigma}^2$ são definidas na seção (4.2.1) e $A_1(\tau^*)$ é a matriz de covariâncias de $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)'$ que tem como elementos (i, j) o $\min\{i, j, [\tau^*n]\}$ $i, j = 1, \dots, n$ e todos os outros elementos iguais a zero. Além disso, (4.27) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}_0(\tau^*) = \hat{\sigma}^{-2} ([\tau^*n])^{-2} \sum_{t=1}^{[\tau^*n]} \left(\sum_{j=t}^n \hat{\epsilon}_j \right)^2 > l. \quad (4.28)$$

Note que $\mathcal{L}_0(1)$ coincide com a estatística \mathcal{NM} de (4.6). Quando τ^* é desconhecido não existe nenhum teste ILO de H_0 contra H_1 . Novamente são consideradas as funções $H_j(\mathcal{L}_0(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$ de (4.7)-(4.9) aplicadas à seqüência $\{\mathcal{L}_0(\tau), \tau \in \mathcal{T}\}$

Teorema 4.9 *Seja Y_t gerado por (4.1) e (4.22), sob H_c de (4.5). Então, para $0 \leq \tau \leq 1$*

$$\mathcal{L}_0(\cdot) \Rightarrow \xi_0(\cdot), \quad (4.29)$$

$$H_j(\mathcal{L}(\cdot)) \Rightarrow H_j(\xi_0(\cdot)), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.30)$$

em que $\xi_0(\tau) = \tau^{-2} \int_0^\tau [V_2(r) - rV_1]^2 dr$, $V_2(r)$ definido como no Teorema (4.7).

Valores críticos assintóticos para $H_j(\mathcal{L}(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, podem ser obtidos da Tabela C.6 utilizando aqueles fornecidos pelas estatísticas $H_j(\mathcal{L}_1(\cdot))$. Para o caso do ponto de quebra conhecido, valores críticos para $\mathcal{L}_0(\tau^*)$, são obtidos dos valores críticos de $\mathcal{L}_1(1 - \tau^*)$. A hipótese nula é rejeitada para valores grandes da estatística.

Teorema 4.10 *Se Y_t é gerado por (4.25) e (4.26), então $\mathcal{L}_0(\tau)$, $0 < \tau \leq 1$, e $H_j(\mathcal{L}_0(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, são de ordem $O_p(n)$. Estes resultados também valem para $\tau^* = 1$ em (4.25) e (4.26).*

Os resíduos $\hat{\epsilon}_t$ de MQO são de $O_p(n^{1/2})$ sob (4.10)-(4.11) ou (4.25)-(4.26), ou seja, sobre qualquer direção de mudança. Conseqüentemente, as estatísticas $\mathcal{L}_1(\tau)$, $0 < \tau \leq 1$, $H_j(\mathcal{L}_1(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$ e $\mathcal{L}_0(\tau)$, $0 < \tau \leq 1$, $H_j(\mathcal{L}_0(\cdot))$, $j = 1, 2, 3$, são todas de ordem $O_p(n)$. Desta forma os testes baseado em ILO fornecem inferência consistente mesmo que nem o ponto de quebra, nem a direção de mudança são conhecidos.

Teorema 4.11 *Seja Y_t gerado por (4.1) e (4.22), então sob (4.5), para $0 < \tau \leq 1$*

$$\mathcal{NM}(0, \cdot) \Rightarrow \tau^{-2} \int_0^\tau [V_2^{***}]^2 dr \equiv A_2(\cdot), \quad (4.31)$$

$$H_j(\mathcal{NM}(0, \cdot)) \Rightarrow H_j(A_2(\cdot)), \quad (4.32)$$

$$A_2(\tau) = \tau^{-2} \int_0^\tau [V_2^{***}]^2 dr. \quad (4.33)$$

Valores críticos assintóticos para as estatísticas $H_j(\mathcal{NM}(0, \cdot))$, $j = 1, 2, 3$ para $\mathcal{T} = [0.2, 0.8]$, são fornecidos pelas respectivas estatísticas $H_j(\mathcal{NM}(\cdot, \tau))$ na Tabela C.6.

Teorema 4.12 *Se Y_t é gerado por (4.25) e (4.26), então $\mathcal{NM}(0, \tau)$, $0 < \tau \leq 1$ e $H_j(\mathcal{NM}(0, \tau))$, para $j = 1, 2, 3$ são de ordem $O_p(n)$. Estes resultados também valem para $\tau^* = 1$, em (4.25)-(4.26)*

A segunda sub-amostra de resíduos OLS, $\hat{\epsilon}_{1t}$, $t = [\tau n] + 1, \dots, n$, são de ordem $O_p(n^{1/2})$, para todo $\tau < \tau^*$, sob a mudança de $I(1) - I(0)$, e o modelo (4.25)-(4.26). Portanto, segue que $\mathcal{NM}(\tau, 1)$ será de $O_p(n)$, para todo $\tau < \tau^*$ e, conseqüentemente, as estatísticas $H_j(\mathcal{NM}(\cdot, 1))$, $j = 1, 2, 3$ serão de ordem $O_p(n)$, se a intersecção de $[0, \tau_0]$ e \mathcal{T} for não vazia. Similarmente sob a mudança de $I(0) - I(1)$, (2.12) - (2.13), os resíduos OLS da primeira sub-amostra, $\hat{\epsilon}_{0,t}$, $t = 1, 2, \dots, [\tau n]$, são de ordem $O_p(n^{1/2})$ e, então $\mathcal{NM}(0, \tau)$ será de ordem $O_p(n)$, para todo $\tau > \tau^*$. Conseqüentemente, as estatísticas

$H_j(\mathcal{NM}(0, \cdot))$, $j = 1, 2, 3$ serão de ordem $O_p(n)$, se a intersecção de $(\tau_0, 1)$ e \mathcal{T} for não vazia.

4.2.3 Direção de Mudança Desconhecida

Testes do tipo razão, contra a hipótese alternativa $I(0) - I(1)$ são inconsistentes contra alternativas fixas $I(1) - I(0)$ e vice-versa. Se a direção de mudança for desconhecida isto poderia levar a considerar testes bicaudais, rejeitando para valores pequenos ou grandes da estatística tipo razão da seção (4.2.1). Entretanto, pelas razões esboçadas no início da seção (4.2.1.1), este procedimento funciona apenas se τ^* é conhecido, caso contrário tal procedimento é consistente só contra a mudança de $I(0) - I(1)$. Os resultados de consistência fornecidos nos Teoremas (4.4) e (4.7) para as estatísticas $H_j(\mathcal{NM}(\cdot, 1))$, $j = 1, 2, 3$ permanecem válidos no caso da alternativa $I(1) - I(0)$, assim como os fornecidos pelos Teoremas (4.10) e (4.12), para as estatísticas $H_j(\mathcal{NM}(0, \cdot))$, $j = 1, 2, 3$ para o caso da alternativa fixa $I(0) - I(1)$.

Resultados do tipo Monte Carlo, apresentados em Bussetti and Taylor (2004), sugerem que as propriedades do poder para amostras finitas, dos testes ILO das seções anteriores, quando a direção da alternativa é errada, são diminuídas significativamente, relativamente a seu poder contra a alternativa para a qual elas foram designadas. Desde que a rejeição dos testes baseados em ILO são para valores positivos grandes, tomar o máximo das estatísticas, em que aqueles testes são baseados, parece algo razoável. Também, aplicamos os mesmos princípios para as estatísticas baseadas em $\mathcal{KM}(\cdot)$ e $(\mathcal{KM}(\cdot))^{-1}$. Propõem-se, conseqüentemente, os seguintes pares de estatísticas:

$$\max H_j(\mathcal{L}) \equiv \max \{H_j(\mathcal{L}_1(\cdot)), H_j(\mathcal{L}_0(\cdot))\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.34)$$

$$\max H_j(\mathcal{K}) \equiv \max(\{H_j(\mathcal{KM}(\cdot))\} H_j(\mathcal{KM}(\cdot)^{-1})), \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.35)$$

Em cada caso, rejeitamos a hipótese nula para valores grandes das estatísticas. Uma vez que $\max(x, y)$ é contínuo para ambos os argumentos, podemos aplicar o teorema de mapeamento contínuo (TMC) diretamente para os resultados anteriores para estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 4.13 *Seja Y_t gerado por (4.2.1) e (4.22) sob H_c de (4.5). Então:*

$$\max H_j(\mathcal{L}) \Rightarrow \max \{H_j(\xi_1(\cdot)), H_j(\xi_0(\cdot))\}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.36)$$

$$\max H_j(\mathcal{K}) \Rightarrow \max \{H_j(\eta(\cdot)), H_j(\eta_1(\cdot))\}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.37)$$

O par de testes estatísticos do tipo razão baseados em ILO são de ordem $O_p(n)$ sob hipóteses alternativas fixas, $I(1) - I(0)$, $I(0) - I(1)$ e $I(1)$ constante, enquanto o par de testes de razão são de ordem $O_p(n^2)$, (fornecendo τ^*), sob as hipóteses alternativas fixas $I(0) - I(1)$ e $I(1) - I(0)$, mas são inconsistentes contra a alternativa de $I(1)$ constante. Estes resultados seguem imediatamente das propriedades das estatísticas sobre o valor máximo que elas tomam.

Valores críticos assintóticos, sob a hipótese nula, das estatísticas do Teorema (4.13) são fornecidos na Tabela C.6.

4.3 Mudança na Persistência contra a Hipótese Nula de Diferença Estacionária

A idéia é desenvolver testes estatísticos para detectar a mudança na persistência de uma série de tempo, de uma diferença estacionária $I(1)$, para uma tendência estacionária $I(0)$ ou de $I(0)$ para $I(1)$. A capacidade de separar as componentes $I(0)$ e $I(1)$ de uma série temporal, caso elas existam, tem implicações importantes na construção de modelos e na previsão de séries econômicas e financeiras.

Os testes propostos por Leybourne et al (2003) são da forma:

$$H_0 : \quad \text{a série é gerada por um processo } I(1), \quad (4.38)$$

$$H_1 : \quad \text{existe uma mudança de } I(0) \text{ para } I(1) \text{ ou de } I(1) \text{ para } I(0). \quad (4.39)$$

Não será assumido o conhecimento da direção de mudança, nem o potencial ponto de mudança. O teste proposto, baseado no teste da raiz unitária de Dickey-Fuller, é capaz de identificar consistentemente a direção desconhecida de mudança. Além disso, a estatística do teste fornece uma estimativa consistente da fração de quebra (ponto de mudança).

Dado que a hipótese nula pressupõe um processo integrado em toda a extensão da série, o teste proposto pode ser visto como um complemento do teste de Dickey-Fuller.

4.3.1 Mudança na Persistência: Direção Especificada

Primeiro analisa-se o caso em que a direção de qualquer mudança na persistência, sob a hipótese alternativa, é especificada; consideramos uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$, em uma fração τ desconhecida. Cabe ressaltar que a fração de quebra τ para a mudança de $I(1)$ para $I(0)$ corresponde à fração de quebra $(1 - \tau)$ para a mudança de $I(0)$ para $I(1)$, na série inversa. Permite-se a presença de correlação serial, pela incorporação de diferenças defasadas na regressão de DF e naquelas baseadas nos dados 'GLS detrending', em que uma constante ou uma constante e uma tendência linear são ajustadas.

Como a fração de quebra τ é desconhecida, o teste da razão de Dickey-Fuller é calculado para todas as possíveis frações de quebra τ , escolhendo como estatística do teste a razão t menos favorável à hipótese nula, ou seja, o ínfimo sobre τ dos testes de razão t de DF.

Considere o seguinte processo gerador de dados para uma série

$$Y_t = d_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.40)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \phi(L)\Delta u_{t-1} + \epsilon_t, \quad (4.41)$$

em que $d_t = Z_t'\beta$, $\phi(L)$ é um polinômio de ordem $p - 1$ com raízes fora do círculo unitário. Considera-se aqui o modelo em que $Z_t = [1, t]'$, $\beta = [\beta_0, \beta_1]'$ e ϵ_t satisfaz a seguinte suposição:

Suposição 4.1 ϵ_t é uma seqüência de diferenças martingais satisfazendo

$$E[\epsilon_t^2 | \epsilon_{t-1}, \dots] = \sigma^2, \quad E[|\epsilon_t|^i | \epsilon_{t-1}, \dots] = k_i, \quad (i = 3, 4) \quad \text{e} \quad \sup_t E[|\epsilon_t|^{4+\gamma} | \epsilon_{t-1}, \dots] = k < +\infty, \quad \text{para algum } \gamma > 0.$$

Sem perda de generalidade assume-se que os valores iniciais Y_t , $t = 0, -1, -2, \dots, -p+1$, existem.

A hipótese nula é que Y_t é $I(1)$ em toda a série, ou seja, $\alpha = 1$. A alternativa é que Y_t muda de $I(0)$ para $I(1)$ no tempo τ^*n ,

$$\begin{aligned} |\alpha| < 1 & \quad \text{para } t \leq \tau^*n \\ \alpha = 1 & \quad \text{para } t > \tau^*n. \end{aligned}$$

Uma outra possível alternativa é que Y_t é $I(1)$ e muda para $I(0)$ no tempo τ^*n , isto implica que a série reversa no tempo tem uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ no tempo $(1 - \tau^*)n$.

Assumimos que τ^* é desconhecido. Para facilitar o entendimento designamos

$$H^{11} : \text{ toda a série é gerada por um processo } I(1) \quad (4.42)$$

$$H^{01} : \text{ a série tem uma mudança de } I(0) \text{ para } I(1) \quad (4.43)$$

$$H^{10} : \text{ a série tem uma mudança de } I(1) \text{ para } I(0) \quad (4.44)$$

4.3.1.1 Teste baseado na série para frente: H^{11} vs H^{01}

Considera-se a hipótese alternativa de uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$. Seja τ uma possível fração de quebra; como as últimas $(1 - \tau)n$ observações sob as hipóteses nula e alternativa são geradas por um processo $I(1)$, uma possibilidade é aplicar o teste DF para as primeiras τn observações, permitindo a variação do τ . A análise assintótica requer que o número de observações utilizadas nos testes aumente com n , na prática impõe-se a restrição $0 < \tau_1 < \tau < \tau_2 \leq 1$.

Para estimar o vetor de parâmetros β do modelo (4.40) e (4.41), emprega-se o método GLS de ajustamento de tendência proposto por Elliot et al (1996), descrito a seguir:

Seja \mathcal{T} um intervalo fechado e não vazio em $(0, 1)$. Para um dado $\tau \in \mathcal{T}$, define-se os dados GLS-transformado

$$Y_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Y_1, Y_2 - \bar{\alpha}Y_1, \dots, Y_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Y_{[\tau n]-1}]', \quad (4.45)$$

$$Z_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Z_1, Z_2 - \bar{\alpha}Z_1, \dots, Z_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Z_{[\tau n]-1}]', \quad (4.46)$$

em que $\bar{\alpha} = 1 + \frac{\bar{c}}{n}$, para algum $\bar{c} < 0$ e $[\tau n]$ é o maior inteiro contido em τn .

No caso de tendência linear, o estimador GLS recursivo $\hat{\beta}_{[\tau]} = [\hat{\beta}_0(\tau), \hat{\beta}_1(\tau)]'$ é obtido fazendo uma regressão de $Y_{\bar{\alpha}}(\tau)$ em $Z_{\bar{\alpha}}(\tau)$. A série de resíduos é definida por Y_t^d em que

$$Y_t^d = Y_t - \hat{\beta}_0(\tau) - \hat{\beta}_1(\tau)t, \quad t = 1, \dots, \tau n. \quad (4.47)$$

A regressão ADF sem termo determinístico pode ser feita utilizando os resíduos,

$$\Delta Y_t^d = \hat{\rho}(\tau)Y_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} \hat{\phi}_j(\tau)\Delta Y_{t-j}^d + \hat{\epsilon}_t, \quad t = 1, 2, \dots, \tau n, \quad (4.48)$$

em que só utilizamos a primeira fração τ da amostra. O teste recursivo associado a $\hat{\rho}(\tau)$ é denotado por $\hat{t}_{DF}^{min}(\tau)$. A estatística apropriada para testar H^{11} vs H^{01} é dada por:

$$\hat{t}_{DF}^{min}(\tau) = \inf_{\tau \in T} \hat{t}_{DF}^{min}(\tau).$$

Sob a hipótese alternativa H^{01} , o valor de τ no ínfimo fornece um estimador consistente do verdadeiro valor da fração de quebra τ^* .

Este procedimento recursivo é insuficiente pois utilizamos somente a primeira fração τ da amostra. Entretanto é possível estimar os parâmetros do polinômio $\phi(L)$ e a variância de ϵ_t mais eficientemente, utilizando a amostra completa e, assim, melhorar o poder do teste para amostras finitas. Para isso, define-se a variável ‘dummy’

$$D_t(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq \tau n \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e considere a regressão ADF alternativa usando a amostra completa,

$$\Delta Y_t^d = \bar{\rho}_\tau D_t(\tau) Y_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} \bar{\phi}_j \Delta Y_{t-j}^d + \bar{\epsilon}, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.49)$$

em que ΔY_t^d é definido como:

$$\Delta Y_t^d = \begin{cases} \hat{\rho}(\tau) Y_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} \hat{\phi}_j(\tau) \Delta Y_{t-j}^d + \hat{\epsilon}_t & t \leq \tau n \\ \Delta Y_t - \Delta \bar{Y}_{(2)} & t > \tau n, \end{cases}$$

com $\Delta \bar{Y}_{(2)} = (\sum_{s=\tau n+1}^n \Delta Y_s) (n - \tau n)^{-1}$.

A estatística t associada a $\bar{\rho}(\tau)$ em (4.49) é dada por

$$\bar{t}_{DF}^{min} = \inf_{t \in T} \bar{t}_{DF}(\tau). \quad (4.50)$$

Se o teste é baseado na primeira τn fração da amostra, chamamos o teste de recursivo e se o teste é baseado na amostra completa, chamamos o teste de seqüencial, ambos com a mesma distribuição limite sob a hipótese nula.

4.3.1.2 Teste baseado na série com tempo reverso: H^{11} vs H^{10}

Consideramos agora a hipótese alternativa de uma mudança de $I(1)$ para $I(0)$, que corresponde a uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ na série reversa, $\tilde{Y}_t = Y_{n-t+1}$, lembrando que a fração de quebra τ^* na série original, torna-se $1 - \tau^*$ para a série reversa.

O teste discutido no item anterior pode ser aplicado a série reversa \tilde{Y}_t quando H^{10} é a hipótese alternativa pois, sob a hipótese nula, \tilde{Y}_t é $I(1)$ e sob a hipótese alternativa, \tilde{Y}_t muda de $I(0)$ para $I(1)$ no instante $(1 - \tau^*)n$.

Abaixo, define-se a transformada GLS para a série reversa.

$$\tilde{Y}_{\tilde{\alpha}}(\tau) = \left[\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 - \tilde{\alpha}\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_{(1-\tau)n} - \tilde{\alpha}\tilde{Y}_{(1-\tau)n-1} \right]'. \quad (4.51)$$

Seja $\tilde{\beta}(\tau) = \left[\tilde{\beta}_0(\tau), \tilde{\beta}_1(\tau) \right]'$ que denota o estimador de mínimos quadrados ordinários da regressão de $\tilde{Y}_{\tilde{\alpha}}(\tau)$ em $\tilde{Z}_{\tilde{\alpha}}(\tau)$. Definindo a série de resíduos $\tilde{Y}_t^d = \tilde{\rho}(\tau)\tilde{Y}_t^d - \tilde{\beta}_0(\tau) - \tilde{\beta}_1(\tau)t$, a correspondente regressão ADF é

$$\Delta\tilde{Y}_t^d = \tilde{\rho}(\tau)\tilde{Y}_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\phi}_j(\tau)\Delta\tilde{Y}_{t-j}^d + \tilde{\eta}_t, \quad t = 1, 2, \dots, (1 - \tau)n. \quad (4.52)$$

Denotando o teste da razão t associado com $\tilde{\rho}(\tau)$ por $\hat{t}_{DFR}(\tau)$, a estatística do teste recursivo contra H^{01} é

$$\hat{t}_{DFR}^{min}(\tau) = \inf_{t \in \mathcal{T}} \hat{t}_{DFR}(\tau). \quad (4.53)$$

A regressão completa, que corresponde a (4.49) é

$$\Delta\tilde{Y}_t^d = \tilde{\rho}(\tau)D_t(1 - \tau)\tilde{Y}_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\phi}_j(\tau)\tilde{Y}_{t-j}^d + \tilde{\eta}_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.54)$$

em que, se τ é a possível fração de quebra τ^* no tempo para frente, $\Delta\tilde{Y}_t^d$ é definido como em (4.52) para $t \leq (1 - \tau)n$, mas $\Delta\tilde{Y}_t^d = \Delta\tilde{Y}_t^d - \overline{\Delta\tilde{Y}_2}$ com $\overline{\Delta\tilde{Y}_2} = (\tau n)^{-1} \sum_{s=(1-\tau)n+1}^n \Delta\tilde{Y}_s$, para $t > (1 - \tau)n$. Denotando o teste de razão t associado com $\tilde{\rho}(\tau)$ em (4.54) por $\bar{t}_{DFR}(\tau)$, então

$$\bar{t}_{DFR}(\tau) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}} \bar{t}_{DFR}(\tau), \quad (4.55)$$

fornece um teste seqüencial para testar H^{10} vs H^{10} .

4.3.2 Distribuição Assintótica da Estatística do Teste sob H^{11}

O seguinte teorema estabelece a distribuição limite, sob a hipótese nula, do teste estatístico proposto quando a tendência linear é incluída no modelo.

