# Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema sob condições de dependência

**Pedro Seiti Fujita**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Áreas de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Vanderlei da Costa Bueno**

São Paulo, maio de 2008

# Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema sob condições de dependencia

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Pedro Seiti Fujita
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Vanderlei da Costa Bueno (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka - IME-USP.
- Profa. Dr. Esteban Fernandez Tuesta - USP Leste.

*À minha Rezinha, é claro.*

# Agradecimentos

Aos meus amigos e familiares, em especial ao professor Vanderlei.

# Resumo

O objetivo principal das medidas de importância da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema é identificar aqueles cuja melhora implica em um melhor funcionamento do sistema. Na teoria clássica binária várias medidas de importância de confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema foram propostas, tais como a de Birnbaum (1969), Barlow & Proschan (1975), Natvig (1979), entre outras. Em todos estes casos os tempos de vida dos componentes são considerados estocasticamente independentes. Bergman (1985) observou que várias medidas de importância da confiabilidade do componente podem ser obtidas através da diferença entre os tempos de vida médios do sistema quando modificamos a função de distribuição do componente.

O objetivo desta dissertação é analisar a importância da confiabilidade dos componentes para a confiabilidade do sistema assumindo que os tempos de vida dos componentes são estocasticamente dependentes. Para tanto, consideraremos os processos pontuais das falhas dos componentes e seus compensadores, assumiremos que existe uma relação bijetiva entre o espaço das funções de distribuição e o espaço dos compensadores e utilizaremos a noção de Bergman (1985) para definir a importância do componente através da transformação dos compensadores.

# Abstract

The main objective of the component reliability importance measures for the system reliability is to identify those components whose improvement implies in a better system performance.

In the binary classical theory several component reliability importance measures for the system reliability were proposed, such as in Birnbaum (1969), Barlow & Proschan (1975), Natvig (1979), among others. In all those works the component lifetimes were considered stochastically independent. Bergman (1985) pointed out that many component reliability importance measures can be obtained through the study of the change in the system expected lifelenght due to variations on the component's lifetime distributions.

The main objective in this dissertation is to analyse the component reliability importance measure were the component lifetimes are stochasticaly dependent. For such we consider the component failures point processes and their corresponding compensator processes. We assume that there exists a bijective relation between the distribution function space and the compensator process space and then we use Bergman's ideas to define the component reliability importance measure through a compensator trasform.

# Índice

**Agradecimentos** **iv**

**Resumo** **v**

**Abstract** **vi**

**1 Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema: caso independente** **1**

1.1 Importância de Birnbaum . . . . . 1

1.1.1 Importância estrutural de Birnbaum . . . . . 5

1.1.2 Importância de Birnbaum da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema . . . . . 7

1.2 Importância de Barlow e Proschan . . . . . 10

1.2.1 Importância estrutural de Barlow e Proschan . . . . . 14

1.3 Importância de Natvig . . . . . 17

1.4 O conceito de Bergman . . . . . 22

1.4.1 Aplicação 1: Modificação por reparo mínimo . . . . . 23

1.4.2 Aplicação 2: Modificação por transformação em paralelo . . . 24

**2 Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema: caso dependente 27**

2.1 Representação em série de um sistema coerente . . . . . 28

2.1.1 Importância de Birnbaum . . . . . 29

2.1.2 Importância de Barlow e Proschan . . . . . 30

2.2 Importância de componentes através de transformações nos compensadores . . . . . 36

2.3 Importância de Bergman . . . . . 42

**A Algumas definições 48**

CAPÍTULO 1

# Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema: caso independente

O objetivo principal das medidas de importâncias dos componentes é identificar aquele cuja melhora implica no melhor funcionamento do sistema. Na teoria clássica binária várias medidas de importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema foram propostas, tais como a de Birnbaum (1969), Barlow & Proschan (1975), Natvig (1979), entre outras. Neste capítulo descreveremos tais medidas considerando sistemas coerentes com componentes estocasticamente independentes (Barlow & Proschan 1981).

## 1.1 Importância de Birnbaum

Consideremos que um sistema de engenharia $\phi$ e seus componentes $c_1, \ldots, c_n$ assumam dois estados possíveis, o de funcionamento e o de falha, representados pelas seguintes

variáveis:

O estado do componente $c_j$, $j = 1, \ldots, n$, é representado por

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ , se o componente } c_j \text{ funciona} \\ 0 \text{ , se o componente } c_j \text{ falha.} \end{cases}$$

O estado do sistema é representado pela variável binária:

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ , se o sistema funciona} \\ 0 \text{ , se o sistema falha} \end{cases}$$

onde a função $\phi$ é definida em $\{0,1\}^n$, assume valores em $\{0,1\}$ e o estado do sistema é completamente determinado pelo estado dos componentes, isto é, $\phi = \phi(\mathbf{x})$. O vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é chamado **vetor de estados** e $\phi$ é denominado **função de estrutura do sistema**.

**Exemplo 1.1** *Sistemas em série e em paralelo.*

***Sistema em série:*** *Um sistema em série funciona se cada componente funciona. Assim, sua função de estrutura é dada por:*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.1}$$

Figura 1.1: Diagrama de um sistema em série

***Sistema em paralelo:*** *Um sistema em paralelo funciona se ao menos um dos componentes funciona. Assim, sua função de estrutura é dada por:*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \max(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.2}$$

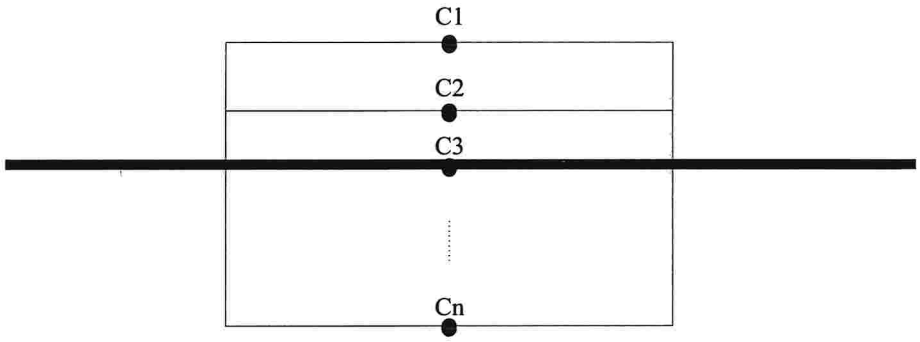


Figura 1.2: Diagrama de um sistema em paralelo

***Sistema k-de-n:*** *Um sistema k-de-n funciona se, e somente se, ao menos k dos n componentes funcionarem. Assim, sua função de estrutura é dada por:*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 \ , \ se \ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 \ , \ se \ \sum_{i=1}^{n} x_i < k. \end{cases} \tag{1.3}$$

É razoável considerarmos que quando um componente que está no estado de falha é substituido por um novo (em funcionamento) o sistema nunca se deteriore (ou seja, passe do estado de funcionamento para o estado de falha). Da mesma forma, quando um componente falhar não é razoável pensarmos que isto cause a melhora do sistema. Desse modo assumiremos que a função de estrutura $\phi(\mathbf{x})$ é monotonicamente crescente em cada componente.

**Suposição 1.1** *A função estrutura $\phi(\boldsymbol{x})$ é monotonicamente crescente em cada componente, isto é, para todos os vetores de estados $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, com $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ temos que $\phi(\boldsymbol{x}) \geq \phi(\boldsymbol{y})$. A representação $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ indica que $x_1 \geq y_1, \ldots, x_n \geq y_n$.*

Consideraremos também que cada componente em um sistema físico tenha sua utilidade. Nesse sentido, Barlow & Proschan (1981) propõe o conceito de relevância do componente, que é definido da seguinte forma:

**Definição 1.1** *O componente $c_j$ é relevante para a estrutura $\phi$ no vetor de estados $\boldsymbol{x}$ quando*

$$\delta_j(\boldsymbol{x}) = \phi(1_j, \boldsymbol{x}) - \phi(0_j, \boldsymbol{x}) = 1 \tag{1.4}$$

*onde,*

$(1_j, \boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$

$(0_j, \boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

**Suposição 1.2** *Assumiremos que todos os componentes são relevantes, ou seja, para todo $c_j$, $j = 1, \ldots, n$, existe ao menos um vetor de estados $\boldsymbol{x}$ que satisfaz a definição 1.1.*

Um sistema é **coerente** se sua estrutura é monótona e todos os seus componentes são relevantes.

**Definição 1.2** *Chamaremos de **sistemas coerentes** os sistemas que satisfizerem as suposições 1.1 e 1.2.*

Nessa dissertação nos restringiremos ao estudo deste tipo de sistema.

**Observação 1.1** *Em um sistema coerente, se todos os componentes funcionam o sistema funciona, isto é,* $\phi(\mathbf{1}) = 1$, *e, se todos os componentes falham então o sistema falha, isto é,* $\phi(\mathbf{0}) = 0$.

### 1.1.1 Importância estrutural de Birnbaum

Ao determinarmos se um sistema coerente funciona ou não verificamos que alguns componentes são mais importantes que outros. Por exemplo, se um componente está em série com o resto do sistema seria razoável pensar que ele é ao menos tão importante quanto qualquer outro componente do sistema. Vamos considerar que um componente é mais importante para o funcionamento do sistema no vetor de estados $(._j, \mathbf{x})$ quando este é relevante, ou seja, quando a configuração $(._j, \mathbf{x})$ é tal que,

$$\delta_j(\mathbf{x}) = \phi(1_j, \mathbf{x}) - \phi(0_j, \mathbf{x}) = 1, \tag{1.5}$$

do que quando a configuração $(._j, \mathbf{x})$ é tal que

$$\delta_j(\mathbf{x}) = \phi(1_j, \mathbf{x}) - \phi(0_j, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.6}$$

No primeiro caso o componente $c_j$ determina se o sistema funciona ou não, enquanto que no caso alternativo o estado do componente $c_j$ não interfere no funcionamento do sistema.

**Definição 1.3** *Chamaremos* $(1_j, \mathbf{x})$ *de* ***vetor de caminho crítico*** *para* $c_j$ *quando este for* ***relevante****. O número total de vetores de caminhos críticos para* $c_j$ *é dado por*

$$\eta(j) = \sum_{\{\boldsymbol{x} | x_j = 1\}} [\delta_j(\boldsymbol{x})]. \tag{1.7}$$

A importância estrutural de Birnbaum pode ser definida como a proporção de vetores de caminhos críticos observados entre todas as possíveis configurações de vetores de estados.

**Definição 1.4** *(Birnbaum 1969) A importância estrutural do componente $c_j$ para o sistema $\phi$ é definida por*

$$I_j^{BE} = 2^{-(n-1)} \sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\}} \delta_j(\boldsymbol{x}) \tag{1.8}$$

*onde a soma é extendida a todos os $2^{n-1}$ vértices possíveis do vetor de estados $\boldsymbol{x}$.*

**Exemplo 1.2** *Considere o seguinte sistema,*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \ldots x_k[1 - (1 - x_{k+1}) \ldots (1 - x_n)] \tag{1.9}$$

*representado na figura 1.3.*

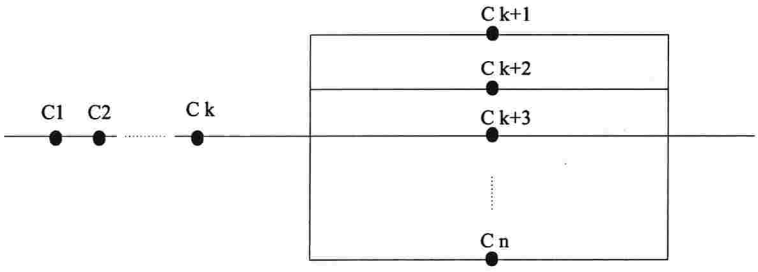


Figura 1.3: Exemplo de um sistema com k componentes em série e n-k em paralelo

*Da equação 1.9 temos,*

$$\delta_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1 - x_r)\right] & , \textit{para } j = 1, \ldots, k \\ \prod_{r=1}^{k} x_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1 - x_r)\right] & , \textit{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.10}$$

*Note que, para $j = 1, \ldots, k$ temos*

$$\prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1 - x_r)\right] = 1 \Longleftrightarrow x_1 = \ldots = x_k = 1 \;\; e \;\; \prod_{r=k+1}^{n} (1 - x_r) = 0.$$

*Logo, $x_1 = \ldots = x_k = 1$ e $x_r = 1$ para ao menos um $r \in \{k+1, \ldots, n\}$. Assim,*

$$\sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\}} \delta_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} = 2^{n-k} - 1. \tag{1.11}$$

*Para $j = k+1, \ldots, n$,*

$$\sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\}} \delta_j(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{1.12}$$

*pois o vetor de estados $\boldsymbol{x}$ tal que*

$$x_1 = 1, \ldots, x_k = 1, x_{k+1} = 0, \ldots x_{j-1} = 0, x_{j+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

*é o único tal que $\delta_j(\boldsymbol{x}) = 1$.*

*Logo, a importância estrutural de $c_j$ para $\phi$ será,*

$$I_j^{BE} = \begin{cases} 2(2^{-k} - 2^{-n}) \;, \; para \; j = 1, \ldots, k \\ 2.2^{-n} \;, \; para \; j = k+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.13}$$

Observe que os componentes $c_1, \ldots, c_k$ (dispostos em série) possuem importância $2(2^{-k} - 2^{-n})$, muito maior que a importância $2.2^{-n}$ dos componentes $c_{k+1}, \ldots, c_n$ (dispostos em paralelo).

### 1.1.2 Importância de Birnbaum da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema

Na seção anterior assumimos que os estados dos componentes $x_j$, $j = 1, \ldots, n$, são determinísticos. Nessa consideraremos que os estados dos componentes são variáveis

aleatórias independentes definidas no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, que denotaremos por $X_j$, com distribuição de probabilidade,

$$P\{X_j = x\} = p_j^x(1-p_j)^{1-x} \tag{1.14}$$

para $x \in \{0,1\}$ e $j = 1, \ldots, n$.

