

O MODELO DE WEIBULL E
APLICAÇÕES À CONFIABILIDADE

VICTOR MIRSHAWKA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin*

– SÃO PAULO, AGOSTO DE 1979 –

Dedico este trabalho à memória do
meu pai Wasyl, a minha querida mãe
Maria Mirshawka e aos meus sogros
Ida e Caetano Riberti pelo amor a
mim ofertado em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Para a realização deste trabalho contamos com a colaboração das seguintes pessoas e instituições as quais queremos agradecer:

- ao Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin, amigo, professor de alguns cursos e orientador que de forma dedicada nos guiou para que fossem vencidas as muitas dificuldades do trabalho;*
- ao Prof. Dr. Wagner de Souza Borges que contribuiu com valiosas sugestões e esclarecimentos;*
- ao Prof. Dr. Boris Schneiderman com o qual tivemos a honra de trabalhar, quando muito aprendemos;*
- à minha querida esposa Nilza Maria pela colaboração incansável na correção das matrizes e principalmente pela felicidade, tranquilidade, amparo e estímulo em todos os dias da nossa vida;*
- à Diretoria da Fundação Armando Alvares Penteado (FAAP) na pessoa de seu Presidente Sra. Lúcia C. Pinto de Souza e de seu Diretor-tesoureiro Prof. Roberto Pinto de Souza, pelo apoio contínuo desde os nossos primeiros passos no IME-USP.*
- ao Prof. Evaristo V. Costa, Presidente do Conselho das Faculdades da FAAP, pelo exemplo, orientação e ajuda.*
- ao Prof. Oswaldo D'Amore pela confecção e pelo suporte para a apresentação desta dissertação;*
- ao Eng. Dr. Edison Zarur, Chefe do Departamento de Capacitação e Desenvolvimento de Pessoal da Eletrobrás, pois foi nos cursos do Convênio Mackenzie-Eletrobrás que vislumbramos a importância e a necessidade do modelo de Weibull.*
- à Profa. Josefa A. Alvarez, colega de estudos do IME-USP e de trabalho na Universidade Mackenzie e na Fundação Armando Alvares Penteado com a qual tivemos as mais profícuas discussões sobre o assunto;*

- ao Consul da Suécia, em São Paulo Dr. Otto Rathsman, pelo auxílio nos dados biográficos de E.A.W Weibull;
- ao Eng. Sérgio E. Fronterotta, Presidente do I.E.E.E. (Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.) seção de São Paulo que colocou a nossa disposição todos os recursos disponíveis no Instituto;
- aos Senhores Ary K. Benclowicz e Luigi Zamboni, amigos da Livra - ria Nobel S.A. pelo incentivo constante;
- a todos os professores do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo que direta ou indiretamente transmitiram a nós grande parte do conhecimento atual;
- ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo paciente e eficiente trabalho de datilografia.
- à Da. Selma Lemos de Melo, Secretária do C.P.G. do IME-USP, pelas suas gentilezas durante o nosso convívio desde 1974.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO - O MODELO DE WEIBULL

1.1 - Generalidades sobre modelos.	1
1.2 - Propriedades estatísticas da distribuição de Weibull	5
1.3 - Amostras completas, censuradas uma vez e progressivamente. .	13

CAPÍTULO 2 - ESTIMAÇÃO PONTUAL E POR INTERVALO DOS PARÂMETROS DA WEIBULL

2.1 - Estimação através de técnicas gráficas	15
2.2 - Estimadores de máxima verossimilhança - E.M.V. - Estimação através do método dos momentos	41
2.3 - Método de Dubey para a estimação de vida mínima δ	65
2.4 - Estimação de parâmetros na distribuição de Weibull composta.	73
2.5 - Técnicas de estimação linear	80
2.6 - Intervalos de confiança sob censura de tipo II para os parâ- metros de Weibull biparamétrica.	110
2.7 - Intervalos de confiança para os parâmetros de Weibull tripa- ramétrica.	140
2.8 - Intervalos de predição e períodos de garantia para Weibull biparamétrica.	143

CAPÍTULO 3 - TESTES DE HIPÓTESES

3.1 - Testes para os parâmetros da distribuição de Weibull	154
3.2 - Testes de aderência de Weibull biparamétrica ou distribuição de valor extremo	170
3.3 - Economia no tempo de teste devido a censura do tipo II . . .	179

CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES DO MÉTODO DE WEIBULL

4.1 - Teoria da interferência e cálculos da confiabilidade	184
4.2 - Fator de segurança	198
4.3 - Produção de energia elétrica a partir da velocidade do vento	207
ALGUMAS CONCLUSÕES	226
BIBLIOGRAFIA	229
SIMBOLOGIA	239

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO - O MODELO DE WEIBULL

1.1 - GENERALIDADES SOBRE MODELOS

Modelos de um ou de outro tipo são sempre necessários.

Os modelos são de importância vital em todos os tratamentos intelectuais e são usados bem mais frequentemente do que se pensa.

O modelo é sempre, até certo ponto, uma variação de uma coisa ou de um processo da vida real, cujo comportamento desejamos prever.

Por exemplo o engenheiro aerodinâmico usa modelos e um túnel aerodinâmico para estudar seus projetos.

Esse é um *modelo físico*.

A pessoa que usa modelos pode ser levada a erros tremendos caso se limite apenas ao modelo.

Um modelo feito "em cima da perna" pode "parecer" que se ajusta confortavelmente mas "a prova do bolo está em comê-lo".

Os modelos devem ser verificados - algumas vezes - repetidamente.

O que se necessita é de um modelo que permita prever com sucesso o que se passa na situação do mundo real.

Neste trabalho iremos desenvolver um *modelo matemático*.

No modelo matemático, que constitui a maior abstração com relação à situação no mundo real o simbolismo é usado para representar fatores de uma situação do mundo real.

Os símbolos podem então ser manipulados no lugar dos objetos físicos.

Quando a complexidade da situação em estudo requer matemática, que está além das técnicas conhecidas ou quando a matemática for muito complicada e demorada para ser útil, modelos simulados podem ser estabelecidos e uma aproximação da situação da vida real é obtida por meio de um computador.

Um modelo simulado pode representar as equações matemáticas pertinentes ao problema de forma semelhante ao do modelo matemático.

Entretanto no lugar de tentar resolver as equações pela obtenção de soluções ótimas elabora-se uma série de experiências, simulando-se, assim o comportamento do modelo sob circunstâncias diferentes.

Com os computadores é possível simular uma grande variedade de condições e simplesmente escolher decisões (ou tirar parâmetros) que se comportam melhor.

Não há, com efeito, garantia de que os melhores valores ou decisões tenham sido achados.

Em todos os casos, o objetivo da construção de mo

delos é prever algum aspecto do funcionamento do sistema em estudo.

É por isso que os modelos são tão importantes para a tomada de decisões.

A tomada racional de decisões exige a previsão do comportamento.

Os modelos fornecem essa relação.

O modelo que iremos desenvolver é o modelo de Weibull fundamental para a *Confiabilidade*.

A Confiabilidade contemporaneamente tem sido entendida como a ciência da previsão da estimação ou otimização da probabilidade de sobrevivência, da vida média ou, de uma forma mais geral da distribuição de vida dos componentes ou sistemas.

A Confiabilidade embora considerada por muitos como uma mera aplicação da *Probabilidade* e da *Estatística* para uma classe especial de problemas estimulou o desenvolvimento de novas áreas na Estatística.

Assim entre outras coisas apareceu a *teoria da renovação*.

Acreditamos que um ótimo modelo (talvez o melhor até agora conhecido) para a Confiabilidade é o modelo de Weibull.

Ernst Hjalmar Wallodi Weibull físico sueco que nasceu em Wittscovle em 18/6/1887 (Suécia) apresentou em 1939 esse modelo no planejamento estatístico sobre fadiga.

O artigo original tinha o título "A Statistical Theory of the Strength of Materials" e apareceu numa revista sueca.

Mais tarde apareceram artigos do próprio Weibull em revistas americanas [97] e [98]

Atualmente devido a aplicações as mais variadas a distribuição de Weibull está se tornando a mais popular família paramétrica.

J. Kao [46] e [47] utilizou a mesma em 1958 para a descrição de falhas em válvulas eletrônicas.

Antes de ser usada em testes de vida a distribuição de Weibull era conhecida pelos estatísticos como a distribuição do tipo III de Fisher - Tippet ou ainda como a terceira distribuição assintótica do valor extremo nome que apareceu em 1958 e deve-se a Gumbel [31]

Daí para frente o número de contribuições foi tremendamente grande e os resultados serão discutidos neste trabalho.

Inicialmente podemos destacar a importância de Weibull em relação por exemplo a exponencial devido a sua flexibilidade pois pode representar tanto a taxa de falhas crescente como decrescente como ainda constante (que é o caso da exponencial).

A distribuição de Weibull pode num caso particular também ser a distribuição de Rayleigh que é tão importante na área de telecomunicações.

Como muitas falhas encontradas na prática, especialmente aquelas pertencentes a partes não elétricas tem uma taxa de falhas crescente (isto devido a deterioração ou ao desgaste) a distribuição de Weibull é útil para descrever modelos de falha desse tipo.

Porém a distribuição de Weibull entre outras coisas também tem sido usada na análise de falhas em componentes eletrônicos, esferas de rolamentos, aparelhos com semicondutores, células foto-condutoras, motores e capacitores, em vários organismos biológicos, em situações para testes psicológicos, na análise da resistência a corrosão, no estudo das falhas por vazamento de baterias e pilhas, na análise das devoluções de artigos após o seu envio, no tempo de vida esperada de drogas, assim como no estudo da resistência a ruptura e desgaste dos mais diversos tecidos.

Analisaremos as distribuições de Weibull biparamétrica e triparamétrica.

Surgirão aí, grandes dificuldades para a estimação dos seus parâmetros.

Discutiremos muitos dos métodos desenvolvidos para a estimação pontual e por intervalo.

Isso será feito no Capítulo 2.

Utilizaremos inclusive na estimação técnicas com amostras incompletas ou censuradas.

No Capítulo 3 analisaremos alguns testes estatísticos.

Finalmente no Capítulo 4 daremos algumas aplicações atuais na área da Engenharia ou seja no cálculo do fator de segurança de uma estrutura e no projeto de uma turbina para utilizar a velocidade do vento.

1.2 - PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS DA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL.

A f.d. da v.a. T seguindo o modelo de Weibull com três parâmetros ou triparamétrica tem a forma:

$$f(t; \theta_1, \beta, \delta) = f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta_1 - \delta} \left(\frac{t - \delta}{\theta_1 - \delta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t - \delta}{\theta_1 - \delta} \right)^\beta} & \text{para } t \geq \delta \\ 0 & \text{para } t < \delta \end{cases} \quad \Rightarrow (1.1)$$

com $\beta > 0$, $\theta_1 > \delta \geq 0$.

Na (1.1) temos a seguinte denominação para os parâmetros

$$\begin{cases} \beta \rightarrow \text{parâmetro de forma ou o declive da Weibull} \\ \theta_1 \rightarrow \text{parâmetro de escala ou vida característica} \\ \delta \rightarrow \text{parâmetro de localização, de vida mínima, de garantia ou de "soleira"}. \end{cases}$$

A F.D. é obtida de (1.1) através de integração:

$$F(t; \theta_1, \beta, \delta) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t - \delta}{\theta_1 - \delta} \right)^\beta} & \text{para } t \geq \delta \\ 0 & \text{para } t < \delta \end{cases} \quad \Rightarrow (1.2)$$

Como a distribuição triparmétrica pode ser sempre convertida em uma de dois parâmetros através de uma simples transformação linear usaremos a distribuição de Weibull biparmétrica para a análise das suas propriedades.

Se fizermos $\delta=0$ (ou $t_1=t-\delta$ e $\theta=\theta_1-\delta$) teremos a f.d. da distribuição de Weibull biparmétrica.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (1.3)$$

com $\theta > 0$, $\beta > 0$.

Integrando a (1.3) obtemos a F.D.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (1.4)$$

A taxa de falhas que decorre de (1.3) e (1.4) é:

$$h(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \quad \text{para } t \geq 0 \quad \Rightarrow (1.5)$$

a qual irá decrescer no tempo se $\beta < 1$, crescer se $\beta > 1$ e será constante se $\beta = 1$.

A função de confiabilidade é

$$C(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \quad \text{para } t \geq 0 \quad \Rightarrow (1.6)$$

Dessa forma a vida confiável correspondente a proporção de sobreviventes $\gamma = 1 - p$ é:

$$t_p = \theta \left[\ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right]^{1/\beta} \quad \Rightarrow (1.7)$$

O k-ésimo momento em relação a origem da distribuição de Weibull é:

$$\mu'_k = \theta^k \Gamma(1 + \frac{k}{\beta}) \quad \Rightarrow (1.8)$$

com $k=1,2,3,\dots$ e onde $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$

Portanto a média e a variância da distribuição de Weibull são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \theta \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) \end{array} \right. \quad \Rightarrow (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = \theta^2 \left[\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta}) \right] \end{array} \right. \quad \Rightarrow (1.10)$$

O parâmetro de forma β , como o próprio nome indica determina a forma da distribuição.

A medida que β cresce, a média da distribuição aproxima-se da vida característica θ e a variância aproxima-se, de zero como está mostrado na Tab 1.1

β	Média/ θ	Variância/ θ^2
0,5	2,0000	20,000
1,0	1,0000	1,000
2,0	0,8862	0,215
3,0	0,8934	0,105
3,5	0,8998	0,081
4,0	0,9064	0,065
5,0	0,9182	0,044
6,0	0,9275	0,033
10,0	0,9514	0,013
20,0	0,9730	0,004

Tab.1.1 - Média e variância das distribuições de Weibull com uma função de parâmetro de forma β .

A assimetria e a curtose para a distribuição de Weibull podem ser obtidas a partir da (1.8).

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{\beta_1} &= \frac{\mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3}{[\mu'_2 - (\mu'_1)^2]^{3/2}} = \frac{\Gamma(1+\frac{3}{\beta}) - 3\Gamma(1+\frac{1}{\beta})\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) + 2\Gamma^3(1+\frac{1}{\beta})}{[\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})]^{3/2}} \rightarrow (1.11) \\ &\quad \text{(Coeficiente de assimetria)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4}{[\mu'_2 - (\mu'_1)^2]^2} = \\ &= \frac{\Gamma(1+\frac{4}{\beta}) - 4\Gamma(1+\frac{3}{\beta})\Gamma(1+\frac{1}{\beta}) + 6\Gamma(1+\frac{2}{\beta})\Gamma^2(1+\frac{1}{\beta}) - 3\Gamma^4(1+\frac{1}{\beta})}{[\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})]^2} \\ &\quad \text{(Coeficiente de curtose)} \rightarrow (1.12) \end{aligned} \right.$$

Os valores dos coeficientes de assimetria e curtose para os diversos valores de β estão na Tab. 1.2.

β	ASSIMETRIA	CURTOSE
0,5	6,619	87,72
1,0	2,000	9,00
2,0	0,626	3,28
3,0	0,454	2,672
3,5	0,026	2,742
4,0	-0,062	2,925
5,0	-0,333	2,938
6,0	-0,905	3,624
10,0	-1,000	9,000
20,0	-2,000	25,000

Tab.1.2 - Assimetria e curtose para a distribuição de Weibull.

A distribuição normal tem coeficiente de assimetria zero e curtose igual a 3.

Verifica-se que a distribuição de Weibull aproxima-se bastante da normal quando o parâmetro de forma (β) está entre 3,5 e 4,0.

Essa é aliás a base para se poder através da Weibull aproximar a normal ou vice versa.

Na Fig. 1.1 temos as várias formas da distribuição de Weibull onde o parâmetro de escala (θ) é tomado como unidade.

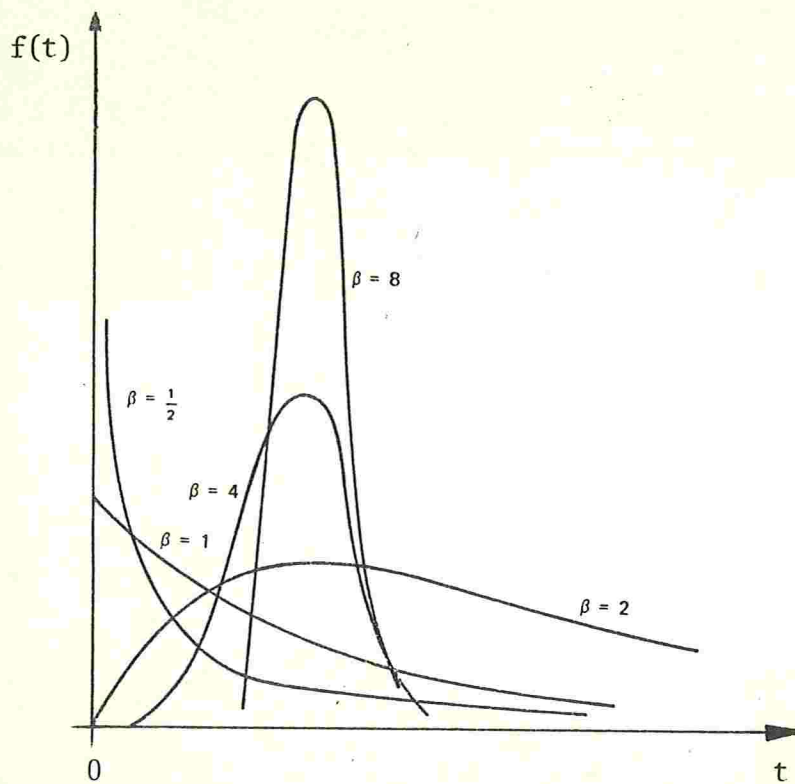


Fig. 1.1

Distribuição de Weibull para os diferentes valores de β e $\theta=1$.

O parâmetro da escala θ , ajuda a localizar a distribuição ao longo do eixo $0t$.

Isto pode ser facilmente percebido considerando a F.D. dada pela (1.4).

Fazendo $t=\theta$ vem:

$$F(t=\theta) = 1 - e^{-1} \approx \boxed{0,632}$$

Podemos então concluir que para qualquer distribuição de Weibull a probabilidade de falha anterior a $t=\theta$ é igual a 0,632.

Dessa forma θ divide sempre a área sob a f.d. em 0,632 e 0,368 para todos os valores de β .

É por isso que θ é chamada de *vida característica*.

Para a Weibull triparamétrica as únicas diferenças ocorrerão nos parâmetros de posição.

Assim

$$E(X) = \mu = \delta + (\theta_1 - \delta) \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) \quad \Rightarrow (1.13)$$

Pode-se também achar que a moda M_0 é

$$M_0 = \delta + (\theta_1 - \delta) (1 - \frac{1}{\beta})^{1/\beta} \quad \Rightarrow (1.14)$$

A mediana M_d é:

$$M_d = \delta + (\theta_1 - \delta) (\ln 2)^{1/\beta} \quad \Rightarrow (1.15)$$

A distribuição de Weibull é uma entre as muitas distribuições e a interligação entre ela com as demais está indicada nas Fig. 1.2 e Fig. 1.3.

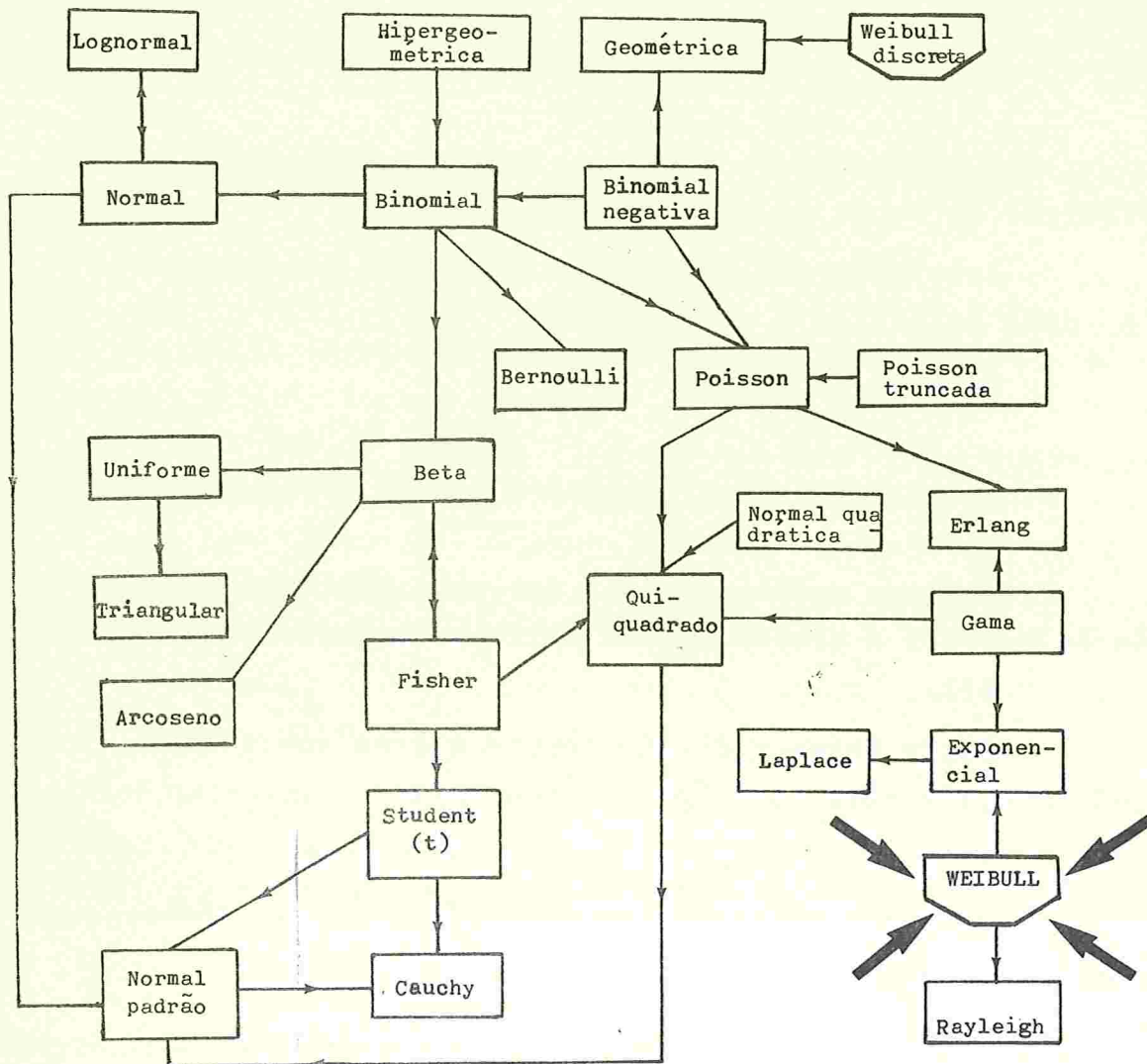


Fig. 1.2 - Relações entre as distribuições
f.d. de menor extremo f.d. de maior extremo

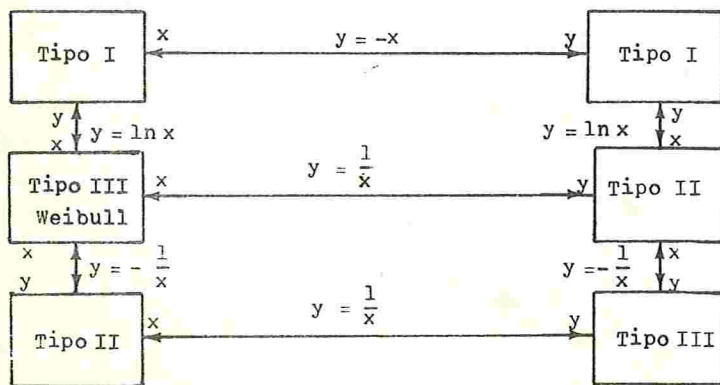


Fig. 1.3
Relações entre as distribuições de valor extremo

1.3 - AMOSTRAS COMPLETAS, CENSURADAS UMA VEZ E PROGRESSIVAMENTE.

Os dados dos quais podemos retirar estimativas pontuais e por intervalo dos parâmetros de uma distribuição de Weibull assim como da confiabilidade, são obtidos dos chamados *testes de vida*, isto é, uma amostra de n unidades da população de interesse é colocada dentro de um ambiente o mais similar que se possa para cada uma das unidades em experimentação e um ou mais esforços são aplicados sobre os mesmos.

Caso tenhamos n observações, isto é todas as unidades falharem, diremos que se obteve uma *amostra completa*.

Se o teste de vida terminar num instante especificado t_0 antes que todas as n unidades tenham falhado diremos que se trata de um teste de vida com *censura ou interrupção do tipo I*.

Diremos que realizou-se um teste de vida com *censura ou interrupção do tipo II* quando o mesmo terminar no instante em que ocorrer uma particular falha, digamos a r -ésima falha ($r \leq n$).

Na censura do tipo I o número de falhas e todos os instantes de falhas são v.a., enquanto na censura do tipo II o número de falhas é considerado fixo e as v.a. são os instantes de falhas.

A censura ou interrupção pode também ser conduzida *progressivamente*, isto é, as unidades podem ser retiradas do teste de vida no decorrer da duração do teste.

Dessa forma a censura ocorre progressivamente em k estágios nos instantes t_i onde $t_i > t_{i-1}$, $i=1,2,\dots,k$ e no i -ésimo estágio de censura r_i unidades amostrais seleciona -

das aleatoriamente dos sobreviventes são removidas da análise posterior (após o instante t_i).

Dessa forma se \underline{n} é o tamanho total da amostra e \underline{r} o número de unidades que falharam

$$n = r + \sum_{i=1}^k r_i \quad \Rightarrow (1.16)$$

As vantagens da utilização de amostragem com interrupção progressiva foram discutidas por Cohen [10].

CAPITULO 2

ESTIMAÇÃO PONTUAL E POR INTERVALO DOS PARÂMETROS DA WEIBULL

2.1 - ESTIMAÇÃO ATRAVÉS DE TÉCNICAS GRÁFICAS

A estimação gráfica dos parâmetros e a previsão através do gráfico tem uma grande aplicação na prática.

A simplificação que se obtém pelo uso de gráficos em papel de probabilidade é uma *simplificação visual*.

O papel de probabilidade transforma uma distribuição curvilínea em uma linha reta.

Se a análise é puramente analítica não existe nenhum sentido em utilizar um papel com escalas especiais.

Em geral existem três diferentes finalidades que podem ser atendidas.

- 1) - Como um teste para verificar se os dados da amostra indicam que o universo é do tipo prescrito.

Supõe-se ou aceita-se que o universo é do tipo prescrito somente se os pontos locados tendem a se alinhar.

2) - O método gráfico pode ser usado como uma forma rápida para obter aproximações (geralmente razoáveis) para as estimativas lineares não viciadas dos parâmetros de uma distribuição.

3) - Extrapolação gráfica em um dos extremos.

Essa é a finalidade mais comumente utilizada ao se representar dados provenientes de universo de valor extremo.

É claro que essas finalidades podem se sobrepor.

Uma representação gráfica dos dados fornece uma compreensão fácil para o leigo.

É extremamente útil no caso específico da Weibull para detectar desvios na estimação da vida mínima δ e ajuda na tomada de decisão se os dados são ou não de uma Weibull.

Não se pode contudo esperar que os estimadores dos parâmetros definidos através de procedimentos gráficos, os quais são necessariamente subjetivos, sejam tão eficientes na estimação como os estimadores lineares que eles aproximam.

Basicamente, com o intuito de poder usar a estimação gráfica, deve-se fazer uma transformação na F.D.

Tomando logarítmos naturais de (1.4) obtém-se

$$\ln t = \frac{1}{\beta} \ln \left[\ln \frac{1}{1-F(t)} \right] + \ln \theta \quad \Rightarrow (2.1)$$

a qual é obviamente do tipo $Y = \frac{1}{\beta}X + A$
e que terá como gráfico uma reta no papel cujos eixos são OX
e OY.

Dessa forma o papel de Weibull pode ser construído
graduando-se OY como $Y = \ln t$ e OX como $X = \ln \left(\ln \frac{1}{1-F(t)} \right)$.

Além disso comumente reverte-se os eixos ou seja o
vertical será OX e então β é o próprio coeficiente angular
da reta que se obtém no papel.

Na Fig. 2.1 temos um "gomo" de um papel de probabi-
lidade de Weibull.

Se o papel da probabilidade de Weibull é utilizado
para a análise de falhas representa-se num dos eixos o ins-
tante ordenado da falha $t_{i,n}$ ($t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{n,n}$ representam
os instantes ordenados de falha de uma amostra sob a suposi-
ção de que o especificado teste de vida continua até o ins-
tante da n-ésima falha) o qual é convertido ao logaritmo na-
tural $x_{i,n}$ de $t_{i,n}$ e no outro eixo coloca-se alguma estima-
tiva $p_{i,n}$ de $F(t_{i,n})$.

A estimativa da probabilidade $p_{i,n}$ é convertida pe-
lo papel de probabilidade na variável reduzida.

$$v_{i,n} = \ln \left[\ln \frac{1}{1-p_{i,n}} \right]$$

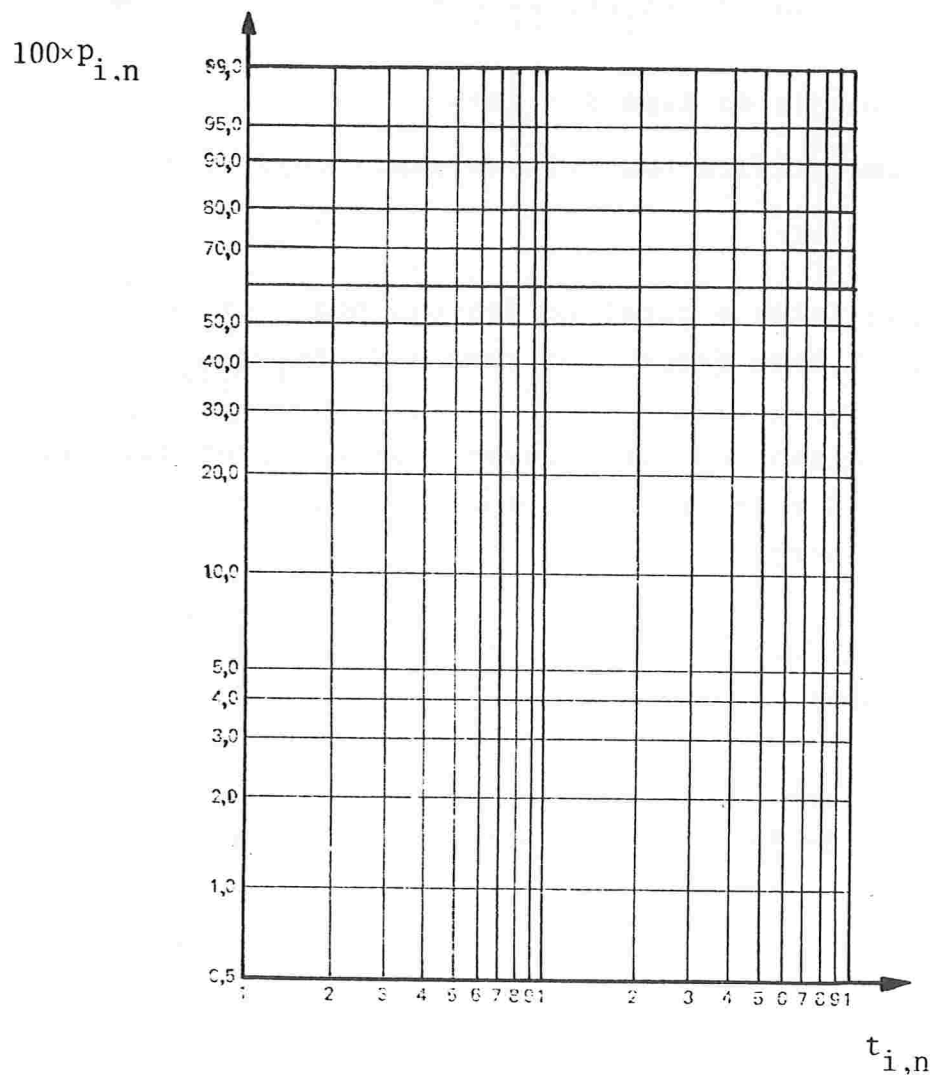


Fig.2.1 - Papel de probabilidade
de Weibull.

Esse método foi explorado pela primeira vez por J.
Kao [46] e [47].

É verdade que já em 1954 Chernoff e Lieberman [9] faziam aplicações bastante semelhantes do papel de probabilidade da normal.

Para se obter $p_{i,n}$ precisamos de alguns resultados das distribuições de ordem. Suponhamos que $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ constituem uma a.a. ordenada de uma população tendo F.D., $F(x)$ onde X é uma v.a. contínua.

Representemos por $P_{i,n}$ a fração da população que falha antes da i -ésima observação ordenada na amostra de tamanho n .

Vamos repartir essa população em três regiões conforme mostrado na Tab. 2.1.

Região	1	2	3
Limites da região	0 $x_{i,n} - \frac{1}{2}dx_{i,n}$	$x_{i,n} + \frac{1}{2}dx_{i,n}$	∞
Probabilidade de obter um resultado na região	$F(x_{i,n} - \frac{1}{2}dx_{i,n})$	$f(x_{i,n})dx_{i,n}$	$1 - F(x_{i,n} + \frac{1}{2}dx_{i,n})$

Tab.2.1 - Partição da população

Para que o i -ésimo resultado $X_{i,n}$ ocorra na região (2), $i-1$ observações precisam ocorrer na região (1) e $n-i$ na região (3).

As regiões são consideradas mutuamente exclusivas, e a probabilidade que cada observação caia em uma particular região é constante.

Nesse caso a distribuição multinomial é aplicável a essa situação e a probabilidade que $i-1$ resultados caiam na região (1), 1 na região (2) e $n-1$ na região (3) é dada por:

$$\frac{n!}{(i-1)! 1! (n-i)!} [F(x_{i,n})]^{i-1} f(x_{i,n}) dx_{i,n} [1-F(x_{i,n})]^{n-i} \quad (2.2)$$

Na obtenção da (2.2) ignoram-se os termos da ordem de $\frac{1}{2} dx_{i,n}$.

A (2.2) é precisamente a distribuição de $X_{i,n}$.

Porém sabemos que

$$p_{i,n} = F(x_{i,n})$$

Daí vem:

$$dp_{i,n} = f(x_{i,n}) dx_{i,n} = dF(x_{i,n})$$

Portanto a probabilidade elementar é:

$$g(p_{i,n}) dp_{i,n} = \frac{n!}{(i-1)! (n-i)!} p_{i,n}^{i-1} (1-p_{i,n})^{n-i} dp_{i,n} \quad (2.3)$$

onde $0 \leq p_{i,n} \leq 1$.

A distribuição dada pela (2.3) é chamada nos testes de vida de *distribuição de ordem ou posto*.

Uma análise um pouco mais acurada indica que a f.d. da v.a. $P_{i,n}$ é a distribuição beta.

Na Fig. 2.2 está o gráfico dessa f.d. para os diferentes valores de i para uma amostra de tamanho $n=10$

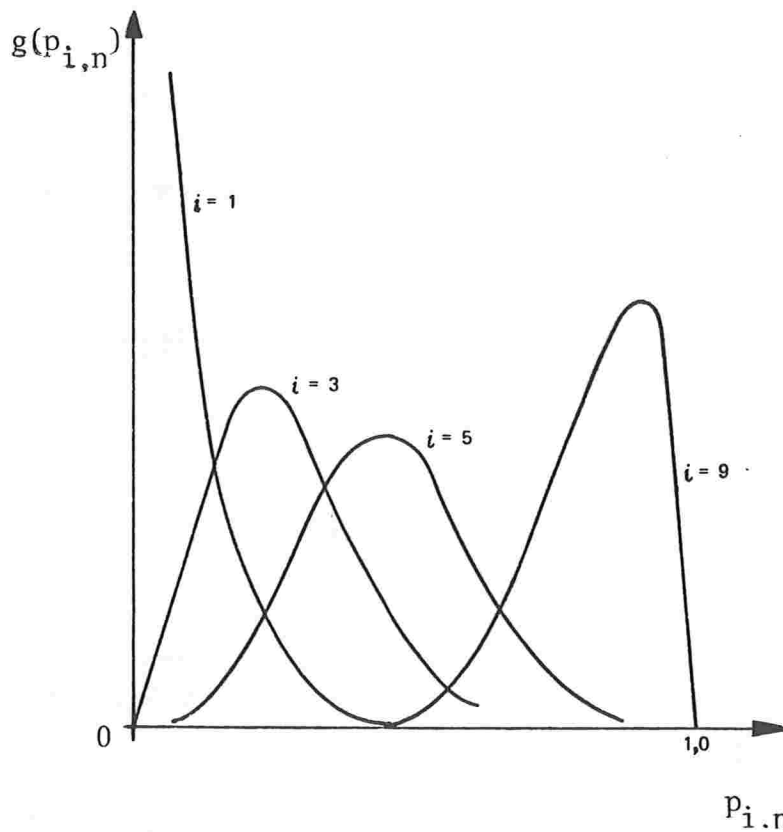


Fig.2.2 - Distribuição de postos para uma amostra de tamanho 10

É importante notar que na obtenção da distribuição de ordem ou posto a única suposição feita foi a de que $F(x)$ era diferenciável.

Assim a distribuição de posto não se aplica exclusivamente a distribuição de Weibull, porém seria igualmente válida para as distribuições lognormal, Rayleigh, exponencial, normal ou outras distribuições contínuas.

Como $P_{i,n}$ é uma v.a. estamos frente ao problema de escolher um único valor representativo de $P_{i,n}$ para utilizar no papel de Weibull.

Com essa finalidade consideraremos várias alternativas.

A primeira delas é o valor médio de $P_{i,n}$.

$$\begin{aligned} E(P_{i,n}) &= \int_0^1 p_{i,n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p_{i,n}^{i-1} (1-p_{i,n})^{n-i} dp_{i,n} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n-i+1+i+1)} = \frac{i}{n+1} \quad \Rightarrow (2.4) \end{aligned}$$

Isto significa que o valor médio da fração que falha antes da i -ésima observação ordenada em uma amostra de tamanho n é igual a $\frac{i}{n+1}$ o que difere significativamente de $\frac{i}{n}$ [que seria uma estimativa natural da $F(x_{i,n})$] para valores pequenos de n .

