Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés em modelos não lineares da família exponencial

Tiago Maia Magalhães

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística
Orientadora: Profa. Dra. Denise Aparecida Botter

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2011

Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés em modelos não lineares da família exponencial

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Tiago Maia Magalhães em 30/03/2011.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Denise Aparecida Botter (orientadora) - IME-USP
- Profa. Dra. Lúcia Pereira Barroso - IME-USP
- Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro - UFRPE

Agradecimentos

Esta dissertação é o resultado do meu esforço e da minha dedicação em concluí-la. Mas eu estaria sendo injusto se afirmasse que fiz tudo sozinho. Por isso, utilizarei este singelo espaço para agradecer todas as pessoas que contribuíram com este trabalho.

Primeiramente, agradeço aos meus pais Mauro e Liana, duas das pessoas mais importantes da minha vida, que sempre fizeram o possível e o impossível para que eu pudesse ser feliz, amo vocês!

À minha querida irmã Wládia, por sua "mania" de querer me ajudar, até mesmo quando não desejava sua ajuda. À minha avó Zélia, ela que é sincera em seus sentimentos e verdadeira em seus atos. Obrigado voinha pelos seus conselhos e também por ter rezado por mim!

Ao Tio Dode e à Tia Rita, por terem sempre me acolhido bem, nas minhas "fugas" à Uberlândia e ao Marcelo, por ter sido um irmão durante o tempo que estive por lá. Ao Tio Victor e seus ensinamentos dos quais não posso transcrever aqui e Abel, por seu apoio e convites para eu visitar o Rio.

À professora Denise e à professora Mônica por uma orientação da qual eu não tenho o que reclamar, a confiança que tiveram em mim e a tranquilidade que elas demonstravam durante as nossas reuniões me faziam acreditar que as coisas dariam certo.

Ao professor Mauricio por sua atenção durante a minha graduação e por suas histórias que lembro-me até hoje. De maneira geral, sou grato à todos do DEMA-UFC, em especial, aos professores Júlio, Robson e Vicente.

Aos meus amigos do IME-USP, que tornaram o meu mestrado muito mais agradável: Emerson, Gustavo, Isabel, Luciana e Manuel, que estava sempre disposto a ir em um jogo do Palmeiras. Mariana, Mauricio Mazzo e Michel, com seus bons conselhos, mas que quase nunca segui. Mirian e Rafael Farias, que me ensinou várias "técnicas". Rafael Mara, Renato "Uh! Lady" Gava, Roberto, Tadeu e Thiago Feitosa.

À minha inestimável amiga de graduação Francinete, por sua amizade e alegria. E também aos meus outros colegas de graduação, dos quais posso destacar: Humberto, Jáder, Joice, Lidia e Suzana.

Aos meus amigos da Escola Sonho de Talita, dos Colégio Gustavo Braga, do Colégio Juvenal de Carvalho e da nostálgica Rua Waldery Uchôa, pelas experiências, hoje, grandes recordações.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

E à todos os outros que, de alguma forma, acrescentaram nesta minha caminhada mas que eu acabei esquecendo de mencionar aqui.

Resumo

Neste trabalho, encontramos, com em base Peers e Iqbal (1985), a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do estimador de máxima verossimilhança do parâmetro β em modelos não lineares da família exponencial. Mostramos que a matriz resultante é assimétrica e propusemos uma correção na expressão de Peers e Iqbal que a torna simétrica. Para esses modelos, obtivemos, também, a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do estimador de máxima verossimilhança de β corrigido pelo viés de ordem n^{-1}. Com base na matriz obtida, fizemos modificações no teste de Wald. Em todos os resultados apresentados consideramos o parâmetro de dispersão conhecido. Avaliamos os resultados encontrados por meio de estudos de simulação de Monte Carlo.

Palavras-chave: Família exponencial, matriz de covariância até ordem n^{-2}, modelo não linear.

Abstract

In this work, we find, based in Peers e Iqbal (1985), the second-order covariance matrix of the maximum likelihood estimator of the parameter β in exponential family nonlinear models. We show that the resulting matrix is asymmetric and propose a correction in the expression of Peers and Iqbal which makes it symmetrical. For these models, we also derive the second-order covariance matrix of the bias-corrected maximum likelihood estimator of the parameter β. Based on this matrix, we make modifications in the Wald test. For all results, use consider a known dispersion parameter. We evaluate the results by Monte Carlo simulation.

Keywords: Exponential family, second-order covariance matrix, nonlinear models.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os modelos de regressão tentam explicar uma variável resposta através de covariáveis. Por constituirem uma ferramenta estatística poderosa, eles são muito utilizados em diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, engenharia, economia, agronomia e na área de saúde.

Inicialmente, assumia-se que a variável resposta em estudo seguia uma distribuição normal. Caso não fosse, tentava-se alguma transformação para obter a normalidade. Uma grande contribuição foi dada por Nelder e Wedderburn (1972), que estenderam a teoria de regressão para os casos em que a distribuição da variável resposta pertence à família exponencial, criando assim, a classe dos modelos linerares generalizados (MLG). Cordeiro e Paula (1989) estenderam a classe dos modelos linerares generalizados, permitindo que o componente sistemático não se restrinja a uma função linear dos parâmetros. Temos, então, a classe dos modelos não lineares da família exponencial (MNLFE).

Os métodos para análise de um MLG e de um MNLFE dependem fortemente de propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) quando o tamanho da amostra n tende para ∞. Algumas tentativas têm sido realizadas para desenvolver uma teoria assintótica de segunda ordem com o objetivo de obter procedimentos melhores de inferência por verossimilhança. Para os MLG, Cordeiro e McCullagh (1991) obtiveram o viés de ordem n^{-1} dos EMV dos parâmetros que modelam a média e Cordeiro (2004) obteve a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} destes estimadores, supondo o parâmetro de dispersão conhecido. Ele mostrou que, para amostras pequenas a moderadas, as covariâncias até ordem n^{-2} ficam mais próximas das covariâncias amostrais, justificando assim, sua utilização. Para o caso em que o parâmetro de dispersão é desconhecido, Cordeiro *et al.* (2006), também, mostraram que as covariâncias até ordem n^{-2} são mais próximas das covariâncias amostrais do que as de ordem n^{-1}, nos casos de tamanho amostral pequeno.

Trabalhos semelhantes foram feitos para os MNLFE, como o de Paula (1992), que encontrou o viés de ordem n^{-1}, e o de Cordeiro e Santana (2008), que obtiveram a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} para os EMV dos parâmetros que modelam a média, com parâmetro de dispersão conhecido. Além disso, Rocha *et al.* (2010) estenderam o resultado de Cordeiro e Santana (2008) para os modelos de dispersão considerando, também, o parâmetro de dispersão conhecido.

Cavalcanti (2009) obteve a matriz de covariâncias assintótica até ordem n^{-2} dos EMV corrigidos pelo viés de ordem n^{-1} para os MLG, considerando o parâmetro de dispersão conhecido. O objetivo deste trabalho é estender os resultados de Cavalcanti (2009) para os MNLFE.

1.1 Considerações preliminares

Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade (ou função de probabilidade) dada por

$$\pi(y_\ell; \theta_\ell, \phi) = \exp\{\phi[y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)] + a(y_\ell, \phi)\}, \ell = 1, \ldots n, \tag{1.1}$$

em que $b(\cdot)$ e $a(\cdot,\cdot)$ são funções conhecidas, $\mathrm{E}(Y_\ell) = \mu_\ell = db(\theta_\ell)/d\theta_\ell$ é a média, $\mathrm{Var}(Y_\ell) = \phi^{-1}V_\ell$ é a variância de Y_ℓ, sendo $V_\ell = d\mu_\ell/d\theta_\ell$ chamada de função de variância e $\theta_\ell = \int V_\ell^{-1}d\mu_\ell = q(\mu_\ell)$ é uma função um a um de μ_ℓ, conhecida, que varia em um subconjunto de $\Re$. Os parâmetros θ e $\phi > 0$ em (1.1) são chamados de parâmetro natural e de precisão, respectivamente. O inverso de ϕ é denominado parâmetro de dispersão. Para as distribuições da família exponencial bi-paramétrica com parâmetros naturais ϕ e $\phi\theta_\ell$, a função $a(y_\ell, \phi)$ em (1.1) pode ser escrita como $a(y_\ell, \phi) = \phi c(y_\ell) + d_1(\phi) + d_2(y_\ell)$.

Os modelos não lineares de família exponencial têm um componente sistemático, $g(\mu_\ell) = \eta_\ell = f(x_\ell; \beta)$, em que $g(\cdot)$ é uma função de ligação biunívoca, diferenciável e conhecida, $f(x_\ell; \beta)$ é uma função conhecida, contínua e diferenciável, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$, $p < n$, é um vetor de parâmetros desconhecidos a ser estimado e x_ℓ é um vetor $q \times 1$ de variáveis explanatórias conhecidas associadas com a ℓ-ésima resposta observada. Consideramos que diferentes valores de β implicam em diferentes valores de η. Isso garante que a matriz de derivadas $\widetilde{X} = \widetilde{X}(\beta) = \partial\eta/\partial\beta$ tenha posto p para todo β.

O logaritmo da função de verossimilhança para β, denotado por $l(\beta)$, é dado por

$$l(\beta) = \sum_{\ell=1}^{n} \{\phi[y_\ell\theta_\ell - b(\theta_\ell)] + a(y_\ell, \phi)\}. \tag{1.2}$$

A função escore é obtida derivando (1.2) em relação a β, sendo dada por

$$\mathrm{U}_\beta = \phi\widetilde{X}^\top W^{1/2}V^{-1/2}(y - \mu), \tag{1.3}$$

em que, $W = \mathrm{diag}\{w_1, \ldots, w_n\}$, $w_\ell = (d\mu_\ell/d\eta_\ell)^2/V_\ell$, $V = \mathrm{diag}\{V_1, \ldots, V_n\}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top$.

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$\mathrm{K}_{\beta,\beta} = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2 \mathrm{L}(\beta)}{\partial\beta\partial\beta^\top}\right] = \phi\widetilde{X}^\top W\widetilde{X}. \tag{1.4}$$

Para encontrarmos o EMV ($\hat{\beta}$) de β temos que recorrer a processos iterativos, como o método quase-Newton BFGS com derivadas analíticas (ver Nocedal e Wright (2006)), utilizado neste trabalho.

Com base em Fahmeir e Kaufmann (1985), temos que a distribuição de $\hat{\beta}$ é assintoticamente normal, com média β e matriz de covariâncias de ordem n^{-1} dada pela inversa da matriz de informação de Fisher, $\mathrm{K}_{\beta,\beta}^{-1}$. Quando ϕ é desconhecido, ele pode ser substituído por uma estimativa consistente.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é encontrar a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro β corrigido pelo viés de ordem n^{-1} nos modelos não lineares da família exponencial.

1.3 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Para chegarmos ao nosso objetivo, fizemos uma revisão bibliográfica do que havia sido feito até o momento. Durante essa revisão observamos que a expressão da matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV para o parâmetro β nos MNLFE, apresentada por Cordeiro e Santana (2008) e Rocha *et al.* (2010), estava incompleta. A expressão da matriz de covariâncias de segunda ordem apresentada nesses dois artigos possui menos parcelas do que realmente ela deveria ter. Por conta disto, aproveitamos este trabalho para corrigir essa expressão.

- Por meio de estudos de simulação de Monte Carlo, mostramos que a matriz de covariâncias de segunda ordem encontrada é assimétrica. Como essa matriz foi obtida a partir de Peers e Iqbal (1985) propusemos então, uma correção no resultado desses autores, que torna simétrica a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV de β em MNLFE.

- Obtivemos a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV para o parâmetro β corrigido pelo viés de ordem n^{-1} nos MNLFE. Mostramos, por simulação, que esta matriz está mais próxima da matriz de covariâncias amostral do EMV de β corrigido pelo viés. Isso nos permitiu propor uma modificação no teste de Wald que faz com que seu tamanho empírico fique mais próximo do nível de significância.

1.4 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos e um Apêndice.

No Capítulo 2, obtemos a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV para o parâmetro β nos MNLFE, considerando o parâmetro de dispersão conhecido, corrigindo a expressão obtida por Cordeiro e Santana (2008) e Rocha *et al.* (2010). Mostramos que ela não é simétrica, identificamos as parcelas assimétricas dessa expressão e propomos uma correção no resultado de Peers e Iqbal (1985). Por simulação, analisamos o desempenho da matriz de covariâncias obtida até ordem n^{-2}.

No Capítulo 3, encontramos a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV do parâmetro β corrigido pelo viés de ordem n^{-1} nos MNLFE, também, considerando o parâmetro de dispersão conhecido. Por simulação, mostramos que as covariâncias até ordem n^{-2} do EMV de β corrigidas pelo viés de ordem n^{-1} estão mais próximas das covariâncias amostrais. Com este resultado propomos modificações no teste de Wald utilizando a matriz obtida neste capítulo e a matriz do Capítulo 2 e, por simulação, comparamos os tamanhos empíricos dos testes de Wald modificados com alguns níveis de significância.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos algumas considerações finais. Apresentamos, no Apêndice A, cumulantes que não foram utilizados neste trabalho, mas que podem ser úteis em pesquisas futuras.

Capítulo 2

Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro β em modelos não lineares da família exponencial

Neste capítulo, obtemos com base no resultado de Peers e Iqbal (1985), a matriz de covariância até ordem n^{-2} do EMV para o parâmetro β nos MNLFE, considerando o parâmetro de dispersão conhecido. Mostramos que essa matriz não é simétrica e propomos uma correção no resultado de Peers e Iqbal (1985) que a torna simétrica. Por meio de estudos de simulação de Monte Carlo, avaliamos o desempenho da matriz de covariâncias proposta.

