

**Modelos para a estrutura a termo
da taxa de juros brasileira com aplicação
ao gerenciamento de risco de mercado**

Lourrine Faria

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

São Paulo, Fevereiro de 2010

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais Josilene e Ricardo que sempre zelaram por mim, confiaram e me apoiaram em todos os momentos da minha vida. Graças a vocês eu sei que tenho um lugar especial no mundo.

Agradeço aos meus irmãos Amanda e Marcus Vinícius por terem me dado a oportunidade de aprender a compartilhar: incertezas, acertos e erros, felicidades e tristezas, crises de mal humor e boas risadas. Com vocês a vida se torna muito mais emocionante, afinal, fazemos parte de um todo, uma família.

Ao meu namorado e amigo João Vinícius pelo companheirismo, paciência, cumplicidade e incentivo. Às idéias e revisões que me ajudaram neste trabalho, à compreensão pelos finais de semana, feriados e férias dedicados a este objetivo. Iremos celebrar esta realização e muitas outras que virão, você é muito especial para mim.

Ao professor Pedro Alberto Morettin por me conceder o privilégio de ser sua orientanda e pela paciência em inúmeras revisões deste trabalho, conselhos e “puxões de orelha”, os quais certamente contribuirão para que eu seja uma melhor estudante e profissional.

Aos meus queridos amigos da graduação Inaê, Camila, Renan, Victor e José Adolfo, que deixaram boas lembranças, os estudos na biblioteca todas as tardes, aprendizado que sempre levarei comigo.

E a todos os amigos aqui não citados que contribuíram direta ou indiretamente para a pessoa que sou hoje.

“O Homem é do tamanho do seu sonho.”
(Fernando Pessoa)

Resumo

Neste trabalho iremos estudar alguns modelos usados para a descrição da dinâmica da estrutura a termo de curvas “zero cupom”. Estes modelos serão tratados sob a forma de espaços de estados, possibilitando que as inovações no tempo sejam agregadas na estrutura. Isto garante uma melhor qualidade de ajuste frente a modelos onde os parâmetros possuem forma estática.

Dentro da família de modelos de espaços de estados, serão analisadas a classe de modelos que consideram a condição de não arbitragem, o modelo CIR (Cox et al. (1985)) e a classe de modelos que ajustam a forma da curva através de fatores latentes, dentre eles, o modelo que utiliza polinômios de Legendre (1785) e o modelo que utiliza exponenciais de Svensson (1994), uma generalização do modelo de Nelson e Siegel (1987), sendo esta uma abordagem puramente estatística.

Como aplicação deste trabalho os modelos serão estimados utilizando a curva de taxa de juros brasileira, sendo analisada a qualidade de ajuste, previsão e o cálculo do VaR (*Value at Risk*) no contexto de gerenciamento de risco de mercado.

Palavras-chave: modelos de espaço de estados, estrutura a termo de taxa de juros (ETTJ), filtro de Kalman.

Abstract

In this work we will study some models used to describe the dynamics of the term structure of curves zero coupon. These models will be given in state-space form, which provides that innovations be aggregated in the structure of the model. It enables a better goodness of fit compared to models where the parameters are static.

Within the family of state space models will be analysed the class of models that considers the no arbitrage condition, the CIR model (Cox et al. (1985)) and the class of models that adjusts the shape of the curve through latent factors, among them the model using Legendre (1785) polynomials and the model using Svensson (1994) exponentials, a generalization of Nelson e Siegel (1987) model, being a purely statistical approach.

As an application of this work, these models will be fitted for the Brazilian interest rate curve, considering the analysis of goodness of fit, forecast and the valuation of VaR (*Value at Risk*) in the market risk management context.

Keywords: state space models, term structure, Kalman filter, Brazilian interest rate curve.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Considerações Preliminares	1
1.2 Objetivos	4
1.3 Organização do Trabalho	4
2 Modelos de Espaços de Estados para Estrutura a Termo	7
2.1 Modelos de Espaços de Estados	7
2.2 Filtro de Kalman	8
2.3 Suavização	9
2.4 Estimação dos hiperparâmetros	10
2.4.1 Estimador de máxima verossimilhança	10
2.5 Modelos de Espaços de Estados para a Estrutura a Termo	11
2.5.1 Modelos com condição de não-arbitragem	11
2.5.2 Modelos sem condição de não-arbitragem	14

3	Aplicação ao Histórico da Curva de Juros Brasileira	17
3.1	Construção da curva de juros	17
3.2	Histórico	18
3.3	Aplicação dos modelos de espaços de estados à ETTJ	20
3.3.1	Ajuste do modelo CIR	21
3.3.2	Ajuste modelo de fatores latentes via polinômios de Legendre	28
3.3.3	Ajuste do modelo de fatores latentes via exponenciais de Svensson	31
4	Aplicação de Modelos ao cálculo de VaR	39
4.1	Abordagem paramétrica	39
4.2	Simulação do VaR em Carteiras pré-fixadas	42
4.2.1	Modelo CIR	43
4.2.2	Modelo Legendre	45
4.2.3	Modelo Svensson	49
5	Conclusões	51
5.1	Considerações Finais	51
5.2	Sugestões para Pesquisas Futuras	52
	Referências Bibliográficas	53

Lista de Abreviaturas

CIR	Cox, Ingersoll & Ross.
ETTJ	Estrutura a Termo de Taxas de Juros.
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo.
VaR	Valor em Risco.

Lista de Figuras

3.1	Histórico superfície estrutura a termo	18
3.2	Histórico percentual IPCA a.m	19
3.3	Série univariada dos vencimentos da curva	20
3.4	Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/03) - Modelo CIR . .	23
3.5	Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Out/03 a Dez/06) - Modelo CIR .	24
3.6	Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jul/06 a Set/09) - Modelo CIR . .	26
3.7	Previsão 60 dias a frente a partir de Set/09 - Modelo CIR	27
3.8	Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/09) - Modelo Legendre	29
3.9	Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvatura (Jan/02 a Set/09) - Modelo Legendre	30
3.10	Previsão 60 dias a frente a partir de Set/09 - Modelo Legendre	31
3.11	Séries de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/03) - Modelo Svensson	33
3.12	Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvaturas (Jan/02 a Set/03) - Modelo Svensson	34
3.13	Comparação dos gráficos de fatores entre os dois períodos - Modelo Svensson	35
3.14	Séries de valores reais e ajustados dos vencimentos (Out/03 a Ago/09) - Modelo Svensson	36
3.15	Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvaturas (Out/03 a Ago/09) - Modelo Svensson	37
3.16	Previsão 60 dias a partir de Set/09 - Modelo Svensson	38

4.1	Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo CIR . . .	44
4.2	Relação de risco - retorno - Modelo CIR	44
4.3	Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Legendre	46
4.4	Relação de risco - retorno - Modelo Legendre	46
4.5	Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Legendre re-estimado	48
4.6	Relação de risco - retorno - Modelo Legendre re-estimado	48
4.7	Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Svensson	50
4.8	Relação de risco - retorno - Modelo Svensson	50

Lista de Tabelas

3.1	Matriz de covariâncias nos vencimentos	20
3.2	Estimativas modelo CIR Jan/02 a Set/03	22
3.3	Estimativas modelo CIR Out/03 a Dez/06	23
3.4	Estimativas modelo CIR Jul/06 a Set/09	25
3.5	Estimativas modelo Legendre Jan/02 a Set/09	28
3.6	Estimativas modelo Svensson Jan/02 a Set/03	32
3.7	Estimativas modelo Svensson Out/03 a Set/09	34
4.1	Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-7}$ - Modelo CIR	43
4.2	Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-9}$ - Modelo Legendre	45
4.3	Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-11}$ - Modelo Legendre re- estimado	47
4.4	Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-10}$ - Modelo Svensson	49

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Preliminares

Neste trabalho serão estudados modelos para ajuste da dinâmica da estrutura a termo da taxa de juros brasileira. A modelagem de taxa de juros possui características próprias que a faz diferir, substancialmente, da modelagem dos mercados de ações, moeda estrangeira e “commodities”, principalmente no que tange aos preços de ativos e derivativos e à estrutura de correlação presente entre os distintos vencimentos.

Além disso, a curva de juros brasileira representa a expectativa da taxa CDI futura sendo estritamente correlacionada com a taxa Selic, a qual é fator importante no controle da política monetária. Portanto, esta sofre grande influência sobre a economia da mesma forma que é influenciada por ações governamentais.

Os preços de ativos primários e derivativos ligados à estrutura a termo de taxa de juros dependem do processo estocástico seguido pela taxa de curto prazo. Ao contrário da modelagem do preço de uma única ação, “commodity” ou taxa de câmbio, os modelos sobre a estrutura a termo costumam envolver a descrição do processo estocástico de uma curva de juros como um todo.

As correlações entre os diferentes vértices de taxa de juros não são perfeitas. A correlação entre vértices adjacentes ou próximos tende a ser bastante elevada, decrescendo, progressivamente, conforme aumenta a distância entre os mesmos. A correlação entre títulos com datas de vencimento distintas é uma informação imprescindível para o cálculo do risco de mercado de uma carteira de instrumentos pré-fixados.

Neste contexto, os Modelos de Espaços de Estados possuem a característica de ajustar a curva de juros como um todo, as correlações intrínsecas entre os vencimentos, além de proporcionar um tratamento dinâmico, pois os coeficientes de ajuste são atualizados a cada nova observação.

Os Modelos de Espaços de Estados em diversas áreas da Estatística são freqüentemente utilizados, ver Harvey (1989), West e Harrison (1997), Durbin e Koopman (2001). Este tipo de modelo supõe que os movimentos característicos de uma série temporal $\{y_t\}$, $t = 1, \dots, n$, podem ser decompostos em componentes não observáveis tais como, por exemplo, tendência, sazonalidade e componente aleatória. A vantagem deste procedimento é que os componentes tem uma interpretação direta, devido à maneira como modelo é construído. Além disso a flexibilidade dessa modelagem, incluindo a capacidade de lidar com dados multivariados e processos não estacionários, lhe atribui uma grande vantagem em relação às outras metodologias de séries temporais.

A estrutura a termo de curvas de taxas “zero cupom” descreve a relação entre a taxa de um título “livre de risco” e seu vencimento. Dada a alta correlação entre taxas de títulos de diferentes vencimentos, uma vasta gama de modelos são propostos para explicar estes movimentos conjuntos.

Dentre as abordagens propostas para modelagem desta estrutura, estão os modelos que assumem processos de difusão para as taxas zero cupom e condições de não-arbitragem e os modelos que têm como objetivo modelar a forma da curva de taxas, através de funções que representam fatores latentes que explicam grande parte da variabilidade destes movimentos, sem impor nenhuma condição sobre o comportamento das taxas.

Os modelos de difusão propostos primeiramente por Vasicek (1977) e Dothan (1978) assumem um processo de difusão para a taxa de juros instantânea. Suposições de não arbitragem são utilizadas para derivar a fórmula do preço do título. A generalização deste modelo utiliza variáveis de estado não observáveis para a derivação do preço sob condições de arbitragem e/ou equilíbrio, representada pelos modelos Cox et al. (1985) e Chen e Scott (1992).

A caracterização da classe de modelos afim-exponenciais para a estrutura a termo por Duffie e Kan (1996) demonstra que todos os modelos acima mencionados são casos especiais desta família, em que as funções “drift” e variância das variáveis estado são afins em um intervalo de tempo discreto, podendo ser trabalhados como Modelos de Espaço de Estados. Este resultado possibilita que seja usado o Filtro de Kalman e a decomposição do erro de previsão para obtenção de soluções de máxima quase-verossimilhança sobre problemas de estimação em toda classe de modelos exponencial-afins para a estrutura a termo.

Em Duan e Simonato (1999) os modelos são divididos em dois casos: os gaussianos, em que os erros são normalmente distribuídos e os modelos não gaussianos. No primeiro caso, a estimação é feita por máxima verossimilhança, enquanto a estimação para o caso não gaussiano é aproximada por quase-verossimilhança. Dentro deste contexto, são tratados o modelo de Vasicek (1977), em que o fator não observável segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck e os modelos Cox et al. (1985) e Chen e Scott (1992), no caso não gaussiano, em que os fatores não observáveis seguem um processo de difusão em raiz quadrada. A vantagem destes modelos é que mesmo tratando-se de modelos de difusão estocástica, há uma solução fechada para as equações, possibilitando que a estimação seja feita por outros métodos além do Monte Carlo.

Dentre os métodos que não utilizam a condição de não-arbitragem estão a Análise de Componentes Principais (PCA) e a utilização de formas exponenciais ou polinomiais para descrição do comportamento conjunto das taxas nos distintos vencimentos, ou seja, a forma da curva.

A decomposição da estrutura a termo em fatores comuns como nível, curvatura e inclinação via PCA utilizada por Litterman e Scheinkman (1991) é comumente utilizada por ser de fácil interpretação e implementação pois não exige rotinas computacionais sofisticadas, porém exige uma manutenção constante por tratar-se de um modelo estático.

A utilização de funções como fatores latentes para modelagem da estrutura a termo possui motivação pelas formas exponenciais ou polinomiais que freqüentemente compõem soluções de equações diferenciais ou de diferenças. Em Nelson e Siegel (1987), a lógica tomada para isto é, se as taxas spot são geradas por uma equação diferencial, então, projeções de taxas, sendo previsões, seriam soluções dessas equações.

A abordagem dinâmica de fatores latentes utilizando formas polinomiais ou exponenciais, para descrever o comportamento de curvas zero cupom via Modelos de Espaço de Estados, tem sido utilizada pela sua flexibilidade de estrutura do modelo e a atualização dos parâmetros a cada nova observação, pois estes são tratados como variáveis de estado.

Em Duarte Jr. et al. (2003) é mostrado que a decomposição em componentes principais, para identificar os fatores que regem a dinâmica de taxas, possui uma equivalência assintótica ao modelo de espaço de estados que utiliza polinômios de Legendre (1785) como fatores latentes.

Sob o contexto de modelos de espaços de estados com condição de não-arbitragem, Almeida (2004) mostra que modelos de fatores latentes não observáveis são aplicáveis à estrutura a termo da taxa

de juros brasileira composta por Futuros de DI, utilizando o modelo de Cox, Ingersoll & Ross (CIR).

Neste trabalho serão estudadas aplicações de modelos de espaços de estados para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira sob o ponto de vista de não-arbitragem a saber, o modelo CIR e o tratamento estatístico via polinômios de Legendre e via exponenciais de Svensson, que são uma generalização das exponenciais de Nelson & Siegel. A partir disto, os resultados dos modelos serão aplicados no cálculo do VaR (*Value at Risk*) em uma carteira de renda fixa.

1.2 Objetivos

Os objetivos desse trabalho são:

1. estudar a teoria dos modelos de espaços de estados: estruturas dos modelos abordados, método de estimação dos parâmetros e previsão;
2. descrição da base de dados a ser estudada e análise descritiva;
3. aplicação dos modelos ao conjunto de dados, estimação, previsão e comparação de resultados;
4. aplicação dos resultados dos modelos no cálculo de VaR (*Value at Risk*) sobre uma carteira de renda fixa.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 serão apresentadas a definição geral dos modelos de espaços de estados, condições iniciais, o Filtro de Kalman, a decomposição do erro de previsão utilizado para o caso não gaussiano. A seguir, é feita a descrição da estrutura dos modelos a serem estudados na forma de espaço de estados.

No Capítulo 3, a descrição da base de dados de séries de Futuros de DI, características dos contratos e construção da curva são apresentados. A estimação dos parâmetros, qualidade de ajuste do modelo e de previsão, serão analisados para os modelos CIR e os modelos de fatores latentes via polinômios de Legendre e via exponenciais de Svensson.

No Capítulo 4, a partir dos resultados dos modelos estimados será avaliada a medida de VaR (*Value at Risk*), sobre uma carteira pré-fixada.

Finalmente, no Capítulo 5, serão discutidas as conclusões obtidas neste trabalho sobre as aplicações abordadas e sugestões de pesquisas futuras.