Teorema 4.14 *Sob H^{11} e a Suposição (4.1)*

$$\hat{t}_{DFP}(\tau), \bar{t}_{DFP}(\tau) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \{V^2(\tau) - \tau\}}{\left\{ \int_0^\tau V^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv L_1^f(\tau), \quad (4.56)$$

$$\hat{t}_{DFR}(\tau), \bar{t}_{DFR}(\tau) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left\{ V^r(1-\tau, \tau)^2 - (1-\tau) \right\}}{\left\{ \int_0^{1-\tau} V^r(s, \tau)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv L_1^r(\tau) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} V(s) &= w(s) - sB(\tau), \\ B(s) &= \lambda_1(s)w(s) + \lambda_2(s) \int_0^s uw(u)du, \\ \lambda_1(s) &= \frac{1 - \bar{c}s}{\Delta(s)}, \\ \lambda_2(s) &= \frac{\bar{c}^2}{\Delta(s)}, \\ \Delta(s) &= s - s^2\bar{c} + \frac{1}{3}s^3\bar{c}^2, \\ V^r(s, \tau) &= w(1) - w(1-s)sB^r(\tau), \\ B^r(s) &= \lambda_1(1-s) \{w(1) - w(s)\}, \\ &+ \lambda_2(1-s) \left\{ \frac{(1-s)^2}{2} w(1) - \int_s^1 w(u)du + \int_s^1 uw(u)du \right\}. \end{aligned}$$

em que $w(s)$ é um movimento Browniano padrão.

Além disso,

$$\hat{t}_{DFP}^{min}, \bar{t}_{DFP}^{min} \Rightarrow \inf_{\tau \in T} L_1^f(\tau), \quad (4.58)$$

$$\hat{t}_{DFR}^{min}, \bar{t}_{DFR}^{min} \Rightarrow \inf_{\tau \in T} L_1^r(\tau). \quad (4.59)$$

As distribuições limites, sob a hipótese nula, para os testes estatísticos não dependem nem do número de diferenças $p - 1$ incluídas na regressão ADF, nem dos valores dos coeficientes associados com as mudanças no verdadeiro processo gerador dos dados. As correspondentes distribuições limites dos testes recursivo e sequencial são as mesmas; finalmente a distribuição marginal limite dos testes reversos, com fração de quebra τ ,

são equivalentes as dos correspondentes testes para frente com fração de quebra $(1 - \tau)$.

Quando existe uma constante no lugar de uma tendência no tempo, no modelo e no modelo ajustado, os resultados do Teorema 4.14 são dados por:

$$\hat{t}_{DFR}, \bar{t}_{DFR} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \{w^2(\tau) - \tau\}}{\left\{ \int_0^\tau w^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv L_2^f(\tau), \quad (4.60)$$

$$\hat{t}_{DFR}(\tau), \bar{t}_{DFR}(\tau) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \{[w(1) - w(\tau)]^2 - (1 - \tau)\}}{\left\{ \int_\tau^1 w^2(s) ds - 2w(1) \int_\tau^1 w(s) ds + (1 - \tau)w^2(1) \right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv L_2^r(\tau),$$

$$\hat{t}_{DFR}^{min}, \bar{t}_{DFR}^{min} \Rightarrow \inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_2^f(\tau), \quad (4.61)$$

$$\hat{t}_{DFR}^{min}, \bar{t}_{DFR}^{min} \Rightarrow \inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_2^r(\tau). \quad (4.62)$$

Note que para o teste sequencial na equação (4.49) $\Delta Y_t^d = \Delta Y_t$ para $t > \tau n$ e em (4.54) $\Delta \tilde{Y}_t^d = \Delta \tilde{Y}_t$ para $t > (1 - \tau)n$.

4.3.3 Comportamento do Teste sob H^{01} e H^{10} (hipóteses alternativas)

Nesta seção assumimos que $Z_t = 1$ e $\beta = \beta_0$ para apresentar os resultados de uma forma mais compacta. Consideramos com detalhe somente o teste recursivo. Pode-se mostrar que os resultados apresentados nesta seção podem ser aplicados ao caso com tendência linear e para o teste seqüencial.

Definindo.

$$\mu_y = E[Y_t], \quad \gamma_y(j) = \text{cov}(Y_t, Y_{t-j}), \quad \gamma_{\Delta Y_t}(j) = \text{cov}(\Delta Y_t, \Delta Y_{t-j}), \quad (4.63)$$

em que $t \leq \tau^* n$ sob H^{01} e $t > \tau^* n$ sob H^{10} . No Teorema 4.15 o vetor e_1 é o vetor seleção $e_1' = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times p}$.

Teorema 4.15 *Sob H^{01} , ou seja, a série tem uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$, e com*

a Suposição (4.1),

$$n^{-\frac{1}{2}} \hat{t}_{DFR}^{min} \xrightarrow{P} -\tau^{*\frac{1}{2}} H(y_1),$$

$$\hat{t}_{DFR}^{min} = Op(1), \quad \text{em que}$$

$$H(y_1) = \frac{e_1' A(y_1)^{-1} B}{\sigma \{e_1' A(y_1)^{-1} e_1\}^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

$$A(y_1) = \begin{pmatrix} \gamma_y(0) - 2y_1\mu_y + y_1^2 & \gamma_y(0) - \gamma_y(1) & \dots & \gamma_y(p-2) - \gamma_y(p-1) \\ \gamma_y(0) - \gamma_y(1) & \gamma_{\Delta y}(0) & \dots & \gamma_{\Delta y}(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_y(p-2) - \gamma_y(p-1) & \gamma_{\Delta y}(p-2) & \dots & \gamma_{\Delta y}(0) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_y(1) - \gamma_y(0) \\ \gamma_{\Delta y}(1) \\ \dots \\ \gamma_{\Delta y}(p-1) \end{pmatrix}.$$

Então \hat{t}_{DFR}^{min} é consistente a uma taxa de $n^{\frac{1}{2}}$ sob H^{01} e \hat{t}_{DFR}^{min} não é consistente. A estatística \hat{t}_{DFR}^{min} fornece um estimador consistente para a fração de quebra τ^* , e define-se formalmente por

$$\hat{\tau} = \arg \inf_{\tau \in T} \hat{t}_{DFR}(\tau). \quad (4.64)$$

Corolário 4.1 Sob H^{01} e com a Suposição (4.1).

$$\hat{t}_{DFR}^{min} = o_p(1), \quad (4.65)$$

$$n^{-\frac{1}{2}} \hat{t}_{DFR}^{min} \xrightarrow{P} (1 - \tau^*)^{\frac{1}{2}} H(\tilde{Y}_1). \quad (4.66)$$

Adicionalmente suponha que $\tau^* \in T^0$, então condicional a \tilde{Y}_1

$$\tilde{\tau} - \tau^* = o_p(1) \quad (4.67)$$

Sob as condições dadas no Corolário (4.1), $\hat{t}_{DFR}^{min}(\tau)$ é consistente a uma taxa de $n^{-\frac{1}{2}}$ quando a série apresenta um uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ (sob H^{01}) e produz um estimador consistente para a fração de quebra τ^* .

Em resumo cada teste estatístico é consistente para a alternativa para a qual é designado, mas não para a alternativa da presença de uma quebra na direção oposta.

4.4 Testes Mínimos: Direção não Especificada

Os testes analisados até agora são úteis somente se uma hipótese alternativa em particular é considerada. Em algumas circunstâncias não se tem a priori a direção de mudança, porém a hipótese nula para uma série dada é que ela é $I(1)$, contra a hipótese alternativa de que tem um ponto no tempo τ^*n não conhecido, no qual pode acontecer uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ ou de $I(1)$ para $I(0)$. Dada uma série específica, então a alternativa é que uma parte da série é $I(0)$ ou $I(1)$, e a parte seguinte $I(0)$ ou $I(1)$, respectivamente.

Teste mínimo, direção não especificada

Para realizar testes em que a direção de mudança não é especificada, consideram-se os testes \hat{t}_{DFE}^{min} , \hat{t}_{DFR}^{min} conjuntamente, pois conhecemos o poder de \hat{t}_{DFE}^{min} e \hat{t}_{DFR}^{min} contra uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$ ou de $I(1)$ para $I(0)$, respectivamente. Assim o teste bilateral constituído pelas hipóteses.

$$H_0 : \text{a série é gerada por um processo } I(1) \quad (4.68)$$

$$H_a : \text{a série apresenta uma mudança de } I(0) \text{ para } I(1) \text{ ou de } I(1) \text{ para } I(0) \quad (4.69)$$

pode ser realizado utilizando a estatística conjunta

$$\min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min}) \quad (4.70)$$

Assumindo que a distribuição da estatística (4.70), sob H_0 , existe, nosso interesse é verificar o seu comportamento sob H_1 :

- i) Sob H^{01} , \hat{t}_{DFE}^{min} diverge para $-\infty$ a uma taxa de ordem $n^{\frac{1}{2}}$, enquanto que \hat{t}_{DFR}^{min} é de ordem $O_p(1)$. Isto implica que $\min(.,.)$ diverge para $-\infty$ a uma razão de $n^{\frac{1}{2}}$. Assim, assintoticamente, sob H^{01} .

$$\min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min}) = \hat{t}_{DFE}^{min} \quad (4.71)$$

- ii) Sob H^{10} , \hat{t}_{DFR}^{min} é de $O_p(1)$ e \hat{t}_{DFE}^{min} diverge para $-\infty$ a uma razão de $n^{\frac{1}{2}}$. Assim $\min(.,.)$ diverge para $-\infty$ a uma taxa de $n^{\frac{1}{2}}$ e, assintoticamente, sob H^{10}

$$\min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min}) = \hat{t}_{DFR}^{min} \quad (4.72)$$

Nesta forma o teste é consistente a uma taxa de $n^{\frac{1}{2}}$ em rejeitar a hipótese de um processo $I(1)$ constante, contra uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$, ou de $I(1)$ para $I(0)$. Além disso, o teste mínimo permite escolher entre H^{01} e H^{10} com a mesma taxa de consistência. Suponha que o teste min rejeita a hipótese H^{11} e $\min = \hat{t}_{DFP}^{\min}$, então, a regra de decisão é para rejeitar H^{11} em favor de H^{01} , dado que só \hat{t}_{DFP}^{\min} é consistente para H^{01} . Do mesmo modo, se $\min = \hat{t}_{DFR}^{\min}$ rejeita H^{11} em favor de H^{10} . Pelas razões apresentadas, esse procedimento também fornece um estimador consistente para τ^* , definido por:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \hat{\tau} \quad \text{se} \quad \min(\hat{t}_{DFP}^{\min}, \hat{t}_{DFR}^{\min}) = \hat{t}_{DFP}^{\min} \\ \bar{\tau} &= \tilde{\tau} \quad \text{se} \quad \min(\hat{t}_{DFP}^{\min}, \hat{t}_{DFR}^{\min}) = \hat{t}_{DFR}^{\min}\end{aligned}$$

O seguinte teorema apresenta a distribuição limite para as estatísticas mínimas.

Teorema 4.16 *Sob H^{11} com a suposição (4.1),*

$$\min(\hat{t}_{DFP}^{\min}, \hat{t}_{DFR}^{\min}), \min(\bar{t}_{DFP}^{\min}, \bar{t}_{DFR}^{\min}) \Rightarrow \min\left\{\inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_1^f(\tau), \inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_1^r(\tau)\right\}$$

quando o modelo contém uma tendência linear, e

$$\min(\hat{t}_{DFP}^{\min}, \hat{t}_{DFR}^{\min}), \min(\bar{t}_{DFP}^{\min}, \bar{t}_{DFR}^{\min}) \Rightarrow \min\left\{\inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_2^f(\tau), \inf_{\tau \in \mathcal{T}} L_2^r(\tau)\right\}$$

quando o modelo contém só uma constante.

A prova é uma consequência do fato que do teorema central do limite funcional, estatísticas tais como $\hat{t}_{DFP}(\tau)$ e $\hat{t}_{DFR}(\tau)$ convergem conjuntamente para $L_1^f(\tau)$ e $L_1^r(\tau)$ uniformemente em τ e que a função mínimo é contínua em ambos argumentos.

Finalmente notamos que na prática é possível que uma série de tempo possa ser $I(0)$ em toda sua extensão; neste caso pode-se mostrar, como resultado do Teorema (4.15) e o Corolário (4.1), que $\hat{t}_{DFP}^{\min}(\tau)$, $\hat{t}_{DFR}^{\min}(\tau)$ e a estatística mínima divergem para $-\infty$. Também temos que $\hat{\tau} \rightarrow \sup \mathcal{T}$ e $\tilde{\tau} \rightarrow \inf \mathcal{T}$ porque $\hat{t}_{DFP}(\tau)$ e $\hat{t}_{DFR}(\tau)$ tornam-se cada vez mais negativas com a proporção de observações $I(0)$ na regressão crescendo, ou seja, a distribuição do estimador de quebra obtido utilizando a estatística mínimo tem dois picos e dois pontos limites em \mathcal{T} . Ainda que os testes sejam consistentes, eles serão menos poderosos nesta situação do que o teste de raiz unitária de Dickey-Fuller,

devido ao fato de que, esses testes são construídos para testar hipóteses mais complexas e, portanto, estão baseados em modelos com mais parâmetros.

Capítulo 5

Generalização dos Testes Recursivos e Móveis

5.1 Introdução

Os testes baseados em seqüências de sub-amostras da estatística de Dickey-Fuller só serão consistentes se pelo menos uma das estatísticas na seqüência for calculada para dados puramente estacionários. Além disso, a escolha da forma em que as sub-amostras devem ser percorridas para calcular os testes pode ser crucial na consistência dos testes usados. No caso das estatísticas móveis, uma largura da janela deve ser escolhida, enquanto que para os testes recursivos uma fração da amostra, que determina o tamanho inicial da sub-amostra, deve ser escolhida. Além disso, deve-se selecionar o método para percorrer a série com as sub-amostras, se é para frente, em reverso, ou ambos.

No Capítulo 3 foram estudados os testes recursivos e móveis de forma convencional:

- i) $\hat{t}_{DF}(\tau) = \frac{n(\hat{\theta}_3(\tau) - 1)}{[V_n^{33}(\tau)\hat{\sigma}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}$, $\tau_0 \leq \tau \leq 1$, que é um teste recursivo em que as sub-amostras percorrem a série para frente. Também é apresentado o correspondente teste \hat{t}_{DF}^{min} , dado pela expressão (3.55).
- ii) $\hat{t}_{DFB}(\tau) = \frac{n(\hat{\theta}_{3B}(\tau) - 1)}{[V_{n,B}(\tau)^{33}\hat{\sigma}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}$, teste recursivo que calcula as estatísticas recursivas reversas, estimando os parâmetros sobre os dados $t = k + 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, n - \tau_0$.
- iii) $\tilde{t}_{DF}(\tau, \tau^*) = \frac{n(\tilde{\theta}_3(\tau, \tau^*) - 1)}{[V_n(\tau, \tau^*)\tilde{\sigma}^2(\tau, \tau^*)]^{\frac{1}{2}}}$, teste móvel em que a sub-amostras percorrem a série para frente. Também é apresentado o correspondente teste \tilde{t}_{DF}^{min} , dado pela expressão (3.57).

Os testes apresentados anteriormente são propostos para um valor particular de τ_0 e possuem tabelas de valores críticos para os valores específicos de $\tau_0 = 0,25$ e $k = 0,33$ para os testes recursivos e móveis, respectivamente. Para o teste $\tilde{t}_{DF}(\tau, \tau^*)$, não são apresentados valores críticos.

No Capítulo 4 são apresentados os testes recursivos com a metodologia GLS:

- i) $\hat{t}_{DF}^{min}(\tau) = \inf_{\tau \in T} \hat{t}_{DF}^{min}(\tau)$, que é um teste recurivo com a metodologia GLS, em que as sub-amostras percorrem a série para frente.
- ii) $\hat{t}_{DFR}^{min}(\tau) = \inf_{t \in T} \hat{t}_{DFR}^{min}(\tau)$, teste recursivo, em que uma nova série $\tilde{Y}_t = Y_{n-t+1}$ é gerada e as sub-amostras percorrem a série reversa \tilde{Y}_t de modo convencional.

Para os testes com a metodologia GLS os valores críticos são apresentados na Tabela C.10.

5.2 Valores Críticos para Diferentes Escolhas de τ_0 e k .

Como foi dito no Capítulo 3, a escolha de τ_0 implica uma troca entre precisar de observações suficientes na regressão mais curta para validar a aproximação gaussiana e querer capturar possíveis quebras no início e no final da amostra. Por isso é importante fornecer valores críticos dos testes recursivos e móveis, para vários valores de τ_0 .

5.2.1 Valores Críticos para Diferentes Escolhas de τ_0 para o Teste Recursivo

A Tabela C.7 fornece valores críticos para o teste recursivo com valores de $\tau_0 = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ e 0.30 . Além disso, são fornecidos valores críticos para o modelo com constante e o modelo com tendência. Valores do teste recursivo reverso \hat{t}_{DFR}^{min} não são fornecidos porque não são significativamente diferentes dos valores dados para o teste recursivo usual.

Os valores críticos assintóticos são obtidos por simulação Monte Carlo para a mostra de tamanho 1000. Também são reportados os correspondentes valores críticos para amostras finitas obtidas do modelo $\Delta Y_t = u_t$, $t = 1, 2, \dots, n$, para $n = 100, 250$ e 500 , onde $u_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independentes e identicamente distribuídos, com $x_0 = 0$.

5.2.2 Valores Críticos para Diferentes Escolhas de $k = \lceil \tau_0 * n \rceil$ para o Teste Móvel

A Tabela C.8 fornece valores críticos para os testes móveis para valores de $\tau_0 = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90$. Como na Tabela C.7, são apresentados valores críticos para amostras finitas com $n = 100, 250$ e 500 , e valores críticos assintóticos.

Além disso, são fornecidos valores críticos para o modelo com constante ($\xi = 1$) e o modelo com tendência ($\xi = 2$).

5.3 Extensão dos Testes

A extensão dos testes propostos anteriormente tentam reduzir a dependência implícita na escolha da forma em que as sub-amostras devem percorrer a série, ou seja, na escolha dos valores de τ_0 para o teste recursivo, e k para o teste móvel.

5.3.1 Extensão do Teste Recursivo

Quando há um único ponto de quebra as propriedades dos testes recursivo para frente e reverso dependem crucialmente da direção de quebra: se é de $I(0)$ para $I(1)$, ou de $I(1)$ para $I(0)$. Na seção 4.4 foram apresentados os testes $\min(\hat{t}_{DFP}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min})$, para a metodologia GLS, quando a direção de mudança não é especificada, que é consistente contra a mudança de $I(0)$ para $I(1)$, ou de $I(1)$ para $I(0)$. Um teste correspondente ao mínimo de \hat{t}_{DFP}^{min} e \hat{t}_{DFB}^{min} pode ser proposto de uma forma similar.

Sob H_{11} dada na expressão (4.42), Leybourne et al (2003) demonstrou que

$$\min(\hat{t}_{DFP}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min}) \Rightarrow \min(L_1^f(\tau), L_1^r(\tau)) \quad (5.1)$$

pelo teorema de mapeamento contínuo e como as funções mínimo são contínuas para ambos argumentos da função, então pode-se mostrar que

$$t_B^* = \min(\hat{t}_{DFP}^{min}, \hat{t}_{DFB}^{min}) \Rightarrow \min(L_1^f(\tau), L_1^b(\tau)) \quad (5.2)$$

em que $L_1^f(\tau)$ e $L_1^b(\tau)$ são as distribuições assintóticas de $\min(\hat{t}_{DFP}^{min}$ e $\hat{t}_{DFR}^{min})$, respectivamente.

A Tabela (C.9) fornece valores críticos para amostras finitas e assintóticos para o teste t_B^* , calculados da mesma forma que na Tabela C.7, para $\tau_0 = 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ e 0.30 .

5.3.2 Extensão do Teste Móvel

No caso do teste móvel parece ser mais adequado escolher um valor de τ_0 o menor possível, para capturar qualquer possível janela de observações estacionárias. Isto pode causar problema na aproximação gaussiana e uma potencial redução do poder para amostras finitas em alguns casos. Em particular a sequência móvel que usa $\tau_0 = k$ (fração em que ocorre uma quebra) produzirá uma única regressão maior possível com dados puramente estacionários e, por isso, provavelmente teria um ganho de poder significativamente maior com relação a escolha de valores menores de τ_0 .

Da discussão anterior parece útil calcular testes móveis sobre vários valores de τ_0 , ou seja, considerar os seguintes valores de $\tau_0 = \tau_{01}, \tau_{02}, \dots, \tau_{0l}$ e testes baseados na estatística

$$\tilde{t}_\xi^* = \min_{\tau \in \{\tau_{01}, \tau_{02}, \dots, \tau_{0l}\}} \tilde{t}^{min}(\tau_0) \quad (5.3)$$

onde $\xi = 1$ indica modelo com constante e $\xi = 2$ para o modelo com tendência. Dado que a função mínimo é contínua em seus argumentos, pelo teorema de mapeamento contínuo e 3.32, 3.32 temos que, sob H_0 de (3.2)

$$\tilde{t}^* \Rightarrow \min_{\tau^* \in \{\tau_{0,1}, \tau_{0,2}, \dots, \tau_{0,l}\}} \tilde{\eta}(\theta^*(.; \tau_0)) \quad (5.4)$$

em que $\theta^*(.; \tau_0)$ é dado pela expressão (3.34).

Valores críticos da estatística \tilde{t}^* , para amostras finitas e assintóticos, são dados na última coluna da Tabela C.8 com a minimização tomada sobre o conjunto $\tau^* \in \{0.20, 0.40, 0.60, 0.80\}$.

Capítulo 6

Aplicação

6.1 Introdução

Para aplicação da teoria apresentada nos Capítulos 2, 3, 4 e 5 foram selecionadas as séries de Exportações (Tabela C.12), Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral (Tabela C.11) e Valor das Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital (Tabela C.13).

Inicialmente fazemos uma análise descritiva de cada série para verificar a necessidade de transformações para estabilizar a variância e eliminar um possível comportamento sazonal, de forma a podermos utilizar a metodologia apresentada anteriormente, com o objetivo de detectar mudanças na persistência e estimar possíveis pontos de quebra.

6.2 Série de Exportações

Nesta seção será analisada a Série de Exportações Brasileira, no período de janeiro de 1996 a dezembro de 2006, num total de 132 observações, apresentada na parte superior da Figura 6.1

Inicialmente vemos que, aparentemente, a série apresenta no início um comportamento sazonal de período 12 meses sem indício de tendência; a partir de 2002 temos a incorporação de uma tendência crescente na série. A parte inferior do gráfico mostra a série sazonalmente ajustada, utilizando modelo estrutural com tendência local e componente sazonal (Moretin 2006), sugerindo um comportamento estacionário no início da série e um comportamento não estacionário na segunda parte da série.