2.1 Resultado de Peers e Iqbal (1985)

Seja $l(\beta)$ o logaritmo da função de verossimilhança para um vetor de parâmetros, β, de dimensão p. Sejam

$$U_a = \partial l(\beta)/\partial\beta_a, \quad U_{ab} = \partial^2 l(\beta)/\partial\beta_a\partial\beta_b,$$

$$U_{abc} = \partial^3 l(\beta)/\partial\beta_a\partial\beta_b\partial\beta_c, \quad U_{abcd} = \partial^4 l(\beta)/\partial\beta_a\partial\beta_b\partial\beta_c\partial\beta_d,$$

em que os índices a, b, c e d variam de 1 a p. Denotamos os cumulantes conjuntos das derivadas do logaritmo da função de verossimilhança por

$$\kappa_{ab} = \mathrm{E}(U_{ab}), \quad \kappa_{a,b} = \mathrm{E}(U_a U_b), \quad \kappa_{abc} = \mathrm{E}(U_{abc}), \quad \kappa_{a,bc} = \mathrm{E}(U_a U_{bc}), \quad \kappa_{bcd}^{(a)} = \partial\kappa_{bcd}/\partial\beta_a,$$

$$\kappa_{a,bcd} = \kappa_{bcd}^{(a)} - \kappa_{abcd}, \quad \kappa_{a,bc,d} = \mathrm{E}\left(U_a U_{bc} U_d\right) - \kappa_{a,d}\kappa_{bc}, \quad \kappa_{ac,bd} = \mathrm{E}\left(U_{ac} U_{bd}\right) - \kappa_{ac}\kappa_{bd}.$$

Todos os κ's referem-se a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem n. A matriz de informação de Fisher, $\mathrm{K}_{\beta,\beta}$, tem elementos $\kappa_{a,b} = -\kappa_{ab}$. Considere, também, $\kappa^{a,b} = -\kappa^{ab}$, os correspondentes elementos de sua inversa, $\mathrm{K}_{\beta,\beta}^{-1}$.

De Peers e Iqbal (1985) vem que a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV, $\hat{\beta}$, de β é dada por

$$\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta}) = \mathrm{K}_{\beta,\beta}^{-1} + \Sigma, \tag{2.1}$$

em que $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)}$ e o elemento σ_{ij} de Σ, de ordem n^{-2} tem a expressão

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)}, \tag{2.2}$$

$i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, p$, em que,

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}\left(\kappa_{abcd} + \kappa_{a,bcd} + 2\kappa_{abc,d} + 2\kappa_{a,bc,d} + 3\kappa_{ac,bd}\right), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)} = \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \Big\{ & \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\left[(3/2)\kappa_{abc}\kappa_{rst} + 4\kappa_{ab,c}\kappa_{rst}\right. \\ & \left.+\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{ab,c}\kappa_{r,st} + \kappa_{ab,c}\kappa_{rt,s}\right]\Big\},\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\left(2\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} + \kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + \kappa_{abc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{r,st}\right). \tag{2.5}$$

2.2 Obtendo a matriz Σ

No caso dos modelos não lineares da família exponencial, U_a, U_{ab}, U_{abc} e U_{abcd} são obtidos a partir de (1.2) e dados por

$$U_a = \phi\sum_{\ell=1}^{n}(y_\ell - \mu_\ell)V_\ell^{-1}\mu_\ell'(a)_\ell, \tag{2.6}$$

$$U_{ab} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{(y_\ell - \mu_\ell)V_\ell^{-1}\left[\mu_\ell'(ab)_\ell + \mu_\ell''(a,b)_\ell - V_\ell^{-1}V_\ell^{(1)}\mu_\ell'^{2}(a,b)_\ell\right] - w_\ell(a,b)_\ell\right\}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}U_{abc} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\Big\{ & (y_\ell - \mu_\ell)\left[\left(V_\ell^{-1}\mu_\ell''' - 3V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell'\mu_\ell'' - V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell'^{3} + 2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell'^{3}\right)(a,b,c)_\ell\right] \\ & +(y_\ell - \mu_\ell)\left[\frac{g_\ell}{\mu_\ell'}\left[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell + (ab,c)_\ell\right] + \frac{w_\ell}{\mu_\ell'}(abc)_\ell\right] \\ & -\left[(f+2g)_\ell(a,b,c)_\ell + w_\ell\left[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell + (ab,c)_\ell\right]\right]\Big\},\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
U_{abcd} \;=\; & -\phi\sum_{\ell=1}^{n}(y_\ell-\mu_\ell)\Big\{\Big(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'''}-4V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''}-3V_\ell^{-2}V^{(1)}\mu_\ell^{''2}-6V_\ell^{-2}V^{(2)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} \\
& -V_\ell^{-2}V_\ell^{(3)}\mu_\ell^{'4}+4V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4}+3V_\ell^{-3}V^{(1)^2}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell''-3V_\ell^{-4}V^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\Big)(a,b,c,d)_\ell \\
& +\Big(2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'3}-V_\ell^{-2}V^{(2)}\mu_\ell^{'3}-3V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{''}+V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'''}\Big)\Big[(a,b,cd)_\ell \\
& +(a,bd,c)_\ell+(ad,b,c)_\ell\Big]+\Big(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'-1}\mu_\ell^{''2}+V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'''}-4V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{''}-V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'3} \\
& +2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'3}-g_\ell\mu_\ell^{'-1}\mu_\ell^{''}\Big)\Big[(a,bc,d)_\ell+(ab,c,d)_\ell+(ac,b,d)_\ell\Big] \\
& +(g_\ell/\mu_\ell^{'})\Big[(ab,cd)_\ell+(ac,bd)_\ell+(ad,bc)_\ell+(a,bcd)_\ell+(acd,b)_\ell+(abd,c)_\ell\Big] \qquad (2.9)\\
& +\Big(V_\ell^{-1}+V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{''-2}\mu_\ell^{'''}-V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''-1}-2f_\ell\mu_\ell^{''-3}\mu_\ell^{'''}\Big)(abc,d)_\ell+(w_\ell/\mu_\ell^{'})(abcd)_\ell\Big\} \\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\Big(4V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''}+3V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2}-12V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} \\
& -3V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4}+6V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\Big)(a,b,c,d)_\ell \\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}(f+2g)_\ell\,[(a,b,cd)_\ell+(a,bd,c)_\ell+(ad,b,c)_\ell+(a,bc,d)_\ell+(ac,b,d)_\ell+(ab,c,d)_\ell] \\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}w_\ell\,[(ab,cd)_\ell+(ac,bd)_\ell+(ad,bc)_\ell+(a,bcd)_\ell+(acd,b)_\ell+(abd,c)_\ell+(abc,d)_\ell],
\end{aligned}
$$

em que

$$f_\ell=V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{''},\quad g_\ell=V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{''}-V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'3},$$

$$V_\ell^{(1)}=\frac{dV_\ell}{d\mu_\ell},\quad V_\ell^{(2)}=\frac{d^2V_\ell}{d\mu_\ell^2},\quad \mu_\ell^{'}=\frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell},\quad \mu_\ell^{''}=\frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2},\ldots,$$

$$\frac{\partial\eta_\ell}{\partial\beta_a}=(a)_\ell,\quad \frac{\partial\eta_\ell}{\partial\beta_a}\frac{\partial\eta_\ell}{\partial\beta_b}=(a,b)_\ell,\quad \frac{\partial^2\eta_\ell}{\partial\beta_a\partial\beta_b}=(ab)_\ell,\quad \frac{\partial^2\eta_\ell}{\partial\beta_a\partial\beta_b}\frac{\partial\eta_\ell}{\partial\beta_c}=(ab,c)_\ell,\ldots$$

Utilizando (2.6) a (2.9), obtemos os cumulantes necessários para o cálculo de (2.3) a (2.5), que no caso dos MNLFE, são dados por:

$$
\begin{aligned}
\kappa_{abcd} \;=\; & -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\Big\{\Big(4V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''}+3V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2}-12V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} \\
& -3V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4}+6V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\Big)(a,b,c,d)_\ell \qquad (2.10)\\
& +(f+2g)_\ell\,[(a,b,cd)_\ell+(a,bd,c)_\ell+(ad,b,c)_\ell+(a,bc,d)_\ell+(ac,b,d)_\ell+(ab,c,d)_\ell] \\
& +w_\ell\,[(ab,cd)_\ell+(ac,bd)_\ell+(ad,bc)_\ell+(a,bcd)_\ell+(acd,b)_\ell+(abd,c)_\ell+(abc,d)_\ell]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\kappa_{a,bcd} &= \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''} - 3V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} - V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4} + 2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell\right\} \\ &\quad + g_\ell\left[(a,b,cd)_\ell + (a,bc,d)_\ell + (a,bd,c)_\ell\right] + w_\ell(a,bcd)_\ell\Big\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{b,acd} &= \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''} - 3V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} - V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4} + 2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell\right\} \\ &\quad + g_\ell\left[(a,b,cd)_\ell + (ad,b,c)_\ell + (ac,b,d)_\ell\right] + w_\ell(acd,b)_\ell\Big\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\kappa_{a,bc,d} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} - V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell + (f-g)_\ell(a,bc,d)_\ell\right\}, \tag{2.13}$$

$$\kappa_{b,ac,d} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} - V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell + (f-g)_\ell(ac,b,d)_\ell\right\}, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ac,bd} &= \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2} - 2V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} + V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell\right. \\ &\quad \left. + g_\ell\left[(ac,b,d)_\ell + (a,bd,c)_\ell\right] + w_\ell(ac,bd)_\ell\right\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ad,bc} &= \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2} - 2V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} + V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4}\right)(a,b,c,d)_\ell\right. \\ &\quad \left. + g_\ell\left[(ad,b,c)_\ell + (a,bc,d)_\ell\right] + w_\ell(ad,bc)_\ell\right\}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\kappa_{abc} = -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{(f+2g)_\ell(a,b,c)_\ell + w_\ell\left[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell + (ab,c)_\ell\right]\right\}, \tag{2.17}$$

$$\kappa_{ab,c} = \phi\sum_{\ell=1}^{n}\left[g_\ell(a,b,c)_\ell + w_\ell(ab,c)_\ell\right]. \tag{2.18}$$

2.2.1 Obtendo $\Sigma^{(1)}$

Utilizando as expressões (2.10) a (2.15), a expressão (2.3) é dada por

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)} &= -\phi \sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \sum_{\ell=1}^{n} \Big\{ h_\ell (a,b,c,d)_\ell \\ &\quad -(f+g)_\ell (a,b,cd)_\ell - (f-2g)_\ell (a,bd,c)_\ell - (f+2g)_\ell (ad,b,c)_\ell \\ &\quad +(f-g)_\ell (a,bc,d)_\ell - (f-3g)_\ell (ac,b,d)_\ell - f_\ell (ab,c,d)_\ell \\ &\quad +w_\ell \left[-(ab,cd)_\ell + 2(ac,bd)_\ell - (ad,bc)_\ell - (acd,b)_\ell - (abd,c)_\ell + (abc,d)_\ell\right] \Big\},\end{aligned} \tag{2.19}$$

em que $h_\ell = -V_\ell^{-1}\mu_\ell'\mu_\ell''' - V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell'^{2}\mu_\ell'' + V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell'^{4}$.

Podemos reescrever (2.19) da seguinte maneira

$$\sigma_{ij}^{(1)} = -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) h_\ell \left(\sum_{c,d=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cd}(d)_\ell\right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.20}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) (f+g)_\ell \left(\sum_{c,d=1}^{p} (dc)_\ell \kappa^{cd}\right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.21}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) (f-2g)_\ell \left(\sum_{b,c,d=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cd}(db)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.22}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}(ad)_\ell \kappa^{dc}(c)_\ell\right) (f+2g)_\ell \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.23}$$

$$-\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) (f-g)_\ell \left(\sum_{b,c,d=1}^{p} (d)_\ell \kappa^{dc}(cb)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.24}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{cd}(d)_\ell\right) (f-3g)_\ell \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj}\right) \right\} \tag{2.25}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) f_\ell \left(\sum_{c,d=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cd}(d)_\ell\right) \right\} \tag{2.26}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \left(\sum_{c,d=1}^{p} (dc)_\ell \kappa^{cd}\right) \right\} \tag{2.27}$$

$$-2\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{cd}(db)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \right\} \tag{2.28}$$

$$+\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}(ad)_\ell \kappa^{dc}(cb)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \right\} \tag{2.29}$$

$$+\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(acd)_\ell\kappa^{dc}\right)w_\ell\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.30}$$

$$+\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(abd)_\ell\kappa^{dc}(c)_\ell\kappa^{bj}\right)w_\ell\right\} \tag{2.31}$$

$$-\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(abc)_\ell\kappa^{cd}(d)_\ell\kappa^{bj}\right)w_\ell\right\}. \tag{2.32}$$

Podemos simplicar $\sigma_{ij}^{(1)}$, observando que as parcelas (2.22) e (2.24) são iguais, o mesmo ocorrendo com as parcelas (2.23) e (2.25), com as parcelas (2.28) e (2.29) e com as parcelas (2.31) e (2.32).