Capítulo 2

Modelos de Espaços de Estados para Estrutura a Termo

2.1 Modelos de Espaços de Estados

O Modelo de Espaços de Estados possui apenas duas equações, a primeira chamada *equação de observação* e a segunda chamada *equação de estados*:

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{Z}_t \alpha_t + \mathbf{d}_t + \epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, \mathbf{H}_t) \\ \alpha_{t+1} &= \mathbf{T}_t \alpha_t + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \eta_t & \eta_t &\sim N(0, \mathbf{Q}_t), \quad t = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde y_t é um vetor de observações $p \times 1$ e α_t é um vetor não observável $m \times 1$ chamado *vetor de estados*.

A idéia sob o modelo é que o desenvolvimento do sistema ao longo do tempo é determinado por α_t , de acordo com a segunda equação de (2.1), mas como α_t não pode ser observado diretamente, a análise é feita a partir das observações y_t .

As matrizes \mathbf{Z}_t , \mathbf{T}_t , \mathbf{R}_t , \mathbf{H}_t e \mathbf{Q}_t são inicialmente assumidas conhecidas e os erros ϵ_t e η_t são assumidos como serialmente independentes entre si em todos os pontos de tempo. Os termos \mathbf{d}_t e \mathbf{c}_t são covariáveis que podem ser inseridas nas equações das observações e de transição, respectivamente. As matrizes \mathbf{Z}_t e \mathbf{T}_{t-1} podem depender de y_1, \dots, y_{t-1} . Supõe-se que o vetor de estado inicial α_1 segue uma $N(\mathbf{a}_1, \mathbf{P}_1)$ independente de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ e η_1, \dots, η_n , onde \mathbf{a}_1 e \mathbf{P}_1 também são assumidos conhecidos. As quantidades desconhecidas do modelo podem ser divididas em dois grupos: os parâmetros estáticos, denominados hiperparâmetros, como a variância dos erros associados a cada componente não observável, e os parâmetros de estado α_t .

Além disso, a primeira equação de (2.1) possui a estrutura de um modelo de regressão linear onde o vetor de coeficientes α_t varia no tempo. A segunda equação representa um modelo autorregressivo de primeira ordem, a característica Markoviana que proporciona que os cálculos sejam feitos recursivamente, o que facilita cálculos computacionais.

Segundo Durbin e Koopman (2001), essa natureza recursiva dos modelos e as técnicas computacionais utilizadas para analisá-los, conferem aos modelos de estados grande flexibilidade, pois permitem que alterações na estrutura do sistema sejam feitas com relativa facilidade.

2.2 Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman (Kalman (1960)) é um algoritmo recursivo que determina a estimativa do vetor de estados no tempo t , α_t , dada toda a informação disponível até o instante $t - 1$, \mathbf{Y}_{t-1} , ou seja, o filtro de Kalman consiste em um conjunto de equações, o qual permite que um estimador seja atualizado toda vez que uma nova observação surge.

Definindo $E(\alpha_0) = a_0$ e $Cov(\alpha_0, \alpha_0) = P_0$, supondo que as observações possuem distribuição Normal e utilizando as propriedades da Normal multivariada, segue que:

- $(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \sim N(\mathbf{a}_{t|t-1}, \mathbf{P}_{t|t-1})$, sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{t|t-1} &= E(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t, \\ \mathbf{P}_{t|t-1} &= Var(\alpha_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

- $(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \sim N(\tilde{y}_{t|t-1}, F_t)$, sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{t|t-1} &= E(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{z}_t' \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t, \\ F_t &= Var(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{z}_t' \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{z}_t + h_t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por recursividade, se encontra que $(\alpha_t | \mathbf{Y}_t) \sim N(\mathbf{a}_t, \mathbf{P}_t)$, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{z}_t F_t^{-1} (y_t - \tilde{y}_{t|t-1}), \\ \mathbf{P}_t &= \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{z}_t' F_t^{-1} \mathbf{z}_t \mathbf{P}_{t|t-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As matrizes (2.4) são conhecidas como equações de atualização do filtro de Kalman, pois através

delas é possível atualizar os estimadores \mathbf{a}_t e \mathbf{P}_t do vetor de estado do instante t .

Seja ν_t o erro de previsão um passo à frente ou inovação:

$$\nu_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1} \Rightarrow \nu_t = y_t - \mathbf{z}'_t \mathbf{a}_{t|t-1} - d_t,$$

sendo que $E(\nu_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = 0$ e $Var(\nu_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = F_t$. Substituindo ν_t em (2.4), tem-se:

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{T}_{t+1}^{-1} \mathbf{K}_t \nu_t, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{T}_{t+1}^{-1} \mathbf{K}_t \mathbf{z}'_t \mathbf{P}_{t|t-1}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{T}_{t+1} \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{z}_t F_t^{-1}, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{K}_t é conhecida como matriz de ganho de Kalman.

O filtro de Kalman é inicializado com os valores \mathbf{a}_0 e \mathbf{P}_0 . Escolhas típicas são dadas por $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ e \mathbf{P}_0 como sendo uma matriz com valores suficientemente grandes na diagonal (Harvey (1989)), o que caracteriza ausência de informação *a priori*.

2.3 Suavização

O Filtro de Kalman também pode ser utilizado para estimar o vetor de estado α_t , baseando-se em toda a informação da amostra obtida, \mathbf{Y}_n . Pode-se mostrar que $(\alpha_t | \mathbf{Y}_n) \sim N(\mathbf{a}_{t|n}, \mathbf{P}_{t|n})$. A partir disto, pode-se encontrar os momentos de forma recursiva através das seguintes equações, ver Durbin e Koopman (2001):

$$\mathbf{r}_{t-1} = \mathbf{z}_t F_t^{-1} \nu_t + \mathbf{L}'_t \mathbf{r}_t, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{N}_{t-1} = \mathbf{z}'_t F_t^{-1} \mathbf{z}_t + \mathbf{L}'_t \mathbf{N}_t \mathbf{L}_t, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a}_{t|n} = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{r}_{t-1}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}_{t|n} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{N}_{t-1} \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (2.11)$$

em que $\mathbf{L}_t = \mathbf{T}_t - \mathbf{K}_t \mathbf{z}'_t$. São necessárias as quantidades $\mathbf{a}_{t|t-1}$, $\mathbf{P}_{t|t-1}$, \mathbf{K}_t , F_t e ν_t obtidas através do Filtro de Kalman para a execução do algoritmo, o qual é iniciado no instante $t = n$ e o suavizador do estado é obtido na ordem inversa até $t = 1$. Os valores iniciais de \mathbf{r}_n e \mathbf{N}_n podem ser fixados em

zero.

2.4 Estimação dos hiperparâmetros

Os hiperparâmetros do modelo, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathfrak{R}_+^p$, serão as variâncias dos elementos do vetor de estados acrescentadas à variância do vetor de observações, σ_ϵ^2 , em geral, os elementos de \mathbf{H}_t .

Os cálculos apresentados anteriormente pressupõem que a quantidade ψ seja conhecida, o que raramente acontece, necessitando também ser estimada. No contexto clássico, os hiperparâmetros são estimados por máxima verossimilhança através da densidade conjunta $p(y_1, \dots, y_n; \psi)$ em relação a ψ . No caso Bayesiano, indicadores de medida central da distribuição *a posteriori*, como média e mediana, serão utilizados como estimadores pontuais dos hiperparâmetros do modelo.

2.4.1 Estimador de máxima verossimilhança

A função de verossimilhança poderá ser calculada através das quantidades obtidas pelo filtro de Kalman, supondo que $(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}) \sim N(\tilde{y}_{t|t-1}, F_t)$, onde $\mathbf{Y}_{t-1} = (y_1, \dots, y_{t-1})$. Neste caso, a função de densidade preditiva é dada por:

$$p(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \psi) = (2\pi)^{-1/2} |F_t|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y_t - \tilde{y}_{t|t-1})' F_t^{-1} (y_t - \tilde{y}_{t|t-1}) \right\}.$$

Substituindo $\nu_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}$ na equação acima, tem-se:

$$p(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \psi) = (2\pi)^{-1/2} |F_t|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \right\}.$$

A função de verossimilhança será o produto das funções preditivas,

$$L(\psi; \mathbf{Y}_n) = \prod_{t=1}^n p(y_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \psi)$$

O logaritmo da função de verossimilhança será aplicado para facilitar os cálculos de maximização:

$$\ln L(\psi; \mathbf{Y}_n) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \nu_t' F_t^{-1} \nu_t \quad (2.12)$$

O vetor de hiperparâmetros estimado $\hat{\psi}$ será obtido pela maximização da função (2.12). Como esta é uma função não linear do vetor de hiperparâmetros, o estimador de máxima verossimilhança deverá ser obtido numericamente.

2.5 Modelos de Espaços de Estados para a Estrutura a Termo

Dentre os modelos comumente utilizados para a modelagem da estrutura a termo estão os modelos em que a taxa de juros instantânea é considerada um fator latente e que envolvem a condição de não-arbitragem, dentre eles os modelos de Vasicek (1977) e Cox et al. (1985). Além destes, há modelos que utilizam fatores para explicar a estrutura a termo representados por formas polinomiais ou exponenciais, como por exemplo a aplicação de polinômios de Legendre (1785) e as exponenciais de Nelson e Siegel (1987), além de outras formas tal como a base canônica, por exemplo.

2.5.1 Modelos com condição de não-arbitragem

Modelo CIR

No modelo CIR a taxa de juros instantânea segue a seguinte equação:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz_t, \quad (2.13)$$

onde z_t é um processo de Wiener, θ é a média de longo prazo da taxa de juros à vista; $\kappa \geq 0$ é a intensidade de reversão à média no qual o processo retorna a sua média de longo prazo e $\sigma > 0$ é o parâmetro de volatilidade do processo.

Chen e Scott (1992) reescrevem o modelo CIR na forma de espaços de estados, com expressões para a média e variância condicional do processo das variáveis estados não observáveis em um intervalo de tempo discreto de dimensão h . Para que se entenda as formas do modelo de espaço obtidas, será necessário escrever algumas premissas envolvidas no modelo de uma forma mais geral, conforme abaixo.

Suponha que as taxas de uma curva zero cupom em distintos vencimentos dependam de um vetor de variável de estado não observável X_t , que obedece a seguinte dinâmica:

$$dX_t = U(X_t; \Psi)dt + \Sigma(X_t; \Psi)dz_t$$

12 *CAPÍTULO 2. MODELOS DE ESPAÇOS DE ESTADOS PARA ESTRUTURA A TERMO*

onde z_t é um processo de Wiener de dimensão $n \times 1$, Ψ é um vetor de parâmetros $p \times 1$; $U(\cdot)$ e $\Sigma(\cdot)$ de dimensões $n \times 1$ e $n \times n$, respectivamente, são funções regulares tal que a equação acima tenha uma única solução. O preço de um título nesta classe de modelos pode ser expresso como:

$$D_t(X_t; \Psi, \tau) = A(\Psi, \tau) e^{-B(\Psi, \tau)X_t}, \quad (2.14)$$

onde $D_t(X_t; \Psi, \tau)$ é o preço no tempo t de um título livre de risco com vencimento τ ; $A(\Psi, \tau)$ é uma função escalar e $B(\Psi, \tau)$ é uma função vetorial de dimensão $n \times 1$. A taxa instantânea de juros é definida como:

$$r_t(X_t; \Psi) = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln D_t(X_t; \Psi, \tau)}{\tau}.$$

Duffie e Kan (1996) mostram que $D(\cdot)$ terá a forma da equação (2.14) se e somente se $U(\cdot)$, $\Sigma(\cdot)\Sigma(\cdot)'$ e r_t são lineares em X_t . Além disso, $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ são obtidos como soluções de equações diferenciais ordinárias.

Seja $R_t(X_t; \Psi, \tau)$ o fator exponencial de um título zero cupom de maturidade τ . A taxa deste título será dada por:

$$R_t(X_t; \Psi, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln(D_t(X_t; \Psi, \tau)).$$

Para tratar o problema de estimação, é razoável que se assuma que as taxas em distintos vencimentos são observadas com erros de magnitudes desconhecidas. Assim o modelo pode ser reescrito com a adição de ϵ_t como:

$$R_t(X_t; \Psi, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln(A(\Psi, \tau)) + \frac{1}{\tau} B(\Psi, \tau)X_t + \epsilon_t, \quad (2.15)$$

onde ϵ_t é assumido como normalmente distribuído com média zero e desvio-padrão σ_ϵ^2 ; caso se tenham N vencimentos, este se tornará um sistema de equações em τ_1, \dots, τ_N .

Para obter a forma de modelos de espaços de estados, é necessário derivar expressões para a média e variância condicionais, definidas como $m(X_t; \Psi, h) \equiv E(X_{t+h}|X_t)$ e $\Phi(X_t; \Psi, h) \equiv Var(X_{t+h}|X_t)$. A equação de transição sobre um intervalo discreto de tempo h é escrita na forma

$$X_{t+1} = m(X_t; \Psi, h) + \Phi(X_t; \Psi, h)^{1/2} \eta_{t+1} \quad (2.16)$$

em que η_{t+1} é um vetor de média zero e variância unitária, com $\Phi(X_t; \Psi, h)^{1/2}$ sendo a decomposição

de Cholesky de $\Phi(X_t; \Psi, h)$.

Seja $\mathbf{Y}_{t-1} = \{R_s(X_s; \Psi, \tau_1), \dots, R_s(X_s; \Psi, \tau_N), s \leq t\}$ o conjunto de realizações das taxas dos distintos vencimentos até o instante $t-1$. Como $m(X_t; \Psi, h)$ e $\Phi(X_t; \Psi, h)$ são afins em X_t , podemos escrever os valores esperados, conforme abaixo:

$$m(\hat{X}_t; \Psi, \tau) = a(\Psi, h) + b(\Psi, h) \hat{X}_t,$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são matrizes $n \times 1$ e $n \times n$ respectivamente, e $\hat{X}_t = E(X_t | \mathbf{Y}_{t-1})$ e as variâncias condicionais a \mathbf{Y}_{t-1} se'rão escritas por $P_{t|t-1} \equiv \text{Var}(X_t | \mathbf{Y}_{t-1})$.

Para implementar o filtro de Kalman no caso de quase-verossimilhança, também será derivada uma relação entre $P_{t|t-1}$ e P_{t-1} , chegando à seguinte expressão:

$$P_{t|t-1} = b(\Psi, h) P_{t-1} b(\Psi, h)' + \Phi(\hat{X}_t; \Psi, h).$$

Assim, as informações sobre média e variância condicionais estão explicitamente especificadas. E a partir das equações (2.15) e (2.16), o Filtro de Kalman é utilizado para obter a decomposição do erro de previsão para avaliar a função de quase-verossimilhança.

Aplicando as expressões acima sobre o modelo CIR em (2.13), temos:

$$\begin{aligned} A(\Psi, \tau) &= \left[\frac{2\gamma e^{[(\kappa + \lambda + \gamma)\tau]/2}}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right]^{2\kappa\theta/\sigma^2}, \\ B(\Psi, \tau) &= \frac{2e^{\gamma\tau} - 1}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma}, \\ \gamma &= \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma}. \end{aligned}$$

E as formas funcionais para $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} a(\Psi, h) &= \theta(1 - e^{-\kappa h}) \\ b(\Psi, h) &= e^{-\kappa h} \\ \Phi(x_t, \Psi, h) &= \underbrace{x_t \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa h} - e^{-2\kappa h})}_{\text{variância afim em } x_t} + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa h})^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde λ é o parâmetro de prêmio de risco e quando $\lambda < 0$ implica um prêmio positivo no preço dos títulos e h será a frequência das observações transformada em anos.

Reescrevendo o modelo CIR na forma de espaço de estados descrita em (2.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t(\Psi, \tau) &= \frac{B(\Psi, \tau)}{\tau} \alpha_t + \frac{-\ln(A(\Psi, \tau))}{\tau} + \epsilon_t \\ \alpha_{t+1} &= b(\Psi, h) \alpha_t + a(\Psi, h) + \eta_t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{Q}_t = \Phi(x_t, \Psi, h)$ e $\mathbf{H}_t = \text{diag}\{\sigma_{\tau_1} \dots \sigma_{\tau_N}\}$.

2.5.2 Modelos sem condição de não-arbitragem

Os modelos sem a condição de não-arbitragem possuem como objetivo principal modelar a forma da curva de vencimentos de uma maneira simples e precisa, além de conseguir identificar os fatores latentes como fatores de sensibilidade ao risco ante variações de nível, inclinação e curvatura da curva.