**Definição 1.5** *A **confiabilidade do componente** $c_j$ é definida por $p_j = E(X_j) = P(X_j = 1)$, ou seja, é a probabilidade do componente funcionar.*

*A **confiabilidade do sistema** é definida por:*

$$P\{\phi(\boldsymbol{X}) = 1\} = E\left[\phi(\boldsymbol{X})\right].$$

*ou seja, é a probabilidade do sistema funcionar.*

Note que podemos expressar a função estrutura da seguinte forma:

$$\phi(\mathbf{x}) = x_j\phi(1_j, \mathbf{x}) + (1-x_j)\phi(0_j, \mathbf{x}). \tag{1.15}$$

A igualdade acima permite expressarmos a função da estrutura de ordem $n$ em termos de funções de estruturas de ordem $n-1$. Repetindo esse procedimento obtemos a seguinte expressão:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{y_i}(1-x_i)^{1-y_i}\phi(\mathbf{y}) \tag{1.16}$$

onde a soma é extendida a todos os vetores binários $\mathbf{y}$ de ordem $n$ e $0^0 = 1$.

Desse modo, usando a suposição de independência entre os componentes podemos expressar a confiabilidade do sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E[\phi(\mathbf{X})] &= E[\sum_{\mathbf{y}} \prod_{i=1}^{n} X_i^{y_i}(1-X_i)^{1-y_i}\phi(\mathbf{y})] = \sum_{\mathbf{y}} \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}\phi(\mathbf{y}) \\ &= h(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Logo, a confiabilidade do sistema é uma função multilinear da confiabilidade dos componentes, denotada por $h(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, definida no cubo $n$-dimensional $\{(p_1, \ldots, p_n) : 0 \leq p_i \leq 1\}$.

Observe que da expressão 1.15 podemos obter,

$$h(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{X})] = p_j E[\phi(1_j, \mathbf{X}) - \phi(0_j, \mathbf{X})] + E[\phi(0_j, \mathbf{X})], \tag{1.18}$$

e portanto,

$$\frac{dh(\mathbf{p})}{dp_j} = E[\delta_j(\mathbf{X})] \tag{1.19}$$

que é positivo pois $\phi$ é crescente e todo o componente é relevante (estritamente positivo se $0 < p_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$). Concluimos que a função de confiabilidade $h(\mathbf{p})$ é crescente em cada $p_j$ e que a quantidade $\frac{dh(\mathbf{p})}{dp_j}$ é a taxa de crescimento da confiabilidade do sistema em relação à taxa de crescimento da confiabilidade do componente $c_j$. Birnbaum (1969) usou essa noção para definir a seguinte medida de importância.

**Definição 1.6** *(Birnbaum 1969) A importância da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema $\phi$ é*

$$I_j^B = P(\phi(1_j, \boldsymbol{X}) - \phi(0_j, \boldsymbol{X}) = 1). \tag{1.20}$$

Note que,

$$I_j^B = P(\phi(1_j, \mathbf{X}) - \phi(0_j, \mathbf{X}) = 1) = E[\delta_j(\mathbf{X})] = \frac{dh(\mathbf{p})}{dp_j}$$

e que no caso em que $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{2}$ a importância de Birnbaum se reduz à importância estrutural de Birnbaum.

A importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema sugerida por Birnbaum (1969) pode ser interpretada como a probabilidade do componente ser relevante para o sistema.

**Exemplo 1.3** *Considere a estrutura do exemplo 1.2 e* $p_j = P(X_j = 1)$ *a confiabilidade do componente* $c_j$*. Então, usando a suposição de independência dos componentes,* $E(\delta_j(\boldsymbol{x})) = I_j^B$*, com* $\delta_j(\boldsymbol{x})$ *dado na equação 1.12. Logo,*

$$I_j^B = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} p_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-p_r)\right] & , \textit{para } j = 1,\ldots,k \\ \prod_{r=1}^{k} p_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1-p_r)\right] & , \textit{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{1.21}$$

Um inconveniente da importância de Birnbaum $I_j^B$ é sua dependência a um determinado instante $t$, fixo no tempo. Introduziremos na seção seguinte a importância de Barlow e Proschan, que possui a característica desejável de não depender do tempo. Essencialmente, podemos interpreta-la como a probabilidade condicional que a falha do sistema coincida com a falha do componente dado que o sistema falhou.

## 1.2 Importância de Barlow e Proschan

Nas seções anteriores analisamos a confiabilidade do sistema e de seus componentes em um instante fixo no tempo. No que segue analisaremos a confiabilidade do sistema e dos componentes no intervalo de tempo $[0, t]$. A conexão entre os dois conceitos pode ser realizada através de processos indicadores.

Se $T_1, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias, definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, representando os tempos de vida dos componentes, definiremos os processos estocásticos $X_j(t) = 1_{\{T_j > t\}}$, contínuos à direita, com limite à esquerda, de forma que,

$$P\{X_j(t) = 1\} = P\{T_j > t\} = \bar{F}_j(t) \tag{1.22}$$

$$P\{\phi(\mathbf{X}(t)) = 1\} = P\{T > t\} = \bar{F}(t) \tag{1.23}$$

onde $T = \inf\{t \geq 0; \phi(X(t)) = 0\}$ é o tempo de vida do sistema (consideraremos $T = \infty$ caso $\{\} = \emptyset$).

$F_j(t) = 1 - \bar{F}_j(t)$ e $F(t) = 1 - \bar{F}(t)$ representam, respectivamente, a função de distribuição do tempo de vida do componente $c_j$ e a função de distribuição do tempo de vida do sistema.

Como os componentes não são reparáveis, interpretamos $\bar{F}_j(t)$ como a confiabilidade do componente $c_j$, $j = 1, \ldots, n$, no instante $t$ e $\bar{F}(t)$ como a confiabilidade do sistema no tempo $t$. Note que a confiabilidade do sistema depende da confiabilidade do componente através da relação $P(T > t) = h(\bar{\mathbf{F}}(t)) = h(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \ldots, \bar{F}_n(t))$, onde $h(\bar{\mathbf{F}}(t))$ é definido em $\{(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n) : 0 \leq \bar{F}_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$. Desta maneira o tempo médio de vida do sistema é

$$E(T) = \int_0^\infty P(T > t)dt = \int_0^\infty h(\bar{\mathbf{F}}(t))dt. \tag{1.24}$$

Barlow & Proschan (1975) provou a seguinte proposição.

**Proposição 1.1** *Se o componente $c_j$ possui função de distribuição $F_j$ absolutamente contínua com função densidade $f_j$ ($j = 1, \ldots, n$), assumindo $c_1, \ldots, c_n$ independentes, então a probabilidade que $c_j$ cause a falha do sistema, dado que o sistema falhou no tempo $t$, é,*

$$\begin{aligned} P[\phi(1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_j, \boldsymbol{X}(t)) = 1 | (\phi(\boldsymbol{X}(t^-)) - \phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1)] = \\ = \frac{[h(1_j, \bar{F}(t)) - h(0_j, \bar{F}(t))]f_j(t)}{\sum_{j=1}^{n}[h(1_j, \bar{F}(t)) - h(0_j, \bar{F}(t))]f_j(t)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

**Demonstração**

Como todos os tempos de vida dos componentes $c_j$, $j = 1, \ldots, n$, são independentes

e têm funções de distribuição absolutamente contínuas, temos que,

$$
\begin{aligned}
& P(\phi(1_j, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_j, \mathbf{X}(t)) = 1 | (\phi(\mathbf{X}(t^-)) - \phi(\mathbf{X}(t)) = 1)) = \\
= & \frac{P(\phi(1_j, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_j, \mathbf{X}(t)) = 1, \phi(\mathbf{X}(t^-)) - \phi(\mathbf{X}(t)) = 1)}{P(\phi(\mathbf{X}(t^-)) - \phi(\mathbf{X}(t)) = 1)} \\
= & \frac{P(\phi(1_j, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_j, \mathbf{X}(t)) = 1, T_j \in [t, t+dt])}{\sum_{i=1}^{n} P(\phi(\mathbf{X}(t^-)) - \phi(\mathbf{X}(t)) = 1, T_i \in [t, t+dt])} \\
= & \frac{P(\phi(1_j, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_j, \mathbf{X}(t)) = 1) f_j(t) dt}{\sum_{i=1}^{n} P(\phi(1_i, \mathbf{X}(t)) - \phi(0_i, \mathbf{X}(t)) = 1) f_i(t) dt} \\
= & \frac{[h(1_j, \bar{F}(t)) - h(0_j, \bar{F}(t))] f_j(t)}{\sum_{i=1}^{n} [h(1_i, \bar{F}(t)) - h(0_i, \bar{F}(t))] f_i(t)}.
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

O seguinte corolário é uma consequência da proposição 1.1,

**Corolário 1.1** *A probabilidade que $c_j$ cause a falha do sistema em $[0, t]$ dado que o sistema falha em $[0, t]$ é*

$$
\frac{\int_0^t [h(1_j, \bar{F}(u)) - h(0_j, \bar{F}(u))] dF_j(u)}{\sum_{j=1}^{n} \int_0^t [h(1_j, \bar{F}(u)) - h(0_j, \bar{F}(u))] dF_j(u)}. \tag{1.27}
$$

Considere $t \longrightarrow \infty$ em 1.27 e teremos a probabilidade que $c_j$ cause a falha do sistema quando o sistema eventualmente falhar. Note que nesse caso o denominador é um. Essa probabilidade limite é a definição da Importância de Barlow e Proschan.

**Definição 1.7** *(Barlow & Proschan 1975) A Importância da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema $\phi$ é,*

$$
I_j^{BP} = \int_0^{\infty} [h(1_j, \bar{F}(t)) - h(0_j, \bar{F}(t))] f_j(t) dt. \tag{1.28}
$$

Note que $h(1_j, \bar{F}(t)) - h(0_j, \bar{F}(t)) = I_j^B(t)$, que é a importância de Birnbaum no instante $t$. Desse modo podemos entender a importância de Barlow e Proschan como uma média ponderada da medida proposta por Birnbaum, sendo o peso no tempo $t$ a função densidade $f_j(t)$.

**Observação 1.2** *É interessante notar que, para t fixo,*

$$\frac{dP(T > t)}{dt} = \frac{d\bar{F}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d\bar{F}(t)}{d\bar{F}_j(t)} \frac{d\bar{F}_j(t)}{dt} \tag{1.29}$$

*de forma que*

$$dF(t) = \sum_{j=1}^{n} I_j^B(t) dF_j(t) \quad e \quad F(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t I_j^B(s) dF_j(s). \tag{1.30}$$

**Exemplo 1.4** *Considere a estrutura do exemplo 1.2. Do exemplo 1.3 sabemos que* $E(\delta_j(\boldsymbol{x})) = I_j^B$ *onde:*

$$I_j^B = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} p_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1 - p_r)\right] & , \text{para } j = 1, \ldots, k \\ \prod_{r=1}^{k} p_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1 - p_r)\right] & , \text{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

*Considerando os componentes independentes e identicamente distribuídos, com distribuição exponencial de parâmetro* $\lambda$*, temos que em um instante t fixado*

$$I_j^B(t) = \begin{cases} e^{-(k-1)\lambda t}[1 - (1 - e^{-\lambda t})^{n-k}] & , \text{para } j = 1, \ldots, k \\ e^{-k\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-k-1} & , \text{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

*Portanto, para* $j = 1, \ldots, k$ *temos*

$$I_j^{BP} = \int_0^\infty e^{-(k-1)\lambda t}[1 - (1 - e^{-\lambda t})^{n-k}]\lambda e^{-\lambda t} dt. \tag{1.31}$$

*Considere* $y = 1 - e^{-\lambda t}$. *Assim,*

$$\begin{aligned} I_j^{BP} &= \int_0^1 (1-y)^{k-1}[1-y^{n-k}]dy = \int_0^1 (1-y)^{k-1}dy - \int_0^1 y^{n-k}(1-y)^{k-1}dy \\ &= -\frac{(1-y)^k}{k}\Bigg|_0^1 - \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\int_0^1 \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}y^{n-k}(1-y)^{k-1}dy \\ &= \left(\frac{1}{k} - \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\right) \end{aligned} \tag{1.32}$$

*pois* $f(y) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}y^{n-k}(1-y)^{k-1}$ *é a função densidade da distribuição* $Beta[n-k+1, k]$.

*Para* $j = k+1, \ldots, n$, *temos, considerando* $y = e^{-\lambda t}$,

$$\begin{aligned} I_j^{BP} &= \int_0^\infty e^{-k\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-k-1}\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^1 y^k(1-y)^{n-k-1}dy \\ &= \frac{k!(n-k-1)!}{(n-2)!}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

### 1.2.1 Importância estrutural de Barlow e Proschan

Quando não temos informação a respeito da confiabilidade do componente $p_j(t)$, podemos assumir que os componentes possuem a mesma função de distribuição. Neste caso a importância da confiabilidade de Barlow e Proschan do componente $c_j$ para $\phi$ com $\bar{F}_1(t) = \bar{F}_2(t) = \ldots = \bar{F}_n(t) = p$ é

$$I_j^{BPE} = \int_0^1 [h(1_j, p) - h(0_j, p)]dp \tag{1.34}$$

que chamaremos de Importância estrutural de Barlow e Proschan de $c_j$ para $\phi$.