A expressão de $\sigma_{ij}^{(1)}$ após a simplifição é dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(1)} = & -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)h_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}(c)_\ell\kappa^{cd}(d)_\ell\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\}\\
& +\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}(dc)_\ell\kappa^{cd}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\}\\
& +\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(ad)_\ell\kappa^{dc}(c)_\ell\right)(2f-g)_\ell\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\}\\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)g_\ell\left(\sum_{b,c,d=1}^{p}(c)_\ell\kappa^{cd}(db)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\}\\
& +\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b=1}^{p}\kappa^{ia}(ab)_\ell\kappa^{bj}\right)f_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}(c)_\ell\kappa^{cd}(d)_\ell\right)\right\}\\
& +\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b=1}^{p}\kappa^{ia}(ab)_\ell\kappa^{bj}\right)w_\ell\left(\sum_{c,d=1}^{p}(dc)_\ell\kappa^{cd}\right)\right\}\\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(ac)_\ell\kappa^{cd}(db)_\ell\kappa^{bj}\right)w_\ell\right\}\\
& +\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,c,d=1}^{p}\kappa^{ia}(acd)_\ell\kappa^{dc}\right)w_\ell\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Denotando por

$$p_{i,\ell} = -\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell,\quad p_{\ell,j} = -\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bj}, \tag{2.34}$$

$$z_{\ell\ell} = -\sum_{c,d=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cd} (d)_\ell, \quad d_{\ell\ell} = -\sum_{c,d=1}^{p} (dc)_\ell \kappa^{cd}, \tag{2.35}$$

$$e_{a,\ell} = -\sum_{c,d=1}^{p} (ad)_\ell \kappa^{dc} (c)_\ell, \quad e_{\ell,b} = -\sum_{c,d=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cd} (db)_\ell, \tag{2.36}$$

$$s_{ij,\ell} = \sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia} (ab)_\ell \kappa^{bj}, \quad t_{ij,\ell} = -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia} (ac)_\ell \kappa^{cd} (db)_\ell \kappa^{bj}, \quad \delta_{a,\ell} = -\sum_{c,d=1}^{p} (acd)_\ell \kappa^{dc}, \tag{2.37}$$

reescrevemos (2.33) como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(1)} \;=\; & \phi \sum_{\ell=1}^{n} \{p_{i,\ell}\, h_\ell\, z_{\ell\ell}\, p_{\ell,j}\} - \phi \sum_{\ell=1}^{n} \{p_{i,\ell}\, (f+g)_\ell\, d_{\ell\ell}\, p_{\ell,j}\} \\
& -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}\, e_{a,\ell} \right) (2f-g)_\ell\, p_{\ell,j} \right\} + \phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell}\, g_\ell \left(\sum_{b=1}^{p} e_{\ell,b}\, \kappa^{bj} \right) \right\} \\
& -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \{s_{ij,\ell}\, f_\ell\, z_{\ell\ell}\} - \phi \sum_{\ell=1}^{n} \{s_{ij,\ell}\, w_\ell\, d_{\ell\ell}\} + \phi \sum_{\ell=1}^{n} \{t_{ij,\ell}\, w_\ell\} \\
& -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \delta_{a,\ell} \right) w_\ell\, p_{\ell,j} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

E de (2.38), chegamos à expressão matricial $\Sigma^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)} \;=\; & \phi^{-2}\, P\, H\, Z_d\, P^\top - \phi^{-2}\, P\, (F+G)\, D\, P^\top - \phi^{-2}\, [P\, (2F-G)\, E\, K^{-1}]^\top \\
& + \phi^{-2}\, P\, G\, E\, K^{-1} - \phi^{-2}\, S\, [(F Z_d 1) \otimes I_p] - \phi^{-2}\, S\, [(W D 1) \otimes I_p] \\
& + \phi^{-2}\, T\, [(W 1) \otimes I_p] - \phi^{-2}\, [P\, W\, \Delta\, K^{-1}]^\top,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

em que

$$H = \operatorname{diag}\{h_1, \ldots, h_n\}, \quad F = \operatorname{diag}\{f_1, \ldots, f_n\}, \quad G = \operatorname{diag}\{g_1, \ldots, g_n\}, \tag{2.40}$$

$$P = \{p_{i,\ell}\} = (\widetilde{X}^\top W \widetilde{X})^{-1} \widetilde{X}^\top, \quad Z = \{z_{ij}\} = \widetilde{X} P, \quad Z_d = \operatorname{diag}\{z_{11}, \ldots, z_{nn}\}, \tag{2.41}$$

$$K = \{-k_{ij}/\phi\} = \phi^{-1} K_{\beta,\beta} = (\widetilde{X}^\top W \widetilde{X}), \tag{2.42}$$

$D = \operatorname{diag}\{d_{\ell\ell}\}$, sendo $d_{\ell\ell} = \operatorname{tr}(\widetilde{X}_\ell K^{-1})$ e o (r,s)-ésimo elemento de $\widetilde{X}_\ell$ dado por $\partial^2 \eta_\ell / \partial\beta_r \partial\beta_s$, (2.43)

$\Delta = \{\delta_{\ell,a}\}$, sendo $\delta_{\ell,a} = \operatorname{tr}(\widetilde{\widetilde{X}}_{\ell,a} K^{-1})$ e o (r,s)-ésimo elemento de $\widetilde{\widetilde{X}}_{\ell,a}$ dado por $\partial^3 \eta_\ell / \partial\beta_a \partial\beta_r \partial\beta_s$, (2.44)

$$1 = (1 \ldots 1)^\top_{1\times n}, \quad S_{p\times np} = (S_1 \ldots S_n), \quad S_\ell = K^{-1} \widetilde{X}_\ell K^{-1}, \tag{2.45}$$

$$T_{p\times np} = (T_1 \dots T_n)\,,\; T_\ell = K^{-1}\widetilde{X}_\ell K^{-1}\widetilde{X}_\ell K^{-1} \tag{2.46}$$

e

$$E \text{ é uma matriz tal que sua } \ell\text{-ésima linha é a } \ell\text{-ésima linha de } \widetilde{X}K^{-1}\widetilde{X}_\ell. \tag{2.47}$$

Destacamos que as parcelas três, quatro e seis de (2.39) resultam em matrizes assimétricas.

2.2.2 Obtendo $\Sigma^{(2)}$

Inicialmente, reescrevemos a expressão (2.4) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)} &= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\Big\{\overbrace{\kappa_{rst}\left[(3/2)\kappa_{abc} + 4\kappa_{ab,c} + \kappa_{a,bc}\right]}^{(I)} \\ &\quad + \underbrace{\kappa_{ab,c}\left(2\kappa_{r,st} + \kappa_{rt,s}\right)}_{(II)}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Substituindo (2.17) e (2.18) nas expressões (I) e (II) de (2.48) obtemos:

$$\begin{aligned}(I) &= \phi^2\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\{[(3/2)f_\ell f_m + 3f_\ell g_m - 2g_\ell f_m - 4g_\ell g_m]\,(a,b,c)_\ell(r,s,t)_m \\ &\quad +(3/2)f_\ell w_m(a,b,c)_\ell\,[(r,st)_m + (rt,s)_m + (rs,t)_m] \\ &\quad +g_\ell w_m(a,b,c)_\ell\,[-2(r,st)_m - 2(rt,s)_m - 2(rs,t)_m] \\ &\quad +w_\ell f_m\,[(1/2)(a,bc)_\ell + (3/2)(ac,b)_\ell - (5/2)(ab,c)_\ell]\,(r,s,t)_m \\ &\quad +w_\ell g_m\,[(a,bc)_\ell + 3(ac,b)_\ell - 5(ab,c)_\ell]\,(r,s,t)_m \\ &\quad +w_\ell w_m\,[(1/2)(a,bc)_\ell(r,st)_m + (1/2)(a,bc)_\ell(rt,s)_m + (1/2)(a,bc)_\ell(rs,t)_m \\ &\quad +(3/2)(ac,b)_\ell(r,st)_m + (3/2)(ac,b)_l(rt,s)_m + (3/2)(ac,b)_l(rs,t)_m \\ &\quad -(5/2)(ab,c)_\ell(r,st)_m - (5/2)(ab,c)_\ell(rt,s)_m - (5/2)(ab,c)_\ell(rs,t)_m]\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(II) &= \phi^2\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\Big\{3g_\ell g_m(a,b,c)_\ell(r,s,t)_m + g_\ell w_m(a,b,c)_\ell\,[2(r,st)_m + (rt,s)_m] \\ &\quad + w_\ell g_m(ab,c)_\ell(r,s,t)_m + w_\ell w_m(ab,c)_\ell\,[2(r,st)_m + (rt,s)_m]\Big\}.\end{aligned}$$

Agora, substituindo (I) e (II) em (2.48), vem que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} = & \frac{1}{2}\phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \sum_{\ell,m=1}^{n} \Big\{ (3f_\ell f_m + 6f_\ell g_m - 4g_\ell f_m - 2g_\ell g_m)\,(a,b,c)_\ell (r,s,t)_m \\
& +3f_\ell w_m (a,b,c)_\ell (r,st)_m + (3f_\ell - 2g_\ell)\, w_m (a,b,c)_\ell (rt,s)_m \\
& + (3f_\ell - 4g_\ell)\, w_m (a,b,c)_\ell (rs,t)_m + w_\ell\,(f_m + 2g_m)\,(a,bc)_\ell (r,s,t)_m \\
& +3w_\ell\,(f_m + 2g_m)\,(ac,b)_\ell (r,s,t)_m - w_\ell\,(5f_m + 4g_m)\,(ab,c)_\ell (r,s,t)_m \\
& +w_\ell w_w\,[(a,bc)_\ell (r,st)_m + (a,bc)_\ell (rt,s)_m + (a,bc)_\ell (rs,t)_m \\
& +3(ac,b)_\ell (r,st)_m + 3(ac,b)_\ell (rt,s)_m + 3(ac,b)_\ell (rs,t)_m \\
& -(ab,c)_\ell (r,st)_m - 3(ab,c)_\ell (rt,s)_m - 5(ab,c)_\ell (rs,t)_m] \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Podemos reescrever (2.49) da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) f_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) f_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.50}$$

$$+3\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) f_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) g_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.51}$$

$$-2\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) g_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) f_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.52}$$

$$-\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) g_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) g_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.53}$$

$$+\frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) f_\ell \left(\sum_{b,c,s,t=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(st)_m \kappa^{tc}(c)_\ell\right) w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.54}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) \left(\frac{3}{2}f - g\right)_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) w_m \left(\sum_{c,r,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.55}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) \left(\frac{3}{2}f - 2g\right)_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_m \left(\sum_{b,r,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(sr)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.56}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) w_\ell \left(\sum_{b,c,s,t=1}^{p} (s)_m \kappa^{sb}(bc)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) \left(\frac{1}{2}f + g\right)_m \left(\sum_{r} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.57}$$

$$+3\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \left(\frac{1}{2}f + g\right)_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.58}$$

$$-\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,s=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) \left(\frac{5}{2}f + 2g\right)_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.59}$$

$$+\frac{1}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) w_\ell \left(\sum_{b,c,s,t=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{ct}(st)_m \kappa^{sb}\right) w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.60}$$

$$+\frac{1}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,c,r,s,t=1}^{p} (s)_m \kappa^{sb}(bc)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.61}$$

$$+\frac{1}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,c,r,s,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{tc}(cb)_\ell \kappa^{bs}(sr)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.62}$$

$$+\frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sb}(b)_\ell\right) w_\ell w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{2.63}$$

$$+\frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,r,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj}\right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m\right) \right\} \tag{2.64}$$

$$+\frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,r,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(sr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \tag{2.65}$$

$$-\frac{1}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bs}(st)_m \kappa^{tc}(c)_\ell \right) w_\ell w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \tag{2.66}$$

$$-\frac{3}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,s=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bs}(s)_m \right) w_\ell w_m \left(\sum_{c,r,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \tag{2.67}$$

$$-\frac{5}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,r,s=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bs}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_\ell w_m \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) \right\}. \tag{2.68}$$