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são dados por:

$$F_0(\tau) = \alpha_0 \quad \text{e} \quad F_j(\tau) = \alpha_j \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{d\tau^j} [(\tau^2 - 1)^j], \quad \text{para } j = 1, \dots, k \quad \tau \in [-1, 1], \quad (2.19)$$

onde as variações em α_0, α_1 e α_2 são interpretados como variações no nível, inclinação e curvatura da ETTJ, respectivamente.

Seja $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ o vetor de vencimentos com os quais se deseja modelar a ETTJ, \mathbf{Y}_τ as taxas observadas nos vencimentos τ , α_t o vetor de estados indicando os pesos dos fatores nível, inclinação e curvatura dinâmicos no tempo.

A forma do modelo de espaços de estados será escrita por:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t(\tau) &= \mathbf{F}(\tau) \alpha_t + \epsilon_t, \\ \alpha_{t+1} &= \alpha_t + \eta_t, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\epsilon_t \sim N(0, \mathbf{I}\sigma_\epsilon)$, $\eta \sim N(0, \mathbf{I}\sigma_\eta)$ e $E[\epsilon_t \cdot \eta] = 0$.

Exponenciais de Svensson

Antes de adentrar ao tema das exponenciais de Svensson (1994), é válida uma introdução ao modelo de Nelson e Siegel (1987), o qual permitiu que o segundo modelo fosse proposto.

O modelo de Nelson e Siegel (1987) foi motivado pela necessidade de fazer previsão de taxas fora da amostra, fato que não era possível através do modelo de splines. Usando um argumento empírico baseado na teoria de estrutura a termo de taxas, foi construído um modelo parcimonioso para explicar a dinâmica das taxas de juros futuras:

$$y(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1 - e^{-\tau/\lambda}}{\tau/\lambda} + \alpha_2 \left[\frac{1 - e^{-\tau/\lambda}}{\tau/\lambda} - e^{-\tau/\lambda} \right]. \quad (2.21)$$

Para um dado λ , a taxa futura $y(\tau)$ é uma função linear dos coeficientes α_0 , α_1 e α_2 , os quais podem ser interpretados como fatores de nível, inclinação e curvatura. Entretanto, quando a curva de juros estudada possui uma estrutura muito sofisticada como a brasileira, a função de Nelson e Siegel (1987) não é suficiente para apresentar boa qualidade de ajuste.

As exponenciais de Svensson (1994) são uma generalização da proposta de Nelson e Siegel (1987), em que é adicionado mais um fator de curvatura além dos fatores, nível, inclinação e a curvatura usuais. Além disso, na abordagem do modelo de espaços de estados, os coeficientes α_0 , α_1 , α_2 e α_3 são dinâmicos no tempo.

A função de taxa definida para dado vencimento τ no tempo t é dada por:

$$y_t(\tau) = \alpha_{0t} + \alpha_{1t} \frac{1 - e^{-\tau/\lambda_1}}{\tau/\lambda_1} + \alpha_{2t} \left[\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_1}}{\tau/\lambda_1} - e^{-\tau/\lambda_1} \right] + \alpha_{3t} \left[\frac{1 - e^{-\tau/\lambda_2}}{\tau/\lambda_2} - e^{-\tau/\lambda_2} \right],$$

e a estrutura do modelo em espaços de estados seguirá da mesma forma que o modelo de polinômios de Legendre em (2.20), sendo que os parâmetros de decaimento λ_1 e λ_2 que irão definir a forma da curva serão fixos para todo histórico.

Neste modelo, os coeficientes de cada fator irão corresponder a um aspecto específico da estrutura a termo da curva. A componente α_0 estará relacionada à contribuição do termo de longo prazo, α_1 à de curto prazo e α_2 à de médio prazo. O parâmetro λ_1 corresponde ao fator de decaimento, α_1 e λ_1

irão definir a forma da curva e α_3 e λ_2 são os parâmetros adicionais para incorporar uma mudança adicional na inclinação e outro fator de curvatura.

Capítulo 3

Aplicação ao Histórico da Curva de Juros Brasileira

Neste capítulo será feita a análise exploratória de dados da série de vencimentos da taxa de juros brasileira. Estes dados podem ser obtidos através do sítio da BM&FBovespa diariamente em *Taxas Referenciais BM&F*.

3.1 Construção da curva de juros

No mercado interbancário doméstico (“on shore”), instituições superavitárias emprestam reais para instituições com falta de recursos através da emissão de Certificados de Depósito Interbancário (CDI). Essas operações são registradas na CETIP, Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados, sendo que o prazo com maior liquidez desses empréstimos é de 1 dia útil. A CETIP divulga diariamente a taxa CDI “over”, que corresponde a média das taxas praticadas pelo mercado para essas operações de 1 dia útil.

Na BM&F, Bolsa de Mercadorias e Futuros, são negociados contratos futuros do CDI “over” para diversos vencimentos, chamados Futuros de DI. Desta forma, os agentes financeiros são capazes de administrar o risco da flutuação da taxa de juros através de operações com esses derivativos. Esses contratos definem uma Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) para o mercado doméstico, que consiste em um conjunto de pontos (vértices) no qual cada um possui um prazo e uma taxa de juros pré-fixada.

O primeiro vértice da curva é formado pela taxa média de depósitos interfinanceiros negociados no dia, ou seja, a taxa CDI “over” que é apurada e divulgada diariamente pela CETIP. Os vértices seguintes são formados pelos vencimentos dos contratos futuros de DI que apresentam liquidez na BM&F, usualmente correspondem aos vencimentos mensais para os primeiros 5 meses, vencimentos

trimestrais para os 5 anos seguintes. Os vencimentos intermediários aos vértices são obtidos por meio de interpolação exponencial dos pontos adjacentes.

3.2 Histórico

Na Figura 3.1 está o histórico da superfície de taxas de juros com início em 02/01/2002 e término em 02/09/2009. Os vencimentos contemplados foram 1, 21, 63, 126, 189 e 252 dias úteis.

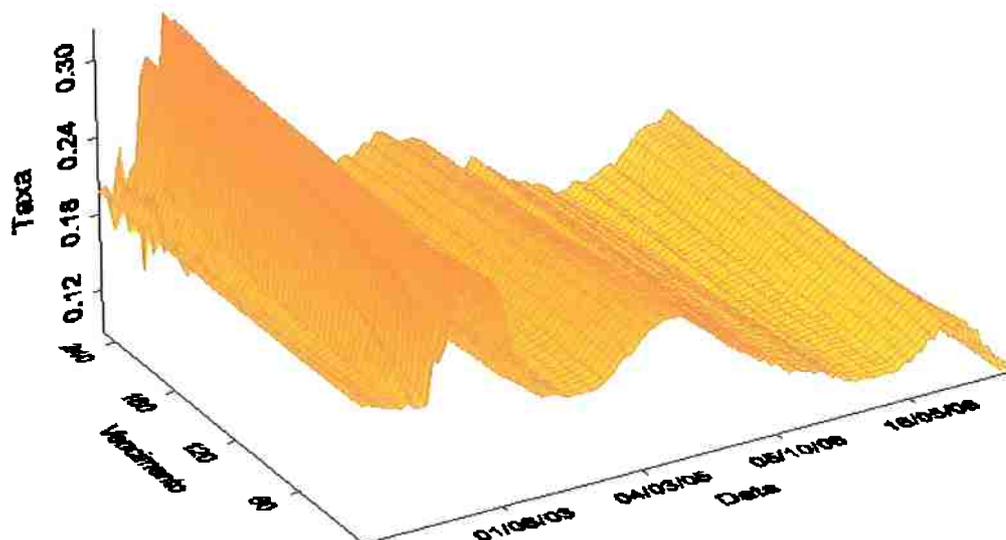


Figura 3.1: Histórico superfície estrutura a termo

Nesta é possível observar os movimentos da curva como um todo e a variação dos fatores nível e inclinação e curvatura conforme o tempo. No período de 2002 até a metade de 2003, a curva de juros apresentou alta volatilidade nos vencimentos além de taxas mais altas de todo o histórico compreendido. Esta fase pode-se relacionar à incerteza de mercado quanto à mudança de governo penalizando principalmente os vencimentos de mais longo prazo, ou seja, um aumento da inclinação da curva. Outros aspectos da série histórica poderão ser explicados com o auxílio da série de taxas mensais de IPCA, índice que se tornou referência para regime de metas de inflação do governo, na

Figura 3.2. A partir desta, pode-se observar que o aumento da taxa de juros durante o ano de 2005 se deve ao resultado do aquecimento econômico e aumento do consumo. No início de 2008 observa-se um novo ciclo de aumento da inflação como reflexo do início da crise sub-prime com ápice em Outubro/2008 e declínio vertiginoso à taxas mais baixas observadas desde a implementação do sistema de metas, com objetivo de reaquecer a economia.

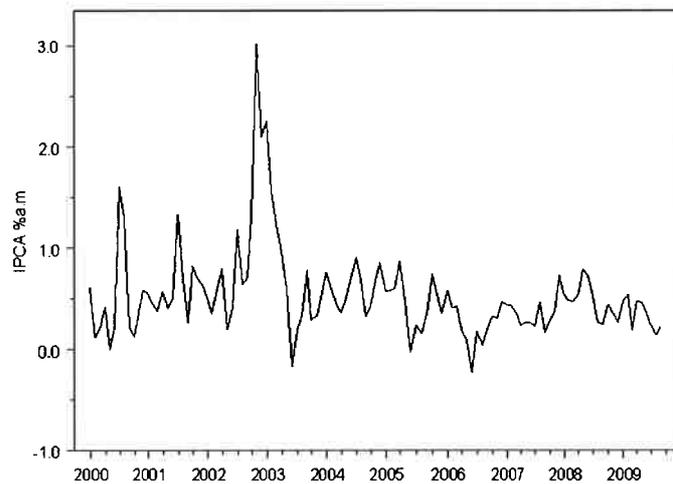


Figura 3.2: Histórico percentual IPCA a.m

As séries dos vencimentos dispostas de forma univariada são apresentadas na Figura 3.3.

Pela Figura 3.3 fica evidente que as séries de taxas possuem movimentos conjuntos, portanto estas não podem ser tratadas de forma separada. Na Tabela 3.1 está a matriz de covariâncias entre as taxas nos respectivos vencimentos. Por tratar-se de taxas, as variâncias apresentam pequena escala.

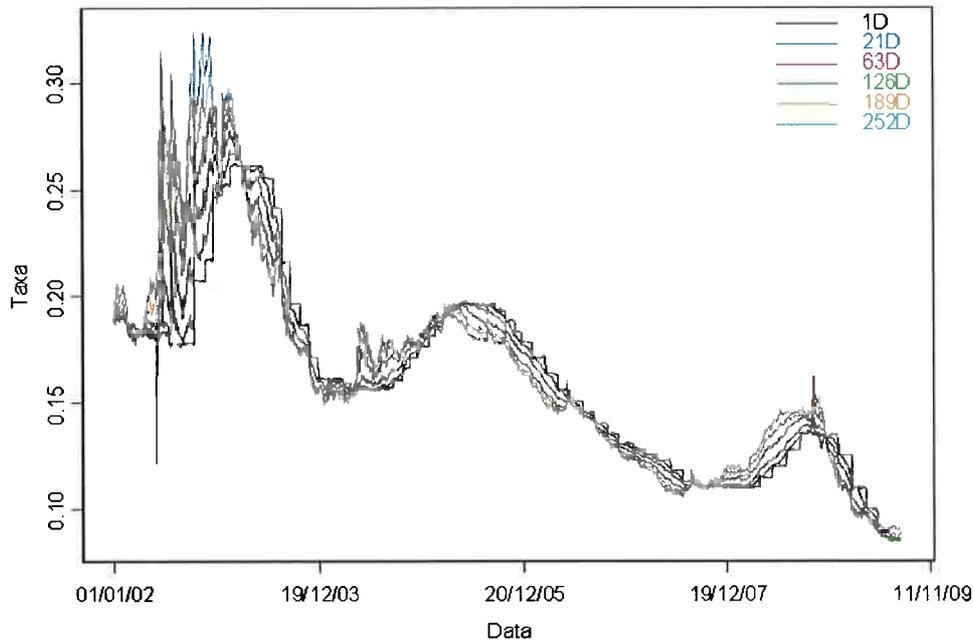


Figura 3.3: Série univariada dos vencimentos da curva

	M1	M21	M63	M126	M189	M252
M1	0.001841236	0.001861260	0.001881215	0.001873121	0.001874825	0.001885882
M21	0.001861260	0.001909019	0.001954319	0.001974653	0.001997144	0.002024437
M63	0.001881215	0.001954319	0.002040092	0.002108504	0.002164957	0.002217465
M126	0.001873121	0.001974653	0.002108504	0.002244017	0.002348819	0.002436657
M189	0.001874825	0.001997144	0.002164957	0.002348819	0.002492827	0.002611027
M252	0.001885882	0.002024437	0.002217465	0.002436657	0.002611027	0.002754654

Tabela 3.1: Matriz de covariâncias nos vencimentos

3.3 Aplicação dos modelos de espaços de estados à ETTJ

Nesta seção serão mostrados os resultados de ajuste dos modelos propostos, análise da qualidade de ajuste e de previsão. O software utilizado neste trabalho foi o S-Plus® e o pacote SSfpack contido

no S+Finmetrics, ver Eric Zivot e Koopman (2003).

3.3.1 Ajuste do modelo CIR

O modelo CIR especifica que a taxa de juros instantânea possui um processo de difusão em raiz quadrada em que há uma reversão à uma média constante no longo prazo. Para aplicação ao histórico de taxas brasileira, serão divididos três regimes de taxas 1) Jan/2002 a Set/2003, 2) Out/2003 a Dez/2006 e 3) Jul/2006 a Set/2009.

Os desvios-padrão amostrais dos vencimentos foram utilizados como valores iniciais para a matriz de covariâncias. A seguir serão apresentadas as tabelas de estimativas dos parâmetros e hiperparâmetros, os gráficos de ajuste e de previsão.

Para o período de Jan/2002 a Set/2003, na Tabela 3.2 estão as estimativas dos parâmetros do modelo CIR e dos desvios dos respectivos vencimentos. São apresentadas três estatísticas t-student a partir das matrizes de variância-covariâncias dos hiperparâmetros estimados. Entre estas estão: “t-ratio”, obtido a partir da matriz de variância-covariâncias estimada, “t-ratio(opg)”, através da matriz de covariâncias baseada no produto interno dos gradientes e “t-ratio(qmle)”, através da matriz de covariâncias baseada na fórmula assintótica para estimação de quasi-máxima verossimilhança (QMLE).

O modelo CIR é composto por três parâmetros, κ vai indicar a velocidade de reversão da taxa instantânea de juros à média de longo prazo medida em anos, θ representa a taxa média de longo prazo e σ é o parâmetro de dispersão do processo estocástico da taxa de juros instantânea dr_t . O parâmetro λ surge da transformação do modelo CIR na forma de espaços de estados e representa o prêmio de risco requerido para os títulos que compõem a curva em estudo, uma estimativa negativa indica um prêmio positivo para os títulos indexados a taxa de juros. Os demais hiperparâmetros $\sigma_{1D}, \sigma_{21D}, \sigma_{63D}, \sigma_{126D}, \sigma_{189D}, \sigma_{252D}$ serão os elementos da matriz \mathbf{H}_t e o teste de hipóteses sobre a estimativa destes indicará se o vencimento é significativo para explicar a estrutura a termo proposta pelo modelo.

A partir da Tabela 3.2, observa-se que o vencimento de 3 meses (63 dias) se mostra não significativo. Com relação aos demais parâmetros do modelo, $\hat{\kappa} = 0.53$, indicando que a velocidade de reversão à média no primeiro ciclo de taxas é de aproximadamente seis meses. A estimativa parâmetro ($\hat{\lambda} = -0.33$) negativa indica um prêmio positivo para os títulos indexados a taxa de juros. A média de longo prazo estimada para este período é 19.72% e o parâmetro $\hat{\sigma} = 0.13$ que determina

a variância do processo de Wiener o qual segue a taxa de juros instantânea. No modelo CIR cabe ressaltar que a variância do processo possui uma interação direta com a variação da taxa, ou seja, variações maiores resultarão em uma variância maior.