Uma segunda alternativa para o $P_{i,n}$ seria o valor

mediano, comumente chamado de posto ou ordem mediana.

A sua obtenção já é bem mais difícil.

Consideremos a integral

$$P = \int_0^{\tilde{x}} g(p_{i,n}) dp_{i,n} \quad \Rightarrow (2.5)$$

onde a $g(p_{i,n})$ é dada pela (2.3).

O valor de \tilde{x} para o qual $P=0,50$ será o valor media no desejado.

A integral (2.5) pode ser escrita na forma

$$I_{\tilde{x}}(i, n-i+1) = \frac{B_{\tilde{x}}(i, n-i+1)}{B(i, n-i+1)} \quad \Rightarrow (2.6)$$

onde $B_x(m, n) = \int_0^x y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy$ é a função beta incompleta.

As razões da beta incompleta $I_x(m, k)$ de há muito foram tabuladas por Karl Pearson [87].

Dessa forma para vários valores de $P=I_{\tilde{x}}(i, n-i+1)$ os valores de \tilde{x} podem ser facilmente obtidos.

Uma aproximação do valor do posto mediano é dada por,

$$\tilde{x} = \frac{i-0,3}{n+0,4} \quad \Rightarrow (2.7)$$

Utilizaremos essa aproximação em um exemplo.

Nesse ponto temos dois possíveis candidatos para o valor de $F(x_{i,n})$, são pela ordem

1) - o valor médio dado por $E[F(x_{i,n})] = \frac{i}{n+1}$

2) - o valor mediano dado por $\tilde{F}(x_{i,n}) \cong \frac{i-0,3}{n+0,4}$

Ambos os valores são encontrados em uso.

O valor médio é utilizado porque a média é comumente tomada como um valor representativo da amostra de uma distribuição.

Contudo em distribuições fortemente assimétricas como ocorre com a maior parte das distribuições de ordem a mediana pode ser o valor que descreve melhor a situação.

As distribuições de ordem são sistematicamente assimétricas da direita para a esquerda a medida que se vai do valor mais baixo para o mais alto da amostra. } ?

Dessa forma a probabilidade de um valor amostral cair abaixo do valor médio é alta para os primeiros valores ordenados da amostra e baixa para os últimos valores ordenados da amostra.

Isto implica no fato de que se a técnica de desenho adotada é a do posto médio, a posição designada para a primeira observação será provavelmente muito alta e o posto designado para a última observação muito baixa com sucessivas mudanças no erro para as observações intermediárias.

Dessa forma o coeficiente angular poderá ser subestimado.

Aliás esse é o argumento básico a favor da utilização de posições diferentes que os postos médios.

Por exemplo White [99] considera

$X_{i,n} = \ln T_{i,n}$ onde T segue a distribuição de Weibull, criando a chamada distribuição *log-Weibull* e a seguir calcula

$E(Z_{i,n})$ onde $Z_{i,n} = \frac{X_{i,n}^{-\eta}}{\xi}$ e

$$\begin{cases} \eta = \ln \theta \\ \xi = \frac{1}{\beta} \end{cases} \quad \rightarrow (2.8)$$

Aliás se o papel de probabilidade não é usado, pode-se representar o i -ésimo logaritmo natural ordenado do tempo observado da falha diretamente contra $v_{i,n}$ que é algum valor característico da estatística de ordem reduzida

$$Z_{i,n} = \frac{X_{i,n}^{-\eta}}{\xi}$$

O valor característico que normalmente se escolhe é a média, a mediana ou a moda de $Z_{i,n}$.

Nancy Mann publicou também uma tabela de valores esperados de $Z_{i,n}$ [65].

Kimball[50] fez um estudo comparando 'alguns' dos candidatos as possíveis posições gráficas $P_{i,n}$.

Os resultados estão reunidos na Tab.2.2

Esses resultados baseiam-se em amostras completas de tamanho 6 e consideram apenas a estimação do parâmetro de forma β .

Convenções de desenho	Vies/ β	E.M.Q./ β^2
1) $v_{i,n} = \ln\{\ln \frac{1}{1-p_{i,n}}\}; p_{i,n} = \frac{1}{n+1}$	0,2284	0,3011
2) $v_{i,n} = \ln\{\ln \frac{1}{1-p_{i,n}}\}; p_{i,n} = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}}$	0,0220	0,1758
3) $v_{i,n} = \ln\{\ln \frac{1}{1-p_{i,n}}\}; p_{i,n} = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$	-0,0547	0,1543
4) $v_{i,n} = E[Z_{i,n}]$	0	0,1686
5) $v_{i,n} = \text{mediana de } Z_{i,n}$	0,0632	0,1928
6) $v_{i,n} = \text{moda de } Z_{i,n}$	0,1916	0,2692

Fonte: Kimball [50]

Tab.2.2 - Comparação de Kimball para as posições de desenho para estimar o parâmetro de forma β .

Se pudessem ser feitas generalizações com base no trabalho de Kimball (Tab.2.2) diríamos que a convenção 3 nos dá o menor erro médio quadrático (E.Q.M.)

Aliás Hazen [38] foi o primeiro a usar $p_{i,n} = \frac{i-1/2}{n}$

Foi Blom [4] que recomendou o uso da posição de desenho $p_{i,n} = \frac{i-3/8}{n + \frac{1}{4}}$

Como se pode perceber essa é a convenção mais próxima da 4ª convenção $[E(Z_{i,n})]$.

A convenção baseada em $p_{i,n} = \frac{i}{n+1}$ é frequentemente usada possivelmente porque $\frac{i}{n+1}$ é o valor esperado da $F(X_{i,n})$

A convenção baseada em $p_{i,n}$ igual ao posto mediano da i -ésima estatística de ordem reduzida ($v_{i,n}$ igual a mediana de $Z_{i,n} = \frac{\bar{X}_{i,n} - \eta}{\xi}$) é também usada e esse procedimento foi descrito por Johnson [42].

Deve-se observar que todas as convenções de desenho dadas na Tab. 2.2 são funções somente de i e n e não variam com o número de interrupção r.

Portanto a representação gráfica que se discutiu aplica-se tanto a amostras completas como a amostras que sofreram interrupção ou censura.

★ EXEMPLO 2.1

Cinco componentes foram colocados em um teste e ob

servaram-se falhas nos instantes

67, 120, 130, 220 e 290 h.

Vamos obter através do gráfico estimativas de θ e β e daí uma estimativa para μ .

É óbvio que estamos supondo que a amostra provém de uma população de Weibull.

Observação (i)	Instante de falha $t_{i,5}$ em horas	Posto médio $p_{i,5} = \frac{i}{6}$	Convenção de Hazen $p_{i,5} = \frac{i-0,5}{5}$	Posto mediano aproximado $p_{i,5} = \frac{i-0,3}{5,4}$
1	67	0,167	0,10	0,129
2	120	0,333	0,30	0,314
3	130	0,500	0,50	0,500
4	220	0,667	0,70	0,686
5	290	0,833	0,90	0,871

Tab. 2.3

Embora as diferenças entre os valores dos postos mé-
dio e mediano sejam numericamente pequenas, as retas dese-
nhadas podem diferir significativamente como um resultado da
escala utilizada no papel de Weibull.

Nas Fig. 2.3 a, b e c temos as três representa-
ções.

O problema mais grave da estimação gráfica ocorre
quando os pontos não caem em uma "reta perfeita" devido ao
erro amostral e a melhor reta precisa ser ajustada visual-
mente aos dados.

O procedimento de ajuste por mínimos quadrados po-
de ser utilizado, contudo isto faz com que se desvie do pro-
pósito básico ou seja fazer a estimação gráfica.

Da linha reta básica que desenhou-se no papel de
Weibull o β é estimado pelo seu coeficiente angular.

O papel que utilizamos tem a constante (que leva em
conta os módulos das escalas vertical e horizontal) igual a
 $k = 3,464$

Dessa forma

$$\hat{\beta} = k \cdot \frac{d_v}{d_h} = 3,464 \cdot \frac{d_v}{d_h} \quad \rightarrow (2.9)$$

onde d_v e d_h são as distâncias medidas em milímetros na ver-
tical e horizontal respectivamente conforme indicado em qual-
quer trabalho de Nomografia.

O parâmetro da vida característica θ pode ser estimado lembrando que $F(t=\theta) \approx 0,632$.

Dessa forma projetando o ponto 63,2% do eixo das ordenadas até o correspondente valor nas abscissas, obtemos uma estimativa para θ .

Nas Fig. 2.3a,b,c temos $\hat{\theta}=190h$.

Aliás fizemos isto mais ou menos de propósito para perceber a variação no β e no μ .

Convenção de desenho	Estimativa para o β	Estimativa para o μ $[\hat{\mu}=\hat{\theta} \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})]$
Posto médio	$\hat{\beta} = 3,464 \cdot \frac{23}{50} \approx 1,594$	$\hat{\mu} = 190\Gamma(1 + \frac{1}{1,594}) \approx 170,3h$
Hazen	$\hat{\beta} = 3,464 \cdot \frac{27}{50} \approx 1,871$	$\hat{\mu} = 190\Gamma(1 + \frac{1}{1,871}) \approx 168,7h$
Posto mediano aproximado	$\hat{\beta} = 3,464 \cdot \frac{24}{50} \approx 1,662$	$\hat{\mu} = 190\Gamma(1 + \frac{1}{1,662}) \approx 169,7h$

Tab. 2.4

A média calculada dos dados originais é

$$\hat{\mu} = \frac{67+120+130+220+290}{5} = 165,4$$

Como os erros gráficos são inevitáveis é necessário ressaltar que quando desejarmos precisão devemos adotar o método analítico.

★ EXEMPLO 2.2 - Caso de vida mínima não nula

Consideremos os dados da Tab. 2.5a na qual temos a vida de rodas de esmeril medida em número de peças produzidas.

Vamos mostrar que o modelo de previsão da vida poderia ser a Weibull triparamétrica.

Número de esmeril (i)	Peças executadas pelo esmeril ($t_{i,8}$)
1	22.000
2	25.000
3	30.000
4	33.000
5	35.000
6	52.000
7	63.000
8	104.000

Tab. 2.5 a

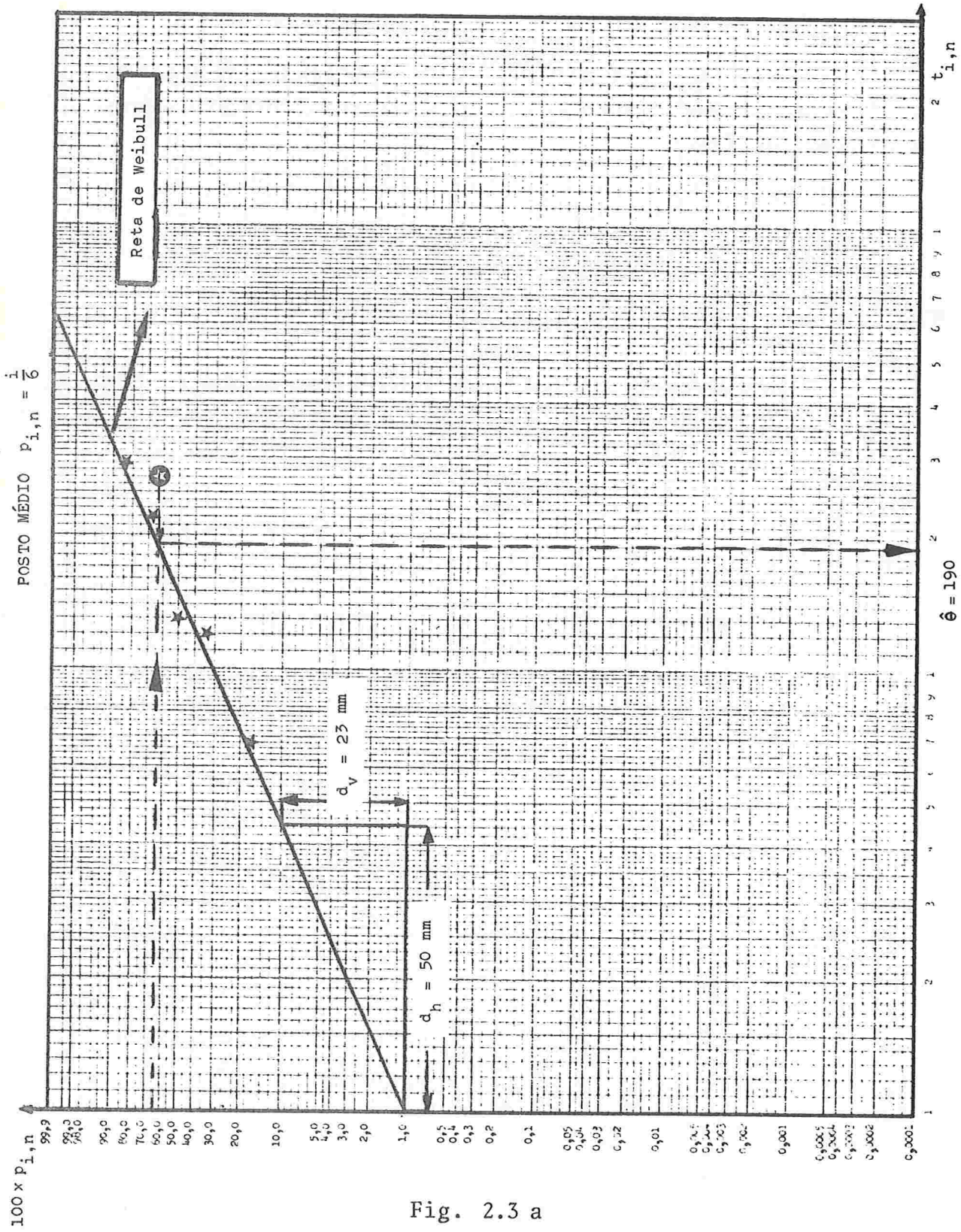


Fig. 2.3 a

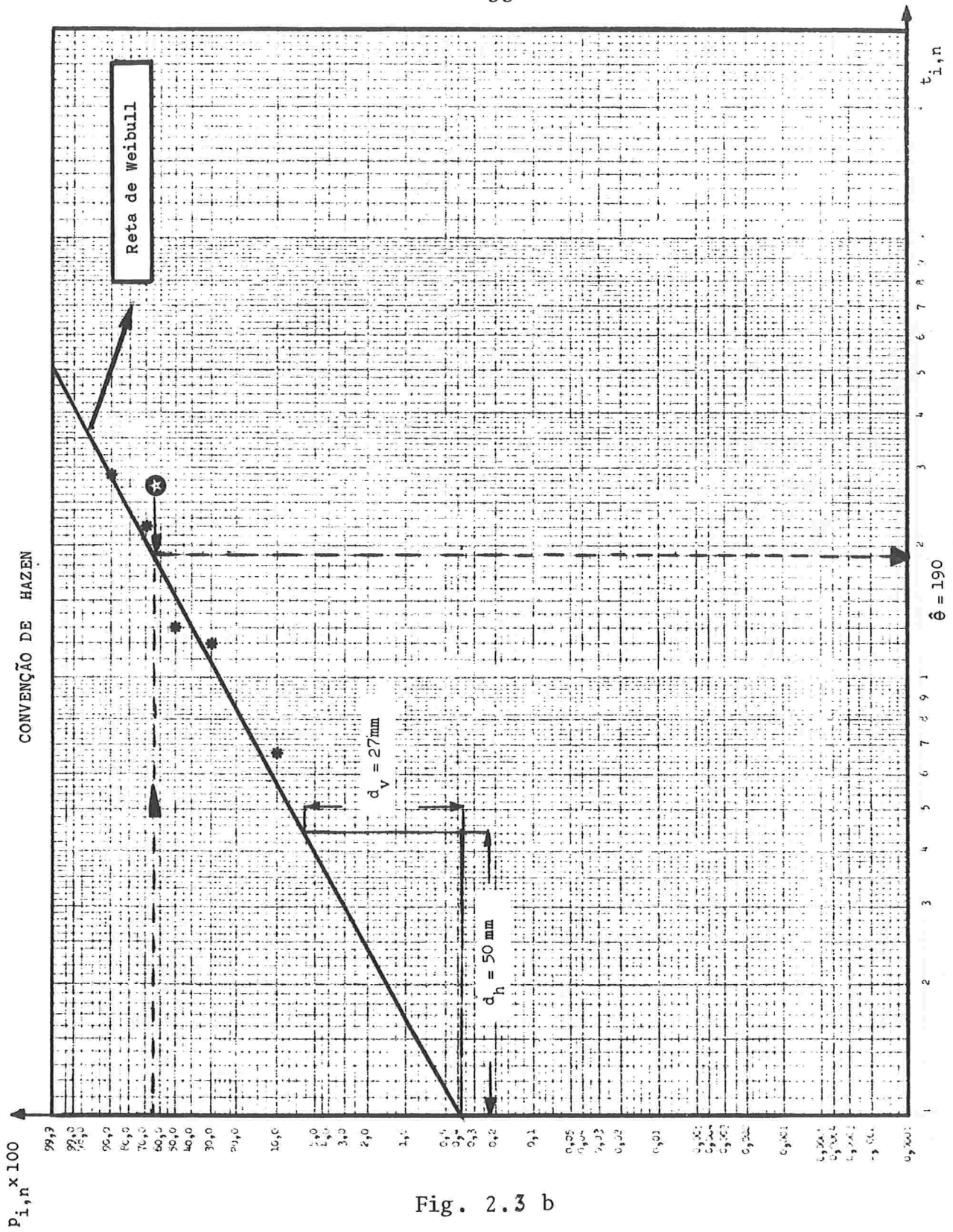


Fig. 2.3 b

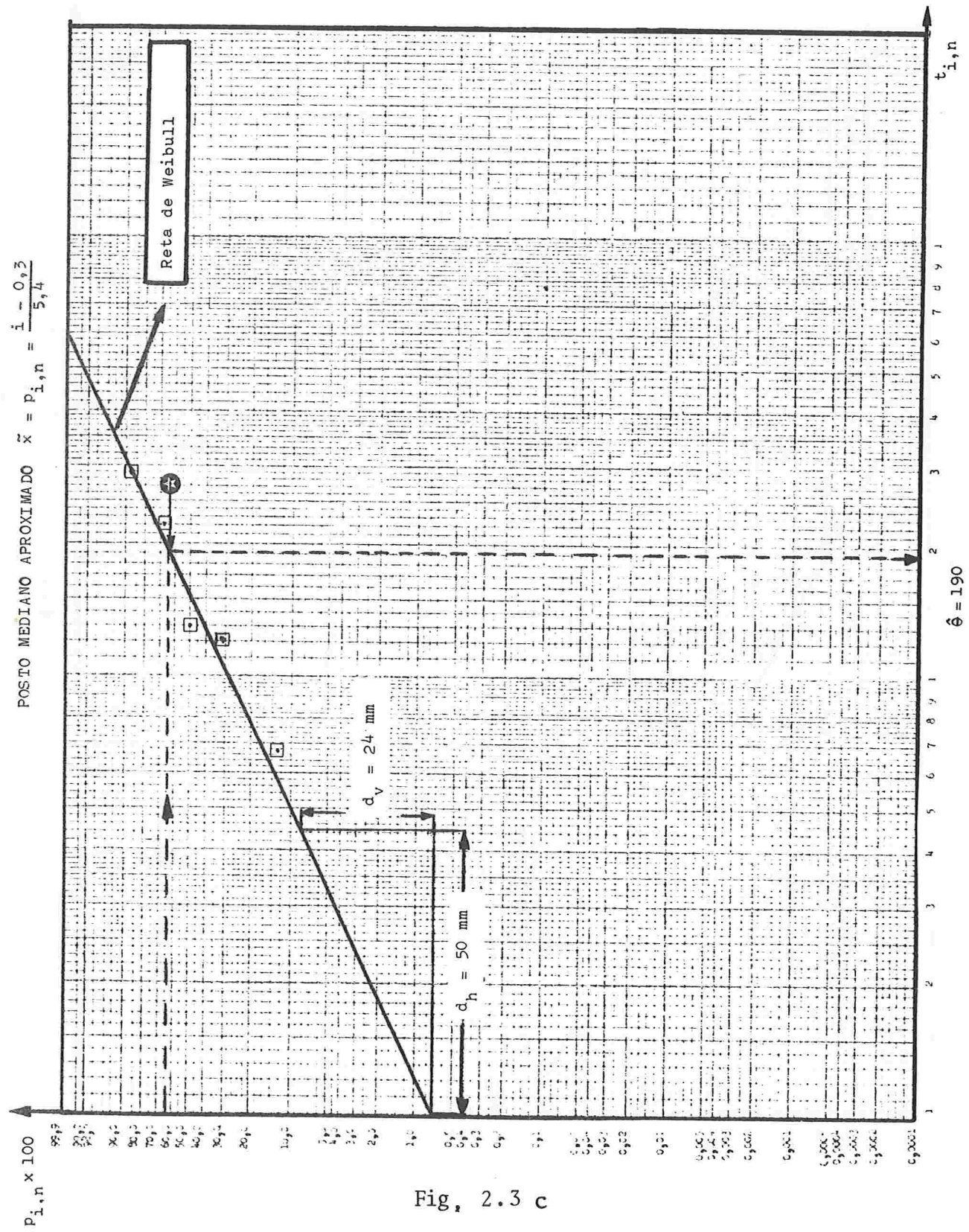


Fig. 2.3 c

Representando esses pontos no papel de Weibull com a utilização do posto mediano aproximado temos a Fig.2.4a.

i	$p_{i,8} = \tilde{x} = \frac{i-0,3}{8,4}$	$t_{i,8} - 19.600$
1	0,083	2.400
2	0,203	5.400
3	0,321	10.400
4	0,440	13.400
5	0,560	15.400
6	0,679	32.400
7	0,798	43.400
8	0,917	84.400

Tab. 2.5.b

Como se vê obtem-se uma curva côncava.

Nessas condições se o modelo de Weibull for conveniente, ele possui uma vida mínima que não é nula.

Da (1.2) temos:

$$\ln(\ln \frac{1}{1-F(t)}) = \beta \ln(t-\delta) - \beta \ln(\theta_1 - \delta) \quad \rightarrow (2.10)$$

Assim se subtrairmos a vida mínima de cada observação $t_{i,n}$ o resultado seria uma linha reta.

Contudo, quando desenhamos sobre o papel de Weibull não podemos saber a priori que a vida mínima produzirá uma curva.

Para o nosso caso particular sabemos que a *vida mínima* δ está localizada entre zero e a "leitura" mais baixa que é 22.000 peças.

Podemos escolher o valor mais baixo na amostra como um estimador para a vida mínima porém esse estimador é viciado para cima (veremos isso no §2.3).

É mais conveniente selecionar um valor levemente menor que o menor valor amostral, digamos $0,9t_{1,8}$.

Nesse caso escolhemos arbitrariamente $\hat{\delta}=19600$.

Usaremos esse valor como uma estimativa inicial e iremos subtrair $\hat{\delta}$ de cada valor dos dados originais (veja a

Tab. 2.5 b.)

Deve-se então fazer um novo gráfico para esses dados.

Se a primeira estimativa $\hat{\delta}$ é muito grande, o gráfico apresentará uma curva convexa, caso seja muito pequena a curva continuará ainda com o seu aspecto côncavo.

Normalmente é preciso aplicar o método das tentativas até que se chegue a uma situação de *ajuste razoável*.

A Fig. 2.4 b mostra que os dados "arrumados" da Tab. 2.5b ajustam-se *razoavelmente bem*.

$$\text{As estimativas dos parâmetros são } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\delta} = 19600 \text{ peças} \\ \hat{\theta} = 24500 \text{ peças} \\ \hat{\beta} = 0,90 \\ \hat{\theta}_1 = \hat{\delta} + \hat{\theta} = 44100 \text{ peças} \end{array} \right.$$

$\hat{\theta} = \hat{\theta}_1 - \hat{\delta} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \hat{\theta} + \hat{\delta}$

Se quisermos a função de confiabilidade estimada então, em vista da (1.2) e (1.6) temos:

$$\hat{C}(t) = e^{-\left(\frac{t-19600}{24500}\right)^{0,90}} \quad \text{para } t \geq 19600$$

Se for de interesse por exemplo estimar graficamente o ponto no qual 10% das rodas de esmeril estarão gastas pelo uso encontraremos da Fig. 2.4 b 2000 peças e so-

mando esse valor à vida mínima estimada obteremos 21600 peças.

Atualmente devido aos trabalhos de Johnson [43] tem-se desenvolvido muito a análise gráfica com unidades retiradas do teste, usando os postos medianos.

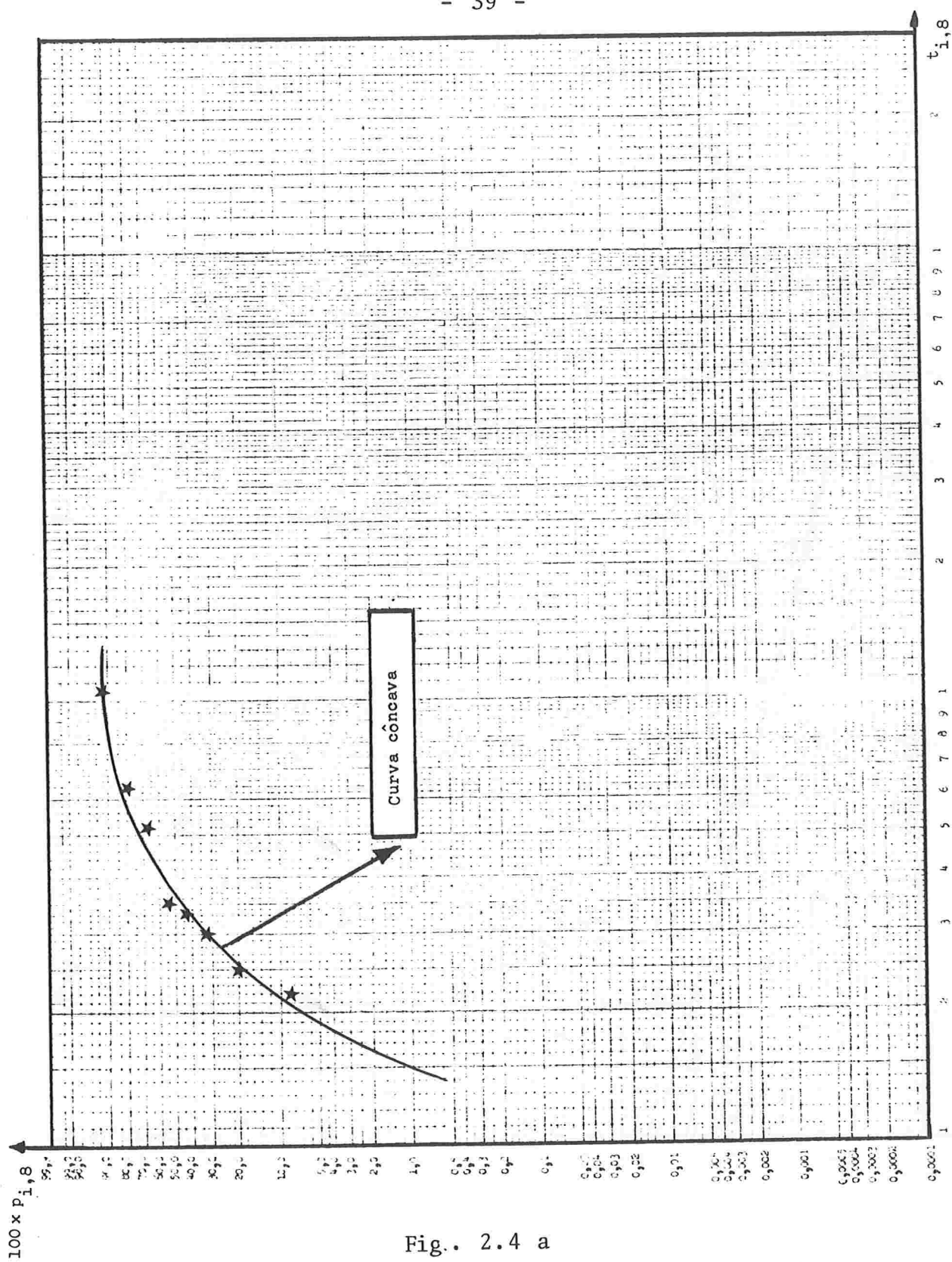


Fig.. 2.4 a

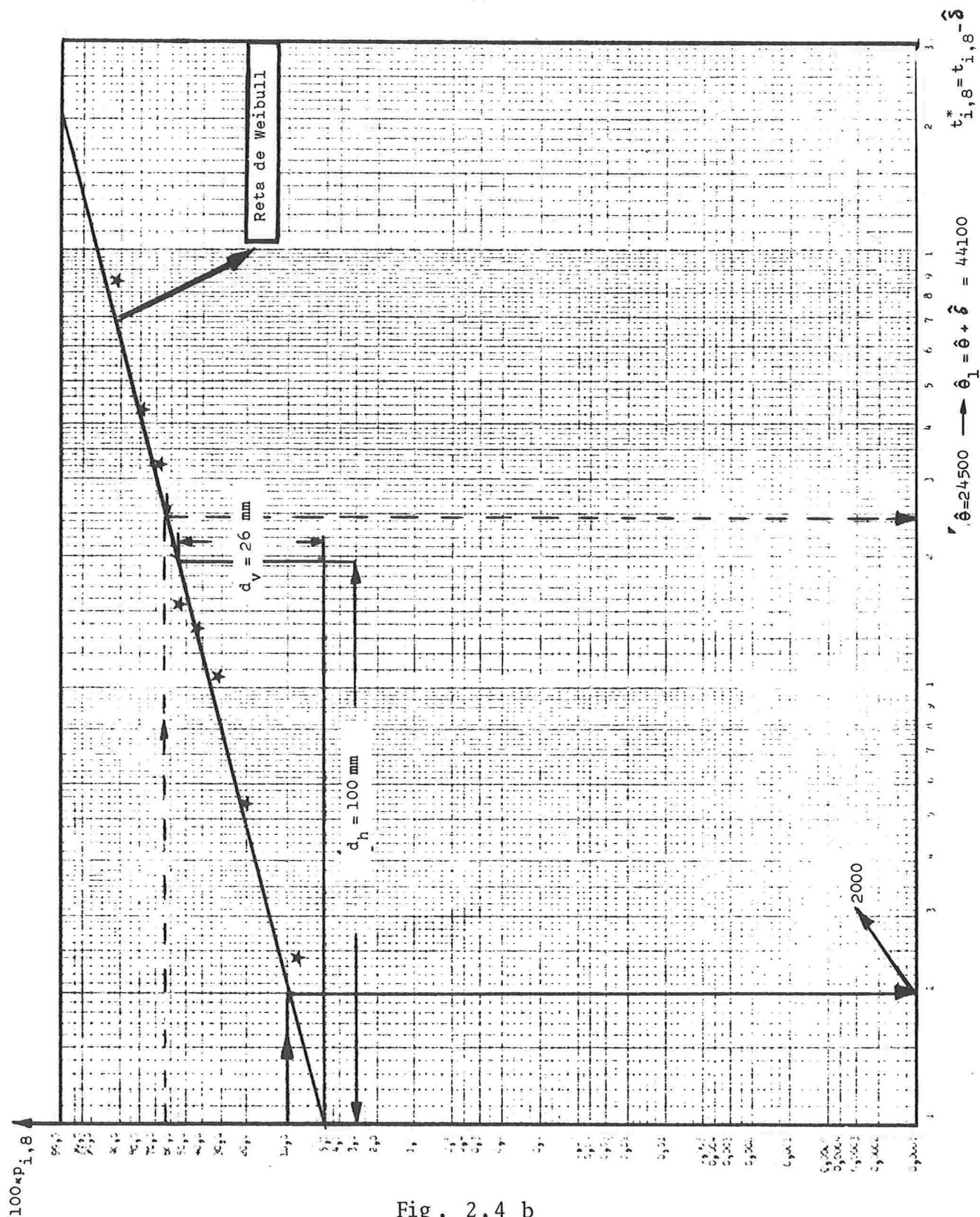


Fig . 2.4 b

2.2 - ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA - E.M.V.
ESTIMAÇÃO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS MOMENTOS.

Estimativas analíticas dos parâmetros da distribuição de Weibull, quando todos são desconhecidos, podem ser obtidas através de um método iterativo.

O método frequentemente utilizado é o da *máxima verossimilhança*.

A função de verossimilhança (F.V.) para amostras completas de tamanho n no caso da Weibull biparamétrica é

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n; \beta, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{\beta}} \quad \Rightarrow (2.11)$$

Fazendo $\theta^{\beta} = \theta^*$ na (2.11) e a seguir tomando o logaritmo natural de ambos os membros, derivando e igualando a zero obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{\theta^*} \sum_{i=1}^n t_i^{\beta} \ln t_i = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta^*} = -\frac{n}{\theta^*} + \frac{1}{\theta^{*2}} \sum_{i=1}^n t_i^{\beta} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (2.12)$$

Eliminando o θ^* entre as duas equações e simplificando obtemos

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad \Rightarrow (2.13)$$

Resolvendo-se a (2.13) obtemos o E.M.V. $\hat{\beta}$.

Isto pode ser obtido com a ajuda de procedimentos iterativos como o método de Newton-Raphson.

Daí

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \quad \Rightarrow (2.14)$$

Para amostras censuradas uma única vez quer do tipo I quer do tipo II a F.V. é:

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r \frac{\beta}{\theta^*} t_i^{\beta-1} e^{-\frac{t_i^\beta}{\theta^*}} \right] \cdot [1-F(t_f)]^{n-r} \quad \Rightarrow (2.15)$$

onde na censura do tipo I o tempo de término ou finalização do teste é $t_f = t_0$ e na censura do tipo II, $t_f = t_r$ (como no momento não existe nenhum perigo de confusão evitamos a notação $t_{r,n}$). Da (2.15) vem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln t_i - \frac{1}{\theta^*} \sum_{i=1}^r t_i^\beta \ln t_i = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta^*} = - \frac{r+1}{\theta^* \theta^{*2}} \sum_{i=1}^r t_i^\beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (2.16)$$

onde \sum^\star significa que a soma se estende sobre a amostra completa atribuindo-se aos $n-r$ sobreviventes o tempo de vida t_f isto é t_0 ou t_r

$$\text{Em particular } \begin{cases} \sum^\star t_i^\beta \ln t_i = \sum_{i=1}^r t_i^\beta \ln t_i + (n-r) t_f^\beta \ln t_f \\ \sum^\star t_i^\beta = \sum_{i=1}^r t_i^\beta + (n-r) t_f^\beta \end{cases} \quad \Rightarrow (2.17)$$

De (2.16) vem:

$$\frac{\sum^\star t_i^\beta \ln t_i}{\sum^\star t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_i \quad \Rightarrow (2.18)$$

que pode ser resolvida para β empregando técnicas de Cálculo Numérico.

Determinado $\hat{\beta}$, pode-se obter $\hat{\theta}^*$ através da expressão

$$\hat{\theta}^* = \frac{\sum^\star t_i^{\hat{\beta}}}{r} \quad \Rightarrow (2.19)$$

No caso de uma amostragem censurada progressivamente em k estágios [ver a (1.16)] a F.V. é

$$L = C \prod_{i=1}^r f(t_i) \prod_{i=1}^k [1 - F(t_i^*)]^{r_i} \quad \Rightarrow (2.20)$$

onde os t_i^* são fixos, $f(t)$ e $F(t)$ são as f.d. e F.D. dadas respectivamente através da (1.3) e (1.4) e C é uma constante.

De (2.20) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ell_{NL}}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ell_{nt_i} - \frac{1}{\theta^*} \sum^{***} t_i^\beta \ell_{nt_i} = 0 \\ \frac{\partial \ell_{NL}}{\partial \theta^*} = - \frac{r}{\theta^*} + \frac{1}{\theta^{*2}} \sum^{***} t_i^\beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (2.21)$$

onde \sum^{***} significa a soma sobre toda a amostra com as r_i unidades retiradas no instante t_i^* , tendo $t_i = t_i^*$

Mais especificamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum^{***} t_i^\beta \ell_{nt_i} = \sum_{i=1}^r t_i^\beta \ell_{nt_i} + \sum_{i=1}^k r_i t_i^\beta \ell_{nt_i} \\ \sum^{***} t_i^\beta = \sum_{i=1}^r t_i^\beta + \sum_{i=1}^k r_i t_i^\beta \end{array} \right. \Rightarrow (2.22)$$

Eliminando o θ^* entre as duas equações (2.21) temos

$$\frac{\sum^{***} t_i^\beta \ell_{nt_i}}{\sum^{***} t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ell_{nt_i} \Rightarrow (2.23)$$

que pode ser resolvida dando o $\hat{\beta}$.

Daí vem:

$$\hat{\theta}^* = \frac{\sum_{i=1}^r \hat{\beta}_i}{r} \quad \Rightarrow (2.24)$$

Variâncias e covariâncias das estimativas

A matriz assintótica das variâncias-covariâncias [M.A.V.C.] de $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}^*$ é obtida invertendo a matriz de informação cujos elementos são valores esperados das derivadas de 2ª ordem dos logaritmos da F.V. com o sinal menos (-) na frente.

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \theta^*} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} \\ -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^* \partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} & -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^{*2}} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} V(\hat{\beta}) & \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\theta}^*) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\theta}^*) & V(\hat{\theta}^*) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow (2.25)$$

Na presente situação parece mais apropriado aproximar os valores esperados pelos E.M.V.