Observando a igualdade (2.50) com (2.51), (2.52) com (2.53), (2.54) com (2.57), (2.55) com (2.56), (2.58) com (2.59), (2.61) com (2.62), (2.63) com (2.66), (2.64) com (2.68) e (2.65) com (2.67), $\sigma_{ij}^{(2)}$ simplifica-se em:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} = \; & \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) \left[(3/2) f_\ell f_m + 3 f_\ell g_m - 2 g_\ell f_m - g_\ell g_m \right] \right. \\
& \left. \times \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m \right) \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) (2f+g)_\ell \left(\sum_{b,c,s,t=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(st)_m \kappa^{tc}(c)_\ell \right) w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& + 3\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) (f-g)_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m \right) w_m \left(\sum_{c,r,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell \left(\sum_{b,s=1}^{p} (s)_m \kappa^{sb}(b)_\ell \right) (f-g)_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& + \frac{1}{2}\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{b,c,s,t=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{ct}(st)_m \kappa^{sb} \right) w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \qquad (2.69) \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,c,r,s,t=1}^{p} (s)_m \kappa^{sb}(bc)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sb}(b)_\ell \right) w_\ell w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,r,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rj} \right) w_\ell w_m \left(\sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs}(s)_m \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Ainda podemos reescrever (2.69) como:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)} \;=\; & \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell} \left[(3/2) f_\ell \, z_{\ell m}^2 \, f_m + 3 f_\ell \, z_{\ell m}^2 \, g_m - 2 g_\ell \, z_{\ell m}^2 \, f_m - g_\ell \, z_{\ell m}^2 \, g_m \right] p_{m,j} \right\} \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell} \, (2f+g)_\ell \, \theta_{\ell m}^1 \, w_m \, p_{m,j} \right\} \\
& + 3\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell} \, (f-g)_\ell \, z_{\ell m} \, w_m \left(\sum_{r=1}^{p} \delta_{m\ell,r}^1 \, \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \delta_{a,m\ell}^1 \right) w_\ell \, z_{\ell m} \, (f-g)_m \, p_{m,j} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell} \, w_\ell \, \theta_{\ell m}^2 \, w_m \, p_{m,j} \right\} \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell} \, w_\ell \, w_m \left(\sum_{r=1}^{p} (\delta_{m\ell,r}^2 \, \kappa^{rj} \right) \right\} \\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \, \delta_{a,m\ell}^2 \right) w_\ell \, w_m \, p_{m,j} \right\} \\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ t_{ij,m\ell}^\star \, w_\ell \, z_{\ell m} \, w_m \right\},
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

em que

$$
\theta_{\ell m}^1 = \sum_{b,c,s,t=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs} (st)_m \kappa^{tc} (c)_\ell, \quad \theta_{\ell m}^2 = \sum_{b,c,s,t=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{ct} (st)_m \kappa^{sb}, \tag{2.71}
$$

$$
\delta_{a,m\ell}^1 = - \sum_{c,t=1}^{p} (ac)_\ell \kappa^{ct} (t)_m, \quad \delta_{m\ell,r}^1 = - \sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct} (tr)_m, \tag{2.72}
$$

$$
\delta_{a,m\ell}^2 = \sum_{b,c,s,t=1}^{p} (ac)_\ell \kappa^{ct} (ts)_m \kappa^{sb} (b)_\ell, \quad \delta_{m\ell,r}^2 = \sum_{b,c,s,t=1}^{p} (s)_m \kappa^{sb} (bc)_\ell \kappa^{ct} (tr)_m, \tag{2.73}
$$

$$
z_{\ell m} = - \sum_{b,s=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bs} (s)_m, \quad t_{ij,m\ell}^\star = - \sum_{a,c,r,t=1}^{p} \kappa^{ia} (ac)_\ell \kappa^{ct} (tr)_m \kappa^{rj}. \tag{2.74}
$$

E, finalmente, chegamos à seguinte expressão matricial de $\Sigma^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{(2)} \;=\; & \phi^{-2} \, P \, ((3/2) F Z^{(2)} F + F Z^{(2)} G - G Z^{(2)} F) \, P^\top \\
& + \phi^{-2} \, P \, (2F+G) \, \Theta_1 \, W \, P^\top + 3 \, \phi^{-2} \, P \, (F-G) \, \Delta_1 \, K^{-1} \\
& - \phi^{-2} \, [P \, (F-G) \, \Delta_1 \, K^{-1}]^\top + (1/2) \, \phi^{-2} \, P \, W \, \Theta_2 \, W \, P^\top \\
& + \phi^{-2} \, [P \, W \, \Delta_2 \, K^{-1}]^\top + \phi^{-2} \, P \, W \, \Delta_2 \, K^{-1} - \phi^{-2} \, T^\star \, W^\star,
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

em que

$$Z^{(2)} = Z \odot Z \text{ é o produto direto entre matrizes (produto de Hadamard),} \tag{2.76}$$

$$\Theta_1 = \left\{\theta^1_{\ell m}\right\}, \text{ sendo } \theta^1_{\ell m} = \tilde{x}_\ell^\top K^{-1}\widetilde{X}_m K^{-1}\tilde{x}_\ell \text{ e } \tilde{x}_\ell \text{ um vetor coluna cujos elementos são os elementos da } \ell\text{-ésima linha de } \widetilde{X}, \tag{2.77}$$

$$\Theta_2 = \left\{\theta^2_{\ell m}\right\}, \text{ sendo } \theta^2_{\ell m} = \mathrm{tr}(\widetilde{X}_\ell^\top K^{-1}\widetilde{X}_m K^{-1}), \tag{2.78}$$

$$T^\star = (T^\star_{11}T^\star_{12}\cdots T^\star_{\ell m}\cdots T^\star_{nn}),\ T^\star_{\ell m} = \{t^\star_{\ell m}\}, \text{ sendo } t^\star_{\ell m} = K^{-1}\widetilde{X}_\ell K^{-1}\widetilde{X}_m K^{-1}, \tag{2.79}$$

$$W^\star = (W^\star_{11}W^\star_{12}\cdots W^\star_{\ell m}\cdots W^\star_{nn})^\top,\ W^\star_{\ell m} = \mathrm{diag}(w_m z_{m\ell} w_\ell), \tag{2.80}$$

$$\Delta_1 = \left\{\delta^1_{\ell r}\right\}, \text{ sendo } \delta^1_{\ell r} = 1^\top\left[V^1_{\ell r} z_\ell (W1)\right],\ V^1_{\ell r} \text{ um vetor coluna cujo } m\text{-ésimo elemento é igual a } \tilde{x}_\ell^\top K^{-1}\tilde{x}_{mr} \text{ e } \tilde{x}_{mr} \text{ um vetor coluna cujos elementos são os elementos da } r\text{-ésima linha de } \widetilde{X}_m, \tag{2.81}$$

$$\Delta_2 = \left\{\delta^2_{\ell r}\right\}, \text{ sendo } \delta^2_{\ell r} = (V^2_{\ell r})^\top W1, V^2_{\ell r},\ V^2_{\ell r} \text{ um vetor coluna cujo } m\text{-ésimo elemento é igual a } \tilde{x}_m^\top K^{-1}\widetilde{X}_\ell K^{-1}\tilde{x}_{mr}, \tag{2.82}$$

e as matrizes restantes estão definidas em (2.40) a (2.42) e (2.45).

Ressaltamos que as parcelas três, quatro, seis e sete de (2.75) resultam em matrizes assimétricas.

2.2.3 Obtendo $\Sigma^{(3)}$

Reescrevendo (2.5) temos,

$$\sigma^{(3)}_{ij} = \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\left[(\kappa_{a,bc}+\kappa_{abc})(2\kappa_{r,st}+\kappa_{rst})\right]. \tag{2.83}$$

Os cumulantes necessários para encontrarmos a expressão de $\sigma^{(3)}_{ij}$ são os mesmos utilizados para encontrar $\sigma^{(2)}_{ij}$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct} \sum_{\ell,m=1}^{n} \Big\{ (f+g)_\ell f_m (a,b,c)_\ell (r,s,t)_m \\ &\quad +(f+g)_\ell w_m (a,b,c)_\ell \left[-(r,st)_m + (rt,s)_m + (rs,t)_m\right] \\ &\quad +w_\ell f_m \left[(ac,b)_\ell + (ab,c)_\ell\right](r,s,t)_m \\ &\quad + w_\ell w_m \left[(ac,b)_\ell + (ab,c)_\ell\right]\left[-(r,st)_m + (rt,s)_m + (rs,t)_m\right] \Big\}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Podemos reescrever (2.84) da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^{(3)} = \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.85}$$

$$-\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell w_m \left(\sum_{c,r,s,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sr}(r)_m\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.86}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell w_m \left(\sum_{c,r,s,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rs}(s)_m\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.87}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.88}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_\ell f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.89}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m\right)\right\} \tag{2.90}$$

$$-\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sr}(r)_m\right) w_\ell w_m \left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.91}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rs}(s)_m\right) w_\ell w_m \left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.92}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_\ell w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs}\right)\left(\sum_{b=1}^{p}(b)_\ell \kappa^{bj}\right)\right\} \tag{2.93}$$

$$-\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sr}(r)_m\right) w_m\right\} \tag{2.94}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(tr)_m \kappa^{rs}(s)_m\right) w_m\right\} \tag{2.95}$$

$$+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj}\right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m\right) w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs}\right)\right\}. \tag{2.96}$$

Podemos simplificar $\sigma_{ij}^{(3)}$ observando que as parcelas (2.86) e (2.87) são iguais, o mesmo ocorrendo com as parcelas (2.91) e (2.92) e com as parcelas (2.94) e (2.95).

Após a simplificação temos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) (f+g)_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj} \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell \right) (f+g)_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs} \right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj} \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj} \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj} \right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) f_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,c,t=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs} \right) \left(\sum_{b=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bj} \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bj} \right) w_\ell \left(\sum_{c,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_m \left(\sum_{r,s=1}^{p} (rs)_m \kappa^{rs} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

Podemos reescrever (2.97) como:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{ p_{i,\ell}\, (f+g)_\ell\, z_{\ell m}\, f_m\, z_{mm}\, p_{\ell,j} \} + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{ p_{i,\ell}\, (f+g)_\ell\, z_{\ell m}\, w_m\, d_{mm}\, p_{\ell,j} \} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \alpha^{\star}_{a,m\ell} \right) w_\ell\, f_m\, z_{mm}\, p_{\ell,j} \right\} + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{ s_{ij,\ell}\, w_\ell\, z_{\ell m}\, f_m\, z_{mm} \} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \alpha^{\star}_{a,m\ell} \right) w_\ell\, w_m\, d_{mm}\, p_{\ell,j} \right\} + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{ s_{ij,\ell}\, w_\ell\, z_{\ell m}\, w_m\, d_{mm} \},
\end{aligned}
$$

que ainda pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell}\, (f+g)_\ell \left(\sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, f_m\, z_{mm} \right) p_{\ell,j} \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ p_{i,\ell}\, (f+g)_\ell \left(\sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, w_m\, d_{mm} \right) p_{\ell,j} \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left[\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha^{\star}_{a,m\ell}\, f_m\, z_{mm} \right) \right] w_\ell\, p_{\ell,j} \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ s_{ij,\ell}\, w_\ell \left(\sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, f_m\, z_{mm} \right) \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left[\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia} \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha^{\star}_{a,m\ell}\, w_m\, d_{mm} \right) \right] w_\ell\, p_{\ell,j} \right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ s_{ij,\ell}\, w_\ell \left(\sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, w_m\, d_{mm} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

em que

$$\alpha^{\star}_{a,m\ell} = -\sum_{c,t=1}^{p} (ac)_{\ell}\kappa^{ct}(t)_m. \tag{2.99}$$

Agora, usando a notação

$$c_{\ell\ell} = \sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, f_m\, z_{mm}, \quad b_{\ell\ell} = \sum_{m=1}^{n} z_{\ell m}\, w_m\, d_{mm}, \tag{2.100}$$

$$\alpha^{1}_{a,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \alpha^{\star}_{a,m\ell}\, f_m\, z_{mm}, \quad \alpha^{2}_{a,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \alpha^{\star}_{a,m\ell}\, w_m\, d_{mm}, \tag{2.101}$$

(2.98) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \sigma^{(3)}_{ij} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \{p_{i,\ell}\,(f+g)_{\ell}\, c_{\ell\ell}\, p_{\ell,j}\} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \{p_{i,\ell}\,(f+g)_{\ell}\, b_{\ell\ell}\, p_{\ell,j}\} \\ &+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}\, \alpha^{1}_{a,\ell} \right) w_{\ell}\, p_{\ell,j} \right\} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \{s_{ij,\ell}\, w_{\ell}\, c_{\ell\ell}\} \\ &+\phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}\, \alpha^{2}_{a,\ell} \right) w_{\ell}\, p_{\ell,j} \right\} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^{n} \{s_{ij,\ell}\, w_{\ell}\, b_{\ell}\}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Finalmente, chegamos à expressão matricial de $\Sigma^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)} &= \phi^{-2}\, P\,(F+G)\, C\, P^{\top} + \phi^{-2}\, P\,(F+G)\, B\, P^{\top} + \phi^{-2}\, K^{-1}\, A_1\, W\, P^{\top} \\ &+\phi^{-2}\, S\,[(WC1)\otimes I_p] + \phi^{-2}\, K^{-1}\, A_2\, W\, P^{\top} + \phi^{-2}\, S\,[(WB1)\otimes I_p], \end{aligned} \tag{2.103}$$

em que

$$C = \{c_{\ell\ell}\} = \mathrm{diag}\,\{ZFZ_d1\}, \quad B = \{b_{\ell\ell}\} = \mathrm{diag}\,\{ZWD1\}, \tag{2.104}$$

$A_1 = \{\alpha^{1}_{a\ell}\}$, sendo $\alpha^{1}_{a\ell} = (V^{3}_{\ell a})^{\top} F Z_d 1$, $V^{3}_{\ell a}$ um vetor coluna com o m-ésimo elemento igual a $\tilde{x}^{\top}_{\ell a} K^{-1} \tilde{x}_m$, $\tilde{x}_{\ell a}$ um vetor coluna cujos elementos são os elementos da a-ésima linha de $\widetilde{X}_{\ell}$ e $\tilde{x}_m$ um vetor coluna cujos elementos são os elementos da m-ésima linha de $\widetilde{X}$, (2.105)

$$A_2 = \{\alpha^{2}_{a\ell}\}, \text{ sendo } \alpha^{2}_{a\ell} = (V^{3}_{\ell a})^{\top} W D 1, \tag{2.106}$$

e as matrizes restantes estão definidas em (2.40), (2.41) e (2.45).

Destacamos que em (2.103), temos nas parcelas três e cinco matrizes assimétricas.