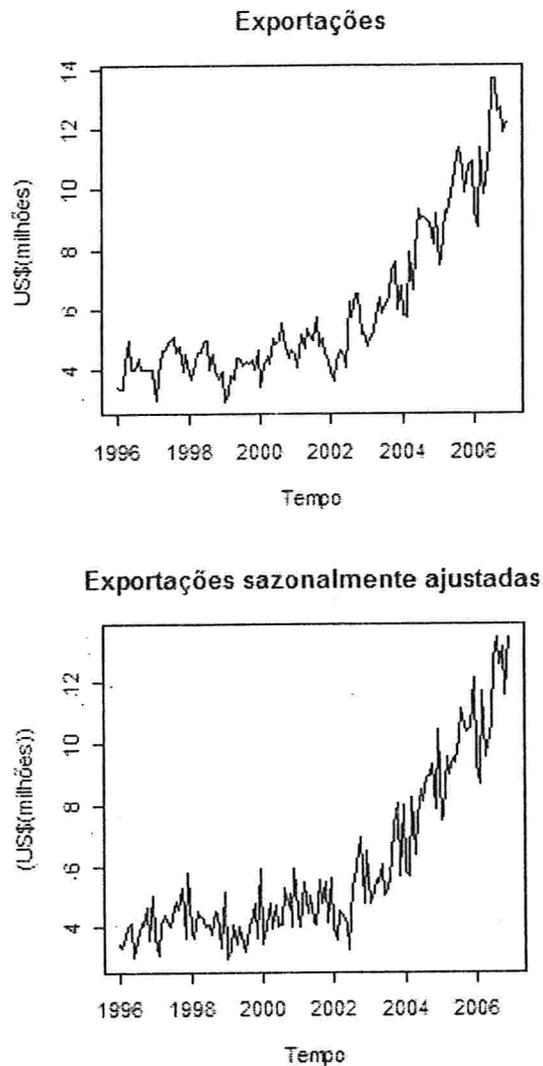


Figura 6.1: Exportações do Brasil, de janeiro de 1998 a julho de 2007.

Para testar se a série sazonalmente ajustada possui uma raiz unitária (não estacionária) podemos usar os testes de raiz unitária de Dickey-Fuller e Phillips-Perron discutidos no Capítulo 2.

Uma questão importante para a implementação do teste de raiz unitária é a especificação da ordem de defasagem p . Se p for demasiado pequeno a correlação serial residual é significativa e pode influenciar o teste. Se p for demasiado grande, então o poder do teste diminuirá. Ng e Perron (1995) sugerem o seguinte procedimento:

- i) Escolhe-se um p máximo, com este valor faz-se a regressão de Dickey-Fuller e o teste de Dickey-Fuller.
- ii) Se o valor absoluto da estatística t é maior que 1,6, então $p = p_{max}$.
- iii) Caso contrário se reduz o valor de p e repete-se o procedimento anterior até que o valor absoluto da estatística t seja maior que 1,6.

Schwert (1989) sugere

$$p_{max} = \left\lceil 12 \left(\frac{n}{100} \right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} \right\rceil \quad (6.1)$$

Utilizando o p_{max} sugerido por Schwert e o procedimento descrito para escolher p , obtemos $p=1$, logo um modelo $AR(1)$ é ajustado. Além da escolha da ordem de defasagem é importante determinar o modelo de regressão adequado para usar no teste, pois a distribuição assintótica da estatística muda quando o modelo apresenta constante ou tendência linear no tempo. O modelo adequado para testar a hipótese de raiz unitária é:

$$Y_t = \mu_0 + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t; \quad (6.2)$$

e as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \alpha = 1, \quad \text{existe raiz unitária} \quad (6.3)$$

$$H_1 : |\alpha| < 1 \quad (6.4)$$

Teste	Estatística	p-valor
Dickey-Fuller	-1,2005	0,9034
Phillips-Perron	-4.3692	0,01

Tabela 6.1: Testes estatísticos para raiz unitária.

Na Tabela 6.1 são apresentados os resultados dos testes Dickey-Fuller e de Phillips-Perron, aplicados para a amostra completa. A um nível de significância de 0,05 temos que:

- i) O teste de Dickey-Fuller não permite rejeitar a hipótese nula de existencia de raiz unitária.

ii) O teste de Phillips-Perron rejeita a hipótese nula de raiz unitária.

Agora vamos tentar distinguir entre uma tendência estocástica ($I(1)$) e um comportamento de tendência estacionária, utilizando os testes de raiz unitária recursivo, móvel e seqüencial, discutidos no Capítulo 3. Neste caso o modelo ajustado é

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} \quad (6.5)$$

e a hipótese a testar é:

$$H_0 : \quad \alpha = 1, \quad \mu_1 = 0 \quad (\text{existência de raiz unitária}) \quad (6.6)$$

$$H_1 : \quad |\alpha| < 1, \quad \mu_1 \neq 0. \quad (\text{'trend-stationary'}) \quad (6.7)$$

$$\hat{t}_{DF}(\tau) = \frac{n(\hat{\theta}_3(\tau) - 1)}{[V_n^{33}(\tau)\hat{\sigma}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau^* \leq \tau \leq 1. \quad (6.8)$$

Na Tabela 6.3 são apresentados os resultados obtidos ao aplicar o teste de Dickey-Fuller móvel, com um valor de $\tau_0 = 1/3$, o que indica um tamanho de amostra fixo de 44 observações; logo a primeira amostra compreende dados entre março de 1996 e agosto de 1999. A janela se move uma observação para frente para realizar a próxima iteração, obtendo os resultados apresentados na referida tabela para as primeiras 24 sub-amostras.

Os resultados da aplicação dos testes de Dickey Fuller recursivo e móvel são apresentados na Tabela 6.4. A um nível de significância de 0,05 temos que:

- i) Os testes t_{DF} e \tilde{t}_{DF}^{max} não rejeitam a hipótese nula, o que indica que o modelo (6.2) é dado por $Y_t = \mu_0 + Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$, assim, a série apresenta uma raiz unitária (comportamento $I(1)$) em toda sua extensão.
- ii) Os testes recursivo \hat{t}_{DF}^{max} , \hat{t}_{DF}^{min} e móvel \tilde{t}_{DF}^{min} rejeitam a hipótese nula, o que indica que a série apresenta um comportamento estacionário ao redor de uma tendência determinística.

Os valores críticos e os respectivos percentis para comparar os valores das estatísticas recursivas e móveis são dados na Tabela C.3.

Na Figura 6.2, parte superior, são apresentadas as séries de estatísticas recursivas e móveis para a série de Exportações sazonalmente ajustada e os correspondentes valores críticos:

Início da amostra	Finalda amostra	Estatística
1996 -1	1998 -8	-3,114025
1996 -1	1998 -9	-3,224996
1996 -1	1998 -10	-3,419146
1996 -1	1998 -11	-3,565965
1996 -1	1998 -12	-3,628156
1996 -1	1999 -1	-2,321595
1996 -1	1999 -2	-2,074365
1996 -1	1999 -3	-2,638734
1996 -1	1999 - 4	-3,114025
1996 -1	1999 -5	-3,224996
1996-1	1999 -6	-3,419146
1996 -1	1999 -7	-3,565965
1996 -1	1999 - 8	-3,628156
1996 -1	1999 - 9	-3,710552
1996 -1	1999 -10	-3,288228
1996 -1	1999 -11	-3,682081
1996 -1	1999 -12	-3,627274
1996 -1	2000 -1	-3,224996
1996 -1	2000 - 2	-3,419146
1996 -1	2000 -3	-3,565965
1996 -1	2000 - 4	-3,628156
1996 -1	2000 - 5	-3,710552
1996 -1	2000 - 6	-3,288228
1996 -1	2000 -7	-3,682081

Tabela 6.2: Sub-amostras usadas para calcular os primeiros 24 testes recursivos com $\tau_0 = 0.25$

i) linha tracejada ($t^{máx}$)

ii) linha cheia ($t^{mín}$)

A série de testes recursivos apresenta um comportamento de decrescimento e apre-

Início da amostra	Final da amostra	Estatística
1996 -1	1999 -8	-1,211085
1996 -2	1999 -9	-4,828068
1996 -3	1999 -10	-4,181020
1996 -4	1999 -11	-2,089035
1996 -5	1999 -12	-4,980878
1996 -6	2000 -1	-4,490854
1996 -7	2000 -2	-1,833542
1996 -8	2000 -3	-4,374318
1996 -9	2000 -4	-4,838701
1996 -10	2000 -5	-2,161229
1996 -11	2000 -6	-4,092881
1996 -12	2000 -7	-5,273555
1997 -1	2000 -8	-2,067003
1997 -2	2000 -9	-2,121096
1997 -3	2000 -10	-5,297137
1997 -4	2000 -11	-1,116288
1997 -5	2000 -12	-3,260184
1997 -6	2001 -1	-4,944949
1997 -7	2001 -2	-1,408002
1997 -8	2001 -3	-2,745505
1997 -9	2001 -4	-5,239806
1997 -10	2001 -5	-1,798458
1997 -11	2001 -6	-3,636242
1997 -12	2001 -7	-5,550423

Tabela 6.3: Testes estatísticos móvel com $\tau_0 = 1/3$

senta maior variabilidade no início que no final. A série de testes móveis apresenta um comportamento estável, ainda que no final apresenta valores muito baixos. Pode-se concluir que a série apresenta uma possível mudança na persistência, mas os testes até aqui analisados não permitem distinguir se a mudança é de nível ou de tendência.

Para verificar se existe uma quebra na tendência determinística são feitos os testes

	Recursivo			Móvel	
	t_{DF}	\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\tilde{t}_{DF}^{max}	\tilde{t}_{DF}^{min}
Estatística	-1,438429	-2,074365	-4,576595	-1,116288	-14,68967
Valores Críticos	-3,45	-1,99	-4,33	-1,49	-5,01

Tabela 6.4: Testes estatísticos recursivos e móveis para a série de exportações sazonalmente ajustada com $\tau_0 = 0,25$ para os testes recursivo e $\tau_0 = 1/3$ para o teste móvel.

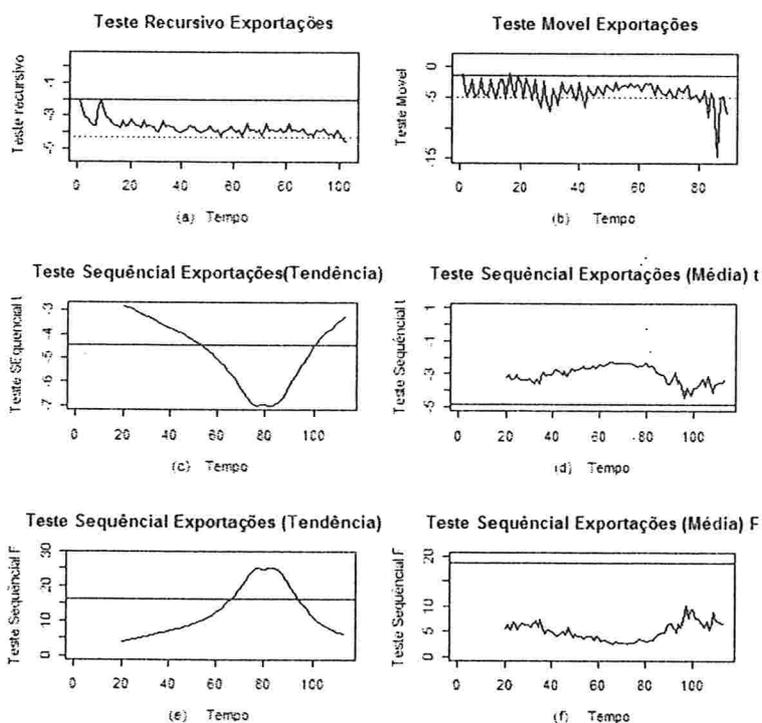


Figura 6.2: Testes recursivos, móveis e seqüenciais com as estatísticas t e F para a série Exportações.

seqüenciais, utilizando o modelo

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 t + \varsigma_{1t}(k) + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.9)$$

com

$$\text{Caso A : mudança na tendência no instante } k \quad \varsigma_{1t}(k) = (t - k) 1(t > k) \quad (6.10)$$

$$\text{Caso B : mudança na média no instante } k \quad \varsigma_{1t}(k) = 1(t > k) \quad (6.11)$$

As hipóteses a testar em cada caso são:

$$H_0 : \alpha = 1, \mu_2 = 0, \quad (6.12)$$

$$H_1 : \alpha = 1, \mu_2 \neq 0. \quad (6.13)$$

H_0 indica um modelo de raiz unitária sem quebra e a hipótese alternativa indica um modelo não estacionário com quebra ('trend-stationary'); as estatísticas usadas são a estatística t e a estatística F estudadas no Capítulo 3.

O teste seqüencial t para mudança na tendência apresentado na Figura 6.2 (d), mostra que a hipótese nula de um modelo de raiz unitária sem quebra é rejeitada, assim concluímos que a série apresenta mudança na tendência. O valor crítico igual a -4,76 é representado pela linha horizontal.

Para o teste seqüencial F a hipótese a testar é:

$$H_0 : \alpha = 1, \mu_2 = 0, \quad (6.14)$$

$$H_1 : \alpha < 1, \mu_2 \neq 0. \quad (6.15)$$

O teste seqüencial F para mudança na tendência apresentado na Figura 6.2 (f), mostra que a hipótese nula de um modelo de raiz unitária sem quebra é rejeitada, assim concluímos que a série apresenta mudança na tendência. O valor crítico igual a 16,30 é representado pela linha horizontal.

Os testes seqüenciais t e F para mudança na média não rejeitam a hipótese nula de existência de raiz unitária.

Com os resultados anteriores se tem evidência de que a série apresenta uma raiz unitária, em determinados trechos, além disso tem uma mudança na persistência, mas não se tem conhecimento da direção da mudança e do ponto de quebra; os testes utilizados até o momento só permitem dar inferência sob possíveis mudanças no comportamento.

Vamos utilizar, agora as metodologias do Capítulo 4 para avaliar as hipóteses:

H_0 : a série é gerada por um processo $I(1)$

H_1 : existe uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$.

ou seja, a série começa com um comportamento estacionário e logo apresenta um com-

portamento de raiz unitária. São aplicados os testes \hat{t}_{DF}^{minf} e \bar{t}_{DF}^{minf} com a metodologia GLS e para diferentes valores de τ_0 , fração que permite determinar o tamanho da primeira amostra nas metodologias recursiva e o suposto ponto de quebra com o teste seqüencial.

Com a metodologia GLS o modelo ajustado a os dados é

$$Y_t = d_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6.16)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \phi(L)\Delta u_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.17)$$

em que $d_t = Z_t'\beta$, $\phi(L)$ é um polinômio de ordem 1 com raízes fora do círculo unitário. Considera-se aqui o modelo em que $Z_t = [1, t]'$, $\beta = [\beta_0, \beta_1]'$ e ϵ_t satisfaz a Suposição 4.1.

A hipótese nula é que Y_t é $I(1)$ em toda a série, ou seja, $\alpha = 1$. A alternativa é que Y_t muda de $I(0)$ para $I(1)$ no tempo τ^*n ; no início tem um comportamento estacionário e depois do tempo τ^*n o comportamento é de uma série que tem raiz unitária.

$$H_0 : \alpha = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

e

$$H_1 : \begin{cases} |\alpha| < 1, & t \leq \tau^*n \\ \alpha = 1, & t > \tau^*n \end{cases}$$

Para estimar o vetor de parâmetros β do modelo (6.32), define-se os dados GLS-transformados

$$Y_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Y_1, Y_2 - \bar{\alpha}Y_1, \dots, Y_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Y_{[\tau n]-1}]', \quad (6.18)$$

$$Z_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Z_1, Z_2 - \bar{\alpha}Z_1, \dots, Z_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Z_{[\tau n]-1}]', \quad (6.19)$$

em que $\bar{\alpha} = 1 + \frac{\bar{c}}{n}$, com $\bar{c} = -25$. O estimador é obtido realizando a regressão de $Y_{\bar{\alpha}}$ em $Z_{\bar{\alpha}}$, e a série de ruídos obtida, $Y^d = Y_t - \beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)t$, é aplicado o teste de Dickey-Fuller usando a expressão

$$Y_t^d = Y_t - \hat{\beta}_0(\tau) - \hat{\beta}_1(\tau)t, \quad t = 1, \dots, \tau n. \quad (6.20)$$

em que o valor de τ_0 varia no intervalo $[0, 2, 0, 8]$ com incrementos 0,01.

Os resultados são apresentados na Tabela 6.5, em que as estimativas da fração de quebra são os valores de τ^* que dão como resultado o valor mínimo ao aplicar cada um dos testes. Com um nível de significância de 5% concluímos que:

Estadística	Valor estatística	Valor crítico	Estimativa da fração da quebra τ^*
\hat{t}_{DF}^{minf}	-11.649263	-3,26	1
\bar{t}_{DF}^{minf}	-11.61329	-3,12	0,25

Tabela 6.5: Testes estatísticos Dickey-Fuller GLS recursivos e seqüencial para a série Exportações

- i) De acordo com o teste \hat{t}_{DF}^{minf} , a série apresenta uma mudança na persistência e a fração de quebra estimada é 1.
- ii) De acordo com o teste \bar{t}_{DF}^{minf} , a série apresenta uma mudança na persistência, e a fração de quebra estimada é 0,25, que corresponde a setembro de 1998, ou seja a série apresenta um comportamento estacionário de janeiro de 1996 até setembro de 1998 e logo apresenta uma raiz unitária.

Os valores críticos e os respectivos percentis para comparar os valores das estatísticas recursiva e seqüencial da metodologia GLS são dados na Tabela C.10.

Agora aplicamos os testes recursivos e móveis com diferentes frações iniciais τ_0 apresentados no Capítulo 5, que determinam o tamanho da primeira amostra no caso recursivo e o tamanho da janela no caso móvel.

Para aplicar o teste foi escolhido o intervalo $\mathcal{R} = [0, 1, 0, 3]$ em que varia a fração τ_0 para o teste recursivo e $\mathcal{R} = [0, 1, 0, 9]$ para o teste móvel, com incrementos de 0.05 em ambos casos.

O procedimento utilizado para obter os valores finais apresentados na Tabela 6.8 é calcular para cada valor τ_0 os testes recursivos e móveis em todo o percorrer da série. Por exemplo, para um valor fixo de $\tau_0 = 0,3$, se obtém a série de estatísticas recursivas apresentadas na Tabela 6.6. Na Tabela 6.7 são apresentados os resultados para cada valor τ_0 , em que o valor mínimo é -3.853988 para valores de $\tau_0 = 0, 10, 0, 15, 0, 25, 0, 25, 0, 30$, para o teste \hat{t}_{DF}^{minf} reportado na Tabela 6.8.

Da Tabela 6.8, a um nível de significância de 0,05, temos que:

- i) O teste \hat{t}_{DF}^{minf} rejeita a hipótese nula, o que indica que a série apresenta um comportamento estacionário ($I(0)$) para observações entre janeiro de 1996 e setembro de 2002, e um comportamento de raiz unitária no resto da série.

Data de início da amostra	Data de finalização da amostra	Estatística
1996 - 1	1999 - 2	-2,1830821
1996 -1	1999 -3	-2,2108882
1996 -1	1999 -4	-2,3950789
1996 -1	1999 -5	-2,6068230
1996 -1	1999 -6	-2,5494228
1996 -1	1999 -7	-2,4054162
1996 -1	1999 -8	-2,5599774
1996 -1	1999 -9	-2,8021136
1996 -1	1999 -10	-2,8634637
1996 -1	1999 -11	-2,9811274
1996 -1	1999 -12	-2,5984087
1996 -1	2000 -1	-2,8732256
1996 -1	2000 -2	-3,0114447
1996 -1	2000 -3	-3,0074117
1996 -1	2000 -4	-3,0469034
1996 -1	2000 -5	-3,0317912
1996 -1	2000 -6	-3,0997808
1996 -1	2000 -7	-3,1385351
1996 -1	2000 -8	-3,0587814
1996 -1	2000 -9	-2,9581779
1996 -1	2000 -10	-2,7935270
1996 -1	2000 -11	-3,1293583
1996 -1	2000 -12	-2,8605190
1996 -1	2001 -1	-2,8777648

Tabela 6.6: Testes estatísticos Dickey-Fuller Recursivos para a série Exportações com $\tau_0 = 0.3$ e sub-amostras utilizadas.

- ii) O teste \hat{t}_{DFR}^{minf} , permite concluir que a série apresenta um comportamento estacionário entre janeiro de 1996 e maio de 2002 e depois apresenta um comportamento de raiz unitária.

Os valores críticos e os respectivos percentis para comparar os valores das estatísticas \hat{t}_{DFR}^{minf} e \bar{t}_{DFR}^{minf} com diferentes valores de τ_0 são dados nas Tabelas C.7 e C.9.

τ_0	Estatística	τ_0	Estatística
0,10	-3.853988	0,20	-3.853988
0,15	-3.853988	0,25	-3.853988
		0,30	-3.853988

Tabela 6.7: Testes estatísticos Dickey-Fuller Recursivos para a série Exportações com diferentes valores de τ_0 .

Estatística	Valor estatística	Valor crítico	Estimativa da fração da quebra τ^*
\hat{t}_{DF}^{minf}	-3.853988	-3,72	0,60
\tilde{t}_{DF}^{minf}	-12.024548	-4,08	0,58

Tabela 6.8: Testes estatísticos recursivos e móveis para a série Exportações

Em resumo temos que:

- i) A metodologia GLS (teste seqüencial) permite detectar quebra na estrutura da série em setembro de 1998.
- ii) Com o teste recursivo temos um ponto de quebra estimado em setembro de 2002.
- iii) Com o teste móvel o ponto de quebra estimado é maio de 2002.

Na Figura 6.3 é apresentado o gráfico da série Exportações sazonalmente ajustada e os pontos de quebra estimados com os testes recursivo, móvel e sequencial GLS, respectivamente. A linha tracejada indica o ponto de quebra obtido com o teste sequencial GLS, linha cheia indica o ponto de quebra obtido com o teste móvel e a linha pontilhada o ponto estimado com o teste recursivo.