Dessa forma teremos:

a) - Amostras completas

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= \frac{n+1}{\hat{\beta}^2 \hat{\theta}^*} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} (\ln t_i)^2 \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \hat{\theta}^*} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \hat{\theta}^* \partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = - \frac{1}{(\hat{\theta}^*)^2} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \ln t_i \Rightarrow (2.26) \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\hat{\theta}^*)^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= - \frac{n}{(\hat{\theta}^*)^2} + \frac{2}{(\hat{\theta}^*)^3} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \end{aligned} \right.$$

b) - Amostras interrompidas uma única vez

$$\left\{ \begin{aligned} - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= \frac{r+1}{\hat{\beta}^2 \hat{\theta}^*} \sum^{\star} t_i^{\hat{\beta}} (\ln t_i)^2 \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \hat{\theta}^*} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \hat{\theta}^* \partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = - \frac{1}{(\hat{\theta}^*)^2} \sum^{\star} t_i^{\hat{\beta}} \ln t_i \Rightarrow (2.27) \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\hat{\theta}^*)^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} &= - \frac{r}{(\hat{\theta}^*)^2} + \frac{2}{(\hat{\theta}^*)^3} \sum^{\star} t_i^{\hat{\beta}} \end{aligned} \right.$$

c) - Amostras interrompidas progressivamente

$$\begin{cases} - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = \frac{r+1}{\hat{\beta}^2 \hat{\theta}^*} \sum^{\star\star} t_i \hat{\beta} (\ln t_i)^2 \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \theta^*} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^* \partial \beta} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = \frac{1}{(\hat{\theta}^*)^2} \sum^{\star\star} t_i \hat{\beta} \ln t_i \rightarrow (2.28) \\ - \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\theta^*)^2} \Big|_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = - \frac{r}{(\hat{\theta}^*)^2} + \frac{2}{(\hat{\theta}^*)^3} \sum^{\star\star} t_i \hat{\beta} \end{cases}$$

Embora os resultados acima sejam válidos, no sentido estrito, somente para as grandes amostras, fornecem uma aproximação razoável para estimar variâncias e covariâncias para amostras com tamanhos moderados.

Para amostras pequenas é necessário reconhecer que os erros devido ao "viés" as vezes excedem em muito os erros induzidos pela estimativa das variâncias para amostras grandes.

Essa é sem dúvida uma área que necessita de uma investigação mais acurada no que diz respeito a distribuição de Weibull.

★ EXEMPLO 2.3 - Exemplo de Menon [80] com uma análise de Cohen [11].

Tem-se uma amostra completa proveniente de uma distribuição de Weibull com $\beta=0,5$ e $\theta^*=\sqrt{e}$ portanto

$$\theta = e = 2,71828....$$

Os dados são:

$\textcircled{1} 0,806$ $57,628$ $\textcircled{14} 1,550$ $\textcircled{17} 7,057$
 $\textcircled{9} 0,664$ $\textcircled{2} 1,033$ $\textcircled{8} 9,098$ $\textcircled{15} 2,046$
 $\textcircled{5} 0,345$ $\textcircled{16} 3,532$ $\textcircled{10} 0,470$ $\textcircled{4} 0,185$
 $\textcircled{1} 0,001$ $\textcircled{11} 0,970$ $\textcircled{3} 0,505$ $\textcircled{6} 0,435$
 $\textcircled{20} 0,469$ $\textcircled{7} 0,071$ $\textcircled{12} 0,030$ $\textcircled{13} 1,550$

Vamos achar as estimativas de β e θ^* assim como os erros (M.A.V.C.)

Os dados acima fornecem as seguintes informações:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 20 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i = 88,445 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i^2 = 3479,170201 \\ \sum_{i=1}^{20} \ln t_i = -8,302 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20} = 4,42225 \text{ (média amostral)} \\ s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (t_i - \bar{t})^2}{19} = 162,5286 \text{ (variância amostral)} \\ (C.V.)^2 = 8,3098 \rightarrow C.V. = 2,882 \text{ (coeficiente de variação)} \end{array} \right.$$

O coeficiente de variação (C.V.) permite obter uma estimativa através do método dos momentos e uma primeira aproximação para o E.M.V. de β .

De (1.8), (1.9) e (1.10) temos:

$$(C.V.)^2 = \frac{V(X)}{\mu_1^2} = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})}{\Gamma^2(1+1/\beta)} \quad \rightarrow (2.29)$$

ou

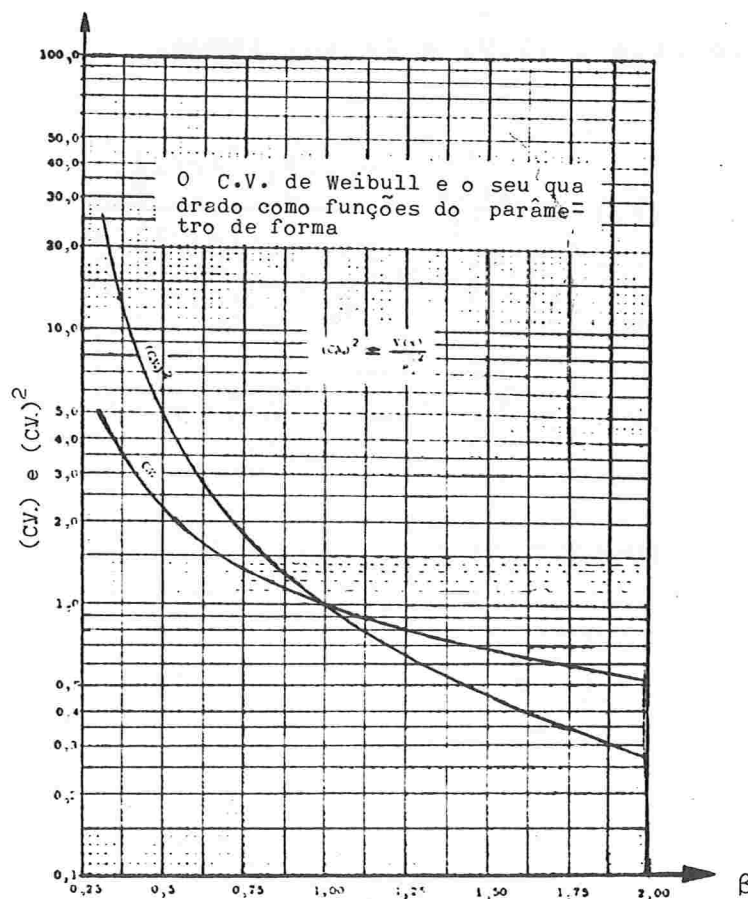
$$C.V. = \frac{\sqrt{\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)}}{\Gamma(1+1/\beta)} \quad \rightarrow (2.30)$$

Daí pode-se obter a Tab. 2.6.

β	$(C.V.)^2$	C.V.
1/3	19	4,3589
1/2	5	2,361
0,8	1,5904	1,2611
1,0	1	1
5/4	0,6480	0,8050
5/3	0,3801	0,6165
2,0	0,2732	0,5227
3,0	0,1323	0,3637
4,0	0,0787	0,2805

Tab. 2.6

O gráfico da Fig. 2.5 é obtido usando-se os valores da Tab. 2.6.



Fonte: Cohen [11]

Fig. 2.5

Com a quantidade $\frac{s^2}{\bar{t}^2}$ igualada a $\frac{V(X)}{\mu_1'^2} = (C.V.)^2$ a es

timativa pelo método dos momentos de $\beta, \beta^{(m)}$ pode ser lida diretamente da Fig. 2.5, com precisão de ao menos uma decimal e talvez duas.

Esse valor, assim lido, fornecerá uma aproximação inicial satisfatória para iniciar o método iterativo do E.M.V.

Em muitos casos a estimativa por momentos dá uma precisão tão boa que nenhuma melhoria ocorre através das sucessivas iterações.

Entrando na Fig. 2.5 com C.V.=2,882 obtemos $\beta^{(m)} \approx 0,43$

Para obter o E.M.V. de β pode-se "tentar" uma análise numérica para β variando entre 0,4 e 0,5 e usar a função $\phi(\beta)$ tal que:

$$\phi(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i^\beta \ln t_i}{\sum_{i=1}^{20} t_i^\beta} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \ln t_i = 0$$

Pode-se calcular

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,4} = 23,580 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,4} \ln t_i = 27,661 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,5} = 27,007 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,5} \ln t_i = 41,637 \end{array} \right.$$

Daí tira-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0,4) = - 0,9118 \\ \phi(0,5) = - 0,0432 \end{array} \right.$$

Como ambos $\phi(0,4)$ e $\phi(0,5)$ são negativos devemos calcular $\phi(\beta)$ para um novo valor, por exemplo $\beta=0,6$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,6} = 32,086 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,6} \ln t_i = 61,018 \end{array} \right. \longrightarrow \phi(0,6) = 0,6501$$

Para obter a estimativa necessária podemos interpolar linearmente como mostrado abaixo:

β	$\phi(\beta)$
0,500	-0,0432
0,506	0
0,600	0,6501

Tab. 2.7

Portanto temos $\boxed{\beta = 0,506}$

Para obter $\hat{\theta}^*$ devemos calcular $\sum_{i=1}^{20} t_i^{0,506} = 27,261$ e de (2.14) vem:

$$\boxed{\hat{\theta}^* = 1,363}$$

Em vista da (1.8) temos a seguinte estimativa $\theta^{*(m)}$

pelo método dos momentos

$$\theta^*(m) = \left[\frac{\bar{t}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta^{(m)}} + 1\right)} \right]^{\beta^{(m)}} \quad \rightarrow (2.31)$$

Isto é igualou-se μ_1' a \bar{t} e resolveu-se em θ^*

Na Tab. 2.8 estão comparadas as estimativas obtidas pelo método dos momentos e de máxima verossimilhança.

Parâmetros	Valores populacionais	Método dos momentos	Método da máxima verossimilhança
β	0,5000	0,430	0,506
θ^*	1,649	1,226	1,363

Tab. 2.8

Com o intuito de calcular a M.A.V.C. devemos calcular inicialmente

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,506} \ln t_i = 42,611596 \\ \sum_{i=1}^{20} t_i^{0,506} (\ln t_i)^2 = 166,254404 \end{cases}$$

Pode-se agora calcular as derivadas parciais necessárias que aparecem em (2.26) obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} 200,09 & -22,94 \\ -22,94 & 10,77 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,007 & 0,014 \\ 0,014 & 0,123 \end{bmatrix}$$

Daí temos:

$$\begin{cases} V(\hat{\beta}) = 0,007 \\ V(\hat{\theta}^*) = 0,123 \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\theta}^*) = 0,014 \end{cases} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Coeficiente de} \\ \text{correlação en-} \\ \text{tre as estima-} \\ \text{tivas.} \end{array} \quad \rho_{\hat{\beta}, \hat{\theta}^*} = \frac{\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\theta}^*)}{\sqrt{V(\hat{\beta})V(\hat{\theta}^*)}} = 0,48$$

Os cálculos para amostras censuradas ou incompletas são essencialmente os mesmos que para as amostras completas e não apresentam qualquer complicação anormal.

Como em testes de vida e fadiga, observações individuais são ordenadas no tempo, é uma prática comum cessar ou parar o teste antes que ocorra a falha de todas as unidades.

Em um caso típico, o teste pode terminar em um único estágio com apenas uma interrupção.

Em muitos casos entretanto as interrupções ocorrem em estágios sucessivos.

Existem já muitos trabalhos sobre amostragem com

censura progressiva ou de múltiplos estágios e entre eles destacam-se Herd(1957), Roberts(1962), Cohen(1963), (1965), Harter e Moore(1965), Ringer e Sprinkle(1972), Wingo(1973), Lemon(1974) e possivelmente outros.

Consideraremos agora o caso particular dos E.M.V. - dos parâmetros da distribuição de Weibull triparamétrica utilizando amostragem com censura múltipla do tipo I ou seja os t_i^* são fixos e o número de sobreviventes nesses instantes são as v.a..

A F.V. tem a forma (2.20) com a diferença que agora a f.d. e a F.D. são dadas respectivamente pela (1.1) e (1.2).

O logaritmo natural da (2.20) dá:

$$\ln L = r \ln \beta - r \ln \psi + (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \delta) - \frac{1}{\psi} \sum^{**} (t_i - \delta)^\beta + \ln C \quad \Rightarrow (2.32)$$

onde

$$\psi = (\theta_1 - \delta)^\beta \quad \Rightarrow (2.33)$$

Como anteriormente \sum^{**} significa a soma sobre todas as n observações atribuindo-se as r_i observações censuradas no instante t_i^* o valor $t_i = t_i^*$ de forma que

$$\sum^{**} (t_i - \delta)^\beta = \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^\beta + \sum_{i=1}^k r_i (t_i^* - \delta)^\beta \quad \Rightarrow (2.34)$$

Para $\beta > 1$ as equações que permitem obter os E.M.V. vem de (2.32) derivando-se a mesma em β , ψ e δ e igualando, a zero.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ell n L}{\partial \beta} = \frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \delta) - \frac{1}{\psi} \sum^{**} (t_i - \delta)^{\beta} \ln(t_i - \delta) = 0 \\ \frac{\partial \ell n L}{\partial \psi} = - \frac{r+1}{\psi^2} \sum^{**} \ln(t_i - \delta)^{\beta} = 0 \\ \frac{\partial \ell n L}{\partial \delta} = \frac{\beta}{\psi} \sum^{**} (t_i - \delta)^{\beta-1} - (\beta-1) \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{-1} = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow (2.35)$$

Para $\beta < 1$, a F.V. torna-se infinita a medida que $\delta \rightarrow y_1$ onde y_1 é a menor observação da amostra ou seja a 1^a estatística de ordem da amostra.

Portanto, nesse caso, as equações aplicáveis para a estimação são as duas primeiras da (2.35) e mais

$$\hat{\delta} = y_1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \rightarrow (2.36)$$

onde ε é a unidade de precisão com a qual são feitas as observações.

Quando se sabe que $\beta=1$ temos a distribuição exponencial e os estimadores aplicáveis são:

$$\begin{cases} \hat{\psi} = \frac{\sum^{**} (t_i - y_1)}{r} \\ \delta = y_1 \end{cases} \quad \Rightarrow (2.37)$$

Voltando ao caso para o qual $\beta > 1$ e eliminando ψ entre as duas primeiras equações da (2.35) temos:

$$-\frac{1}{\beta} + \frac{\sum^{**} (t_i - \delta)^{\beta} \ln(t_i - \delta)}{\sum^{**} (t_i - \delta)^{\beta}} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \delta) = 0 \quad \Rightarrow (2.38)$$

Quando δ é conhecido e naqueles casos onde $y_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, é um estimador aplicável para δ , precisa-se resolver a (2.35) para obter $\hat{\beta}$.

Isto pode ser feito aplicando-se as técnicas de aproximação por tentativa como aquela do Exemplo 2.3.

Com $\hat{\beta}$ determinado dessa forma, $\hat{\psi}$ é obtido da 2ª fórmula de (2.35).

$$\hat{\psi} = \frac{\sum^{**} (t_i - \hat{\delta})^{\hat{\beta}}}{r} \quad \Rightarrow (2.39)$$

F.M.V. modificados.

Um conjunto alternativo de estimadores chamados estimadores de máxima verossimilhança modificados (E.M.V.M.),

pode ser obtido da 3ª equação de (2.35) com $E(Y_1)=y_1$ onde Y_1 é a 1ª estatística de ordem em uma amostra de tamanho n .

De (2.38) e (2.39) pode-se obter

$$y_1 = \delta + \left(\frac{\psi}{n}\right)^{1/\beta} \Gamma_1 \quad \Rightarrow (2.40)$$

na qual $\Gamma_1 = \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$.

A (2.40) foi proposta por Dubey [19] em 1966.

O procedimento computacional é o mesmo que para determinar os E.M.V. Aqui entretanto interpola-se entre duas aproximações δ_i e δ_j tais que:

$$E(Y_1)_i \gtrless y_1 \gtrless E(Y_1)_j$$

para se chegar as estimativas requeridas.

Casos especiais

a) - E.M.V. com β conhecido ($\beta > 1$)

$$\frac{r\beta \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{\beta-1}}{\sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{\beta}} - (\beta-1) \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{-1} = 0 \quad \Rightarrow (2.41)$$

Da (2.41) tira-se $\hat{\delta}$ (visto que β é conhecido).

Subsequentemente obtem-se $\hat{\psi}$ através da expressão:

$$\hat{\Psi} = \frac{\sum^{***} (t_i - \hat{\delta})^\beta}{r} \quad \Rightarrow (2.42)$$

b) - E.M.V.M. com β conhecido

$$n \left(\frac{y_1 - \delta}{\Gamma_1} \right)^\beta - \frac{\sum^{***} (t_i - \delta)^\beta}{r} = 0 \quad \Rightarrow (2.43)$$

A (2.43) pode ser resolvida para $\hat{\delta}$, obtendo-se assim a estimativa $\hat{\Psi}$ da expressão

$$\hat{\Psi} = \frac{\sum^{***} (t_i - \hat{\delta})^\beta}{r} \quad \Rightarrow (2.44)$$

As equações (2.43) e (2.44) fornecem também os E.M.V.M. para β e Ψ quando δ é conhecido.

Neste último caso, a estimativa para β vem da (2.43) e aquela para Ψ da (2.44).

Os E.M.V. para esse caso são dados em Cohen [11].

Estimativas de variâncias e covariâncias

A M.A.V.C. dos E.M.V ($\hat{\beta}$, $\hat{\Psi}$, $\hat{\delta}$) é obtida da mesma forma como o foi para Weibull biparamétrica.

Wingo [100] em 1973 e Lemon [56] em 1974 obtiveram os resultados independentemente.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} &= - \frac{r}{\beta^2} - \frac{1}{\psi} \sum \star\star (t_i - \delta)^\beta [\ln(t_i - \delta)]^2 \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \psi^2} &= \frac{r}{\psi^2} - \frac{2}{\psi^3} \sum \star\star (t_i - \delta)^\beta \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \delta^2} &= - (\beta - 1) \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{-2} - \frac{\beta(\beta - 1)}{\psi} \sum \star\star (t_i - \delta)^{\beta - 2} \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \psi} &= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \psi \partial \beta} = \frac{1}{\psi^2} \sum \star\star (t_i - \delta)^\beta \ln(t_i - \delta) \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \delta} &= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \delta \partial \beta} = - \sum_{i=1}^r (t_i - \delta)^{-1 + \frac{1}{\psi}} \sum \star\star (t_i - \delta)^{\beta - 1 + \frac{\beta}{\psi}} \sum \star\star (t_i - \delta)^{\beta - 1} \ln(t_i - \delta) \\
 \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \psi \partial \delta} &= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \delta \partial \psi} = - \frac{\beta}{\psi^2} \sum \star\star (t_i - \delta)^{\beta - 1}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2.45)$$

Os valores esperados dessas derivadas como já foi dito anteriormente podem ser aproximados pela substituição, das estimativas $\hat{\beta}$, $\hat{\psi}$ e $\hat{\delta}$ diretamente nas expressões (2.45), principalmente nas amostras grandes.

As variâncias assintóticas obtidas através das (2.45) dependem de varias condições de regularidade.

Lemon [56] observa que elas são satisfeitas para $\beta > 4$.

★EXEMPLO 2.4 - E.M.V. e E.M.V.M. de uma população de Weibull com $\delta=100$, $\beta=2$ e $\Psi=10000$ retirado de Cohen [15].

Gerou-se uma amostra, que pode ser entendida como o teste de vida de 100 aparelhos elétricos, de tamanho 100.

Das 100 unidades 68 falharam no intervalo do experimento enquanto que 32 foram retiradas em três estágios se parados.

A duração da vida em horas das 68 unidades que falharam foram:

109,12	130,53	144,09	158,31	177,19	198,11	222,11
113,37	131,98	148,83	158,92	180,57	199,23	224,83
117,73	133,14	150,23	160,13	181,99	203,27	227,27
119,56	134,52	150,79	161,31	184,02	206,55	230,88
119,82	135,73	151,88	162,09	185,43	208,76	235,14
124,63	136,71	153,07	165,45	187,21	210,69	237,43
125,21	137,88	154,18	166,62	189,77	213,32	246,08
126,93	138,63	154,97	168,23	191,63	215,08	249,35
128,25	141,11	155,26	169,98	194,88	218,43	
129,41	142,33	156,82	174,22	196,91	219,37	

A 6ª falha ocorreu no instante $t^*_1=124,63$ h e aí foram retiradas aleatoriamente dez unidades das sobreviventes.

Quinze unidades adicionais foram retiradas quando ocorreu a quadragésima falha no instante $t^*_2=174,22$ h e o teste terminou no instante $t^*_3=t_f=249,35$ h com sete sobreviventes.

Resumindo esses dados temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 100 \\ r = 68 \\ \sum_{i=1}^3 r_i = 32 \\ y_1 = 109,12 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} t^*_1 = 124,63, r_1 = 10 \\ t^*_2 = 174,22, r_2 = 15 \\ t^*_3 = 249,35, r_3 = 7 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{68} t_i = 11577,47 \\ \bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{68} t_i}{68} = 170,257 \\ \epsilon = 0,01 \text{ (precisão)} \end{array} \right.$$

Como sabemos que $\beta > 1$, os E.M.V. são obtidos resolvendo simultaneamente as equações (2.35).

Os E.M.V.M. são calculados pela solução simultânea das duas primeiras equações de (2.35) e mais a (2.40).

As estimativas resultantes estão na Tab. 2.9.

Tipo de Estimador	Parâmetros estimados				
	δ	ψ	β	μ	σ
E.M.V.	106,93	1635,05	1,638	188,80	51,27
E.M.V.M.	102,38	3905,30	1,809	188,32	49,18

Tab. 2.9

Das expressões (2.45) pode-se tirar

$$\begin{cases} V(\hat{\beta}) = 0,0447 \\ V(\hat{\psi}) = 2,71 \cdot 10^6 \\ V(\hat{\delta}) = 10,02 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\psi}) = 345 \\ \text{Cov}(\hat{\psi}, \hat{\delta}) = -3558 \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\delta}) = -0,4364 \end{cases}$$

Um segundo conjunto de estimativas obtem-se no caso de $\beta=2$ (conhecido) e está na Tab. 2.10.

Usaram-se as equações (2.41) e (2.42) para os E.M.V. e as equações (2.43) e (2.44) para os E.M.V.M.

Tipo de Estimador	Parâmetros estimados			
	δ	ψ	μ	σ
E.M.V.	100,68	9749,38	188,19	45,74
E.M.V.M.	100,34	9821,36	188,16	45,91

Tab. 2.10

$$\begin{cases} V(\hat{\Psi}) = 2,42 \times 10^6 \\ V(\hat{\delta}) = 23,26 \end{cases} ; \quad \text{Cov}(\hat{\Psi}, \hat{\delta}) = -4,87 \cdot 10^3$$

Um terceiro conjunto de estimativas está na Tab. 2.11 quando usou-se $\delta=100$ (conhecido).

Nesse caso pode-se utilizar as duas primeiras equações de (2.35) para os E.M.V. e a segunda equação de (2.35) mais a (2.40) para os E.M.V.M.

Tipo de Estimador	Parâmetros estimados			
	ψ	β	μ	σ
E.M.V.	5907,25	1,888	188,15	48,52
E.M.V.M.	11214,27	2,024	188,70	45,87

Tab. 2.11

$$V(\hat{\beta}) = 0,0331 \quad \text{Cov}(\hat{\psi}, \hat{\beta}) = -902 \quad V(\hat{\psi}) = 2,51 \cdot 10^7$$

Em geral, as estimativas obtidas são bem próximas dos correspondentes valores populacionais visto que:

$$\delta = 100 \quad ; \quad \Psi = 10000, \quad \beta = 2 \quad ; \quad \mu = 188,62 \quad ; \quad \sigma = 46,63$$

Deve-se observar que embora a diferença nas estimativas para ψ varie de 1635,05 até 11214,27 as estimativas para μ e σ são bastante estáveis.

2.3 - MÉTODO DE DUBEY PARA A ESTIMAÇÃO DE VIDA MÍNIMA δ .

Mandel [61] em 1964 considerou o problema de ajustar a função

$$y = A(x-x_0)^B \quad \rightarrow (2.46)$$

onde A , B e x_0 são parâmetros desconhecidos.

O seu método para estimar x_0 sugere uma forma nova para estimar o parâmetro de vida mínima da distribuição de Weibull.

Mandel obtem para x_0 o valor

$$x_0 = \frac{x_1 x_2 - x_3^2}{x_1 + x_2 - 2x_3} \quad \rightarrow (2.47)$$

onde os três pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) estão na curva $y = A(x-x_0)^B$, $y_3 = \sqrt{y_1 \cdot y_2}$ e x_1 e x_2 estão próximos dos extremos opostos.

Em vista da (1.2) a taxa de falhas, para a Weibull triparamétrica é

$$h(t) = \frac{\beta(t-\delta)^{\beta-1}}{\psi} \quad \rightarrow (2.48)$$

onde $\psi = (\theta_1 - \delta)^\beta$.

Ainda da (1.2) pode-se obter

$$-\ln[1-F(t)] = \frac{(t-\delta)^\beta}{\psi} \quad \Rightarrow \quad (2.49)$$

Como se vê a (2.48) e a (2.49) são do tipo da (2.46).

É bastante simples calcular $F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_n)$ dos dados de uma amostra de Weibull t_1, t_2, \dots, t_n ou então obter $h(t_1), h(t_2), \dots, h(t_n)$.

Em vista da (2.47) temos a estimativa $\bar{\delta}$ de δ .

$$\bar{\delta} = \frac{t_1 \cdot t_2 - t_3^2}{t_1 + t_2 - 2t_3} \quad \Rightarrow (2.50)$$

Na (2.50) t_1 e t_2 estão próximos dos extremos opostos do intervalo de variação dos dados e t_3 é escolhido de tal forma que satisfaça a relação

$$-\ln[1-F(t_3)] = \sqrt{\{-\ln[1-F(t_1)]\} \{-\ln[1-F(t_2)]\}} \quad \Rightarrow (2.51 \text{ a})$$

Essa escolha de t_3 é um procedimento gráfico.

Pode-se também obter uma estimativa $\bar{\delta}$ de δ através da (2.50) se o valor de t_3 for obtido de tal forma que sa-

tisfaça

$$h(t_3) = \sqrt{h(t_1) \cdot h(t_2)} \quad \rightarrow (2.51b)$$

Normalmente os estimadores $\bar{\delta}$ e $\bar{\delta}$ baseiam-se em considerações gráficas, contudo obtêm-se uma grande objetividade usando um método analítico.

Em vista da (1.2) e (1.7) o percentil τ_p para a probabilidade acumulada p é dado por:

$$\tau_p = \delta + \psi^{1/\beta} [-\ln(1-p)]^{1/\beta} \quad \rightarrow (2.52)$$

Dubey [21] desenvolveu um método analítico livre de qualquer consideração gráfica baseando-se apenas nos conceitos de Mandel e na (2.52).

Tomam-se duas probabilidades acumuladas p_i e p_k de tal forma que $0 < p_i < p_k < 1$ e sejam τ_i e τ_k os percentis populacionais correspondentes a p_i e p_k

Então

$$\begin{cases} p_i = 1 - \exp[-\psi^{-1}(\tau_i - \delta)^\beta] \\ p_k = 1 - \exp[-\psi^{-1}(\tau_k - \delta)^\beta] \end{cases}$$

Escolhe-se a probabilidade acumulada p_j tal que:

$$-\ln(1-p_j) = \sqrt{[-\ln(1-p_i)][-\ln(1-p_k)]} \Rightarrow (2.53a)$$

ou

$$p_j = 1 - \exp\{-\sqrt{[-\ln(1-p_i)][-\ln(1-p_k)]}\} \Rightarrow (2.53b)$$

A (2.53b) e a suposição $0 < p_i < p_k < 1$ garantem a relação

$$0 < p_i < p_j < p_k < 1$$

ou

$$\delta < \tau_i < \tau_j < \tau_k < \infty \Rightarrow (2.54)$$

Aliás usando a (2.52) para τ_i e τ_k e a (2.53a) para p_i , p_j e p_k obtêm-se

$$\frac{(\tau_j - \delta)^\beta}{\Psi} = \frac{\sqrt{(\tau_i - \delta)^\beta (\tau_k - \delta)^\beta}}{\Psi}$$

ou

$$\delta = \frac{\tau_j^2 - \tau_i \tau_k}{2\tau_j - \tau_i - \tau_k} \Rightarrow (2.55)$$

sob a condição $\tau_i + \tau_k - 2\tau_j \neq 0$.

Se t_1 , t_j e t_k são agora os percentis amostrais correspondendo as probabilidades acumuladas p_i , p_j e p_k temos:

$$\bar{\delta} = \frac{t_j^2 - t_i t_k}{2t_j - t_i - t_k} \quad \Rightarrow (2.56)$$

onde $2t_j - t_i - t_k \neq 0$.

Em uma a.a. de tamanho n , t_i , t_j e t_k são três observações ordenadas satisfazendo a relação

$$\delta < t_i < t_j < t_k < \infty \quad \Rightarrow (2.57)$$

Para um dado p_i , np_i é calculado.

Se np_i é inteiro então np_i determina a ordem da observação amostral correspondente ao p_i .

Se np_i não é um inteiro então $[np_i] + 1$ determina a ordem da observação amostral correspondente a p_i com $[np_i]$ indicando o maior inteiro menor que np_i .

A mesma regra se aplica a p_k e determina-se daí de modo único o p_j .

★EXEMPLO 2.5

Tomemos os dados de Menon [80] que já foram utili-

zados no exemplo 2.3.

Se tomarmos $p_i=0,1673$ e $p_k=0,9737$ teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} [20 \cdot 0,1673] + 1 = 4 \longrightarrow t_4 = 0,185 \text{ (quarta observação)} \\ [20 \cdot 0,9737] + 1 = 20 \longrightarrow t_{20} = 57,628 \text{ (vigésima observação)} \end{array} \right.$$

Da (2.53b) temos agora $p_j=0,5578$.

Como $[20 \cdot 0,5578] + 1 = 12$ temos $t_{12}=0,970$ (décima se gunda observação).

Da (2.56) temos:

$$\bar{\delta} = \frac{0,97^2 - 0,185 \cdot 57,627}{2 \cdot 0,97 - 57,628 - 0,185} \approx \boxed{0,174}$$

Porém a menor observação no exemplo de Menon é 0,001

Como se vê $\bar{\delta}$ não é um *estimador permissível ou admissível*.

É óbvio que qualquer estimativa de um parâmetro de localização ou de limiar não pode exceder a menor observação na amostra.

Em certos casos o estimador de Dubey pode apresentar a anomalia de ser *não permissível*.

Dubey entretanto sugere que se tomarmos t_i como a

menor observação, t_k como a maior e t_j , como a quantidade mais próxima de $\sqrt{t_i \cdot t_k}$ pela esquerda então o $\bar{\delta}$ assim obtido será o vizinho mais próximo de zero.

Os dados de Menon permitem usar

$$\begin{cases} t_i = t_1 = 0,001 \\ t_k = t_{20} = 57,627 \end{cases} \longrightarrow \sqrt{t_1 \cdot t_{20}} = 0,2400562$$

Isso nos permite escolher t_4 como t_j desde que $t_5 = 0,345$.

Entrando novamente na (2.56) vem:

$$\bar{\delta} = \frac{0,185^2 - 0,001 \cdot 57,627}{2 \cdot 0,185 - 0,001 - 57,627} \approx \boxed{0,0004}$$

que é o vizinho mais próximo de zero.

O mesmo Dubey [21] mostra que se obtivermos $\bar{\delta}$ baseando-nos na menor observação, na segunda menor observação e na maior observação teremos em $\bar{\delta}$ o vizinho mais próximo da menor observação.

No caso particular que estamos analisando temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0,001 \\ t_2 = 0,030 \\ t_{20} = 57,628 \end{array} \right. \longrightarrow \bar{\delta} = \frac{0,030^2 - 57,628 \cdot 0,001}{2 \cdot 0,030 - 57,628 - 0,001} \approx \boxed{0,000986}$$

Como se vê 0,000986 é o vizinho mais próximo de 0,001.

CONCLUSÃO:- O estimador de Dubey (2.56) é aplicável a toda distribuição (não apenas a Weibull) que tem um parâmetro de limiar ou vida mínima.

Os resultados acima dão uma escolha própria das três observações ordenadas com o intuito de obter uma estimativa permissível do parâmetro de vida mínima.

Dubey obteve os valores ótimos de p_i e p_k para um dado β - Tab. 2.12, os quais fazem com que a variância as sintótica de $\bar{\delta}$ seja mínima.

Parâmetro de forma	Valores ótimos	
	p_i	p_k
0,5	0,00033074	0,99978036
1,0	0,00033074	0,99978036
1,5	0,00111111	0,99978036
2,0	0,00772392	0,99978036
2,5	0,01908905	0,99952024
3,0	0,02458212	0,99900000
3,5	0,02847177	0,99900000
5,0	0,03593811	0,99900000
7,5	0,04180510	0,99900000
10,0	0,04482903	0,99847975

Tab. 2.12

2.4 - ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL COMPOSTA.

Representemos a f.d. de Weibull composta por

$$f(t) = \alpha f_1(t) + (1-\alpha) f_2(t) \quad \text{para } 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow (2.58)$$

onde

$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{\beta_1}{\Psi_1} t^{\beta_1-1} \exp\left[-\frac{t^{\beta_1}}{\Psi_1}\right], & t \geq 0, \quad \Psi_1 > 0, \quad \beta_1 > 0 \\ f_2(t) = \frac{\beta_2}{\Psi_2} t^{\beta_2-1} \exp\left[-\frac{t^{\beta_2}}{\Psi_2}\right], & t \geq 0, \quad \Psi_2 > 0, \quad \beta_2 > 0 \end{cases}$$

e zero em caso contrário.

A F.D. da Weibull composta é definida como:

$$\begin{aligned} F(t) &= \alpha F_1(t) + (1-\alpha) F_2(t) \\ &= 1 - \alpha \exp\left[-\frac{t^{\beta_1}}{\Psi_1}\right] - (1-\alpha) \exp\left[-\frac{t^{\beta_2}}{\Psi_2}\right] \quad \Rightarrow (2.59) \end{aligned}$$

Chama-se a α , parâmetro de proporcionalidade e expressa a probabilidade de que uma dada observação t_i vem da população com f.d. $f_1(\cdot)$.

O momento de ordem k da $f(t)$ é

$$\mu'_k = \alpha \psi_1^{\frac{k}{\beta_1}} \Gamma\left(\frac{k}{\beta_1} + 1\right) + (1-\alpha) \psi_2^{\frac{k}{\beta_2}} \Gamma\left(\frac{k}{\beta_2} + 1\right) \quad \Rightarrow (2.60)$$

para $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Empregando a técnica de igualar os momentos populacionais μ'_k aos correspondentes momentos amostrais m'_k pode-se estabelecer um conjunto de cinco equações que precisam ser resolvidas para que se possa obter os cinco parâmetros.

Façamos as seguintes modificações na notação

$$\begin{cases} v = \psi_1^{1/\beta} \\ w = \psi_2^{1/\beta} \end{cases} \begin{cases} \gamma_1 = \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_1}) \\ \gamma_2 = \Gamma(1 + \frac{2}{\beta_1}) \\ \gamma_3 = \Gamma(1 + \frac{3}{\beta_1}) \end{cases} \begin{cases} v_1 = \Gamma(1 + \frac{1}{\beta_2}) \\ v_2 = \Gamma(1 + \frac{2}{\beta_2}) \\ v_3 = \Gamma(1 + \frac{3}{\beta_2}) \end{cases}$$

Assim as três primeiras equações de (2.60) tornam-se

$$\begin{cases} m'_1 = \alpha v \gamma_1 + (1-\alpha) w v_1 \\ m'_2 = \alpha v^2 \gamma_2 + (1-\alpha) w^2 v_2 \\ m'_3 = \alpha v^3 \gamma_3 + (1-\alpha) w^3 v_3 \end{cases} \quad \Rightarrow (2.61)$$

Daí vem das duas primeiras expressões de (2.61)

$$w = \frac{m_1'(1-\alpha)v_1\gamma_2 \pm \sqrt{-(m_1')^2\alpha(1-\alpha)\gamma_2\gamma_1^2v_2 + m_2'\alpha(1-\alpha)^2\gamma_2\gamma_1^2v_1^2 + m_2'\alpha^2(1-\alpha)\gamma_1^4v_2}}{(1-\alpha)^2v_1^2\gamma_2 + \alpha(1-\alpha)\gamma_1^2v_2} \quad \rightarrow (2.62)$$

$$v = \frac{m_1' - (1-\alpha)v_1}{\alpha\gamma_1} w \quad \rightarrow (2.63)$$

Entrando com esses valores na terceira expressão de (2.61) teremos uma equação com três incógnitas α , β_1 e β_2 e nesse ponto torna-se óbvio que não se pode obter expressões explícitas para que se possa obter os parâmetros desconhecidos α , β_1 e β_2 .

Falls [27] usando o método descrito por Kao [46] sugere uma solução gráfica para esse problema.

As etapas do método são:

- 1 - Representar a F.D. amostral para os dados compostos no papel de Weibull.
- 2 - Começando em cada extremo do gráfico no papel de Weibull, desenhar duas retas tangentes que representaremos por $\widehat{\alpha F_1}$ e $(1-\widehat{\alpha})F_2$ e que são as estimativas de $\alpha F_1(t)$ e $(1-\alpha)F_2(t)$ respectivamente.
- 3 - Da intersecção de $(1-\widehat{\alpha})F_2$ com a linha de contorno, superior do papel de Weibull baixar uma reta vertical cuja intersecção com $\widehat{\alpha F_1}$ define uma posição na escala vertical que dará uma estimativa de α .

Uma vez que se obtém uma estimativa de α , pode-se resolver a terceira equação da (2.61) para β_1 e β_2 aplicando o método de Newton-Raphson modificado.

Uma vez que se obtém β_1 e β_2 de (2.62) e (2.63) obtemos estimativas para ψ_1 e ψ_2 .

Infelizmente as soluções quadráticas dessas equações fornecem mais do que um conjunto de estimativas.

Quando se defronta com mais de um conjunto de estimativas aceitáveis pode-se adotar a sugestão de Pearson[86] e escolher o conjunto que produz a maior concordância entre o quinto momento amostral em relação a origem m_5' e o momento teórico μ_5' .

★EXEMPLO 2.6 -

Para ilustrar essa técnica damos o exemplo de Falls [27].

Consideremos uma amostra de 2000 observações obtidas de uma população mista construída com a combinação de duas distribuições de Weibull com

$$\beta_1 = 2, \quad \psi_1 = 10, \quad \beta_2 = 0,8, \quad \psi_2 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = 0,8$$

Essa amostra está na Tab. 2.13, apresentada na forma de uma distribuição de frequência.