**Teorema 1.1** *Seja,*

$$n_r(j) = \sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1 \wedge \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=r\}} [\delta_j(\boldsymbol{x})] \tag{1.35}$$

*o número de vetores de caminhos críticos (ver definição 1.3) para o componente $c_j$ de tamanho $r$. Então, assumindo $c_1, \ldots, c_n$ independentes,*

$$I_j^{BPE} = \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} n_r(j) \tag{1.36}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
I_j^{BPE} &= \int_0^1 [h(1_j, p) - h(0_j, p)]dp \\
&= \int_0^1 \sum_{\mathbf{x}} [\phi(1_j, \mathbf{x}) - \phi(0_j, \mathbf{x})] p^{\sum_{i \neq j} x_i} (1-p)^{n-1-\sum_{i \neq j} x_i} dp \\
&= \int_0^1 \sum_{r=1}^{n} \eta_r(j) p^{r-1} (1-p)^{n-r} dp \\
&= \sum_{r=1}^{n} \eta_r(j) \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} \int_0^1 \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1} (1-p)^{n-r} dp \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} n_r(j)
\end{aligned}$$

pois $f(p) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1}(1-p)^{n-r}$ é a função densidade da distribuição $Beta[r, n-r+1]$.

Observe que a importância estrutural de Birnbaum pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
I_j^{BE}(\phi, t) &= 2^{-(n-1)} \sum_{\{\mathbf{x} | x_j = 1\}} [\delta_j(\mathbf{x})] \\
&= 2^{-(n-1)} \sum_{r=1}^{n} \sum_{\{\mathbf{x} | x_j = 1 \wedge \mathbf{x}\mathbf{x}' = r\}} [\delta_j(\mathbf{x})] = 2^{-(n-1)} \sum_{r=1}^{n} n_r(j).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Comparando as duas medidas de importância estrutural vemos que $I_j^{BPE}$ é designado pelo termo $n_r(j)$ ponderado por $\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}$, enquanto que $I_j^{BE}$ possui o peso comum $2^{-(n-1)}$ para cada $n_r(j)$.

**Exemplo 1.5** *Considere a estrutura do exemplo 1.2, onde,*

$$\delta_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-x_r)\right] & , \text{para } j = 1,\ldots,k \\ \prod_{r=1}^{k} x_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1-x_r)\right] & , \text{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{1.38}$$

*sendo* $n_l(j) = \sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\wedge \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=l\}}[\delta_j(\boldsymbol{x})]$ *o número de vetores de caminho crítico para o componente* $c_j$ *de tamanho* $l$.

*Para* $j = 1,\ldots,k$ *temos que*

$$\prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-x_r)\right] = 0 \tag{1.39}$$

*para todo* $l < k-1$. *Logo,*

$$n_l(j) = 0, \ \forall l < k-1. \tag{1.40}$$

*Quando* $k \leq l \leq n$ *temos,*

$$\prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-x_r)\right] = 1 \Longleftrightarrow x_1 = \ldots = x_k = 1 \ \ e \ \prod_{r=k+1}^{n} (1-x_r) = 0.$$

*Logo,* $x_1 = \ldots = x_k = 1$ *e* $x_r = 1$ *para ao menos um* $r \in \{k+1,\ldots,n\}$. *Assim,*

$$n_l(j) = \sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\wedge \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=l\}} [\delta_j(\boldsymbol{x})] = \binom{n-k}{l-k+1}. \tag{1.41}$$

*Para* $j = k+1,\ldots,n$,

$$n_l(j) = \sum_{\{\boldsymbol{x}|x_j=1\wedge \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'=l\}} [\delta_j(\boldsymbol{x})] = 1 \tag{1.42}$$

*para* $l = k$, *pois o vetor de estados* $\boldsymbol{x}$ *tal que*

$$x_1 = 1,\ldots,x_k = 1, x_{k+1} = 0,\ldots x_{j-1} = 0, x_{j+1} = 0,\ldots,x_n = 0$$

*é o único tal que* $\delta_j(\boldsymbol{x}) = 1$.

*Logo, a importância estrutural de* $c_j$ *para* $\phi$ *será,*

$$I_j^{BPE} = \begin{cases} \sum_{l=k}^{n-1} \binom{n-k}{l-k+1} \frac{(l-1)!(n-l)!}{n!} & , \text{para } j = 1, \ldots, k \\ \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} & , \text{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

## 1.3 Importância de Natvig

Intuitivamente parece que componentes que por sua falha causem maior redução no tempo de vida do sistema são os mais importantes. Através dessa noção Natvig (1979) define:

**Definição 1.8** *(Natvig 1979) A Importância da confiabilidade do componente* $c_j$ *para a confiabilidade do sistema* $\phi$ *é*

$$I_j^N = E(Z_j) \tag{1.43}$$

onde $Z_j$ denota a redução no tempo de vida residual do sistema devido a falha do componente $c_j$. Assumiremos $E(Z_j) < \infty$.

A idéia que envolve a importância $I_j^N$ é propiciar a análise da confiabilidade do sistema durante sua realização, permitindo que reparos ocorram aumentando seu tempo de vida até o momento de sua falha.

Natvig (1982) introduz as seguintes variáveis aleatórias:

$Y_j^1$ = tempo de vida restante do sistema no instante imediatamente *anterior* à ocorrência da falha do componente $c_j$.

$Y_j^0$ = tempo de vida restante do sistema no instante imediatamente *posterior* à ocorrência da falha do componente $c_j$.

Note que,

$$Z_j = Y_j^1 - Y_j^0 \geq 0.$$

Uma outra interpretação para $Y_j^1$ é

$Y_j^1$ = tempo de vida restante do sistema no instante imediatamente *posterior* à ocorrência da falha do componente $c_j$, o qual é imediatamente reparado, tendo a mesma distribuição do tempo de vida restante como teria no momento imediamente anterior à sua falha.

O componente assim reparado teria um tempo de vida total $R = T_j + Y_j^1$ com função de distribuição $G_j$, onde o tempo de vida adicional $Y_j^1$ tem função de sobrevivência definida por

$$P(Y_j^1 > t - s | T_j = s) = P(T_j > t | T_j > s) \tag{1.44}$$

onde $s \leq t$.

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\bar{G}_j(t) &= P(Y_j^1 + T_j > t) = P(T_j > t) + P(T_j + Y_j^1 > t, T_j \leq t) \\
&= P(T_j > t) + \int_0^t P(Y_j^1 > t - s | T_j = s) dF_j(s) \\
&= P(T_j > t) + \int_0^t P(T_j > t | T_j > s) dF_j(s) \\
&= \bar{F}_j(t) + \int_0^t \frac{\bar{F}_j(t)}{\bar{F}_j(s)}(-1) d\bar{F}_j(s) = \bar{F}_j(t) - \bar{F}_j(t) \ln \bar{F}_j(s)|_0^t \\
&= \bar{F}_j(t)(1 - \ln \bar{F}_j(t)).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Esta operação de reparo é conhecida na literatura como um reparo mínimo do componente $c_j$ em que sua taxa de falha é reconstituída à condição imediatamente anterior à falha.

Agora, considere dois casos: $T_j \leq T$ e $T_j > T$ (como definidos em 1.22 e 1.23, $T_j$ e $T$ denotam os tempos de vida do componente $c_j$ e do sistema, respectivamente). No primeiro caso temos que:

$$Z_j = Y_j^1 - Y_j^0 = Y_j^1 + T_j - (Y_j^0 + T_j) = (Y_j^1 + T_j) - T = R - T.$$

No segundo caso note que $R = T$. Logo,

$$Z_j = Y_j^1 - Y_j^0 = 0 - 0 = 0 = R - T.$$

Desse modo,

$$Z_j = R - T \tag{1.46}$$

vale sempre.

Pela equação 1.24 temos que

$$E(T) = \int_0^\infty h(\bar{\mathbf{F}}(t))dt$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_j^N &= E(Z_j) = \int_0^\infty h[[\bar{G}_j(t)]_j, \bar{\mathbf{F}}(t)]dt - \int_0^\infty h[\bar{\mathbf{F}}(t)]dt. \\ &= \int_0^\infty h[[\bar{F}_j(t)(1 - \ln \bar{F}_j(t))]_j, \bar{\mathbf{F}}(t)]dt - \int_0^\infty h[\bar{\mathbf{F}}(t)]dt \\ &= \int_0^\infty [h[1_j, \bar{\mathbf{F}}(t)] - h[0_j, \bar{\mathbf{F}}(t)]]\bar{F}_j(t)(-\ln \bar{F}_j(t))dt \\ &= \int_0^\infty -\bar{F}_j(t)(\ln \bar{F}_j(t))I_j^B(t)dt. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Observe que como a medida de Barlow e Proschan $I_j^{BP}$, a medida de Natvig pode ser interpretada como uma média ponderada da medida de Birnbaum.

**Exemplo 1.6** *Do exemplo 1.3 sabemos que* $E(\delta_j(\boldsymbol{x})) = I_j^B$ *onde:*

$$I_j^B = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} p_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-p_r)\right] & , \textit{para } j = 1, \ldots, k \\ \prod_{r=1}^{k} p_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1-p_r)\right] & , \textit{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

*considerando o sistema do exemplo 1.2. Tal qual o exemplo 1.4 consideraremos os componentes independentes e identicamente distribuídos, com distribuição exponencial de parâmetro* $\lambda$. *Desse modo, temos que, em um instante* $t$ *fixado,*

$$I_j^B = \begin{cases} e^{-(k-1)\lambda t}[1 - (1 - e^{-\lambda t})^{n-k}] & , \textit{para } j = 1, \ldots, k \\ e^{-k\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-k-1} & , \textit{para } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

*Logo, para* $j = 1, \ldots, k$ *temos*

$$I_j^N = \int_0^\infty -e^{-(k-1)\lambda t} \ln(e^{-\lambda t})[1 - (1 - e^{-\lambda t})^{n-k}] \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda} dt.$$

*Seja* $y = 1 - e^{-\lambda t}$. *Assim,*

$$I_j^N = \int_0^1 -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y)(1-y)^{k-1}[1 - y^{n-k}]dy = -\frac{1}{\lambda} \int_0^1 \underbrace{\ln(1-y)}_{(I)} \underbrace{(1-y)^{k-1}[1 - y^{n-k}]dy}_{(II)}$$

*Considere,*

$(I)$ $\ln(1-y) = u \longrightarrow du = -\frac{1}{1-y}dy$

$$(II) \qquad (1-y)^{k-1}[1 - y^{n-k}]dy = dv \longrightarrow v = \int (1-y)^{k-1}[1 - y^{n-k}]dy = \int (1-y)^{k-1}dy$$

$$- \int (1-y)^{k-1} y^{n-k} dy = -\frac{(1-y)^k}{k} - \underbrace{\int (1-y)^{k-1} y^{n-k} dy}_{(III)}.$$

*Desenvolvendo (III), utilizando o método de integração por partes,*

$$
\begin{aligned}
& \int (1-y)^{k-1} y^{n-k} dy = \\
= \; & (-1) y^{n-k} \frac{(1-y)^k}{k} + (n-k) \int \frac{(1-y)^k}{k} y^{n-k-1} dy \\
= \; & (-1) y^{n-k} \frac{(1-y)^k}{k} + \frac{n-k}{k} \left[ (-1) y^{n-k-1} \frac{(1-y)^{k+1}}{k+1} + (n-k-1) \int \frac{(1-y)^{k+1}}{k+1} y^{n-k-2} dy \right] \\
= \; & -\sum_{j=1}^{n-k} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-1} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} + \frac{(n-k)!}{\binom{n-1}{n-k}(n-k)!} \int y^0 (1-y)^{n-1} dy \\
= \; & -\sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-1} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!}
\end{aligned}
$$

*Aplicando (III) em (II), temos,*

$$
v = \int (1-y)^{k-1} [1 - y^{n-k}] dy = -\frac{(1-y)^k}{k} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-1} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!}
$$

*Logo, de (I) e (II), temos que,*

$$
\begin{aligned}
I_j^N &= -\frac{1}{\lambda} \left( uv - \int v(du) \right) \\
&= -\frac{1}{\lambda} \left[ \ln(1-y) \left( -\frac{(1-y)^k}{k} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-1} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \right) \right] \Bigg|_0^1 \\
&+ \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left[ -\frac{(1-y)^k}{k} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-1} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \right] \frac{1}{1-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left[ -\frac{(1-y)^{k-1}}{k} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{y^{n-k-j+1}(1-y)^{k+j-2} \binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \right] dy \\
&= \frac{1}{\lambda} \left[ -\int_0^1 \frac{(1-y)^{k-1}}{k} dy + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{\binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \int_0^1 y^{n-k-j+1} (1-y)^{k+j-2} dy \right] \\
&= \left[ -\frac{(1-y)^k}{k^2} \Bigg|_0^1 + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{\binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \frac{(n-k-j+1)!(k+j-2)!}{n!} \right] \\
&= \left[ \frac{1}{k^2} + \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{\binom{n-k}{j-1} (j-1)!}{\binom{k+j-1}{j} j!} \frac{k+j-2}{\binom{n}{k+j-1}} \right].
\end{aligned}
$$

*Para $j = k+1, \ldots, n$, considerando $y = 1 - e^{-\lambda t}$ temos,*

$$\begin{aligned}
I_j^N &= \int_0^1 -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)(1-y)^k y^{n-k-1}dy \\
&= \ln(1-y)\sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{y^{n-k-j}(1-y)^{k+j-2}\binom{n-k-1}{j-1}(j-1)!}{\binom{k+j-2}{j}j!}\Bigg|_0^1 \\
&+ \int_0^1 \sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{y^{n-k-j}(1-y)^{k+j-2}\binom{n-k-1}{j-1}(j-1)!}{\binom{k+j-2}{j}j!}\frac{1}{1-y}dy \\
&= \sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{\binom{n-k-1}{j-1}(j-1)!}{\binom{k+j-2}{j}j!}\int_0^1 y^{n-k-j}(1-y)^{k+j-3}dy \\
&= \frac{\binom{n-k-1}{j-1}(j-1)!}{\binom{k+j-2}{j}j!}\frac{(n-k-j)!(k+j-3)!}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

## 1.4 O conceito de Bergman

Bergman (1985) observa que, de um modo geral, podemos obter medidas de confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema através da diferença entre as médias dos tempos de vida do sistema quando modificamos a função distribuição do tempo de vida do componente.