	Estimativa	t-ratio	t-ratio(opg)	t-ratio(qmle)
kappa	0.5348286	4.842727	2.043948	5.795356
theta	0.1972368	5.175469	2.087936	6.822838
sigma	0.1307976	28.17790	37.94526	8.745400
lambda	-0.3262280	-3.295528	-1.277753	-5.390215
sigma 1D	0.0191171	29.11013	14.92572	32.896457
sigma 21D	0.0112829	29.15004	12.75464	37.231265
sigma 63D	1.0000e-8	3.312e-5	1.0946e-9	0.0032243
sigma 126D	0.0143721	29.18662	4.835744	42.532028
sigma 189D	0.0246637	29.19720	2.310634	42.512778
sigma 252D	0.0321647	29.20902	3.398061	42.013706

Tabela 3.2: Estimativas modelo CIR Jan/02 a Set/03

Na Figura 3.4 estão os gráficos de ajuste do modelo nos vencimentos. Observa-se que há uma maior distância entre os valores reais e ajustados para os maiores vencimentos da curva, 189 e 252 dias.

De Out/2003 a Dez/2006 os resultados do ajuste do modelo CIR são apresentados na Tabela 3.3. Nesta, a reversão à média de longo prazo se reduz de 6 meses para 3 meses, a média de longo prazo estimada em 11.82%, a estimativa do parâmetro de volatilidade $\hat{\sigma} = 0.026$, uma redução de 85% em comparação ao período anterior. Além disso, o parâmetro λ , que indica o prêmio de risco, torna-se estatisticamente não significativo. Com relação aos vencimentos, a estimativa do hiperparâmetro σ_{63D} do ponto de 3 meses é próxima de zero e o teste de hipótese indica que o vencimento é não significativo.

Nos gráficos de valores reais e ajustados apresentados na Figura 3.5, houve uma grande variação nas séries de taxas de juros nos vencimentos de 6, 9 e 12 meses no período de Mai/04 a Nov/04, fato ocorrido principalmente pela oscilação nos níveis de inflação como consequência do retorno do aquecimento econômico. Neste período há um descolamento evidente entre a estimativa e a série real observada. Para os demais períodos e vencimentos, o modelo apresentou boa qualidade de ajuste, pois consegue responder às tendências de crescimento e decaimento presentes neste horizonte. Conforme a Tabela 3.3, este período apresentou uma queda nos níveis de volatilidade além de um regime com média de taxas de juros mais baixa.

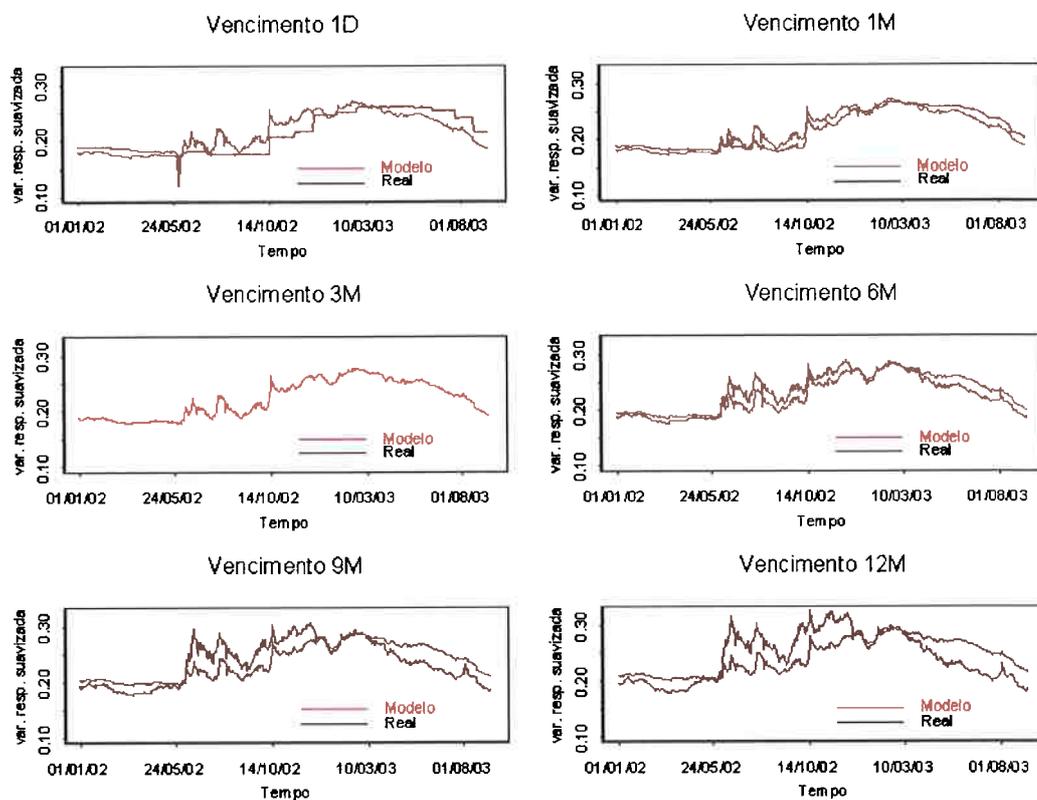


Figura 3.4: Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/03) - Modelo CIR

	Estimativa	t-ratio	t-ratio(opg)	t-ratio(qmle)
kappa	0.2578935	10.445199	7.075764	8.192220
theta	0.1182528	11.119342	10.29484	7.922493
sigma	0.0261590	40.445694	51.53175	12.440155
lambda	-0.0230942	-1.585395	-0.94512	-1.510807
sigma 1D	0.0059050	40.335743	35.93293	32.335088
sigma 21D	0.0031581	40.032727	15.37046	53.144963
sigma 63D	1.0000e-8	0.000162	4.129e-8	0.001544
sigma 126D	0.0039104	40.561165	4.496258	36.475451
sigma 189D	0.0062320	40.462024	2.480646	32.568686
sigma 252D	0.0077561	39.949810	3.974754	31.020403

Tabela 3.3: Estimativas modelo CIR Out/03 a Dez/06

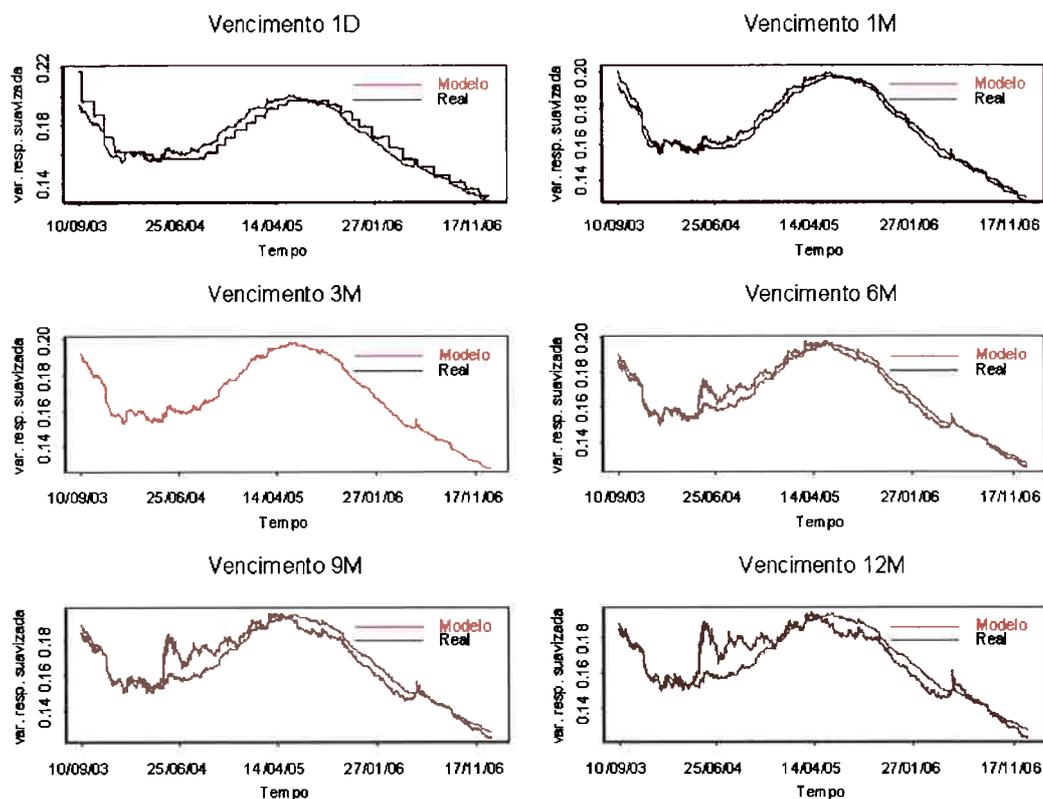


Figura 3.5: Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Out/03 a Dez/06) - Modelo CIR.

Como o período de 2006 pode ser considerado como transição entre os últimos dois regimes, haverá uma interseção de observações no ajuste dos dois últimos modelos. De Jul/2006 a Set/2009 será o último ciclo de taxas de juros contemplado para ajuste do modelo CIR. A partir da Tabela 3.4, a velocidade de reversão à média é reduzida para aproximadamente 1.5 mês, a média de longo prazo é estatisticamente igual a zero. A estimativa de volatilidade $\hat{\sigma} = 0.019$ é praticamente semelhante ao período anterior, e $\hat{\lambda} = -0.12$, o prêmio de risco, passa a ser significativo no modelo. O vencimento de 3 meses também é não significativo para esse horizonte de modelagem.

A partir dos gráficos de ajuste na Figura 3.6, há uma boa qualidade de ajuste do modelo para todos os vencimentos. Cabe salientar que como nos outros períodos, um grande período de oscilação de

	Estimativa	t-ratio	t-ratio(opg)	t-ratio(qmle)
kappa	0.1089605	4.828766	2.553362	2.662141
theta	1.0000e-8	5.1840e-7	3.8306e-7	2.2916e-7
sigma	0.0194555	39.73228	49.85562	12.09990
lambda	-0.1210496	-3.852936	-4.924484	-1.553973
sigma 1D	0.0048695	39.40304	32.57240	35.37549
sigma 21D	0.0027132	39.18219	24.29716	42.43966
sigma 63D	1.0000e-8	4.4071e-4	1.1220e-7	7.2228e-3
sigma 126D	0.0034077	39.58845	3.920367	51.40880
sigma 189D	0.0058026	39.63490	1.876014	51.57852
sigma 252D	0.0076476	39.38963	3.098110	52.86873

Tabela 3.4: Estimativas modelo CIR Jul/06 a Set/09

taxas em Fev/08 a Nov/08, houve um descolamento entre os valores reais e ajustados nos vencimentos 189 e 252 dias.

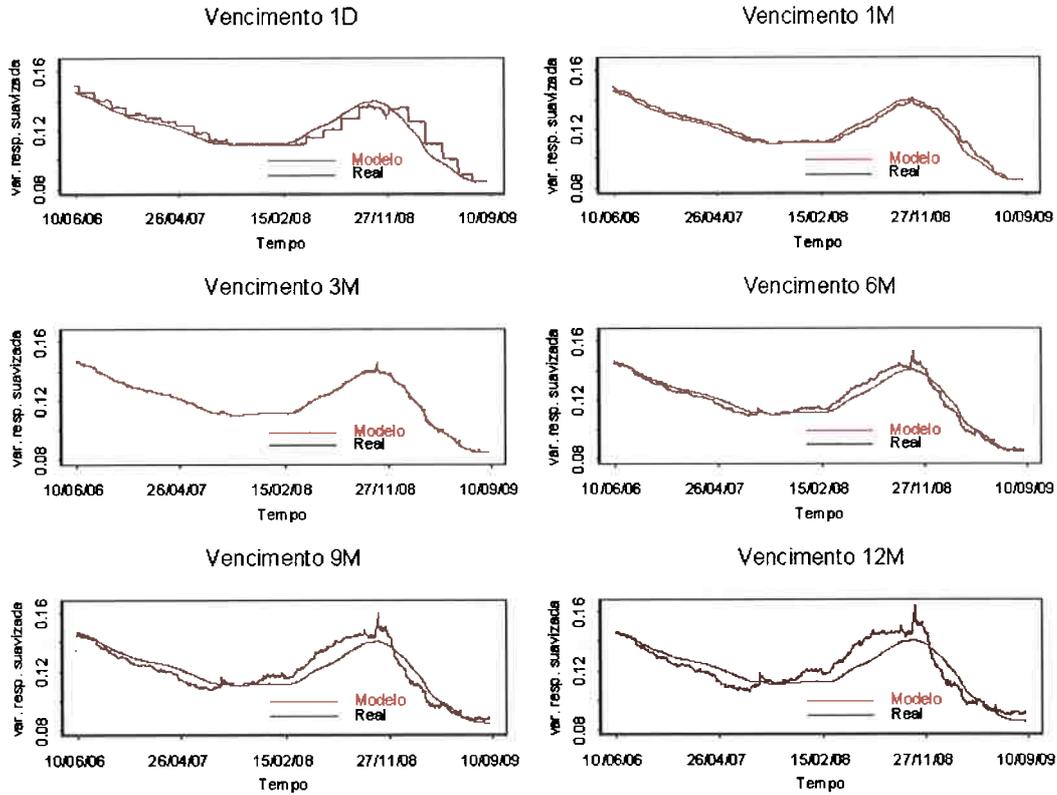


Figura 3.6: Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jul/06 a Set/09) - Modelo CIR

Previsão do Modelo CIR

Nesta seção será apresentado o processo de previsão k passos a frente. A equação de previsão para o modelo será:

$$\alpha_{n+k} = b(\Psi, h)^k \alpha_n + \sum_{i=1}^k b(\Psi, h)^{k-i} a(\Psi, h) + \sum_{i=1}^k b(\Psi, h)^{k-i} \eta_{n+i} \quad (3.1)$$

Para obter a previsão k passos a frente, define-se $\tilde{y}_{n+k|n}(\psi) = E(y_{n+k}|\mathbf{Y}_n, \psi)$:

$$\tilde{y}_{n+k|n}(\psi) = \frac{B(\Psi, \tau)}{\tau} \left[b(\Psi, h)^k a_n + \sum_{i=1}^k b(\Psi, h)^{k-i} a(\Psi, h) \right] - \frac{\ln(A(\Psi, h))}{\tau}, \quad (3.2)$$

e a equação de variância também terá a forma recursiva em que há um aumento progressivo conforme maior o horizonte de previsão.

Na Figura 3.7 é apresentado o gráfico de previsão 60 dias adiante. Nestes observa-se que a previsão seguirá a última tendência observada dos dados. A variância da previsão obtida foi da ordem de e^{-17} , portanto não foi incluída no gráfico.

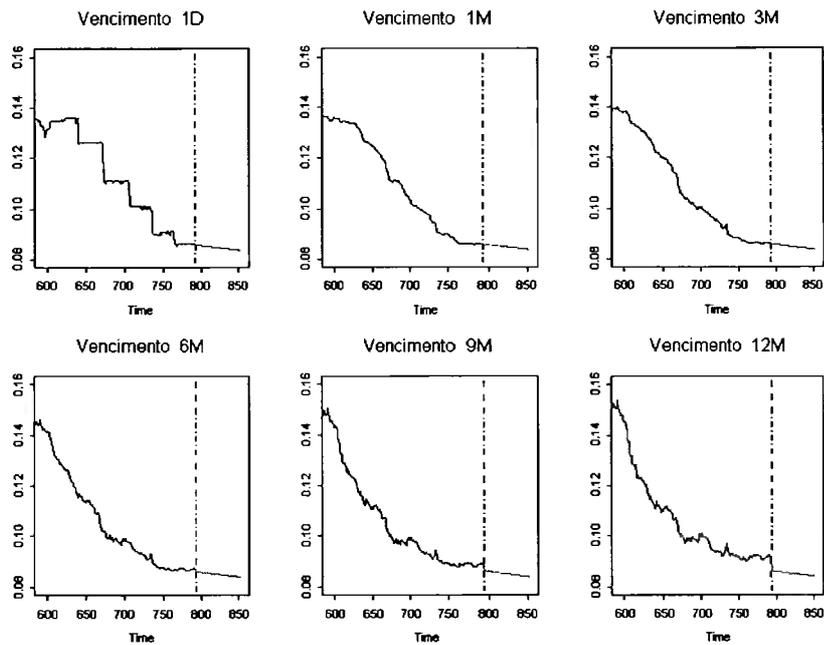


Figura 3.7: Previsão 60 dias a frente a partir de Set/09 - Modelo CIR

3.3.2 Ajuste modelo de fatores latentes via polinômios de Legendre

O modelo de fatores latentes, que utiliza formas polinomiais, possui uma maior simplicidade ante os modelos de difusão estocástica, pois há uma maior flexibilidade na estrutura do modelo além de ter uma interpretação mais direta dos fatores. Este atributo também possibilita que o ajuste seja aplicado em todo o histórico de taxas disponível. Na Tabela 3.5 estão as estimativas dos desvios dos fatores nível, inclinação e curvatura e dos vencimentos da curva obtidos por suavização. Nesta observa-se que o vencimento de 6 meses e 1 ano são estatisticamente não significativos para o modelo de fatores.