Para essa amostra temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1' = 2,4708 \\ m_2' = 8,6270 \\ m_3' = 36,3408 \\ m_4' = 174,9190 \\ m_5' = 935,3733 \end{array} \right.$$

Fonte: Falls [27]

Classes	Pontos centrais	f_1	f_2	f	Frequência acumulada em %
0 - 0,5	0,25	40	175	215	10,75
0,5 - 1,0	0,75	113	78	191	20,30
1,0 - 1,5	1,25	170	47	217	31,15
1,5 - 2,0	1,75	205	30	235	42,50
2,0 - 2,5	2,25	216	20	236	54,70
2,5 - 3,0	2,75	206	14	220	65,70
3,0 - 3,5	3,25	180	10	190	75,20
3,5 - 4,0	3,75	147	7	154	82,90
4,0 - 4,5	4,25	112	5	117	88,75
4,5 - 5,0	4,75	80	4	84	92,95
5,0 - 5,5	5,25	54	3	57	95,80
5,5 - 6,0	5,75	34	2	36	97,60
6,0 - 6,5	6,25	20	1	21	98,65
6,5 - 7,0	6,75	11	1	12	99,25
7,0 - 7,5	7,25	6	1	7	99,60
7,5 - 8,0	7,75	3	1	4	99,80
8,0 - 8,5	8,25	1	1	2	99,90
8,5 - 9,0	8,75	1		1	99,95
9,0 - 9,5	9,25	1		1	100,00
		1600	400	2000	

Tab. 2.13 - Amostra de 2.000 observações de uma população de Weibull mista.

Na Tab. 2.13 f_1 são as frequências de classe provenientes de $f_1(t)$, f_2 são as frequências de classe provenientes de $f_2(t)$ e f são as frequências de classe da distribuição mista resultante.

Na Fig. 2.6 temos o gráfico da f.d. composta e das f.d. componentes.

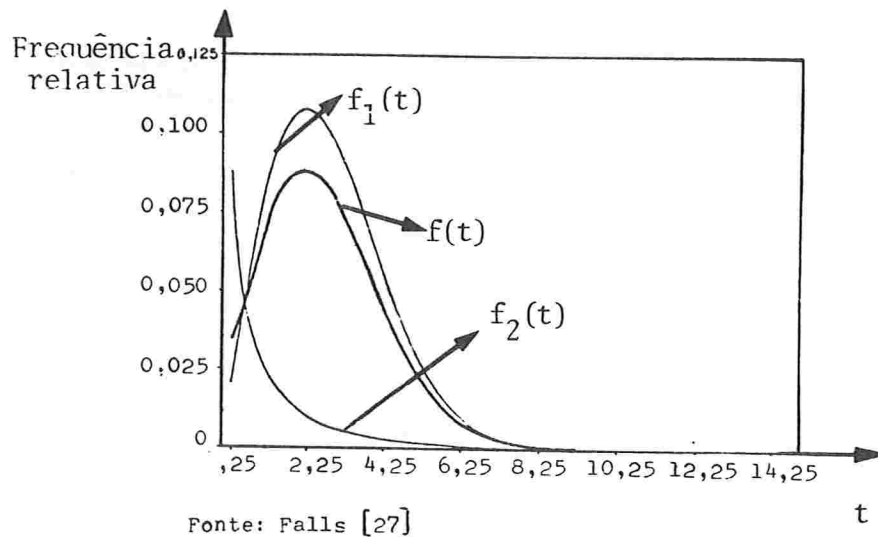
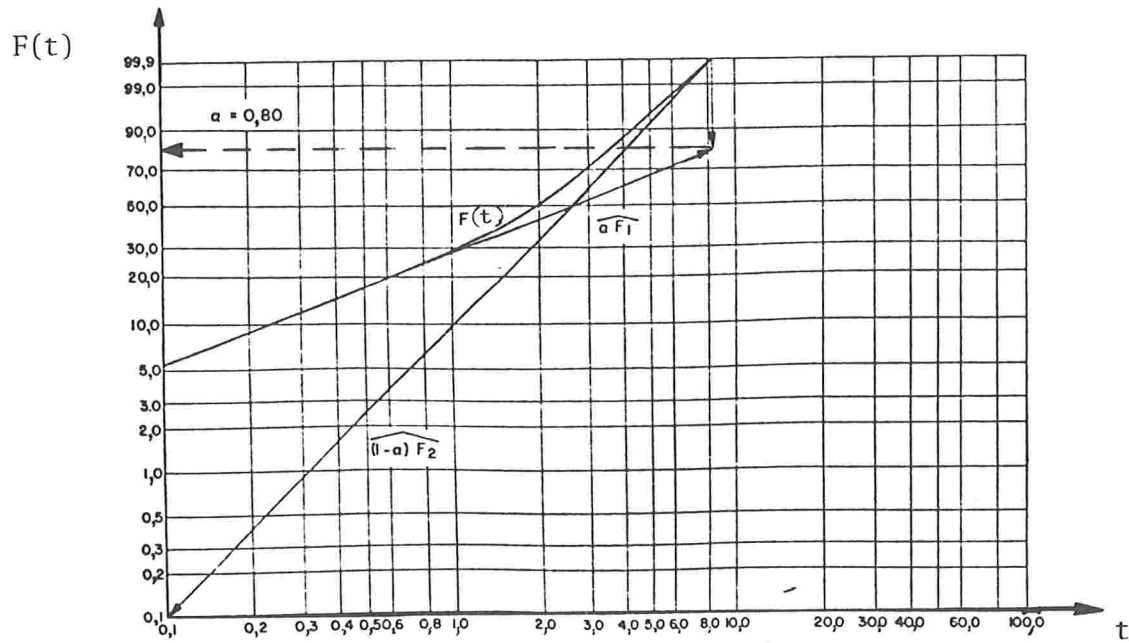


Fig.2.6-f.d. de Weibull mista

Empregando a técnica gráfica descrita anteriormente obtem-se uma estimativa de α igual a 0,8 como mostrado na Fig. 2.7.



Fonte: Falls [27]

Fig. 2.7

Representação de Weibull

Uma vez que a estimativa de α foi obtida, da terceira equação de (2.61) [resolvida pelo método de Newton-Raphson modificado por Cohen [12], [13] e [14]] obtém-se

$$\begin{cases} \beta_1 = 2,0210 \\ \beta_2 = 0,8339 \end{cases}$$

Das equações (2.62) e (2.63) tira-se

$$\begin{cases} \psi_1 = 10,1496 \\ \psi_2 = 0,9929 \end{cases}$$

Esse conjunto de estimativas nos dá $\mu_5' = 935,3646$ que está bem próximo do momento amostral $m_5' = 935,3733$ conforme a recomendação de Pearson.

2.5 - TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO LINEAR.

Consideremos a v.a. X , tal que $X = \ln T$ onde T é uma v.a. de Weibull com f.d. dada pela (1.3).

Então X tem uma distribuição assintótica do tipo I do menor valor extremo com F.D.:

$$F(x) = 1 - \exp \left[-\exp \left(\frac{x - \eta}{\xi} \right) \right] \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad \rightarrow (2.64)$$

e onde η e $\xi > 0$ são constantes obtidas de (1.4) através das relações

$$\begin{cases} \eta = \ln \theta \\ \xi = \frac{1}{\beta} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad [\text{veja a (2.8)}]$$

Na (2.64) o parâmetro η é o parâmetro de posição - (é a moda da distribuição do X) e ξ é o parâmetro de escala com $\frac{\pi\xi}{\sqrt{6}}$ sendo igual ao desvio padrão de X .

O parâmetro x_p ou seja o ponto 100p% da distribuição de X que chamaremos por simplicidade de quantil de ordem p ($0 < p < 1$) da distribuição do valor extremo é igual a

$$x_p = \eta + \xi \ln \left\{ \ln \frac{1}{1-p} \right\} \quad \rightarrow (2.65)$$

Em vista do fato de que ξ é um parâmetro de escala, e η é um parâmetro de posição vários métodos de estimação linear de funções lineares desses parâmetros podem ser usados efetivamente se o modelo é com censura do tipo II ou algo aproximado.

Alguns desses métodos usam todas as observações enquanto outros baseiam-se em sômente alguns valores observados ordenados de X .

Todos os métodos de estimação linear são convenientes visto que será necessário apenas termos os dados amostrais e uma tabela de pesos com o intuito de obter as estimativas na forma de soma ponderada das observações.

Esses métodos são facilmente adaptáveis para o uso num computador.

- I - MELHOR ESTIMADOR LINEAR NÃO VICIADO - M.E.L.N.V.
MELHOR ESTIMADOR LINEAR INVARIANTE - M.E.L.I.

O teorema generalizado de Gauss-Markov especifica os estimadores dos mínimos quadrados como os únicos estimadores com variância mínima entre as funções lineares não viciadas das variáveis observadas quando essas variáveis tem esperanças que são funções lineares com coeficientes conhecidos dos parâmetros desconhecidos e matriz de covariância $\sigma^2 B$ com B conhecido.

Esse teorema tem sido aplicado a estimação de funções lineares dos parâmetros de posição e escala tais como η e ξ .

No nosso caso particular será de grande interesse a distribuição do quantil X_p .

Nos casos em que existe um estimador não viciado de variância mínima (E.N.V.V.M.) do parâmetro de posição e os parâmetros de posição e escala são desconhecidos o estimador é linear nas observações e assim coincide com o M.E.L.N.V. de variância mínima do parâmetro de posição especificado.

Também, para distribuições para as quais existem os melhores estimadores não viciados dos parâmetros de escala, aproximações lineares desses estimadores na forma M.E.L.N.V. possuem uma grande eficiência relativa para o melhor estimador não viciado.

Por eficiência relativa entende-se a razão dos in-

versos das variâncias dos dois estimadores correspondentes.

Esses estimadores são definidos por conjuntos de pesos (funções do número de censura r e do tamanho de amostra n) para multiplicar as observações ordenadas.

Representando agora por $X_{(i)}$ a i -ésima estatística de ordem e por $A(n,r,i)$ e $C(n,r,i)$ os pesos que definem os M.E.L.I. conforme está em Mann [77] teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta} = \sum_{i=1}^r A(n,r,i) X_{(i)} \end{array} \right. \quad \rightarrow (2.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\xi} = \sum_{i=1}^r C(n,r,i) X_{(i)} \end{array} \right. \quad \rightarrow (2.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_p = \tilde{\eta} + \tilde{\xi} \ln \left[\ln \frac{1}{1-p} \right] \end{array} \right. \quad \rightarrow (2.68)$$

Como se pode observar os estimadores $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ e \tilde{X}_p de η , ξ e x_p respectivamente são funções lineares dos "melhores" pesos $A(n,r,i)$ e $C(n,r,i)$.

Esses valores de $A(n,r,i)$ e $C(n,r,i)$ estão nas publicações de Mann [62] e [63].

Daremos uma parte apenas dessas tabelas no Exemplo 2.7.

Aliás nessas tabelas também aparecem as perdas esperadas para os estimadores $\tilde{\eta}$ e $\tilde{\xi}$ que representaremos respectivamente por $E(L\eta) = E(LU)$ e $E(L\xi) = E(LB)$ assim como a esperança do produto cruzado

$$E(CP) = \frac{E[(\tilde{\xi} - \xi)(\tilde{\eta} - \eta)]}{\xi^2}$$

Esses valores serão necessários se quisermos converter os M.E.L.I em M.E.L.N.V., o que faremos adiante.

★ EXEMPLO 2.7

Dez barras de torção de capotas de automóveis foram colocadas num teste o qual terminou quando ocorreu a sétima falha.

Os dados em "ciclos" até falhar são:

2670 5810 7220 7410 9600 12240 13680

Supondo o modelo de Weibull biparamétrico conveniente vamos estimar θ e β assim como obter a confiabilidade, após 200 ciclos e o número de ciclos nos quais espera-se que 1% da população falhe.

Esse é um exemplo de Kapur [49].

Na Tab. 2.14, temos os pesos $A(n,r,i)$ e $C(n,r,i)$, necessários para esse caso particular.

A partir da mesma podemos elaborar a Tab. 2.15. .

n r i A(n,r,i) C(n,r,i)						n r i A(n,r,i) C(n,r,i)					
E(LU)				0.12529518		10	6	1	-0.058017	-0.149985	
E(CP)				-0.02209438				2	-0.039595	-0.150451	
E(LB)				0.07482425				3	-0.012513	-0.136941	
	10	2	1	-0.876869	-0.487022			4	0.022314	-0.112224	
			2	1.876869	0.487022			5	0.065750	-0.075721	
E(LU)				2.31744054		E(LU)		6	1.022062	0.625321	
E(CP)				0.90232208		E(CP)			0.20973843		
E(LB)				0.48687150		E(LB)			0.06299841		
	10	3	1	-0.408602	-0.321265				0.14219828		
			2	-0.340443	-0.297858		10	7	1	-0.022198	-0.124170
			3	1.749045	0.619124				2	-0.006909	-0.126894
E(LU)				0.94907551					3	0.013224	-0.118392
E(CP)				0.41795081					4	0.037994	-0.100924
E(LB)				0.31541467					5	0.068153	-0.073988
	10	4	1	-0.214930	-0.236817				6	0.105164	-0.035501
			2	-0.177223	-0.226688	E(LU)			7	0.804572	0.579868
			3	-0.113820	-0.193159	E(CP)				0.16066059	
			4	1.505973	0.656663	E(LB)				0.02762724	
E(LU)				0.49619736						0.11670571	
E(CP)				0.22047816			10	8	1	0.001179	-0.104082
E(LB)				0.22930885					2	0.014889	-0.108163
	10	5	1	-0.115524	-0.185169				3	0.030998	-0.103119
			2	-0.090868	-0.181821				4	0.049734	-0.090835
			3	-0.051341	-0.160697				5	0.071745	-0.070902
			4	0.000925	-0.125311				6	0.098114	-0.041560
			5	1.256809	0.652997				7	0.130649	0.000799
E(LU)				0.30344549		E(LU)			8	0.602692	0.517864
E(CP)				0.12033056		E(CP)				0.13403554	
E(LB)				0.17727542		E(LB)				0.00474963	
										0.09704810	
							10	9	1	0.016841	-0.087538
									2	0.029807	-0.092405
									3	0.043570	-0.089839
									4	0.058640	-0.081428
									5	0.075576	-0.066855
									6	0.095169	-0.044670
									7	0.118707	-0.011816
									8	0.148575	0.038159
									9	0.413116	0.436394
						E(LU)				0.11965747	
						E(CP)				-0.01043859	
						E(LB)				0.08100409	

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

0 ponto representa a vírgula decimal

Tab.2.14. - Tabela de pesos

A(n,r,i) e C(n,r,i) (um trecho)

[illegible]

Continuação da Tab. 2.14 - Tabela dos pesos $A(n,r,i)$ e $C(n,r,i)$ (um trecho)

$T_{(i)}$	$X_{(i)} = \ln T_{(i)}$	$A_{(10,7,i)}$	$C_{(10,7,i)}$
2670	7,889834	-0,022198	-0,124170
5810	8,667336	-0,006909	-0,126894
7220	8,884610	0,013224	-0,118392
7410	8,910586	0,037994	-0,100924
9600	9,169518	0,068153	-0,073988
12240	9,412465	0,105164	-0,035501
13680	9,523690	0,804572	-0,579868

Tab. 2.15 - Dados o teste das barras de torção

Da Tab. 2.15 e de (2.66) e (2.67) vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta} = \sum_{i=1}^7 A(10, 7, i) X_{(i)} = \underline{9,493392} \\ \tilde{\xi} = \sum_{i=1}^7 C(10, 7, i) X_{(i)} = \underline{0,479225} \end{array} \right.$$

Portanto as estimativas para os parâmetros de Weibull são

$$\begin{cases} \tilde{\theta} = e^{\tilde{\eta}} \cong \underline{13272 \text{ ciclos}} \\ \tilde{\beta} = \frac{1}{\tilde{\xi}} \cong \underline{2,09} \end{cases}$$

Teremos para a confiabilidade a expressão

$$\tilde{C}(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{13272} \right)^{2,09} \right] \quad \text{para } t \geq 0$$

ou $\tilde{C}(200) \cong \underline{0,999844}$

Para obter o primeiro percentil da distribuição de valor extremo basta aplicar a (2.68)

$$\tilde{x}_{0,01} = 9,493392 + 0,479225 \ln \left[\ln \frac{1}{0,99} \right] = \underline{7,288885}$$

Portanto

$$\tilde{t}_{0,01} = \exp(\tilde{x}_{0,01}) \cong \underline{1464 \text{ ciclos}}$$

Investigações de Monte Carlo sobre os E.M.V. e os M.E.L.I de ξ e x_p (para p pequeno) mostram que os mesmos têm

E.Q.M. bem próximos.

Dessa forma pode-se utilizar um ou outro método.

É claro entretanto que de posse da tabela dos pesos os métodos de estimação linear são mais simples de serem executados.

Para estimar o η os dois métodos dão quase os mesmos valores exceto no caso de n pequeno quando o estimador linear é um pouco melhor.

As comparações dos E.Q.M. para esses dois métodos de estimação e o M.E.L.N.V. estão na Tab . 2.16.

Na Tab. 2.16, estão também $A(\eta)$ e $A(\xi)$ que são os extremos inferiores de Cramér-Rao para os estimadores regulares não viciados e $\tilde{A}(\eta)$ e $\tilde{A}(\xi)$ que são os extremos inferiores de Cramér-Rao para os estimadores regulares invariantes de η e ξ respectivamente.

Os extremos para os estimadores censurados não viciados baseiam-se nos resultados de Harter e Moore [34] de 1968 e aqueles para os estimadores invariantes dependem dos resultados de Mann [66] de 1969.

Pode-se observar que os E.M.V., M.E.L.I e M.E.L.N.V têm um E.M.Q. que se aproxima do respectivo extremo a medida que n cresce para um $\frac{r}{n}$ fixo.

Pode-se também demonstrar que todos esses estimadores são assintoticamente eficientes e assintoticamente nor-

mais e assim são assintoticamente iguais aos respectivos extremos de Cramér-Rao.

Essas propriedades assintóticas aplicam-se também ao estimadores de $\theta=e^{\eta}$ e $t_p=e^{x_p}$.

Tamanho da amostra n	Número de interrupção r	M.E.L.N.V. η^*	E.M.V. $\hat{\eta}$	M.E.L.I. $\tilde{\eta}$	Extremo não viciado de Cramér-Rao $A(\eta)$	Extremo invariante de Cramér-Rao $\bar{A}(\eta)$	M.E.L.N.V. ξ^*	E.M.V. $\hat{\xi}$	M.E.L.I. $\tilde{\xi}$	Extremo não viciado de Cramér-Rao $A(\xi)$	Extremo invariante de Cramér-Rao $\bar{A}(\xi)$
10	2	3.904	2.359	2.317	1.648	1.279	.949	.487	.487	.474	.322
10	3	1.204	.999 ^a	.949	.719	.629	.461	.313 ^a	.315	.307	.235
10	4	.539	.515 ^a	.496	.393	.367	.298	.233 ^a	.229	.222	.182
10	5	.321	.315 ^a	.303	.251	.244	.215	.172 ^a	.177	.172	.146
10	6	.214	.226 ^a	.210	.181	.179	.166	.141 ^a	.142	.137	.121
10	7	.162	.166 ^a	.161	.145	.145	.132	.113 ^a	.117	.112	.101
10	8	.134	.137 ^a	.134	.125	.125	.107	.094 ^a	.094	.093	.085
10	9	.120	.122 ^a	.120	.115	.115	.088	.077 ^a	.081	.077	.071
10	10	.113	.114 ^a	.113	.111	.110	.072	.063 ^a	.067	.061	.057
20	2	7.033	3.919	3.880	3.026	2.198	.975	.494	.494	.487	.327
20	4	1.197	1.055 ^a	.978	.824	.714	.316	.247 ^a	.240	.237	.192
20	6	.456	.428 ^a	.413	.360	.334	.184	.160 ^a	.155	.153	.133
20	8	.232	.228 ^a	.221	.197	.189	.127	.117 ^a	.133	.111	.100
20	10	.141	.143 ^a	.138	.126	.123	.096	.090 ^a	.087	.086	.079
20	12	.098	.099 ^a	.097	.091	.090	.075	.074 ^a	.070	.069	.064
20	14	.076	.078 ^a	.076	.072	.072	.061	.060 ^a	.057	.056	.053
20	16	.065	.066 ^a	.065	.063	.063	.050	.050 ^a	.047	.046	.044
20	18	.059	.060 ^a	.059	.058	.058	.041	.042 ^a	.039	.038	.037
20	20	.056	.056 ^a	.056	.055	.055	.033	.033 ^a	.032	.030	.030

Tab. 2.16 - Comparação das perdas esperadas dos vários estimadores de η e ξ sob censura do tipo II quando a perda é quadrática e dividida por ξ^2 .

Fonte: 1) Mann, Schafer e Singpurwalla [77]

2) Os valores assinalados com a são de Harter e Moore [33] e [34]

3) O ponto representa a vírgula decimal

Deve-se entretanto observar que qualquer estimador de θ e t_p que é uma função de estimadores não viciados de η e ξ será não viciado somente assintoticamente e não para n pequeno.

A estimação de η e ξ pelo uso dos pesos dos M.E.L.I tem sido aplicada a amostras censuradas progressivamente do tipo II.

As tabelas para esses pesos foram publicadas por Mann [67] em 1970 e [70] em 1971.

II - APROXIMAÇÕES PARA OS M.E.L.I E OS M.E.L.N.V. NO CASO DE TERMOS AMOSTRAS CENSURADAS COM TAMANHO MAIOR OU IGUAL A 25.

Para amostras censuradas de tamanho 25 ou menor os M.E.L.N.V. e os M.E.L.I são recomendados conforme se queira obter estimativas não viciadas ou viciadas.

Para amostras de tamanhos 30,50 e 100 e certos casos de censura pode-se usar pesos fornecendo aproximações para os M.E.L.I de η e ξ obtidos por Johns e Liberman [41] em 1966.

Porém o que realmente se quer é um método de estimação eficiente que pode ser facilmente aplicado a amostras censuradas de tamanho moderado para grande sem a necessidade de um grande número de tabelas.

O procedimento que daremos a seguir satisfaz esse critério.

ESTIMADORES LINEARES SIMPLIFICADOS

Um estimador linear não viciado de ξ , baseando-se sômente nas r primeiras das n estatísticas de ordem de valor extremo foi sugerido por Bain [2] em 1972 e modificado por Engelhardt e Bain [22] e [23] em 1973 e 1974.

Mais tarde apareceram os trabalhos de Mann e Fertig [73] em 1975, de Engelhardt [24] em 1975 e mais recentemente Engelhardt e Bain [25] em 1977.

A sua forma é

$$\xi^{**} = \frac{\sum_{i=1}^r |X_{(s)} - X_{(i)}|}{n k_{r,n}} \quad \rightarrow (2.69)$$

$$\text{com } k_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r E |Z_{(s)} - Z_{(i)}| \quad \text{onde } Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \eta}{\xi}$$

$$e \quad \begin{cases} s = r & \text{para } r \leq 0,9n \\ s = n & \text{para } r = n, n \leq 15 \\ s = n-1 & \text{para } r = n, 16 \leq n \leq 24 \\ s = [0,892n] + 1 & \text{para } r = n, n \geq 25 \end{cases}$$

sendo $[y]$ o maior inteiro menor que y .

Desde que $E[Z_{(r)} - Z_{(i)}] = E(Z_{(r)}) - E(Z_{(i)})$ e o $E(Z_{(i)})$ obtido por White [99] tem a forma

$$E(Z_{(i)}) = \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} n \binom{n-1}{i-1} \binom{i-1}{k-1} \frac{-\gamma - \ell_n(n-i+k)}{n-i+k} \quad \Rightarrow (2.70)$$

onde $\gamma = 0,5772157\dots$ é a constante de Euler, um valor apropriado de $k_{r,n}$ pode ser calculado (com o computador) para quase qualquer combinação de r e n .

Desde que ξ é um parâmetro de escala e ξ^{**} é não viado, a estimação de ξ pode ser melhorada consideravelmente em termos de E.Q.M. para uma censura extensiva se a variância é conhecida.

Bain [2] notou que para $\frac{r}{n}$ menor que 0,5 a

$$V(\xi^{**}) = (nk_{r,n})^{-1} \xi^2 \quad \Rightarrow (2.71)$$

Então

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi^{**}}{1 + (nk_{r,n})^{-1}} = \frac{\sum_{i=1}^r (X_{(r)} - X_{(i)})}{1 + nk_{r,n}} \quad \Rightarrow (2.72)$$

tem E.M.Q. menor do que aquele de ξ^{**} para $\frac{r}{n}$ menor que 0,5.

Mann [77] calculou os valores $\ell_{r,n}$ tais que $\ell_{r,n} \xi^2$ é igual a variância de ξ^{**} (Tab.2.17).

Portanto

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi^{**}}{1 + \ell_{r,n}} = \frac{\sum_{i=1}^r |X_{(s)} - X_{(i)}|}{nk_{r,n} (1 + \ell_{r,n})} \quad \Rightarrow (2.73)$$

tem E.M.Q. $\frac{\ell_{r,n} \xi^2}{1 + \ell_{r,n}}$.

Para $r=2$ com n tendendo ao infinito, os E.M.Q. de ξ^{**} e $\tilde{\xi}$ aproximam-se de ξ e $0,5\xi^2$ respectivamente.

Para $\frac{r}{n}=0,7$ ou menor a eficiência assintótica de ξ^{**} em relação ao extremo de Cramér-Rao para os estimadores regulares não viciados de ξ é ao menos 0.977.

Fonte: Mann, Schafer e Singpurwalla [77]

O ponto representa a vírgula decimal

r	$k_{r,n}$	$nl_{r,n}$	$E(Z_s)$	$nB_{r,n}$	r	$k_{r,n}$	$nl_{r,n}$	$E(Z_s)$	$nB_{r,n}$
$n=25$					$n=35$				
5	.169	5.97	-1.63	10.04	7	.182	5.55	-1.60	9.16
10	.406	2.45	-.75	2.13	14	.420	2.41	-.73	2.07
15	.690	1.48	-.16	.57	21	.707	1.46	-.14	.56
20	1.066	1.01	.40	.04	28	1.091	1.01	.42	.03
25	1.321	.81	.65	-.08	35	1.367	.81	.70	-.08
$n=30$					$n=40$				
3	.069	14.64	-2.44	36.03	4	.077	12.70	-2.39	30.75
6	.176	5.71	-1.61	9.44	8	.184	5.34	-1.58	8.72
9	.291	3.45	-1.11	4.11	12	.299	3.30	-1.09	3.89
12	.415	2.43	-.73	2.07	16	.423	2.33	-.72	1.98
15	.549	1.85	-.42	1.10	20	.558	1.78	-.41	1.04
18	.693	1.46	-.14	.54	24	.708	1.41	-.13	.52
21	.870	1.20	.13	.22	28	.882	1.17	.14	.21
24	1.077	1.01	.41	.02	32	1.092	.99	.43	.02
27	1.356	.87	.74	-.10	36	1.377	.86	.77	-.09
30	1.302	.82	.62	-.08	40	1.340	.80	.67	-.07
$n=45$					$n=55$				
9	.188	5.37	-1.57	8.75	11	.192	5.30	-1.56	8.48
18	.427	2.36	-.71	2.02	22	.432	2.39	-.71	1.98
27	.712	1.42	-.13	.53	33	.719	1.45	-.12	.52
36	1.098	.98	.43	.02	44	1.105	1.00	.44	.02
45	1.386	.79	.73	-.07	55	1.402	.81	.75	-.08
$n=50$					$n=60$				
5	.082	12.35	-2.37	29.30	6	.085	11.65	-2.34	27.65
10	.190	5.40	-1.56	8.65	12	.193	5.10	-1.55	8.17
15	.306	3.39	-1.08	3.94	18	.309	3.25	-1.07	3.75
20	.430	2.41	-.71	2.03	24	.433	2.34	-.70	1.96
25	.565	1.82	-.40	1.06	30	.568	1.78	-.40	1.02
30	.716	1.45	-.12	.53	36	.720	1.44	-.12	.52
35	.890	1.18	.15	.21	42	.894	1.19	.16	.21
40	1.103	1.00	.44	.02	48	1.106	.99	.44	.01
45	1.393	.87	.78	-.10	54	1.397	.88	.79	-.09
50	1.363	.81	.70	-.09	60	1.381	.83	.72	-.08

Tab. 2.17 - Valores para calcular ξ^{**} , $\tilde{\xi}$, η^{**} , $\tilde{\eta}$ e a variável qui-quadrado aproximada

$$\frac{(2 \xi^{**})}{\xi}$$

com $\frac{2}{\ell_{r,n}}$ g.f.

Para $n=20$, a eficiência de ξ^{**} com relação a

$$\xi^* = \frac{\tilde{\xi}}{1-E(LB)} \quad \Rightarrow (2.74a)$$

que é o M.E.L.N.V., é ao menos 0,93 para $r \leq 0,9n$. Aliás o M.E.L.N.V. de η é

$$\eta^* = \tilde{\eta} + \xi^* E(CP) \quad \Rightarrow (2.74b)$$

Para $r=n$, a eficiência de ξ^{**} em relação a ξ^* é 0,808 para $n=25$ e 0,760 para n bem grande.

Esses resultados devem-se a Bain [2] e a Engelhardt e Bain [22].

Para que se possa usar ξ^{**} na estimação de η e de x_p deve-se notar que $E(X_{(s)})$ é dado por

$$E(X_{(s)}) = \eta + E(Z_{(s)}) \xi \quad \Rightarrow (2.75)$$

Engelhardt e Bain [23] propuseram o seguinte estimador linear não viciado para η .

$$\eta^{**} = X_{(s)} - E(Z_{(s)}) \xi^{**} \quad \Rightarrow (2.76)$$

Dessa forma o estimador linear não viciado de x_p é

$$X_p^{**} = \eta^{**} + \xi^{**} \ln \left[\ln \frac{1}{1-p} \right] \quad \Rightarrow (2.77)$$

Na Tab. 2.17 também estão os valores de $E(Z_{(s)})$
 Para $\frac{r}{n}$ menor do que 0,5 esses estimadores são seme-
lhantes aos seus M.E.L.N.V.

★EXEMPLO 2.8- Obtenção de η^{**} para $r=2$ quando η^{**} é o
 M.E.L.N.V. de η .

Sabemos que

$$\begin{aligned} E(X_{(1)}) &= \eta + \xi \int_0^{\infty} n \ln x \exp(-nx) dx \\ &= \eta + \xi \int_0^{\infty} (\ln v - \ln n) \exp(-v) dv \\ &= \eta - \xi(\gamma + \ln n) \end{aligned} \quad \Rightarrow (2.78)$$

Na (2.78) γ é a constante de Euler [$\gamma=0,5772157\dots$]

Portanto para $r=2$ temos

$$\eta^{**} = \eta^* = X_{(1)} + (\gamma + \ln n) \xi^{**} \quad \Rightarrow (2.79)$$

Para determinar uma expressão para ξ^{**} para $r=2$ de

ve-se observar que para

$$\ell n W = X_{(1)} - X_{(2)}$$

temos a f.d.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(w) = \frac{n(n-1)w^{1/\xi-1}}{\xi(n-1+w^{1/\xi})^2} \quad \text{para } 0 < w \leq 1 \\ f(w) = 0 \quad \text{para outros valores} \end{array} \right. \quad \Rightarrow (2.80)$$

Então desenvolvendo o denominador e determinando $E(-\ell n W)$ obtem-se

$$\xi^{**} = \frac{X_{(2)} - X_{(1)}}{n \cdot \ell n(1 + \frac{1}{n-1})} \quad \Rightarrow (2.81)$$

e

$$\eta^{**} = X_{(2)} + \left[-1 + \frac{\gamma + \ell n n}{n \cdot \ell n(1 + \frac{1}{n-1})} \right] (X_{(2)} - X_{(1)})$$

Para $r=2$ e n grande, o E.M.Q. do estimador de η pode ser reduzido a metade usando no lugar de η^{**} ,

$$\tilde{\eta} = \eta^{**} - B_{r,n} \tilde{\xi} \quad \Rightarrow (2.82)$$

Na (2.82) $B_{r,n} \xi^2$ é a covariância de η^{**} e ξ^{**} .

Os valores de $n.B_{r,n}$ aparecem na Tab.2.17.

★EXEMPLO 2.9 - Os dados abaixo representam os instantes de falha em horas de um componente eletrônico proveniente de uma população de Weibull com $\beta=2$ e $\theta=100$ fornecidos por Harter e Moore [33]

5	33	55	65	82	102	114	142
10	34	58	65	85	103	116	143
17	36	58	66	90	106	117	151
32	54	61	67	92	107	124	158
32	55	64	68	92	114	139	195

Os valores de ξ e η são respectivamente 0,5 e 4,60517.

Engelhardt e Bain [23] fizeram uma análise para os valores de interrupção $r=10,20,30$ e 40 e a confiabilidade no instante 32,46h.

Para $r=20$ temos $s=20$ e de (2.69) temos:

$$\xi^{**} = \frac{(r-1) \ln T(r) - \sum_{i=1}^{r-1} \ln T(i)}{nk_{r,n}} \approx \frac{19.4,220-69,420}{40.0,5584} \approx \boxed{0,482}$$

onde $k_{20,40}$ foi lido na Tab. 2.17

Da (2.76) temos:

$$\eta^{**} = \ln T_{(r)} - E(Z_{(s)}) \xi^{**} = 4,220 - (-0,4106) 0,482 \approx \underline{4,418}$$

Finalmente,

$$C^{**}(t) = \exp[-\exp(\frac{\ln t - \eta^{**}}{\xi^{**}})] \approx \underline{0,867}$$

Daí podemos também obter as estimativas pontuais, de β e θ .

$$\begin{cases} \beta^{**} = \frac{1}{\xi^{**}} \longrightarrow \beta^{**} = \frac{1}{0,482} \approx \underline{2,075} \\ \theta^{**} = \exp(\eta^{**}) \longrightarrow \theta^{**} = e^{4,418} \approx \underline{82,93} \end{cases}$$

No caso de uma amostra completa uma outra fórmula para o cálculo do estimador de ξ é

$$\xi_s^{**} = \frac{(2s-r-1)\ln T_{(s)} - \sum_{i=1}^{s-1} \ln T_{(i)} + \sum_{i=s+1}^r \ln T_{(i)}}{nk_{s,r,n}} \quad \rightarrow (2.83)$$

onde $k_{s,r,n}$ é a constante de correção e s é escolhido de tal forma que se minimize a variância de ξ_s^{**}

$$k_{s,r,n} = \frac{(2s-r-1)E(Z_{(s)}) - \sum_{i=1}^{s-1} E(Z_{(i)}) + \sum_{i=s+1}^r E(Z_{(i)})}{n} \quad \rightarrow (2.84)$$

Esses valores podem ser lidos na Tab. 2.17 entrando na coluna do s com o valor $s=[0,892n]+1$.

Por exemplo para $r=n=40$ temos $s=36$.

Portanto $k_{36,40,40}=1,4123$ e em vista da (2.83) vem:

$$\xi_{36}^{**} = \frac{31 \cdot 4,956 - 143,372 + 20,316}{40 \cdot 1,4123} = \underline{0,541}$$

Engelhardt e Bain [23] propõem também no caso de uma amostra completa $\frac{r}{n}=1$ o seguinte estimador

$$\eta_{E.B}^{*} = \bar{X} + \gamma \xi_s^{**} \quad \Rightarrow (2.85)$$

onde \bar{X} é a média amostral, $\gamma=0,5772....$

Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} \eta_{E.B}^{*} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln T(i) + \gamma \xi_s^{**} \\ &= 4,216 + 0,5772 \cdot 0,541 = \underline{4,528} \end{aligned}$$

Esse valor é próximo daquele que obteríamos se usassemos a (2.76)

$$\eta^{**} = 4,956 - 0,541 \cdot 0,7661 = \underline{4,542}$$

A comparação dos resultados assim obtidos com aqueles dos E.M.V. estão na Tab. 2.18.

Fonte: Engelhardt e Bain [23]

r	ξ^{**}	$\hat{\xi}$	η^{**}	$\hat{\eta}$	β^{**}	$\hat{\beta}$	θ^{**}	$\hat{\theta}$	(1)	(2)
10	0,807	0,729	5,066	4,919	1,239	1,372	158,5	136,6	0,864	0,870
20	0,482	0,478	4,418	4,428	2,075	2,091	82,9	83,8	0,867	0,871
30	0,579	0,562	4,574	4,567	1,727	1,780	96,9	96,3	0,860	0,865
forma de 40 Engelhardt Bain	0,541	0,514	4,528	4,530	1,848	1,945	92,6	92,8	0,866	0,878

(1) $C^{**}(32,46)$

(2) $C(\widehat{32},46)$

Tab. 2.18

M.E.L.N.V. COMBINADOS DE SUBAMOSTRAS

Para amostras de tamanho moderado, um outro procedimento é dividir uma a.a. não ordenada em duas subamostras de tamanho menor que 25.

Calculam-se então os M.E.L.N.V. para cada subamostra e obtem-se uma média ponderada ótima dessas estimativas para aproximar o M.E.L.N.V. da amostra toda.

Essa técnica de combinar as estimativas das subamostras pode também ser aplicada para a estimação de ξ de duas amostras tendo diferentes valores para η porém o mesmo valor para ξ .

Os M.E.L.N.V. ξ_j^* e η_j^* de ξ e η respectivamente para a j -ésima subamostra são:

$$\begin{cases} \xi_j^* = \frac{\tilde{\xi}_j}{1-E_j(LB)} \\ \eta_j^* = \tilde{\eta}_j + \xi_j^* E(CP) \end{cases} \quad \Rightarrow (2.86)$$

aliás já estabelecemos esses resultados em (2.74a) e (2.74b) e $\xi^2 E(LB) = E[(\tilde{\xi} - \xi)^2]$, $\xi^2 E(LU) = E[(\tilde{\eta} - \eta)^2]$, $\xi^2 E(CP) = E[(\tilde{\xi} - \xi)(\tilde{\eta} - \eta)]$ estão na Tab. 2.14.

Consideremos uma combinação linear específica

$$\emptyset = \ell_1 \eta + \ell_2 \xi \quad \Rightarrow (2.87)$$

de η e ξ onde ℓ_1 ou ℓ_2 podem ser 0 (zero) porém não ambos

Seja k o número total de subamostras e Q_j igual a variância do M.E.L.N.V.

$$\emptyset_j^* = \ell_1 \eta_j^* + \ell_2 \xi_j^* \quad \Rightarrow (2.88)$$

de \emptyset para a j -ésima subamostra $j=1,2,\dots,k$.