Dessa forma considerando que $F_j$ e $G_j$ são, respectivamente, as funções de distribuição original e modificada do tempo de vida $T_j$ do componente $c_j$, Bergman (1985) propõe a seguinte medida de importância:

**Definição 1.9** *(Bergman 1985) A Importância da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema $\phi$ é*

$$I_j^{BG} = E_{\bar{G}_j}(T) - E_{\bar{F}_j}(T). \tag{1.48}$$

Note que, utilizando a suposição de independência, temos que,

$$\begin{aligned}
I_j^{BG} &= E_{\bar{G}_j}(T) - E_{\bar{F}_j}(T) = \int_0^\infty P_{G_j}(T > t)dt - \int_0^\infty P_{F_j}(T > t)dt \\
&= -\int_0^\infty P_{G_j}(T \leq t) - P_{F_j}(T \leq t)dt \\
&= -\int_0^\infty G_j(t)(h[1_j, \bar{\mathbf{F}}(t)] - h[0_j, \bar{\mathbf{F}}(t)]) - F_j(t)(h[1_j, \bar{\mathbf{F}}(t)] - h[0_j, \bar{\mathbf{F}}(t)])dt \\
&= -\int_0^\infty [(1 - G_j(t)) - (1 - F_j(t))](h[1_j, \bar{\mathbf{F}}(t)] - h[0_j, \bar{\mathbf{F}}(t)])dt \\
&= \int_0^\infty (\bar{G}_j(t) - \bar{F}_j(t))I_j^B(t)dt. \qquad (1.49)
\end{aligned}$$

**Observação 1.3** *Considere a seguinte modificação infinitesimal da função de distribuição do tempo de vida do componente $c_j$,*

$$\bar{G}_j(t) = \bar{F}_j(t^-) \qquad (1.50)$$

*Logo,*

$$\begin{aligned}
E_{\bar{G}_j}(T) - E_{\bar{F}_j}(T) &= \int_0^\infty I^B(t)\left(\bar{F}_j(t^-) - \bar{F}_j(t)\right)dt \\
&= \int_0^\infty I^B(t)(F_j(t) - F_j(t^-))dt \\
&\approx \int_0^\infty I^B(t)f_j(t)dt. \qquad (1.51)
\end{aligned}$$

*Assim podemos* ***interpretar*** *que a importância de Barlow e Proschan é obtida através de uma tranformação infinitesimal de $F_j(t)$ quando se verifica 1.50.*

### 1.4.1 Aplicação 1: Modificação por reparo mínimo

Considere a modificação do componente atráves de reparo mímino. Da equação 1.45 temos que,

$$\bar{G}_j(t) = \bar{F}_j(t)(1 - \ln \bar{F}_j(t)). \qquad (1.52)$$

Logo,

$$I_j^{BG} = E(Z_j) = E_{\bar{G}_j}(T) - E_{\bar{F}_j}(T) = \int_0^\infty - \bar{F}_j(t)(\ln \bar{F}_j(t))I^B(t)dt = I_j^N \quad (1.53)$$

que é a importância de Natvig. Ou seja, para a modificação através do reparo mínimo a relação $I_j^{BG} = I_j^N$ é válida.

Seguindo a idéia proposta por Bergman (1985), sugerimos uma importância cuja modificação do componente corresponde a tranformação em paralelo do tempo de vida do componente $c_j$.

### 1.4.2 Aplicação 2: Modificação por transformação em paralelo

Sejam $S$ e $T_j$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de confiabilidade $\bar{F}_j(t)$. A função de confiabilidade da transformação em paralelo do componente $c_j$, $S \vee T_j$, é:

$$\begin{aligned} \bar{G}_j(t) &= P(T_j \vee S > t) = 2P(T_j > t) - P(T_j > t)^2 = 2\bar{F}_j(t) - \bar{F}_j(t)^2 \\ &= \bar{F}_j(t) + \bar{F}_j(t)F_j(t). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Note que,

$$\begin{aligned} I_j^{BG} &= E_{\bar{G}_j}(t) - E_{\bar{F}_j}(t) = \left(\int_0^\infty \bar{F}_j(t)F_j(t)I_j^B(t)dt + \int_0^\infty \bar{F}_j(t)I_j^B(t)dt\right) - \int_0^\infty \bar{F}_j(t)I_j^B(t)dt \\ &= \int_0^\infty [F_j(t)\bar{F}_j(t)]I_j^B(t)dt \end{aligned} \quad (1.55)$$

que definiremos como a importância por transformação em paralelo.

**Definição 1.10** *A Importância por tranformação em paralelo da confiabilidade do*

*componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema $\phi$ é,*

$$I^{PL}(j) = \int_0^\infty [F_j(t)\bar{F}_j(t)]I_j^B(t)dt. \tag{1.56}$$

**Exemplo 1.7** *De maneira similar aos exemplos 1.4 e 1.6 iremos aplicar ao sistema do exemplo 1.2 a importância por transformação em paralelo. Da mesma forma consideraremos os componentes independentes e identicamente distribuídos, com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda$. Desse modo, temos que em um instante $t$ fixado*

$$I_j^B(t) = \begin{cases} e^{-(k-1)\lambda t}[1-(1-e^{-\lambda t})^{n-k}] & , \textit{para } j = 1,\ldots,k \\ e^{-k\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-k-1} & , \textit{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases}$$

*Para $j = 1,\ldots,k$ temos,*

$$I_j^{PL} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})e^{-\lambda t(k-1)}[1-(1-e^{-\lambda t})^{n-k}]dt$$

*Seja $y = 1-e^{-\lambda t}$. Assim,*

$$\begin{aligned} I_j^{PL} &= \frac{1}{\lambda}\int_0^1 y(1-y)^{k-1}[1-y^{n-k}]dy = \frac{1}{\lambda}\left[\int_0^1 y(1-y)^{k-1}dy - \int_0^1 (1-y)^{k-1}y^{n-k+1}dy\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{(n-k+1)!(k-1)!}{(n+1)!} - \frac{1}{k(k+1)}\right]. \end{aligned}$$

*Para $j = k+1,\ldots,n$, considerando $y = 1-e^{-\lambda t}$ temos,*

$$\begin{aligned} I_j^{PL} &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})e^{-k\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-k-1}dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 y(1-y)^k y^{n-k-1}dy \\ &= \frac{1}{\lambda}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

De maneira equivalente a Seção 1.2 definiremos a seguinte medida de importância estrutural para tranformação em paralelo,

$$I_\phi^{PLE}(j) = \int_0^1 [p(1-p)(h(1_j,p) - h(0_j,p))]dp \tag{1.57}$$

**Teorema 1.2** *Seja $n_r(i)$ o número de vetores caminho críticos para o componente $c_j$ de tamanho $r$. Então,*

$$I_{\phi}^{PLE}(j) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(r)!(n-r+1)!}{(n+2)!} n_r(j). \tag{1.58}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
I_{\phi}^{PLE}(j) &= \int_0^1 [p(1-p)(h(1_j,p) - h(0_j,p))]dp \\
&= \int_0^1 \sum_{\mathbf{x}} p(1-p)[\phi(1_j,\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{0_j},\mathbf{x})]\mathbf{p}^{\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}\mathbf{x_i}}(\mathbf{1}-\mathbf{p})^{\mathbf{n}-\mathbf{1}-\sum_{\mathbf{i}\neq\mathbf{j}}\mathbf{x_i}}dp \\
&= \int_0^1 \sum_{r=1}^{n} \eta_r(j) p^r (1-p)^{n-r+1} dp \\
&= \sum_{r=1}^{n} \eta_r(j) \binom{n+2}{r}^{-1} \int_0^1 \binom{n+2}{r} p^{r-1}(1-p)^{n-r} dp \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{(r)!(n-r+1)!}{(n+2)!} n_r(j).
\end{aligned}$$

**Exemplo 1.8** *Considere novamente a estrutura do exemplo 1.2, onde,*

$$\delta_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \prod_{r=1 r\neq j}^{k} x_r \left[1 - \prod_{r=k+1}^{n} (1-x_r)\right] & , \textit{para } j = 1,\ldots,k \\ \prod_{r=1}^{k} x_r \left[\prod_{r=k+1 r\neq j}^{n} (1-x_r)\right] & , \textit{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases}$$

*Como visto no exemplo 1.5, para $l > k-1$, temos que,*

$$n_l(j) = \begin{cases} \binom{n-k}{l-k+1} & , \textit{para } j = 1,\ldots,k \\ 1 & , \textit{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases}$$

*Logo, a importância estrutural da transformação em paralelo de $c_j$ para $\phi$ será,*

$$I_j^{PLE} = \begin{cases} \sum_{l=k}^{n-1} \binom{n-k}{l-k+1} \frac{(l)!(n-l+1)!}{(n+2)!} & , \textit{para } j = 1,\ldots,k \\ \sum_{l=k}^{n-1} \frac{(l)!(n-l+1)!}{(n+2)!} & , \textit{para } j = k+1,\ldots,n. \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

# Importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema: caso dependente

Consideremos o vetor $(T_1, \ldots, T_n)$ de $n$ variáveis aleatórias finitas e positivas definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que representam os tempos de vida dos componentes de um sistema coerente. Assumiremos que os tempos de vida são dependentes e que não existem falhas simultâneas, isto é, $P(T_i \neq T_j) = 1$ para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Observação 2.1** *Por simplicidade de notação, vamos assumir no decorrer desta dissertação que as relações como $\subset$, $=$, $\leq$, $<$, entre conjuntos mensuráveis e variáveis aleatórias, respectivamente, sempre serão com probabilidade um. Com isso o termo $P$-q.c. será omitido. Para esperanças condicionais não vamos fazer diferença entre uma versão e a classe de equivalência $P$-q.c. dessas versões.*

## 2.1 Representação em série de um sistema coerente

Denotamos por $T_{(1)} < T_{(2)} < \ldots < T_{(n)}$ os tempos de vida $T_1, \ldots, T_n$ ordenados, como ocorrem no tempo, e chamaremos de marcas $X_i = \{j : T_{(i)} = T_j\}$, $1 \leq j \leq n$. Convencionalmente consideramos $T_{(n+1)} = T_{(n+2)} = \ldots = \infty$ e $X_{n+1} = X_{n+2} = \ldots = k$ onde $k$ é uma marca finita (fictícia), não pertencente a $\{1, 2, \ldots, n\}$. A sequência $(T_{(i)}, X_i)_{i \geq 1}$ define um processo pontual multivariado (definição A.10), sendo

$$N_t^j = \sum_i N_t^{j,i} = \sum_i 1_{\{T_{(i)} \leq t, X_i = j\}} \tag{2.1}$$

o processo de contagem associado ao componente $c_j$, $1 \leq j \leq n$.

A formulação matemática de nossas observações é dada por uma família de $\sigma$-álgebras de $\mathcal{F}$, denotada por $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ onde

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{1_{\{T_{(i)} > s, X_i = j\}}, 0 \leq s \leq t, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}. \tag{2.2}$$

Intuitivamente, a cada instante $t$ o observador conhece a ocorrência ou não do evento $\{T_{(i)} \leq t, X_i = j\}$ e, caso tenha ocorrido, conhece o valor exato de $T_j$.

O processo $(N_t^{i,j})_{t \geq 0}$ definido por $N_t^{i,j} = 1_{\{T_{(i)} \leq t, X_i = j\}}$ é um $\mathcal{F}_t$-submartingal. Pela decomposição de Doob-Meyer (Teorema A.2) conhecemos que existe um **único** processo estocástico $(A_t^{i,j})_{t \geq 0}$ crescente, $\mathcal{F}_t$-previsível e contínuo à direita, com $A_0^{i,j} = 0$ tal que $N_t^{i,j} - A_t^{i,j}$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal. Como $N_t^{i,j}$ conta somente no intervalo $(T_{(i-1)}, T_{(i)}]$ o compensador correspondente $A_t^{i,j}$ deve ser constante fora do intervalo. A contagem de falha do componente $c_j$ é dada por $N_t^j = \sum_{i=1}^{\infty} N_t^{i,j}$ com $\mathcal{F}_t$-compensadores $A_t^j = \sum_{i=1}^{\infty} A_t^{i,j}$ pois a soma finita de $\mathcal{F}_t$-martingais é um $\mathcal{F}_t$-martingal e a decomposição é única.

O processo compensador é expresso em termos de probabilidades condicionais, dada a informação até o instante $t$ e, desta forma, generaliza a noção de risco (ver

teorema A.4). Intuitivamente é a propenção de falha no instante $t$ condicionada a toda a informação imediatamente anterior àquele instante.

Estamos interessados em analisar os tempos de vida dos sistemas coerentes, que podem ser representados pela decomposição série-paralelo

$$T = T(\mathbf{T}) = \min_{1 \leq i \leq r} \max_{j \in K_i} T_j \tag{2.3}$$

onde $K_i$, $1 \leq i \leq r$, são os conjuntos de cortes minimais do sistema, isto é, um conjunto mínimo de componentes cuja falha causa a falha do sistema e $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$.

**Observação 2.2** *Como* $\{T > t\} = \{\bigcap_{1 \leq i \leq r} \bigcup_{j \in K_i} \{T_j > t\}\}$ *e* $T_j$ *são* $\mathcal{F}_t$*-tempos de parada,* $T$ *também é um* $\mathcal{F}_t$*-tempo de parada.*

### 2.1.1 Importância de Birnbaum

No caso em que assumimos independência entre os tempos de vida dos componentes, uma interpretação da importância de Birnbaum $I_j^B$ é considerá-la como sendo a probabilidade do componente $c_j$ ser crítico para o sistema. Essa mesma noção está implícita no conceito de nível crítico de um componente.