6.3 Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

A série analisada nesta seção é o Índice de Preços Internacionais de Commodities. Os commodities são títulos correspondentes a negociações com produtos agropecuários, metais, minérios e outros produtos primários nas bolsas de mercadorias. Os negócios referem-se a entrega futura de mercadorias, mas não significa necessariamente que há movimento físico de produtos nas bolsas. O que se negocia são contratos Conjuntura -

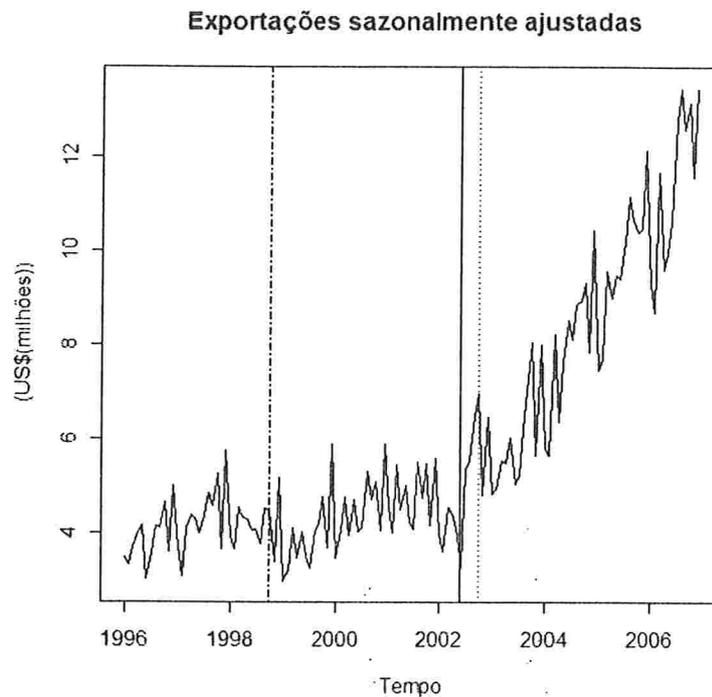


Figura 6.3: Série Exportações de Brasil com pontos de quebras estimado pelos testes recursivo e móvel

Elementos constituintes da situação econômica de um setor, de um ramo de atividade, de uma região ou de um país em um determinado momento.

A série é analisada no período de janeiro de 1980 a agosto de 2007.

A Figura 6.4 apresenta o gráfico da série original que nos mostra inicialmente um comportamento de decrescimento até 1986, logo cresce até 1988, depois apresenta um comportamento aparentemente estacionário; a partir de 1997 apresenta um decrescimento até 1999 e depois um padrão de crescimento. A partir de 2003, parece ter uma tendência linear positiva. A aplicação de um teste de periodicidade não detectou tal componente na série.

Para se detectar a presença de uma raiz unitária foram feitos os testes de Dickey-Fuller e Phillips-Perron. Utilizando o procedimento sugerido por Ng e Perron (1995) para escolher p , se obtém o valor $p=1$.

O modelo utilizado para as regressões de Dickey-Fuller é

$$Y_t = \mu_0 + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t; \quad (6.21)$$

Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

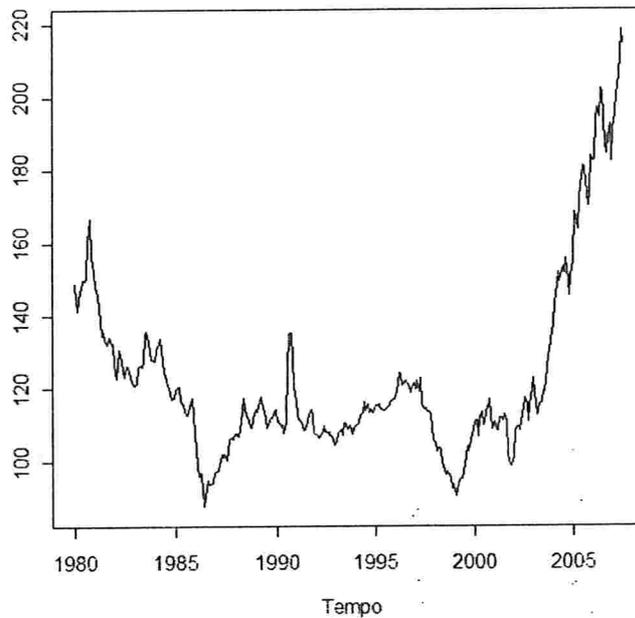


Figura 6.4: Série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

e as hipóteses a serem testada são:

$$H_0 : \alpha = 1, \tag{6.22}$$

$$H_1 : |\alpha| < 1 \tag{6.23}$$

Teste	Estatística	p-valor
Dickey-Fuller	-0,1031	0,99
Phillips-Perron	0,2515	0,99

Tabela 6.9: Testes Dickey-Fuller e Phillips-Perron

Na Tabela 6.9 são apresentados os resultados dos testes. A hipótese (6.22) não é rejeitada e, assim, pode-se concluir que a série apresenta uma raiz unitária.

Agora tentamos distinguir entre um comportamento de tendência estocástica ($I(1)$) e um comportamento de tendência estacionária, utilizando os testes de raiz unitária recursivo, móvel e seqüencial, discutidos no

Capítulo 3. Neste caso o modelo ajustado:

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} \quad (6.24)$$

e as hipóteses a testar são:

$$H_0 : \alpha = 1, \mu_1 = 0 \quad (\text{existe uma raiz unitária}) \quad (6.25)$$

$$H_1 : |\alpha| < 1, \mu_1 \neq 0 \quad (\text{'trend-stationary'}) \quad (6.26)$$

Para aplicar o teste recursivo, escolhemos $\tau_0 = 0,25$, o que indica que o tamanho da amostra para fazer o primeiro teste de Dickey-Fuller é $n\tau_0 = 331 \times 0,25 = 82$. Assim a primeira amostra é constituída das primeiras 82 observações, logo o primeiro teste recursivo deve ser feito com dados de janeiro de 1980 a setembro de 1986. A Tabela 6.10 apresenta as amostras utilizadas no teste, bem como os valores das estatísticas dadas pela expressão (6.8).

Na Tabela 6.11 são apresentados os resultados obtidos ao aplicar o teste de Dickey-Fuller móvel com um valor de $\tau_0 = 1/3$, o que indica um tamanho da amostra de 110 observações, logo a primeira amostra compreende dados entre janeiro de 1980 e fevereiro de 1989. A janela se move uma observação para frente para realizar a próxima iteração, obtendo os resultados apresentados na referida tabela. O cálculo da estatística t feito utilizando a expressão (3.27)

Na Tabela 6.12 são apresentados os resultados da aplicação dos testes recursivo e móvel. A um nível de significância de 0,05 temos que nenhum dos testes permite rejeitar a hipótese nula.

Na Figura 6.5 são apresentadas as séries de estatísticas recursivas, móveis e seqüências, e os correspondentes valores críticos. A linha tracejada indica $t^{máx}$ e a linha cheia t^{min} .

Na Figura 6.5(a) é apresentada a série de teste recursivos, obtida da mesma forma que na seção anterior. A série de testes móveis é apresentada na Figura 6.5(b). Os testes estudados não permitem rejeitar a hipótese nula de existência de uma raiz unitária.

Início da amostra	Final da amostra	Estatística
1980 -1	1986 -9	-2,542604
1980 -1	1986 -10	-2,577562
1980 -1	1986 -11	-2,640452
1980 -1	1986 -12	-2,669407
1980 -1	1987 -1	-2,355184
1980 -1	1987 -2	-2,419411
1980 -1	1987 -3	-2,469609
1980 -1	1987 -4	-2,499476
1980 -1	1987 -5	-2,542604
1980 -1	1987 -6	-2,577562
1980 -1	1987 -7	-2,640452
1980 -1	1987 -8	-2,669407
1980 -1	1987 -9	-2,701039
1980 -1	1987 -10	-2,715194
1980 -1	1987 -11	-2,570839
1980 -1	1987 -12	-2,566408
1980 -1	1988 -1	-2,542604
1980 -1	1988 -2	-2,577562
1980 -1	1988 -3	-2,640452
1980 -1	1988 -4	-2,669407
1980 -1	1988 -5	-2,701039
1980 -1	1988 -6	-2,715194
1980 -1	1988 -7	-2,570839
1980 -1	1988 -8	-2,566408

Tabela 6.10: Testes estatísticos recursivos com $\tau_0 = 0,25$

Para verificar se existe uma quebra na tendência determinística ou no nível, são feitos os testes seqüenciais, utilizando o modelo

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 \varsigma_{1t}(k) + \mu_2 t + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.27)$$

Início da amostra	Data de finalização da amostra	Estatística
1980 -1	1989 -2	-1,59687984
1980 -2	1989 -3	-1,46971879
1980 -3	1989 -4	-1,67763710
1980 -4	1989 -5	-1,44664947
1980 -5	1989 -6	-1,67849442
1980 -6	1989 -7	-2,23058858
1980 -7	1989 -8	-2,55680097
1980 -8	1989 -9	-2,18470928
1980 -9	1989 -10	-2,13798409
1980 -10	1989 -11	-1,82852297
1980 -11	1989 -12	-1,94437740
1980 -12	1990 -1	-1,76329855
1981 -1	1990 -2	-1,44527206
1981 -2	1990 -3	-1,53984369
1981 -3	1990 -4	-1,61136348
1981 -4	1990 -5	-1,33947285
1981 -5	1990 -6	-1,60138569
1981 -6	1990 -7	-1,55082741
1981 -7	1990 -8	-0,78818590
1981 -8	1990 -9	-0,80590047
1981 -9	1990 -10	-0,73841404
1981 -10	1990 -11	-0,55841408
1981 -11	1990 -12	-1,01033247
1981 -12	1991 -1	-1,26591088

Tabela 6.11: Testes estatísticos móveis com $\tau_0 = 1/3$

com

Caso A : mudança na tendência no instante k $\varsigma_{1t}(k) = (t - k) 1(t > k)$ (6.28)

Caso B : mudança na média no instante k $\varsigma_{1t}(k) = 1(t > k)$ (6.29)

As hipóteses a serem testadas com a estatística t são:

	Recursiva			Móvel	
	t_{DF}	\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\bar{t}_{DF}^{max}	\bar{t}_{DF}^{min}
Estatística	-0,1031	-1.750409	-2.936055	0.16991497	-3.2892 92
Valores Críticos	-3,45	-1,99	-4,33	-1,49	-5,01

Tabela 6.12: Testes estatísticos recursivos e móveis para a série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral.

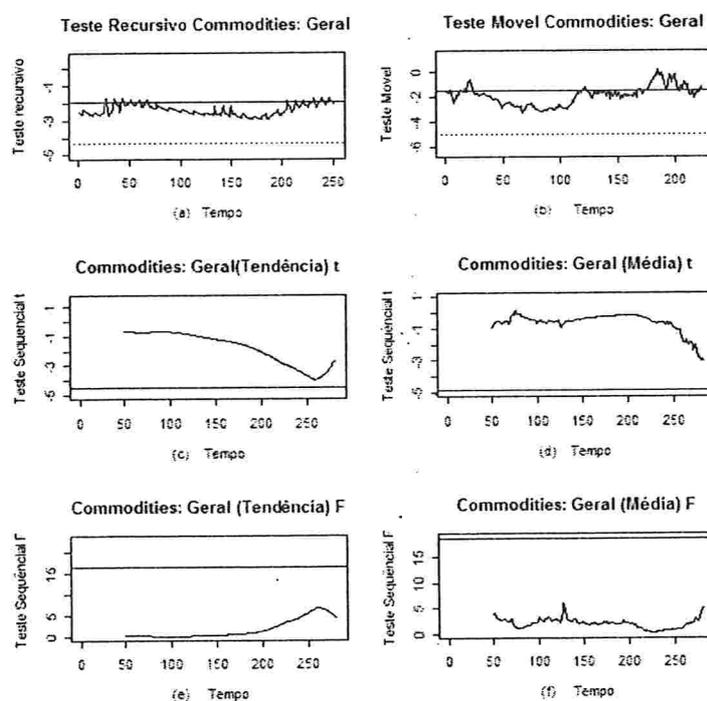


Figura 6.5: Testes Recursivos, móveis e sequenciais para a série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

$$H_0 : \alpha = 1, \mu_2 = 0, \quad (6.30)$$

$$H_1 : \alpha = 1, \mu_2 \neq 0. \quad (6.31)$$

H_0 indica um modelo de raiz unitária sem quebra e a hipótese alternativa indica um modelo não estacionário com quebra ('trend-stationary').

O teste seqüencial t para mudança na tendência apresentados na Figura 6.5 (c), não permite rejeitar a hipótese nula. O valor crítico igual a -4,76 é representado pela

linha horizontal.

Os testes seqüenciais F para mudança na tendência, apresentados na Figura 6.5 (e), mostram que não à suficiente evidencia para rejeitar a hipótese nula. O valor crítico igual a 16,30 é representado pela linha horizontal.

Os testes seqüenciais t e F para mudança na média não rejeitam a hipótese nula de existência de raiz unitária.

Vamos utilizar agora as metodologias do Capítulo 3 para avaliar as hipótese:

H_0 : a série é gerada por um processo $I(1)$

H_1 : existe uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$,

ou seja, a série começa com um comportamento estacionário e logo apresenta um comportamento de raiz unitária. São aplicados os testes \hat{t}_{DFD}^{minf} e \hat{t}_{DFD}^{minf} com a metodologia GLS e para diferentes valores de τ_0 , fração que permite determinar o tamanho da primeira amostra nas metodologias recursiva e móvel.

Com a metodologia GLS o modelo ajustado aos dados é

$$Y_t = d_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6.32)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \phi(L)\Delta u_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.33)$$

em que $d_t = Z_t'\beta$, $\phi(L)$ é um polinômio de ordem 1 com raízes fora do círculo unitário. Considera-se aqui o modelo em que $Z_t = [1, t]'$, $\beta = [\beta_0, \beta_1]'$ e ϵ_t satisfaz a Suposição 4.1.

A hipótese nula é que Y_t é $I(1)$ em toda a série, ou seja, $\alpha = 1$. A alternativa é que Y_t muda de $I(0)$ para $I(1)$ no tempo τ^*n ; no início tem um comportamento estacionário e depois do tempo τ^*n o comportamento é de uma série que tem raiz unitária. As hipótese são:

$$H_0 : \alpha = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

e

$$H_1 : \begin{cases} |\alpha| < 1, & t \leq \tau^*n \\ \alpha = 1, & t > \tau^*n \end{cases}$$

Para estimar o vetor de parâmetros β do modelo (6.32), define-se os dados GLS-transformados

$$Y_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Y_1, Y_2 - \bar{\alpha}Y_1, \dots, Y_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Y_{[\tau n]-1}]', \quad (6.34)$$

$$Z_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Z_1, Z_2 - \bar{\alpha}Z_1, \dots, Z_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Z_{[\tau n]-1}]', \quad (6.35)$$

em que $\bar{\alpha} = 1 + \frac{\bar{c}}{n}$, com $\bar{c} = -25$. O estimador é obtido realizando a regressão de $Y_{\bar{\alpha}}$ em $Z_{\bar{\alpha}}$ e à série de ruídos obtida, $Y^d = Y_t - \beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)t$, é aplicado o teste de Dickey-Fuller usando a expressão

$$Y_t^d = Y_t - \hat{\beta}_0(\tau) - \hat{\beta}_1(\tau)t, \quad t = 1, \dots, \tau n. \quad (6.36)$$

em que o valor de τ_0 varia no intervalo $[0.2, 0.8]$ com incrementos 0,01.

Estatística	Valor estatística	Valores críticos	Estimativa da fração de quebra τ^*
\hat{t}_{DF}^{min}	-120,90200	-3,26	0,98
\tilde{t}_{DF}^{min}	-130.5472	-3,12	0,7

Tabela 6.13: Testes estatísticos recursivos GLS para a série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral.

A Tabela 6.13 apresenta os valores das estatísticas avaliadas com a metodologia GLS, em que a estimativa da fração de quebra, τ^* , é o valor de τ^* em que a sequência de estatísticas apresenta o valor mínimo para cada fração inicial τ_0 escolhida. Todas as estatísticas rejeitam a hipótese nula. Assim:

- i) De acordo com o teste \hat{t}_{DF}^{min} , a série apresenta uma mudança na persistência e o ponto de quebra estimado é 0,98, que corresponde a janeiro de 2007, ou seja, a série tem um comportamento estacionário desde janeiro de 1988 até janeiro de 2007 e logo apresenta uma raiz unitária.
- ii) De acordo com o teste \tilde{t}_{DF}^{min} , a série apresenta uma mudança na persistência, e o ponto de quebra estimado em abril de 1999, ou seja, a série apresenta um comportamento estacionário desde janeiro de 1988 até abril de 1999 e depois tem uma raiz unitária.

Outros testes que permitem estimar o ponto de quebra são os testes recursivos e móveis aplicados com diferentes frações iniciais τ_0 , que determinam o tamanho da

primeira amostra no caso recursivo e o tamanho da janela no caso móvel.

Para aplicar o teste foi escolhido o intervalo $\mathcal{R} = [0, 1, 0, 5]$ para o teste recursivo e $\mathcal{R} = [0, 1, 0, 9]$ para o teste móvel, com incrementos de 0,05 em ambos casos.

Estadística	Valor estatística	Valor crítico	Estimativa da fração da quebra τ^*
\hat{t}_{DFE}^{minf}	-4,722260	-3,59	0,84
\tilde{t}_{DFE}^{minf}	-6.87130573	-4,08	0,58

Tabela 6.14: Testes estatísticos recursivos com diferentes valores da fração de amostra τ_0 para a série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

A Tabela 6.14 apresenta os valores das estatísticas para os diferentes valores de τ_0 . A um nível de significância de 0,05 temos que:

- i) O teste \hat{t}_{DFE}^{minf} rejeita a hipótese nula, indicando que a série apresenta uma mudança na tendência e o ponto de quebra estimado é março de 2003, ou seja, a série tem um comportamento estacionário de janeiro de 1988 até março de 2003 e depois apresenta um comportamento de raiz unitária.
- ii) O teste também \tilde{t}_{DFE}^{minf} rejeita a hipótese nula, isto é, a série tem uma mudança na tendência e o ponto de quebra estimado é $\tau = 0,48$ que corresponde a dezembro de 1995, ou seja, a série tem um comportamento estacionário de janeiro de 1988 até dezembro de 1995 e depois apresenta uma raiz unitária (a subamostra utilizada para calcular a estatística \tilde{t}_{DFE}^{minf} foi agosto de 1990 até dezembro de 1995, com um valor de $\tau_0 = 0.2$).

Na Figura 6.6 é apresentado o gráfico da série Índice de Preços Internacionais de Commodities e os pontos de quebra estimados com os testes recursivo, móvel e sequencial GLS, respectivamente. A linha tracejada indica o ponto de quebra obtido com o teste movel, linha pontilhada indica o ponto de quebra obtido com o teste recursivo e a linha cheia o ponto estimado com o teste sequencial GLS.

Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

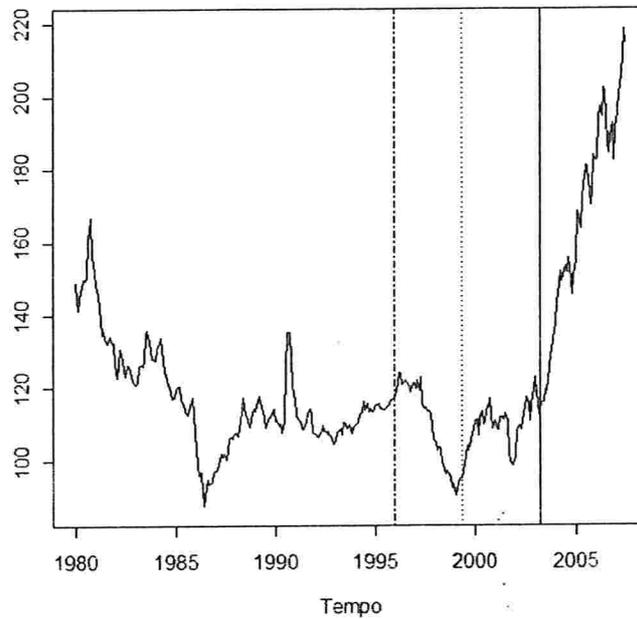


Figura 6.6: série Índice de Preços Internacionais de Commodities Geral com ponto de quebra estimado

6.4 Valor das Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital.

Analisaremos agora a série Valor das importações de uso: Bens de capital, entre janeiro de 1985 e dezembro de 2006, num total de 264 observações.

A Figura 6.7 na parte superior apresenta o gráfico da série que aparentemente tem no seu início uma variância menor que na parte final. Para estabilizar a variância aplicamos a transformação logaritmo, cujo gráfico é apresentado na parte inferior da Figura 6.7, mostrando uma variância mais estável. Além disso, apresenta um comportamento sazonal de período 12 e para eliminá-la foi aplicado um filtro de médias móveis multiplicativas (Moretin 2004).

A Figura 6.8 apresenta a série sazonalmente ajustada, que tem um padrão de crescimento até aproximadamente 1997 ou 1998 e depois apresenta um comportamento mais estável com respeito à média.

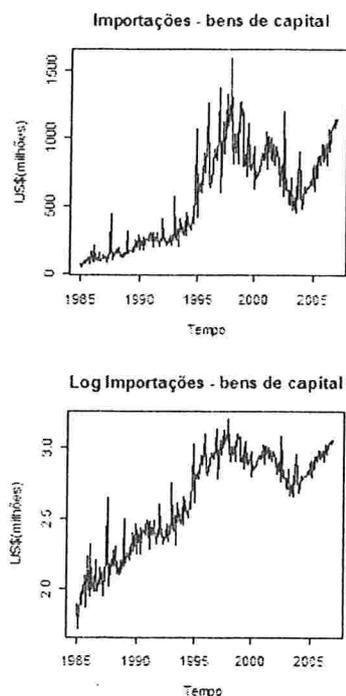


Figura 6.7: Série Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital

Para testar se a série sazonalmente ajustada possui uma raiz unitária, utilizamos os testes de raiz unitária de Dickey-Fuller convencional e Phillips-Perron, discutidos no Capítulo 2, cujos resultados estão na Tabela 6.15.

A um nível de significância de 5% se tem que:

Teste	Estatística	p-valor
Dickey-Fuller	-3,3187	0,06849
Phillips-Perron	-4,0965	0,01

Tabela 6.15: testes Dickey-Fuller e Phillips-Perron

- i) O teste de Dickey-Fuller não permite rejeitar a hipótese nula de existencia de una raiz unitária.
- ii) O teste de Phillips-Perron rejeita a hipótese nula de existencia de uma raiz unitária.