A variância Q_j é igual a

$$Q_j = (\ell_1^2 A_j + 2\ell_1 \ell_2 B_j + \ell_2^2 C_j) \xi^2 \quad \Rightarrow (2.89)$$

Na (2.89) temos:

$$\begin{cases} C_j = \frac{E_j(L\xi)}{1-E_j(L\xi)} \\ B_j = \frac{E_j(CP)}{1-E_j(L\xi)} \\ A_j = E_j(L\eta) + \frac{E_j(CP)}{1-E_j(L\xi)} \end{cases} \quad \rightarrow (2.90)$$

A justificativa desses resultados está em Mann [62]

Nessas condições a combinação linear ótima de estimativas subamostrais não viciadas de θ é

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{1}{Q_j} (\ell_1 \eta_j^* + \ell_2 \xi_j^*)}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{Q_j}} \quad \rightarrow (2.91)$$

sendo que a

$$V(\bar{\theta}) = \frac{\xi^2}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{Q_j}} \quad \rightarrow (2.92)$$

★EXEMPLO 2.10 - Em Mann, Schafer e Singpurwalla [77] temos um teste aplicado a 43 capacitores, os quais foram divididos em 2 subamostras de tamanhos 22 e 21.

Se na primeira subamostra 2 unidades não falharam e se na segunda todas falharam podemos obter

$$Q_1 \xi^2 = V(\xi^*_1) = \frac{\xi^2 \cdot 0,03514}{1 - 0,03514} = 0,03642 \xi^2$$

pois $n_1=22$ e $r_1=20$.

$$Q_2 \xi^2 = V(\xi^*_2) = \frac{\xi^2 \cdot 0,03047}{1 - 0,03047} = 0,03143 \xi^2$$

pois $n_2=r_2=21$ conforme as tabelas de Mann [63]

Daí

$$\bar{\xi} = \frac{\frac{\xi^*_1}{0,03642} + \frac{\xi^*_2}{0,03143}}{27,46 + 31,82}$$

Dessa forma se tivéssemos $\xi^*_1=0,623$ e $\xi^*_2=0,592$ respectivamente então

$$\boxed{\bar{\xi} = 0,606}$$

A variância de $\bar{\xi}$ é igual a $\frac{\xi^2}{27,46+31,82} = \boxed{0,017 \xi^2}$

Deve-se observar que os valores de η nas subamostras não precisam ser iguais.

III - ESTIMADORES LINEARES BASEANDO-SE EM POUCAS OBSERVAÇÕES ORDENADAS

Para amostras pequenas até aquelas de tamanho moderado pode-se aplicar um procedimento baseado em duas ou três observações ordenadas para definir estimadores que são próximos dos E.M.V., dos M.E.L.I. e são razoavelmente eficientes (tem pequeno E.M.Q.).

Desde que os M.E.L.N.V. e os M.E.L.I. são relativamente simples de obter para amostras de tamanho 25 ou menor, valores para obter as estimativas pontuais em função de duas ou três estatísticas de ordem de η , ξ e x_p não serão analisadas.

Elas entretanto estão disponíveis no trabalho de Mann [68] para amostras de tamanho 2 até 15.

Se entretanto o tamanho da amostra é quase completo e se é 80 ou mais o estimador de duas estatísticas de ordem de ξ , determinado iterativamente por Libelein [57] em 1954 e desenvolvido por Dubey [20] em 1967 tem assintoticamente o menor E.Q.M. entre os estimadores invariantes baseados em duas estatísticas de ordem.

É assintoticamente não viciado e assintoticamente normal e a eficiência assintótica com relação ao extremo de Cramér-Rao para os estimadores regulares não viciados é de 0,66.

A sua forma é

$$\xi' = 0,33 [X_{(0,9737n)} - X_{(0,1673n)}] \quad \rightarrow (2.93)$$

Na (2.93) se os números de ordem das duas estatísticas de ordem não forem inteiros, eles são substituídos pelos inteiros $[0,9737n]+1$ e $[0,1673n]+1$.

Dubey [20] estabeleceu também o estimador assintoticamente mais eficiente baseado em duas estatísticas de ordem de η , mais precisamente:

$$\eta' = 0,446X_{(0,40n)} + 0,554X_{(0,82n)} \quad \rightarrow (2.94)$$

com $0,40n$ e $0,82n$ iguais a $[0,40n]+1$ e $[0,82n]+1$ respectivamente se eles não forem inteiros.

Esse estimador é assintoticamente não viciado e a sua eficiência assintótica com relação ao extremo de Cramér-Rao $(\frac{1,109\xi^2}{n})$ para uma estimação não viciada de η é $0,82$.

Na realidade a obtenção dos coeficientes e dos números das observações ordenadas que dão os melhores estimadores assintoticamente de duas estatísticas de ordem de ξ e η dependem dos resultados de Mosteller[84] que datam de 1946

Ele demonstrou que $X_{(\lambda n)}$ a λn -ésima estatística de ordem de uma amostra de tamanho n de uma f.d. $f(x)$ é assintoticamente normal com média x_λ e variância $\frac{\lambda(1-\lambda)}{n[f(x_\lambda)]^2}$ e que a covariância da λn -ésima e δn -ésima observações ($1 \leq \lambda n \leq \delta n \leq n$) é assintoticamente igual a

$$\frac{\lambda(1-\delta)}{nf(x_\lambda)f(x_\delta)}$$

onde $x_\lambda = \eta + \xi \ln\{\ln \frac{1}{1-\lambda}\}$ e portanto $f(x_\lambda) = \frac{(1-\lambda)}{\xi} \ln(\frac{1}{1-\lambda})$.

Mann [64] determinou as eficiências assintóticas dos estimadores de $x_{0,05}$ e $x_{0,10}$ (a. a. de tamanho pequeno e moderado) e obteve os resultados $0,82$ e $0,81$ respectivamente.

Esses estimadores, que são assintoticamente não viciados tem a forma

$$X'_p = X_{([0,40]+1)} + C_x [X_{([0,98n]+1)} - X_{([0,13n]+1)}] (2.95) \quad \uparrow$$

onde para $p=0,10$ temos $C_x = -0,473$ e para $p=0,05$ temos $C_x = -0,689$.

Os extremos inferiores de Cramér-Rao para os estimadores regulares não viciados de $x_{0,10}$ e $x_{0,05}$ são respectivamente $\frac{5,345\xi^2}{n}$ e $\frac{8,000\xi^2}{n}$.

Para amostras completas ou quase completas de tamanho suficientemente grande pode-se obter estimativas de η e ξ com eficiências de 0,9720 e 0,9442 respectivamente formando a apropriada combinação linear de 10 observações ordenadas dos $X_{(i)}$.

Isso foi demonstrado por Chan e Kabir [7] que obtiveram as eficiências assintóticas para específicas combinações lineares de 2 até 10 observações ordenadas.

Dessa forma os estimadores de η , ξ e x_p devidos a Chan e Kabir têm a forma

$$\eta'_{c-k} = \sum_{i=1}^{10} a_i X_{([\delta_i n]+1)} \quad \Rightarrow (2.96)$$

$$\xi'_{c-k} = \sum_{i=1}^{10} b_i X_{([\lambda_i n]+1)} \quad \Rightarrow (2.97)$$

$$X'_{(P)c-k} = \eta'_{c-k} + \xi'_{c-k} \ln \left[\ln \frac{1}{1-p} \right] \quad \Rightarrow (2.98)$$

Na (2.96) $\delta_i = \frac{i-0,5}{10}$ e λ_i , a'_i e b'_i estão na Tab. 2.19.

Na Tab. 2.19 deve-se observar que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{10} a'_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{10} b'_i \end{cases} \quad \Rightarrow (2.99)$$

Fonte: Mann, Schafer e Singpurwalla [77]

i	λ_i	a'_i	b'_i
1	0,0014	0,1742	-0,0284
2	0,0078	0,1792	-0,0616
3	0,0249	0,1416	-0,0934
4	0,0624	0,1186	-0,1130
5	0,1412	0,1005	-0,0652
6	0,6501	0,0850	0,1653
7	0,8002	0,0710	0,0950
8	0,9002	0,0582	0,0596
9	0,9616	0,0467	0,0309
10	0,9918	0,0250	0,0107

Tab. 2.19 - Valores para obter as estimativas dos parâmetros de uma distribuição de valor extremo.

Isto assegura que os estimadores são invariantes, ou seja tem E.Q.M. proporcional a ξ^2 .

★EXEMPLO 2.11 - De Mann, Schafer e Singpurwalla [77] tiramos os seguintes dados de um teste de imersão para a análise de corrosão em que cada unidade de uma amostra de tamanho 100 foi observada durante semanas até aparecerem as trincas.

Para o cálculo do estimador de η precisamos dos logaritmos naturais dos tempos de falha que ocorreram na 6^a, 16^a., 26^a.,.... 96^a. posições.

Esses valores na amostra de Mann, Schafer e Singpurwalla são

$$\left[\begin{array}{l} X_{(6)} = 0,520 \\ X_{(16)} = 1,21 \\ X_{(26)} = 1,41 \\ X_{(36)} = 1,56 \\ X_{(46)} = 1,66 \\ X_{(56)} = 1,83 \\ X_{(66)} = 2,05 \\ X_{(76)} = 2,10 \\ X_{(86)} = 2,30 \\ X_{(96)} = 2,58 \end{array} \right.$$

Da (2.96) e da Tab. 2.19 vem:

$$\eta'_{c-k} = 0,1742 \cdot 0,520 + 0,1792 \cdot 1,21 + \dots + 0,0250 \cdot 2,58$$

$$\boxed{\eta'_{c-k} \approx 1,45} \longrightarrow \theta'_{c-k} = e^{1,45} \approx \boxed{4,26 \text{ semanas}}$$

Para o cálculo do estimador de ξ precisamos dos logaritmos naturais dos tempos de falhas das observações de número 1, 3, 7, 15, 66, 81, 91, 97 e 100.

Deve-se notar que a primeira observação será aqui tomada duas vezes

Os dados de Mann, Schafer e Singpurwalla são:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{(1)} = -0,301 \\ X_{(3)} = 0,262 \\ X_{(7)} = 0,663 \\ X_{(15)} = 1,08 \\ X_{(66)} = 2,05 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{(81)} = 2,25 \\ X_{(91)} = 2,42 \\ X_{(97)} = 2,58 \\ X_{(100)} = 2,77 \end{array} \right.$$

Em vista da (2.97) e da Tab. 2.19 vem:

$$\xi'_{c-k} = -0,0284 \cdot (-0,301) - 0,0616 \cdot (-0,301) - 0,0934 \cdot (0,262) + \dots + 2,77 \cdot 0,0107$$

$$\boxed{\xi'_{c-k} = 0,663} \longrightarrow \beta'_{c-k} = \frac{1}{0,663} \approx \boxed{1,508}$$

Uma estimativa de vida confiável correspondente a uma proporção de 90% de sobreviventes tira-se de (2.98)

$$T'_{(0,10)c-k} = \exp\{1,45 - 0,663 \ln[\ln \frac{1}{0,90}]\} \approx \boxed{1 \text{ semana}}$$

Existem fortes indicações que amostras com tamanho da ordem de 80 produzirão aproximadamente as eficiências assintóticas citadas para os estimadores lineares ba seando-se sômente em algumas observações ordenadas.

2.6 - INTERVALOS DE CONFIANÇA SOB CENSURA DO TIPO II PARA OS PARÂMETROS DA WEIBULL BIPARAMÉTRICA.

2.6.1 - GENERALIDADES

Para a distribuição de Weibull biparamétrica sob censura do tipo II, os intervalos de confiança (I.C.) dos parâmetros assim como os testes de hipóteses relativos aos mesmos podem se basear em muitos dos estimadores pontuais discutidos no parágrafo anterior.

Para esse modelo, as estatísticas que tendem a produzir testes com o maior poder (maior probabilidade de rejeitar a hipótese falsa) e o I.C. com a maior precisão [menor probabilidade de incluir um valor maior do que (menor do que) qualquer $g'(\eta, \xi) > (<) g(\eta, \xi)$ em um I.C. superior (inferior) para $g(\eta, \xi)$] são funções que estimam os parâmetros com os menores E.M.Q.

Esses são, como já discutimos, os E.M.V. e os M.E.L.I.

Bogdanoff e Pierce [5] em 1973 e Lawless [53] em 1973 mostraram que o uso do enfoque de Bayes para a estimação dos parâmetros não oferece nenhuma melhora sobre esses métodos clássicos na obtenção dos extremos de confiança para a distribuição de Weibull.

2.6.2 - I.C. PARA AMOSTRAS CENSURADAS DO TIPO II DE TAMANHO MENOR QUE 26.

Infelizmente não se pode achar as distribuições das funções nem dos E.M.V. e nem dos M.E.L.I. na forma analítica quando se trata de pequenas amostras.

Para grandes amostras (de tamanho 80 ou acima) as estatísticas $\frac{\tilde{\xi}}{\xi}$, $\frac{\hat{\xi}}{\xi}$, $\frac{\tilde{X}_p - x_p}{\tilde{\xi}}$ e $\frac{\hat{X}_p - x_p}{\hat{\xi}}$ para $0 < p < 1$ (onde $\tilde{\xi}$ e \hat{X}_p são E.M.V.) têm distribuição aproximadamente normal.

Para amostras pequenas e moderadas, percentis das funções invariantes dos M.E.L.I e dos E.M.V. foram calculados e tabulados através do uso do método de simulação de Monte Carlo.

Entre os primeiros trabalhos nesse sentido destacamos os de Thoman, Bain e Antle [93] em 1969 e [94] 1970, Billman, Antle e Bain [3] em 1971 e Mann e Fertig [72] em 1974.

Consideremos inicialmente o parâmetro ξ .

$$\text{A estatística } W = \frac{\tilde{\xi}}{\xi} \quad \Rightarrow (2.100)$$

onde $\tilde{\xi}$ é o M.E.L.I. de ξ , está na Tab. 2.20.

Daremos as justificativas no item 2.6.4, porém des

de que

$$\begin{cases} P\left(\frac{\tilde{\xi}}{\xi} > \omega_{\alpha}\right) = 1-\alpha \\ P\left(\frac{\tilde{\xi}}{\xi} < \omega_{1-\alpha}\right) = 1-\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi \geq \frac{\tilde{\xi}}{\omega_{1-\alpha}} & \text{com probabilidade } 1-\alpha \\ \xi \leq \frac{\tilde{\xi}}{\omega_{\alpha}} & \text{com probabilidade } 1-\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow (2.101)$$

são respectivamente os extremos de confiança inferior e superior para ξ ao nível de confiança $1-\alpha$.

O I.C. de $100(1-\alpha)\%$ para ξ terá a forma:

$$\frac{\tilde{\xi}}{\omega_{1-\alpha/2}} \leq \xi \leq \frac{\tilde{\xi}}{\omega_{\alpha/2}} \quad \Rightarrow (2.102)$$

Um extremo de confiança inferior ao nível $1-\alpha$ para η ou $x_p = \eta + \xi \ln\{\ln \frac{1}{1-p}\}$ pode ser obtido de forma semelhante a partir da estatística

$$V_{1-p} = \frac{\frac{\tilde{\eta} - x_p}{\xi}}{\frac{\tilde{\xi}}{\omega_{\alpha/2}}} \quad \Rightarrow (2.103)$$

visto que pode-se mostrar que a distribuição de V_{1-p} é independente de função de η e ξ .

Desde que $\frac{\tilde{\eta} - x_p}{\tilde{\xi}} < v_{1-p, 1-\alpha}$ com probabilidade $1-\alpha$, a $P(x_p > \tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-p, 1-\alpha}) = 1-\alpha$ ou

$$x_p \geq \tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-p, 1-\alpha} \quad \Rightarrow (2.104)$$

é o extremo de confiança inferior para x_p ao nível de confiança γ .

Um extremo de confiança inferior para t_p (vida confiável correspondente a uma proporção de sobreviventes de $1-p$) ao nível $1-\alpha$ é dado por:

$$t_p \geq \exp(x_p) = \exp(\tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-p, 1-\alpha}) \quad \Rightarrow (2.105)$$

É óbvio que o I.C. de $(1-\alpha)100\%$ para x_p tem a forma:

$$\tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-p, 1-\alpha/2} \leq x_p \leq \tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-p, \alpha/2} \quad \Rightarrow (2.106)$$

Na Tab. 2.21 temos uma parte dos valores de $v_{1-p, 1-\alpha}$ ou seja os quantis da distribuição de V_{1-p} para os valores $p=0,05$ e $p=0,10$ e $(1-\alpha)$ variando de 0,02 até 0,95.

Se $p=1-\exp(-1)$ então $x_p=\eta$ e portanto

$$V_{1-p} = \frac{\tilde{\eta} - \eta}{\tilde{\xi}} \quad \Rightarrow (2.107)$$

Na Tab. 2.22 correspondendo a $p=1-\exp(-1)$ temos os valores para obter os extremos de confiança para o parâmetro de posição da distribuição do valor extremo η ou do parâmetro de escala da Weibull $\theta=\exp(\eta)$.

Portanto o I.C. bilateral de $(1-\alpha)100\%$ para η é

$$\tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-\alpha/2} \leq \eta \leq \tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{\alpha/2} \quad \Rightarrow (2.108)$$

De (2.102) temos o I.C. bilateral de $100(1-\alpha)\%$ para $\beta = \frac{1}{\xi}$.

$$\frac{\omega_{\alpha/2}}{\tilde{\xi}} \leq \beta \leq \frac{\omega_{1-\alpha/2}}{\tilde{\xi}} \quad \Rightarrow (2.109)$$

De (2.108) temos o I.C. bilateral de $100(1-\alpha)\%$ para $\theta=\exp(\eta)$.

$$\exp(\tilde{\eta} - \tilde{\xi} v_{1-\alpha/2}) \leq \theta \leq \exp(\tilde{\eta} - \tilde{\xi} \cdot v_{\alpha/2}) \quad \Rightarrow (2.110)$$

★EXEMPLO 2.12 - Para ilustrar numericamente essas fórmulas tomemos os dados do Exemplo 2.7.

O I.C. bilateral de 90% para o parâmetro β em vista da (2.109) é:

$$\frac{0,42}{0,479225} \leq \beta \leq \frac{1,46}{0,479225} \longrightarrow \boxed{0,88 \leq \beta \leq 3,05}$$

pois $1-\alpha=0,9$ e da Tab. 2.20 para $n=10$, $r=7$ temos

$$\begin{cases} \omega_{0,05} = 0,42 \\ \omega_{0,95} = 1,46 \end{cases}$$

Podemos também obter um limite de confiança unilateral a esquerda de 90% para o décimo percentil da distribuição do número ciclos até falhar.

Da (2.105) e da Tab. 2.21 temos:

$$t_{0,10} \geq \exp[9,493392 - 0,479225 \cdot 4,41] \approx \boxed{1603,5 \text{ ciclos}}$$

Podemos finalmente obter o I.C. de 90% para a vida característica θ a partir de (2.110) e da Tab. 2.22.

$$\exp(9,493392 - 0,479225 \cdot 0,70) \leq \theta \leq \exp[9,493392 - 0,479225 \cdot (1,08)]$$

$$\boxed{9489 \text{ ciclos} \leq \theta \leq 22269 \text{ ciclos}}$$

n	r	$1-\alpha$										
		0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
8	3	0.08	0.13	0.19	0.35	0.49	0.59	0.70	0.92	1.31	1.58	1.95
	4	0.16	0.23	0.31	0.47	0.61	0.70	0.81	1.00	1.33	1.55	1.83
	5	0.23	0.31	0.39	0.55	0.68	0.77	0.87	1.05	1.33	1.52	1.76
	6	0.30	0.38	0.46	0.62	0.74	0.82	0.91	1.06	1.32	1.49	1.69
	7	0.36	0.44	0.52	0.67	0.78	0.86	0.94	1.08	1.30	1.45	1.62
	8	0.42	0.50	0.58	0.71	0.82	0.89	0.96	1.09	1.28	1.41	1.56
9	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.49	0.59	0.70	0.92	1.31	1.58	1.92
	4	0.16	0.23	0.31	0.47	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.55	1.84
	5	0.23	0.31	0.39	0.54	0.68	0.77	0.86	1.04	1.33	1.52	1.76
	6	0.30	0.38	0.45	0.60	0.73	0.81	0.90	1.06	1.31	1.48	1.70
	7	0.35	0.43	0.50	0.66	0.77	0.85	0.93	1.07	1.30	1.46	1.65
	8	0.40	0.48	0.55	0.70	0.81	0.88	0.95	1.08	1.28	1.42	1.59
10	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.59	0.71	0.93	1.31	1.59	1.92
	4	0.16	0.23	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.57	1.86
	5	0.23	0.30	0.38	0.54	0.68	0.77	0.86	1.04	1.33	1.53	1.77
	6	0.29	0.37	0.45	0.60	0.73	0.81	0.90	1.06	1.32	1.49	1.71
	7	0.34	0.42	0.50	0.65	0.77	0.84	0.92	1.07	1.31	1.46	1.66
	8	0.39	0.47	0.54	0.69	0.80	0.87	0.95	1.08	1.29	1.43	1.60
11	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.59	0.71	0.92	1.31	1.60	1.97
	4	0.15	0.22	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.34	1.58	1.87
	5	0.22	0.30	0.38	0.54	0.67	0.76	0.86	1.04	1.34	1.54	1.82
	6	0.28	0.36	0.44	0.60	0.73	0.81	0.90	1.07	1.33	1.52	1.73
	7	0.33	0.41	0.49	0.65	0.76	0.84	0.92	1.08	1.32	1.48	1.67
	8	0.38	0.46	0.54	0.68	0.80	0.87	0.95	1.08	1.31	1.45	1.62
12	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.58	0.70	0.92	1.30	1.56	1.87
	4	0.16	0.22	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.55	1.82
	5	0.23	0.30	0.38	0.54	0.67	0.76	0.86	1.04	1.33	1.53	1.78
	6	0.29	0.36	0.44	0.60	0.72	0.81	0.90	1.06	1.33	1.49	1.72
	7	0.34	0.41	0.50	0.65	0.76	0.84	0.93	1.08	1.31	1.47	1.66
	8	0.38	0.46	0.54	0.68	0.79	0.87	0.95	1.08	1.30	1.45	1.61

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

O ponto representa a vírgula decimal

Tab. 2.20 - Uma parte da tabela dos percentis ou quantis da distribuição da estatística $W = \bar{\xi}/\xi$

n	r	1-α										
		0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
8	3	0.49	1.13	1.52	2.11	2.62	3.01	3.48	4.62	7.51	10.67	16.36
	4	1.04	1.33	1.60	2.10	2.56	2.88	3.27	4.10	5.96	7.79	10.76
	5	1.11	1.36	1.60	2.08	2.49	2.78	3.12	3.82	5.28	6.50	8.62
	6	1.13	1.36	1.59	2.05	2.43	2.71	3.02	3.62	4.83	5.83	7.18
	7	1.12	1.36	1.58	2.03	2.38	2.64	2.93	3.46	4.49	5.31	6.40
	8	1.12	1.36	1.58	2.01	2.34	2.57	2.83	3.32	4.21	4.90	5.84
9	3	0.42	1.12	1.51	2.09	2.57	2.95	3.40	4.43	7.14	10.21	15.61
	4	1.06	1.36	1.61	2.10	2.52	2.84	3.21	4.00	5.77	7.39	10.26
	5	1.17	1.41	1.63	2.08	2.47	2.76	3.08	3.76	5.13	6.34	8.13
	6	1.19	1.41	1.62	2.06	2.43	2.70	2.99	3.59	4.74	5.67	7.06
	7	1.19	1.41	1.62	2.04	2.39	2.64	2.91	3.45	4.48	5.28	6.46
	8	1.19	1.40	1.61	2.02	2.36	2.59	2.84	3.34	4.26	4.95	5.94
10	3	0.09	0.99	1.46	2.05	2.51	2.84	3.27	4.25	6.75	9.36	14.88
	4	0.99	1.34	1.62	2.08	2.48	2.77	3.13	3.90	5.56	7.17	9.60
	5	1.17	1.42	1.64	2.07	2.45	2.71	3.02	3.67	5.00	6.13	8.02
	6	1.20	1.43	1.64	2.05	2.41	2.66	2.94	3.53	4.67	5.59	6.99
	7	1.21	1.43	1.64	2.04	2.38	2.62	2.88	3.41	4.41	5.18	6.29
	8	1.21	1.43	1.63	2.02	2.35	2.58	2.83	3.31	4.22	4.91	5.83
11	3	-0.09	0.90	1.42	2.01	2.45	2.77	3.17	4.07	6.41	9.11	14.47
	4	0.97	1.35	1.61	2.06	2.44	2.73	3.06	3.79	5.46	7.04	9.98
	5	1.18	1.43	1.64	2.05	2.41	2.68	2.98	3.60	4.90	6.07	7.83
	6	1.24	1.45	1.64	2.04	2.38	2.63	2.91	3.46	4.58	5.52	6.96
	7	1.25	1.45	1.64	2.03	2.35	2.59	2.86	3.36	4.36	5.16	6.34
	8	1.25	1.45	1.64	2.01	2.33	2.56	2.80	3.28	4.15	4.87	5.82
12	3	0.09	0.90	1.42	2.01	2.45	2.77	3.17	4.07	6.41	9.11	14.47
	4	0.97	1.35	1.61	2.06	2.44	2.73	3.06	3.79	5.46	7.04	9.98
	5	1.18	1.43	1.64	2.05	2.41	2.68	2.98	3.60	4.90	6.07	7.83
	6	1.24	1.45	1.64	2.04	2.38	2.63	2.91	3.46	4.58	5.52	6.96
	7	1.25	1.45	1.64	2.03	2.35	2.59	2.86	3.36	4.36	5.16	6.34
	8	1.25	1.45	1.64	2.01	2.33	2.56	2.80	3.28	4.15	4.87	5.82

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

(ponto representa a vírgula decimal

Tab. 2.21 - Uma parte da tabela dos percentis ou quantis da distribuição da estatística

$$v_{1-p} = \frac{\tilde{\eta}-x_p}{\tilde{\xi}}$$

no caso particular de $p = 0,10$.

Observe-se que

$v_{0,05} = -1,08$ e $v_{0,95} = 0,70$ da Tab. 2.22.

n	r	1- α										
		0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
10	3	-17.45	-9.98	-6.05	-2.58	-1.29	-0.76	-0.34	0.17	0.66	0.87	1.07
	4	-6.54	-4.17	-2.70	-1.22	-0.58	-0.28	-0.04	0.27	0.60	0.77	0.96
	5	-3.56	-2.37	-1.56	-0.73	-0.31	-0.12	0.05	0.28	0.56	0.72	0.93
	6	-2.21	-1.51	-1.03	-0.48	-0.19	-0.04	0.09	0.28	0.54	0.71	0.92
	7	-1.56	-1.08	-0.77	-0.35	-0.12	-0.00	0.11	0.28	0.54	0.70	0.93
	8	-1.20	-0.86	-0.62	-0.27	-0.08	0.02	0.12	0.28	0.53	0.71	0.93
	9	-0.97	-0.70	-0.50	-0.23	-0.06	0.04	0.13	0.29	0.54	0.71	0.93
	10	-0.80	-0.60	-0.44	-0.20	-0.04	0.04	0.14	0.29	0.54	0.71	0.92
11	3	-18.52	-10.68	-6.42	-2.76	-1.41	-0.85	-0.42	0.13	0.65	0.87	1.07
	4	-7.26	-4.57	-2.95	-1.37	-0.66	-0.36	-0.10	0.24	0.58	0.75	0.92
	5	-4.00	-2.58	-1.75	-0.81	-0.37	-0.16	0.01	0.26	0.54	0.69	0.88
	6	-2.45	-1.67	-1.16	-0.53	-0.22	-0.07	0.06	0.26	0.52	0.66	0.85
	7	-1.70	-1.21	-0.85	-0.40	-0.15	-0.02	0.09	0.26	0.50	0.65	0.86
	8	-1.30	-0.92	-0.66	-0.30	-0.11	0.00	0.10	0.26	0.50	0.65	0.86
	9	-1.06	-0.76	-0.54	-0.25	-0.08	0.02	0.11	0.26	0.50	0.65	0.86
	10	-0.87	-0.63	-0.46	-0.21	-0.06	0.03	0.12	0.27	0.50	0.65	0.86
12	3	-19.08	-11.23	-6.92	-3.03	-1.58	-0.97	-0.49	0.10	0.64	0.88	1.10
	4	-7.44	-4.81	-3.17	-1.47	-0.74	-0.40	-0.14	0.21	0.58	0.75	0.92
	5	-4.17	-2.72	-1.88	-0.89	-0.42	-0.20	-0.01	0.24	0.53	0.68	0.84
	6	-2.63	-1.83	-1.27	-0.60	-0.26	-0.10	0.05	0.25	0.50	0.64	0.81
	7	-1.91	-1.32	-0.92	-0.42	-0.17	-0.04	0.08	0.25	0.48	0.62	0.80
	8	-1.41	-1.00	-0.71	-0.33	-0.12	-0.01	0.09	0.25	0.48	0.62	0.79
	9	-1.15	-0.80	-0.58	-0.27	-0.09	0.01	0.10	0.25	0.47	0.62	0.80
	10	-0.91	-0.67	-0.48	-0.23	-0.07	0.02	0.11	0.25	0.47	0.62	0.80
13	3	-19.77	-11.66	-7.41	-3.21	-1.64	-1.02	-0.54	0.08	0.65	0.88	1.09
	4	-8.22	-5.21	-3.37	-1.60	-0.82	-0.48	-0.19	0.20	0.59	0.76	0.93
	5	-4.44	-2.95	-1.99	-0.96	-0.47	-0.24	-0.04	0.24	0.54	0.68	0.84
	6	-2.86	-1.94	-1.35	-0.66	-0.31	-0.13	0.03	0.25	0.51	0.64	0.79
	7	-2.04	-1.40	-0.98	-0.46	-0.19	-0.06	0.06	0.25	0.47	0.61	0.77
	8	-1.52	-1.06	-0.77	-0.36	-0.14	-0.02	0.08	0.24	0.46	0.59	0.75
	9	-1.18	-0.86	-0.61	-0.29	-0.10	-0.00	0.09	0.24	0.45	0.58	0.74
	10	-1.00	-0.72	-0.52	-0.24	-0.08	0.01	0.10	0.24	0.45	0.58	0.74
13	11	-0.85	-0.63	-0.45	-0.21	-0.06	0.02	0.11	0.24	0.45	0.58	0.75
	12	-0.74	-0.56	-0.41	-0.19	-0.05	0.03	0.11	0.25	0.45	0.59	0.75
	13	-0.67	-0.51	-0.38	-0.18	-0.05	0.04	0.11	0.25	0.45	0.59	0.75

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

O ponto representa a vírgula decimal

Tab. 2.22 - Uma parte da tabela dos percentis da distribuição estatística

$$V_{1-p} = \frac{\tilde{\eta} - \eta}{\tilde{\xi}} \text{ para } p = 1 - e^{-1}$$

2.6.3 - I.C. PARA GRANDES AMOSTRAS E COMPLETAS.

Para amostras completas com tamanho 80 ou maior os E.M.V. e os estimadores lineares atingem aproximadamente as suas propriedades assintóticas.

Dessa forma as tabelas da variável normal padrão podem ser usadas com funções dos estimadores para obter os I.C.

★EXEMPLO 2.13 - O estimador de $x_{0,10}$ baseado em tres estatísticas de ordem dado pela (2.95) é assintoticamente normal com média $x_{0,10}$. Representemos esse estimador por $X'_{0,10}$.

A eficiência assintótica de $X'_{0,10}$ é 0,82 e a variância assintótica do E.M.V. de $x_{0,10}$ (desde que a covariância dos E.M.V. de ξ e η é $-0,257\xi^2$) é igual a

$$\frac{1,104\xi^2}{n} + 0,608 \left\{ \ln \left[\ln \frac{1}{0,90} \right] \right\}^2 \frac{\xi^2}{n} - 2(0,257) \ln \left[\ln \left(\frac{1}{0,90} \right) \right] \frac{\xi^2}{n}$$

Portanto a variância assintótica de $X'_{0,10}$ é

$$\frac{\frac{5,345}{0,82}\xi^2}{n} \text{ e daí } \frac{X'_{0,10} - x_{0,10}}{\frac{2,55\xi}{\sqrt{n}}} \quad \rightarrow (2.111)$$

sendo assintoticamente normal padrão com média 0 (zero) e variância 1.

Para obter o extremo de confiança para $x_{0,10}$ podemos utilizar simplesmente o estimador ξ' dado pela (2.93) para ξ , visto que

$$\frac{X'_{0,10} - x_{0,10}}{\frac{2,55\xi'}{\sqrt{n}}} \quad \rightarrow (2.112)$$

é também assintoticamente normal com média 0 e variância 1.

Pode-se de uma forma similar obter os estimadores, assintoticamente normais para η e $x_{0,05}$ usando o fato de que as variâncias assintóticas de

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta' = 0,446 X_{([0,40n]+1)} + 0,554 X_{([0,82n]+1)} \\ X'_{0,05} = X_{([0,40n]+1)}^{-0,689} (X_{([0,98n]+1)} - X_{([0,13n]+1)}) \end{array} \right.$$

são $\frac{1,109}{0,82} \frac{\xi^2}{n}$ e $\frac{8,000}{0,81} \frac{\xi^2}{n}$ respectivamente.

A distribuição assintótica de $\frac{\xi'}{\xi}$ é normal com média 1 e variância $\frac{(\frac{0,608}{0,66})}{n}$

Dessa forma os extremos de confiança assintóticos para ξ podem também ser obtidos a partir de

$$1,042\sqrt{n}\left(\frac{\xi'}{\xi} - 1\right) \quad \rightarrow (2.113)$$

utilizando-se tabelas da normal padrão.

Os estimadores assintóticos baseados em 10 observações de ordem, η'_{c-k} e ξ'_{c-k} fornecem extremos de confian

ça mais precisos, pois as suas eficiências assintóticas são respectivamente iguais a 0,9720 e 0,9442.

2.6.4 - I.C. PARA AMOSTRAS DE TAMANHO MODERADO PARA GRANDE

1 - Para o parâmetro $\xi = \beta^{-1}$.

Pode-se agora utilizar o estimador ξ^{**} dado pela (2.69) para obter os extremos de confiança para o parâmetro ξ .

Bain [2] mostrou que a média e a variância de

$$\frac{nk_{r,n} \xi^{**}}{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^r (X_{(r)} - X_{(i)})}{\xi} \quad \Rightarrow (2.114)$$

são ambas aproximadamente iguais a $nk_{r,n}$ para n grande e $\frac{r}{n}$ em torno de 0,5 ou menos.

Dessa forma ele sugeriu aproximar a distribuição de $\frac{2nk_{r,n} \xi^{**}}{\xi}$ por uma distribuição χ^2 com $2nk_{r,n}$ g.l.

Uma aproximação melhor, aplicada para todos os r , pode ser obtida para $n \geq 20$ utilizando a observação de van Montfort [95] feita em 1970 de que, para $X_{(i)}$ e $Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \eta}{\xi}$ a variável H_i tal que

$$H_i = \frac{X_{(i+1)} - X_{(i)}}{\xi [E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})]} \quad \Rightarrow (2.115)$$

tem uma distribuição aproximadamente exponencial com média

1 e, variância aproximadamente 1 e H_i e H_j , $i \neq j$ têm uma covariância bem próxima de zero.

Embora essa aproximação seja geralmente bastante boa para $n \geq 3$ para todos os percentis da distribuição entre 0,05 e 0,95, ela depende de um resultado assintótico relativo a diferenças de estatísticas de ordem adjacentes dado por Pyke [89] em 1965.

Essa aproximação é utilizada na "construção" da estatística para o teste de aderência para a distribuição do valor extremo.

O fato de que a estatística para o teste de aderência tem uma distribuição bem próxima da beta, sugere que cada $2H_i$ tenha aproximadamente uma distribuição χ^2 com 2 g.l.

A concordância dos percentis da distribuição com os percentis da beta aumenta com n .

Por outro lado para $r \leq 0,90n$, $2nk_{r,n} \frac{\xi^{**}}{\xi}$ é igual à

$$W_{r,n} = \frac{2 \sum_{i=1}^r (X_{(r)} - X_{(i)})}{\xi} = \sum_{i=1}^{r-1} i [E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})] 2H_i \quad \Rightarrow (2.116)$$

e é portanto aproximadamente uma soma de v.a.i. ponderadas χ^2 .

Agora podem ser usados os resultados de Patnaik [85] para aproximar uma soma ponderada de variáveis χ^2 ponderadas pela $\chi^2 \frac{2mW}{v}$ com $\frac{2m^2}{v}$ g.l. onde \underline{m} e \underline{v} são a média e a variância respectivamente de $W_{r,n}$.

O valor $nk_{r,n}$ é a média de $\frac{W_{r,n}}{2}$ de forma que:

$$\frac{2mW}{v} = \frac{8n^2 k_{r,n}^2 \xi^{**}}{4n^2 k_{r,n}^2 \ell_{r,n}} = \frac{2\xi^{**}}{\ell_{r,n} \xi} \quad \rightarrow (2.117)$$

e tudo o que se precisa agora é a variância $(2nk_{r,n})^2 \ell_{r,n}$ de W .

Para $\frac{r}{n}$ pequeno, $\frac{v}{4} \approx nk_{r,n}$ e $\frac{2mW}{v} = W$.

Nesse caso o número de g.l. $\frac{2m^2}{v} \approx 2nk_{r,n}$ está em concordância com o que provou Bain [2].

$$\text{Em geral, } \frac{2m^2}{v} = \frac{2}{\ell_{r,n}}$$

Engelhardt e Bain [22] utilizaram argumentos assintóticos para inferir que

$$\frac{2\left(\frac{\xi^{**}}{\xi}\right)}{\ell_{r,n}}$$

é aproximadamente uma variável χ^2 com $\frac{2}{\ell_{r,n}}$ g.l. quando n torna-se grande com r fixo, isto é a, sua demonstração aplica-se para amostras fortemente censuradas.