	Estimativa	Desvio Padrão	Estatística T
Nível	0.0021440	0.00004294	49.91
Inclinação	0.0012250	0.00002754	44.47
Curvatura	0.0004868	0.00001252	38.88
sigma 1D	0.0037220	0.00006327	58.82
sigma 21D	0.0007073	0.00005479	12.91
sigma 63D	0.0012710	0.00002312	54.99
sigma 126D	1.716e-4	6.225e-5	2.756
sigma 189D	7.928e-4	1.555e-5	51.000
sigma 252D	9.308e-6	8.609e-6	1.081

Tabela 3.5: Estimativas modelo Legendre Jan/02 a Set/09

O ajuste do modelo via polinômios de Legendre apresentado na Figura 3.8, consegue captar todas as variações presentes no histórico apresentando boa qualidade de ajuste, através do gráfico de suavização do vetor de vencimentos. Os três fatores, nível, inclinação e curvatura se mostram significativos para a explicação da variação da estrutura a termo de taxas. A partir do gráfico na Figura 3.9, pode-se observar as magnitudes dos coeficientes de cada fator conforme estimados no tempo, neste há que o fator nível predomina grande parte do movimento das taxas e os demais fatores oscilam em torno do zero. Também os fatores inclinação e curvatura apresentam maiores magnitudes no início da série, período de maior incerteza com relação aos aspectos de política econômica. No período de crise recente em 2008, as estimativas destes apresentam maiores oscilações. O que se pode inferir é que, apesar dos fatores nível e inclinação possuírem uma menor influência na descrição do comportamento das taxas, estes se tornam um diferencial em períodos de instabilidade e crise econômica.

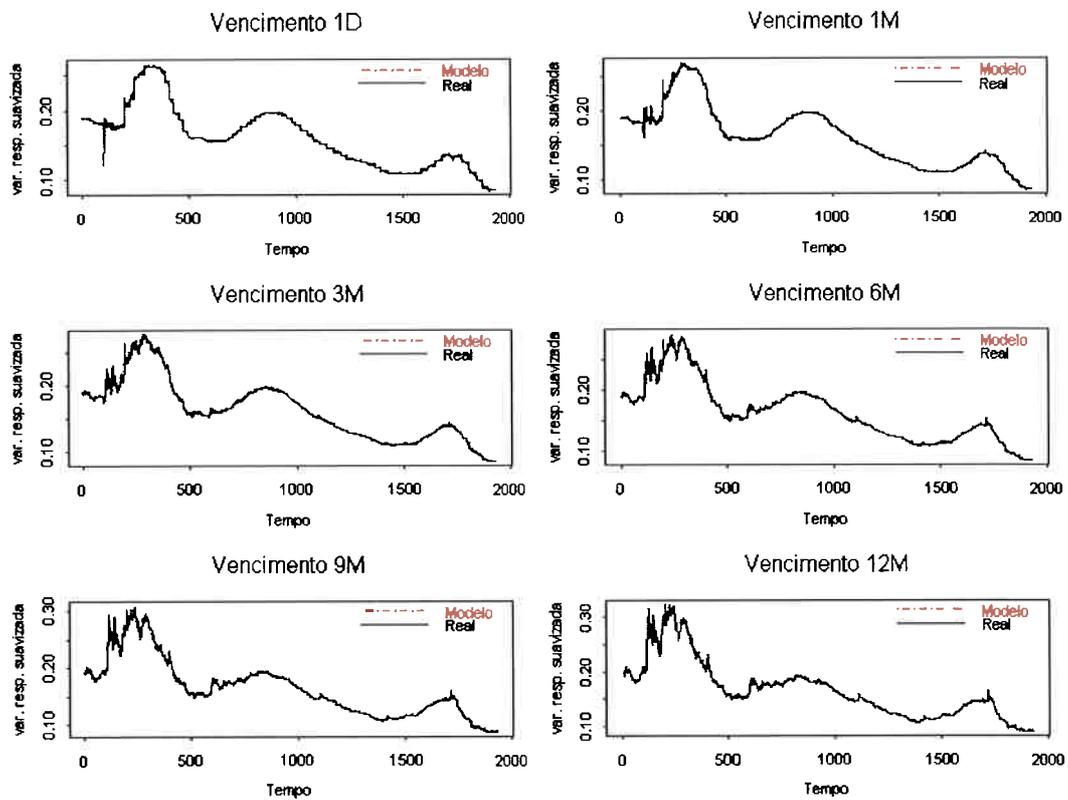


Figura 3.8: Série de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/09) - Modelo Legendre

Previsão do Modelo Legendre

Para o processo de previsão k passos a frente, a equação de previsão para o modelo de fatores latentes utilizando polinômios de Legendre segue abaixo:

$$\alpha_{n+k} = \alpha_n + \sum_{i=1}^k \eta_{n+i}. \quad (3.3)$$

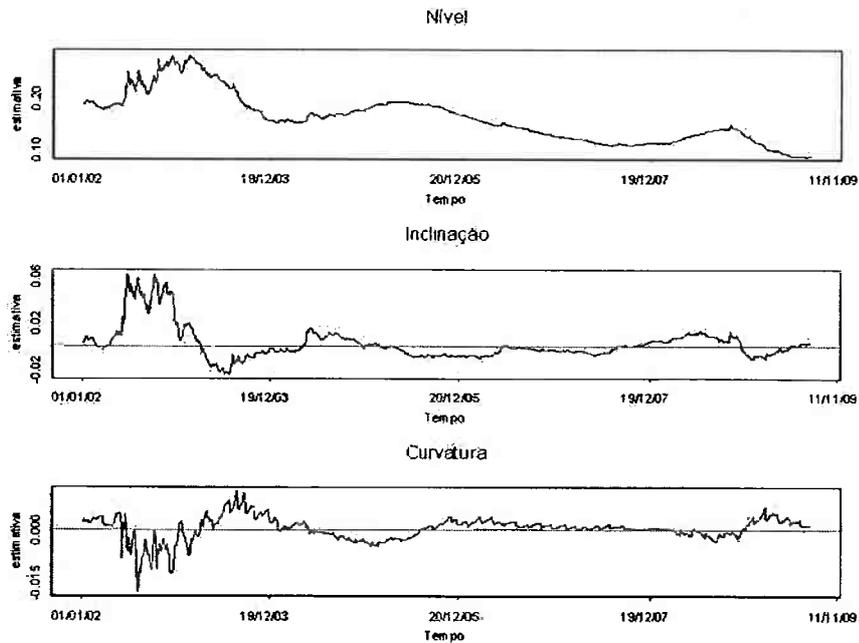


Figura 3.9: Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvatura (Jan/02 a Set/09) - Modelo Legendre

Para obter a previsão k passos a frente, define-se $\tilde{y}_{n+k|n}(\psi) = E(y_{n+k} | \mathbf{Y}_n, \psi)$:

$$\tilde{y}_{n+k|n}(\psi) = \mathbf{F}(\tau) \alpha_n. \quad (3.4)$$

O modelo de espaços de estados que utiliza polinômios de Legendre, por construção, permite que seja calculada a previsão um passo à frente e para os demais horizontes haverá uma projeção constante. Uma alternativa possível neste modelo é a atualização da previsão a partir de cada nova observação, tal como no modelo ARIMA.

Ao contrário do modelo CIR, a variância de previsão segue de forma explosiva conforme maior o horizonte de previsão.

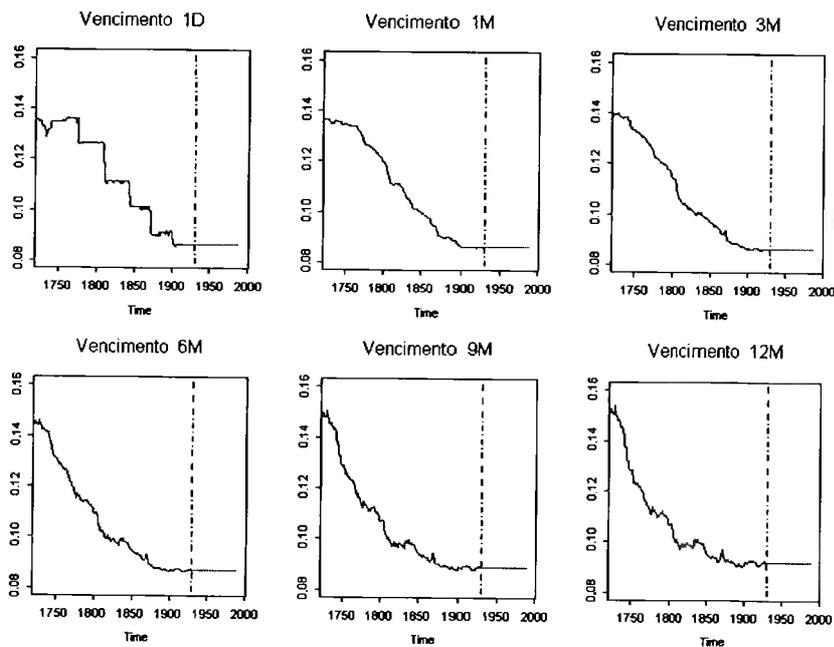


Figura 3.10: Previsão 60 dias a frente a partir de Set/09 - Modelo Legendre

3.3.3 Ajuste do modelo de fatores latentes via exponenciais de Svensson

O ajuste, via exponenciais de Svensson, atribui um segundo fator de curvatura ao modelo inicialmente proposto por Nelson e Siegel (1987). Esta abordagem também levará em consideração a forma da curva, como também visto no exemplo de ajuste de Legendre. Entretanto, as formas exponenciais não serão aplicáveis a todo histórico disponível, sendo dividida em dois grandes períodos: o ano de 2002 até setembro de 2003, o qual contempla a crise provocada pela eleição do presidente Lula, e o segundo período com início em outubro de 2003 até agosto de 2009.

Além disso, a abordagem via exponenciais não se mostrou eficiente na estimação do vencimento de 1 dia da curva de juros, por este possuir quedas abruptas em formato de escada, causadas pelas definições das reuniões de meta da taxa Selic realizadas pelo Copom (Comitê de Política Monetária), diferentemente dos demais vencimentos. A estimação gera auto-valores negativos e impossibilidade de inversão da matriz hessiana e, conseqüentemente, a não viabilidade de estimação dos desvios-padrão

dos parâmetros do modelo.

Na Tabela 3.6 estão as estimativas do ajuste das curvas correspondente ao primeiro período de história, jan/02 a ago/03, o qual apresenta oscilações de mercado abruptas indicando um período de incertezas na economia.

As estimativas dos hiperparâmetros $\{\sigma_{21D}, \sigma_{63D}, \sigma_{126D}, \sigma_{189D}, \sigma_{252D}\}$ e dos parâmetros λ_1 e λ_2 estáticos do modelo são significativas e os vencimentos de 6 meses e 1 ano se mostram não significativos no ajuste dessa estrutura. Além disso, o segundo fator de curvatura se mostra significativo para explicar os movimentos conjuntos.

	Estimativa	Desvio Padrão	Estatística T
Lambda 1	0.323100	0.0161400	20.020
Lambda 2	2.298000	0.2103000	10.930
Nível	0.001486	0.0002816	5.2780
Inclinação	0.002707	0.0001830	14.790
Curvatura 1	0.013300	0.0005849	22.740
Curvatura 2	0.030100	0.0020340	14.800
sigma 21D	0.000783	0.0001190	6.5840
sigma 63D	0.002826	0.0001014	27.880
sigma 126D	0.000022	0.0001403	0.1552
sigma 189D	0.001170	0.0000415	28.170
sigma 252D	0.000038	0.0005275	0.0719

Tabela 3.6: Estimativas modelo Svensson Jan/02 a Set/03

A partir da Figura 3.11 pode-se observar a boa qualidade do ajuste nos vencimentos contemplados e na Figura 3.12 estão os coeficientes dinâmicos dos fatores.

O primeiro turno das eleições em 06/10/2002 e o segundo turno em 27/10/2002 refletem diretamente à alta de taxas de juros históricas. Os vencimentos de um mês e três meses apresentam ligeira alta no período pré-eleições e após o primeiro turno as taxas passam a ter um comportamento de alta. Nos demais vencimentos, essa expectativa já é apresentada logo no período pré-eleição.

Este fato também pode ser identificado sobre os fatores latentes: O fator nível apresenta aumento no período pré-eleição acompanhado dos dois fatores de curvatura, indicando que o último passa a ter maior importância em momentos de crise. Na Figura 3.12 também pode-se observar que o fator inclinação atua de forma inversa com relação aos fatores de curvatura pois quando os últimos estão presentes, o fator inclinação possui sinal mais negativo, e quando os fatores de curvatura decaem, o fator de inclinação aumenta.

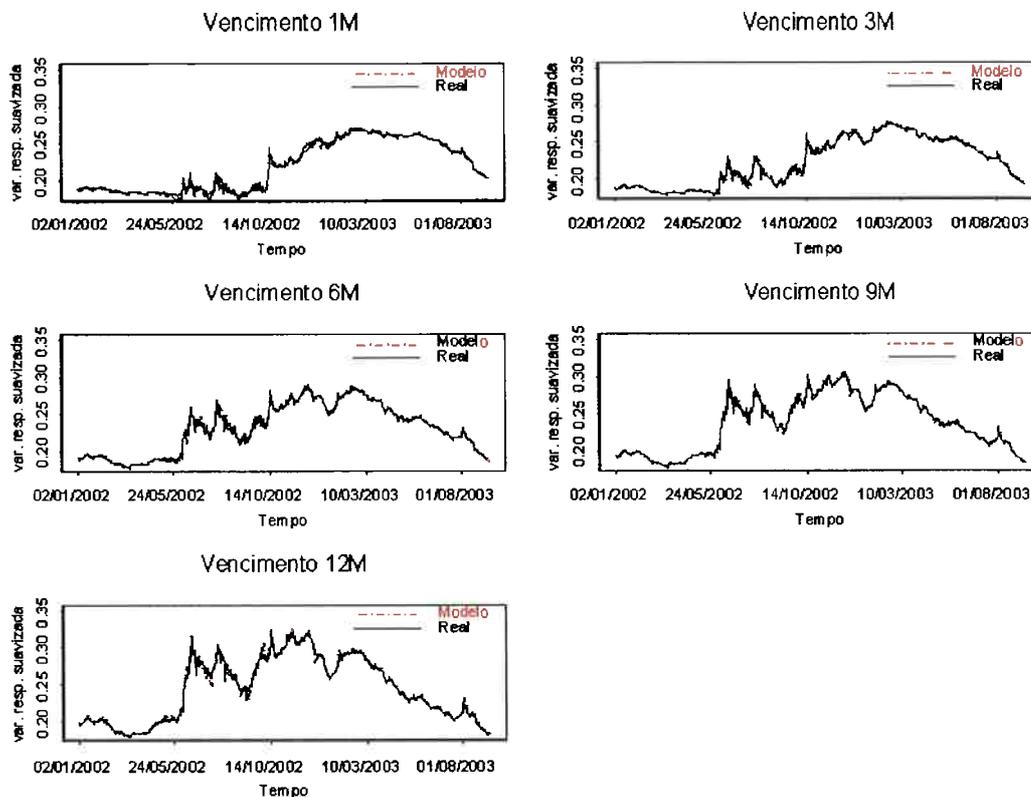


Figura 3.11: Séries de valores reais e ajustados dos vencimentos (Jan/02 a Set/03) - Modelo Svensson

O segundo período que abrange Out/2003 até Ago/2009 apresenta boa qualidade de ajuste, sendo todos os fatores do modelo significativos. Neste o vencimento de um mês é não significativo para explicação da dinâmica de taxas do período contemplado.