Agora, substituindo (1.4), (2.39), (2.75) e (2.103) em (2.1), encontramos a seguinte matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV de β nos MNLFE:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta}) \;=\; & \phi^{-1}(\widetilde{X}^\top W \widetilde{X})^{-1} + \phi^{-2}\, P\, H\, Z_d\, P^\top - \phi^{-2}\, P\, (F+G)\, D\, P^\top \\
& -\phi^{-2}\, [P\, (2F-G)\, E\, K^{-1}]^\top + \phi^{-2}\, P\, G\, E\, K^{-1} - \phi^{-2}\, S\, [(F Z_d 1) \otimes I_p] \\
& -\phi^{-2}\, S\, [(W D 1) \otimes I_p] + \phi^{-2}\, T\, [(W 1) \otimes I_p] - \phi^{-2}\, [P\, W\, \Delta\, K^{-1}]^\top \\
& +\phi^{-2}\, P\, ((3/2) F Z^{(2)} F + F Z^{(2)} G - G Z^{(2)} F)\, P^\top \\
& +\phi^{-2}\, P\, (2F+G)\, \Theta_1\, W\, P^\top + 3\, \phi^{-2}\, P\, (F-G)\, \Delta_1\, K^{-1} \\
& -\phi^{-2}\, [P\, (F-G)\, \Delta_1\, K^{-1}]^\top + (1/2)\, \phi^{-2}\, P\, W\, \Theta_2\, W\, P^\top \\
& +\phi^{-2}\, [P\, W\, \Delta_2\, K^{-1}]^\top + \phi^{-2}\, P\, W\, \Delta_2\, K^{-1} - \phi^{-2}\, T^\star\, W^\star \\
& +\phi^{-2}\, P\, (F+G)\, C\, P^\top + \phi^{-2}\, P\, (F+G)\, B\, P^\top + \phi^{-2}\, K^{-1}\, A_1\, W\, P^\top \\
& +\phi^{-2}\, S\, [(W C 1) \otimes I_p] + \phi^{-2}\, K^{-1}\, A_2\, W\, P^\top + \phi^{-2}\, S\, [(W B 1) \otimes I_p],
\end{aligned} \tag{2.107}$$

em que as expressões acimas estão definidas de (2.40) a (2.47), de (2.76) a (2.82) e de (2.104) a (2.106).

Podemos notar que as matizes da expressão (2.107) são funções apenas do vetor de médias μ e das primeiras, segundas e terceiras derivadas da matriz X.

A expressão (2.107) corrige a expressão (15) de Cordeiro e Santana (2008) e, também, a expressão obtida por Rocha *et al.* (2010).

Para o caso dos modelos lineares generalizados (2.107) simplifica-se na expressão

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta}) \;=\; & \phi^{-1}(\widetilde{X}^\top W \widetilde{X})^{-1} + \phi^{-2}\, P\, H\, Z_d\, P^\top \\
& +\phi^{-2}\, P\, [(3/2) F Z^{(2)} F + F Z^{(2)} G - G Z^{(2)} F]\, P^\top \\
& +\phi^{-2}\, P\, (F+G)\, C\, P^\top,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

obtida por Cordeiro (2004), com uma correção feita por Cavalcanti (2009).

2.3 Resultados de simulação

Para estudarmos o desempenho da matriz $\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta})$, dada em (2.107), desenvolvemos dois estudos de simulação.

No primeiro usamos um modelo gama com ligação log e componente sistemática dada por $\eta_\ell = \beta_0 + \beta_1 x_{1\ell} + x_{2\ell}^{\beta_2}$, $\ell = 1, \ldots, n$. Os valores verdadeiros para os parâmetros foram fixados em $\beta_0 = 1/2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$ e $\phi = 1$. A covariável x_1 foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$ e a covariável x_2 foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo $(1,2)$. Para cada n ($n = 20, 40, 60$), os valores de x_1 e x_2 foram mantidos constantes em todas as 10000 réplicas do modelo gerado. As Tabelas 2.1 a 2.3 apresentam os resultados obtidos. As primeiras duas entradas das tabelas são $\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}_1(\hat{\beta}) = \frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{10000} [\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}_1(\hat{\beta})]_i$, $\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}_2(\hat{\beta}) = \frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{10000} [\hat{\mathrm{C}}\mathrm{ov}_2(\hat{\beta})]_i$ e a terceira entrada é a matriz de covariâncias amostral de $\hat{\beta}^{(1)}, \ldots, \hat{\beta}^{(10000)}$.

Tabela 2.1: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 20$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,26770	-0,31107	-0,07136
$\hat{\beta}_0$	0,29927	**-0,36180**	**-0,06478**
	0,34788	-0,40654	-0,09076
	-0,31107	0,60904	-0,00067
$\hat{\beta}_1$	**-0,34020**	0,68500	**-0,01605**
	-0,40654	0,79165	-0,00370
	-0,07136	-0,00067	0,08251
$\hat{\beta}_2$	**-0,10464**	**-0,01062**	0,11669
	-0,09076	-0,00370	0,10779

Tabela 2.2: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 40$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,12551	-0,14953	-0,03013
$\hat{\beta}_0$	0,13190	**-0,15976**	**-0,02875**
	0,14281	-0,17292	-0,03293
	-0,14953	0,30053	0,00330
$\hat{\beta}_1$	**-0,15746**	0,31996	**0,00124**
	-0,17292	0,35281	0,00190
	-0,03013	0,00330	0,02967
$\hat{\beta}_2$	**-0,03516**	**0,00443**	0,03319
	-0,03292	0,00190	0,03345

Tabela 2.3: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 60$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,09275	-0,09855	-0,02916
$\hat{\beta}_0$	0,09670	**-0,10314**	**-0,02949**
	0,10285	-0,10838	-0,03255
	-0,09855	0,18950	0,00868
$\hat{\beta}_1$	**-0,10347**	0,19825	**0,00922**
	-0,10838	0,20969	0,00938
	-0,02916	0,00868	0,02438
$\hat{\beta}_2$	**-0,03244**	**0,00977**	0,02650
	-0,03255	0,00938	0,02727

No segundo estudo de simulação, o modelo considerado difere do modelo do primeiro estudo apenas com a relação à distribuição da variável resposta, que agora é normal, e com relação à função de ligação, que agora é a identidade. Os resultados encontram-se nas Tabelas 2.4 e 2.5.

Tabela 2.4: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz covariâncias amostral, para o modelo normal, com* $n = 20$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,26205	-0,30525	-0,06784
$\hat{\beta}_0$	0,26290	**-0,30504**	**-0,07188**
	0,31440	-0,35960	-0,08234
	-0,30525	0,59724	-0,00025
$\hat{\beta}_1$	**-0,30482**	0,59728	**-0,00100**
	-0,35960	0,69414	0,00261
	-0,06784	-0,00025	0,07501
$\hat{\beta}_2$	**-0,07157**	**-0,00075**	0,08450
	-0,08234	0,00261	0,08560

Tabela 2.5: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz covariâncias amostral, para o modelo normal, com* $n = 40$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,12364	-0,14736	-0,02954
$\hat{\beta}_0$	0,12377	**-0,14736**	**-0,03011**
	0,13511	-0,16012	-0,03245
	-0,14736	0,29615	0,00325
$\hat{\beta}_1$	**-0,14733**	0,29615	**0,00325**
	-0,16012	0,32379	0,00321
	-0,02954	0,00325	0,02895
$\hat{\beta}_2$	**-0,03007**	**0,00328**	0,03008
	-0,03245	0,00321	0,03168

Pelas Tabela 2.1 a 2.5, observamos que a matriz de covariâncias de segunda ordem nos modelos não lineares estudados é assimétrica.

2.4 Proposta de correção no resultado de Peers e Iqbal (1985)

Como os resultados de simulação mostraram que a matriz de covariâncias de segunda ordem para $\hat{\beta}$ nos MNLFE é assimétrica, retomamos as expressões (2.3) a (2.5).

Começando pelo termo em (2.3), calculamos uma expressão para $\sigma_{ji}^{(1)}$. Temos:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}^{(1)} &= -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ja}\kappa^{ib}\kappa^{cd}\left(\kappa_{abcd}+\kappa_{a,bcd}+2\kappa_{abc,d}+2\kappa_{a,bc,d}+3\kappa_{ac,bd}\right), \\ &= -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{jb}\kappa^{ia}\kappa^{cd}\left(\kappa_{abcd}+\kappa_{b,acd}+2\kappa_{abc,d}+2\kappa_{b,ac,d}+3\kappa_{bc,ad}\right).\end{aligned} \tag{2.109}$$

Partindo de (2.109) e seguindo os mesmos passos que resultaram na expressão (2.39), encontramos

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)} &= \phi^{-2}\, P\, H\, Z_d\, P^{\top} - \phi^{-2}\, P\,(F+G)\, D\, P^{\top} - \phi^{-2}\, P\,(2F-G)\, E\, K^{-1} \\ &+ \phi^{-2}\,[P\, G\, E\, K^{-1}]^{\top} - \phi^{-2}\, S\,[(FZ_d1)\otimes I_p] - \phi^{-2}\, S\,[(WD1)\otimes I_p] \\ &+ \phi^{-2}\, T\,[(W1)\otimes I_p] - \phi^{-2}\, P\, W\, \Delta\, K^{-1}.\end{aligned} \tag{2.110}$$

É importante observar que a expressão (2.39) difere da expressão (2.110) porque a terceira, quarta e a última parcelas em (2.39) são as matrizes transpostas não-simétricas das terceira, quarta e última parcelas em (2.110).

Resultados semelhantes são facilmente demonstrados para os termos (2.4) e (2.5), isto quer dizer que as expressões (2.3) a (2.5) não são invariantes entre os índices i e j.

Assim, propomos as seguintes correções nos termos obtidos por Peers e Iqbal (1985):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(1)\star} &= -\sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}\Big\{\kappa_{abcd}+(1/2)\kappa_{a,bcd}+(1/2)\kappa_{acd,b}+2\kappa_{abc,d} \\ &+ \kappa_{a,bc,d}+\kappa_{ac,b,d}+3\kappa_{ac,bd}\Big\},\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)\star} &= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p}\Big\{\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct}\Big[(3/2)\kappa_{abc}\kappa_{rst}+2\kappa_{ab,c}\kappa_{rst}+2\kappa_{abc}\kappa_{rs,t} \\ &+ (1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst}+(1/2)\kappa_{abc}\kappa_{r,st}+\kappa_{ab,c}\kappa_{r,st}+\kappa_{a,bc}\kappa_{rs,t} \\ &+ (1/2)\kappa_{ab,c}\kappa_{rt,s}+(1/2)\kappa_{ac,b}\kappa_{rs,t}\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(3)\star} &= \sum_{a,b,c=1}^{p}\sum_{r,s,t=1}^{p}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\Big\{\kappa_{a,bc}\kappa_{r,st}+\kappa_{ac,b}\kappa_{r,st}+(1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} \\ &+ (1/2)\kappa_{ac,b}\kappa_{rst}+\kappa_{abc}\kappa_{rst}+2\kappa_{abc}\kappa_{r,st}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.113}$$

Com as expressões (2.111) a (2.113) temos, agora, a invariância entre os índices i e j.

Substituindo os cumulantes (2.10) a (2.18) em (2.111) a (2.113) temos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(1)\star} &= -\frac{1}{2}\phi \sum_{a,b,c,d=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \sum_{\ell=1}^{n} \Big\{ 2h_\ell(a,b,c,d)_\ell - 2(f+g)_\ell(a,b,cd)_\ell \\
&- (2f-3g)_\ell(a,bd,c)_\ell - (2f+3g)_\ell(ad,b,c)_\ell - g_\ell(a,bc,d)_\ell \\
&+ 5g_\ell(ac,b,d)_\ell - 2f_\ell(ab,c,d)_\ell + w_\ell\,[-2(ab,cd)_\ell + 4(ac,bd)_\ell \\
&- 2(ad,bc)_\ell - (a,bcd)_\ell - (acd,b)_\ell - 2(abd,c)_\ell + 2(abc,d)_\ell] \Big\},
\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(2)\star} &= \frac{1}{2}\phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \sum_{\ell,m=1}^{n} \Big\{ (3f_\ell f_m + f_\ell g_m + g_\ell f_m - 2g_\ell g_m)(a,b,c)_\ell(r,s,t)_m \\
&+ (2f+g)_\ell w_m(a,b,c)_\ell(r,st)_m + (3f+2g)_\ell w_m(a,b,c)_\ell(rt,s)_m \\
&- (f+4g)_\ell w_m(a,b,c)_\ell(rs,t)_m + w_\ell(2f+g)_m(a,bc)_\ell(r,s,t)_m \\
&+ w_\ell(3f+2g)_m(ac,b)_\ell(r,s,t)_m - w_\ell(f+4g)_m(ab,c)_\ell(r,s,t)_m \\
&+ w_\ell w_m\,[(a,bc)_\ell(r,st)_m + 2(a,bc)_\ell(rt,s)_m + 2(ac,b)_\ell(r,st)_m + 3(ac,b)_\ell(rt,s)_m \\
&- 5(ab,c)_\ell(rs,t)_m \Big\},
\end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(3)\star} &= \phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct} \sum_{\ell,m=1}^{n} \Big\{ (f+g)_\ell f_m(a,b,c)_\ell(r,s,t)_m \\
&+ (f+g)_\ell w_m(a,b,c)_\ell[-(r,st)_m + (rt,s)_m + (rs,t)_m] \\
&+ (1/2)w_\ell f_m[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell + 2(ab,c)_\ell] \\
&+ (1/2)w_\ell w_m[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell + 2(ab,c)_\ell][-(r,st)_m + (rt,s)_m + (rs,t)_m].
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Agora, reescrevendo (2.114) a (2.116) em notação matricial temos:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)\star} &= \phi^{-2}\, P\, H\, Z_d\, P^\top \;\; - \phi^{-2}\, P\, (F+G)\, D\, P^\top \\
&-\phi^{-2}\, P\, (F-G)\, E\, K^{-1} \;\; - \;\phi^{-2}\, [P\, (F-G)\, E\, K^{-1}]^\top \\
&-\phi^{-2}\;\; S\, [(FZ_d 1) \otimes I_p] \;\; - \phi^{-2}\, S\, [(WD1) \otimes I_p] \\
&+\phi^{-2}\, T\, [(W1) \otimes I_p] \;\; - (1/2)\phi^{-2}\, [P\, \Delta\, W\, K^{-1}]^\top \\
&-(1/2)\phi^{-2}\, P\, \Delta\, W\, K^{-1},
\end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2)\star} &= \phi^{-2}\, P\, \Big[(3/2)FZ^{(2)}F + FZ^{(2)}G - GZ^{(2)}F\Big]\, P^\top \\
&+(1/2)\phi^{-2}\, P\, (2F+G)\, \Theta_1\, W\, P^\top \;\; + (1/2)\phi^{-2}\, [P\, (2F+G)\, \Theta_1\, W\, P^\top]^\top \\
&+\phi^{-2}\, P\, (F-G)\, \Delta_1\, K^{-1} \;\; + \phi^{-2}\, [P\, (F-G)\, \Delta_1\, K^{-1}]^\top \\
&+(1/2)\, \phi^{-2}\, P\, W\, \Theta_2\, W\, P^\top \;\; + \phi^{-2}\, [P\, W\, \Delta_2\, K^{-1}]^\top \\
&+\phi^{-2}\, P\, W\, \Delta_2\, K^{-1} \;\; - \phi^{-2}\, T^\star\, W^\star
\end{aligned} \tag{2.118}$$