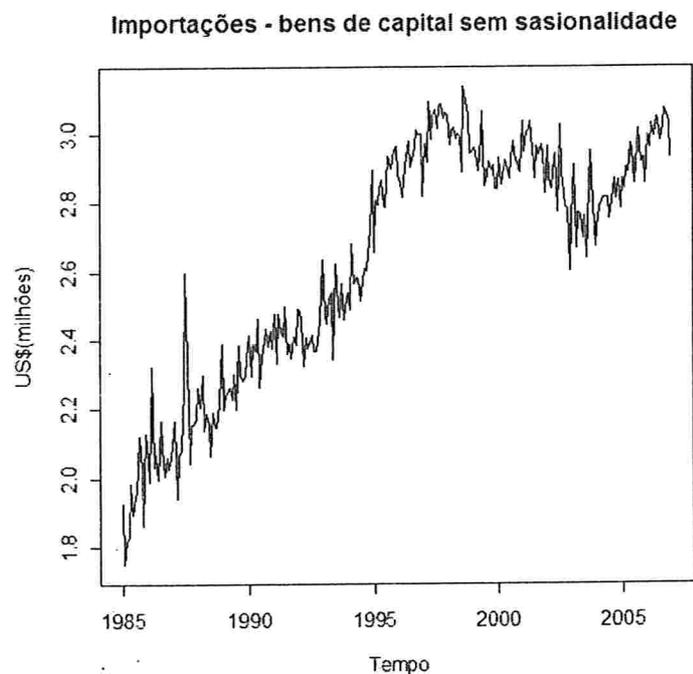


Figura 6.8: Série log de Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital sazonalmente ajustada

Para tentar distinguir entre um comportamento de tendência estocástica ($I(1)$) e um comportamento de tendência estacionária, utilizamos os testes de raiz unitária recursivo, móvel e seqüencial, discutidos no Capítulo 3. Neste caso o modelo ajustado é:

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} \quad (6.37)$$

e a hipótese a testar é:

$$H_0 : \alpha = 1, \mu = 0 \quad (\text{existe uma raiz unitária}) \quad (6.38)$$

$$H_1 : |\alpha| < 1, \mu \neq 0 \quad (\text{'trend-stationary'}). \quad (6.39)$$

Para aplicar o teste recursivo, escolhemos $\tau_0 = 0,25$, o que indica que o tamanho da amostra para fazer o primeiro teste de Dickey-Fuller é $[n\tau_0] = [264 \times 0,25] = 65$. Assim a primeira amostra é constituída das primeiras 65 observações, logo o primeiro teste recursivo deve ser feito com dados de janeiro de 1985 a maio de 1990. A Tabela 6.16 apresenta as primeiras 24 sub-amostras utilizadas no teste, bem como os valores das estatísticas dadas pela expressão (6.40). Foi utilizada a reparametrização (3.3) e a estatística

Data de inicio da amostra	Data de finalização da amostra	Estatística
1985 - 1	1990 -5	-2,960525
1985 -1	1990 - 6	-3,130517
1985 -1	1990 -7	-2,921945
1985 -1	1990 -8	-2,933347
1985 -1	1990 -9	-3,141296
1985 -1	1990 -10	-3,340493
1985 -1	1990 -11	-2,406216
1985 -1	1990 -12	-2,753124
1985 -1	1991 -1	-2,960525
1985 -1	1991 -2	-3,130517
1985 -1	1991 -3	-2,921945
1985 -1	1991 -4	-2,933347
1985 -1	1991 -5	-3,141296
1985 -1	1991 -6	-3,340493
1985 -1	1991 -7	-2,406216
1985 -1	1991 -8	-2,753124
1985 -1	1991 -9	-3,971989
1985 -1	1991 -10	-4,052512
1985 -1	1991 -11	-4,045761
1985 -1	1991 -12	-4,090787
1985 -1	1992 -1	-3,141296
1985 -1	1992 -2	-3,340493
1985 -1	1992 -3	-2,406216
1985 -1	1992 -4	-2,753124

Tabela 6.16: Testes estatísticos recursivos com $\tau_0 = 0.25$

$$\hat{t}_{DF}(\tau) = \frac{n(\hat{\theta}_3(\tau) - 1)}{[V_n^{33}(\tau)\hat{\sigma}^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau^* \leq \tau \leq 1. \quad (6.40)$$

Na Tabela 6.17 são apresentados os resultados obtidos ao aplicar o teste de Dikey-Fuller móvel aos dados com um valor de $\tau_0 = 1/3$, o que indica um tamanho fixo da amostra de 88 observações. Logo a primeira amostra compreende dados entre janeiro

Data de inicio da amostra	Data de finalização da amostra	Estatística
1985 -1	1992 -4	-3,2788294
1985 -2	1992 -5	-2,7201122
1985 -3	1992 -6	-3,8581298
1985 -4	1992 -7	-3,3576632
1985 -5	1992 -8	-2,1703423
1985 -6	1992 -9	-3,1173516
1985 -7	1992 -10	-3,2202491
1985 -8	1992 -11	-2,9306853
1985 -9	1992 -12	-3,3916023
1985 -10	1993 -1	-3,2243552
1985 -11	1993 -2	-3,3652153
1985 -12	1993 -3	-4,5238593
1986 -1	1993 -4	-3,3042094
1986 -2	1993 -5	-2,4016620
1986 -3	1993 -6	-3,8609325
1986 -4	1993 -7	-3,2531513
1986 -5	1993 -8	-2,4747675
1986 -6	1993 -9	-3,3912556
1986 -7	1993 -10	-3,2798537
1986 -8	1993 -11	-3,2151869
1986 -9	1993 -12	-3,4839369
1986 -10	1994 -1	-3,2927602
1986 -11	1994 -2	-2,7140102
1986 -12	1994 -3	-4,2400663

Tabela 6.17: Testes estatísticos móvel com $\tau_0 = \frac{1}{3}$

de 1985 e abril de 1992. A janela se move uma observação para frente para realizar a próxima iteração, obtendo os resultados apresentados na referida tabela. Para realizar os calculos da estatística é utilizada a expressão (3.27).

Na Tabela 6.18 são apresentados os resultados da aplicação dos testes recursivo e móvel. A um nível de significância de 0,05 temos que:

- i) Com os testes t_{DF} e \tilde{t}_{DF}^{max} não podemos rejeitar a hipótese nula, o que indica não

	t_{DF}	Recursiva		Móvel	
		\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\tilde{t}_{DF}^{max}	\tilde{t}_{DF}^{min}
Estatística	-3,312482	-2.406216	-5.922995	-0.2088742	-4.523859
Valores Críticos	-3,45	-1,99	-4,33	-1,49	-5,01

Tabela 6.18: Testes estatísticos Recursivos e Móveis para a série Importações de Bens de Capital.

podemos rejeitar a existência de uma raiz unitária.

- ii) Os testes \hat{t}_{DF}^{min} , \hat{t}_{DF}^{max} e \tilde{t}_{DF}^{min} rejeita a hipótese nula o que indica que a série apresenta um comportamento estacionário ao redor de uma tendência determinística.

Os valores críticos e os respectivos percentis para comparar os valores das estatísticas recursivas e móveis são dados na Tabela C.3.

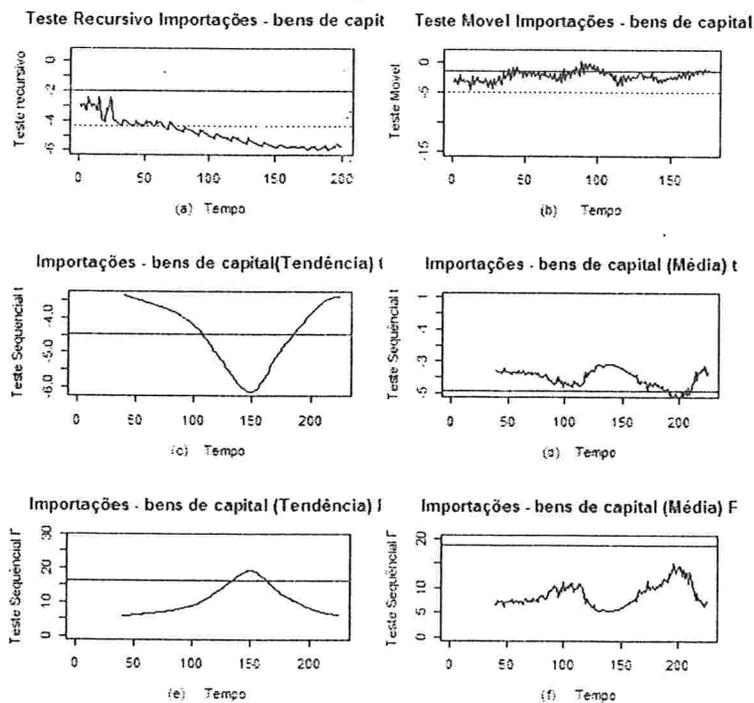


Figura 6.9: Testes estatísticos Recursivos e Móveis para a série Importações de Bens de Capital

Na Figura 6.9 são apresentadas as séries de estatísticas recursivas, móveis e seqüên-

cias e os correspondentes valores críticos. A linha tracejada indica $t^{máx}$ e a linha cheia t^{min} .

Na Figura 6.9(a) é apresentada a série de teste recursivos, obtida da mesma forma que na seção anterior. A série de testes móveis é apresentada na Figura 6.9(b). Pode-se concluir que a série apresenta uma possível mudança na persistência, mas os testes até aqui analisados não permitem distinguir se a mudança é de nível ou de tendência.

Para verificar se existe uma quebra na tendência determinística são feitos os testes seqüenciais, utilizando o modelo

$$Y_t = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 t + \varsigma_{1t}(k) + \alpha Y_{t-1} + \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.41)$$

com

$$\text{Caso A : mudança na tendência no instante } k \quad \varsigma_{1t}(k) = (t - k) 1(t > k) \quad (6.42)$$

$$\text{Caso B : mudança na média no instante } k \quad \varsigma_{1t}(k) = 1(t > k) \quad (6.43)$$

A hipótese a se testar com a estatística t é:

$$H_0 : \alpha = 1, \quad \mu_2 = 0, \quad (6.44)$$

$$H_1 : \alpha = 1, \quad \mu_2 \neq 0. \quad (6.45)$$

H_0 indica um modelo de raiz unitária sem quebra e a hipótese alternativa indica um modelo não estacionário com quebra ('trend-stationary').

O teste seqüencial t para mudança na tendência apresentado na Figura 6.9 (c), mostra que a hipótese nula de um modelo de raiz unitária sem quebra é rejeitada. Assim concluímos que a série apresenta mudança na tendência. O valor crítico igual a -4,76 é representado pela linha horizontal.

Para o teste seqüencial F a hipótese a testar é:

$$H_0 : \alpha = 1, \quad \mu_2 = 0, \quad (6.46)$$

$$H_1 : \alpha < 1, \quad \mu_2 \neq 0 \quad (6.47)$$

O teste seqüencial F para mudança na tendência apresentado na Figura 6.9 (e), mostra que a hipótese nula de um modelo de raiz unitária sem quebra é rejeitada, assim concluímos que a série apresenta mudança na tendência. O valor crítico igual a 16,30 é

representado pela linha horizontal.

O teste seqüencial t para mudança na média rejeita a hipótese nula. O valor crítico é dado por -5.07 e é representado pela linha horizontal. A utilização do teste seqüencial F para mudança na média faz com que não possamos rejeitar a hipótese nula de existência de raiz unitária.

Com os resultados anteriores se tem evidência de que a série apresenta uma raiz unitária, em determinados trechos, além disso tem uma mudança na persistência, mas não se tem conhecimento do ponto de quebra; os testes utilizados até o momento só permitem dar inferência sob possíveis mudanças na persistência.

Vamos utilizar, agora a metodologia do Capítulo 4 para avaliar as hipóteses:

H_0 : a série é gerada por um processo $I(1)$

H_1 : existe uma mudança de $I(1)$ para $I(0)$.

ou seja, a série começa com um comportamento de raiz unitária e em seguida apresenta um comportamento estacionário. São aplicados os testes \hat{t}_{DFR}^{min} e \bar{t}_{DFR}^{min} com a metodologia GLS e para diferentes valores de τ_0 , fração que permite determinar o tamanho da primeira amostra nas metodologias recursiva e móvel.

Com a metodologia GLS o modelo ajustado a os dados é

$$Y_t = d_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6.48)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \phi(L)\Delta u_{t-1} + \epsilon_t, \quad (6.49)$$

em que $d_t = Z_t'\beta$, $\phi(L)$ é um polinômio de ordem 1 com raízes fora do círculo unitário. Considera-se aqui o modelo em que $Z_t = [1, t]'$, $\beta = [\beta_0, \beta_1]'$ e ϵ_t satisfaz a Suposição 4.1.

A hipótese nula é que Y_t é $I(1)$ em toda a série, ou seja, $\alpha = 1$. A alternativa é que Y_t mude de $I(1)$ para $I(0)$ no tempo τ^*n ; no início tem um comportamento de raiz unitária e depois do tempo τ^*n o comportamento é estacionário.

$$H_0 : \alpha = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

e

$$H_1 : \begin{cases} \alpha = 1, & t \leq \tau^*n \\ |\alpha| < 1, & t > \tau^*n \end{cases}$$

Para estimar o vetor de parâmetros β do modelo (6.32), define-se os dados GLS-transformados

$$Y_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Y_1, Y_2 - \bar{\alpha}Y_1, \dots, Y_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Y_{[\tau n]-1}]', \quad (6.50)$$

$$Z_{\bar{\alpha}}(\tau) = [Z_1, Z_2 - \bar{\alpha}Z_1, \dots, Z_{[\tau n]} - \bar{\alpha}Z_{[\tau n]-1}]', \quad (6.51)$$

em que $\bar{\alpha} = 1 + \frac{\bar{c}}{n}$, para $\bar{c} = -25$. O estimador é obtido realizando a regressão de $Y_{\bar{\alpha}}$ em $Z_{\bar{\alpha}}$, e à série de ruídos obtida, $Y^d = Y_t - \beta_0(\tau) - \beta_1(\tau)t$, é aplicado o teste de Dickey-Fuller usando a expressão

$$Y_t^d = Y_t - \hat{\beta}_0(\tau) - \hat{\beta}_1(\tau)t, \quad t = 1, \dots, \tau n. \quad (6.52)$$

em que o valor de τ_0 varia no intervalo $[0, 2, 0, 8]$ com incrementos 0,01.

Estatística	Valor estatística	Valor crítico	Estimativa da fração da quebra τ^*
\hat{t}_{DFR}^{min}	-0.13562369	-3,26	0,01
\tilde{t}_{DFR}^{min}	-0.1336814	-3,12	0,3

Tabela 6.19: Testes estatísticos Dickey-Fuller GLS recursivos e sequencial para a série Importações de Bens de Capital

A Tabela 6.19 apresenta os valores para as estatísticas avaliadas com a metodologia GLS, em que a estimativa da fração de quebra, τ^* , é o valor de τ^* em que a sequência de estatísticas apresenta o valor mínimo para cada fração inicial τ_0 escolhida. Nenhuma das estatísticas permite rejeitar a hipótese nula, ou seja, não podemos rejeitar a existência de raiz unitária em toda a extensão da série.

Estatística	Valor estatística	Valor crítico	Estimativa da fração da quebra τ^*
\hat{t}_{DFR}^{min}	-5.922995	-3,72	0,10
\tilde{t}_{DFR}^{min}	-9.380731	-3,33	0,4

Tabela 6.20: Testes estatísticos recursivos e móveis, com diferentes valores da fração de amostra τ_0 , para a série Importações de Bens de Capital.

A Tabela 6.20 apresenta os valores das estatísticas para os diferentes valores de τ_0 . A um nível de significância de 0,05 temos que:

- i) O teste \hat{t}_{DFR}^{min} rejeita a hipótese nula. Assim, a série apresenta uma mudança na tendência e o ponto de quebra estimado é março de 1987, ou seja, a série tem um comportamento de raiz unitária de janeiro de 1985 a março de 1987 e depois apresenta um comportamento estacionário.
- ii) O teste \tilde{t}_{DFR}^{min} rejeita a hipótese nula. Assim a série tem uma mudança na tendência e o ponto de quebra estimado é $\tau = 0.4$ que corresponde a outubro de 1993, ou seja, a série apresenta uma raiz unitária de janeiro de 1985 até novembro de 1993 e depois apresenta um comportamento estacionário.

O valor de τ^* é calculado tomando a série em reverso, ou seja, a primeira observação é dezembro de 2006 e a última observação é janeiro de 1985. Em resumo temos que:

- i) A metodologia GLS não permite detectar quebra na estrutura da série.
- ii) Com o teste recursivo se tem um ponto de quebra estimado é março de 1987
- iii) Com o teste móvel o ponto de quebra estimado é em outubro de 1993.

Na Figura 6.10 apresentamos o gráfico da série sazonalmente ajustada e os pontos de quebra estimados com os testes recursivo e móvel. A linha tracejada indica o ponto de quebra obtido com o teste móvel e a linha cheia indica o ponto de quebra obtido com o teste recursivo.

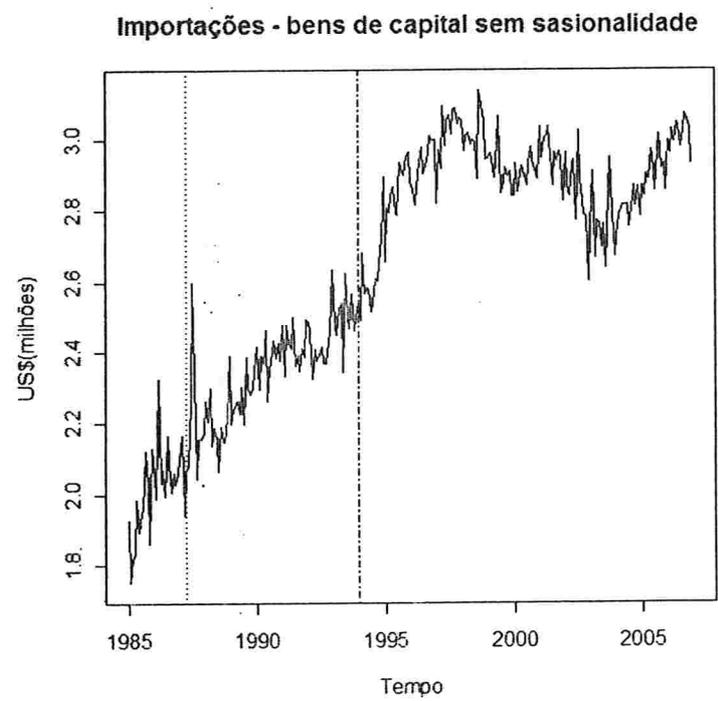


Figura 6.10: Série Importações de Bens de Capital de Brasil com ponto de quebra estimado

Capítulo 7

Conclusões

A suposição convencional de que a ordem de integração de uma série de tempo é constante não é apropriada em muitas das variáveis econômicas e financeiras. Existe uma grande evidência, de que os parâmetros do modelo auto-regressivo, da maioria dos modelos ajustados a essas variáveis, são instáveis no decorrer do tempo, frequentemente apresentando uma mudança na persistência (quebra), entre ser de ordem $I(0)$, estacionária, ou ser $I(1)$, indicando presença de uma tendência estocástica.

O objetivo deste trabalho foi apresentar várias técnicas para detectar possíveis mudanças na persistência, como os testes recursivos, móveis e seqüências. Além disso, apresentamos metodologias para estimar o possível ponto de quebra e possível direção de mudança, utilizando os testes \hat{t}_{DFP}^{minf} , \hat{t}_{DFR}^{minf} , \hat{t}_{DFB}^{minf} , \hat{t}_{DFE}^{minf} , $\min(\hat{t}_{DFP}^{minf}, \hat{t}_{DFR}^{minf})$ e $\min(\hat{t}_{DFP}^{minf}, \hat{t}_{DFB}^{minf})$, sob a hipótese nula de que a série é gerada por um processo $I(1)$. Além disso, apresentamos os testes (\mathcal{KM}) , (\mathcal{NM}) e $(\mathcal{L}(0,))$ e respectivas funções para estimar o ponto de quebra e possível direção de mudança da persistência, quando a hipótese nula é que a série é gerada por um processo $I(0)$.

De um modo geral, pode-se notar que o teste de Dickey-Fuller aplicado de forma convencional, não permite dar uma conclusão confiável sobre o comportamento dos dados no decorrer do tempo. É conveniente aplicar os testes apresentados neste trabalho, para poder ter a certeza de que a série apresenta um comportamento constante, com respeito a ordem de integração em toda sua extensão, ou se apresenta alguma mudança na persistência, para poder formular modelos adequados, que permitam descrever de forma mais eficiente o comportamento da série.

Com relação as séries analisadas temos que:

- i) Para a série de Exportações mensais do Brasil, sazonalmente ajustada, de janeiro de 1996 a julho de 2007, o teste de Dickey-Fuller convencional permite concluir que ela tem uma raiz unitária, ou seja, apresenta uma tendência estocástica em toda sua extensão. Aplicando os testes recursivos, móveis e seqüenciais evidenciamos uma mudança de $I(0)$ para $I(1)$, ou seja, a série tem um comportamento inicial estacionário, evoluindo para um comportamento de tendência estocástica. Utilizando a metodologia GLS sequencial, permite detectar o ponto de mudança em setembro de 1.998 , mas os testes de Dickey-Fuller recursivos e móveis com diferentes frações iniciais da amostra, permitem detectar o ponto de mudança de $I(0)$ para $I(1)$ em setembro e maio de 2002, respectivamente.
- ii) Para a série Índice de Preços Geral de Commodities, foram aplicados os testes de Dickey Fuller convencional e Phillips-Perron concluindo que a série apresenta uma tendência estocástica em toda sua extensão. Os testes \hat{t}_{DF}^{min} , \hat{t}_{DF}^{max} , \bar{t}_{DF}^{min} e \bar{t}_{DF}^{max} , não permitem rejeitar a hipótese nula de existência de uma raiz unitária em toda a extensão da série. Os testes de Dickey-Fuller \hat{t}_{DF}^{minf} e \bar{t}_{DF}^{minf} , com metodologia GLS recursivo e sequencial, permitem detectar mudança na persistência em janeiro de 2007 e abril de 1999, respectivamente. Os testes \hat{t}_{DF}^{minf} e \bar{t}_{DF}^{minf} , com diferentes frações iniciais de amostra, permitem detectar uma mudança na persistência em março de 2003 e dezembro de 1995, respectivamente.
- iii) Para a série de Valores das Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital a aplicação dos testes de Dickey-Fuller e Phillips-Perron permitem concluir que ela tem uma raiz unitária, ou seja, apresenta uma tendência estacionária em toda sua extensão. Os testes \hat{t}_{DF}^{min} e \hat{t}_{DF}^{max} detectaram uma mudança na persistência de $I(1)$ para $I(0)$, ou seja, a série apresenta um comportamento de tendência estocástica no seu início e logo apresenta um comportamento estacionário. Neste caso os testes de Dickey-Fuller com metodologia GLS não permitem detectar mudanças, e os testes recursivos e móveis com diferentes frações estimaram os pontos de quebra março de 1987 e outubro de 1993, respectivamente.