A necessidade em dividir o ajuste em dois períodos dá-se pelas estimativas dos parâmetros estáticos λ_1 e λ_2 que irão definir a forma dos fatores de inclinação e de curvaturas de cada vencimento τ_i . Na Figura 3.13 estão os gráficos das exponenciais de Svensson ajustadas em cada um deles. A partir destes, a principal diferença entre os dois períodos está na forma dos fatores de curvatura, sendo que no segundo período há uma maior proximidade entre eles e um decaimento mais lento do fator inclinação através dos vencimentos.

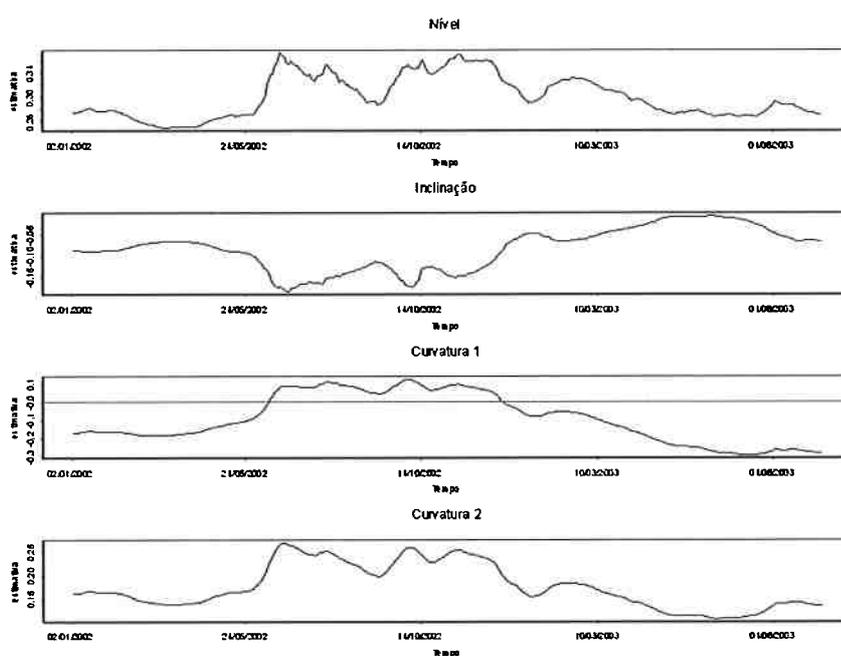


Figura 3.12: Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvaturas (Jan/02 a Set/03) - Modelo Svensson

	Estimativa	Desvio Padrão	Estatística T
Lambda 1	0.4110000	0.0073650	55.81
Lambda 2	1.0230000	0.0248900	41.11
Nível	0.0003014	0.0000168	17.99
Inclinação	0.0003331	0.0000145	22.92
Curvatura 1	0.0031240	0.0000946	33.02
Curvatura 2	0.0052570	0.0001313	40.04
sigma 21D	4.743e-006	5.291e-006	0.90
sigma 63D	5.923e-004	1.198e-005	49.46
sigma 126D	1.009e-004	1.121e-005	9.00
sigma 189D	2.134e-004	8.597e-006	24.82
sigma 252D	3.179e-004	1.744e-005	18.22

Tabela 3.7: Estimativas modelo Svensson Out/03 a Set/09

Na Figura 3.14 estão os gráficos de valores reais e ajustados das séries de taxas nos vencimentos considerados. Em todos os vencimentos há uma boa qualidade de ajuste.

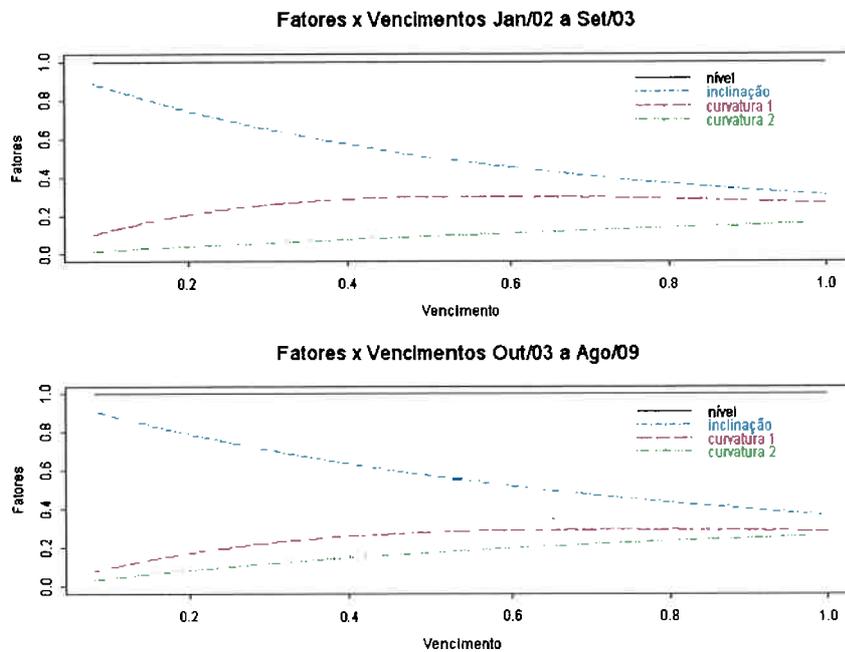


Figura 3.13: Comparação dos gráficos de fatores entre os dois períodos - Modelo Svensson

Com relação ao comportamento dos coeficientes dinâmicos dos fatores ao longo do tempo há uma diferença com relação ao primeiro período. Na Figura 3.15 o fator nível e o segundo fator de curvatura seguem movimentos semelhantes ao longo do tempo da mesma forma que os fatores inclinação e o primeiro fator de curvatura apresentam movimentos conjuntos. Os últimos indicam no histórico o aumento de taxa de juros ocorrido pelo aquecimento econômico e aumento de inflação.

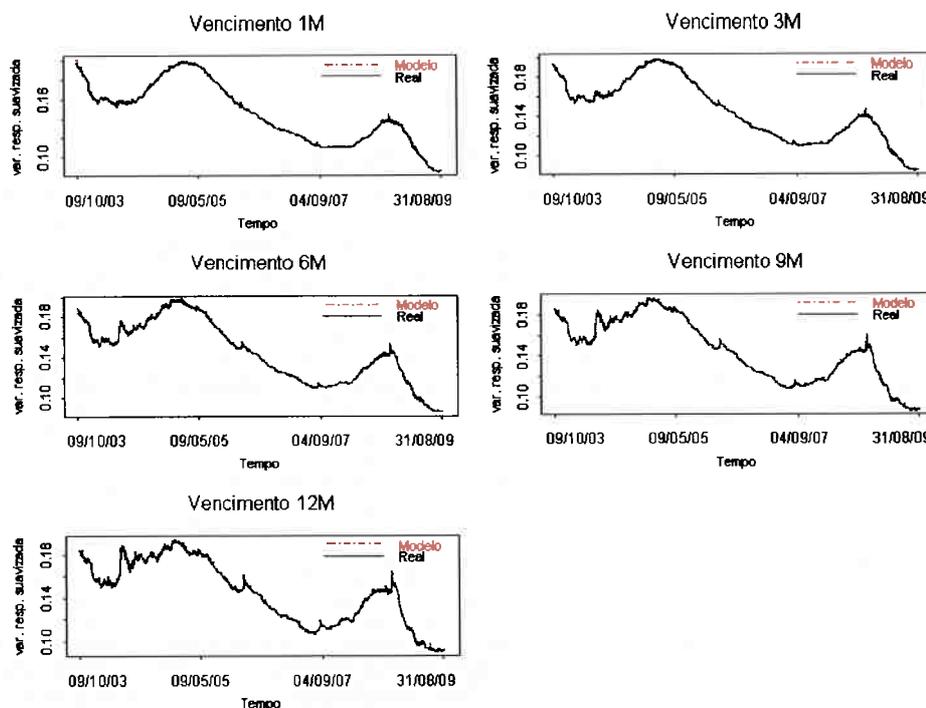


Figura 3.14: Séries de valores reais e ajustados dos vencimentos (Out/03 a Ago/09) - Modelo Svensson

Previsão do Modelo Exponenciais de Svensson

A estrutura do modelo por meio de espaços de estados, respeita a mesma forma para o modelo que utiliza polinômios de Legendre em 3.3 e 3.4, sendo que $F(\tau)$ neste caso é composta por formas exponenciais. Desta forma, o modelo proporciona que o cálculo da previsão um passo à frente e projeção constante para os demais horizontes. Da mesma forma que o modelo ARIMA, a atualização da previsão é possível a partir de novas observações.

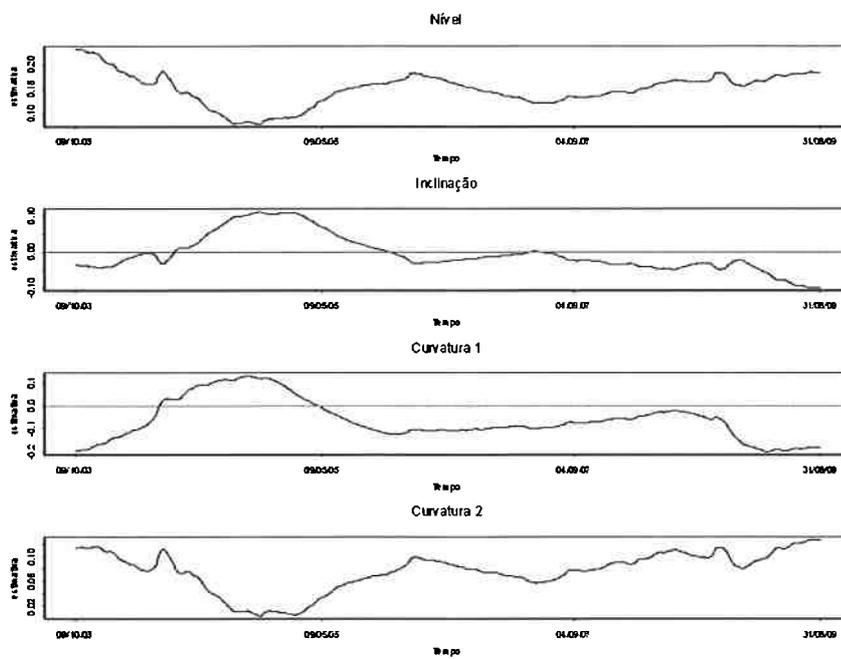


Figura 3.15: Estimativas dos fatores nível, inclinação e curvaturas (Out/03 a Ago/09) - Modelo Svensson

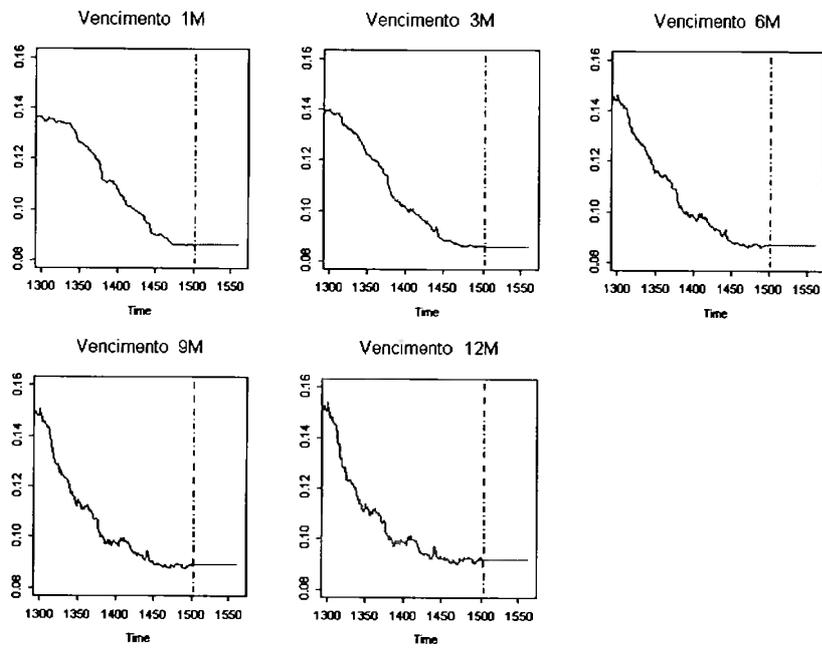


Figura 3.16: Previsão 60 dias a partir de Set/09 - Modelo Svensson

Capítulo 4

Aplicação de Modelos ao cálculo de VaR

O cálculo do valor em risco (*Value at Risk*, VaR) consiste em estimar a perda potencial de uma carteira dado um nível de confiança α e horizonte de tempo h . Esta é uma medida fundamental para o gerenciamento de riscos de carteiras, limites de negociação e até como valor base para avaliação do colchão de capital requerido pelo acordo de Basileia II.

Neste capítulo serão discutidos os resultados da implementação dos modelos ajustados ao cálculo do VaR de uma carteira de títulos pré-fixada. Serão apresentadas a abordagem paramétrica a partir dos resultados das estimativas de ajuste e a simulação do VaR para diversas configurações de carteira.

4.1 Abordagem paramétrica

Nesta seção serão apresentados os resultados paramétricos do cálculo de VaR e a definição de log-retorno sob modelos de espaços de estados, conforme o trabalho de Vieira Neto (1999). Neste, as características da distribuição do modelo de espaço de estado permitem deduzir uma expressão analítica para o cálculo do VaR de uma carteira pré - fixada.

O preço de um título pré-fixado pode ser escrito conforme (2.14) no modelo CIR:

$$D_t(X_t; \Psi, \tau) = A(\Psi, \tau) e^{-B(\Psi, \tau)X_t},$$

e que também pode ser reescrita para a versão de modelos de fatores latentes em que as formas polinomiais de Legendre e as exponenciais de Svensson são aplicadas:

$$P_t(\tau) = e^{-\mathbf{F}(\tau) \cdot \boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.1)$$

O log-retorno do preço do título de vencimento τ e horizonte de 1 dia pode ser escrito como:

$$r_{t+1}(\tau) = \ln \frac{P_{t+1}(\tau)}{P_t(\tau)}. \quad (4.2)$$

Em condições livres de arbitragem, o log-retorno de 1 dia também pode ser escrito da seguinte forma para o modelo CIR:

$$r_{t+1}(\tau) = \ln \frac{D_t(X_{t+1}; \Psi, \tau)}{D_t(X_t; \Psi, \tau)} = -B(\Psi, \tau)[X_{t+1} - X_t],$$

em que X_t é a taxa de juros instantânea fixada e X_{t+1} é a previsão um passo à frente.

Para os modelos Legendre e Svensson, o log-retorno de 1 dia será escrito:

$$r_{t+1}(\tau) = \ln \frac{P_{t+1}(\tau)}{P_t(\tau)} = -\mathbf{F}(\tau)[\alpha_{t+1} - \alpha_t],$$

sendo que no modelo de espaços de estados, α_{t+1} pode ser substituído pela estimativa de um passo à frente proporcionada pelo Filtro de Kalman.

A matriz de covariâncias Σ ($k \times k$) entre os vencimentos i e j é dada, no instante $t+h$ por:

$$\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(r_{t+h}(\tau_i), r_{t+h}(\tau_j)) = h \mathbf{F}(\tau_i) \Sigma_\alpha \mathbf{F}(\tau_j)', \quad (4.3)$$

em que Σ_α ($m \times m$) é a matriz de covariâncias entre os fatores latentes estimada do modelo e h corresponde ao horizonte desejado no cálculo de VaR.

De forma análoga, a matriz de covariâncias entre vencimentos é escrita para o modelo CIR:

$$\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(r_{t+h}(\tau_i), r_{t+h}(\tau_j)) = h B(\Psi, \tau_i) \Phi(x_{t+h}, \Psi) B(\Psi, \tau_j),$$

em que $\Phi(x_{t+h}, \Psi)$ é a função de covariância da taxa de juros instantânea linear em x_{t+h} , definida em (2.17).