e

$$\begin{aligned}\Sigma^{(3)\star} &= \phi^{-2}\, P\,(F+G)\, C\, P^{\top} + \phi^{-2}\, P\,(F+G)\, B\, P^{\top} \\ &+(1/2)\phi^{-2}\,[K^{-1}\, A_1\, W\, P^{\top}]^{\top} \;+(1/2)\phi^{-2}\, K^{-1}\, A_1\, W\, P^{\top} \\ &+\phi^{-2}\, S\,[(WC1)\otimes I_p] \;+(1/2)\phi^{-2}[K^{-1}\, A_2\, W\, P^{\top}]^{\top} \\ &+(1/2)\phi^{-2}\, K^{-1}\, A_2\, W\, P^{\top} \;+\phi^{-2}\, S\,[(WB1)\otimes I_p].\end{aligned} \tag{2.119}$$

Assim, a matriz de covariâncias de segunda ordem proposta é dada por

$$\mathrm{Cov}_2^{\star}(\hat{\beta}) = \mathrm{K}_{\beta,\beta}^{-1} + \Sigma^{(1)\star} + \Sigma^{(2)\star} + \Sigma^{(3)\star}. \tag{2.120}$$

Os estudos de simulação da Seção 2.3 foram refeitos utilizando as expressões propostas em (2.120). Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 2.6 a 2.10.

Tabela 2.6: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 20$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,26770	-0,31107	-0,07136
$\hat{\beta}_0$	0,29927	-0,35100	-0,08468
	0,34788	-0,40654	-0,09076
		0,60904	-0,00067
$\hat{\beta}_1$		0,68500	-0,00271
		0,79165	-0,00370
			0,08251
$\hat{\beta}_2$			0,11669
			0,10779

Tabela 2.7: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 40$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,12551	-0,14953	-0,03013
$\hat{\beta}_0$	0,13190	-0,15861	-0,03200
	0,14281	-0,17292	-0,03293
		0,30053	0,00330
$\hat{\beta}_1$		0,31996	0,00279
		0,35281	0,00190
			0,02967
$\hat{\beta}_2$			0,03319
			0,03345

Tabela 2.8: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz de covariâncias amostral, para o modelo gama, com* $n = 60$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,09275	-0,09855	-0,02916
$\hat{\beta}_0$	0,09670	-0,10331	-0,03097
	0,10285	-0,10838	-0,03255
		0,18950	0,00868
$\hat{\beta}_1$		0,19825	0,00949
		0,20969	0,00938
			0,02438
$\hat{\beta}_2$			0,02650
			0,02727

Pelas Tabelas 2.6 a 2.10, notamos, para todo valor de n, que as covariâncias até ordem n^{-2} estão mais próximas das covariâncias amostrais, do que as covariâncias de ordem n^{-1}. Além disso, quando n cresce, as covariâncias de ordem n^{-1} se aproximam das covariâncias até ordem n^{-2}, tornando-se próximas às covariâncias amostrais. Para o modelo normal, as Tabelas 2.9 e 2.10 mostram que as covariâncias de ordem n^{-1} estão próximas das covariâncias até ordem n^{-2}, para qualquer valor de n. Isto ocorre porque muitas parcelas da matriz $\text{Cov}_2(\hat{\beta})$ são nulas no modelo normal. Os resultados apresentados nas Tabelas 2.6 a 2.10 sinalizam que a matriz de covariância proposta em (2.120) parece estar correta.

Apesar de termos muitas parcelas na matriz de covariâncias de segunda ordem, ela é de fácil implementação em *software* matemáticos, como *R* ou *Ox*, por exemplo.

Tabela 2.9: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz covariâncias amostral, para o modelo normal, com* $n = 20$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,26205	-0,30525	-0,06784
$\hat{\beta}_0$	0,26290	-0,30493	-0,07172
	0,31440	-0,35960	-0,08234
		0,59724	-0,00025
$\hat{\beta}_1$		0,59728	-0,00087
		0,69414	0,00261
			0,07501
$\hat{\beta}_2$			0,08450
			0,08560

Tabela 2.10: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\hat{\beta})$ *e a matriz covariância amostral, para o modelo normal, com* $n = 40$.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$
	0,12364	-0,14736	-0,02954
$\hat{\beta}_0$	0,12377	-0,14735	-0,03009
	0,13511	-0,16012	-0,03245
		0,29615	0,00325
$\hat{\beta}_1$		0,29615	0,00327
		0,32379	0,00321
			0,02895
$\hat{\beta}_2$			0,03008
			0,03168

Capítulo 3

Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro β corrigido pelo viés de ordem n^{-1} em modelos não lineares da família exponencial

Neste capítulo obtemos a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV de β corrigido pelo viés, em MNLFE. Mostramos que essa matriz depende da matriz de covariâncias de segunda ordem de $\hat{\beta}$, desenvolvida no Capítulo 2. Realizamos estudos de simulação de Monte Carlo para avaliar o desempenho da matriz obtida e de testes de Wald que se baseiam nessa matriz.

3.1 Matriz de covariâncias assintótica de segunda ordem

Seja $\hat{\beta}$ o EMV de β e $d(\beta)$ o viés de ordem n^{-1} de $\hat{\beta}$. O EMV de β, corrigido pelo viés de ordem n^{-1}, é dado por

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} - d(\hat{\beta}), \tag{3.1}$$

em que $d(\hat{\beta})$ é o viés $d(\beta)$ avaliado em $\hat{\beta}$.

De (3.1) vem que o i-ésimo elemento de $\tilde{\beta}$ é dado por

$$\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i - d^i(\hat{\beta}), \tag{3.2}$$

em que $\hat{\beta}_i$ e $d^i(\hat{\beta})$ são, respectivamente, os i-ésimos elementos dos vetores $\hat{\beta}$ e $d(\hat{\beta})$.

De Pace e Salvan (1997) vem a seguinte expansão para $d^i(\hat{\beta})$ em torno de β:

$$d^i(\hat{\beta}) = d^i(\beta) + \sum_{r=1}^{p} d^i_r(\hat{\beta}_r - \beta_r) + O_p(n^{-2}), \tag{3.3}$$

em que

$$\begin{aligned} d_r^i &= \frac{\partial d^i(\beta)}{\partial \beta_r} \\ &= \sum_{a,b,c,s,t=1}^{p} \Big\{ \kappa^{is}\kappa^{at}\kappa^{bc}(\kappa_{abc} + 2\kappa_{ab,c})(\kappa_{rst} + \kappa_{r,st}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\kappa^{ia}\kappa^{bc}\Big[\kappa_{abcr} + \kappa_{abc,r} + 2\kappa_{abr,c} + 2(\kappa_{ab,cr} + \kappa_{ab,c,r})\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$d^i(\beta) = \sum_{a,b,c=1}^{p} \Big\{ \frac{1}{2}\kappa^{ia}\kappa^{bc}(\kappa_{abc} + 2\kappa_{ab,c}) \Big\}, \tag{3.5}$$

são termos de ordem n^{-1}.

Queremos encontrar uma expressão até ordem n^{-2} para $\mathrm{E}[(\tilde{\beta}_i - \beta_i)(\tilde{\beta}_j - \beta_j)]$. Temos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\tilde{\beta}_i - \beta_i)(\tilde{\beta}_j - \beta_j)] &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_i - d^i(\hat{\beta}) - \beta_i)(\hat{\beta}_j - d^j(\hat{\beta}) - \beta_j)] \\ &= \mathrm{E}\{[(\hat{\beta}_i - \beta_i) - d^i(\hat{\beta})][(\hat{\beta}_j - \beta_j) - d^j(\hat{\beta})]\} \\ &= \mathrm{E}\{(\hat{\beta}_i - \beta_i)(\hat{\beta}_j - \beta_j) - d^j(\hat{\beta})(\hat{\beta}_i - \beta_i) - d^i(\hat{\beta})(\hat{\beta}_j - \beta_j) + d^i(\hat{\beta})d^j(\hat{\beta})\} \\ &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_i - \beta_i)(\hat{\beta}_j - \beta_j)] - \mathrm{E}[d^i(\hat{\beta})(\hat{\beta}_j - \beta_j)] \\ &\quad -\mathrm{E}[d^j(\hat{\beta})(\hat{\beta}_i - \beta_i)] + \mathrm{E}[d^i(\hat{\beta})d^j(\hat{\beta})]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo (3.3) na segunda parcela de (3.6) temos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[d^i(\hat{\beta})(\hat{\beta}_j - \beta_j)] &= \mathrm{E}\Big\{(\hat{\beta}_j - \beta_j)\Big[d^i(\beta) + \sum_{r=1}^{p} d_r^i(\hat{\beta}_r - \beta_r) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\ &= d^i(\beta)\mathrm{E}[(\hat{\beta}_j - \beta_j)] + \sum_{r=1}^{p} d_r^i \mathrm{E}[(\hat{\beta}_j - \beta_j)(\hat{\beta}_r - \beta_r)] + o(n^{-2}) \\ &= d^i(\beta)d^j(\beta) + \sum_{r=1}^{p} d_r^i(-\kappa^{jr}) + o(n^{-2}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

A terceira parcela de (3.6) resulta na expressão (3.7), apenas trocando o índice i por j. Substituindo novamente (3.3) na quarta parcela vem que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[d^i(\hat{\beta})d^j(\hat{\beta})] &= \mathrm{E}\Big\{\Big[d^i(\beta) + \sum_{r=1}^{p} d_r^i(\hat{\beta}_r - \beta_r) + O_p(n^{-2})\Big]\Big[d^j(\beta) + \sum_{v=1}^{p} d_v^j(\hat{\beta}_v - \beta_v) + O_p(n^{-2})\Big]\Big\} \\ &= d^i(\beta)d^j(\beta) + o(n^{-2}). \end{aligned}$$

Então, a expressão (3.6) pode ser escrita, até ordem n^{-2}, como:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\tilde{\beta}_i - \beta_i)(\tilde{\beta}_j - \beta_j)] &= \mathrm{E}[(\hat{\beta}_i - \beta_i)(\hat{\beta}_j - \beta_j)] - d^i(\beta)d^j(\beta) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{p} d_r^i \kappa^{jr} + \sum_{r=1}^{p} d_r^j \kappa^{ir}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A primeira parcela subtraída da segunda parcela em (3.8) é a matriz de covariâncias de segunda ordem para $\hat{\beta}$, encontrada no Capítulo 2, dada em (2.107).