Mais uma vez observamos que a esperança e a variância de ξ^{**} são ξ e $\ell_{r,n} \xi^2$ respectivamente.

Esses resultados também aplicam-se se $r = n$ quando s é $[0, 892n]$ e ξ^{**} e $W_{r,n}$ são definidos em termos de somas de valores absolutos de $X_{(s)} - X_{(i)}$, $i=1, 2, \dots, n$.

Desde que o número de g.l. $\frac{2m^2}{v}$, normalmente não é

um inteiro a aproximação de Wilson-Hilferty da qui-quadrado para a normalidade pode ser usada para aproximar $\phi_{r,n}(\zeta)$ o 100 ζ -ésimo percentil da distribuição de $\frac{\xi^{**}}{\xi}$.

Desde que $\frac{\xi^{**}}{\xi}$ é uma χ^2 , dividida pelos seus g.l., obteremos:

$$\phi_{r,n}(\zeta) \cong \left(1 - \frac{v}{9m} + \frac{z_{\zeta} \sqrt{v}}{3m}\right)^3 \quad \Rightarrow (2.118a)$$

que é aproximadamente igual a:

$$\phi_{r,n}(\zeta) \cong \left(1 - \frac{l_{r,n}}{9} + \frac{z_{\zeta} \sqrt{l_{r,n}}}{3}\right)^3 \quad \Rightarrow (2.118b)$$

onde z_{ζ} é o 100 ζ -ésimo percentil da distribuição normal padrão.

Um extremo de confiança superior para ξ ao nível $1 - \zeta$ é

$$\xi \leq \frac{\xi^{**}}{\phi_{r,n}(\zeta)} \quad \Rightarrow (2.119)$$

Esse método de aproximar os quantis da distribuição pode também ser usado para obter os extremos de confiança de ξ baseando-se no M.E.L.I. $\tilde{\xi}$ ou no M.E.L.N.V. ξ^* para valores de n que não estão na Tab. 2.20 desde que $\tilde{\xi}$ e ξ^* podem também ser expressos como somas ponderadas dos H_i .

Com o intuito de utilizar esse método, precisa-se conhecer os pesos definindo ξ^* ou $\tilde{\xi} = \frac{\xi^*}{1+C}$ e $C = V\left(\frac{\xi^*}{\xi}\right) = \frac{E(L\xi)}{1-E(L\xi)}$

Então como $E(\frac{\xi^*}{\xi})=1$, se C é conhecido, a média \underline{m} e a variância de \underline{v} de $\frac{\xi^*}{\xi}$ são ambas conhecidas e a distribuição de $\frac{2(\frac{\xi^*}{\xi})}{C}$ pode ser "ajustada" a uma qui-quadrado com $\frac{2}{C}$ g.l.

Resultados obtidos por essa aproximação para os percentis de $\frac{\bar{\xi}}{\xi} = \frac{\xi^*}{\xi(1+C)}$ concordam com os valores da Tab.2.20.

Como as somas de v.a.i χ^2 são iguais a uma χ^2 pode-se utilizar esse fato para obter extremos de confiança para ξ quando as amostras são divididas em subamostras ou quando amostras são de populações diferentes com o mesmo valor de ξ .

Neste último caso o valor de η não precisa ser o mesmo nas duas populações consideradas desde que os estimadores a serem combinados são independentes de η como mostrou-se no § 2.5.

O estimador de ξ ,

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{j=1}^k C_j^{-1} \xi_j^*}{\sum_{j=1}^k C_j^{-1}} \quad \rightarrow (2.120)$$

obtido da (2.91) tem esperança ξ e a variância $\frac{\xi^2}{\sum_{j=1}^k C_j^{-1}}$

Portanto

$$2\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi}\right) \sum_{j=1}^k C_j^{-1} = 2 \sum_{j=1}^k C_j^{-1} \left(\frac{\xi_j^*}{\xi}\right)$$

é uma variável aproximadamente χ^2 com $2 \sum_{j=1}^k C_j^{-1}$ g.l.

Para se obter um extremo de confiança superior de ξ ao nível $1-\alpha$ divide-se $\bar{\xi}$ por

$$\left[1 - \left(9 \sum_{j=1}^k C_j^{-1} \right)^{-1} + \frac{z_{\alpha} \left(\sum_{j=1}^k C_j^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}}}{3} \right]^3$$

[basta ver a (2.118b)].

Poderíamos também utilizar a estatística aproximada $F, \frac{\xi^*}{\xi} \frac{1}{2}$ com $\frac{2}{C_1}$ e $\frac{2}{C_2}$ g.l. para testar ξ_1 e ξ_2 .

Métodos para lidar com a estatística F aproximada com g.l. que não são inteiros serão abordados no final desse parágrafo.

★EXEMPLO 2.14 - Baseando-se nos resultados do Exemplo 2.9 podemos achar um extremo de confiança superior de 80% para ξ .

Para tanto da Tab. 2.17 para $n=40$ e $\frac{r}{n}=0,5$ temos:

$$k_{20,40} = 0,5584 ; l_{20,40} = \frac{1,8185}{40} = 0,04546$$

Já se calculou $\xi^{**} \approx 0,482$, assim em vista da (2.120) temos:

$$\xi \leq \frac{0,482}{\left(1 - \frac{0,04546}{9} + 0,84 \frac{\sqrt{0,04546}}{3} \right)^3} \approx \boxed{0,589}$$

onde $z \approx -0,84$, pois $1 - \alpha = 0,8$.

II - PARA O PARÂMETRO $\eta = \ln \theta$

AMOSTRAS QUE NÃO SÃO FORTEMENTE CENSURADAS

Para se obter os extremos de confiança para η ou para θ pode-se utilizar os resultados de Mann e Fertig [41].

Precisa-se lembrar que para $T_{(s)} = \exp(X_{(s)})$ a confiabilidade

$$C(T_{(s)}) = \exp [-(T_{(s)}/\theta)^\beta]$$

tem uma distribuição beta com parâmetros $n-s+1$ e s .

Por outro lado se a confiabilidade C tem uma distribuição beta com parâmetros inteiros $n-s+1$ e s , então $-\ln C$ tem aproximadamente uma distribuição χ^2 ponderada com média

$$m_s = \sum_{i=1}^s \frac{1}{n-i+1} \approx \ln(n+0,5) - \ln(n-s+0,5) \quad \rightarrow (2.121)$$

e variância

$$v_s = \sum_{i=1}^s \frac{1}{(n-i+1)^2} \approx \frac{-1}{n+0,5} + \frac{1}{n-s+0,5} \quad \rightarrow (2.122)$$

onde $s=1,2,\dots,n$.

As expressões para a média e variância da estatística de ordem exponencial reduzida $\left(\frac{T_{(s)}}{\theta}\right)^\beta$ estão em concordância com aquelas obtidas por Epstein e Sobel [26].

Uma expressão que não depende de β e que tem uma

distribuição independente dos dois parâmetros é dada por:

$$Q_r = \left(\frac{T(s)}{\theta} \right)^{\frac{\beta \xi}{\xi^{**}}} = \exp \left[\frac{X(s) - \eta}{\xi^{**}} \right] \quad \Rightarrow (2.123)$$

Portanto, se a distribuição de Q_r (uma qui-quadrado não central aproximada elevada a uma potência dada pelo inverso de uma qui-quadrada aproximada sobre os g.l) pode ser encontrada, podemos obter um extremo de confiança para θ ou $\eta = \ln \theta$

Para r pequeno em relação a n , tem-se

$$\begin{cases} \xi^* \approx \xi^{**} \\ \eta^* \approx \eta^{**} = X(s) - \xi^{**} E(Z(s)) \end{cases} \quad \Rightarrow (2.124)$$

e desde que $\tilde{\xi} = \frac{\xi^*}{1+C}$ e $\tilde{\eta} = \eta^* - B\tilde{\xi}$, pode-se para $\frac{r}{n} \leq 0,5$ converter os percentis da distribuição de $\frac{\tilde{\eta} - \eta}{\tilde{\xi}}$ (como aqueles da Tab. 2.22) em percentis aproximados de Q_r se B , C e $E(Z(s))$ são conhecidos.

Devido a esses fatos a distribuição de Q_r pode ser aproximada para $\frac{r}{n} \leq 0,5$.

Desde que $V' \approx \frac{\tilde{\eta} - \eta}{\tilde{\xi}}$ é aproximadamente igual a

$$\frac{X(s) - \eta - E(Z(s)) \xi^* - \frac{B \xi^*}{1+C}}{\frac{\xi^*}{1+C}}$$

então

$$\ln Q_r \cong \frac{V' + E(Z_{(s)})(1+C)+B}{1+C} \quad \Rightarrow (2.125)$$

Na (2.125) $C\xi^2$ é a variância de ξ^* e $B\xi^2$ é a covariância de ξ^* e η^* .

Dos resultados de Patnaik [85] aplicados anteriormente as variáveis χ^2 ponderadas, se Q_r com média \underline{m} e variância \underline{v} é aproximadamente uma χ^2 ponderada, $\frac{2mQ_r}{v}$ é aproximadamente uma χ^2 com $\frac{2m^2}{v}$ g.l.

A medida que ambos \underline{r} e \underline{n} crescerem com $\frac{\underline{r}}{\underline{n}}$ fixo as distribuições de $Q_r, \left(\frac{T(s)}{\theta}\right)^\beta$ e $\left(\frac{T(s+1)}{\theta}\right)^\beta$ tornar-se-ão cada vez mais equivalentes pois:

1) as proporções de incrementos adicionados a m_s e v_s para formar m_{s+1} e v_{s+1} decrescerão em relação aos valores totais;

2) o valor de ξ^{**} crescerá estocasticamente próximo ao valor de $\xi=\beta^{-1}$, enquanto a covariância de ξ^{**} e $X_{(s)}$ tende a crescer menos.

★EXEMPLO 2.15 - Dados de Mann, Schafer e Singpurwalla [77].

Temos 15 tempos do início de instabilidade de combustão durante o teste de 25 compartimentos de impulsão de um certo tipo de foguete sendo que o teste terminou aproximadamente no instante da décima quinta falha.

0,438; 2,413; 3,073; 3,079; 3,173; 3,198
 3,918; 4,287; 4,508; 4,981; 5,115; 5,592
 5,848; 5,958; 6,013.

Da Tab. 2.17 podemos obter $k_{r,n} = k_{15,25} = 0,6890$,
 $E(Z_{(15)}) = -0,1557$.

Aplicando na (2.69) temos:

$$\xi^{**} = \frac{\sum_{i=1}^{15} (\ln T_{(15)} - \ln T_{(i)})}{0,6890 \cdot 25} \approx \boxed{0,445}$$

Aplicando a (2.76) temos:

$$\begin{aligned} \eta^{**} &= \ln T_{(15)} - E(Z_{(15)}) \xi^{**} = \\ &= \ln 6,013 - (-0,1557) 0,445 = \boxed{1,863} \end{aligned}$$

Portanto

$$\theta^{**} = \exp (\eta^{**}) = \boxed{6,443}$$

Para se obter um extremo de confiança inferior para θ ao nível de confiança 0,80 precisamos achar o quantil $q_r(\zeta)$ de Q_r .

O seu valor é aproximadamente igual a

$$q_r(\zeta) \approx m_k \left(1 - \frac{v_k}{9m_k^2} + \frac{z_\zeta \sqrt{v_k}}{3m_k} \right)^3 \quad \rightarrow (2.126)$$

sendo que na (2.126) m_k e v_k são substituídos por m_s e v_s obtidos da (2.121) e (2.122) respectivamente.

Isto aliás é comprovado pela análise de Monte Carlo quando $\frac{r}{n} \geq 0,4$ e $n \geq 15$.

Assim

$$\begin{cases} m_k = m_{15} \approx \ln 25,5 - \ln 10,5 = 0,8873 \\ v_k = v_{15} = -\frac{1}{25,5} + \frac{1}{10,5} = 0,0560 \end{cases}$$

Entrando na (2.126) temos:

$$q_{15}(\zeta=0,80) = 0,8873 \left(1 - \frac{0,0560}{9 \cdot 0,8873^2} + \frac{0,84 \sqrt{0,0560}}{3 \cdot 0,8873} \right)^3 \approx \boxed{1,0768}$$

pois $z_{0,80} = 0,84$.

Se utilizássemos as tabelas de função beta incompleta obteríamos o octagésimo percentil do logaritmo natural do inverso de uma variável beta com parâmetros $25-15+1=11$ e 15 igual a $\ln(0,3408)^{-1} = \boxed{1,0764}$.

Justifica-se assim o uso dessas aproximações.

Finalmente o extremo de confiança inferior para θ ao nível de confiança 0,80

$$\theta \geq \frac{T(s)}{[q_r(\zeta)]^{\xi^{**}}} \quad \Rightarrow (2.127)$$

Portanto

$$\theta \geq \frac{6,013}{(1,0768)^{0,445}} = \boxed{5,82}$$

III - PARA O PARÂMETRO $\eta = \ln \theta$ E PARA AS FUNÇÕES PARAMÉTRICAS

$C(t_m)$ e t_p .

Para obter os extremos de confiança para η ou para $C(t_m)$ de dados censurados e amostras de tamanhos entre 40 e 100 podem ser usados E.M.V, de funções de η e ξ juntamente, com os resultados obtidos por Billman, Antle e Bain [3].

Se a censura é em torno de 50%, $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ podem ser usados no lugar dos correspondentes E.M.V. $\hat{\xi}$ e $\hat{\eta}$.

Dessa forma Billman, Antle e Bain fornecem tabelas para os percentis de:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\eta} - \eta)}{\hat{\xi}} \quad \text{e} \quad \sqrt{n} \left[\frac{\xi}{\hat{\xi}} - E\left(\frac{\xi}{\hat{\xi}}\right) \right]$$

Além disso, no mesmo artigo aparecem os extremos de confiança para $C(t_m)$ como funções de

$$\hat{C}(t_m) = \exp \left\{ -\exp \left[\frac{\ln t_m - \hat{\eta}}{\hat{\xi}} \right] \right\} \quad \Rightarrow (2.128)$$

Para se obter os extremos de confiança em η (ou θ), de amostras fortemente censuradas ou extremos de confiança sobre a vida confiável, $t_p = \exp(x_p)$ de grandes amostras devem ser usados os resultados abaixo.

Já sabemos de uma análise anterior que $\frac{\xi^{**}}{\xi}$ tem uma distribuição aproximada χ^2 sobre os g.l. com $\frac{2}{\ell_{r,n}}$ g.l.

Pode-se demonstrar que sob certas condições que

$$Q = \frac{\eta^{**} - x_p - \xi^{**} \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}}}{\xi(-y_p - \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}})} \quad \Rightarrow (2.129)$$

com

$$y_p = \frac{x_p - \eta}{\xi} = \ln[-\ln(1-p)]$$

tem também uma distribuição qui-quadrado sobre os g.l. aproximada.

A distribuição qui-quadrado sobre os g.l. aproximada Q aplica-se geralmente para amostras de tamanho $n \geq 10$ quando a confiabilidade especificada $\gamma = 1-p$ é tal que $\gamma \geq 0,90$.

Se $\gamma = e^{-1}$ de forma que $x_p = \eta$, então Q é aproximada - mente qui-quadrado sobre os g.l. para $n \geq 20$.

Deve-se também observar que a covariância de

$$(\eta^{**} - x_p - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{\ell_{r,n}}) \text{ e } \xi^{**} \text{ é igual a } \xi^2 B_{r,n} - \xi^2 \left(\frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}} \right) \ell_{r,n} = 0.$$

Dessa forma Q e $\frac{\xi^{**}}{\xi}$ são independentes e a sua razão tem uma distribuição F aproximada.

Os g.l. para a variável aproximada F

$$F_x = \frac{\eta^{**} - x_p - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{\ell_{r,n}}}{\xi^{**}(-y_p - \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}})} \quad \Rightarrow (2.130)$$

são $\frac{2 \left(y_p + \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}} \right)^2}{A_{r,n} - \frac{B_{r,n}^2}{\ell_{r,n}}}$ e $\frac{2}{\ell_{r,n}}$ e onde $A_{r,n}$ é a variância de $\frac{\eta^{**}}{\xi}$.

As distribuições aproximadas F e qui-quadrado aplicam-se também a qualquer outro estimador linear não viciado eficiente de ξ e η .

Para se obter um extremo de confiança inferior para $C(t_m)$ quando t_m é especificado, pode-se substituir $x_m = \ln t_m$ por x_p na (2.130) e $\ln[\ln \frac{1}{C(t_m)}]$ por y_p .

★ EXEMPLO 2.16 - Alguns resultados comparativos quando se usa F_x dada pela (2.130)

Tomemos os M.E.L.N.V. de ξ e η conforme foi especificado pela (2.74a) e pela (2.74b).

$$\begin{cases} \xi^* = \frac{\tilde{\xi}}{1-E(L\xi)} = \tilde{\xi}(1+\ell_{r,n}) \\ \eta^* = \tilde{\eta} + \frac{E(CP)}{1-E(L\xi)} = \tilde{\eta} + \frac{B_{r,n}\xi^*}{1+\ell_{r,n}} \end{cases}$$

Os valores de $E(CP)$ e $E(L\xi)=E(LB)$ estão na Tab.2.14 (indicamos apenas uma parte da tabela).

As comparações são feitas com os valores exatos baseados nas extensões das Tab. 2.21 e Tab. 2.22 de Mann, Fertig e Sheuer [75] de 1971.

Se tivermos a extensão da Tab. 2.21 poderemos ler 3,59 como o percentil 90 de

$$V_{0,90} = \frac{\tilde{\eta} - x_{0,10}}{\tilde{\xi}}$$

para $n=20$ e $r=10$.

Dessa forma em vista da (2.104) o extremo de confiança inferior de 90% sobre o décimo percentil da população é dado por:

$$x_{0,10} \geq \tilde{\eta} - 3,59\tilde{\xi}$$

ou

$$\begin{aligned} x_{0,10} &\geq \eta^* - \frac{(B_{r,n} + 3,59)\xi^*}{1 + \ell_{r,n}} = \\ &= \eta^* - \frac{(0,0584 + 3,59)\xi^*}{1,0955} = \underline{\underline{\eta^* - 3,33\xi^*}} \end{aligned}$$

onde se usou o fato de que $B_{r,n} = \frac{E(CP)}{1-E(L\xi)}$ e $\ell_{r,n} = \frac{E(L\xi)}{1-E(L\xi)}$ e a extensão da Tab. 2.14.

Utilizando a aproximação F obtem-se para extremo de confiança inferior de x_p ao nível de confiança $1-\alpha$ a expressão

$$x_p \geq \eta^* + \xi^* \left[\frac{-B_{r,n}(1-F_{x,1-\alpha})}{\ell_{r,n}} + y_p \cdot F_{x,1-\alpha} \right] \quad \Rightarrow (2.131)$$

onde se usou o resultado (2.124).

Visto que,

$$\frac{B_{r,n}}{x_{r,n}} = \frac{B_{10,20}}{x_{10,20}} = \frac{0,0584}{0,0955} = \boxed{0,6115}$$

e $y_p = \ln[-\ln(0,90)] = -2,25$, resta ler o percentil 90 de uma distribuição F aproximada com v_1 e v_2 g.l. sendo:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2(-2,25 + 0,6115)^2}{0,1409 - \frac{0,0584^2}{0,0955}} \approx \boxed{51} \\ v_2 = \frac{2}{0,0955} \approx \boxed{20} \end{cases}$$

Deve-se notar que $A_{r,n} = E(L\eta) + \frac{[E(CP)]^2}{1-E(L\xi)} = \boxed{0,1409}$ dá a $V(\frac{\eta^*}{\xi})$ e pode ser obtida da extensão da Tab. 2.14.

Na Tab. 2.23 damos alguns valores de $A_{r,n}$ tirados de Mann [67] e [70].

De uma tabela de percentis da F temos o percentil - 90

$$F_{51,20,0,9} \approx 1,69$$

Portanto de (2.131) temos

$$x_{0,10} \geq \eta^* + \xi^* [0,6115(1-1,69) - 2,25 \cdot 1,69] = \boxed{\eta^* - 3,38\xi^*}$$

É óbvio que a aproximação nesse caso é bastante boa comparada com a expressão exata $\eta^* - 3,33\xi^*$ obtida por Mann e Fertig [73].

Façamos agora $\gamma = 1 - p = 0,99$ e repetamos a análise para $n=20$ e $r=10$.

Temos $y_{0,01} = \ln[-\ln(0,99)] \approx -4,6$ e a variável F_x tem os seguintes g.l. $v_1 \approx 300$ e $v_2 \approx 20$.

Portanto o percentil 90 é $F_{300,20,0,90} \approx 1,607$.

Da (2.131) vem:

$$x_{0,01} \geq \boxed{\eta^* - 7,02\xi^*}$$

Utilizando as tabelas de Mann, Fertig e Scheuer [75] e Mann [63] obtem-se a expressão exata

$$x_{0,01} \geq \boxed{\eta^* - 6,98\xi^*}$$

que como se vê é bem próxima da expressão aproximada.

Pode-se com raciocínio semelhante achar o extremo inferior de confiança $100(1-\alpha)\%$ para η e as comparações mostram que a aproximação (2.130) é boa.

★ **EXEMPLO 2.17** - Com os resultados do Exemplo 2.9 vamos achar baseando-nos nas tabelas de Billman, Antle e Bain [3] o I.C. de 90% para θ e δ .

r	$A_{r,n}$	r	$A_{r,n}$	r	$A_{r,n}$	r	$A_{r,n}$
$n=25$		$n=35$		$n=45$		$n=55$	
5	.897	7	.585	9	.434	11	.342
10	.180	14	.116	18	.096	22	.077
15	.079	21	.057	27	.043	33	.034
20	.053	28	.038	36	.030	44	.025
25	.052	35	.037	45	.028	55	.023
$n=30$		$n=40$		$n=50$		$n=60$	
3	3.350	4	2.145	5	1.611	6	1.275
6	.702	8	.489	10	.382	12	.305
9	.281	12	.202	15	.161	18	.129
12	.146	16	.107	20	.086	24	.070
15	.091	20	.067	25	.054	30	.044
18	.065	24	.048	30	.038	36	.033
21	.052	28	.041	35	.033	42	.025
24	.044	32	.034	40	.027	48	.022
27	.042	36	.031	45	.025	54	.021
30	.044	40	.033	50	.026	60	.021

Tab. 2.23 - Valores de $A_{r,n}$ para utilizar no cálculo do número de g.l. da variável aproximada F dada pela (2.130)

Fonte: Mann [67] e [70]

O ponto representa a vírgula decimal.

No Exemplo 2.9 vimos que para $n=40$ e $r=20$

$$\hat{\beta} = 2,091 \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = 83,8$$

Da estatística

$$U = \sqrt{n} \left[\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}} - E\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}}\right) \right] = \sqrt{n} \left[\frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}} - E\left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}}\right) \right] \quad \Rightarrow (2.132)$$

(cujos percentis estão na Tab. 2.24) podemos obter o I.C. bilateral ao nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$. A sua expressão é:

$$\frac{\hat{\beta}}{\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} + E\left[\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right]} \leq \beta \leq \frac{\hat{\beta}}{\frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} + E\left[\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right]} \quad \Rightarrow (2.133)$$

Da estatística

$$R = \sqrt{n} \left(\frac{\hat{\eta} - \eta}{\hat{\xi}} \right) = \sqrt{n} \hat{\beta} \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) \quad \Rightarrow (2.134)$$

(os percentis da distribuição de R estão na Tab. 2.25) podemos obter o I.C. bilateral ao nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ para θ . A sua expressão é:

$$\hat{\theta} \exp\left[-\frac{r_{1-\alpha/2}}{\hat{\beta}\sqrt{n}}\right] \leq \theta \leq \hat{\theta} \exp\left[-\frac{r_{\alpha/2}}{\hat{\beta}\sqrt{n}}\right] \quad \Rightarrow (2.135)$$

Dessa forma, de (2.133) vem:

$$\frac{2,091}{1,098 + \frac{2,95}{\sqrt{40}}} \leq \beta \leq \frac{2,091}{1,098 + \frac{(-2,09)}{\sqrt{40}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1,34 \leq \beta \leq 2,72}$$

De (2.135) temos:

$$83,8 \exp \left[-\frac{2,16}{2,091\sqrt{40}} \right] \leq \theta \leq 83,8 \exp \left[-\frac{(-3,77)}{2,091\sqrt{40}} \right]$$

$$71,17 \leq \theta \leq 111,44$$

Os valores dos percentis de U e R que foram usados estão indicados nas Tab. 2.24 e 2.25.

n	$\frac{r}{n}$ \n	1- α	0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99	V(T)	$E(\frac{\hat{\beta}}{\beta})$
40	1,00		-1,60	-1,20	- ,98	1,10	1,60	2,41	,74	1,036
	,75		-2,15	-1,56	-1,30	1,59	2,09	3,30	1,33	1,060
	,50		-2,62	-2,09	-1,74	2,09	2,95	4,90	2,52	1,098
60	1,00		-1,59	-1,21	- ,97	1,05	1,43	2,18	,67	1,024
	,75		-2,03	-1,50	-1,19	1,48	2,03	3,11	1,18	1,036
	,50		-2,62	-2,02	-1,62	1,96	2,70	4,28	2,10	1,060
80	1,00		-1,62	-1,20	- ,97	1,04	1,40	2,10	,66	1,019
	,75		-2,02	-1,51	-1,21	1,49	1,99	3,06	1,18	1,027
	,50		-2,60	-1,98	-1,61	1,99	2,74	4,22	2,13	1,047
100	1,00		-1,63	-1,20	- ,95	1,04	1,36	2,06	,67	1,016
	,75		-1,99	-1,46	-1,16	1,46	1,92	2,90	1,10	1,022
	,50		-2,54	-1,93	-1,54	1,96	2,59	4,00	1,97	1,035
120	1,00		-1,64	-1,26	- ,97	,99	1,33	2,06	,66	1,012
	,75		-2,05	-1,48	-1,15	1,45	1,97	2,86	1,10	1,018
	,50		-2,61	-1,93	-1,55	1,89	2,51	3,81	1,90	1,030
∞	1,00		-1,81	-1,20	- ,99	,93	1,23	1,61	,61	1,0
	,75		-2,35	-1,66	-1,25	1,20	1,66	2,35	1,02	1,0
	,50		-3,05	-2,15	-1,68	1,68	2,15	3,65	1,72	1,0

Fonte: Billman, Antle e Bain [3]

Tab. 2.24 - Percentis da distribuição estatística

$$U = \sqrt{n} \left[\frac{\hat{\beta}}{\beta} - E \left[\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right] \right] \text{ e } V(T) = V \left(\sqrt{n} \frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)$$

n	1-α n/n	1-α					
		0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
40	1,00	-2,58	-1,64	-1,41	1,39	1,60	2,63
	,75	-3,29	-2,25	-1,69	1,39	1,85	2,61
	,50	-6,21	-3,77	-2,51	1,63	2,16	2,96
60	1,00	-2,48	-1,73	-1,38	1,37	1,77	2,56
	,75	-3,22	-2,16	-1,60	1,42	1,84	2,66
	,50	-5,37	-3,56	-2,69	1,67	2,18	3,01
80	1,00	-2,51	-1,76	-1,37	1,37	1,76	2,49
	,75	-3,11	-2,10	-1,61	1,43	1,85	2,65
	,50	-5,14	-3,45	-2,62	1,71	2,16	3,03
100	1,00	-2,45	-1,74	-1,37	1,35	1,73	2,50
	,75	-3,22	-2,09	-1,60	1,44	1,85	2,61
	,50	-4,92	-3,34	-2,40	1,78	2,26	3,19
120	1,00	-2,44	-1,73	-1,36	1,35	1,74	2,48
	,75	-3,01	-2,01	-1,58	1,45	1,86	2,63
	,50	-4,50	-3,17	-2,44	1,75	2,27	3,13
∞	1,00	-2,43	-1,73	-1,35	1,35	1,73	2,45
	,75	-2,69	-1,90	-1,46	1,43	1,90	2,69
	,50	-3,89	-2,61	-2,00	2,03	2,61	3,69

Fonte: Billman, Antle e Bain [3]

Tab.2.25 - Percentis da distribuição da estatística

$$R = \sqrt{n\beta} \ln \left[\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right]$$

2.7 - INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS PARÂMETROS DA WEIBULL TRIPARAMÉTRICA.

Para a Weibull triparamétrica o conhecimento relativo ao parâmetro de soleira ou vida mínima δ é frequentemente de interesse fundamental.

Um extremo de confiança inferior para δ pode ser obtido usando-se procedimentos iterativos relativamente simples combinados com as tabelas existentes.

No Capítulo 3 será descrito um teste de aderência ou adaptação da Weibull biparamétrica contra a alternativa Weibull triparamétrica.

A estatística teste é:

$$S = \frac{\sum_{i=k+1}^{r-1} H_i}{\sum_{i=1}^{r-1} H_i} \quad \Rightarrow (2.136)$$

Na (2.136) os valores apropriados de \underline{k} são encontrados no artigo de Mann e Fertig [72] com $k \approx \frac{r}{3}$ para $r \geq 15$ e onde também

$$\xi H_i = \frac{X_{(i+1)} - X_{(i)}}{E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})} \quad \Rightarrow (2.137)$$

sendo que na (2.137)

$$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)}^{-\eta}}{\xi}$$

A distribuição de S (exceto para a cauda de extrema direita acima de 0,95) é bem próxima da beta com parâmetros $\underline{r-k-1}$ e \underline{k} .

A semelhança da distribuição de S com a distribuição beta cresce a medida que cresce o \underline{n}

Assim para os dados observados da Weibull biparamétrica

$$\frac{\frac{kS}{r-k-1}}{1-S} = \frac{k}{r-k-1} \cdot \frac{\sum_{i=k+1}^{r-1} H_i}{\sum_{i=1}^k H_i} \quad \Rightarrow (2.138)$$

distribui-se aproximadamente segundo a F de Snedecor com $v_1 = 2(r-k-1)$ e $v_2 = 2k$ g.l.

Portanto tabelas da F podem ser usadas para se achar os percentis da distribuição transformada.

Como já foi dito $E(Z_{(i)})$ são obtidos das tabelas de White [99] e convenientes diferenças dos valores esperados das estatísticas de ordem são fornecidas por Mann, Scheuer e Fertig [71].

Se T tem uma distribuição de Weibull triparamétrica, $X_{i:n} = (n - T_{(i)} - \delta)$ para $i=1,2,\dots,r$ é uma estatística de ordem de valor extremo e

$$S^*(\delta) = \frac{\sum_{i=k+1}^{r-1} H_i^*}{\sum_{i=1}^{r-1} H_i^*} \quad \Rightarrow (2.139)$$

com

$$H_i^* = \frac{\ln(T_{(i+1)} - \delta) - \ln(T_{(i)} - \delta)}{E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})}$$

tem a distribuição de S definida acima.

Mann e Fertig [72] mostraram que S^* é monotonicamente decrescente em δ , com

$$0 \leq \delta \leq T_{(1)} \quad \rightarrow (2.140)$$

Assim um extremo de confiança inferior $\delta^{(\text{inf})}$ de δ ao nível $(1-\alpha)$ pode ser determinado achando $\delta^{(\text{inf})}$ tal que $S^*(\delta^{(\text{inf})})$ seja igual ao percentil $100(1-\alpha)$ da distribuição beta com parâmetros $(r-k-1)$ e k .

O extremo de confiança inferior pode ser encontrado também utilizando as técnicas de divisão ao meio caso se tenha acesso ao terminal de um computador.

As técnicas de bisecção envolvem o uso de $\frac{t_{(1)}}{2}$ como uma primeira escolha para $\delta^{(\text{inf})}$.

Para a primeira iteração $\frac{t_{(1)}}{4}$ ou $\frac{3t_{(1)}}{4}$ é usado de acordo com o fato de $S^*(T_{(1)}/2)$ ser muito pequeno ou muito grande e assim por diante.

Um extremo superior para δ com probabilidade 1 é dado naturalmente pelo valor observado $T_{(1)}$.

2.8 - INTERVALOS DE PREDIÇÃO E PERÍODOS DE GARANTIA PARA A WEIBULL BIPARAMÉTRICA.

Em vista do resultado assintótico de Pyke [89], aplicado em particular para as diferenças de observações adjacentes ordenadas de uma distribuição de valor extremo pode-se obter intervalos de predição aproximados para a Wei-

bull biparamétrica.

Dessa forma, observou-se que das primeiras r falhas $r < n$, de uma amostra de tamanho n de uma distribuição de Weibull, é possível fazer uma predição a respeito do tempo da m -ésima falha, $r < m \leq n$ correspondendo a alguma probabilidade especificada.

Também, da mesma forma que se estabeleceu que F_x dada pela (2.130) tem aproximadamente a clássica distribuição F de Fisher-Snedecor, é possível demonstrar que uma forma similar simples de aproximação pela F pode ser usada para obter os períodos de garantia da Weibull.

Entenderemos por um período de garantia aquele tempo, associado com uma dada probabilidade (nível de segurança) antes do qual não ocorra nenhuma falha em um lote de tamanho especificado a ser fabricado no futuro.

Valores para obter períodos de garantia para a distribuição de Weibull foram tabulados por Mann e Saunders [56] em 1969 e Mann [69] em 1970.

Exceto para a situação na qual somente as duas primeiras falhas tenham sido observadas na amostra apriori os valores dessas tabelas não se baseiam nos estimadores pontuais ótimos dos parâmetros da distribuição de Weibull e são bem difíceis de serem determinados.

Lawless [54] em 1974 propôs um método que envolve um condicionamento nas estatísticas provenientes da amostra e o cálculo do período de garantia associado com nível de confiança (condicional), necessitando do auxílio de computador para executar as integrações numéricas.

2.8.1 - INTERVALOS DE PREDIÇÃO (I.P.)

Já mostramos que o estimador linear não viciado ξ^* ou qualquer estimador linear não viciado do parâmetro de escala ξ , baseado nas r primeiras observações ordenadas pode ser considerado como sendo aproximadamente uma soma de qui-quadrados ponderada e assim $\frac{\xi^*}{\xi}$ é aproximadamente qui-quadrado sobre seus g.l.

O estimador ξ^* ou qualquer outro estimador linear, não viciado de ξ baseando-se sobre $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}$, estatísticas de ordem de valor extremo, envolve $X_{(i)} - X_{(i+1)}$ para $i=2, 3, \dots, r$.

A diferença

$$X_{(m)} - X_{(r)} = \sum_{i=r+1}^m (X_{(i)} - X_{(i-1)}) \quad \Rightarrow (2.141)$$

claramente envolve diferentes saltos ou "gaps" - (diferenças nas observações ordenadas).

Assim, em vista do resultado de Pyke [89] $X_{(m)} - X_{(r)}$ é aproximadamente independente de ξ^* ou de qualquer outro estimador linear não viciado de ξ para uma amostra de tamanho n suficientemente grande.

Forma-se assim a estatística

$$F_m = \frac{X_{(m)} - X_{(r)}}{\xi^* \left[E(Z_{(m)}) - E(Z_{(r)}) \right]} \quad \Rightarrow (2.142)$$

onde ξ^* pode ser substituído por ξ^{**} para amostras relativa

mente grandes. A distribuição de F_m é aproximadamente uma distribuição F de Fisher com os g. $\frac{m}{\ell}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{2[E(Z_{(m)}) - E(Z_{(r)})]^2}{V(Z_{(m)}) - 2\text{Cov}(Z_{(m)}, Z_{(r)}) + V(Z_{(r)})} \\ v_2 = \frac{2}{\ell_{r,n}} \end{array} \right.$$

onde $\ell_{r,n} \xi^2 = \frac{\xi^2 E(L\xi)}{1 - E(L\xi)}$ é a $V(\xi^*)$.

Pode-se calcular os I.P. se tivermos uma amostra de tamanho $10 \leq n \leq 25$ usando a Tab. 2.14 e Tab. 3.1 ou extensões das que apareceram em Mann [63] e Mann, Scheuer e Fertig [74].

Para obter as variâncias e covariâncias de $Z_{(m)}$ e $Z_{(r)}$ é necessário usar as tabelas de Mann [65].

Para amostras de tamanho muito grande ($n \geq 100$), ξ^{**} , no lugar de ξ^* , pode ser calculado usando a tabela de Bain [2].

A covariância de $Z_{(m)}$ e $Z_{(r)}$ pode ser aproximada usando a expressão para a sua covariância assintótica.

Dessa forma pode-se usar:

$$\text{Cov}(Z_{(r)}, Z_{(m)}) \approx \frac{\frac{\frac{r}{n^2}}{1 - \frac{r}{n}}}{\ln(1 - \frac{r}{n}) \ln(1 - \frac{m}{n})} \rightarrow (2.143)$$

para uma amostra de valor extremo de tamanho $n \geq 100$.

As variâncias de grandes amostras de $Z_{(m)}$ e $Z_{(r)}$ podem também ser aproximadas de forma semelhante.

★EXEMPLO 2.18 - Consideremos uma amostra de tamanho 12 de certo tipo de estruturas compostas que foram degradadas pelas condições ambientais e estiveram sujeitas ao mesmo tipo de esforço.

Observou-se que 6 falhas ocorreram dentro de 120h, após o início da aplicação do esforço a cada estrutura.

Com probabilidade 0,90 qual é o I.P. superior para o tempo da décima segunda e última falha se a aplicação do esforço continuar e se os tempos de falha seguem a distribuição de Weibull biparamétrica?

O valor de ξ^* foi obtido de uma tabela como a Tab. 2.14 e dos dados de falha sendo igual a 0,35.

$$\text{Como } V\left(\frac{\xi^*}{\xi}\right) = \ell_{r,n}$$

temos de uma tabela semelhante a Tab. 2.14 que

$$\ell_{r,n} = \frac{0,14695}{0,85305} \approx 0,17226$$

Da Tab. 3.3 vê-se que

$$E(Z_{(12)} - Z_{(6)}) = \sum_{i=6}^{11} E(Z_{(i+1)} - Z_{(i)}) = 1,5704$$

Dessa forma de (2.142)

$$F_m = \frac{\ln(t_{(m)}) - \ln 120}{0,35.1,5704} = \frac{\ln(t_{(m)}) - \ln 120}{0,54964}$$

tem aproximadamente uma distribuição F com os seguintes g.l.