Apêndice A

Movimento Browniano

A.1 Introdução

Considere o passeio aleatório

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t \quad (\text{A.1})$$

onde $e_t \sim i.i.d \mathcal{N}(0, 1)$, com $Y_0 = 0$. Substituindo em (A.1) $Y_{t-1} = Y_{t-2} + e_{t-1}$ obtemos $Y_t = Y_{t-2} + e_{t-1} + e_t$ e, sucessivamente:

$$Y_t = e_t + e_{t-1} + \dots + e_1 \quad (\text{A.2})$$

e, assim $Y_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. A variação do processo, Y entre os instantes t e s ,

$$Y_s - Y_t = e_{t+1} + e_{t+2} + \dots + e_s \quad (\text{A.3})$$

tem uma distribuição $\mathcal{N}(0, (s-t))$ e é independente das mudanças entre os instantes r e q para todo instante $t < s < r < q$; em particular $Y_{t-1} - Y_t = e_t$.

Suponha que e_t é uma soma de duas variáveis aleatórias independentes com distribuição normal, isto é,

$$e_t = u_{1t} + u_{2t}, \quad \text{com} \quad u_{it} \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1). \quad (\text{A.4})$$

Podemos associar u_{1t} com a mudança entre Y_{t-1} e algum valor de Y em um ponto intermediário (digamos $Y_{t-\frac{1}{2}}$),

$$Y_{t-\frac{1}{2}} - Y_{t-1} = u_{1t} \quad (\text{A.5})$$

e u_{2t} associado com a mudança entre $Y_{t-\frac{1}{2}}$ e Y_t .

$$Y_t - Y_{t-\frac{1}{2}} = u_{2t}. \quad (\text{A.6})$$

Amostrando nos instantes $t = 1, 2, \dots$, os processos (A.5) e (A.6) têm as mesmas propriedades que o processo (A.1). Os processos (A.5) e (A.6) também são definidos nos instantes $\{t + \frac{1}{2}\}_{t=0}^{t=+\infty}$ e conservam as propriedades do processo (A.1).

Suponha agora uma partição para a mudança entre Y_s e Y_t em N intervalos disjuntos,

$$Y_s - Y_t = u_{1t} + u_{2t} + \dots + u_{Nt}, \quad (\text{A.7})$$

com $u_{it} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$. O resultado é um processo com as mesmas propriedades do processo (A.1) definido com incrementos cada vez menores quando $N \rightarrow \infty$. O limite quando $N \rightarrow +\infty$ é um processo de tempo contínuo, conhecido como movimento Browniano, o valor deste processo no instante t é denotado por $w(t)$.

Definição A.1 Chamaremos movimento Browniano padrão um processo contínuo $\{w(t), 0 \leq t \leq 1\}$ tal que

(a) $w(0) = 0$

(b) para quaisquer instantes $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$, as variáveis aleatórias $w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_k) - w(t_{k-1})$ são normais multivariadas independentes e $w(s) - w(t) \sim \mathcal{N}(0, (s - t))$.

(c) as trajetórias de $w(t)$ são contínuas em t com probabilidade um.

O movimento Browniano padrão tem incrementos independentes e estacionários, com função de covariância $\gamma(s, t) = \min(s, t)$. Outra particularidade é que quase todas as trajetórias de $w(t)$ não são deriváveis em nenhum ponto.

A.2 Teorema do Limite Central Funcional

Uma das aplicações do movimento Browniano é permitir formulações mais gerais do teorema central do limite.

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_N é uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d com média zero e variância σ^2 . O teorema central do limite afirma que

$$\sqrt{N} (\bar{Y}_N - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (\text{A.8})$$

em que $\bar{Y}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t$.

Passemos agora a tomar médias de uma proporção r dos dados, $0 \leq r \leq 1$. Por exemplo, com N observações calculemos a média da primeira metade dos dados,

$$\bar{Y}_{\left[\frac{N}{2}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{N}{2}\right]} \sum_{t=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} Y_t, \quad (\text{A.9})$$

então mais uma vez, usando teorema central do limite

$$\sqrt{\left[\frac{N}{2}\right]} \left(\bar{Y}_{\left[\frac{N}{2}\right]} - \mu \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (\text{A.10})$$

De um modo geral, considere

$$Y_{N(r)} = \frac{1}{N_r} \sum_{t=1}^{N_r} Y_t \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (\text{A.11})$$

que é proporcional à média das primeiras N_r observações.

$$Y_{N(r)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq (1/N) \\ Y_1/N, & (1/N) \leq r \leq (2/N) \\ (Y_1 + Y_2)/N, & (2/N) \leq r \leq (3/N) \\ \vdots \\ (Y_1 + \dots + Y_N)/N, & r = 1. \end{cases}$$

Aplicando o teorema central do limite pode-se obter que:

$$\sqrt{N} \left[\frac{Y_{N(r)}}{\sigma} \right] \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, r). \quad (\text{A.12})$$

Observamos, também, que considerando médias baseadas em N_{r_1} e N_{r_2} observações, com $r_1 < r_2$ teremos:

$$\sqrt{N} \left(\frac{Y_{N(r_2)} - Y_{N(r_1)}}{\sigma} \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, r_2 - r_1) \quad (\text{A.13})$$

independente de (A.12) se $r < r_1$, do que concluímos que a seqüência de funções aleatórias

$$\left\{ \frac{\sqrt{N} Y_{N(\cdot)}}{\sigma^2} \right\}_{N=1}^{\infty} \quad (\text{A.14})$$

tem uma distribuição limite que é o movimento Browniano padrão,

$$\frac{\sqrt{N} Y_{N(\cdot)}}{\sigma} \xrightarrow{D} w(\cdot) \quad (\text{A.15})$$

Proposição A.1 *Suponha que ξ_t segue um passeio aleatório*

$$\xi_t = \xi_{t-1} + e_t \quad (\text{A.16})$$

onde $\xi_0 = 0$ e e_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com média zero e variância σ^2 . Então:

- a. $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n e_t \xrightarrow{D} \sigma w(1)$
- b. $n^{-1} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} e_t \xrightarrow{D} \frac{1}{2} \sigma^2 \{ [w(1)]^2 - 1 \}$
- c. $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n t e_t \xrightarrow{D} \sigma w(1) - \sigma \int_0^1 w(r) dr$
- d. $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \xrightarrow{D} \sigma \int_0^1 w(r) dr$
- e. $n^{-2} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \sigma^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr$
- f. $n^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1} \xrightarrow{D} \sigma \int_0^1 r w(r) dr$
- g. $n^{-3} \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \sigma^2 \int_0^1 r [w(r)]^2 dr$
- h. $n^{-(v+1)} \sum_{t=1}^n t^v \xrightarrow{D} \frac{1}{v+1}$ para $v = 0, 1, \dots$

Proposição A.2 *Seja*

$$u_t = \psi(L)\epsilon_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \quad (\text{A.17})$$

onde ϵ_t é uma seqüência de v.a não correlacionadas com média zero e variância σ^2 e $\sum_{j=0}^{+\infty} j |\psi_j| < +\infty$, então

$$u_1 + u_2 + \dots + u_t = \psi(1) (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t) + \eta_t - \eta_0 \quad (\text{A.18})$$

onde $\psi(1) \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} \psi_j$, $\eta_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}$, $\alpha_j = -(\psi_{j+1} + \psi_{j+2} + \dots)$, e $\sum_{j=1}^{+\infty} |\alpha_j| < +\infty$.

Note que se Y_t for um processo $I(1)$ cuja primeira diferença é dada por u_t , $\Delta Y_t = u_t$, satisfazendo A.17 e A.18, então ele pode ser escrito como a soma de um passeio aleatório $\psi(1) (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t)$ com condições iniciais $(Y_0 - \eta_0)$, e um processo estacionário η_t . Esta decomposição é denominada decomposição de Beveridge-Nelson. Como η_t é um processo estacionário, uma implicação importante é que se (A.18) é dividida por \sqrt{t} , só o primeiro termo $\frac{1}{\sqrt{t}} \psi(1) (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_t)$, é importante para a distribuição de $\psi(1) (u_1 + u_2 + \dots + u_t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

A seguinte proposição generaliza os resultados da proposição (A.1)

Proposição A.3 Seja $u_t = \psi(L)\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$, onde $\sum_{j=1}^{\infty} j |\psi_j| < \infty$ e $\{\epsilon_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com média zero, variância σ^2 e quarto momento finito. Definindo:

- $\gamma_j \equiv E[u_t u_{t-j}] = \sigma^2 \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \psi_{s+j}$ para $j = 0, 1, 2, \dots$
- $\lambda \equiv \sigma \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s = \sigma \psi(1)$
- $\xi_t \equiv u_1 + u_2 + \dots + u_t$, para $t = 1, 2, \dots, n$

com $\xi_0 \equiv 0$. Então:

- a. $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n u_t \xrightarrow{D} \lambda w(1)$;
- b. $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n u_{t-j} \epsilon_t \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \gamma_0)$, para $j = 0, 1, 2, \dots$;
- c. $n^{-1} \sum_{t=1}^n u_t u_{t-j} \xrightarrow{P} \gamma_j$ para $j = 1, 2, \dots$;
- d. $n^{-1} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \epsilon_t \xrightarrow{D} \frac{1}{2} \sigma \lambda \{ [w(1)]^2 - 1 \}$;
- e.

$$n^{-1} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} u_{t-j} \xrightarrow{D} \begin{cases} \frac{1}{2} \{ \lambda^2 [w(1)]^2 - \gamma_0 \}, j = 0 \\ \frac{1}{2} \{ \lambda^2 [w(1)]^2 - \gamma_0 \} + \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{j-1}, j = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

- f. $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1} \xrightarrow{D} \lambda \int_0^1 w(r) dr$;
- g. $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n t u_{t-j} \xrightarrow{D} \lambda \{ w(1) - \int_0^1 w(r) dr \}$, $j=0, 1, 2, \dots$;
- h. $n^{-2} \sum_{t=1}^n \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \lambda^2 \int_0^1 [w(r)]^2 dr$;
- i. $n^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1} \xrightarrow{D} \lambda \int_0^1 r w(r) dr$;
- j. $n^{-3} \sum_{t=1}^n t \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \lambda^2 \int_0^1 r [w(r)]^2 dr$;
- k. $n^{-(v+1)} \sum_{t=1}^n t^v \xrightarrow{D} \frac{1}{v+1}$, $v=0, 1, \dots$

Apêndice B

Programas Usados na Aplicação

Apresentamos aqui os códigos de programação do software R utilizados neste trabalho.

B.1 Testes de Dickey Fuller

Nas funções `dickey.k` e `dickey.kt`, os argumentos x e K correspondem ao nome da coluna do arquivo que contem a série e a ordem de defasagem para aplicar o teste de Dickey-Fuller. O arquivo da série deve estar em formato de série temporal; no R o comando `ts` permite dar aos dados este formato.

As funções retornam o valor da estatística Dickey-Fuller.

B.1.1 Dickey Fuller com Constante e termo no tempo

```
dickey.k<-function(x,k){
s <- frequency(x)
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]
ajuste<-lm(yt~t+y+y.t)
g<-sum(ajuste$coeff[4:ajuste$rank])
```

```

muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
uno<-rep(1,r-k+1)
zt1<-y-(muo*(t-1))
zt2<-y.t-muo
modelo<-lm(yt~t+zt1+zt2)
resumo<-summary(modelo)
res<-modelo$residual
var<-sum(res^2)/(n-1-3)
dp<-var^(1/2)
n <- length(yt)
u<-c(rep(n^(1/2),k),n,n^(3/2))
x<-diag(u,k+2,k+2)
q<-solve(x)
x%*%q
zt<-cbind(uno,zt2,zt1,t)
vt<-(q%*%t(zt)%*%zt)%*%q
invvt<-solve(vt,tol=10^(-100))
b<-invvt[k+1,k+1]^(1/2)
estat<-(n-1)*(resumo$coefficients[3,1]-1)/(b*dp)
return(estat)
}

```

B.1.2 Dickey Fuller com Constante

```

\begin{eqnarray}
dickey.kt&<-function(x,k){
s &<- frequency(x)
diffy&<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
\#t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]

```

```

ajuste<-lm(yt~y+y.t)
g<-sum(ajuste$coeff[3:ajuste$rank])
muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
uno<-rep(1,r-k+1)
zt1<-y-(muo)
zt2<-y.t-muo
modelo<-lm(yt~zt1+zt2)
resumo<-summary(modelo)
res<-modelo$residual
var<-sum(res^2)/(n-1-3)
dp<-var^(1/2)
n <- length(yt)
u<-c(rep(n^(1/2),k),n)
x<-diag(u,k+1,k+1)
q<-solve(x)
x%*%q
zt<-cbind(uno,zt2,zt1)
vt<-(q%*%t(zt)%*%zt)%*%q
invvt<-solve(vt,tol=10^(-90))
b<-invvt[k+1,k+1]^(1/2)
estat<-(n-1)*(resumo$coefficients[2,1]-1)/(b*dp)
return(estat)
}

```

B.1.3 Dickey Fuller Recursivo

Nas funções `dickey.rf` e `dickey.rft` os argumentos `x`, `k` e `delta` correspondem ao nome do arquivo que contem a série a ser analisada, a ordem de defasagem e a fração (τ_0) para aplicar o teste de Dickey-Fuller recursivo.

As funções retornam uma matriz em que na primeira e segunda coluna apresenta a data de início da amostra (ano e mês), na terceira e quarta coluna são apresentados os dados de finalização da amostra e na coluna 5 é apresentado o valor calculado da estatística.

B.1.3.1 Dickey Fuller Recursivo com termo Constante e Termo no Tempo

```

dickey.rf<-function(x,k,delta){
s <- frequency(x)

```

```

n <- length(x)
obsi <- start(x)
obsf <- end(x)
delta<-delta
nsub<-trunc(n*delta)-1
iter<-trunc((n-nsub))
posicion<-matrix(0,nrow=iter+1,ncol=5)
t0 <- stepdate(as.vdate(x),0)@ys
t0 <- as.numeric(t0)
for(i in 0:iter){
  tn <- stepdate(as.vdate(x),nsub+i-1)@ys
  tn <- as.numeric(tn)
  posicion[i+1,1:2]<-t0
  posicion[i+1,3:4]<-tn
  gnp<-ts(x,star=t0, end=tn,frequency=4)
  testadf<-dickey.k(gnp,k)
  posicion[i+1,5]<-testadf
}
return(posicion)
}

```

B.1.3.2 Dickey Fuller Recursivo com Termo Constante

```

dickey.rft<-function(x,k,delta){
s <- frequency(x)
n <- length(x)
obsi <- start(x)
obsf <- end(x)
delta<-delta
nsub<-trunc(n*delta)-1
iter<-trunc((n-nsub))
posicion<-matrix(0,nrow=iter+1,ncol=5)
t0 <- stepdate(as.vdate(x),0)@ys
t0 <- as.numeric(t0)
for(i in 0:iter){
  tn <- stepdate(as.vdate(x),nsub+i-1)@ys

```

```

    tn <- as.numeric(tn)
    posicion[i+1,1:2]<-t0
    posicion[i+1,3:4]<-tn
    gnp<-ts(x,star=t0, end=tn,frequency=4)
    testadf<-dickey.kt(gnp,k)
    posicion[i+1,5]<-testadf
  }
  return(posicion)
}

```

B.1.4 Dickey Fuller Móvel

Nas funções `dickey.rolf` e `dickey.rolft` os argumentos `x`, `k` e `delta` correspondem ao nome do arquivo com a série, a ordem de defasagem e a fração (τ_0) para aplicar o teste de Dickey-Fuller Móvel.

As funções retornam uma matriz com as mesmas características da matriz dada pelas funções `dickey.rf` e `dickey.rft`.

B.1.4.1 Dickey Fuller Móvel com termo constante e termo no tempo

```

dickey.rolf<-function(x,k,delta){
  s <- frequency(x)
  n <- length(x)
  obsi <- start(x)
  obsf <- end(x)
  delta<-(1/3)
  nsub<-trunc(n*delta)-1
  iter<-trunc((n-nsub))
  posicion<-matrix(NA,nrow=iter,ncol=5)
  for(i in 0:(iter-1)){
    t0 <- stepdate(as.vdate(x),i)@ys
    t0 <- as.numeric(t0)
    tn <- stepdate(as.vdate(x),nsub+i)@ys
    tn <- as.numeric(tn)
    if(obsf[1]>=tn[1]){
      posicion[i+1,1:2]<-t0
    }
  }
}

```

```

    posicion[i+1,3:4]<-tn
    gnp<-window(x,star=t0, end=tn,frequency=4)
    testadf<-dickey.k(gnp,k)
    posicion[i+1,5]<-testadf
  }
  else\{ break
  }
}
return(posicion)
}

```

B.1.4.2 Dickey Fuller Móvel com termo Constante

```

dickey.rolft<-function(x,k,delta){
s <- frequency(x)
n <- length(x)
obsi <- start(x)
obsf <- end(x)
delta<-(1/3)
nsub<-trunc(n*delta)-1
iter<-trunc((n-nsub))
posicion<-matrix(NA,nrow=iter,ncol=5)
for(i in 0:(iter-1)){
  t0 <- stepdate(as.vdate(x),i)@ys
  t0 <- as.numeric(t0)
  tn <- stepdate(as.vdate(x),nsub+i)@ys
  tn <- as.numeric(tn)
  if(obsf[1]>=tn[1]){
    posicion[i+1,1:2]<-t0
    posicion[i+1,3:4]<-tn
    gnp<-window(x,star=t0, end=tn,frequency=4)
    testadf<-dickey.kt(gnp,k)
    posicion[i+1,5]<-testadf
  }
  else{ break
  }
}
}

```

```

    }
return(posicion)
}

```

B.1.5 Testes t Seqüencial

B.1.5.1 Teste t para mudança na tendência

Programa para criar a variável indicadora

$$\text{Caso A} \quad (\text{mudança na tendência}): \quad \varsigma_{1t}(k) = (t - k) 1(t > k) \quad (\text{B.1})$$

$$(\text{B.2})$$

Para as funções `i.casoa` e `i.casob`, o argumento t representa uma seqüência de tamanho igual ou número de observações da série a analisar, e o argumento K representa a fração da amostra a partir de onde se começa a supor o ponto de quebra.

```

i.casoa<-function(t,k){
n<-length(t)
IA<-matrix(NA,nrow=n,ncol=1)
for(i in 1:n){
  IA[i,]<-(ifelse(t[i]>k,(t[i]-k),0))
}
return(IA)
}

```

Programa para aplicar o teste t seqüencial para mudança na tendência.