**Definição 2.1** *O nível crítico de um componente* $c_j$*, denotado por* $Y_j$*, é o primeiro instante a partir do qual a falha do componente causa a falha do sistema,*

$$Y_j = \inf\{t \geq 0 : \phi(1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_j, \boldsymbol{X}(t)) = 1\}, \tag{2.4}$$

*sendo* $Y_j = \infty$ *caso* $\{\} = \emptyset$.

**Observação 2.3 (i.)** *É fácil notar que o nível crítico de um componente em série com o sistema é zero e que o nível crítico de um componente em paralelo com um subsistema, constituindo um sistema, é o tempo de vida do subsistema.*

**(ii.)** *Note que o sistema pode falhar antes do componente se tornar crítico, e também que o componente pode falhar antes de se tornar crítico.*

Uma forma equivalente de expressar matematicamente que o componente $c_j$ é crítico no instante $t$ é

$$\{Y_j < t \leq T\} \Leftrightarrow \{\phi(1_j, \mathbf{X}(t^-)) - \phi(0_j, \mathbf{X}(t)) = 1\}. \tag{2.5}$$

Portanto, no conjunto $\{T_j = t\}$ podemos definir

**Definição 2.2** *A importância de Birnbaum da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema, no tempo $t$, é a probabilidade do componente ser crítico no instante $t$, isto é,*

$$I_j^B(t) = P(Y_j < t \leq T | T_j = t). \tag{2.6}$$

**Observação 2.4** *Claramente, se os componentes são independentes $I_j^B(t)$ é a importância de Birnbaum dada pela definição 1.4.*

### 2.1.2 Importância de Barlow e Proschan

Das realizações do processo pontual temos que, em um intervalo infinitesimal

$$\{T \in dt\} = \bigcup_{\{j: Y_j < t \leq T\}} \{T_j \in dt\} \tag{2.7}$$

de maneira que podemos enunciar:

**Teorema 2.1** *Se $T$ é o tempo de vida de um sistema coerente com $n$ componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cujos tempos de vida $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são tempos de parada totalmente*

*inacessíveis, diferenciáveis, e se $A_t^j$ é o $\mathcal{F}_t$-compensador de $T_j$ (de $N_t^j = 1_{\{T_j \leq t\}}$) então, no conjunto $\{T > t\}$, o $\mathcal{F}_t$-compensador de $T$ (de $N_t = 1_{\{T \leq t\}}$) é*

$$A_t = \sum_{j=1}^{n} \left( A_{t \wedge T}^j - A_{Y_j}^j \right)^+ \tag{2.8}$$

*onde $Y_j$ é o nível crítico do componente $c_j$ e $(a)^+ = \max(0, a)$.*

**Demonstração:**

Observe que o processo $1_{\{Y_j < t \leq T\}}$ é $\mathcal{F}_t$-previsível e que, pela definição de compensador (definição A.11)

$$E\left[\int_0^\infty c_t 1_{\{Y_j < t \leq T\}} dN_t^j\right] = E\left[\int_0^\infty c_t 1_{\{Y_j < t \leq T\}} dA_t^j\right] \tag{2.9}$$

para todo processo $(c_t)_{t \geq 0}$, positivo e $\mathcal{F}_t$-previsível.

Como $\{T \in dt\} = \bigcup_{\{j : Y_j < t \leq T\}} \{T_j \in dt\}$ podemos escrever que

$$dN_t = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{Y_j < t \leq T\}} dN_t^j \tag{2.10}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty c_s dN_s\right] &= E\left[\int_0^\infty c_s \sum_j 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dN_s^j\right] = \sum_j E\left[\int_0^\infty c_s 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dN_s^j\right] \\ &= \sum_j E\left[\int_0^\infty c_s 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dA_s^j\right] = E\left[\int_0^\infty c_s \sum_j 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dA_s^j\right] \end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t \sum_j 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dA_s^j = \sum_j \int_0^t 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dA_s^j = \sum_j \int_{Y_j}^{t \wedge T} dA_s^j \\ &= \sum_j (A_{t \wedge T}^j - A_{Y_j}^j)^+. \end{aligned} \tag{2.11}$$

No que segue consideraremos o tempo de vida do sistema depois de seu nível crítico $Y_j$, e representaremos nossas observações por

$$\mathcal{F}_{Y_j + t} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{Y_j + t \leq s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s \geq 0\}. \tag{2.12}$$

Definiremos $T_j^* = E[(T_j - Y_j)^+|\mathcal{F}_{Y_j}]$ os tempos de vida e

$$M_t^j = 1_{\{T_j^* \leq t\}} = E\left[1_{\{Y_j < T_j \leq Y_j + t|\mathcal{F}_{Y_j}\}}\right] = E\left[N_{Y_j+t}^j - N_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}\right] \tag{2.13}$$

os processos de contagem correspondentes.

**Teorema 2.2** *Considerando as notações acima, o $\mathcal{F}_{Y_j+t}$-compensador de $M_t^j$ é*

$$B_t^j = E[A_{Y_j+t}^j - A_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}]. \tag{2.14}$$

**Demonstração:**

Pela decomposição de Doob-Meyer temos que o $\mathcal{F}_t$-martingal $N_t^j - A_t^j$ é uniformemente integrável e $Y_j + t$ é um $\mathcal{F}_t$-tempo de parada. Pelo teorema da amostragem opcional (teorema A.1) temos,

$$E[N_{Y_j+t}^j - A_{Y_j+t}^j|\mathcal{F}_{Y_j+s}] = N_{Y_j+s}^j - A_{Y_j+s}^j \tag{2.15}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E\left[M_t^j - B_t^j|\mathcal{F}_{Y_j+s}\right] &= E\left[E(N_{Y_j+t}^j - N_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}) - E(A_{Y_j+t}^j - A_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j})|\mathcal{F}_{Y_j+s}\right] \\
&= E[E(N_{Y_j+t}^j - A_{Y_j+t}^j|\mathcal{F}_{Y_j+s})|\mathcal{F}_{Y_j}] - E[E(N_{Y_j}^j - A_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j+s})|\mathcal{F}_{Y_j}] \\
&= E(N_{Y_j+s}^j - A_{Y_j+s}^j|\mathcal{F}_{Y_j}) - E(N_{Y_j}^j - A_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}) \\
&= E(N_{Y_j+s}^j - N_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}) - E(A_{Y_j+s}^j - A_{Y_j}^j|\mathcal{F}_{Y_j}) \\
&= M_s^j - B_s^j. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

A teoria acima permite representar uma estrutura coerente através de uma estrutura em série.

**Teorema 2.3** *Com as notações acima o tempo de vida do sistema $T$ é, quase certamente, igual ao tempo de vida do sistem em série $T^* = \min_{Y_j<\infty}(T_j^* + Y_j)$.*

Observe, que a importância de Barlow e Proschan da confiabilidade de um componente para a confiabilidade de um sistema pode ser interpretada pela probabilidade de que a falha do sistema coincida com a falha do componente. Como $T^*$ é o tempo de vida de um sistema em série temos,

$$\begin{aligned} P(T_j^* = T^*) &= P(T_j^* \leq T^*) = E[1_{\{T_j^* \leq T^*\}}] = E[B_{T^*}^j] = E\{E[A_{Y_j+T^*}^j - A_{Y_j}^j | \mathcal{F}_{Y_j}]\} \\ &= E\left[(A_T^j - A_{Y_j}^j)^+\right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

e definimos

**Definição 2.3** *Seja $T$ o tempo de vida de um sistema coerente $\phi$ e seja $T_j$ o tempo de vida do componente $c_j$. A importância de Barlow e Proschan da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema é definida por*

$$I_j^{BP} = E[(A_T^j - A_{Y_j}^j)^+]. \tag{2.18}$$

**Observação 2.5** **(i.)** *No caso em que $T_j$ é um tempo de parada totalmente inacessível o $\mathcal{F}_t$-compensador de $1_{\{T_j \leq t\}}$ é contínuo e*

$$E[A_T^j - A_{Y_j}^j] = E[\int_{Y_j}^T dA_s^j] = E[\int_0^\infty 1_{\{Y_j < s \leq T\}} dA_s^j]. \tag{2.19}$$

**(ii.)** *Se os componentes são independentes, o $\mathcal{F}_t$-compensador do tempo de vida $T_j$ é $A_t^j = -\log \bar{F}_j(t \wedge T_j)$, onde $\bar{F}_j(t) = 1 - F_j(t)$ é a função de sobrevivência do tempo de vida do componente $c_j$, isto é, é a confiabilidade do componente $c_j$ para o intervalo $[0, t]$.*

**Proposição 2.1** *Se os componentes são independentes com distribuições absolutamente contínuas, a importância da confiabilidade do componente $c_j$ para a confiabilidade do sistema é*

$$I_j^{BP} = \int_0^\infty I_j^B(t) dF_j(t). \tag{2.20}$$

**Demonstração:**

$$
\begin{aligned}
I_j^{BP} &= E\left[\int_0^\infty 1_{\{Y_j<t\leq T\}} d(-\log \bar{F}_j(T_j \wedge t))\right] = E\left\{E\left[\int_0^\infty 1_{\{Y_j<t\leq T\}} d(-\log \bar{F}_j(T_j \wedge t))|T_j\right]\right\} \\
&= \int_0^\infty E\left[\int_0^s 1_{\{Y_j<t\leq T\}} d(-\log \bar{F}_j(t))|T_j = s\right] dF_j(s) \\
&= E\left[\int_0^\infty \int_0^s 1_{\{Y_j<t\leq T\}} \frac{dF_j(t)}{\bar{F}_j(t)} dF_j(s)\right] = E\left[\int_0^\infty 1_{\{Y_j<t\leq T\}} \frac{1}{\bar{F}_j(t)} \left[\int_t^\infty dF_j(s)\right] dF_j(t)\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{\{Y_j<t\leq T\}} dF_j(t)\right] = \int_0^\infty P(Y_j < t \leq T|T_j = t) dF_j(t) = \int_0^\infty I_i^B(t) dF_j(t).
\end{aligned}
$$

Para provar a proposição acima utilizamos a suposição de independência dos componentes. Mostraremos que a independência não é uma condição necessária para a medida de Barlow e Proschan.

**Proposição 2.2** *Sob a notação acima, se $T_j$ é um $\mathcal{F}_t$-tempo de parada totalmente inacessível, então*

$$
I_j^{BP} = \int_0^\infty I_j^B(t) dF_j(t). \tag{2.21}
$$

**Demonstração:**

Primeiramente observe que o processo $1_{\{Y_j<s\leq T\}}$ é contínuo à esquerda e, portanto, $\mathcal{F}_t$-previsível de forma que

$$
\int_0^t 1_{\{Y_j<s\leq T\}} d(N_s^j - A_s^j) \tag{2.22}
$$

é um $\mathcal{F}_t$-martingal de média zero (LemaA.2). Segue que, em $\{T < t\}$,

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^t 1_{\{Y_j<s\leq T\}} d(A_s^j)\right] &= E\left[\int_0^t 1_{\{Y_j<s\leq T\}} d(N_s^j)\right] = E\left[1_{\{Y_j<T_j\leq T\}}\right] = P(Y_j < T_j \leq T) \\
&= \int_0^\infty P(Y_j < s \leq T|T_j = s) dF_j(s) = \int_0^\infty I_j^B(s) dF_j(s). \quad (2.23)
\end{aligned}
$$

**Exemplo 2.1** *Dentre as extensões das distribuições exponenciais bivariadas, a proposta por Freund (1961) modela a função de distribuição bivariada de dois componentes formando um sistema paralelo de maneira que quando um componente falha o sistema continua funcionando com o outro componente sobrecarregado.*

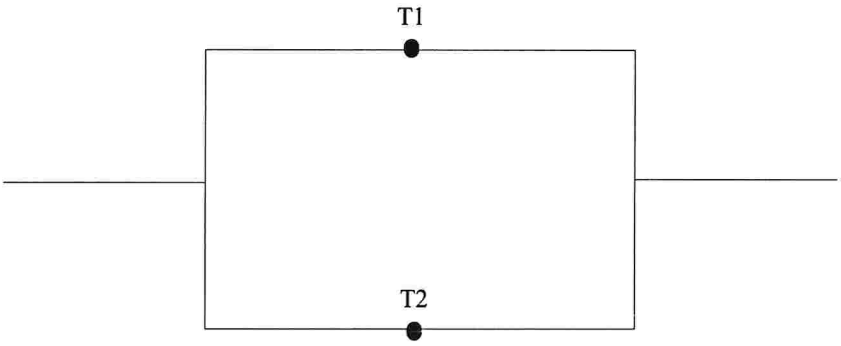


Figura 2.1: Sistema em paralelo proposto por Freund (1961)

*Esta distribuição bivariada é definida pela função densidade de probabilidade,*

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} \alpha\beta' \exp\{-\beta' t - (\alpha+\beta-\beta')s\} & , se\ 0 < s < t \\ \beta\alpha' \exp\{-\alpha' t - (\alpha+\beta-\alpha')s\} & , se\ 0 < t < s. \end{cases}$$

*sendo* $\alpha', \alpha, \beta', \beta > 0$.

*A importância de Barlow e Proschan para o componente* 1 *é definida por:*

$$I_1^{BP} = E[(A_T^1 - A_{Y_1}^1)^+] = E[\int_0^\infty 1_{\{Y_1 < s \leq T\}} dA_s^1]$$

*onde* $Y_1 = T_2$ *e* $T = T_1 \vee T_2$.