Uma carteira de títulos pré-fixada é composta pela distribuição destes títulos nos mais diversos vencimentos. O título pré-fixado é negociado com deságio sobre o valor de face, sendo assim, a taxa de rendimento é conhecida no momento de compra do contrato.

O valor da carteira no tempo t pode ser escrito como a média ponderada dos preços dos títulos correspondentes a cada vencimento:

$$V_t^\theta = \sum_{i=1}^k \theta_i P_t(\tau_i).$$

A variação de preço do valor da carteira de títulos com k vencimentos pode ser escrita da seguinte forma:

$$V_{t+h}^\theta - V_t^\theta = \theta_1 P_t(\tau_1) \cdot \left(\frac{P_{t+h}(\tau_1)}{P_t(\tau_1)} - 1 \right) + \dots + \theta_k P_t(\tau_k) \cdot \left(\frac{P_{t+h}(\tau_k)}{P_t(\tau_k)} - 1 \right).$$

Utilizando a aproximação $\ln(x/y) \cong x/y - 1$ para x e y próximos, a variação do preço da carteira em h dias, é reescrita como uma combinação linear entre os k log-retornos:

$$V_{t+h}^\theta - V_t^\theta \cong \mathbf{c}(t, \theta) \cdot \mathbf{r}_{t+h}(\tau)', \quad (4.4)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t, \theta) &= [\theta_1 P_t(\tau_1), \dots, \theta_m P_t(\tau_k)], \\ \mathbf{r}_{t+h}(\tau) &= [r_{t+h}(\tau_1), \dots, r_{t+h}(\tau_k)]. \end{aligned}$$

A partir da estrutura do modelo de espaços de estados apresentada em (2.1), o vetor de estados α_t segue uma distribuição normal m -variada. Desta forma, o vetor de retornos, definido como uma combinação linear da diferença entre vetores de estados para cada vencimento $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, seguirá uma distribuição normal k -variada.

$$\mathbf{r}_{t+h}(\tau) \sim N_k(-\mathbf{F}(\tau)(\alpha_{t+h} - \alpha_t), \Sigma), \quad (4.5)$$

em que Σ é a matriz de covariâncias dos log retornos obtida em (4.3).

Desta forma, a variação do valor da carteira em h dias, sendo uma combinação linear do vetor de log-retornos, seguirá uma distribuição Normal univariada:

$$V_{t+h}^\theta - V_t^\theta \sim N(\mathbf{c}(t, \theta)(-\mathbf{F}(\tau)(\alpha_{t+h} - \alpha_t)), \mathbf{c}(t, \theta) \Sigma \mathbf{c}(t, \theta)'). \quad (4.6)$$

O valor em risco da carteira é calculado como sendo o ξ -quantil da distribuição (4.6):

$$P(V_{t+h}^\theta - V_t^\theta \leq VaR) = \xi.$$

Fazendo as transformações devidas a uma normal padrão, o VaR de uma posição comprada será dado por:

$$VaR = \mathbf{c}(t, \theta)(-\mathbf{F}(\tau)(\alpha_{t+h} - \alpha_t)) + \Phi^{-1}(\xi) \sqrt{\mathbf{c}(t, \theta) \Sigma \mathbf{c}(t, \theta)'}. \quad (4.7)$$

4.2 Simulação do VaR em Carteiras pré-fixadas

Nesta seção serão apresentados os resultados da simulação do VaR de horizonte 1 dia, obtido da forma paramétrica, aplicado à diversas configurações de carteira pré-fixadas para os três modelos estudados.

Os resultados serão analisados quanto aos seguintes aspectos:

- valor do VaR de 1 dia para cada modelo, CIR, Polinômios de Legendre e Exponenciais de Svensson;
- efeitos de diversificação de carteira entre os distintos vencimentos sobre o valor do VaR;
- relação entre risco e retorno para a carteira pré-fixada no contexto geral.

As carteiras foram simuladas a partir da combinação de diversas proporções entre vencimentos, considerando como restrição básica que a soma dos pesos deve ser igual a 100%. A partir dessas, é calculado o VaR de quantil 99% e o retorno esperado da carteira definido por:

$$Retorno = \sum_{i=1}^k \theta_i \left(\frac{VF - P_t(\tau_i)}{P_t(\tau_i)} \right),$$

em que VF é o valor de face do título, ou seja, a quantia a ser recebida no vencimento do contrato.

Será considerado como referência o título LTN (Letras do Tesouro Nacional) para a composição da carteira, um título brasileiro pré-fixado, cujo valor de face (VF) definido no contrato é fixado em mil reais. A simulação será aplicada a uma carteira hipotética de um milhão de reais e os percentuais entre vencimentos com uma partição de 10%, ou seja, (10%, 20%, ..., 90%, 100%). Todas as combinações de carteira nos diversos vencimentos foram testadas através desse vetor de percentuais.

4.2.1 Modelo CIR

Conforme a seção anterior, a estimativa do VaR de quantil ξ é definida por três componentes: o retorno médio, a confiança desejada e a matriz de covariâncias entre os vencimentos. Esta última possui um peso extremamente importante na avaliação do VaR, pois definirá características de alocação de carteira e a própria magnitude da medida. A partir disso, é válido analisar a forma da matriz de covariâncias e seus componentes.

Na Tabela 4.1 é apresentada a estimativa da matriz de covariâncias entre vencimentos obtida através do modelo CIR para o horizonte de 1 dia. Nesta, pode-se observar que a magnitude da estimativa é proporcional ao aumento do horizonte de vencimento.

	1D	1M	3M	6M	9M	12M
1D	8.254	8.453	8.869	9.494	10.120	10.745
1M	8.453	8.655	9.082	9.722	10.363	11.003
3M	8.869	9.082	9.529	10.200	10.873	11.545
6M	9.494	9.722	10.200	10.920	11.640	12.359
9M	10.120	10.363	10.873	11.640	12.407	13.174
12M	10.745	11.003	11.555	12.359	13.174	13.988

Tabela 4.1: Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-7}$ - Modelo CIR

A Figura 4.1 apresenta os resultados da simulação de inúmeras distribuições de carteira versus o valor do VaR. Para exemplificar, o vencimento de 1 dia, quando alocado em 100% da carteira, corresponderá ao menor valor do VaR, ao contrário do vencimento de 1 ano. Além disso, cabe salientar a simetria do efeito de vencimentos nos números de VaR, onde a alocação em vencimentos de médio prazo estará relacionado ao valor médio de VaR. Como resumo, no modelo CIR, a alocação da carteira em períodos de curto prazo estará relacionada a um baixo valor de VaR, médio prazo ao valor de VaR médio e de longo prazo a maiores valores de VaR.

Na Figura 4.2 são relacionados todos os retornos esperados, em percentual, das carteiras simuladas e os respectivos valores de VaR para uma carteira de 1 milhão. O intervalo de VaR simulado para as carteiras simuladas está entre 2182 a 2841 reais pois os valores dos desvios-padrão são da ordem de 10^{-7} . Pode-se observar uma relação estritamente linear entre o valor de risco e retorno. Além disso, para dado um valor de VaR, qualquer combinação de vencimentos terá retorno equivalente.

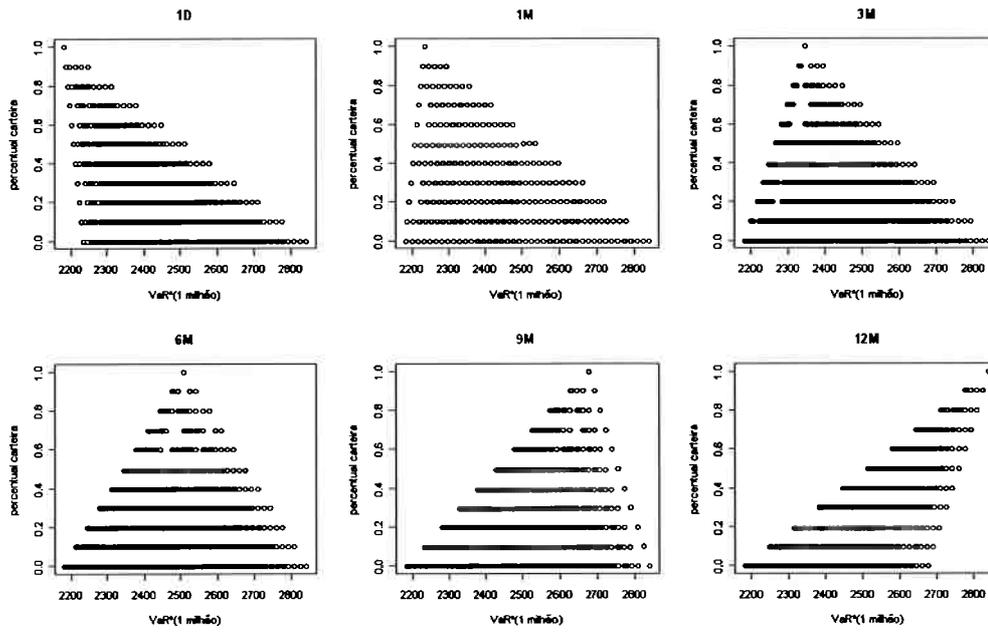


Figura 4.1: Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo CIR

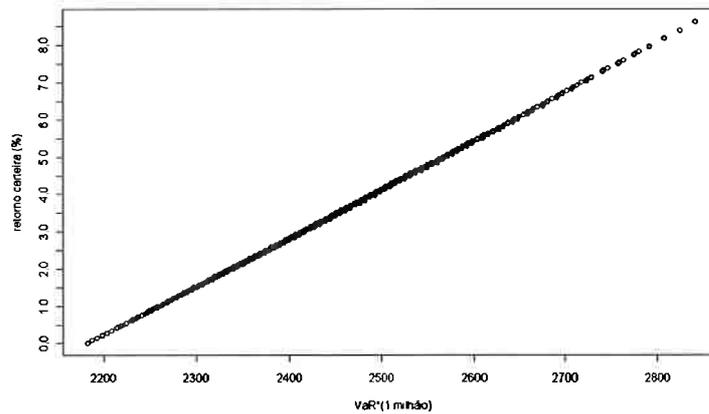


Figura 4.2: Relação de risco - retorno - Modelo CIR

4.2.2 Modelo Legendre

A matriz de covariâncias estimada do modelo Legendre para o horizonte de 1 dia, dada na Tabela 4.2, possui valores de desvio com magnitudes de 10^{-9} , menores comparados ao modelo CIR de 10^{-7} , o que resulta em valores de VaR inferiores. Além disso, há um resultado contra-intuitivo onde os valores de volatilidade diminuem conforme aumenta o vencimento, fato que será refletido sobre as simulações de carteira.

	1D	1M	3M	6M	9M	12M
1D	4.582	4.218	3.525	2.671	2.037	1.625
1M	4.218	3.910	3.316	2.564	1.976	1.553
3M	3.525	3.316	2.903	2.346	1.867	1.465
6M	2.671	2.564	2.346	2.040	1.756	1.496
9M	2.037	1.976	1.867	1.756	1.708	1.722
12M	1.625	1.553	1.465	1.496	1.722	2.143

Tabela 4.2: Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-9}$ - Modelo Legendre

Na Figura 4.3 estão os efeitos de alocação de carteira sobre o valor do VaR. Nesta, é apresentado o sentido inverso na alocação, onde vencimentos de longo prazo geram menor risco, enquanto os de curto prazo estão relacionados a maior risco.

O gráfico de relação de risco-retorno apresentado na Figura 4.4 também apresenta uma relação inversa de risco-retorno, uma consequência da própria alocação da carteira apresentada no gráfico anterior. Os pontos de menor risco e maior retorno correspondem a alocação nos vencimentos de longo prazo, o que também é observado sobre desenho desta relação, o qual acompanha o gráfico de proporções do vencimento de 1 ano. O valor do VaR simulado para as carteiras passa a um intervalo de 96 a 157 reais para uma carteira de 1 milhão, valor inferior ao avaliado no modelo CIR.

Uma hipótese a ser testada é enquanto os demais modelos foram ajustados utilizando um período menor da série de dados, o modelo Legendre contempla todo o histórico: Jan/02 a Set/09, período que engloba diversas nuances da economia e que poderiam afetar nas métricas da matriz de covariâncias entre vencimentos. Para testar essa hipótese, o modelo será re-estimado sob o horizonte mais recente e serão analisados novamente os resultados.

Na Tabela 4.3 é apresentada a estimativa da matriz de covariâncias para o modelo Legendre estimado sobre um horizonte reduzido de dados: Out/04 a Set/09. Observa-se que o fato de se estimar utilizando um horizonte distinto de dados proporciona, uma mudança nas estimativas da

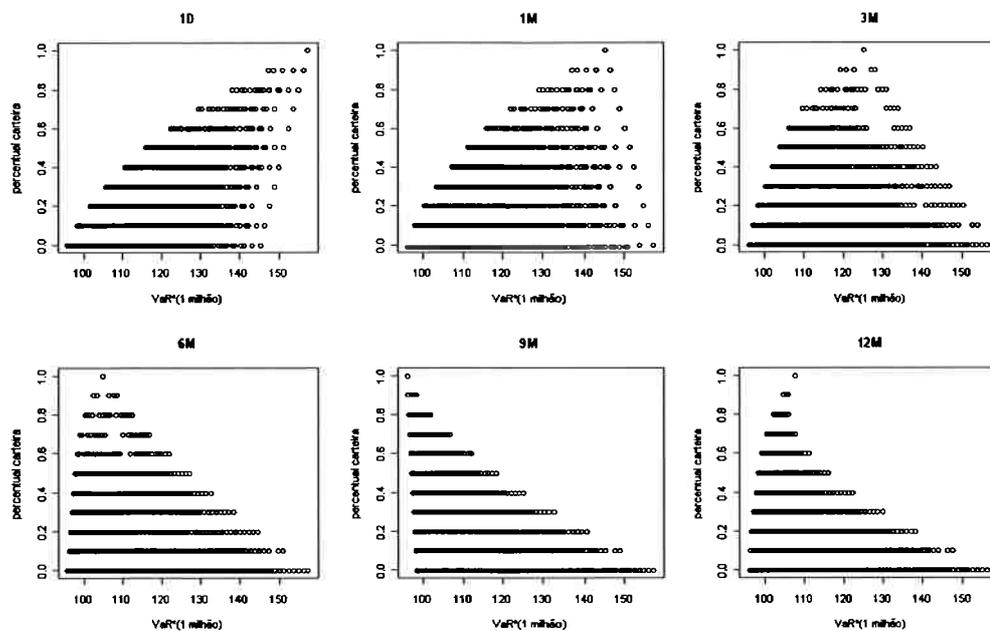


Figura 4.3: Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Legendre

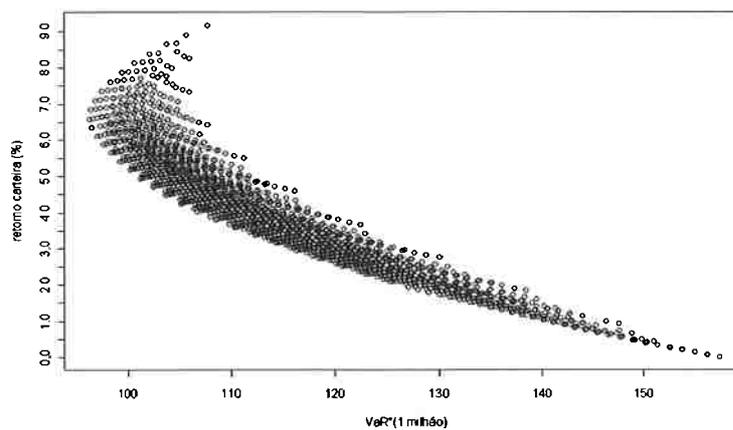


Figura 4.4: Relação de risco - retorno - Modelo Legendre

covariância. Porém os valores de estimativas obtidos, não apresentam uma relação proporcional com o aumento do vencimento, pois há altos valores de variâncias e covariâncias nos vencimentos de curto prazo, 1 dia a 3 meses, e também no longo prazo, 9 e 12 meses. Ou seja, os resultados de alocação irão apresentar maior risco nestas duas pontas.