Nas funções `dickey.seqat` e `dickey.seqat` os argumentos x , k e δ correspondem ao nome da série, a ordem de defasagem e fração (τ_0) para aplicar o teste.

```

dickey.seqat<-function(x,k,delta){
s <- frequency(x)
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
t1<-seq(1,r-k+1)

```

```

t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]
k0<-trunc(n*delta)
kn<-n-k0
estat<-matrix(NA,nrow=kn+1,ncol=1)
for(i in k0:kn+1){
  tau<-i.casoa(t1,i)
  ajuste<-lm(yt~t+tau+y+y.t)
  g<-sum(ajuste$coeff[k:ajuste$rank])
  muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
  uno<-rep(1,r-k+1)
  zt1<-y-(muo*(t-1))
  zt2<-y.t-muo
  modelo<-lm(yt~t+tau+zt1+zt2)
  resumo<-summary(modelo)
  res<-modelo$residual
  var<-sum(res^(2))/(n-1-4)
  dp<-var^(1/2)
  n <- length(yt)
  u<-c(rep(n^(1/2),k),n,n^(3/2),n^(3/2))
  x<-diag(u,k+3,k+3)
  q<-solve(x)
  x%*%q
  zt<-cbind(uno,zt2,zt1,tau,t)
  vt<-q%*%t(zt)%*%zt%*%q
  invvt<-solve(vt,tol=10^(-80))
  b<-invvt[k+1,k+1]^(1/2)
  tes.t<-(n-1)*(resumo$coefficients[4,1]-1)/(b*dp)
  estat[i,]<-tes.t
}
return(estat)
}

```

B.1.5.2 Teste t para mudança na média

Programa para criar a variável indicadora

$$\text{Caso B} \quad (\text{mudança na média}): \quad \varsigma_{1t}(k) = 1(t > k) \quad (\text{B.3})$$

em que $1(\cdot)$ é a função indicadora.

```
i.casob<-function(t,k){
n<-length(t)
IA<-matrix(NA,nrow=n,ncol=1)
for(i in 1:n){
IA[i,]<-(ifelse(t[i]>k,1,0))
}
return(IA)
}
```

Programa para aplicar o teste t seqüencial para mudança na média

```
dickey.seqbt<-function(x,k,delta){
#x<-gnp1
#k<-2
s <- frequency(x)
delta<-0.15
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
t1<-seq(1,r-k+1)
t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]
k0<-trunc(n*delta)
kn<-n-k0
estat<-matrix(NA,nrow=kn+1,ncol=1)
for(i in k0:kn+1){
```

```

tau<-i.casob(t1,i)
ajuste<-lm(yt~t+tau+y.y.t)
g<-sum(ajuste$coeff[k:ajuste$rank])
muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
uno<-rep(1,r-k+1)
zt1<-y-(muo*(t-1))
zt2<-y.t-muo
modelo<-lm(yt~t+tau+zt1+zt2)
resumo<-summary(modelo)
res<-modelo$residual
var<-sum(res^(2))/(n-1-4)
dp<-var^(1/2)
n <- length(yt)
u<-c(rep(n^(1/2),k),n,n^(3/2),n^(3/2))
x<-diag(u,k+3,k+3)
q<-solve(x)
x%%q
zt<-cbind(uno,zt2,zt1,tau,t)
vt<-q%%t(zt)%%zt%%q
invvt<-solve(vt,tol=10^(-80))
b<-invvt[k+1,k+1]^(1/2)
tes.t<-(n-1)*(resumo$coefficients[4,1]-1)/(b*dp)
estat[i,]<-tes.t
}
return(estat)
}

```

B.1.6 Testes F Seqüencial

B.1.6.1 Teste t para mudança na tendência

Programa para aplicar o teste F seqüencial para mudança na tendência, em que é usada a função `i.casoa` definida para o teste t seqüencial. Nas funções `testfa` e `testfa` os argumentos `x`, `k` e `delta` indicam a série, a ordem de defasagem p e a fração (τ_0) para aplicar o teste.

```

testfa<-function(x,k,delta){
#delta<-0.15
#x<-gnp1
s <- frequency(x)
#k<-5
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]
uno<-rep(1,r-k+1)
k0<-trunc(delta*n)
kn<-(n-k0)
estat<-matrix(NA,ncol=2,nrow=kn+1)
for(i in k0:kn+1){
tau<-i.casoa(t,i)
ajuste<-lm(yt~tau+t+y.y.t)
g<-sum(ajuste$coeff[5:ajuste$rank])
muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
zt1<-y-(muo*(t-1))
zt2<-y.t-muo
modelo1<-glm(yt~tau+t+zt1+zt2)
resumo1<-summary(modelo1)
estatis<-linear.hypothesis(modelo1, c( "t ", "zt1 "), c(muo, 1), test = "F")
estat[i,]<-estatis$F
}
return(estat1)
}

```

B.1.6.2 Teste F para mudança na média

Programa para aplicar o teste F seqüencial para mudança na média em que é usada a função `i.casob` definida para o teste t seqüencial, também usa a função `linear.hypothesis` implementada no R, na biblioteca `car`.

```
testfb<-function(x,k,delta){
#delta<-0.15
#x<-gnp1
s <- frequency(x)
#k<-5
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(diffy)
t<-seq(k,n+k-2)
yt<-h[2:n,1]
y<-h[2:n,2]
uno<-rep(1,r-k+1)
k0<-trunc(delta*n)
kn<-(n-k0)
estat<-matrix(NA,ncol=2,nrow=kn+1)
for(i in k0:kn+1){
tau<-i.casob(t,i)
ajuste<-lm(yt~tau+t+y+y.t)
g<-sum(ajuste$coeff[5:ajuste$rank])
muo<-ajuste$coeff[1]/(1-g)
zt1<-y-(muo*(t-1))
zt2<-y.t-muo
#t1<-(t-(muo*ajuste$coeff[4]))
modelo1<-glm(yt~tau+t+zt1+zt2)
resumo1<-summary(modelo1)
estatis<-linear.hypothesis(modelo1,
c("tau " "t ", "zt1 "), c(0, muo, 1), test = "F")
estat[i,]<-estatis$F
```

```
}
```

B.2 Testes Dickey Fuller para Metodologia GLS

GLS é a função para ajustar os dados com as variáveis regressoras $\hat{\beta}_{[\tau]} = [\hat{\beta}_0(\tau)]$ e GLS.t é a função para ajustar a série com as variáveis regressoras $\hat{\beta}_{[\tau]} = [\hat{\beta}_0(\tau), \hat{\beta}_1(\tau)]'$, dependendo de se a série apresenta tendência no tempo ou não. Estas funções retornam um vetor com os resíduos do ajuste, e eles são introduzidos como argumento na função Dickey.GLS para aplicar o teste de Dickey-Fuller.

```
GLS<-function(x){  
  m<-length(x)  
  s<-frequency(x)  
  z1<-rep(1,m)  
  c<-(-25)  
  alpha<-1+(c/(m))  
  z2<-c(0,z1[1:m-1])  
  z.alpha<-z1-(alpha*z2)  
  x1<-c(0,x[1:m-1])  
  x.alpha<-x-(alpha*x1)  
  reg<-lm(x.alpha~z.alpha-1)  
  y.d<-reg$residuals  
  y.d<-as.vector(y.d)  
  return(y.d)  
}
```

```
GLS.t<-function(x){  
  c<-(-13.5)  
  s<-frequency(x)  
  m<-length(x)  
  z1<-rep(1,m)  
  zt<-seq(1,m, by=1)  
  alpha<-1+(c/(m))  
  z2<-c(0,z1[1:m-1])  
  z3<-c(0,zt[1:m-1])  
  z.alpha1<-z1-(alpha*z2)
```

```

z.alpha2<-zt-(alpha*z3)
x1<-c(0,x[1:m-1])
x.alpha<-x-(alpha*x1)
reg<-lm(x.alpha~z.alpha1+z.alpha2-1)
summary(reg)
y.d<-reg$residuals
y.d<-as.vector(y.d)
return(y.d)
}

```

Para a função Dickey.GLS x e k indicam a série e a ordem de defasagem p para aplicar o teste.

```

Dickey.GLS<-function(x,k){
s<-frequency(x)
diffy<-diff(x)
h<-embed(x,k)
w<-embed(diffy,k)
y.t<-w[,2:k]
n<-length(h[,1])
r<-length(w[,1])
yt<-w[,1]
y<-p[2:n]
ajuste<-glm(yt~y+y.t-1)
resumo<-summary(ajuste)
res<-ajuste$residual
var<-sum(res^2)/(r-k-1)
dp<-var^(1/2)
n <- length(yt)
u<-c(rep(r^(1/2),k-1),r)
p<-diag(u,k,k)
q<-solve(p)
p%*%q
zt<-cbind(y.t,y)
vt<-(q%*%t(zt)%*%zt)%*%q
invvt<-solve(vt,tol=10^(-80))

```

```

b<-invvt[k,k]^(1/2)
estat<-(r-1)*(resumo$coefficients[1,1])*dp/b
return(estat)
}

```

B.2.1 Testes Recursivos

B.2.1.1 Recursivo para Frente

No seguinte código $y.d$, k e δ indicam a série e a ordem de defasagem p e a fração (τ_0) para aplicar o teste.

```

x<-y.d
k<-2
s<-frequency(x)
n<-length(x)
obsi<-start(x)
obsf<-end(x)
w<-matrix(0,ncol=1,nrow=31)
k=0
for (j in seq(0.2,0.8,0.05)){
  delta<-j
  nsub<-trunc(n*delta)-1
  iter<-trunc((n-nsub)/s)
  posicion1<-matrix(NA,nrow=iter,ncol=5)
  t0 <- stepdate(as.vdate(x),0)@ys
  t0 <- as.numeric(t0)
  for(i in 0:(iter-1)){
    tn <- stepdate(as.vdate(x),nsub+i*s)@ys
    tn <- as.numeric(tn)
    if(obsf[1]>=tn[1]){
      posicion1[i+1,1:2]<-t0
      posicion1[i+1,3:4]<-tn
      gnp<-ts(x,star=t0, end=tn,frequency=12)
      testadf<-Dickey.GLS(gnp,k)
      posicion1[i+1,5]<-testadf
    }
  }
}

```

```

    }
    else{ break
    }
}
a<-min(posicion1[,5])
k<-k+1
w[k,1]<-a
}

```

B.2.1.2 Recursivo em reverso

Programa para realizar o testes recursivo \hat{t}_{DFR}^{min} , em que y.d, k e delta indicam a série, a ordem de defasagem p e a fração (τ_0) para aplicar o teste.

```

n <- length(x)
posicion1<-matrix(NA,nrow=n,ncol=2)
for(i in 0:n){
  t <- stepdate(as.vdate(x),i)@ys
  t<-as.numeric(t)
  posicion1[i+1,1:2]<-t
}
z<-cbind(rev(posicion1[,1]), rev(posicion1[,2]),rev(x))

x<-z
k<-2
n<-length(z[,3])
obsi <-z[1,3]
obsf <- z[n,3]
s<-12
w<-matrix(0,ncol=1,nrow=61)
posicion<-matrix(NA,nrow=iter+1,ncol=5)
k=1
for (j in seq(0.2,0.8,0.05)){
  delta<-j
  nsub<-trunc(n*delta)-1
  iter<-trunc((n-nsub)/s)
}

```

```

posicion1<-matrix(NA,nrow=iter+1,ncol=5)
gnp<-matrix(0,nrow=iter,ncol=1)
for(i in 0:iter){
  posicion1[i+1,1:2]<-z[1,1:2]
  posicion1[i+1,3:4]<-z[nsub+i*s,1:2]
  gnp<-z[1:(nsub+i*s),3]
  testadf<-Dickey.GLS(gnp,2)
  posicion1[i+1,5]<-testadf
}
a<-min(posicion1[,5])
w[k,]<-a
k<-k+1
}

```

B.2.2 Teste Móvel

Programa para realizar o testes recursivo \tilde{t}_{DFB}^{min} em y.d, k e delta indicam a série, a ordem de defasagem p e fração (τ_0) para aplicar o teste.

```

x<-y.d
s <- frequency(x)
n <- length(x)
obsi <- start(x)
obsf <- end(x)
w<-matrix(0,ncol=1,nrow=61)
k=1
for (j in seq(0.2,0.8,0.05)){
  delta<-j
  nsub<-trunc(n*delta)-1
  iter<-trunc((n-nsub)/s)
  posicion2<-matrix(NA,nrow=iter+1,ncol=5)
  for(i in 0:iter){
    t0 <- stepdate(as.vdate(x),i*s)@ys
    t0 <- as.numeric(t0)
    tn <- stepdate(as.vdate(x),(nsub+i*s)-1)@ys
    tn <- as.numeric(tn)
  }
}

```

```
    posicion2[i+1,1:2]<-t0
    posicion2[i+1,3:4]<-tn
    gnp<-window(x,star=t0, end=tn,frequency=12)
    testadf<-Dickey.GLS(gnp,6)
    posicion2[i+1,5]<-testadf
  }
a<-min(posicion2[,5])
w[k,]<-a
k<-k+1
}
```

Apêndice C

Tabelas

Tamanho n	Probabilidade de $n(\hat{\phi} - 1)$ ser menor que o valor da entrada							
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
Caso 1								
25	-11,9	-9,3	-7,3	-5,3	1,01	1,4	1,79	2,28
50	-12,9	-9,9	-7,7	-5,5	0,97	1,35	1,7	2,16
100	-13,3	-10,2	-7,9	-5,6	0,95	1,31	1,65	2,09
250	-13,6	-10,3	-8	-5,7	0,93	1,28	1,62	2,04
500	-13,7	-10,4	-8	-5,7	0,93	1,28	1,61	2,04
∞	-13,8	-10,5	-8,1	-5,7	0,93	1,28	1,6	2,03
Caso 2								
25	-17,2	-14,6	-12,5	-10,2	-0,76	0,01	0,65	1,4
50	-18,9	-15,7	-13,3	-10,7	-0,81	-0,07	0,53	1,22
100	-19,8	-16,3	-13,7	-11	-0,83	-0,1	0,47	1,14
250	-20,3	-16,6	-14	-11,2	-0,84	-0,12	0,43	1,09
500	-20,5	-16,8	-14	-11,2	-0,84	-0,13	0,42	1,06
∞	-20,7	-16,9	-14,1	-11,3	-0,85	-0,13	0,41	1,04
Caso 3								
25	-22,5	-19,9	-17,9	-15,6	-3,66	-2,51	-1,53	-0,43
50	-25,7	-22,4	-19,8	-16,8	-3,71	-2,6	-1,66	-0,65
100	-27,4	-23,6	-20,7	-17,5	-3,74	-2,62	-1,73	-0,75
250	-28,4	-24,4	-21,3	-18	-3,75	-2,64	-1,78	-0,82
500	-28,9	-24,8	-21,5	-18,1	-3,76	-2,65	-1,78	-0,84
∞	-29,5	-25,1	-21,8	-18,3	-3,77	-2,66	-1,79	-0,87

Tabela C.1: Valores críticos para teste de raiz unitária de Dickey-Fuller baseado no estimador de mínimos quadrados (B.5 Hamilton)

Tamanho n	Probabilidade de $\frac{\hat{\phi}-1}{\sigma_{\hat{\phi}}}$ ser menor que o valor da entrada							
	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
Caso 1								
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,6	0,92	1,33	1,7	2,16
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	0,91	1,31	1,66	2,08
100	-2,6	-2,24	-1,95	-1,61	0,9	1,29	1,64	2,03
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,29	1,63	2,01
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2
∞	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	0,89	1,28	1,62	2
Caso 2								
25	-3,75	-3,33	-3	-2,63	-0,37	0	0,34	0,72
50	-3,58	-3,22	-2,93	-2,6	-0,4	-0,03	0,29	0,66
100	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-0,42	-0,05	0,26	0,63
250	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-0,42	-0,06	0,24	0,62
500	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-0,43	-0,07	0,24	0,61
∞	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57	-0,44	-0,07	0,23	0,6
Caso 3								
25	-4,38	-3,95	-3,6	-3,24	-1,14	-0,8	-0,5	-0,15
50	-4,15	-3,8	-3,5	-3,18	-1,19	-0,87	-0,58	-0,24
100	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15	-1,22	-0,9	-0,62	-0,28
250	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13	-1,23	-0,92	-0,64	-0,31
500	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13	-1,24	-0,93	-0,65	-0,32
∞	-3,96	-3,66	-3,41	-3,12	-1,25	-0,94	-0,66	-0,33

Tabela C.2: Valores críticos para o teste Phillips-Perron e para o teste de raiz unitária de Dickey-Fuller baseado no estimador de mínimos quadrados (B.6 Hamilton)

n	Percentis	t_{DF}	Recursiva		Móvel	
			\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\bar{t}_{DF}^{max}	\bar{t}_{DF}^{min}
100	0,025	-3,73	-2,21	-4,62	-1,66	-5,29
	0,50	-3,45	-1,99	-4,33	-1,49	-5,01
	0,10	-3,15	-1,73	-4,00	-1,31	-4,71
250	0,025	-3,69	-2,15	-4,42	-1,66	-5,07
	0,50	-3,43	-1,94	-4,18	-1,48	-4,85
	0,10	-3,13	-1,69	-3,91	-1,27	-4,59
500	0,025	-3,68	-2,17	-4,42	-1,62	-5,00
	0,50	-3,42	-1,92	-4,18	-1,47	-4,79
	0,10	-3,13	-1,66	-3,88	-1,25	-4,55

Tabela C.3: Valores críticos para as estatísticas recursivas e móveis(BLS1). Os valores críticos foram calculados usando o modelo $\Delta Y_t = \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e são baseados em 10000 réplicas Monte Carlo para $n = 100$ e $n = 250$, e 5000 réplicas para $n = 500$

n	Percenties	Mudança na Tendência					Mudança na Média		
		$Q_{LR}(0)$	$Q_{LR}(4)$	$Q_{LR}(8)$	\bar{F}_n^{max}	$\bar{t}_{DF}(\bar{\tau})$	\bar{F}_n^{max}	$\bar{t}_{DF}(\bar{\tau})$	$\bar{t}_{DF}(\bar{\tau})$
100	0,025	28,96	37,25	46,52	19,15	-4,76	20,83	-5,07	
	0,05	26,45	34,56	43,51	16,3	-4,47	18,62	-4,8	
	0,1	23,86	31,78	40,21	13,64	-4,19	16,2	-4,52	
250	0,025	30,41	36,37	43,27	18,36	-4,66	21,31	-5,05	
	0,05	27,87	34,12	40,36	15,94	-4,39	19,01	-4,79	
	0,1	24,97	30,95	37,06	13,32	-4,12	16,72	-4,5	
500	0,025	30,42	37	43	18,58	-4,69	21,26	-5,05	
	0,05	27,8	34	39,65	16,04	-4,39	18,99	-4,77	
	0,1	25,19	30,72	36,84	13,2	-4,12	16,78	-4,49	

Tabela C.4: Valores críticos das estatísticas sequenciais(BLS2). Os valores críticos foram calculados usando o modelo $\Delta Y_t = \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e são baseados em 10000 réplicas Monte Carlo para $n = 100$ e $n = 250$, e 5000 réplicas para $n = 500$

	Recursiva				Móvel				Seqüencial			
	\hat{t}_{DF}	\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\hat{t}_{DF}^{diff}	\hat{t}_{DF}^{max}	\hat{t}_{DF}^{min}	\hat{t}_{DF}^{diff}	$Q_{LR}(4)$	\hat{F}_n^{max}	$\bar{t}_{DF}(\hat{\tau})$	\bar{t}_{DF}^{min*}	$k \pm 0,05n$
β	A. Tamanho para ARIMA(1,1,0): $\Delta Y_t = \beta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ iid											
0,4	9,10	6,90	10,00	21,80	2,50	10,50	28,70	10,80	13,40	11,50	11,80	
0,6	9,60	7,10	10,50	25,40	3,10	13,20	35,80	13,40	14,30	13,50	13,50	
(α_1, α_2)	B. Poder contra Mudança do Coeficiente AR: $Y_t = \mu_t + \alpha_t Y_{t-1} + \epsilon_t$											
(0,8;0,1)	12,60	12,40	14,10	14,50	6,20	9,70	19,10	9,60	11,90	12,80	12,80	
(0,6;1)	12,50	14,10	21,70	24,70	6,70	10,10	19,80	19,60	14,20	15,50	15,30	
(0,4;1)	10,20	12,40	28,70	37,60	7,00	13,20	22,10	35,30	17,90	16,50	16,40	
(1,0;0,8)	18,50	11,90	9,90	14,70	7,80	11,60	17,60	11,30	12,10	17,70	17,80	
(1,0;0,6)	22,10	13,60	11,40	13,40	12,90	14,50	16,60	19,70	16,60	24,50	24,90	
(1,0;0,4)	18,90	12,90	9,60	10,30	13,80	17,10	16,60	36,40	18,60	25,50	25,80	
(α_1, α_2)	B. Poder contra Mudança na Tendência: $Y_t = \mu_1 \tau_{1t}([n\tau]) + \alpha Y_{t-1} + \epsilon_t$											
(0,9;0,4;0,2)	0,00	0,00	6,20	94,10	0,00	11,80	71,80	55,50	90,10	74,50	74,30	79,5
(0,9;0,5;0,2)	0,00	0,00	7,80	98,50	0,00	11,50	68,80	60,20	92,20	66,80	67,50	79,8
(0,9;0,6;0,2)	0,00	0,00	9,00	99,40	0,00	11,30	66,50	61,80	92,80	54,10	55,90	84,0
(0,9;0,4;0,4)	0,00	0,00	5,90	96,30	0,10	20,00	90,80	93,30	100,00	99,60	99,60	98,4
(0,9;0,5;0,4)	0,00	0,00	6,70	98,80	0,00	19,20	89,50	95,20	100,00	99,10	99,20	98,8
(0,9;0,6;0,4)	0,00	0,00	8,90	99,80	0,00	17,30	87,80	95,10	100,00	93,80	94,80	98,8
(0,8;0,4;0,2)	0,00	0,00	8,60	80,80	0,00	12,60	47,30	42,00	87,10	73,80	73,30	87,3
(0,8;0,5;0,2)	0,00	0,00	9,90	91,40	0,00	12,10	48,20	48,50	91,20	70,80	70,50	90,0
(0,8;0,6;0,2)	0,00	0,00	12,40	97,30	0,10	11,80	44,80	52,80	92,10	63,50	63,80	91,0

Tabela C.5: Tamanho e Poder dos Testes Recursivos, Móveis e Seqüenciais: Resultados Monte Carlo (BLS3)

Nível	90%	95%	99%	Tendência	90%	95%	99%
$\mathcal{KM}(\tau)$	4,107	6,057	12,095	$\mathcal{KM}(\tau)$	2,734	3,675	6,202
$H_1(\mathcal{KM}(\cdot))$	13,63	18,183	29,89	$H_1(\mathcal{KM}(\cdot))$	6,924	8,704	12,858
$H_2(\mathcal{KM}(\cdot))$	3,486	4,611	7,507	$H_2(\mathcal{KM}(\cdot))$	2,324	2,858	4,231
$H_3(\mathcal{KM}(\cdot))$	3,328	5,128	10,526	$H_3(\mathcal{KM}(\cdot))$	1,478	1,931	3,448
$H_1(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,783	0,933	1,265	$H_1(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,233	0,271	0,349
$H_2(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,301	0,375	0,541	$H_2(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,105	0,123	0,164
$H_3(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,154	0,191	0,279	$H_3(\mathcal{KM}(\cdot, 1))$	0,053	0,062	0,083
$H_1(\mathcal{L}_1(\cdot))$	1,224	1,586	2,529	$H_1(\mathcal{L}_1(\cdot))$	0,69	0,897	1,443
$H_2(\mathcal{L}_1(\cdot))$	0,729	0,987	1,59	$H_2(\mathcal{L}_1(\cdot))$	0,297	0,373	0,563
$H_3(\mathcal{L}_1(\cdot))$	0,374	0,505	0,822	$H_3(\mathcal{L}_1(\cdot))$	0,151	0,193	0,297
$maxH_1(\mathcal{L})$	1,561	1,974	2,939	$maxH_1(\mathcal{L})$	0,866	1,12	1,65
$maxH_2(\mathcal{L})$	0,913	1,214	1,787	$maxH_2(\mathcal{L})$	0,354	0,439	0,638
$maxH_3(\mathcal{L})$	0,473	0,631	0,94	$maxH_3(\mathcal{L})$	0,182	0,227	0,335
$maxH_1(\mathcal{K})$	18,066	22,72	35,252	$maxH_1(\mathcal{K})$	8,598	10,25	14,916
$maxH_2(\mathcal{K})$	4,629	5,883	9,121	$maxH_2(\mathcal{K})$	2,877	3,406	4,852
$maxH_3(\mathcal{K})$	5,071	7,205	12,95	$maxH_3(\mathcal{K})$	1,949	2,462	4,135
$(\mathcal{L}_1(0.2))$	0,502	0,67	1,056	$(\mathcal{L}_1(0.2))$	0,159	0,199	0,289
$(\mathcal{L}_1(0.3))$	0,58	0,778	1,298	$(\mathcal{L}_1(0.3))$	0,175	0,217	0,323
$(\mathcal{L}_1(0.4))$	0,679	0,922	1,516	$(\mathcal{L}_1(0.4))$	0,206	0,256	0,382
$(\mathcal{L}_1(0.5))$	0,757	1,03	1,687	$(\mathcal{L}_1(0.5))$	0,25	0,312	0,46
$(\mathcal{L}_1(0.6))$	0,842	1,162	1,885	$(\mathcal{L}_1(0.6))$	0,337	0,426	0,648
$(\mathcal{L}_1(0.7))$	0,905	1,241	2,189	$(\mathcal{L}_1(0.7))$	0,458	0,601	0,979
$(\mathcal{L}_1(0.8))$	1,026	1,41	2,347	$(\mathcal{L}_1(0.8))$	0,637	0,872	1,477