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2.1,5704}{V(Z_{(12)} - Z_{(6)})} = \frac{2.1,5704}{0,25297} \approx 12,4 \\ v_2 = \frac{2}{0,17226} \approx 11,6 \end{cases}$$

Para obter

$$V(Z_{(12)} - Z_{(6)}) = V(Z_{(12)}) - 2\text{Cov}(Z_{(6)}, Z_{(12)}) + V(Z_{(6)})$$

precisa-se das tabelas de Mann [65]. Daí $V(Z_{(12)} - Z_{(6)}) = 0.18626 - 2(0,04106) + 0,15249 = 0,25297$.

O percentil 90 da F_m com parâmetros não inteiros, pode ser aproximado. porém isso é bastante elaborado.

Alternativamente podemos usar simplesmente algumas interpolações diretamente nas tabelas da distribuição F.

Obtemos assim

$$F_{12,4;11,6;0,9} = 2,168$$

Como

$$P \left(\frac{X_{(m)} - X_{(r)}}{\xi^* [E(Z_{(m)}) - E(Z_{(r)})]} < f_{v_1, v_2, \gamma} \right) = \gamma$$

o limite de predição superior com probabilidade γ para $X_{(m)}$ é

$$L_{X_{(m)}}^{(\text{sup})} = X_{(r)} + f_{v_1, v_2, \gamma} \xi^* [E(Z_{(m)}) - E(Z_{(r)})] \quad \Rightarrow (2.144)$$

De (2.144) temos o I.P. unilateral superior com probabilidade 0,9 para $X_{(12)}$.

$$L_{X_{(12)}}^{(\text{sup})} = \ln 120 + 2,168 \cdot 0,54964 \approx \boxed{5,97910}$$

Portanto a ocorrência da décima segunda falha com probabilidade 0,9 será no instante 395,08 h.

2.8.2 - PERÍODOS DE GARANTIA

Um período de garantia é na realidade um I.P. para $T_{(1)} = \exp(X_{(1)})$ para um lote futuro de tamanho N .

Observando que a F_X dada pela (2.130) tem uma distribuição F aproximada e que do seu numerador tira-se

$$cQ = (\eta^{**} - x_p - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{l_{r,n}}) \xi^{**} \quad \Rightarrow (2.145)$$

que é aproximadamente uma qui-quadrado ponderada.

Como $\eta^{**} = X_{(r)} - \xi^{**} E(Z_{(r)})$, cQ envolve uma soma pon-

derada de $X_{(1)} - x_p$ e $X_{(i)} - X_{(i-1)}$ para $i=2,3,\dots,r$.

Dessa forma $\frac{X_{(1)} - x_p}{\xi}$ tem aproximadamente uma distribuição qui-quadrado ponderada quando F_X é aproximadamente uma variável F.

Portanto a soma algébrica das qui-quadrado ponderadas

$$\frac{\eta^{**} - x_p - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{\ell_{r,n}}}{\xi} - \frac{X_{(1)} - x_p}{\xi} = \frac{\eta^{**} - X_{(1)} - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{\ell_{r,n}}}{\xi} \quad \rightarrow (2.146)$$

terá uma distribuição qui-quadrado ponderada para uma amostra prévia e um tamanho de lote suficientemente grande.

No Exemplo 2.19 mostra-se que mesmo para amostras prévias de tamanho 2, pode-se aplicar a aproximação qui-quadrado para certos casos e que uma aproximação F que se pode aplicar é

$$F_y = \frac{\eta^{**} - X_{(1)} - \frac{\xi^{**} B_{r,n}}{\ell_{r,n}}}{\xi^{**} (\gamma + \ell n N - \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}})} \quad \rightarrow (2.147)$$

onde γ é a constante de Euler (aproximadamente igual a 0.5772156).

Os g.l. para F_y são

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2(\gamma + \ell n N - \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}})^2}{A_{r,n} - \frac{B_{r,n}^2}{\ell_{r,n}} + \frac{\pi^2}{6}} \\ v_2 = \frac{2}{\ell_{r,n}} \end{cases}$$

No g.l. v_1 , $\frac{\pi^2}{6} \cong 1,6449$ é a $V(\frac{X_{(1)}}{\xi})$, N é o tamanho do lote de interesse, $A_{r,n}$ é a $V(\frac{\eta^{**}}{\xi})$, $\ell_{r,n}$ é a $V(\frac{\xi^{**}}{\xi})$ e finalmente $B_{r,n} = \text{Cov}(\frac{\eta^{**}}{\xi}, \frac{\xi^{**}}{\xi})$.

No Exemplo 2.19 a aproximação (2.147) é aplicada aos M.E.L.N.V. η^* e ξ^* de η e ξ respectivamente.

★ EXEMPLO 2.19 - No seu trabalho, Mann e Saunders [76] acham a partir de uma amostra de tamanho $n=2$ um período de garantia para a primeira falha em um lote futuro de tamanho $N=20$ como sendo

$$\exp[x_1 - 5,81(x_2 - x_1)]$$

Essa expressão é ótima para $n=r=2$, desde que é a única expressão que se baseia somente em duas observações x_1 e x_2 e corresponde ao nível de segurança especificado de 0,75.

Da (2.147) podemos obter um extremo de confiança inferior de 75% para a v.a. $X_{(1)}$, correspondendo a um lote de tamanho 20.

$$L_{X(1)}^{(\text{inf})} = \eta^* - \frac{\xi^* B_{r,n}}{\ell_{r,n}} - F_{y;0,75} \xi^* (\gamma + \ln 20 - \frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}}) \quad (2.148)$$

Como $r=2$ os M.E.L.N.V. são:

$$\begin{cases} \eta^* = x_1 + 0,91637(x_2 - x_1) \\ \xi^* = 0,72135(x_2 - x_1) \end{cases}$$

O valor de

$$\frac{B_{r,n}}{\ell_{r,n}} = \frac{E(CP)}{E(L\xi)} = 0,09036$$

Dessa forma os g.l. de F_y são

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2.(3,572 - 0,09036)^2}{0,6595 + 0,0058 + 1,6449} \approx 10,6 \\ v_2 = \frac{2}{0,71186} \approx 2,81 \end{cases}$$

onde

$$A_{r,n} = 0,6595 = E(L\eta) + E(CP)B_{r,n}$$

$$B_{r,n} = \frac{E(CP)}{1 - E(L\xi)}$$

O valor conveniente do percentil 75 da F_y é 2.52.

Dessa forma de (2.148) temos:

$$L_{X(1)}^{(\text{inf})} = x_1 + (0,91637 - 0,72135 \cdot 0,09036 - 2,52 \cdot 0,72135 \cdot 3,4818)(x_2 - x_1)$$

$$L_{X(1)}^{(\text{inf})} = x_1 - 5,48(x_2 - x_1)$$

CONCLUSÃO: Realmente essa é uma concordância surpreendente, com o valor exato, desde que o resultado assintótico de Pyke [89] foi aplicado a uma amostra de tamanho 2.

Entretanto a aproximação qui-quadrado para amostras tão pequenas como essa não fornece uma boa concordância para níveis de segurança mais altos.

Pode-se entretanto esperar uma boa concordância para níveis de segurança de 0,95 ou maiores se os tamanhos das amostras forem 4 ou maiores.

CAPÍTULO 3

TESTES DE HIPÓTESES

3.1 - TESTES PARA OS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

Discutiremos neste capítulo os testes de hipóteses para os parâmetros da distribuição de Weibull cuja f.d. é dada pela (1.5).

Como vimos no capítulo 2 muitos estimadores para os parâmetros (3.6) são disponíveis na literatura.

Contudo os melhores estimadores sobre os quais se baseiam os testes de hipóteses são os que têm o menor E.Q.M, mais precisamente os E.M.V. e os M.E.L.I.

Deve-se também observar que para n grande ($n \geq 100$) ambos os estimadores (E.M.V. e M.E.L.I.) são normalmente distribuídos e testes de hipóteses baseando-se na sobejamente conhecida teoria da normal podem ser usados.

Assim por exemplo prova-se que a v.a. $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ é assintoticamente normal com média 1 e variância $\frac{0.608}{n}$ e para tanto basta ver os resultados de Thoman, Bain e Antle [93].

3.1.1 - RELAÇÃO ENTRE AS ESTIMATIVAS POR INTERVALO E OS TESTES DE HIPÓTESES.

Falando de uma forma geral, se temos uma estimativa por intervalo de um parâmetro desconhecido, um teste de hipóteses pode ser executado com um pouco mais ou sem nenhum trabalho adicional.

Dessa forma estimativas por intervalo e testes de hipóteses são relacionadas no sentido clássico.

Assim se desejamos testar $H_0: \rho = \rho_0$ com nível de significância α , onde ρ é um parâmetro desconhecido e um I.C. de $100(1-\alpha)\%$ para ρ é disponível, a condição necessária e suficiente para aceitar H_0 é que o I.C. contenha ρ_0 .

Esse resultado é verdadeiro sob as condições mais gerais.

Intuitivamente está claro que valores de ρ no intervalo são razoáveis ou não estariam dentro do mesmo.

Dessa forma, se ρ_0 pertence ao intervalo, H_0 deveria ser aceita.

De outro lado, se H_0 é aceita, ρ_0 deveria pertencer a qualquer I.C. com coeficiente de confiança igual a 1 menos o nível de significância do teste.

Suponhamos que se está lidando com v.a. contínuas, porém para o caso de v.a. discretas deve-se proceder de forma semelhante.

Suponhamos ainda que a a.a. (t_1, t_2, \dots, t_n) é disponível e deseja-se executar o teste

$$\begin{cases} H_0: \rho = \rho_0 \\ H_1: \rho = \rho_1 \quad \text{com } \rho_1 < \rho_0 \end{cases}$$

com tamanho α .

Para testar H_0 devemos escolher, como sempre, um valor ρ_c^* tal que:

$$P(\rho^* < \rho_c^* \mid H_0) = \int_{-\infty}^{\rho_c^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* = \alpha \quad \Rightarrow (3.1)$$

e H_0 é aceito se e somente se $\rho^* \geq \rho_c^*$

Aqui \underline{g} é a distribuição amostral da estatística teste (estimador); $\rho^*(T_1, T_2, \dots, T_n)$.

Suponhamos que se tem um I.C. (baseado em ρ^*) para ρ com coeficiente de confiança $1-\alpha$ ou seja

$$P(\rho \leq \bar{\rho}) = 1-\alpha \quad \Rightarrow (3.2)$$

(visto que agora somente tem sentido obter o extremo superior para ρ).

Agora $\bar{\rho}$ é obtido como o maior membro do conjunto dos ρ tais que:

$$\int_{-\infty}^{\rho_{obs}^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* \geq \alpha \quad \Rightarrow (3.3)$$

onde ρ_{obs}^* é o ρ^* obtido para essa particular (t_1, t_2, \dots, t_n)

Evitando detalhes que sòmente irão obscurecer o argumento, adota-se que a integral da (3.3) é uma função contínua estritamente decrescente de ρ .

Então o conjunto dos ρ satisfazendo a (3.3) pode ser representado como

$$S_{\bar{\rho}} \equiv \{\rho \mid \rho \leq \bar{\rho}\} \quad \Rightarrow (3.4)$$

Suponhamos que H_0 é aceita, então obviamente,

$$\rho_{obs}^* \geq \rho_c^* .$$

Além disso, se $\rho_{obs}^* \geq \rho_c^*$,

$$\int_{-\infty}^{\rho_{obs}^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* \geq \int_{-\infty}^{\rho_c^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* = \alpha \quad \Rightarrow (3.5 a)$$

de forma que obviamente $\rho_0 \in S_{\bar{\rho}}$.

Por outro lado, suponhamos que $\rho_0 \notin S_{\bar{\rho}}$.

Então

$$\int_{-\infty}^{\rho_{obs}^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* \geq \alpha = \int_{-\infty}^{\rho_c^*} g(\rho^*; \rho_0) d\rho^* \quad \Rightarrow (3.5 b)$$

e torna-se claro que $\rho_{obs}^* \geq \rho_c^*$ e H_0 é aceita.

Dessa forma um teste de $\rho = \rho_0$ pode ser feito observando se ρ_0 está contido no I.C. e os métodos do capítulo 2 podem ser utilizados.

A grande falha nesse enfoque é que dessa forma a determinação do tamanho da amostra para satisfazer expecifica^ções sobre os erros do tipo I e II não pode ser "executada".

I - Teste do parâmetro de forma β .

$$\begin{cases} H_0: \beta = \beta_0 \\ H_1: \beta = \beta_1, \quad \beta_1 > \beta_0 \end{cases} \quad \Rightarrow (3.6)$$

Inicialmente, suponhamos que se tem uma a.a. completa de tamanho n de uma distribuição de Weibull.

O método que se usa para executar o teste (3.6) ba seia-se no E.M.V. $\hat{\beta}$ de β .

Thoman, Bain e Antle [93] mostraram para $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}$ que

$$\frac{\hat{\beta}}{\beta} \equiv \frac{\xi}{\hat{\xi}} \quad \Rightarrow (3.7)$$

e

$$\hat{\beta} \ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) \equiv \frac{\hat{\eta} - \eta}{\hat{\xi}} \quad \Rightarrow (3.8)$$

tem distribuições que são livres dos parâmetros.

Mann e Fertig [71] mostraram que o mesmo é verdade para

$$\frac{\tilde{\xi}}{\xi}, \frac{\xi^*}{\xi}, \frac{\tilde{\eta} - \eta}{\tilde{\xi}} \text{ e } \frac{\eta^* - \eta}{\xi^*}$$

onde $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ são os M.E.L.I e ξ^* e η^* são os M.E.L.N.V.

Na realidade, qualquer estimador linear $\bar{\xi}$ de ξ (linear nos logaritmos das variáveis de Weibull ordenadas) cujos coeficientes somam zero será tal que $\frac{\bar{\eta}-t_m}{\bar{\xi}}$ terá uma distribuição livre dos parâmetros.

Ainda mais, se $\frac{\bar{\eta}-t_p}{\bar{\xi}}$ tem distribuição livre dos parâmetros, então o estimador $\bar{\eta}$ de η cujos coeficientes somam 1 será tal que

$$\frac{\bar{\eta}-t_m}{\bar{\xi}} \text{ e } \frac{\bar{\eta}-t_p}{\bar{\xi}}$$

tem distribuições livres dos parâmetros.

Nesse caso t_m é um tempo de desempenho especificado e t_p é o 100p-ésimo percentil da distribuição de Weibull.

Para executar o teste (3.6) como é comum, devemos achar um $\hat{\beta}_c$ tal que

$$P(\hat{\beta} > \hat{\beta}_c | H_0) = P\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta_0} > \frac{\hat{\beta}_c}{\beta_0}\right) = \alpha \quad \rightarrow (3.9)$$

e H_0 é rejeitada se $\hat{\beta} > \hat{\beta}_c$.

Como destacamos no início deste parágrafo, é suficiente somente obter um extremo inferior de 100(1- α)% de confiança para β .

Se β_0 está contido no mesmo, H_0 é aceita.

★EXEMPLO 3.1 - Se tivermos $n=20$ e $\gamma=1-\alpha=0,95$, então da Tab. 3.1 tirada de Thoman, Bain e Antle [93], temos que:

$$P\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \leq 1,449\right) = 0,95 = P\left(\beta \geq \frac{\hat{\beta}}{1,449}\right)$$

Assim o extremo inferior de 95% de confiança é $\frac{\hat{\beta}}{1,449}$ e se $\beta_0 \geq \frac{\hat{\beta}}{1,449}$ então H_0 é aceita.

Naturalmente isso é a mesma coisa que

$$\frac{\hat{\beta}}{\beta_0} \leq 1,449$$

donde obviamente

$$\hat{\beta}_c = 1,449 \beta_0$$

Em geral o extremo inferior de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para β é $\frac{\hat{\beta}}{k_{1-\alpha}}$ e $\hat{\beta}_c = k_{1-\alpha} \beta_0$ onde k_u é o u -ésimo quantil da distribuição de $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ dado na Tab. 3.1. Métodos semelhantes podem ser usados para testar hipóteses sobre θ .

Como se vê o poder do teste (3.6) depende somente, da razão $\frac{\beta_1}{\beta_0}$ e Thoman, Bain e Antle [93] dão as curvas características de operação (C.C.O.) para diversos valores de n como mostrado na Fig. 3.1a.

Dessa forma é possível obter o tamanho da amostra, necessária para satisfazer β_0 , α , β_1 e a probabilidade de um erro do Tipo II.

$1-\alpha$ n	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.98
5	0.604	0.683	0.766	0.951	1.116	1.671	1.812	2.001	2.277	2.779	3.518
6	0.623	0.697	0.778	0.937	1.080	1.543	1.662	1.812	2.030	2.436	3.067
7	0.639	0.709	0.785	0.930	1.059	1.461	1.561	1.688	1.861	2.183	2.640
8	0.653	0.720	0.792	0.926	1.045	1.404	1.491	1.602	1.747	2.015	2.377
9	0.665	0.729	0.797	0.925	1.035	1.361	1.439	1.538	1.665	1.896	2.199
10	0.676	0.738	0.802	0.924	1.028	1.328	1.399	1.489	1.602	1.807	2.070
11	0.686	0.745	0.807	0.924	1.022	1.302	1.367	1.450	1.553	1.738	1.972
12	0.695	0.752	0.811	0.924	1.017	1.281	1.341	1.418	1.513	1.682	1.894
13	0.703	0.759	0.815	0.924	1.014	1.263	1.319	1.391	1.480	1.636	1.830
14	0.710	0.764	0.819	0.925	1.011	1.248	1.300	1.369	1.452	1.597	1.777
15	0.716	0.770	0.823	0.925	1.008	1.234	1.284	1.349	1.427	1.564	1.732
16	0.723	0.775	0.826	0.926	1.006	1.223	1.270	1.332	1.406	1.535	1.693
17	0.728	0.779	0.829	0.927	1.004	1.213	1.258	1.317	1.388	1.510	1.660
18	0.734	0.784	0.832	0.927	1.003	1.204	1.247	1.303	1.371	1.487	1.630
19	0.739	0.788	0.835	0.928	1.001	1.196	1.237	1.291	1.356	1.467	1.603
20	0.743	0.791	0.838	0.929	1.000	1.188	1.228	1.281	1.343	1.449	1.579
22	0.752	0.798	0.843	0.930	0.998	1.176	1.213	1.262	1.320	1.418	1.538
24	0.759	0.805	0.848	0.932	0.997	1.165	1.200	1.246	1.301	1.392	1.504
26	0.766	0.810	0.852	0.933	0.995	1.156	1.189	1.232	1.284	1.370	1.475
28	0.772	0.815	0.856	0.934	0.994	1.148	1.180	1.220	1.269	1.351	1.450
30	0.779	0.820	0.860	0.935	0.993	1.141	1.171	1.210	1.257	1.334	1.429
32	0.783	0.824	0.863	0.937	0.993	1.135	1.164	1.201	1.246	1.319	1.409
34	0.788	0.828	0.866	0.938	0.992	1.129	1.157	1.193	1.236	1.306	1.392
36	0.793	0.832	0.869	0.939	0.992	1.125	1.151	1.186	1.227	1.294	1.377
38	0.797	0.835	0.872	0.940	0.991	1.120	1.146	1.179	1.219	1.283	1.363
40	0.801	0.839	0.875	0.940	0.991	1.116	1.141	1.173	1.211	1.273	1.351
42	0.804	0.842	0.877	0.941	0.990	1.112	1.137	1.167	1.204	1.265	1.339
44	0.808	0.845	0.880	0.942	0.990	1.109	1.132	1.162	1.198	1.256	1.329
46	0.811	0.847	0.882	0.943	0.990	1.106	1.129	1.158	1.192	1.249	1.319
48	0.814	0.850	0.884	0.944	0.990	1.103	1.125	1.153	1.187	1.242	1.310
50	0.817	0.852	0.886	0.944	0.989	1.100	1.122	1.149	1.182	1.235	1.301
52	0.820	0.854	0.888	0.945	0.989	1.095	1.116	1.145	1.177	1.229	1.294
54	0.822	0.857	0.890	0.946	0.989	1.095	1.116	1.142	1.173	1.224	1.286
56	0.825	0.859	0.891	0.946	0.989	1.093	1.113	1.139	1.169	1.218	1.280
58	0.827	0.861	0.892	0.947	0.989	1.091	1.111	1.135	1.165	1.213	1.273
60	0.830	0.863	0.894	0.948	0.989	1.089	1.108	1.133	1.162	1.208	1.267
62	0.832	0.864	0.896	0.948	0.989	1.087	1.106	1.130	1.158	1.204	1.262
64	0.834	0.866	0.897	0.949	0.989	1.086	1.104	1.127	1.155	1.200	1.256
66	0.836	0.868	0.899	0.949	0.988	1.084	1.102	1.125	1.152	1.196	1.251
68	0.838	0.869	0.900	0.950	0.988	1.083	1.100	1.122	1.149	1.192	1.246
70	0.840	0.871	0.901	0.950	0.988	1.081	1.098	1.120	1.146	1.188	1.242
72	0.841	0.872	0.903	0.951	0.988	1.080	1.097	1.118	1.144	1.185	1.237
74	0.843	0.874	0.904	0.951	0.988	1.078	1.095	1.116	1.141	1.182	1.233
76	0.845	0.875	0.905	0.952	0.988	1.077	1.093	1.114	1.139	1.179	1.229
78	0.846	0.876	0.906	0.952	0.988	1.076	1.092	1.112	1.136	1.176	1.225
80	0.848	0.878	0.907	0.952	0.988	1.075	1.091	1.110	1.134	1.173	1.222
85	0.852	0.881	0.910	0.953	0.988	1.072	1.087	1.106	1.129	1.166	1.213
90	0.855	0.883	0.912	0.954	0.988	1.069	1.084	1.102	1.124	1.160	1.206
95	0.858	0.886	0.914	0.955	0.988	1.067	1.081	1.099	1.120	1.155	1.199
100	0.861	0.888	0.916	0.956	0.988	1.065	1.079	1.096	1.116	1.150	1.192
110	0.866	0.893	0.920	0.958	0.988	1.061	1.074	1.090	1.110	1.141	1.181
120	0.871	0.897	0.923	0.959	0.988	1.058	1.070	1.086	1.104	1.133	1.171

Tab. 3.1 - Percentis da distribuição da estatística $\frac{\chi^2}{n}$ para amostras completas.

Fonte: Thoman, Bain e Antle [93]

O ponto representa a vírgula decimal

★EXEMPLO 3.2 - Lieblein e Zelen [58] dão os resultados da resistência de aproximadamente 5000 rolamentos de esfera.

A estimativa gráfica de β sobre todos os rolamentos testados têm um valor médio aproximado de 1,6.

Tirou-se uma amostra (cujos resultados estão em milhões de revoluções) com o intuito de executar o teste.

$$\begin{cases} H_0: & \beta = 1 \\ H_1: & \beta \geq 1,6 \end{cases}$$

Os dados da amostra foram

17,88	28,92	33,00	41,52	42,12	45,60	48,48
51,84	51,96	54,12	55,56	67,80	68,64	68,88
84,12	93,12	98,64	105,12	105,84	127,92	128,04
						173,40

Para esses dados pode-se obter o E.M.V. de β , isto é,

$$\hat{\beta} = 2,102$$

Da Tab. 3.1 pode -se ler os valores que permitem achar o I.C. de 90% para β (é necessário fazer uma interpolação pois o tamanho da nossa amostra é $n=23$).

$$\frac{2,102}{1,405} \leq \beta \leq \frac{2,102}{0,801} \quad \rightarrow \quad 1,496 \leq \beta \leq 2,624$$

Thoman, Bain e Antle [93] também provaram que $\hat{\beta} \ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta})$ distribui-se independentemente de β e θ .

Na Tab. 3.2 estão os percentis dessa distribuição.

Dessa forma o I.C. de $100(1-\alpha)\%$ para θ tem a forma

$$\left(\hat{\theta} e^{-\frac{\ell_{\sup}}{\hat{\beta}}}, \hat{\theta} e^{-\frac{\ell_{\inf}}{\hat{\beta}}} \right) \quad \rightarrow (3.10)$$

onde ℓ_{\inf} e ℓ_{\sup} são tirados da Tab. 3.2 de tal forma que

$$P(\ell_{\inf} \leq \hat{\beta} \ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta}) \leq \ell_{\sup}) = 1-\alpha \quad \rightarrow (3.11)$$

Como o E.M.V. de θ é $\hat{\theta}=81,99$ e

$$\begin{cases} \ell_{\inf} = -0,394 \\ \ell_{\sup} = 0,388 \end{cases} \quad \text{então}$$

$68,17 \leq \theta \leq 98,89$

Se desejarmos testar ao nível de significância 0,10

$$\begin{cases} H_0: \beta = 1 \\ H_1: \beta \geq 1,6 \end{cases}$$

da Fig. 3.1b vê-se que o poder do teste excederia 0,89 e baseando-se na amostra acima o teste nos levaria a rejeição da hipótese nula. Aliás isso já era óbvio pois o extremo inferior com 90% de confiança para β é:

$$\frac{2,102}{1,3095} = 1,605 \text{ e } \beta_0 = 1 < 1,605$$

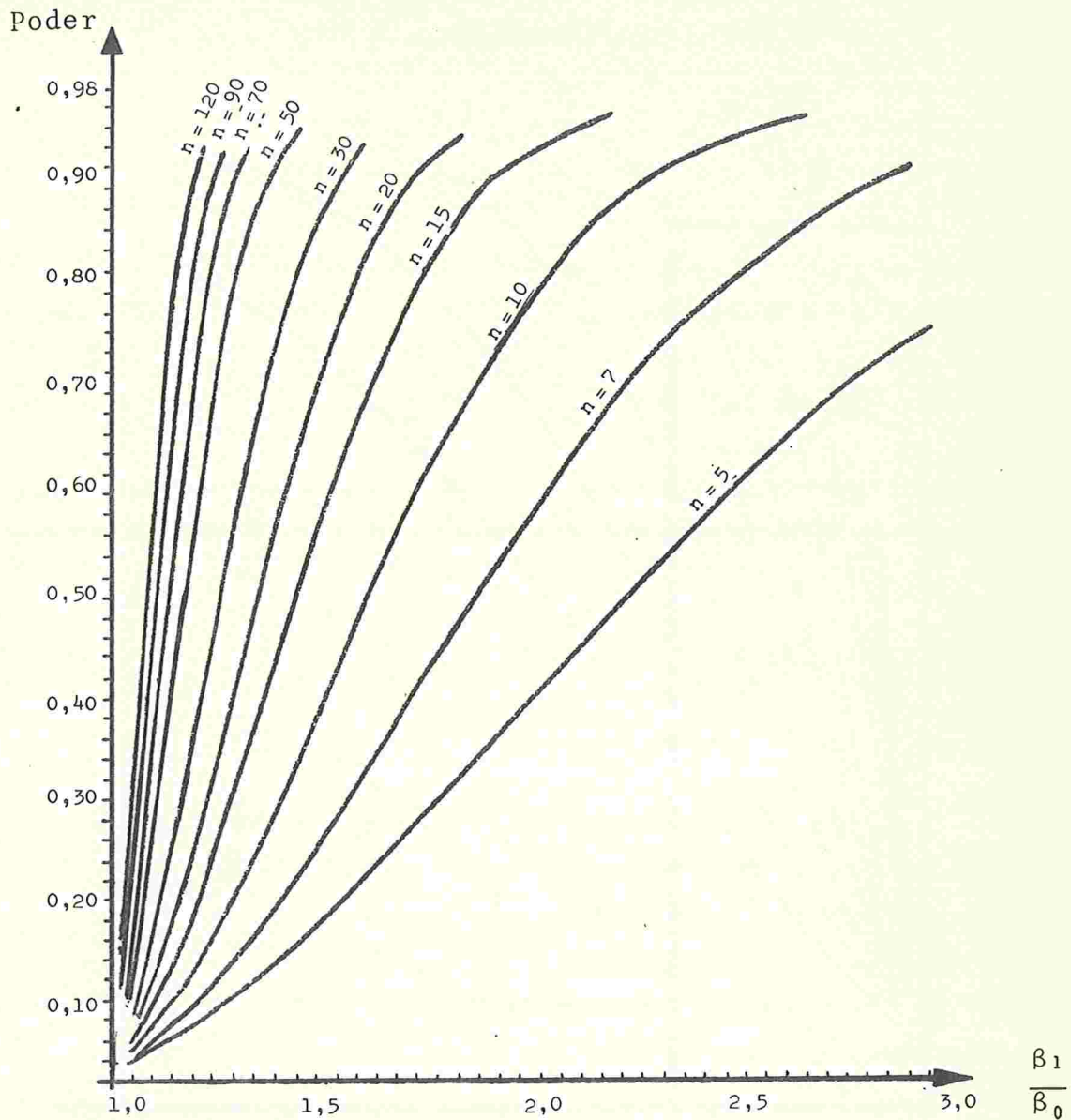
ou o ponto crítico $\hat{\beta}_c = 1,3095 \cdot 1 = 1,3095$ e como se vê $\hat{\beta}=2,102 > \hat{\beta}_c=1,3095$ levando a rejeição de H_0 .

Como já dissemos para $n \geq 100$ a clássica teoria baseada na lei normal pode ser usada na execução dos testes para os parâmetros da Weibull.

São então importantes os seguintes resultados assintóticos de Thoman, Bain e Antle [93].

1) - $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ é assintoticamente normal com média 1 e variância $\frac{0,608}{n}$.

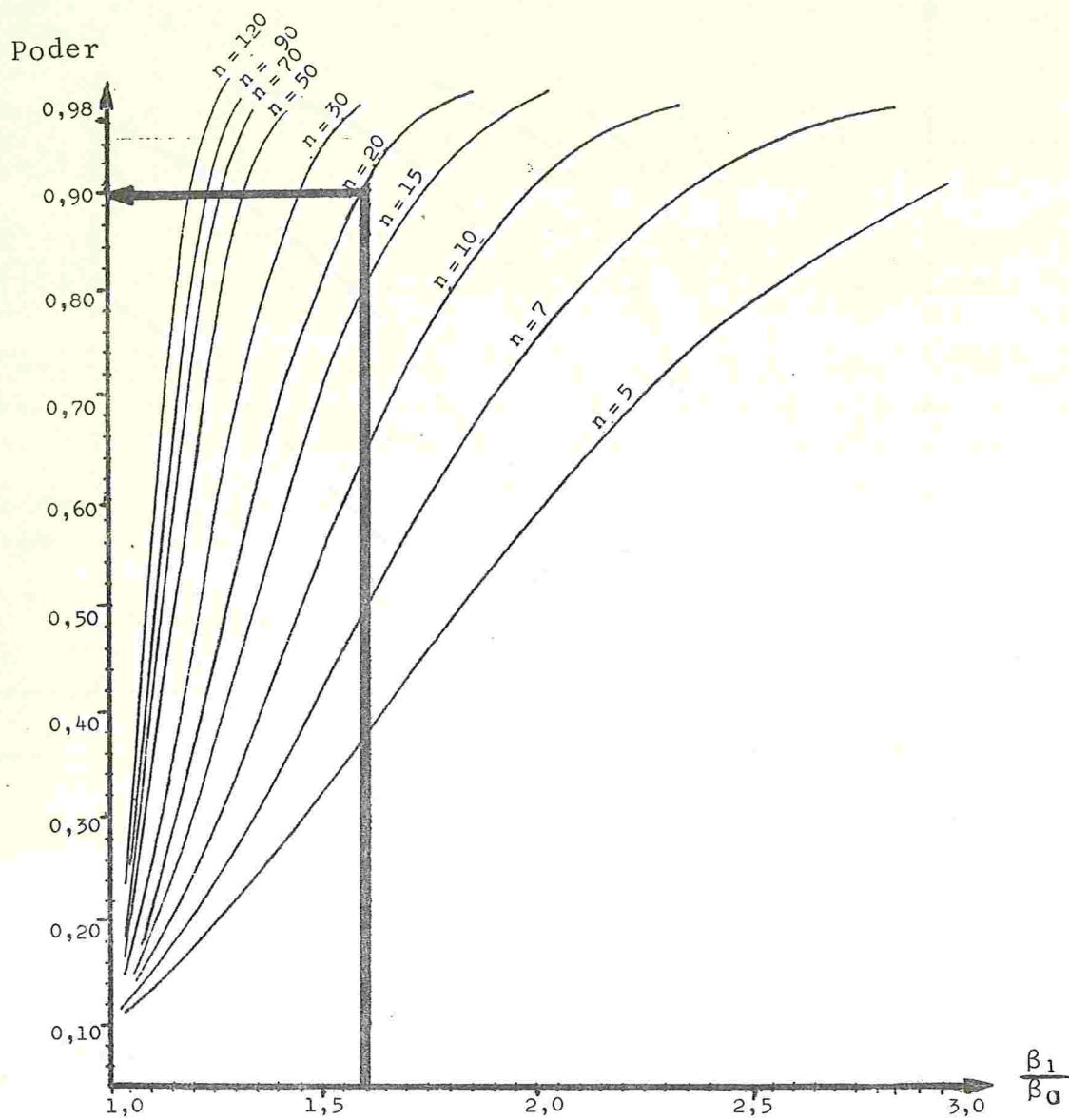
2) - $\hat{\beta} \ln(\frac{\hat{\theta}}{\theta})$ é assintoticamente normal com média 0 e variância $\frac{1,109}{n}$



Fonte: Thoman, Bain e Antle [93]

Fig . 3.1a

Poder de teste ao nível de significância 0,05 para β como uma função de $\frac{\beta_1}{\beta_0}$ ($\beta_0 < \beta_1$).



Fonte: Thomen, Bain e Antle [93]

Fig. 3.1b

Poder de um teste para β ao nível de significância 0,10 como uma função de $\frac{1}{\beta_0}$, ($\beta_0 < \beta_1$).

$\frac{1-\alpha}{n}$	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	$\frac{1-\alpha}{n}$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.98
5	-1.631	-1.247	-0.888	-0.444	-0.241	5	0.349	0.452	0.587	0.722	1.107	1.582
6	-1.396	-1.007	-0.740	-0.385	-0.194	6	0.302	0.404	0.516	0.666	0.939	1.291
7	-1.196	-0.874	-0.652	-0.344	-0.168	7	0.272	0.362	0.465	0.598	0.829	1.120
8	-1.056	-0.784	-0.591	-0.313	-0.150	8	0.251	0.331	0.427	0.547	0.751	1.003
9	-0.954	-0.717	-0.544	-0.289	-0.137	9	0.235	0.307	0.397	0.507	0.691	0.917
10	-0.876	-0.665	-0.507	-0.269	-0.126	10	0.222	0.288	0.372	0.475	0.644	0.851
11	-0.813	-0.622	-0.477	-0.253	-0.118	11	0.211	0.273	0.351	0.448	0.605	0.797
12	-0.762	-0.587	-0.451	-0.239	-0.111	12	0.202	0.260	0.334	0.425	0.572	0.752
13	-0.719	-0.557	-0.429	-0.228	-0.106	13	0.194	0.249	0.319	0.406	0.544	0.714
14	-0.683	-0.532	-0.410	-0.217	-0.100	14	0.187	0.239	0.306	0.389	0.520	0.681
15	-0.651	-0.509	-0.393	-0.208	-0.096	15	0.180	0.230	0.294	0.374	0.499	0.653
16	-0.624	-0.489	-0.379	-0.200	-0.092	16	0.175	0.223	0.284	0.360	0.480	0.627
17	-0.599	-0.471	-0.365	-0.193	-0.089	17	0.170	0.216	0.274	0.348	0.463	0.605
18	-0.578	-0.455	-0.353	-0.187	-0.085	18	0.165	0.209	0.266	0.338	0.447	0.584
19	-0.558	-0.441	-0.342	-0.181	-0.083	19	0.161	0.204	0.258	0.328	0.433	0.566
20	-0.540	-0.428	-0.332	-0.175	-0.080	20	0.157	0.199	0.251	0.318	0.421	0.549
22	-0.509	-0.404	-0.314	-0.166	-0.075	22	0.150	0.189	0.239	0.302	0.398	0.513
24	-0.483	-0.384	-0.299	-0.158	-0.071	24	0.144	0.181	0.228	0.288	0.379	0.494
26	-0.460	-0.367	-0.286	-0.150	-0.068	26	0.138	0.174	0.219	0.276	0.362	0.472
28	-0.441	-0.352	-0.274	-0.144	-0.065	28	0.134	0.168	0.210	0.265	0.347	0.453
30	-0.423	-0.338	-0.264	-0.139	-0.062	30	0.129	0.163	0.203	0.256	0.334	0.435
32	-0.406	-0.326	-0.254	-0.134	-0.059	32	0.125	0.158	0.197	0.247	0.323	0.420
34	-0.394	-0.315	-0.246	-0.129	-0.057	34	0.122	0.153	0.191	0.239	0.312	0.406
36	-0.383	-0.305	-0.238	-0.125	-0.055	36	0.118	0.149	0.180	0.232	0.302	0.393
38	-0.370	-0.296	-0.231	-0.121	-0.053	38	0.115	0.145	0.175	0.226	0.293	0.382
40	-0.360	-0.288	-0.224	-0.118	-0.052	40	0.113	0.142	0.171	0.220	0.285	0.371
42	-0.350	-0.280	-0.218	-0.115	-0.050	42	0.110	0.139	0.167	0.214	0.278	0.361
44	-0.341	-0.273	-0.213	-0.112	-0.048	44	0.108	0.136	0.164	0.209	0.271	0.352
46	-0.333	-0.266	-0.208	-0.109	-0.047	46	0.105	0.133	0.160	0.204	0.264	0.343
48	-0.325	-0.260	-0.203	-0.106	-0.046	48	0.103	0.130	0.157	0.195	0.258	0.335
50	-0.318	-0.254	-0.198	-0.104	-0.045	50	0.101	0.128	0.154	0.191	0.247	0.327
52	-0.312	-0.249	-0.194	-0.102	-0.043	52	0.099	0.126	0.151	0.187	0.243	0.320
54	-0.306	-0.244	-0.189	-0.100	-0.042	54	0.097	0.123	0.148	0.184	0.238	0.313
56	-0.300	-0.239	-0.186	-0.098	-0.041	56	0.096	0.121	0.146	0.181	0.233	0.306
58	-0.294	-0.234	-0.183	-0.096	-0.040	58	0.094	0.119	0.143	0.177	0.229	0.299
60	-0.289	-0.230	-0.179	-0.094	-0.039	60	0.092	0.117	0.141	0.174	0.225	0.292
62	-0.283	-0.226	-0.176	-0.092	-0.038	62	0.091	0.116	0.139	0.171	0.221	0.285
64	-0.278	-0.222	-0.173	-0.091	-0.037	64	0.089	0.114	0.137	0.169	0.218	0.278
66	-0.274	-0.218	-0.170	-0.089	-0.036	66	0.087	0.111	0.135	0.166	0.214	0.272
68	-0.270	-0.215	-0.167	-0.088	-0.036	68	0.085	0.109	0.133	0.164	0.211	0.267
70	-0.266	-0.211	-0.165	-0.086	-0.035	70	0.084	0.108	0.131	0.161	0.208	0.262
72	-0.262	-0.208	-0.162	-0.085	-0.035	72	0.083	0.107	0.129	0.159	0.205	0.257
74	-0.259	-0.205	-0.160	-0.084	-0.034	74	0.082	0.105	0.128	0.157	0.202	0.252
76	-0.255	-0.202	-0.158	-0.083	-0.033	76	0.080	0.104	0.126	0.155	0.199	0.247
78	-0.252	-0.199	-0.155	-0.081	-0.033	78	0.080	0.103	0.125	0.153	0.197	0.243
80	-0.248	-0.197	-0.153	-0.080	-0.032	80	0.077	0.100	0.121	0.148	0.190	0.238
85	-0.241	-0.190	-0.148	-0.078	-0.031	85	0.075	0.097	0.118	0.143	0.185	0.233
90	-0.234	-0.184	-0.144	-0.075	-0.030	90	0.073	0.095	0.115	0.139	0.179	0.228
95	-0.227	-0.179	-0.139	-0.073	-0.028	95	0.071	0.093	0.112	0.136	0.175	0.223
100	-0.221	-0.174	-0.136	-0.071	-0.027	100	0.067	0.089	0.107	0.129	0.166	0.218
110	-0.211	-0.165	-0.129	-0.067	-0.025	110	0.064	0.085	0.103	0.123	0.159	0.213
120	-0.202	-0.158	-0.123	-0.064	-0.024	120						0.208

Fonte: Thoman, Bain e Antle [93]

Tab. 3.2 - Percentis da distribuição da estatística $\rho \ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ - para amostras completas.