*Em* $\{T_2 < s\}$, *a intensidade do componente* 1 *é*

$$\lambda_s^1 = \frac{\beta\alpha' \exp[\alpha' t - (\alpha+\beta-\alpha')s]}{\int_s^\infty \beta\alpha' \exp[\alpha' t - (\alpha+\beta-\alpha')u]du} ds = \alpha + \beta - \alpha' \tag{2.24}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned} I_1^{BP} &= E[\int_0^\infty 1_{\{T_2<x\leq T\}} dA_x^1] = \int_0^\infty P(T_2 < x \leq T)(\alpha+\beta-\alpha')dx \\ &= (\alpha+\beta-\alpha')\int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^x \beta\alpha' \exp[-\alpha' t - (\alpha+\beta-\alpha')s]ds\ dt\ dx \\ &= \frac{(\alpha+\beta-\alpha')\beta}{\alpha+\beta-\alpha'} \int_0^\infty [1-\exp(-\alpha' x)]\exp[-(\alpha+\beta-\alpha')x]dx \\ &= \beta\left[\frac{1}{(\alpha+\beta-\alpha')} - \frac{1}{(\alpha+\beta)}\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

## 2.2 Importância de componentes através de transformações nos compensadores

No primeiro capítulo observamos que, de um modo geral, podemos obter medidas de confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema através da diferença entre os tempos médios de vida do sistema quando modificamos a função distribuição do tempo de vida do componente. Nesta seção, para generalizar os conceitos de importância para componentes com tempos de vida dependentes, utilizaremos esta mesma idéia no espaço dos processos compensadores.

Observamos um resultado bem conhecido de que existe uma correspondência bijetiva entre o espaço das funções de distribuição e o espaço dos processos compensadores dada pela fórmula exponencial de Dóleans

$$P(T_j > t|\mathcal{F}_t) = \exp[-(A_t^j)^c] \prod_{0\leq s\leq t} (1-\Delta A_s^j) \tag{2.26}$$

onde $(A_t^j)_{t\geq 0}$ é o processo $\mathcal{F}_t$-compensador de $(1_{\{T_j\leq t\}})_{t\geq 0}$, $(A_t^j)^c$ é a parte contínua de $A_t^j$ e $\Delta A_t^j = A_t^j - A_{(t-)}^j$ a parte discreta.

Dessa forma interpretaremos a modificação da função de distribuição de um componente através de uma transformação em seu compensador. O teorema enunciado

abaixo permite determinarmos o compensador que corresponde à modificação da função de distribuição deste componente.

**Teorema 2.4** *(Teorema de Girsanov) (Bremaud 1981)*
*Sejam $T_j$, $1 \leq j \leq n$, $\mathcal{F}_t$-tempos de parada totalmente inacessíveis, representando os tempos de vida dos componentes $c_j$, $1 \leq j \leq n$, respectivamente, e sejam $N_t^j = 1_{\{T_j \leq t\}}$ os processos de contagens com os correspondentes $\mathcal{F}_t$-compensadores $A_t^j$, $1 \leq j \leq n$.*

*Sejam $(\alpha_t^j)_{t \geq 0}$, $1 \leq j \leq n$, processos não negativos, $\mathcal{F}_t$-previsíveis, tais que, para todo $t \geq 0$ e $1 \leq j \leq n$,*

$$\Gamma_{\alpha_t}^j = \int_0^t \alpha_s^j dA_s^j < \infty. \tag{2.27}$$

*Então,*

$$L_{\alpha_t} = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_{T_j}^j)^{N_t^j} \exp[A_t^j - \Gamma_{\alpha_t}^j] \tag{2.28}$$

*com $\alpha_t = (\alpha_t^1, \alpha_t^2, \ldots, \alpha_t^n)$, é um $\mathcal{F}_t$-martingal local não negativo.*

*Em adição, se $E[L_{\alpha_t}] = 1$, a medida de probabilidade definida pela derivada de Radon-Nikodyn,*

$$\frac{dQ_{\alpha_t}}{dP} = L_{\alpha_t} \tag{2.29}$$

*é tal que, sob $Q_{\alpha_t}$, $\Gamma_{\alpha_t}^j$ é o único $\mathcal{F}_t$-compensador de $N_t^j$.*

*Em particular, denotamos $\alpha_t^j = (1, \ldots, 1, \alpha_t^j, 1, \ldots, 1)$ e $\frac{dQ_{\alpha_t^j}}{dP} = L_{\alpha_t^j}$.*

**Observação 2.6** *No caso em que $0 < \alpha_t^j \leq 1$, o processo taxa de falha $\alpha_t^j dA_t^j$ é menor do que o processo $dA_t^j$ e podemos interpretar a transformação como uma melhora no tempo de vida do componente $j$.*

**Demonstração**

Considere os $\mathcal{F}_t$-tempos de parada definidos por

$$U_k = \inf\{t \geq 0 : A_t^j \geq k \text{ ou } \Gamma_{\alpha_t}^j \geq k\}. \tag{2.30}$$

Claramente temos que $U_k \uparrow \infty$ quando $k \uparrow \infty$.

Portanto é suficiente provar que o processo

$$L_{\alpha_{t\wedge U_k}} = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_{T_j}^j)^{N_{t\wedge U_k}^j} \exp[A_{t\wedge U_k}^j - \Gamma_{t\wedge U_k}^j]. \tag{2.31}$$

é um $\mathcal{F}_t$-martingal limitado para mostrar que $L_{\alpha_t}$ é um $\mathcal{F}_t$ martingal local.

Para qualquer tempo de parada $U \leq U_k$ podemos escrever

$$L_{\alpha_U}^j = 1 - \int_0^U \exp\{\int_0^s (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}(1-\alpha_s^j)(N_s^j - \lambda_s^j)ds \tag{2.32}$$

que é um $\mathcal{F}_t$-martingal (ver lema A.2).

Note que se $U < T_j$, então,

$$\begin{aligned} L_{\alpha_U}^j &= 1 + \int_0^U \exp\{\int_0^s (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}(1-\alpha_s^j)\lambda_s^j ds = 1 + \exp\{\int_0^s (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}\Big|_0^U \\ &= \exp\{\int_0^U (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se $U \geq T_j$, então,

$$\begin{aligned} L_{\alpha_U}^j &= 1 + \int_0^U \exp\{\int_0^s (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}(1-\alpha_s^j)\lambda_s^j ds - \\ &\quad \int_0^U \exp\{\int_0^s (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}(1-\alpha_s^j)d(N_s^j) \\ &= \exp\{\int_0^{T_j} (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv + \int_{T_j}^U (1-\alpha_v^j)\underbrace{\lambda_v^j dv}_{=0}\} - \\ &\quad \exp\{\int_0^{T_j} (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}(1-\alpha_{T_j}^j) \\ &= \exp\{\int_0^{T_j} (1-\alpha_v^j)\lambda_v^j dv\}\alpha_{T_j}^j \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como $P(T_j = T_i) = 0$, $\forall i \neq j$,

$$L_{\alpha_{t\wedge U_k}} = \prod_{j=1}^{n} L^j_{\alpha_{t\wedge U_k}} \tag{2.35}$$

é um $\mathcal{F}_t$-martingal limitado. Segue que $L_{\alpha_t}$ é um martingal local.

Agora queremos mostrar que sob a medida $Q_{\alpha_t}$ definida pela derivada de Radon-Nikodym

$$\frac{dQ_{\alpha_t}}{dP} = L_{\alpha_t} \tag{2.36}$$

$\Gamma^j_{\alpha_t}$ é o $\mathcal{F}_t$-compensador de $N^j_t$.

Primeiramente note que,

$$E[L_{\alpha_t}] = 1 \Rightarrow \int_\Omega dQ_{\alpha_t} = 1$$

logo $Q_{\alpha_t}$ é uma medida de probabilidade.

Considere o tempo de parada $U \leq U_k$. Pelo teorema anterior $L_{\alpha_{t\wedge U}}$ é um $\mathcal{F}_{t\wedge U}$-martingal onde, sob $Q_{\alpha_t}$, e usando a fórmula integral de Dellacherie (Teorema A.3), temos,

$$\begin{aligned}
E_{Q_{\alpha_U}}[\Gamma^j_U] &= E[L_U\Gamma^j_U] = E[\int_0^U L_s d\Gamma^j_s] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{\{0\leq s\leq U\}} \prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} (\alpha^i_{T_i})^{N^i_s} \exp[A^i_s - \Gamma^i_s] \exp[A^j_s - \Gamma^j_s]\alpha^j_s\lambda^j_s ds\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{\{0\leq s\leq U\}} \prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} (\alpha^i_{T_i})^{N^i_s} \exp[A^i_s - \Gamma^i_s] \exp[A^j_s - \Gamma^j_s]\alpha^j_s dN^j_s\right] \\
&= E\left[1_{\{T_j\leq U\}} \left(\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} \left((\alpha^i_{T_i})^{N^i_{T_j}} \exp[A^i_{T_j} - \Gamma^i_{T_j}]\right) \exp[A^j_{T_j} - \Gamma^j_{T_j}]\alpha^j_{T_j}\right)\right] \\
&= E\left[1_{\{T_j\leq U\}} L^j_{T_j}\right] = E_{Q_{\alpha_{T_j}}}\left[1_{\{T_j\leq U\}}\right] = E_{Q_{\alpha_U}}[N^j_U].
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Logo, pelo Lema de Komatsu (Lema A.1) e pelo teorema de Doob-Meyer (Teorema A.2) temos que $\Gamma^j_{\alpha_t}$ é o $\mathcal{F}_t$-compensador de $N^j_t$.

Assumiremos que os tempos de vida dos componentes são $\mathcal{F}_t$-tempos de parada totalmente inacessíveis e, portanto, os compensadores de $N_t^j = 1_{\{T_j \leq t\}}$ são contínuos. Em adição, assumiremos que são diferenciáveis.

**Exemplo 2.2** ***Caracterização de um reparo mínimo através da transformação dos compensadores.***
*Considere o tempo de vida $T_j$ do componente $c_j$ com função de distribuição $F_j(t)$. Neste caso o $\mathcal{F}_t$-compensador de $N_t^j$ no conjunto $\{T_j > t\}$ é $A_t^j = -\ln P(T_j > t|\mathcal{F}_t)$.*

*Para o caso de componentes independentes verificamos na seção 1.3 que o tempo de vida $T_j$ com função de distribuição $F_j(t)$ é transformado em um tempo de vida total $T_j + Y_j^1$ com função distribuição*

$$G_j(t) = 1 - \bar{F}_j(t)(1 - \ln \bar{F}_j(t)). \tag{2.38}$$

*de forma que*

$$\bar{G}_j(t) = \exp[-A_t^j](1 + A_t^j) \tag{2.39}$$

*e $-\ln \bar{G}_j(t) = A_t^j - \ln(1 + A_t^j)$ é o $\mathcal{F}_t$-compensador de $T_j + Y_j^1$ no conjunto $\{T_j + Y_j^1 > t\}$.*

*No caso de componentes dependentes devemos encontrar uma formulação através de transformação no compensador que preserve a intuição acima. Notemos que*

$$\Gamma_{\alpha_t}^j = A_t^j - \ln(1 + A_t^j) = \int_0^t \frac{A_s^j}{1 + A_s^j} dA_s^j \tag{2.40}$$

*e propomos definir reparos mínimos através de tranformação nos compensadores por*

$$\Gamma_{\alpha_t}^j = \int_0^t \alpha_s^j dA_s^j \tag{2.41}$$

*onde $\alpha_s^j = \frac{A_s^j}{1+A_s^j}$ e $\alpha_s^i = 1$ para $i \neq j$.*

*Segue que,*

$$L^j_{\alpha_t} = \left(\frac{A^j_{T_j}}{1 + A^j_{T_j}}\right)^{N^j_t} \exp[A^j_t - (A^j_t - \ln(1 + A^j_t))] \tag{2.42}$$

*com* $\lim_{t\to\infty} L^j_{\alpha_t} = L^j_{\alpha_\infty} = A^j_{T_j}$.

*Como* $A^j_{T_j}$, $1 \leq j \leq n$, *são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição exponencial padrão, temos* $E[A^j_{T_j}] = 1$. *Podemos definir* $Q_{\alpha^j_\infty}$ *por* $\frac{dQ_{\alpha^j_\infty}}{dP} = A^j_{T_j}$ *e, usando o teorema de Girsanov (teorema 2.4), concluimos que, sob* $Q_{\alpha^j_\infty}$, $\Gamma^j_{\alpha_t}$ *é o* $\mathcal{F}_t$*-compensador de* $N^j_t$.

**Exemplo 2.3** ***Caracterização de transformação em paralelo através de compensadores.***

*A função de confiabilidade da transformação em paralelo* $T \vee T_j$, *do tempo de vida do componente* $c_j$, *onde* $T$ *e* $T_j$ *são i.i.d. é*

$$\overline{G}_j(t) = P(T_j \vee T > t) = 2P(T_j > t) - P(T_j > t)^2 = 2\overline{F}_j(t) - \overline{F}_j(t)^2 = \overline{F}_j(t) + \overline{F}_j(t)F_j(t).$$

*Segue que, no caso de componentes independentes,* $A^j_t = -\ln P(T_j > t|\mathcal{F}_t)$ *é o* $\mathcal{F}_t$*-compensador de* $1_{\{T_j \leq t\}}$ *no conjunto* $\{t < T_j\}$. *Como* $P(T_j \vee T > t|\mathcal{F}_t) = \exp[-A^j_t](2 - \exp[-A^j_t])$, *temos que*

$$-\ln P(T_j \vee T > t|\mathcal{F}_t) = A^j_t - \ln(2 - \exp[-A^j_t]) \tag{2.43}$$

*é o* $\mathcal{F}_t$*-compensador de* $T_j \vee T$ *no conjunto* $\{t < T_i \vee T\}$.

*No caso de componentes dependentes, a transformação que preserva o resultado acima é*

$$\Gamma^j_{\alpha_t} = \int_0^t \left(\frac{2 - 2\exp[-A^j_s]}{2 - \exp[-A^j_s]}\right) dA^j_s = A^j_t - \ln(2 - \exp[-A^j_t]) \tag{2.44}$$

*onde,*

$$\alpha^j_s = \frac{2 - 2\exp[-A^j_s]}{2 - \exp[-A^j_s]} \tag{2.45}$$

*e* $\alpha_s^i = 1$ *se* $i \neq j$.