Tabela C.6: Valores críticos de cauda superior para os teste $\mathcal{KM}(\tau)$, $H_j(\mathcal{KM}(\cdot))$, $H_j(\mathcal{L}_1(\cdot))$ e $maxH_1(\mathcal{L})$ para testar mudança no nível e na tendência

T	τ^*	Mudança no nível					Mudança na tendência						
		\hat{t}_{DFR}^{min}					\hat{t}_{DFB}^{min}						
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,10	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,10
100	0,10	4,89	4	3,63	5,46	4,55	4,18	5,92	4,83	4,4	6,37	5,26	4,84
	0,15	4,56	3,82	3,48	5,09	4,36	4,02	5,37	4,56	4,2	5,75	4,97	4,61
	0,20	4,4	3,72	3,4	4,91	4,24	3,92	5,15	4,41	4,08	5,51	4,82	4,49
	0,25	4,31	3,65	3,33	4,8	4,16	3,85	5	4,32	4	5,38	4,72	4,4
	0,30	4,23	3,59	3,27	4,71	4,09	3,78	4,9	4,25	3,94	5,27	4,65	4,34
250	0,10	4,38	3,77	3,48	4,91	4,33	4,04	5,05	4,446	4,15	5,45	4,85	4,56
	0,15	4,26	3,68	3,39	4,79	4,24	3,96	4,9	4,33	4,05	5,29	4,74	4,47
	0,20	4,19	3,61	3,33	4,71	4,17	3,89	4,81	4,25	3,97	5,2	4,66	4,39
	0,25	4,12	3,56	3,28	4,67	4,12	3,84	4,75	4,19	3,91	5,14	4,6	4,33
	0,30	4,06	3,51	3,22	4,63	4,07	3,79	4,69	4,14	3,86	5,09	4,55	4,28
500	0,10	4,26	3,71	3,44	4,79	4,28	4,02	4,9	4,34	4,07	5,3	4,79	4,53
	0,15	4,2	3,64	3,37	4,72	4,22	3,94	4,81	4,26	4	5,21	4,71	4,45
	0,20	4,15	3,59	3,32	4,67	4,16	3,89	4,75	4,2	3,93	5,15	4,64	4,39
	0,25	4,1	3,55	3,27	4,62	4,11	3,84	4,71	4,15	3,88	5,11	4,59	4,33
	0,30	4,05	3,5	3,22	4,58	4,06	3,79	4,64	4,11	3,84	5,08	4,55	4,29
∞	0,10	4,25	3,7	3,43	4,77	4,28	4,03	4,8	4,3	4,05	5,24	4,76	4,51
	0,15	4,18	3,63	3,36	4,71	4,22	3,97	4,75	4,23	3,98	5,18	4,69	4,45
	0,20	4,12	3,57	3,31	4,68	4,17	3,91	4,71	4,18	3,92	5,12	4,65	4,4
	0,25	4,1	3,53	3,26	4,65	4,13	3,87	4,66	4,13	3,87	5,09	4,6	4,35
	0,30	4,05	3,49	3,21	4,61	4,08	3,82	4,62	4,1	3,82	5,05	4,56	4,3

Tabela C.7: Valores críticos para os teste \hat{t}_{DFR}^{min} e \hat{t}_{DFB}^{min} para testar mudança no nível e na tendência

T	ξ	α	$\tilde{t}^{min}(\tau^*)$									t_B^*
			0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
100	1	0,01	-8,30	-5,81	-5,19	-4,88	-4,68	-4,50	-4,36	-4,19	-3,95	-5,83
		0,05	-6,66	-4,96	-4,51	-4,26	-4,08	-3,91	-3,75	-3,57	-3,33	-5,03
		0,10	-5,97	-4,60	-4,20	-3,97	-3,79	-3,61	-3,45	-3,25	-3,01	-4,68
	2	0,01	-10,40	-6,59	-5,87	-5,48	-5,26	-5,06	-4,92	-4,71	-4,51	-6,62
		0,05	-8,19	-5,72	-5,14	-4,85	-4,63	-4,46	-4,29	-4,13	-3,90	-5,76
		0,10	-7,33	-5,31	-4,83	-4,54	-4,34	-4,17	-4,00	-3,82	-3,57	-5,38
250	1	0,01	-5,93	-5,17	-4,89	-4,72	-4,60	-4,47	-4,34	-4,16	-3,98	-5,23
		0,05	-5,81	-4,59	-4,36	-4,19	-4,06	-3,91	-3,77	-3,58	-3,36	-4,69
		0,10	-4,85	-4,32	-4,10	-3,94	-3,78	-3,63	-3,47	-3,28	-3,04	-4,44
	2	0,01	-6,67	-5,74	-5,42	-5,22	-5,10	-4,97	-4,82	-4,67	-4,49	-5,81
		0,05	-5,89	-5,17	-4,89	-4,69	-4,56	-4,42	-4,27	-4,11	-3,90	-5,26
		0,10	-5,55	-4,89	-4,64	-4,46	-4,30	-4,15	-4,00	-3,83	-3,60	-4,99
500	1	0,01	-5,40	-5,00	-4,82	-4,71	-4,58	-4,44	-4,32	-4,17	-3,96	-5,12
		0,05	-4,87	-4,51	-4,33	-4,19	-4,06	-3,92	-3,78	-3,59	-3,36	-4,62
		0,10	-4,62	-4,28	-4,08	-3,93	-3,79	-3,65	-3,49	-3,29	-3,05	-4,39
	2	0,01	-5,99	-5,50	-5,30	-5,16	-5,04	-4,94	-4,83	-4,69	-4,49	-5,59
		0,05	-5,44	-5,01	-4,83	-4,68	-4,55	-4,42	-4,30	-4,13	-3,91	-5,12
		0,10	-5,18	-4,79	-4,59	-4,43	-4,30	-4,16	-4,02	-3,84	-3,61	-4,90
∞	1	0,01	-5,15	-4,94	-4,82	-4,72	-4,60	-4,49	-4,35	-4,18	-3,99	-5,06
		0,05	-4,72	-4,49	-4,34	-4,22	-4,08	-3,95	-3,80	-3,64	-3,38	-4,62
		0,10	-4,51	-4,27	-4,11	-3,97	-3,82	-3,68	-3,52	-3,34	-3,08	-4,39
	2	0,01	-5,64	-5,39	-5,26	-5,16	-5,05	-4,95	-4,84	-4,67	-4,49	-5,50
		0,05	-5,21	-4,97	-4,82	-4,70	-4,58	-4,45	-4,31	-4,14	-3,93	-5,08
		0,10	-5,01	-4,76	-4,60	-4,46	-4,32	-4,19	-4,04	-3,86	-3,64	-4,88

Tabela C.8: Valores críticos para os teste $\tilde{t}^{min}(\tau^*)$ para testar mudança no nível e na tendência. $\xi = 1$ indica mudança no nível, $\xi = 2$ indica mudança na tendência.

T	τ^*	Mudança no nível					Mudança na tendência						
		\hat{t}_{DFR}^{min}					\hat{t}_{DFR}^{min}						
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,10	0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,10
100	0,1	-5,65	-4,72	-4,33	-5,29	-4,35	-3,97	-6,74	-5,53	-5,07	-6,47	-5,27	-4,82
	0,15	-5,2	-4,47	-4,14	-4,86	-4,12	-3,79	-5,94	-5,14	-4,79	-5,73	-4,9	-4,53
	0,2	-5,01	-4,34	-4,04	-4,68	-4,01	-3,69	-5,67	-4,96	-4,64	-5,44	-4,71	-4,39
	0,25	-4,89	-4,25	-3,95	-4,56	-3,92	-3,62	-5,5	-4,85	-4,54	-5,27	-4,6	-4,29
	0,3	-4,8	-4,18	-3,89	-4,48	-3,85	-3,55	-5,4	-4,77	-4,47	-5,16	-4,51	-4,22
250	0,1	-5	-4,4	-4,12	-4,64	-4,03	-3,76	-5,56	-4,96	-4,68	-5,34	-4,71	-4,42
	0,15	-4,85	-4,3	-4,03	-4,49	-3,93	-3,67	-5,38	-4,84	-4,57	-5,13	-4,58	-4,31
	0,2	-4,77	-4,23	-3,96	-4,41	-3,86	-3,6	-5,27	-4,75	-4,49	-5,02	-4,49	-4,22
	0,25	-4,71	-4,18	-3,91	-4,35	-3,81	-3,54	-5,2	-4,69	-4,43	-4,94	-4,42	-4,16
	0,3	-4,67	-4,12	-3,86	-4,3	-3,76	-3,48	-5,15	-4,64	-4,38	-4,88	-4,36	-4,1
500	0,1	-4,84	-4,33	-4,09	-4,48	-3,95	-3,71	-5,38	-4,86	-4,62	-5,12	-4,58	-4,33
	0,15	-4,76	-4,27	-4,01	-4,39	-3,89	-3,63	-5,28	-4,78	-4,54	-5,01	-4,49	-4,24
	0,2	-4,71	-4,21	-3,95	-4,35	-3,83	-3,57	-5,22	-4,72	-4,47	-4,94	-4,42	-4,18
	0,25	-4,67	-4,16	-3,9	-4,3	-3,79	-3,52	-5,16	-4,67	-4,42	-4,89	-4,38	-4,12
	0,3	-4,62	-4,12	-3,85	-4,27	-3,74	-3,47	-5,12	-4,62	-4,37	-4,86	-4,33	-4,08
∞	0,1	-4,8	-4,33	-4,09	-4,43	-3,93	-3,68	-5,27	-4,82	-4,59	-5,01	-4,52	-4,28
	0,15	-4,74	-4,27	-4,02	-4,37	-3,86	-3,61	-5,23	-4,76	-4,52	-4,94	-4,46	-4,21
	0,2	-4,7	-4,22	-3,97	-4,32	-3,81	-3,55	-5,17	-4,71	-4,47	-4,89	-4,4	-4,15
	0,25	-4,68	-4,18	-3,92	-4,29	-3,76	-3,51	-5,13	-4,66	-4,42	-4,83	-4,35	-4,1
	0,3	-4,64	-4,13	-3,87	-4,24	-3,72	-3,46	-5,09	-4,62	-4,38	-4,79	-4,3	-4,06

Tabela C.9: Valores críticos para os teste \hat{t}_{DFR}^{min} e \hat{t}_{DFR}^{min} para testar mudança no nível e na tendência.

		Só Constante									
		100		200		500		1000		∞	
n		0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	0,05	0,10	
	\hat{t}_{DFE}^{min}	-2,95	-3,26	-2,72	-3,02	-2,53	-2,83	-2,41	-2,72	-2,40	
	$min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min})$	-3,32	-3,51	-3,00	-3,27	-2,81	-3,07	-2,71	-2,96	-2,69	
	\bar{t}_{DFE}^{min}	-2,85	-3,12	-2,67	-2,93	-2,52	-2,81	-2,41	-2,71	-2,40	
	$min(\bar{t}_{DFE}^{min}, \bar{t}_{DFR}^{min})$	-3,10	-3,37	-2,92	-3,21	-2,79	-3,06	-2,70	-2,96	-2,69	
Tendência											
n		100	200	500	1000	∞					
	\hat{t}_{DFE}^{min}	-3,59	-3,93	-3,43	-3,72	-3,32	-3,59	-3,31	-3,58	-3,27	
	$min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min})$	-3,92	-4,23	-3,71	-3,98	-3,59	-3,86	-3,57	-3,81	-3,54	
	\bar{t}_{DFE}^{min}	-3,39	-3,68	-3,30	-3,59	-3,27	-3,54	-3,27	-3,55	-3,27	
	$min(\bar{t}_{DFE}^{min}, \bar{t}_{DFR}^{min})$	-3,66	-3,92	-3,57	-3,85	-3,53	-3,78	-3,53	-3,78	-3,54	

Tabela C.10: Valores críticos para os teste \hat{t}_{DFE}^{min} , \bar{t}_{DFE}^{min} e $min(\hat{t}_{DFE}^{min}, \hat{t}_{DFR}^{min})$ para testar mudança no nível e na tendência

Ano	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maior	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
1988	107,57	107,73	106,77	109,07	110,7	117,4	114,99	113,1	111,7	109,65	109,06	113,4
1989	114,24	113,64	116,75	117,89	116,32	113,72	112,07	109,23	111,12	111,91	112	113,05
1990	114,23	110,94	111,09	109,69	110,17	107,88	110,85	125,08	134,99	135,04	127,91	120,9
1991	116,65	113	111,57	111,06	109,73	108,44	109,67	111	113,47	114,2	112,47	107,8
1992	107,58	107,09	106,53	106,88	108,28	109,94	108,31	107,85	108,29	107,31	106,77	106,28
1993	104,49	105,45	107,59	108,22	108,87	107,29	110,45	110,1	109	109,35	110,02	107,34
1994	109,31	109,64	110,22	110,61	112,66	113,33	116,45	114,15	115,52	113,4	114,44	113,34
1995	114,38	115,5	115,38	115,76	114,29	114,15	114,04	114,41	114,84	115,44	116,62	116,83
1996	116,93	118,01	118,91	124,19	123,89	120,74	121,48	122,14	121,5	120,48	118,63	120,09
1997	121,63	119,94	122,1	119,16	122,7	115,67	114,21	114,51	113,5	113,72	112,97	109,54
1998	105,73	104,99	102,82	103,55	103,56	99,29	98,89	96,29	97,42	96,64	95,52	92,46
1999	93,51	90,35	91,7	94,36	95,23	95,2	96,89	101,38	104	102,89	105,87	107,42
2000	108,47	110,88	111,41	106,66	111,9	113,65	110	110,97	115,06	114,72	117,1	108,93
2001	109,84	110,88	108,58	108,4	112,1	111,81	111,41	112,97	110,75	102,01	100,04	98,7
2002	100	101,04	108,53	109,69	109,52	108,42	112,87	114,45	117,4	115,52	110,89	115,18
2003	119,89	122,97	118,9	112,5	113,59	115,68	115,94	119,56	119,17	125,17	128,59	130,06
2004	135,5	136,99	143,52	145,32	152,33	149,25	151,04	153,59	151,78	155,79	149,39	145,45
2005	150,68	155,05	168,71	167,07	163,66	172,13	175,39	181,18	180,79	176,79	170,34	173,59
2006	184,01	182,52	183,01	193,69	197,15	194,61	202,21	201,25	187,06	184,5	188,8	192,85
2007	182,69	191,07	195,04	201,15	202,45	210,49	218,82					

Tabela C.11: Série Índice de Preços Internacionais de Commodities: Geral

Ano	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maior	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
1996	3,473	3,405	3,408	4,271	4,506	3,84	4,459	4,381	4,115	4,188	3,912	3,789
1997	3,685	3,146	3,826	4,629	4,659	4,844	5,239	5,075	4,588	4,793	3,976	4,534
1998	3,917	3,716	4,274	4,576	4,612	4,886	4,97	3,986	4,538	4,017	3,704	3,944
1999	2,949	3,267	3,829	3,707	4,386	4,313	4,117	4,277	4,187	4,304	4,002	4,673
2000	3,453	4,123	4,472	4,181	5,063	4,861	5,003	5,519	4,724	4,638	4,39	4,659
2001	4,538	4,083	5,167	4,73	5,368	5,042	4,965	5,727	4,755	5,003	4,5	4,346
2002	3,972	3,658	4,26	4,641	4,441	4,079	6,223	5,751	6,492	6,474	5,127	5,243
2003	4,805	5,001	5,239	5,711	6,372	5,874	6,105	6,403	7,28	7,566	5,98	6,748
2004	5,8	5,722	7,927	6,59	7,941	9,328	8,992	9,056	8,923	8,844	8,159	9,194
2005	7,444	7,756	9,251	9,202	9,818	10,206	11,062	11,346	10,634	9,903	10,79	10,896
2006	9,271	8,75	11,366	9,83	10,305	11,463	13,651	13,642	12,548	12,659	11,866	12,234
2007	10,963	10,103	12,889	12,446	13,647	13,118	14,12					

Tabela C.12: Série Exportações do Brasil

Ano	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
1985	79	52	66	64	92	77	96	93	125	108	74	169
1986	107	89	211	101	111	97	160	128	96	116	109	143
1987	117	133	88	109	114	177	441	224	104	144	146	188
1988	169	146	200	129	145	140	126	160	132	142	168	317
1989	146	157	181	171	159	195	173	251	186	193	201	287
1990	241	179	246	218	273	179	246	259	254	243	274	305
1991	277	194	303	250	240	309	253	253	208	262	248	405
1992	280	260	211	238	223	241	290	242	218	274	294	569
1993	277	254	336	321	206	407	350	304	342	292	323	455
1994	284	426	369	355	356	320	414	422	372	454	541	1064
1995	413	569	623	643	683	603	687	894	748	803	923	1257
1996	660	617	644	671	786	917	892	874	832	1036	1018	1343
1997	597	820	832	1126	883	1086	1324	1077	1101	1242	1129	1591
1998	1014	810	1032	954	892	969	1115	807	1253	1269	1164	1196
1999	794	798	880	715	894	1116	791	786	759	795	834	935
2000	626	752	712	729	777	767	832	888	869	837	843	1047

Tabela C.13: Série Importações por Categoria de Uso: Bens de Capital

Referências Bibliográficas

- [1] Andrews, D.W.K., (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica* 61, 821-856.
- [2] Andrews, D.W.K., Ploberger, W., (1994). Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica* 62, 1383-1414.
- [3] Banerjee, A., Lumsdaine R., and Stock, J.(1990). Recursive and sequential tests of the unit-root and trend-break hypotheses: Theory and international evidence. *Journal Business & Economic Statistics* 10, 271-287.
- [4] Bussetti, F., Taylor, A.M.R.(2004). Tests of stationarity against a change in persistence. *Journal of Econometrics* 123, 33-66.
- [5] Busetti, F., Taylor, A.M.R., 2001. Tests of stationarity against a change in persistence, University of Birmingham, Department of Economics, Discussion Paper 01-13.
- [6] Chu, C-S. J. (1989). New Tests for Parameter Constancy in Stationary and Non-stationary Regression Models, *unpublished manuscript*. University of California, San Diego, Dept. of Economics.
- [7] Christiano, L. J. (1988). *Searching for a Break in GNP* Working Paper 416, Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- [8] Dickey, D. A., and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [9] Dickey, D. A., and Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1052-1072.

- [10] Elliot, G., T. J. Rothenberg and J. H. Stock, (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64, 813-836.
- [11] Evans, G. W. (1989). Output and Unemployment Dynamics in the United States: 1950-1985. *Journal of Applied Econometrics*, 4, 213-237.
- [30] Hamilton, James. D., (1992). *Time Séries Analysis*, New Jersey: Princenton University Press.
- [13] Hansen, B.E., (1991). Testing for structural change of unknown form in models with nonstationary regressors, Department of Economics, University of Rochester, Mimeo.
- [14] Kim, J.Y., 2000. Detection of change in persistence of a linear times series. *Journal of Econometrics* 95, 97116.
- [15] Kim, J.Y., Belaire Franch, J., Badilli Amador, R., 2002. Corrigendum to Detection of change in persistence of a linear times series. *Journal of Econometrics* 109, 389392.
- [16] King, M.L., Hillier, G.H., (1985). Locally best invariant tests of the error covariance matrix of the linear regression model. *Journal of the Royal Statistical Society, (Series B)* 47, 98102.
- [17] Leybourne, S., Kim, T., Smith, V., and Newbold, P. (2003). Tests for a change in the persistence against the null of difference-stationarity. *Econometrics Journal* 6, 291-311.
- [18] Morettin, P.A. e Tolo, C.M.C. (2006), *Análise de Séries Temporais. 2ª Ed : Ed. Edgard Blüncher Ltda.*
- [19] Nelson, C.R., Plosser, C.I., (1992), Trend and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*. 10, 139-162.
- [20] Ng, S. e Perron, P., (1995), Unit root test in ARMA models with data dependent methods for the selection of the truncation lag. *Journal of the American Statistical Association* 90, 268-281.
- [21] Nyblom, J., Makelainen, T., (1983). Comparisons of tests for the presence of random walk coefficients in a simple linear model. *Journal of the American Statistical Association* 78, 856864.

- [22] Philips, P.C.B., Perron P., (1988), Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika* 85, 335-346.
- [23] Philips, P.C.B., (1987), Time series regression with a unit root. *Econometrica* 55, 271-301
- [24] Perron P., (1989), The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica* 57, 1361-1401
- [25] Perron P., (1990a). Testing for a Unit Root in a Time Series With a Changing Mean. *Journal of Business and Economic Statistics* 8, 153-162.
- [26] Rappoport, P., Reichlin L., (1989), Segmented trends and nonstationary time series. *Economic Journal* 99, 1681-77
- [27] Schwert, G.W., (1989), Why does stock market volatility change over time. *Journal of Finance* 44, 1207-1239.
- [28] Sims, C.A., Stock, J H., e Watson, M.W., (1990), Inference in linear time series models with some unit roots. *Econometrica* 58, 113-144.
- [29] Stock, J.H., (1994). Unit roots, structural breaks and trends. In: Engle, R.F., McFadden, D.L. (Eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Elsevier, Amsterdam, pp. 2739-2840.
- [30] Hamilton, James. D., (1992). *Time Séries Analysis*, New Jersey: Princenton University Press.
- [31] Katsto, Tanaka., (1996). *Time Séries Analysis*, New York: Wiley.
- [32] Taylor, R., (2005), On the use of sub-sample unit Root to detect changes in persistence. *Journal of Time Series Analysis* 26, 759-778.