De (3.4) vem que

$$\sum_{r=1}^{p} d_r^i \kappa^{jr} = \psi_{ij}^{(1)} + \psi_{ij}^{(2)}, \tag{3.9}$$

em que

$$\psi_{ij}^{(1)} = \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{is}\kappa^{at}\kappa^{bc}\kappa^{jr}(\kappa_{abc} + 2\kappa_{ab,c})(\kappa_{rst} + \kappa_{r,st}), \tag{3.10}$$

$$\psi_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c,r=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{bc}\kappa^{jr} \left[\kappa_{abcr} + \kappa_{abc,r} + 2\kappa_{abr,c} + 2\left(\kappa_{ab,cr} + \kappa_{ab,c,r}\right)\right]. \tag{3.11}$$

3.1.1 Obtendo $\Psi^{(1)}$

Utilizando os cumulantes (2.17) e (2.18), encontramos a expressão de $\psi_{ij}^{(1)}$ em (3.10), que para os modelos não lineares da família exponencial é definida por

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{(1)} &= \phi^2 \sum_{a,b,c=1}^{p} \sum_{r,s,t=1}^{p} \kappa^{is}\kappa^{at}\kappa^{bc}\kappa^{jr} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \Big\{ f_\ell (f+g)_m (a,b,c)_\ell (r,s,t)_m \\ &\quad + f_\ell w_m (a,b,c)_\ell [(rt,s)_m + (rs,t)_m] \\ &\quad + w_\ell (f+g)_m [(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell - (ab,c)_\ell](r,s,t)_m \\ &\quad + w_\ell w_m [(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell - (ab,c)_\ell][(rt,s)_m + (rs,t)_m] \Big\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Primeiramente, reescrevemos (3.12) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(1)} = {} & \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.13)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{a,r,t=1}^{p} (a)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.14)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) \right\} && (3.15)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.16)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,b,c,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(ac)_\ell \kappa^{cb}(b)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.17)\\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,b,c,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(ab)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.18)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) w_\ell \left(\sum_{a,r,t=1}^{p} (a)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.19)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) \right\} && (3.20)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m w_\ell \left(\sum_{a,b,c,r,t=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(ca)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.21)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m w_\ell \left(\sum_{a,b,c,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(ac)_\ell \kappa^{cb}(b)_\ell \right) \right\} && (3.22)\\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m w_\ell \left(\sum_{a,b,c,r,t=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cb}(ba)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\} && (3.23)\\
& - \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m w_\ell \left(\sum_{a,b,c,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(ab)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) \right\}. && (3.24)
\end{aligned}
$$

Igualando (3.17) com (3.18), (3.21) com (3.23) e (3.22) com (3.24), temos:

$$
\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(1)} = {} & \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\}\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{a,r,t=1}^{p} (a)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\}\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) f_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell \right) \right\} && (3.25)\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) (f+g)_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_m \kappa^{rj} \right) \right\}\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{s=1}^{p} \kappa^{is}(s)_m \right) w_m \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) w_\ell \left(\sum_{a,r,t=1}^{p} (a)_\ell \kappa^{at}(tr)_m \kappa^{rj} \right) \right\}\\
& + \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{r,s=1}^{p} \kappa^{is}(sr)_m \kappa^{rj} \right) w_m \left(\sum_{a,t=1}^{p} (t)_m \kappa^{ta}(a)_\ell \right) w_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb} \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.34), (2.35), (2.37), (2.74) e (2.99), podemos reescrever (3.25) como:

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(1)} &= \phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{p_{i,m}\ (f+g)_m\ z_{m\ell}\ f_\ell\ z_{\ell\ell}\ p_{m,j}\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{p_{i,m}\ w_m\ z_{\ell\ell}\ f_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} \alpha^{\star}_{r,m\ell}\ \kappa^{rj}\right)\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{s_{ij,m}\ w_m\ z_{m\ell}\ f_\ell\ z_{\ell\ell}\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{p_{i,m}\ (f+g)_m\ z_{m\ell}\ w_\ell\ d_{\ell\ell}\ p_{m,j}\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \left\{p_{i,m}\ w_m\ d_{\ell\ell}\ w_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} (\alpha^{\star}_{r,m\ell}\ \kappa^{rj}\right)\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{\ell,m=1}^{n} \{s_{ij,m}\ w_m\ z_{m\ell}\ w_\ell\ d_{\ell\ell}\}\,.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ainda, podemos reescrever (3.26) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(1)} &= \phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ (f+g)_m \left(\sum_{\ell=1}^{n} z_{m\ell}\ f_\ell\ z_{\ell\ell}\right)\ p_{m,j}\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ w_m \left[\sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha^{\star}_{r,m\ell}\ z_{\ell\ell}\ f_\ell\right) \kappa^{rj}\right]\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{s_{ij,m}\ w_m \left(\sum_{\ell=1}^{n} z_{m\ell}\ f_\ell\ z_{\ell\ell}\right)\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ (f+g)_m \left(\sum_{\ell=1}^{p} z_{m\ell}\ w_\ell\ d_{\ell\ell}\right)\ p_{m,j}\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ w_m \left[\sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha^{\star}_{r,m\ell}\ d_{\ell\ell}\ w_\ell\right) \kappa^{rj}\right]\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{s_{ij,m}\ w_m \left(\sum_{\ell=1}^{n} z_{m\ell}\ w_\ell\ d_{\ell\ell}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

E, usando (2.100) e (2.101), reescrevemos (3.27) como:

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(1)} &= \phi^2 \sum_{m=1}^{p} \{p_{i,m}\ (f+g)_m\ c_{mm}\ p_{m,j}\} + \phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ w_m \left(\sum_{r=1}^{p} \alpha^{1}_{m,r}\ \kappa^{rj}\right)\right\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \{s_{ij,m}\ w_m\ c_{mm}\} + \phi^2 \sum_{m=1}^{p} \{p_{i,m}\ (f+g)_m\ b_{mm}\ p_{m,j}\} \\
&+\phi^2 \sum_{m=1}^{p} \left\{p_{i,m}\ w_m \left(\sum_{r=1}^{p} \alpha^{2}_{m,r}\ \kappa^{rj}\right)\right\} + \phi^2 \sum_{m=1}^{p} \{s_{ij,m}\ w_m\ b_{mm}\}\,.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Finalmente, escrevemos (3.28) em notação matricial:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \phi^{-2}\, P\, (F+G)\, C\, P^{\top} + \phi^{-2}\, P\, W\, A_1^{\top}\, K^{-1} + \phi^{-2}\, S\, [(WC1)\otimes I_p] \\ &\quad +\phi^{-2}\, P\, (F+G)\, B\, P^{\top} + \phi^{-2}\, P\, W\, A_2^{\top}\, K^{-1} + \phi^{-2}\, S\, [(WB1)\otimes I_p]\,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.1.2 Obtendo $\Psi^{(2)}$

Encontramos $\psi_{ij}^{(2)}$ em (3.11), utilizando os cumulantes (2.10) a (2.15). No caso dos MNLFE, $\psi_{ij}^{(2)}$ é dado por:

$$\begin{aligned}\psi_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2}\phi \sum_{a,b,c,d,r=1}^{p} \kappa^{ia}\kappa^{bc}\kappa^{jr} \sum_{\ell=1}^{p} \Big\{ h_{2\ell}(a,b,c,r)_\ell - f_\ell[(a,b,cr)_\ell + (a,br,c)_\ell + (ar,b,c)_\ell] \\ &\quad +(f+g)_\ell[-(a,bc,r)_\ell - (ac,b,r)_\ell + (ab,c,r)_\ell] \\ &\quad + w_\ell[(ab,cr)_\ell - (ac,br)_\ell - (ar,bc)_\ell - (a,bcr)_\ell - (acr,b)_\ell + (abr,c)_\ell]\Big\},\end{aligned} \tag{3.30}$$

em que, $h_{2\ell} = -V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''} - V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2} + V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''}$.

Podemos reescrever (3.30) da seguinte forma:

$$\psi_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) h_{2\ell} \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell\right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.31}$$

$$-\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) f_\ell \left(\sum_{b,c,r=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(cr)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.32}$$

$$-\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) f_\ell \left(\sum_{b,c,r=1}^{p} (c)_\ell \kappa^{cb}(br)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.33}$$

$$-\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,r=1}^{p} \kappa^{ia}(ar)_\ell \kappa^{rj}\right) f_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (b)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell\right) \right\} \tag{3.34}$$

$$-\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{p} \kappa^{ia}(a)_\ell\right) (f+g)_\ell \left(\sum_{b,c=1}^{p} (bc)_\ell \kappa^{cb}\right) \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.35}$$

$$-\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}(ac)_\ell \kappa^{cb}(b)_\ell\right) (f+g)_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.36}$$

$$+\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bc}(c)_\ell\right) (f+g)_\ell \left(\sum_{r=1}^{p} (r)_\ell \kappa^{rj}\right) \right\} \tag{3.37}$$

$$+\frac{1}{2}\phi \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{a,b,c,r=1}^{p} \kappa^{ia}(ab)_\ell \kappa^{bc}(cr)_\ell \kappa^{rj}\right) w_\ell \right\} \tag{3.38}$$

$$-\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,r=1}^{p}\kappa^{ia}(ac)_\ell\kappa^{cb}(br)_\ell\kappa^{rj}\right)w_\ell\right\} \tag{3.39}$$

$$-\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,r=1}^{p}\kappa^{ia}(ar)_\ell\kappa^{rj}\right)w_\ell\left(\sum_{b,c=1}^{p}(bc)_\ell\kappa^{cb}\right)\right\} \tag{3.40}$$

$$-\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)w_\ell\left(\sum_{b,c,r=1}^{p}(rbc)_\ell\kappa^{cb}\kappa^{rj}\right)\right\} \tag{3.41}$$

$$-\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,r=1}^{p}\kappa^{ia}(acr)_\ell\kappa^{cb}(b)_\ell\kappa^{rj}\right)w_\ell\right\} \tag{3.42}$$

$$+\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,b,c,r=1}^{p}\kappa^{ia}(abr)_\ell\kappa^{bc}(c)_\ell\kappa^{rj}\right)w_\ell\right\}. \tag{3.43}$$

Agora, igualando (3.32) com (3.33), (3.36) com (3.37), (3.38) com (3.39) e (3.42) com (3.43), temos:

$$\begin{aligned}
\psi_{ij}^{(2)} \;=\; & \frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)h_{2\ell}\left(\sum_{b,c=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bc}(c)_\ell\right)\left(\sum_{r=1}^{p}(r)_\ell\kappa^{rj}\right)\right\}\\
& -\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)f_\ell\left(\sum_{b,c,r=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bc}(cr)_\ell\kappa^{rj}\right)\right\}\\
& -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,r=1}^{p}\kappa^{ia}(ar)_\ell\kappa^{rj}\right)f_\ell\left(\sum_{b,c=1}^{p}(b)_\ell\kappa^{bc}(c)_\ell\right)\right\}\\
& -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ia}(a)_\ell\right)(f+g)_\ell\left(\sum_{b,c=1}^{p}(bc)_\ell\kappa^{cb}\right)\left(\sum_{r=1}^{p}(r)_\ell\kappa^{rj}\right)\right\}\\
& -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a,r=1}^{p}\kappa^{ia}(ar)_\ell\kappa^{rj}\right)w_\ell\left(\sum_{b,c=1}^{p}(bc)_\ell\kappa^{cb}\right)\right\}\\
& -\phi\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left\{\left(\sum_{a=1}^{p}\kappa^{ra}(a)_\ell\right)w_\ell\left(\sum_{b,c,r=1}^{p}(rbc)_\ell\kappa^{cb}\kappa^{rj}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Utilizando (2.34) a (2.37), reescrevemos (3.44) como:

$$\begin{aligned}\psi_{ij}^{(2)} &= -\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\{p_{i,\ell}\ h_{2\ell}\ z_{\ell\ell}\ p_{\ell,j}\} + \frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{p_{i,\ell}\ f_\ell\ \left(\sum_{b=1}^{p} e_{\ell,r}\ \kappa^{rj}\right)\right\} \\ &+\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\{s_{ij,\ell}\ f_\ell\ z_{\ell\ell}\} + \frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\{p_{i,\ell}\ (f+g)_\ell\ d_{\ell\ell}\ p_{r,j}\} \\ &+\frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\{s_{ij,\ell}\ w_\ell\ d_{\ell\ell}\} + \frac{1}{2}\phi\sum_{\ell=1}^{n}\left\{p_{i,\ell}\ w_\ell\ \left(\sum_{b=1}^{p}\delta_{\ell,r}\ \kappa^{rj}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Assim, encontramos (3.45) na seguinte notação matricial:

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{1}{2}\phi^{-2}\ P\ H_2\ Z_d\ P^\top + \phi^{-2}\ P\ F\ E\ K^{-1} + \frac{1}{2}\phi^{-2}\ S\ [(FZ_d\mathbf{1})\otimes I_p] \\ &+\frac{1}{2}\phi^{-2}\ P\ (F+G)\ D\ P^\top + \frac{1}{2}\phi^{-2}\ S\ [(WD\mathbf{1})\otimes I_p] + \frac{1}{2}\phi^{-2}\ P\ W\ \Delta\ K^{-1},\end{aligned} \tag{3.46}$$

em que $H_2 = \text{diag}\{h_{21},\ldots,h_{2n}\}$.

Em notação matricial, a quarta parcela de (3.8) é a transposta da terceira parcela, isto é, $(\Psi_1+\Psi_2)^\top$.

De (3.8) vem que a matriz de covariância de segunda ordem de $\tilde{\beta}$ em MNLFE é dada, por,

$$\text{Cov}_2(\tilde{\beta}) = \text{Cov}_2(\hat{\beta}) + (\Psi_1+\Psi_1^\top) + (\Psi_2+\Psi_2^\top), \tag{3.47}$$

em que $\text{Cov}_2(\hat{\beta})$ está apresentado em (2.107), Ψ_1 está em (3.29) e Ψ_2 em (3.46).

No caso dos modelos lineares generalizados, a matriz $\text{Cov}_2(\tilde{\beta})$ se reduz a

$$\begin{aligned}\text{Cov}_2(\tilde{\beta}) &= \phi^{-1}(\widetilde{X}^\top W\widetilde{X})^{-1} + \phi^{-2}\ P\ H\ Z_d\ P^\top \\ &+\phi^{-2}\ P\ [(3/2)FZ^{(2)}F + FZ^{(2)}G - GZ^{(2)}F]\ P^\top \\ &+3\phi^{-2}\ P\ (F+G)\ C\ P^\top - \phi^{-2}\ P\ H_2\ Z_d\ P^\top.\end{aligned} \tag{3.48}$$

A expressão (3.48) corrige a expressão obtida por Cavalcanti (2009).

3.2 Testes de Wald modificados

Suponhamos que queremos testar $\text{H}_0 : \beta = \beta^{(0)}$ contra $\text{H}_1 : \beta \neq \beta^{(0)}$, em que o vetor β tem dimensão p. Uma estatística simples para testarmos a hipótese H_0 é a estatística de Wald, dada por

$$W_0 = (\hat{\beta}-\beta^{(0)})^\top K_{\beta,\beta}(\hat{\beta}-\beta^{(0)}), \tag{3.49}$$

em que, $K_{\beta,\beta} = \phi(\widetilde{X}^\top W \widetilde{X})$ é avaliada na estimativa de máxima verossimilhança de β, $\hat{\beta}$.