*Segue que*

$$L_{\alpha_t}^j = \left[\frac{2 - 2\exp[-A_{T_j}^j]}{2 - \exp[-A_{T_j}^j]}\right]^{N_t^j} \exp[A_t^j - (A_t^j - \ln(2 - \exp[-A_t^j]))]$$

*e que*

$$L_{\alpha_\infty}^j = 2 - 2\exp[-A_{T_j}^j] \tag{2.46}$$

*com*

$$E[2 - 2\exp[-A_{T_j}^j]] = \int_0^\infty (2 - 2\exp[-t])\exp[-t]dt = 1. \tag{2.47}$$

*Podemos definir* $Q_{\alpha_\infty^j}$ *através da derivada de Radon-Nikodym*

$$\frac{dQ_{\alpha_\infty^j}}{dP} = 2 - 2\exp[-A_{T_j}^j] \tag{2.48}$$

*e, utilizando o teorema de Girsanov concluimos que, sob* $Q_{\alpha_\infty^j}$, $\Gamma_{\alpha_t}^j$ *é o* $\mathcal{F}_t$*-compensador de* $N_t^j$.

## 2.3 Importância de Bergman

Utilizando o teorema de Girsanov e a idéia de modificação na função de distribuição dos componentes sugerida por Bergman (1985), propomos a seguinte importância:

**Definição 2.4** *Se* $L_{\alpha_t^j}$ *é uniformemente integrável,* $T$ *é integrável e* $T_j$ *é finito, então, a importância da confiabilidade do componente para a confiabilidade do sistema é*

$$I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) = E_{Q_{\alpha_\infty^j}}(T) - E_P(T). \tag{2.49}$$

**Observações:**

**(i.)** Podemos interpretar $I_j^{BG}(\alpha_\infty^j)$ como a quantidade de tempo pela qual a esperança do tempo de vida do sistema cresce quando uma operação correspondente a $\alpha_\infty^j$ é realizada no componente $c_j$ com tempo de vida $T_j$.

**(ii.)** A definição é significante para quaisquer tempos de vida. Em particular, nenhuma suposição de independência é necessária no contexto em que $T_j$ é o tempo de vida do componente $c_j$ e $T$ é o tempo de vida do sistema.

**(iii.)** Dada a hipótese $E[L_{\alpha_\infty^j}] = 1$, $I_j^{BG}(\alpha_\infty^j)$ pode ser escrita como

$$I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) = -cov(T, L_{\alpha_\infty^j}). \tag{2.50}$$

**Exemplo 2.4** *Considere a transformação no compensador originada por um reparo mínimo (exemplo 2.2) do componente $c_j$. Intuitivamente isto significa que quando ocorre a falha do componente $c_j$, em $T_j$, o sistema retorna ao seu estado imediatamente anterior à falha. A segunda ocorrência de $T_j$ é considerada fatal e consideramos a operação como uma melhora do componente. Esta melhora corresponde à operação*

$$\Gamma_{\alpha_t}^j = \int_0^t \alpha_s^j dA_s^j \quad e \quad \Gamma_t(i) = A_t^i \ se \ i \neq j \tag{2.51}$$

em que

$$\alpha_s^j = \frac{A_s^j}{1 + A_s^j} \quad e \quad \alpha_s^i = 1 \ se \ i \neq j. \tag{2.52}$$

Segue que $L_{\alpha_\infty^j} = A_{T_j}^j$ e

$$I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) = -COV(T, A_{T_j}^j), \tag{2.53}$$

que corresponde a importância de Natvig no caso de dependência.

**Exemplo 2.5** *Considerando a mesma função definida no exemplo 2.1 e assumindo* $\beta = \beta'$ *temos,*

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \begin{cases} \alpha\beta\exp\{-(\beta t + \alpha s)\} \ , \ se\ 0 < s < t \\ \beta\alpha'\exp\{-\alpha' t - (\alpha+\beta-\alpha')s\} \ , \ se\ 0 < t < s. \end{cases}$$

*sendo* $\alpha', \alpha, \beta', \beta > 0$.

*A importância de Bergman do componente* 1 *será dada por*

$$I_1^{BG} = -COV(T, A^1_{T_1}) = \underbrace{E(T)}_{(I)} - \underbrace{E(TA^1_{T_1})}_{(II)} \tag{2.54}$$

*Para (I) temos,*

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty \int_0^\infty (T_1 \vee T_2) f_{T_1,T_2}(s,t)ds\ dt = \int_0^\infty \left( \int_0^t t f_{T_1,T_2}(s,t)ds + \int_t^\infty s f_{T_1,T_2}(s,t)ds \right) dt \\ &= \int_0^\infty \beta t \exp(-\beta t)[1-\exp(-\alpha t)] + \frac{\beta\alpha'}{\alpha+\beta-\alpha'}\{t\exp[-(\alpha+\beta)t] + \frac{\exp[-(\alpha+\beta)t]}{\alpha+\beta-\alpha'}\}dt \\ &= \beta\left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\right] + \frac{\beta\alpha'}{\alpha+\beta-\alpha'}\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha+\beta-\alpha')(\alpha+\beta)}\right] \end{aligned}$$

*e para (II), note primeiramente que,*

$$\lambda_s^1 = \alpha 1_{\{T_2 > s\}} + (\alpha+\beta-\alpha')1_{\{T_2 \le s\}}$$

*e,*

$$A_t^1 = \int_0^t \lambda_s^1 ds = \begin{cases} \alpha t \ , \ se\ t < T_2 \\ \alpha T_2 + (t - T_2)(\alpha+\beta-\alpha') \ , \ c.c. \end{cases}$$

*Logo,*

$$
\begin{aligned}
E[TA^1_{T_1}] &= E[T_1 \vee T_2(\alpha T_1 1_{\{T_1<T_2\}} + [\alpha T_2 + (\alpha+\beta-\alpha')(T_1-T_2)]1_{\{T_1\geq T_2\}})] \\
&= E[\alpha T_1 T_2 1_{\{T_1<T_2\}}] + E\{[(\alpha+\beta-\alpha')(T_1)^2 - (\alpha'-\beta)T_1T_2]1_{\{T_1\geq T_2\}}\} \\
&= \int_0^\infty \int_0^t ts\alpha f_{T_1,T_2}(s,t)dsdt + \int_0^\infty \int_t^\infty (\alpha+\beta-\alpha')s^2 f_{T_1,T_2}(s,t)dsdt \\
&- \int_0^\infty \int_t^\infty (\alpha'-\beta)st f_{T_1,T_2}(s,t)dsdt \\
&= \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{(\beta+\alpha)^2} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}\frac{2}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{2\beta\alpha'}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{2\beta\alpha'}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)} \\
&+ \frac{2\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')^2(\alpha+\beta)^2} - \frac{(\alpha'-\beta)\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')^2(\alpha+\beta)^2} + \frac{(\alpha'-\beta)\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')(\alpha+\beta)^3}
\end{aligned}
$$

*Assim, de (I), (II) e da equação 2.54 temos,*

$$
\begin{aligned}
I^{BG} &= +\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}\frac{2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\beta\alpha'}{(\alpha+\beta)^3} - \frac{\beta\alpha'}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)} - \frac{\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')^2(\alpha+\beta)^2} \\
&+ \frac{(\alpha'-\beta)\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')^2(\alpha+\beta)^2} - \frac{(\alpha'-\beta)\beta\alpha'}{(\alpha+\beta-\alpha')(\alpha+\beta)^3}
\end{aligned}
$$

**Exemplo 2.6** *Considere a transformação no compensador correspondente a uma operação em paralelo. Do exemplo 2.3 temos que*

$$\alpha^j_s = \frac{2-2\exp[-A^j_s]}{2-\exp[-A^j_s]} \tag{2.55}$$

*e* $\alpha^i_s = 1$ *se* $i \neq j$. *Segue que,*

$$\Gamma^j_{\alpha_t} = \int_0^t \frac{2-2\exp[-A^j_s]}{2-\exp[-A^j_s]} dA^j_s \quad e \quad \Gamma^i_t = A^i_t \ se\ i \neq j. \tag{2.56}$$

*e, portanto,*

$$L_{\alpha^j_\infty} = 2 - 2\exp[-A^j_{T_j}] \quad e \quad I^{BG}_j(\alpha^j_\infty) = -COV(2-2\exp[-A^j_{T_j}], T). \tag{2.57}$$

Consideremos esse exemplo para ilustrar o caso de componentes independentes. Em tal caso, o $\mathcal{F}_t$-compensador de $N^j_t$ no conjunto $\{T_j > t\}$ é

$$A^j_t = -\ln \bar{F}_j(t) \tag{2.58}$$

onde $F_j$ é a função de distribuição do componente $c_j$ e $\bar{F}_j(t) = 1 - F_j(t)$. Assim, a importância em paralelo da confiabilidade do componente $c_j$, para a confiabilidade do sistema é

$$I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) = -COV(T, 2F_j(T_j)) \tag{2.59}$$

e podemos provar a seguinte proposição:

**Proposição 2.3** *No caso em que os tempos de vida dos componentes $T_j$, $1 \leq j \leq n$, são independentes,*

$$I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) = \int_0^\infty F_j(t)\bar{F}_j(t)[P(T > t|T_j > t) - P(T > t|T_j \leq t)]dt. \tag{2.60}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) &= -COV(2 - 2\exp[A_{T_j}^j], T) = E\left\{T(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])\right\} - E(T) \\
&= E\left\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])E[T|A_{T_j}^j]\right\} - E(T) \\
&= E\left\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])\int_0^\infty P(T > t|A_{T_j}^j)dt\right\} - E(T) \\
&= E\left\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])\int_0^\infty P(T > t|T_j \leq t)1_{\{T_j \leq t\}} + P(T > t|T_j > t)1_{\{T_j > t\}}dt\right\} \\
&- E(T) = \int_0^\infty P(T > t|T_j \leq t)\underbrace{E\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])1_{\{T_j \leq t\}}}_{(I)} + \\
&\quad P(T > t|T_j > t)\underbrace{E\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])1_{\{T_j > t\}}}_{(II)}dt\} - \underbrace{E(T)}_{(III)}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

De $(I)$ temos,

$$E\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])1_{\{T_j \leq t\}}\} = \int_0^{-\ln \bar{F}_j(t)} [2 - \exp(-t)]exp(-t)dt = \bar{F}_j^2(t) - 2\bar{F}_j(t) + 1$$

de $(II)$ temos,

$$E\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])1_{\{T_j > t\}}\} = 1 - E\{(2 - 2\exp[A_{T_j}^j])1_{\{T_j \leq t\}}\} = 2\bar{F}_j(t) - \bar{F}_j^2(t).$$

e de $(III)$ temos,

$$E[T] = \int_0^\infty \bar{F}_j(t)[P(T > t|T_j > t) - P(T > t|T_j \leq t)]dt + \int_0^\infty P(T_j > t|T_j \leq t)dt$$

Logo, de (I), (II), (III) e eq.2.61,

$$\begin{aligned} I_j^{BG}(\alpha_\infty^j) &= \int_0^\infty P(T > t|T_j \leq t)(\bar{F}_j^2(t) - 2\bar{F}_j(t) + 1) + P(T > t|T_j > t)(2\bar{F}_j(t) - \bar{F}_j^2(t))dt \\ &- \int_0^\infty \bar{F}_j(t)[P(T > t|T_j > t) - P(T > t|T_j \leq t)]dt - \int_0^\infty P(T_j > t|T_j \leq t)dt \\ &= \int_0^\infty F_j(t)\bar{F}_j(t)[P(T > t|T_j > t) - P(T > t|T_j \leq t)]dt. \end{aligned} \tag{2.62}$$

APÊNDICE A

# Algumas definições

Por simplicidade de notação, vamos assumir no decorrer desta dissertação que as relações como $\subset$, $=$, $\leq$, $<$, entre conjuntos mensuráveis e variáveis aleatórias, respectivamente, sempre serão com probabilidade um. Com isso o termo $P$-q.c. será omitido. Para esperanças condicionais não vamos fazer diferença entre uma versão e a classe de equivalência $P$-q.c. dessas versões.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade. A informação no instante $t$ é dada pela sub-$\sigma$-algebra de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$. A filtragem $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é uma família crescente de sub-$\sigma$-algebras (i.e., se $s \leq t$, então $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$), onde assumimos as seguintes condições, conhecidas como "condições usuais de Dellacherie": $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ contém todos os $P$-conjuntos de medida nula de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, i.e., $\mathcal{F}_t$ são contínuas à direita e completas. Além disso definimos $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$ como a menor $\sigma$-algebra que contém todos os eventos de $\mathcal{F}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Uma referência para as aplicações de processos estocásticos na teoria da confiabilidade pode ser vista em Aven & Jensen (1999).

**Definição A.1** *(Processos adaptados)*
*Um processo $X = (X_t)_{t\geq 0}$ é $\mathcal{F}_t$-adaptado se $X_t$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

**Definição A.2** *(Processos progressivos)*
*Um processo $X = (X_t)_{t\geq 0}$ é **F**-progressivo ou progressivamente mensurável se, para todo $t$, a aplicação $(s,w) \to X_s(w)$ com $(s,w) \in [0,t] \times \Omega$ é mensurável com respeito a $\sigma$-algebra $\mathbb{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, onde $\mathbb{B}([0,t])$ é a $\sigma$-algebra de Borel em $[0,t]$.*

Pode-se provar que todo processo adaptado, contínuo à esquerda ou à direita é progressivamente mensurável (Dellacherie & Meyer 1980). Se $X$ é progressivo, então $Y = (Y_t)$, $Y_t = \int_0^t X_s ds$ também é progressivo.