	1D	1M	3M	6M	9M	12M
1D	29.645	26.685	21.232	14.994	11.083	9.500
1M	26.685	24.459	20.277	15.255	11.733	9.711
3M	21.232	20.277	18.351	15.666	13.223	11.025
6M	14.994	15.255	15.666	15.932	15.778	15.205
9M	11.083	11.733	13.223	15.778	18.716	22.036
1Y	9.500	9.711	11.025	15.205	22.036	31.518

Tabela 4.3: Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-11}$ - Modelo Legendre re-estimado

Na Figura 4.5 estão os gráficos de alocação entre vencimentos e respectivos valores de VaR para uma carteira de 1 milhão, com intervalo compreendido entre 29 e 41 reais. O valor do VaR começa alto para vencimento de 1 dia e vai decaindo conforme a alocação é mais concentrada nos vencimentos de médio prazo e passa a aumentar novamente para os vencimentos de longo prazo.

Na relação risco-retorno apresentada na Figura 4.6, as carteiras com alocação mais concentrada no médio prazo indicam menores valores de VaR e retorno maiores que a alocação em vencimentos de curto prazo, onde é indicado um VaR alto e retorno baixo.

Enfim, o modelo Legendre apesar de apresentar uma maior flexibilidade quanto à estimação, pois consegue agregar todo o histórico de dados e uma ótima qualidade de ajuste, aparentemente não consegue manter uma relação intuitiva de risco-retorno.

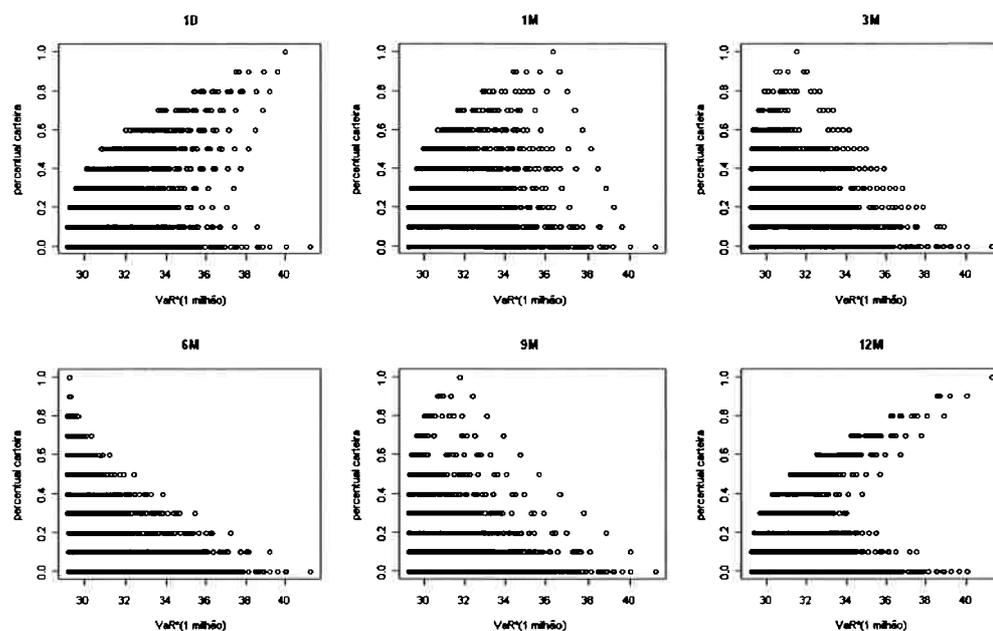


Figura 4.5: Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Legendre re-estimado

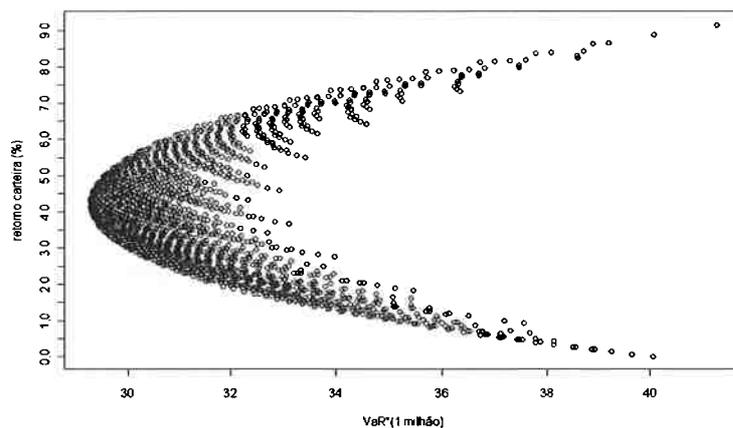


Figura 4.6: Relação de risco - retorno - Modelo Legendre re-estimado

4.2.3 Modelo Svensson

A estimativa da matriz de covariâncias entre vencimentos para o horizonte de 1 dia, apresentada na Tabela 4.4, possui valores crescentes com relação ao vencimento, o que vai gerar uma coerência de risco-retorno similar ao modelo CIR. Porém, os valores de variância/covariância apresentam magnitudes menores, da ordem de 10^{-10} , o que irá gerar um VaR menor que o obtido pelo modelo CIR.

	1D	1M	3M	6M	9M	12M
1D	1.657	1.730	1.825	1.858	1.829	1.778
1M	1.730	2.809	4.530	5.901	6.487	6.661
3M	1.825	4.530	8.900	12.494	14.136	14.733
6M	1.858	5.901	12.494	18.029	20.664	21.716
9M	1.829	6.487	14.136	20.664	23.866	25.227
1Y	1.778	6.661	14.733	21.716	25.227	26.791

Tabela 4.4: Estimativa matriz de covariâncias entre vencimentos $\times 10^{-10}$ - Modelo Svensson

Na Figura 4.7 os resultados de alocação são semelhantes ao modelo CIR quanto ao prazo versus o valor do VaR. Também cabe observar que devido à magnitude dos valores de covariância, o VaR obtido no modelo Svensson é relativamente menor quando comparado ao VaR do modelo CIR, para uma carteira de 1 milhão está compreendido em um interlado entre 30 e 120 reais. Outro fato observado é a perda da linearidade sobre a alocação, sem perda de sentido na medida de risco, indicando que há a possibilidade de combinações com vencimentos de maior prazo (maior retorno) sem grandes prejuízos ao VaR.

Na Figura 4.8 está apresentada a relação de risco e retorno das carteiras simuladas. Nesta, observa-se a relação de que quanto maior for a alocação da carteira em vencimentos de longo prazo, haverá um maior risco ou maior valor de VaR. Entretanto há a possibilidade de encontrar carteiras de maior rentabilidade para um mesmo valor de VaR.

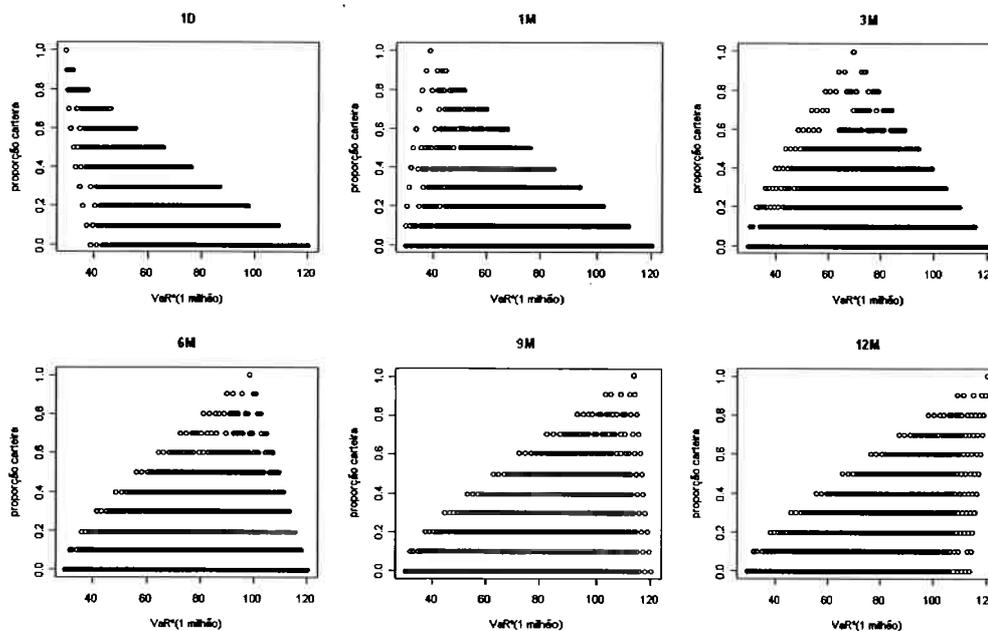


Figura 4.7: Efeitos de diversificação da carteira entre vencimentos sobre o VaR - Modelo Svensson

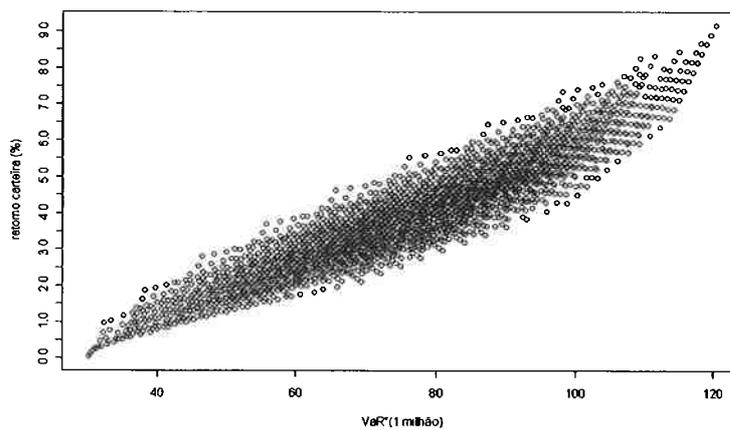


Figura 4.8: Relação de risco - retorno - Modelo Svensson

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo comparativo entre ajustes de modelos de espaços de estados para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira. Foram escolhidos o modelo CIR, o qual considera a condição de não-arbitragem intrínseca à sua estrutura e modelos de fatores latentes para representar a dinâmica da estrutura a termo sob a forma polinomial de Legendre e exponencial de Svensson. Os resultados de ajuste foram aplicados à medida de VaR (*Value at Risk*) e avaliada a relação de risco-retorno sobre uma carteira de títulos pré-fixada.

Nota-se que os modelos de espaços de estados garantem em geral uma boa qualidade de ajuste pois tratam a informação de forma dinâmica. Para modelagem de fatores de mercado, este atributo torna-se um diferencial.

Com relação aos aspectos de modelagem encontrados neste trabalho, os modelos CIR e Svensson, os quais além dos parâmetros dinâmicos possuem alguns parâmetros estáticos, não foi possível ajustá-los para todo horizonte de dados, pois como há vários regimes de médias em distintos períodos da economia, os modelos não conseguem agregá-los totalmente com uma única estimativa desses parâmetros. O modelo Legendre por não possuir parâmetros estáticos foi o único modelo possível para ajuste a todo histórico.

O modelo de exponenciais de Svensson consiste em uma generalização das exponenciais de Nelson e Siegel, em que mais uma componente de curvatura e um parâmetro de decaimento λ_2 são incluídos. Este último também foi testado para ajustar o conjunto de dados, mas os resultados não foram satisfatórios pois não foi encontrada uma estrutura de matriz hessiana na estimação que fosse invertível.

Em relatos anteriores há uma crítica ao modelo de Nelson e Siegel por não apresentar bons resultados de ajuste para dados de taxas de juros com comportamento mais sofisticado.

Na análise do VaR e alocação de carteiras para os modelos avaliados, encontramos alguns pontos a serem comentados. O modelo CIR garante resultados mais altos de VaR, porém possui uma relação estritamente linear entre risco e retorno, não possibilitando que para um mesmo valor de VaR, haja combinações de carteira que garantam retornos maiores. O modelo Legendre, apesar de garantir um ótimo ajuste para todo horizonte de dados, não proporcionou uma relação de risco-retorno estritamente crescente entre os vencimentos. Por fim, o modelo Svensson além de conservar a intuição na relação de risco-retorno, possui estimativas de VaR menores quando comparados ao modelo CIR e possibilidade de encontrar combinações de carteira de maior retorno fixado um valor de VaR.

5.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como sugestões para pesquisas futuras estão o tratamento dinâmico dos parâmetros atualmente estáticos dos modelos CIR e Svensson, flexibilidade que poderá proporcionar que o ajuste seja feito a horizontes de dados de maior extensão. Citamos o trabalho de Laurini e Hotta (2009) que propõe um tratamento generalizado de fatores latentes para curvas de juros multimercados, através de uma abordagem Bayesiana via MCMC (Markov Chain Monte Carlo).

Em Christensen et al. (2008) é apresentada uma abordagem do modelo Svensson com condição de não-arbitragem, a qual também pode ser aplicada à série de taxas de juros, além de diversos outros modelos existentes para descrever a dinâmica de curvas de taxas.

Outras aplicações passíveis dessa modelagem seria o estudo de outros fatores de mercado que dependem diretamente da dinâmica da taxa de juros, como exemplo a taxa TR (Taxa Referencial) que rege a remuneração de depósitos de poupança e também é aplicada em contratos de crédito imobiliário.

Referências Bibliográficas

- Almeida, C. I. R. (2004), "Time-varying Risk Premia in emerging markets: Explanation by a multi-factor affine term structure," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7, 919–947. 3
- Chen, R. e Scott, L. (1992), "Pricing Interest Rate Options in a Two Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure," *Review of Financial Studies*, 5, 613–636. 2, 3, 11
- Christensen, J., Diebold, F. X., e Rudebusch, G. D. (2008), "An Arbitrage-free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model," *NBER Working Paper Series*. 52
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., e Ross, S. A. (1985), "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, 53, 385–407. v, vii, 2, 3, 11
- Dothan, U. L. (1978), "On The Term Structure of Interest Rates," *J. Financial Economics*, 6, 59–69. 2
- Duan, J. e Simonato, J. (1999), "Estimating exponential-affine term structure models by kalman filter," *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 13, 111–135. 3
- Duarte Jr., A. M., Fernandes, C. A. C., e Almeida, C. I. R. (2003), "A Generalization of Principal Component Analysis for Non-Observable Term Structures in Emerging Markets," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 6(8), 885–903. 3
- Duffie, J. e Kan, R. (1996), "A yield-factor model of interest rates," *Mathematical Finance*, 6, 379–406. 2, 12
- Durbin, J. e Koopman, S. J. (2001), *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford: Oxford University Press. 2, 8, 9
- Eric Zivot, J. W. e Koopman, S. J. (2003), *State Space Modeling in Macroeconomic and Finance Using SsfPack for S+Finmetrics*, University of Washinton, Seattle. Ronin Capital LLC, Chicago. Free University, Amsterdam. 21

- Harvey, A. C. (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge: Cambridge University Press. 2, 9
- Kalman, R. E. (1960), "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Trans. ASME J. Basic Eng*, 82, 35–45. 8
- Laurini, M. P. e Hotta, L. K. (2009), "Modelos de Fatores Latentes Generalizados para Curvas de Juros em Múltiplos Mercados," *Prêmio Andima de Renda Fixa - Artigos Científicos*, 8–80. 52
- Legendre, A. M. (1785), "Sur l'Attraction des Sphéroïdes," *Mémoires Mathématiques et Physiques Présentés à l'Académie Royal Des Sciences*, 10. v, vii, 3, 11
- Litterman, R. e Scheinkman, J. A. (1991), "Common Factors Affecting Bond Returns," *Journal of Fixed Income*, 1, 51–61. 3
- Nelson, C. R. e Siegel, A. F. (1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves," *Journal of Business*, 60, 473–489. v, vii, 3, 11, 15, 31
- Svensson, L. E. O. (1994), "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates," *NBER Working Paper Series*. v, vii, 15
- Vasicek, O. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure," *J. Financial Economics*, 5, 177–188. 2, 3, 11
- Vieira Neto, C. (1999), *Modelagem da estrutura a termo de taxa de juros e avaliação de contratos de derivativos*, Tese de Doutorado, São Paulo: FEA-USP. 39
- West, M. e Harrison, J. (1997), *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, New York: Springer. 2