Podemos modificar a estatística (3.49) substituindo a matriz de Informação de Fisher pela matriz de covariâncias até segunda ordem,

$$W_1 = (\hat{\beta} - \beta^{(0)})^\top [\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta})]^{-1} (\hat{\beta} - \beta^{(0)}), \tag{3.50}$$

em que $\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta})$ é avaliada em $\hat{\beta}$.

Podemos modificar também, as estatísticas (3.49) e (3.50) substituindo o estimador $\hat{\beta}$ pelo estimador corrigido pelo viés de ordem n^{-1}, $\tilde{\beta}$ e assim temos, respectivamente,

$$W_2 = (\tilde{\beta} - \beta^{(0)})^\top K_{\beta,\beta} (\tilde{\beta} - \beta^{(0)}) \tag{3.51}$$

e

$$W_3 = (\tilde{\beta} - \beta^{(0)})^\top [\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta})]^{-1} (\tilde{\beta} - \beta^{(0)}), \tag{3.52}$$

em que $K_{\beta,\beta}$ e $\mathrm{Cov}_2(\hat{\beta})$ são avaliadas em $\tilde{\beta}$.

Uma outra modificação na estatística de Wald resulta em substituir simultaneamente o EMV $\hat{\beta}$ pelo estimador corrigido $\tilde{\beta}$ e a matriz de informação de Fisher pela matriz de covariância $\mathrm{Cov}_2(\tilde{\beta})$ dada em (3.47), avaliada em $\tilde{\beta}$. Obtemos assim

$$W_4 = (\tilde{\beta} - \beta^{(0)})^\top [\mathrm{Cov}_2(\tilde{\beta})]^{-1} (\tilde{\beta} - \beta^{(0)}). \tag{3.53}$$

3.3 Resultados de simulação

Realizamos, nesta seção, dois estudos de simulação. Em ambos, utilizamos um modelo gama com ligação log, ou seja, $\log(\mu_\ell) = \beta_0 + \exp(\beta_1 x_{1\ell})$, $\ell = 1, \ldots, n$. Os valores verdadeiros para os parâmetros foram fixados em $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$ e $\phi = 1$. A covariável x_1 foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e, para cada n ($n = 10, 20, 30, 40, 50, 60$), foi mantida constante em todas as 5000 simulações.

No primeiro estudo de simulação comparamos a matriz de covariâncias até ordem n^{-2} do EMV corrigido pelo viés de ordem n^{-1} e a matriz de informação de Fisher com a matriz de covariâncias amostral de $\tilde{\beta}$. Os resultados encontram-se na Tabela 3.1.

No segundo estudo, comparamos as estatísticas (3.49) a (3.53) por meio do tamanho empírico dos testes de Wald da hipótese $\mathrm{H}_0 : \beta_0^{(0)} = 3$ e $\beta_1^{(0)} = 2$ contra H_1 : pelo menos uma das igualdades em H_0 não é verificada. Assumindo H_0 verdadeira, o tamanho empírico do teste de Wald é calculado, para cada estatística do teste, como a proporção do número de vezes em que H_0 é rejeitada, fixado um nível nominal α e um tamanho de amostra n. Os resultados estão apresentados na Tabela 3.2. Foram utilizados os seguintes níveis nominais: $\alpha = 1\%$, $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 10\%$.

Tabela 3.1: $\hat{C}ov_1(\hat{\beta})$, $\hat{C}ov_2(\tilde{\beta})$ *e a covariância amostral de* $\tilde{\beta}$.

	$n = 10$		$n = 20$	
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
$\hat{\beta}_0$	0,08478	-0,01953	0,04330	-0,00955
	0,10016	-0,02703	0,04704	-0,01151
	0,10953	-0,02564	0,04698	-0,01051
$\hat{\beta}_1$		0,00878		0,00449
		0,01305		0,00569
		0,01193		0,00523
	$n = 30$		$n = 40$	
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
$\hat{\beta}_0$	0,03168	-0,00936	0,02439	-0,00637
	0,03437	-0,01118	0,02579	-0,00718
	0,03549	-0,01063	0,02587	-0,00685
$\hat{\beta}_1$		0,00548		0,00326
		0,00682		0,00378
		0,00623		0,00358
	$n = 50$		$n = 60$	
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
$\hat{\beta}_0$	0,01867	-0,00487	0,01564	-0,00390
	0,01947	-0,00536	0,01615	-0,00420
	0,01994	-0,00523	0,01618	-0,00404
$\hat{\beta}_1$		0,00262		0,00201
		0,00296		0,00221
		0,00286		0,00215

Pela Tabela 3.1 vemos, como esperado, que as covariâncias de segunda ordem do estimador $\tilde{\beta}$ ficaram mais próximas das covariâncias amostrais do que as covariâncias de primeira ordem de $\hat{\beta}$, para todo tamanho de amostra.

Tabela 3.2: *Tamanho empírico estimado dos testes baseados em W_0, W_1, W_2, W_3 e W_4.*

n	$\alpha(\%)$	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
	1,0	8,22	7,42	7,90	7,12	6,34
10	5,0	16,34	14,56	16,04	14,38	12,74
	10,0	23,48	21,46	23,12	21,10	18,74
	1,0	3,18	2,92	3,28	2,96	2,66
20	5,0	9,68	8,62	9,42	8,66	7,34
	10,0	15,74	14,48	15,28	14,06	12,40
	1,0	2,62	2,16	2,30	2,14	1,70
30	5,0	8,44	7,50	8,24	7,52	6,70
	10,0	14,50	13,24	14,56	13,46	11,96
	1,0	2,42	2,12	2,20	1,96	1,66
40	5,0	7,46	6,88	7,40	7,06	6,22
	10,0	12,76	12,00	12,46	11,82	10,68
	1,0	1,96	1,82	1,94	1,88	1,58
50	5,0	7,30	6,60	7,06	6,56	5,82
	10,0	12,52	12,04	12,54	11,84	10,84
	1,0	1,62	1,46	1,56	1,40	1,26
60	5,0	6,46	6,06	6,62	6,20	5,68
	10,0	12,46	11,86	12,38	11,74	10,88

A Tabela 3.2 mostra que, para $n = 10$, os tamanhos empíricos dos testes de Wald baseados nas cincos estatísticas estão muito distantes dos respectivos níveis nominais.

Essa tabela mostra, também, que os testes com pior desempenho são os baseados na matriz de informação de Fisher, ou seja, os que utilizam as estatísticas W_0 e W_2 dadas respectivamente, em (3.49) e (3.51). Já, as estatísticas W_1 e W_3 dadas, respectivamente, em (3.50) e (3.52) têm desempenhos similares e um pouco melhor que o das estatísticas W_0 e W_2. Mostramos também, que a estatística W_4, dada em (3.53) é a que apresenta tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais, mostrando que a utilização simultânea do estimador corrigido $\tilde{\beta}$ e da matriz de covariância $\mathrm{Cov}_2(\tilde{\beta})$ melhora muito o desempenho do teste de Wald.

Capítulo 4

Considerações finais

Os estudos de simulação dos Capítulos 2 e 3 mostraram para os modelos não lineares da família exponencial, que a alteração proposta para os resultados de Peers e Iqbal (1985) parece estar correta. Sugerimos, como um trabalho futuro, que esses resultados sejam derivados novamente para que os erros sejam corrigidos.

Esperamos, com esta dissertação, ter contribuído para esclarecer resultados controversos encontrados na literatura com respeito à matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança do parâmetro β em modelos não lineares da família exponencial.

Apêndice A

Cumulantes

Em Lawley (1956), encontramos as seguintes relações entre cumulantes:

$$
\begin{aligned}
\kappa_{a,b} &= -\kappa_{ab}; \\
\kappa_{bc}^{(a)} + \kappa_{a,b,c} + \kappa_{ab,c} + \kappa_{ac,b} &= 0; \\
\kappa_{abc}^{(d)} &= \kappa_{abcd} + \kappa_{abc,d}; \\
\kappa_{a,b,c} &= -\kappa_{abc} - \sum_{(3)} \kappa_{a,bc}; \\
\kappa_{a,b,c} &= 2\kappa_{abc} - \sum_{(3)} \kappa_{ab}^{(c)}; \\
\kappa_{a,b,c,d} &= -3\kappa_{abcd} + 2\sum_{(4)} \kappa_{abc}^{(d)} - \sum_{(6)} \kappa_{ab}^{(cd)} + \sum_{(3)} \kappa_{ab,cd}; \\
\kappa_{a,b,cd} &= \kappa_{abcd} - \kappa_{bcd}^{(r)} - \kappa_{acd}^{(b)} + \kappa_{cd}^{(ab)} - \kappa_{ab,cd},
\end{aligned}
$$

em que, por exemplo,

$$\sum_{(3)} \kappa_{a,bc} = \kappa_{a,bc} + \kappa_{ac,b} + \kappa_{ab,c}.$$

A partir das expressões acima, podemos obter alguns outros cumulantes para os MNLFE:

$$\kappa_a = 0,$$

$$\kappa_{ab} = -\phi \sum_{\ell=1}^{n} w_l (a,b)_l,$$

$$\kappa_{ab}^{(c)} = -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \{(f+g)_\ell (a,b,c)_\ell + w_\ell \left[(a,bc)_\ell + (ac,b)_\ell\right]\},$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{bc}^{(ad)} \;=\; & -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \Big\{ \Big(2V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''} + 2V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2} - 5V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} \\
& -V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4} + 2V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4} \Big) (a,b,c,d)_\ell \\
& -(f+g)_\ell \left[(a,b,cd)_\ell + (a,bd,c)_\ell + (ad,b,c)_\ell + (ac,b,d)_\ell + (ab,c,d)_\ell \right] \\
& - w_\ell \left[(ab,cd)_\ell + (ac,bd)_\ell + (acd,b)_\ell + (abd,c)_\ell \right] \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{bcd}^{(a)} \;=\; & -\phi \sum_{\ell=1}^{n} \Big\{ \Big(3V_\ell^{-1}\mu_\ell^{'}\mu_\ell^{'''} + 3V_\ell^{-1}\mu_\ell^{''2} - 9V_\ell^{-2}V_\ell^{(1)}\mu_\ell^{'2}\mu_\ell^{''} \\
& -2V_\ell^{-2}V_\ell^{(2)}\mu_\ell^{'4} + 4V_\ell^{-3}V_\ell^{(1)^2}\mu_\ell^{'4} \Big) (a,b,c,d)_\ell \\
& -(f+g)_\ell \left[(a,b,cd)_\ell + (a,bd,c)_\ell + (a,bc,d)_\ell \right] \\
& -(f+2g)_\ell \left[(ad,b,c)_\ell + (ac,b,d)_\ell + (ab,c,d)_\ell \right] \\
& - w_\ell \left[(ab,cd)_\ell + (ac,bd)_\ell + (ad,bc)_\ell + (acd,b)_\ell + (abd,c)_\ell + (abc,d)_\ell \right] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

Cavalcanti(2009) Alexsandro B. Cavalcanti. *Aperfeiçoamento de Métodos Estatísticos em Modelos de Regressão da Família Exponencial.* Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil. Citado na pág. 1, 20, 36

Cordeiro(2004) Gauss M. Cordeiro. Second-order covariance matrix of maximum likelihood estimates in generalized linear models. *Statistics and Probability Letters*, 66:153–160. Citado na pág. 1, 20

Cordeiro e McCullagh(1991) Gauss M. Cordeiro e Peter McCullagh. Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistics Society B*, 53:629–643. Citado na pág. 1

Cordeiro e Paula(1989) Gauss M. Cordeiro e Gilberto A. Paula. Improved likelihood ratio statistics for exponential family nonlinear models. *Biometrika*, 76:93–100. Citado na pág. 1

Cordeiro e Santana(2008) Gauss M. Cordeiro e Rosangela G. Santana. Covariance matrix formula for exponential nonlinear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 37:2724–2734. Citado na pág. 1, 3, 20

Cordeiro *et al.*(2006) Gauss M. Cordeiro, Lúcia P. Barroso, e Denise A. Botter. Covariance matrix formula for generalized linear models with unknown dispersion. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 35:113–120. Citado na pág. 1

Fahmeir e Kaufmann(1985) Ludwig Fahmeir e Heinz Kaufmann. Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models. *Annals of Statistics*, 13:342–368. Citado na pág. 2

Lawley(1956) D. N. Lawley. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, 43:295–303. Citado na pág. 43

Nelder e Wedderburn(1972) John A. Nelder e Robert W. M. Wedderburn. Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistics Society A*, 135:370–384. Citado na pág. 1

Nocedal e Wright(2006) J. Nocedal e S. J. Wright. *Numerical Optimization.* Springer. Citado na pág. 2

Pace e Salvan(1997) Luigi Pace e Alessandra Salvan. *Principles of Statistical Inference from a Neo-Fisherian Perspective.* World Scientific. Citado na pág. 29

Paula(1992) Gilberto A. Paula. Bias correction for exponential family nonlinear models. *Journal of Statistic Computation and Simulation*, 40:43–54. Citado na pág. 1

Peers e Iqbal(1985) H. W. Peers e Mohammad Iqbal. Asymptotic expansions for confidence limits in the presence of nuisance parameters, with applications. *Journal of the Royal Statistics Society B*, 47:547–554. Citado na pág. v, vii, 3, 5, 6, 23, 41

Rocha *et al.*(2010) Andréa V. Rocha, Alexandre B. Simas, e Gauss M. Cordeiro. Second-order asymptotic expressions for the covariance matrix of maximum likelihood estimators in dispersion models. *Statistical and Probability Letters*, 80:718–725. Citado na pág. 1, 3, 20