**Definição A.3** *Seja **F** uma filtragem em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ e seja $\mathbb{P}(\boldsymbol{F})$ a $\sigma$-álgebra em $(0,\infty) \times \Omega$ gerada pelos sistemas de conjuntos*

$$(s,t] \times A, 0 \leq s < t, \ A \in \mathcal{F}_s, \ t > 0.$$

$\mathbb{P}(\mathbf{F})$ é chamada de $\sigma$-álgebra **F**-previsível em $(0,\infty) \times \Omega$. Um processo $X = (X_t)$ é chamado **F**-previsível se $X_0$ é $\mathcal{F}_0$-mensurável e a aplicação $(t,w) \to X_t(w)$ de $(0,\infty) \times \Omega$ em $\mathbb{R}$ é mensurável com respeito a $\mathbb{P}(\mathbf{F})$.

Todo processo adaptado e contínuo à esquerda é previsível, e todo processo **F**-previsível é **F**-progressivo.

Para obtermos o significado do termo previsível observamos que para um processo $X$ **F**-previsível, o valor $X_t$ pode ser previsto mediante informações disponíveis antes do tempo $t$, isto é, $X_t$ é mensurável com respeito a $\mathcal{F}_{t-} = \sigma(\cup_{s<t}\mathcal{F}_s) = \sigma\{A_s, A_s \in \mathcal{F}_s, 0 \leq s < t\}$. Processos desse tipo são elementos muito importantes na teoria dos processos pontuais.

**Definição A.4** *(Tempos de parada)*
*Uma variável aleatória extendida positiva $\tau$ é chamada um **F**-tempo de parada se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Um **F**-tempo de parada $\tau$ é:*

**(i.)** *previsível, se existe uma sequência crescente* $(\tau_n)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ *de tempos de parada* $\tau_n < \tau$, *tal que* $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$;

**(ii.)** *totalmente inacessível se* $P(\tau = \sigma < \infty) = 0$ *para todo tempo de parada* $\sigma$ $\boldsymbol{F}$*-previsível.*

**Definição A.5** *Seja* $\tau$ *um* $\mathcal{F}_t$*-tempo de parada. Então a* $\sigma$*-algebra* $\mathcal{F}_\tau$ *dos eventos que ocorrem até o instante* $\tau$ *é*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s \geq 0\}. \tag{A.1}$$

**Definição A.6** *Um processo estocástico* $(X_t)_{t\geq 0}$ *é dito*

**(i.)** *integrável, se* $E|X_t| < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

**(ii.)** *uniformemente integrável, se* $\lim_{c\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E[|X_t| 1_{\{|X_t|>c\}}] = 0$.

**Definição A.7** *(Martingal, Submartingal e Supermartingal)*
*Um processo integrável* $\mathcal{F}$*-adaptado* $(X_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *é um martingal (submartingal, supermartingal) se, para todo* $s > t$, $t \in \mathbb{R}_+$,

$$E[X_s|\mathcal{F}_t] = (\geq, \leq) X_t. \tag{A.2}$$

**Definição A.8** *(Martingal local)*
*Seja* $X_t$ *um processo estocástico* $\mathcal{F}_t$*-adaptado, e seja* $(S_n, n \geq 1)$ *uma familia de* $\mathcal{F}_t$*-tempos de parada tal que*

**(i.)** $\lim_{n\uparrow\infty} S_n = +\infty$;

**(ii.)** *para cada* $n \geq 1$, $X_{t\wedge S_n}$ *é* $\mathcal{F}_t$*-martingal.*

*Então $X_t$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal local.*

**Teorema A.1** *(Teorema da amostragem opcional)*
*Sejam $X_t$ um submartingal contínuo à direita e $S$ e $T$ dois $\mathcal{F}_t$-tempos de parada finitos tais que $S \leq T$. Se*

**(i.)** *$S$ e $T$ são limitadas por uma constante $t_0 < \infty$ ou*

**(ii.)** *$(X_t)_{t\geq 0}$ é uniformemente integrável, então*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] \geq X_S. \tag{A.3}$$

*Se $X_t$ for um martingal, então $E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S$.*

**Lema A.1** *(Lema de Komatsu)*
*Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo $\mathcal{F}_t$-progressívo tal que para todo $\mathcal{F}_t$-tempo de parada $U$, $X_U$ é integrável e $E[X_U] = E(X_0)$. Então $(X_t)_{t\geq 0}$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal.*

**Teorema A.2** *(Decomposição de Doob-Meyer)*
*Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado e contínuo à direita. Então $(X_t)_{t\geq 0}$ é um $\mathcal{F}_t$-submartingal uniformemente integrável se, e somente se, possui a decomposição*

$$X_t = A_t + M_t \tag{A.4}$$

*onde $(A_t)_{t\geq 0}$ é um processo $\mathcal{F}_t$-previsível, crescente, contínuo à direita com $A_0 = 0$ e $(M_t)_{t\geq 0}$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal uniformemente integrável. A decomposição é única.*

**Lema A.2** *Seja $N_t$ um processo pontual $\mathcal{F}_t$-adaptado e $\lambda_t$ um processo não negativo, $\mathcal{F}_t$-progressível, tal que*

$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty. \tag{A.5}$$

$M_t$
e $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ é um $\mathcal{F}_t$-martingale de
média zero,

*Seja $X_t$ um processo $\mathcal{F}_t$-previsível tal que para todo $t \geq 0$*

$$E\left[\int_0^t |X_s|\lambda_s ds\right] < \infty \quad t \geq 0. \tag{A.6}$$

$\int_0^t$

*Então $Y_t = \int_0^t X_s dMs$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal, onde $M_t = N_t - \int_t^0 \lambda_s ds$. Se a condição A.6 for substituída pela condição menos restritiva*

$$\int_0^t |X_s|\lambda_s ds < \infty \quad t \geq 0 \tag{A.7}$$

*então $Y_t = \int_0^t X_s dMs$ é um $\mathcal{F}_t$-martingal local.*

**Teorema A.3** *(Fórmula integral de Dellacherie)*

*Seja $A_t$ um processo crescente $\mathcal{F}_t$-adaptado e $M_t$ um $\mathcal{F}_t$-martingal não negativo, contínuo à direita e uniformemente integrável. Então para qualquer $\mathcal{F}_t$-tempo de parada $T$*

$$E\left[\int_0^T M_t dA_t\right] = E[M_T A_T].$$

**Definição A.9** *(Semimartingales regulares)*

*Um processo estocástico $X = (X_t)_{t\leq 0}$ é chamado um semimartingal regular se ele tem uma decomposição da forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + M_t, \tag{A.8}$$

*onde $f = (f_t)_{t\leq 0}$ é um processo estocástico progressivamente mensurável com*

$$E\left[\int_0^t |f_s| ds\right] < \infty$$

*para todo $t \in \mathbb{R}_+, E|X_0| < \infty$, e $M = (M_t)_{t\leq 0}$ um martingal contínuo à direita com limite à esquerda com $M_0 = 0$.*

**Lema A.3** *(Dellacherie & Meyer 1980)*

*Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade, $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ uma família de sub $\sigma$-álgebras de $\mathcal{F}_t$, e $T$ um $\boldsymbol{F}$-tempo de parada.*

**(i.)** *Se o processo* $N = (N_t)_{t\geq 0}$, $N_t = 1_{(T\leq t)}$, *tem uma representação SMR*

$$N_t = \int_0^t 1_{(T\geq s)}\lambda_s ds + M_t, \ t \in \mathbb{R}_+,$$

*então* $T$ *é um* $\mathcal{F}_t$*-tempo de parada totalmente inacessível e o* $\mathcal{F}_t$*-martingal* $M_t$ *é quadrado integrável de média zero;*

**(ii.)** *Se* $T$ *é um tempo de parada totalmente inacessível então o processo* $N = (N_t)_{t\geq 0}$, $N_t = 1_{(T\leq t)}$, *tem uma única decomposição* $N = \Lambda + M$, *onde* $M$ *é um* $\mathcal{F}_t$*-martingal uniformemente integrável e* $\Lambda$ *é contínua.*

**Definição A.10** *(Processos pontuais univariados)*
*Um processo pontual (univariado) é uma sequência crescente de variáveis aleatórias positivas* $(T_n)$, $n \in \{0, 1, \ldots\}$ *que podem assumir valores* $+\infty$ $(0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots)$. *As desigualdades são estritas a menos que* $T_n = \infty$. *Vamos assumir que o processo é não explosivo, isto é,*

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \infty.$$

Uma maneira equivalente para descrever um processo pontual é pelo processo de contagem $N = (N_t)_{t\leq 0}$, com realizações

$$N_t(w) = \sum_{k\geq 1} I_{(T_k(w)\leq t)},$$

que é, para cada realização $w$, uma função escada contínua à direita com saltos de tamanho 1 e $N_0(w) = 0$. $N_t$ conta os números de pontos $T_n$ que ocorrem até o instante $t$. Em geral dizemos que o processo de contagem associado $N$ é um processo pontual.

Uma generalização deste conceito é o de processo pontual multivariado. Se $(T_n), n \in \{1, 2, \ldots\}$ é um processo pontual e $(V_n), n \in \{1, 2, \ldots\}$ uma sequência de

variáveis aleatórias com valores no conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, então a sequência de pares $(T_n, V_n), n \in \{1, 2, \ldots\}$ é chamado processo pontual multivariado. O processo $N_t = (N_t(1), \ldots, N_t(m))$ onde,

$$N_t(i) = \sum_{k \geq 1} I_{(T_k(w) \leq t)} I_{(V_k = a_i)}, \; i \in \{1, \ldots, m\},$$

é o processo de contagem $m$-variado associado.

Dado um processo pontual univariado $(T_n), n \in \{1, 2, \ldots\}$ e o processo de contagem associado $(N_t)_{t \geq 0}$, com $E(N_t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ com uma família de sub $\sigma$-álgebras $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de $\mathcal{F}$, podemos considerar a definição de seu compensador:

**Definição A.11** *(Compensador)*
*Seja $N = (N_t)_{t \geq 0}$ um processo de contagem integrável, adaptado a uma filtragem $\boldsymbol{F}$. O único processo crescente $\boldsymbol{F}$-previsível $A = (A_t)_{t \leq 0}$, tal que*

$$E \int_0^\infty C_s dN_s = E \int_0^\infty C_s dA_s \tag{A.9}$$

*para todo processo não negativo $\boldsymbol{F}$-previsível $C$, é chamado o compensador de $N$ com respeito a $\boldsymbol{F}$.*

**Definição A.12** *(Intensidade)*
*Seja $(N_t)_{t \leq 0}$ um processo de contagem integrável com uma $\boldsymbol{F}$-SMR representação (veja definição A.9)*

$$N_t = A_t + M_t = \int_0^t \lambda_s ds + M_t$$

*onde $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ é um processo estocástico não negativo. Então $\lambda$ é chamado a $\boldsymbol{F}$-intensidade de $N$.*

**Observação A.1** *Pode-se mostrar que se a intensidade for previsível então ela é única. Por outro lado, se existe uma intensidade, então sempre podemos encontrar uma versão previsível (Bremaud 1981).*

Considerando a filtragem baseada na história interna do processo de contagem $N = (N_t)_{t\geq 0}$, isto é, $\mathbf{F}^N = (\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s, 0 \leq s \leq t\}$, Bremaud (1981) provou o seguinte teorema:

**Teorema A.4** *(Bremaud 1981)*
*Seja $N = (N_t)_{t\geq 0}$ um processo de contagem e a filtragem $\boldsymbol{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, 0 \leq s \leq t\}$. Se $G_n(w, B)$ é a distribuição condicional regular dos tempos entre as chegadas $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$, $n \in \{0, 1, \ldots\}$, $T_0 = 0$, dado o passado $\mathcal{F}_{T_n}$ no $\mathcal{F}_t$-tempo de parada $T_n$, i.e., $G_n(w, B) = P(U_{n+1} \in B | \mathcal{F}_{T_n})$, então, para $T_n < t \leq T_{n+1}$ o compensador $A$ é dado por*

$$A_t = A_{T_n} + \int_0^{t-T_n} \frac{G_n(dx)}{G_n([x, \infty])}.$$

*Se a distribuição condicional $G_n$ admite uma densidade $g_n$ para todo $n$, então a $\boldsymbol{F}$-intensidade $\lambda$ é dada por*

$$\lambda_t = \sum_{n\geq 0} \frac{g_n(t - T_n)}{1 - \int_0^{t-T_n} g_n(x)dx} I_{(T_n < t \leq T_{n+1})}.$$

# Referências Bibliográficas


Aven, T. & Jensen, U. (1999), *Stochastic Models in Reliability.* Springer, NY.

Barlow, R. E. & Proschan, F. (1975), 'Importance of system components and fault tree events', *Stoch. Proc. Appl.* **3**, 153–173.

Barlow, R. E. & Proschan, F. (1981), *Statistical theory of reliability and life testing: probability models.* AcArdle Press Inc., Silver Spring, MD.

Bergman, B. (1985), 'On some new reliability importance measures', *In: W. J. Quirk* pp. 61–64. ed. IFAC SAFECOMP.

Birnbaum, Z. (1969), 'On the importance of different components in a muticomponent system', *In: Multivariate Analysis II* . ed. P.R. Krishnaiah.

Bremaud, P. (1981), *Point Process and Queues: Martingale Dynamics.* Springer-Verlag, NY.

Dellacherie, C. & Meyer, P. (1980), *Probability and Potential.* B. North-Holland, Amsterdam.

Freund, J. E. (1961), 'A bivariate extension of the exponential distribution', *Journal of the American Statistical Association* **56**(296), 971–977.

Natvig, B. (1979), 'A suggestion of a new measure of importance of system components', *Stoch. Proc. Appl.* **9**, 319–330.

Natvig, B. (1982), 'On reduction in remaining system lifetime due to the failue of a specific component', *J. Appl. Prob.* **19**, 642–652.