II - Teste da igualdade dos parâmetros de forma para duas a.a. independentes.

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = \beta_2 \\ H_1: \beta_1 = k\beta_2 \quad \text{com } k>1 \end{cases} \quad \Rightarrow (3.12)$$

Thoman e Bain [92] fornecem os percentis da distribuição da estatística $\frac{\hat{\beta}_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_2}{\hat{\beta}_2}$ o que permite com passos semelhantes ao caso I executar o teste.

Também se encontra nesse trabalho o poder como uma função de $k>1$ para certos valores de n e $\alpha=0,05$ e $\alpha=0,10$.

III - Teste da igualdade dos parâmetros de escala para duas a.a. independentes.

$$\begin{cases} H_0: \theta_1 = \theta_2, \quad \beta_1 = \beta_2 \\ H_1: \theta_1 = k\theta_2, \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{com } k>1 \end{cases} \quad \Rightarrow (3.13)$$

Ainda Thoman e Bain [92] provam que esse teste pode ser feito baseando-se no fato que

$$P \left[\frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2}{2} [\ln(\hat{\theta}_1) - \ln(\hat{\theta}_2)] < u \mid H_0 \right] = G_1(u) \quad \Rightarrow (3.14)$$

Fornecem no seu trabalho os percentis de G_1 necessários para a execução do teste (3.13).

IV - Teste do parâmetro de forma para uma amostra censu-
rada, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(r)}$ com $r \leq n$ dado pela (3.6)

Nesse caso deve-se usar o M.E.L.I. de β pois é o que tem o menor E.Q.M.

No capítulo 2 os M.E.L.I. $\tilde{\eta}$ e $\tilde{\xi}$ de $\eta = \ln \theta$ e $\xi = \frac{1}{\beta}$ foram usados para obter estimação por intervalo de η e ξ e assim estima por intervalo de θ e β .

Como anteriormente a estimação por intervalo permite-nos executar o teste (3.6) que é a mesma coisa que

$$\begin{cases} H_0: & \xi = \xi_0 \\ H_1: & \xi = \xi_1, \quad \xi_1 < \xi_0 \end{cases} \quad \rightarrow (3.15)$$

Os pesos necessários para obter $\tilde{\xi}$ estão na Tab. 2.14 e na Tab. 2.20 estão os valores de ω_α tais que

$$P\left(\frac{\tilde{\xi}}{\xi} = W \leq \omega_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

Porém como $\frac{1}{\xi} = \beta$ então temos

$$P(\beta \tilde{\xi} \leq \omega_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

Dessa forma uma estimação através de um intervalo unilateral a esquerda de $100(1-\alpha)\%$ de confiança de β é dada

$$\text{por } \beta_{\text{inf}} = \frac{\omega_{1-\alpha}}{\tilde{\xi}} \quad \Rightarrow (3.16)$$

Portanto se $\beta_0 \geq \beta_{\text{inf}}$ H_0 é aceita.

Pode-se também usar a variável $\frac{\xi^{**}}{\xi}$ que tem distribuição aproximada qui-quadrado sobre os g.l. para testar H_0 quando $n \geq 20$.

3.2 - TESTES DE ADERÊNCIA DA WEIBULL BIPARAMÉTRICA OU DISTRIBUIÇÃO DO VALOR EXTREMO.

Tanto o teste de van Montfort [95] planejado para a análise de problemas de precipitação pluviométrica como o teste de Mann, Scheuer e Fertig [78] para verificar que as observações são da primeira distribuição assintótica dos menores valores baseiam-se no trabalho de van Montfort [95] dependendo de um resultado de Pyke [89], relativo as propriedades de observações ordenadas adjacentes.

Van Montfort observou que esses "saltos" ou as diferenças entre observações ordenadas adjacentes de uma distribuição de valor extremo divididas pelas diferenças entre as suas esperanças tem distribuições que são aproximadamente exponenciais com esperanças exatamente iguais a 1, variâncias, aproximadamente iguais a 1 e covariâncias essencialmente 0.

Mann, Scheuer e Fertig [78] observaram que esses saltos quando multiplicados por 2, tem aproximadamente distribuições χ^2 com 2 g.l e independentes entre si.

Definamos dessa forma

$$\ell_i = \frac{X_{(i+1)} - X_{(i)}}{E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})} \quad \rightarrow (3.17)$$

e

$$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \eta}{\xi}$$

onde η e ξ são os parâmetros de posição e de escala da distribuição do valor extremo ($\eta = \ln \theta$ e $\xi = \frac{1}{\beta}$).

Então

$$W = \frac{\sum_{i=[r/2]+1}^{r-1} \ell_i \frac{r-1}{2}}{\sum_{i=1}^{[r/2]} \frac{\ell_i}{\frac{r}{2}}} \quad \rightarrow (3.18)$$

onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x , tem uma distribuição aproximadamente F com $\nu_1 = 2[\frac{r-1}{2}]$ e $\nu_2 = 2[\frac{r}{2}]$ g.l..

Um teste de aderência baseado na estatística W (ou equivalentemente na estatística U que definiremos adiante como uma função de W) foi obtido por Mann, Scheuer e Fertig [78] como uma consequência do fato de que a cauda da esquerda da f.d. de valor extremo é mais "comprida" que a maior parte das distribuições de interesse, enquanto que a cauda da direita é mais curta.

Assim por exemplo se quer-se formar uma estatísti-

ca proporcional a razão da última e da primeira das diferenças das variáveis ordenadas observadas de uma amostra de tamanho n ,

$$k \frac{X_{(r)} - X_{(r-1)}}{X_{(2)} - X_{(1)}},$$

quando $r = n$, é de se esperar que essa estatística seja menor sob a hipótese nula do que sob as hipóteses alternativas aplicáveis.

Verificou-se que especialmente para pequenos níveis de significância o poder de um teste baseado nesse tipo de estatística aumenta se utilizarmos todos os r saltos observados como na (3.18) em vez de apenas o último e o primeiro.

Aliás com o intuito que os valores críticos para o teste, gerados pelo método de Monte Carlo, caíam no intervalo unitário e não no intervalo $(0, \infty)$ a estatística teste foi transformada em

$$U = \frac{cW}{1+cW} = \frac{\sum_{i=[r/2]+1}^{r-1} \ell_i}{\sum_{i=1}^{r-1} \ell_i} \quad \rightarrow (3.19)$$

onde

$$c = \frac{\left[\frac{r-1}{2} \right]}{\left[\frac{r}{2} \right]}$$

Em vista da conhecida relação entre as distribuições beta e F, U para n suficientemente grande ou r sufici-

entamente pequeno tem aproximadamente uma distribuição beta com parâmetros $\left[\frac{r-1}{2}\right]$ e $\left[\frac{r}{2}\right]$.

Os percentis da distribuição de U e valores de $E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})$ para $i=1,2,\dots,n-1$ estão na Tab. 3.3.

A comparação dos valores dos percentis U com os percentis da distribuição beta mostram que para $n \geq 16$ a concordância é bastante boa.

Quando o n é grande porém menor que 100 pode-se formar o W utilizando somente as diferenças das duas primeiras e duas últimas observações ordenadas.

A razão da última para a primeira quando multiplicada por uma conveniente razão de diferenças de valores esperados tem uma distribuição F com $v_1 = 2$ e $v_2 = 2$ g.l..

As comparações do poder através de Monte Carlo aplicadas a amostras completas para testes baseados em U e os análogos como Kolmogorov-Smirnov, o teste de Kuiper [52] o teste de Anderson e Darling [1] e o teste de Cramér-von Mises revelam que o teste U é o mais poderoso contra as alternativas estudadas.

As alternativas consideradas são que X é normal ou $T = \exp(X)$ é uma distribuição de falhas lognormal e que T tem uma distribuição de Weibull triparmétrica com dois valores diferentes especificados para o parâmetro de forma β menores ou iguais a 1 e um valor fornecido de $\frac{\delta}{\theta}$ com $\delta \geq 0$.

A última alternativa aplica-se a situações nas quais é feita a transformação ao espaço dos logaritmos e então as variáveis são testadas para determinar se o parâmetro de posição não nulo tenha sido esquecido.

Rejeita-se ao nível de significância α a hipótese que X é uma variável de valor extremo se o valor calculado de U exceder o $100(1-\alpha)$ -ésimo percentil de U .

O teste que se baseia em U ou W pode ser aplicado a amostras censuradas de tamanho acima de 100 sem a necessidade de gerar-se muitas páginas de novas tabelas e é aplicável a quaisquer hipóteses alternativas com propriedades de cauda diferentes daquelas da distribuição de valor extremo.

Mann e Fertig [72] modificaram a estatística U para aumentar o poder do teste sob alternativa da Weibull triparamétrica.

A nova estatística teste S é definida exatamente como U [ver(2.136)] exceto que $[\frac{r}{2}]$ é substituído pelo inteiro k .

Os valores de k , que otimizam aproximadamente o poder do teste sob a alternativa Weibull triparamétrica estão tabeladas em Mann e Fertig [72] para pequenos valores de r .

Para $r \geq 15$, k é igual ao inteiro mais próximo de $\frac{r}{3}$.

A estatística de teste S dada pela (2.136) tem uma distribuição que se aproxima mais da beta que a U .

O teste de van Montfort [95] usa as suas conclusões relativas aos saltos e é planejado especificamente para testar que as observações não transformadas (tais como as maiores quantidades de água que caíram) são de Tipo I em oposição ao fato de poderem ser de uma distribuição dos maiores valores do tipo II.

Em vista de certas considerações de simetria, o teste também se aplica para testar que os dados não transformados são de uma distribuição de valor extremo (tipo I) de menores valores contra a alternativa que eles são de uma distribuição de Weibull triparamétrica.

A estatística teste, que é aproximadamente normal, envolve o coeficiente de correlação amostral de $n-1$ saltos modificados e funções de i e n relacionadas aos saltos.

★EXEMPLO 3.3 - Vejamos a aplicação da Tab. 3.3 e para tanto vamos utilizar os dados do Exemplo 2.2.

Nesse caso temos $n=r=8$ e desejamos testar a hipótese de que essa amostra foi retirada de uma distribuição de Weibull biparamétrica contra a alternativa de que ela é proveniente de uma Weibull triparamétrica.

Para achar U devem ser feitos os cálculos indicados na Tab. 3.4 em vista da (3.17) e (3.19).

Temos nesse caso $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1 = 5$, portanto,

$$U = \frac{\sum_{i=5}^7 x_i}{\sum_{i=1}^7 x_i} = \frac{2,848957}{3,674627} = \boxed{0,78}$$

Da Tab. 3.3 para $n = r = 8$ e $\alpha = 0,05$ lê-se o valor crítico de U que é 0,71.

Assim rejeitamos a hipótese que os dados, são provenientes de uma distribuição de Weibull biparamétrica.

n	i	$M_{(i)}$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
3	1	1.216395						
	2	0.863046						
	3		0.75	0.79	0.84	0.90	0.95	0.99
4	1	1.150727						
	2	0.706698						
	3	0.679596	0.74	0.79	0.85	0.90	0.95	0.99
	4		0.50	0.55	0.60	0.67	0.76	0.89
5	1	1.115718						
	2	0.645384						
	3	0.532445	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
	4	0.583273	0.50	0.56	0.61	0.68	0.77	0.89
	5		0.67	0.71	0.75	0.79	0.86	0.94
6	1	1.093929						
	2	0.612330						
	3	0.474330	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
	4	0.442920	0.50	0.55	0.61	0.68	0.76	0.89
	5	0.522759	0.67	0.71	0.75	0.80	0.86	0.93
	6		0.54	0.57	0.61	0.66	0.73	0.84
7	1	1.079055						
	2	0.591587						
	3	0.442789	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
	4	0.387289	0.50	0.55	0.61	0.68	0.77	0.89
	5	0.387714	0.67	0.71	0.75	0.80	0.86	0.94
	6	0.480648	0.54	0.58	0.62	0.67	0.74	0.85
	7		0.64	0.67	0.70	0.74	0.80	0.88
8	1	1.068252						
	2	0.577339						
	3	0.422889	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
	4	0.356967	0.50	0.55	0.61	0.68	0.77	0.90
	5	0.334089	0.67	0.71	0.75	0.80	0.86	0.94
	6	0.349907	0.54	0.58	0.62	0.67	0.74	0.85
	7	0.449338	0.64	0.67	0.70	0.74	0.80	0.89
	8		0.55	0.58	0.61	0.65	0.71	0.81
9	1	1.060046						
	2	0.566942						
	3	0.409157	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
	4	0.337763	0.50	0.55	0.61	0.68	0.77	0.89
	5	0.304777	0.67	0.71	0.75	0.80	0.86	0.94
	6	0.297949	0.54	0.58	0.62	0.67	0.75	0.86
	7	0.322189	0.63	0.67	0.70	0.74	0.80	0.89
	8	0.424958	0.55	0.58	0.61	0.66	0.72	0.82
	9		0.62	0.64	0.67	0.71	0.76	0.85

Tab. 3.3 - Percentis da distribuição de U e a diferença entre os valores esperados de $E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)}) = M_{(i)}$

Fonte: Trecho da tabela de Kapur e Lamberson [49]

0 ponto representa a vírgula decimal.

i	$t_{(i)}$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$	$M_{(i)}$	$x_{(i+1)} - x_{(i)}$	$\frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{M_{(i)}}$
1	22000	0,998798	1,068252	0,127833	0,119666
2	25000	10,126631	0,577339	0,182323	0,315796
3	30000	10,308953	0,422 889	0,095310	0,225379
4	33000	10,404263	0,356967	0,058841	0,164835
5	35000	10,463103	0,334089	0,395896	1,185001
6	52000	10,859000	0,349907	0,191891	0,548406
7	63000	11,050890	0,449338	0,501256	1,115544
8	104000	11,552146			

Tab. 3.4

Isso aliás está muito consistente com a conclusão prévia que tivemos no Exemplo 2.2 utilizando um julgamento subjetivo a partir da análise gráfica.

Na nossa análise gráfica subtraímos de cada observação 19600 e concluímos que os dados resultantes seguem a lei de Weibull com dois parâmetros.

Na Tab. 3.5 temos os dados arrumados e os cálculos para executar o teste de aderência.

$t_{(i)}$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$	$x_{(i+1)} - x_{(i)}$	$\frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{M_{(i)}}$
2400	7,783224	0,810930	0,7592
5400	8,594154	0,655407	1,1352
10400	9,249561	0,253449	0,5993
13400	9,503010	0,139113	0,3897
15400	9,642123	0,743791	2,2263
32400	10,385914	0,392301	1,1212
43400	10,678215	0,665108	1,4802
84400	11,343323		

Tab. 3.5

Para esse caso temos $U = \frac{4,8277}{7,7111} = \boxed{0,63}$.

Olhando na Tab. 3.3 dos valores críticos de U vê-se que a estatística calculada não seria significativa a 95% ou mesmo ao nível de 90%

3.3 - ECONOMIA NO TEMPO DE TESTE DEVIDO A CENSURA DO TIPO II.

Pode-se achar a redução do tempo de teste devido a censura do tipo II para a distribuição de Weibull baseando-se no trabalho de Danziger [16].

Aumentando-se o tamanho da amostra n acima do número requerido de falhas r pode-se ter uma economia no tempo de teste.

Epstein e Sobel [26], como um critério para o tamanho da amostra para o teste da vida média sob a suposição de vida exponencial, utilizaram a razão

$$\delta_{r,n} = \frac{E(T_{r,n}^{(exp)})}{E(T_{r,r}^{(exp)})} = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{i}} \quad \Rightarrow (3.20)$$

onde $E(T_{r,n}^{(exp)})$ é a duração esperada do teste para as r primeiras falhas entre n .

Quando no planejamento de experimentos sob a suposição de Weibull, Mann sugere a razão

$$\rho = \frac{\text{Mediana}(T_{r,n})}{\text{Mediana}(T_{r,r})} \quad \Rightarrow (3.21)$$

O mais simples entretanto é considerar a razão

$$\lambda_{r,n} = \frac{E(T_{r,n})}{E(T_{r,r})} \quad \Rightarrow (3.22)$$

onde agora $E(T_{r,n})$ é a duração esperada do teste até ocorrerem r falhas entre n observações sob a suposição de Weibull.

Deve-se agora utilizar a conhecida relação entre a Weibull e a exponencial

$$T_{r,n} = \left[T_{r,n}^{(exp)} \right]^{1/\beta} \quad \Rightarrow (3.23)$$

e a distribuição de $T_{r,n}^{(exp)}$ dada em Epstein e Sobel [26] leva-nos à

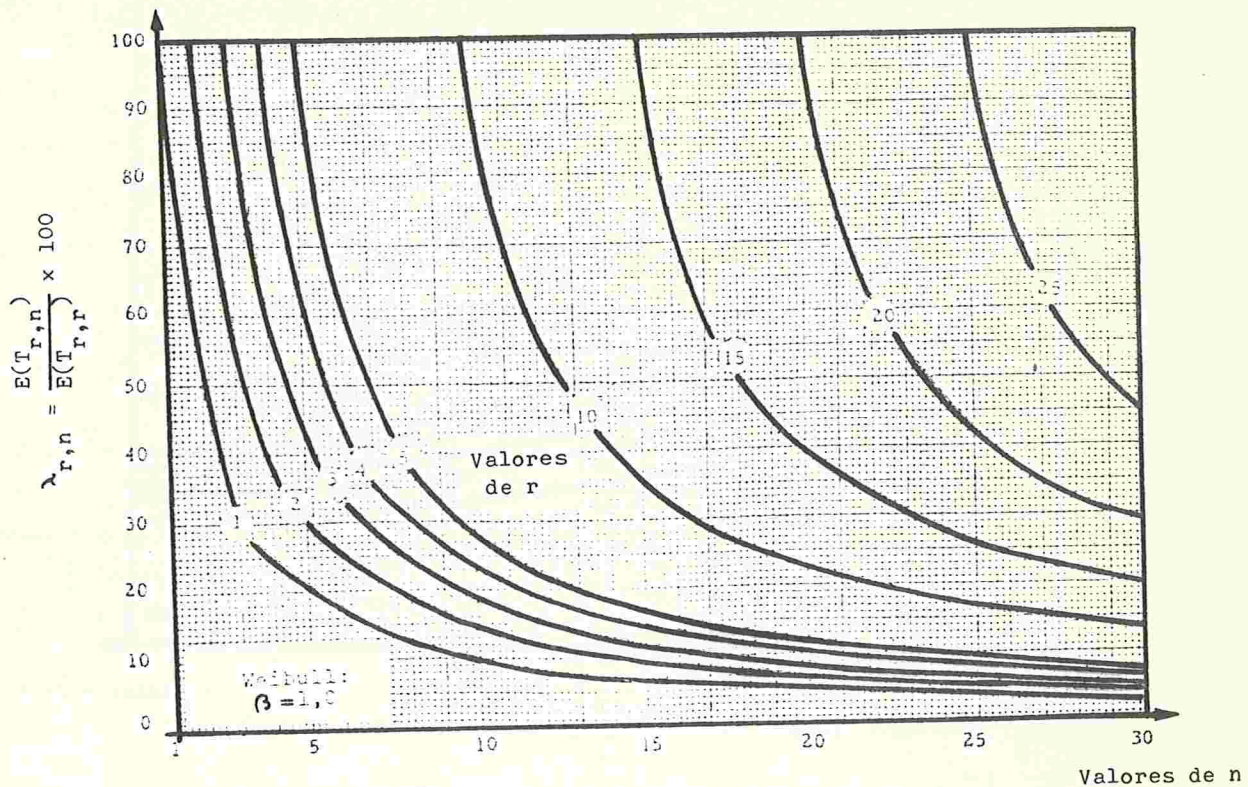
$$E(T_{r,n}) = r \binom{n}{r} \theta^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r-1}{i-1} \frac{1}{(n-r+i)^{1/\beta+1}} \quad \Rightarrow (3.24)$$

Nas Fig. 3.2 a e b temos o comportamento de $\lambda_{r,n}$ como uma função de β , r e n .

Os gráficos das Fig. 3.2 a e b são indicativos dos modelos para os outros valores de β .

Dessa forma no lugar de considerações para minimizar o custo total ou global do experimento, (envolvendo o custo de amostragem, tempo para o experimento, custo da instalação para o teste, etc) parece mais razoável escolher o n no "joelho" de cada curva.

Se o custo ou a disponibilidade de unidades é proibitivo poderia-se ao menos escolher $n=r+1$ visto que isto traz o maior decréscimo em $E(T_{r,n})$ por um acréscimo unitário de n .



Fonte: Danzinger [16]

Fig 3.2.a

Razão do tempo esperado de duração para r entre n falhas para o tempo esperado para r entre r falhas.

Mann mostrou na sua tese de doutorado que $(\delta_{r,n})^{1/\beta}$ é uma boa aproximação de $\rho(\delta_{r,n})^{1/\beta}$ e é também uma boa aproximação para $\lambda_{r,n}$.

Os valores de $\delta_{r,n}$ estão na Tab. 3.7

Portanto,

$$\lambda_{r,n} \cong (\delta_{r,n})^{1/\beta} \quad \rightarrow (3.25)$$

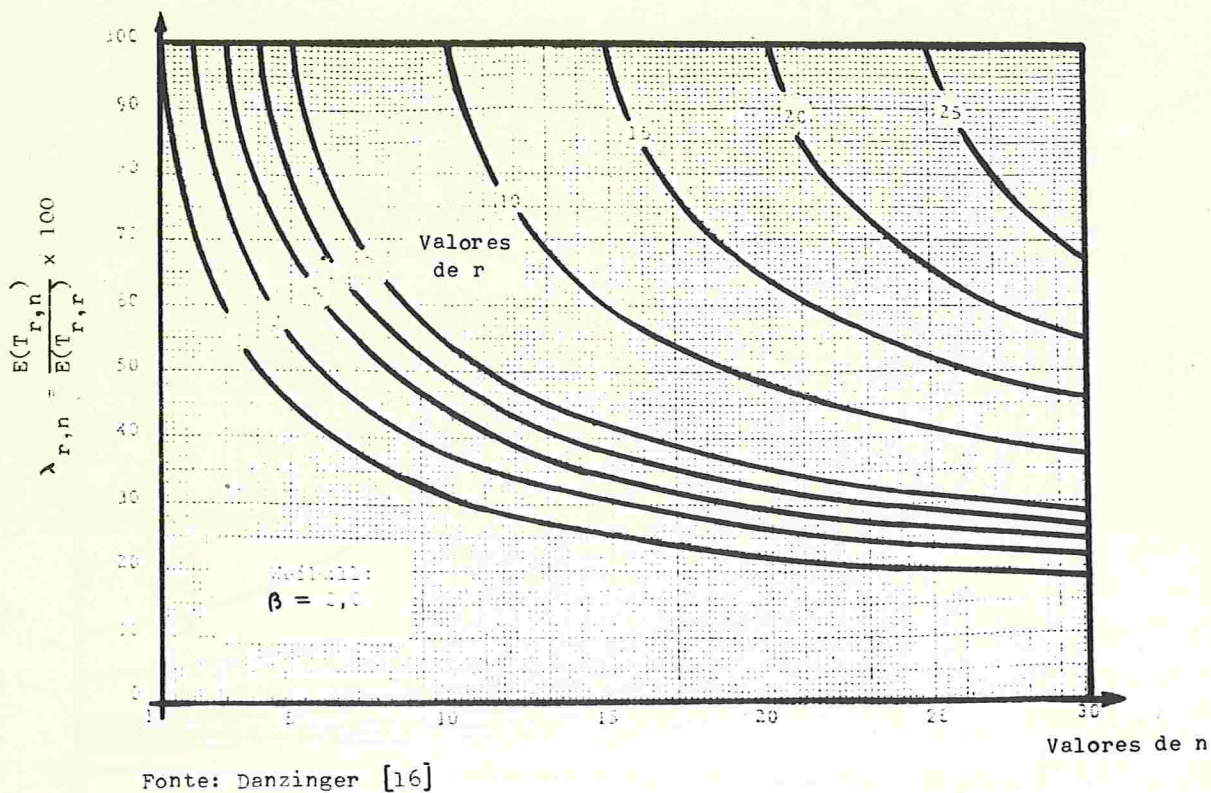


Fig. 3.2b

Razão do tempo esperado de duração para \underline{r} entre \underline{n} falhas para o tempo esperado para \underline{r} entre \underline{r} falhas.

★Exemplo 3.4 - Se tivermos $n=8$, $r=6$ da Tab. 3.7 temos que

$$\delta_{6,8} = 0,497.$$

Se tivermos uma distribuição de Weibull com $\beta=3$ a economia de tempo comparada com o tempo esperado no caso $n=r=6$ é

$$(0,497)^{1/3} \cong 0,79$$

Isto é obteremos 6 falhas em 8 em 0,79 do tempo

que se leva para obter 6 falhas em 6 observações.

Danzinger [16] justificou essa aproximação fazendo um estudo numérico com o auxílio de um computador obtendo os seguintes resultados em termos de intervalo

β	Extremos em $\lambda_{r,n}$
0,25	$\delta_{r,n}^{1/\beta} - 0,061 < \lambda_{r,n} < \delta_{r,n}^{1/\beta}$
0,50	$\delta_{r,n}^{1/\beta} - 0,018 < \lambda_{r,n} < \delta_{r,n}^{1/\beta}$
0,75	$\delta_{r,n}^{1/\beta} - 0,006 < \lambda_{r,n} < \delta_{r,n}^{1/\beta}$
1,25 — 5,00	$\delta_{r,n}^{1/\beta} < \lambda_{r,n} < \delta_{r,n}^{1/\beta} + 0,01$

Tab. 3.6

n = número de elementos no teste

n	r = ponto de término do teste																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1.000																			
2	0.500	1.000																		
3	0.333	0.556	1.000																	
4	0.250	0.389	0.591	1.000																
5	0.200	0.300	0.427	0.616	1.000															
6	0.167	0.244	0.336	0.456	0.635	1.000														
7	0.143	0.206	0.278	0.365	0.479	0.650	1.000													
8	0.125	0.179	0.237	0.305	0.387	0.492	0.663	1.000												
9	0.111	0.157	0.207	0.262	0.327	0.406	0.513	0.673	1.000											
10	0.100	0.141	0.183	0.230	0.283	0.345	0.423	0.526	0.682	1.000										
11	0.091	0.127	0.165	0.205	0.250	0.301	0.361	0.437	0.537	0.690	1.000									
12	0.083	0.116	0.150	0.185	0.224	0.267	0.316	0.375	0.449	0.547	0.696	1.000								
13	0.077	0.107	0.137	0.169	0.202	0.240	0.282	0.330	0.388	0.460	0.556	0.703	1.000							
14	0.071	0.099	0.126	0.155	0.185	0.218	0.254	0.295	0.342	0.399	0.470	0.564	0.708	1.000						
15	0.067	0.092	0.117	0.143	0.170	0.200	0.232	0.267	0.307	0.353	0.409	0.479	0.572	0.713	1.000					
16	0.063	0.086	0.109	0.133	0.158	0.184	0.213	0.244	0.279	0.318	0.363	0.418	0.487	0.578	0.717	1.000				
17	0.059	0.081	0.103	0.125	0.147	0.171	0.197	0.225	0.255	0.289	0.328	0.373	0.426	0.494	0.585	0.722	1.000			
18	0.056	0.076	0.096	0.117	0.138	0.160	0.183	0.208	0.235	0.265	0.299	0.337	0.381	0.434	0.501	0.590	0.725	1.000		
19	0.053	0.072	0.091	0.110	0.130	0.150	0.171	0.194	0.219	0.245	0.275	0.308	0.345	0.389	0.441	0.507	0.595	0.729	1.000	
20	0.050	0.068	0.086	0.104	0.122	0.141	0.161	0.182	0.204	0.228	0.255	0.284	0.316	0.353	0.396	0.448	0.513	0.630	0.732	1.000

Fonte: Kapur e Lamberson [49]
0 ponto representa a vírgula decimal

Tab. 3.7 - Valores de $\delta_{r,n}$

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES DO MODELO DE WEIBULL

4.1 - TEORIA DA INTERFERÊNCIA E CÁLCULOS DA CONFIABILIDADE

É muito importante saber calcular a probabilidade que um componente, um subsistema ou um sistema falhe quando a *resistência do material* for excedida pela tensão.

Entenderemos por tensão admissível do material ou sua resistência como aquela máxima na qual o material trabalha dentro do regime elástico (ou semi-elástico ou plástico).

Representaremos a mesma por R .

Entenderemos como tensão ou esforço interno resistente do material, aquele resultante dos esforços internos solicitantes na massa da peça.

Representaremos a tensão por S .

Com o intuito de calcular a confiabilidade temos que conhecer a natureza das v.a. R e S .

A partir da expressão geral para a confiabilidade tiraremos algumas particularizações quando pelo menos R ou S seguem a lei de Weibull biparamétrica.

Sejam $f(s)$ e $g(r)$ as f.d. de S e R respectivamente.

Então, entenderemos por confiabilidade de um sistema a probabilidade.

$$C = P(R > S) = P(R - S > 0) \quad \Rightarrow (4.1)$$

Na Fig. 4.1 temos uma ilustração para o diagrama da interferência.

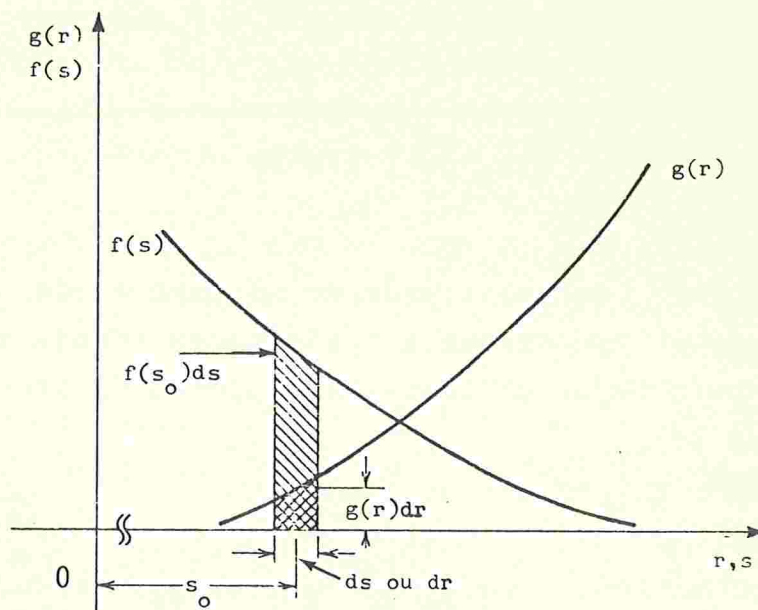


Fig. 4.1

A probabilidade de um valor de tensão cair em um pequeno intervalo de largura ds é igual a área do elemento ds .

$$P\left(s_0 - \frac{ds}{2} \leq S \leq s_0 + \frac{ds}{2}\right) \approx f(s_0)ds \quad \Rightarrow (4.2)$$

A probabilidade de que a resistência R seja maior que uma certa tensão s_0 é:

$$P(R > s_0) = \int_{s_0}^{\infty} g(r) dr \quad \rightarrow (4.3)$$

A probabilidade, para um certo valor de tensão s_0 caindo no intervalo elementar ds e a resistência R excedendo a tensão dada pelo intervalo elementar ds sob a suposição de que a tensão e a resistência são v.a.i., é dada por:

$$f(s_0) ds \int_{s_0}^{\infty} g(r) dr$$

Agora a confiabilidade do sistema ou de um componente é a probabilidade que a resistência R seja maior que a tensão S para todos os possíveis valores da tensão S e portanto é dada por:

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_s^{\infty} g(r) dr \right] ds \quad \rightarrow (4.4)$$

A confiabilidade pode também ser calculada com base no fato de que a tensão deve permanecer menor que a resistência.

A probabilidade que a resistência R esteja dentro do intervalo elementar dr é

$$P\left[r_0 - \frac{dr}{2} \leq R \leq r_0 + \frac{dr}{2}\right] \cong g(r_0) dr \quad \rightarrow (4.5)$$

e a probabilidade da tensão ser menor que r_0 é

$$P(S \leq r_0) = \int_{-\infty}^{r_0} f(s) ds \quad \Rightarrow (4.6)$$

Outra vez supondo que a tensão e a resistência são v.a.i. a probabilidade da resistência pertencer ao intervalo elementar dr e a tensão S não exceder r_0 é

$$g(r_0) dr \int_{-\infty}^{r_0} f(s) ds$$

Portanto a confiabilidade de um componente para to dos os possíveis valores da resistência R é:

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} g(r) \left[\int_{-\infty}^r f(s) ds \right] dr \quad \Rightarrow (4.7)$$

Algumas outras expressões para a confiabilidade e para a insegurança ou precariedade ("unreliability") podem ser utilizadas e em certas circunstâncias são úteis.

A "precariedade" será representada por C' e definida como:

$$C' = \text{Probabilidade de falha} = 1 - C = P(R \leq S) \quad \Rightarrow (4.8)$$

Assim de (4.4) temos:

$$\begin{aligned}
 C' = P(R \leq S) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_s^{\infty} g(r) dr \right] ds \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(s) [1 - G(s)] ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G(s) f(s) ds \quad \Rightarrow (4.9)
 \end{aligned}$$

Na (4.9) G é a F.D. de R .

Alternativamente usando a (4.7) temos:

$$\begin{aligned}
 C' = P(R \leq S) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(r) \left[\int_{-\infty}^r f(s) ds \right] = \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} g(r) F(r) dr \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(r)] g(r) dr \quad \Rightarrow (4.10)
 \end{aligned}$$

onde F é a F.D. de S .

Chamaremos $Y = R - S \Rightarrow (4.11)$ de v.a. interferência.

Então

$$C = P(Y > 0) \quad \Rightarrow (4.12)$$

Se R e S são v.a.i. maiores ou iguais a zero então a f.d. de Y será:

$$h(y) = \begin{cases} \int_0^{\infty} g(y+s)f(s)ds & \text{para } y \geq 0 \\ \int_{-y}^{\infty} g(y+s)f(s)ds & \text{para } y < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow (4.13)$$

Dessa forma a precariedade é dada por:

$$C' = \int_{-\infty}^0 h(y)dy = \int_{-\infty}^0 \int_{-y}^{\infty} g(y+s)f(s)dsdy \quad \Rightarrow (4.14)$$

A expressão para a confiabilidade é:

$$C = \int_0^{\infty} h(y)dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(y+s)f(s)dsdy \quad \Rightarrow (4.15)$$

★ EXEMPLO 4.1 - Cálculo da confiabilidade para a tensão distribuída normalmente e a resistência do material segundo a Weibull.

Em vista da (1.1) a f.d. da Weibull triparamétrica (extremamente flexível e que pode assumir uma grande variedade de formas) é

$$g(r) = \frac{\beta}{(\theta_1 - r_0)^\beta} (r - r_0)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{r - r_0}{\theta_1 - r_0} \right)^\beta \right] \quad \Rightarrow (4.16)$$

para $r \geq r_0 > 0$

A f.d. de S (segundo a normal) tem a forma:

$$f(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(s-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2} \right] \quad \Rightarrow (4.17)$$

para $-\infty < s < \infty$ e onde μ_s e σ_s são respectivamente a média e o desvio padrão de S.

Entrando na (4.9) e após uma considerável quantidade de operações algébricas pode-se chegar a expressão

$$C' = P(R \leq S) = 1 - N\left(\frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s}\right) \int_0^\infty \exp\left\{-t^\beta - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s}\right)t + \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s}\right]^2\right\} dt \quad \Rightarrow (4.18)$$

Na (4.18) note-se que os parâmetros são

$$\beta, B = \frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s}, A = \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s},$$

que $N\left(\frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s}\right)$ é a F.D. da normal $f(s)$ e que $t = \frac{s - r_0}{\theta_1 - r_0}$.

Através dos métodos de integração numérica pode-se obter a (4.18).

Suponhamos que se tem uma mola que foi projetada de tal forma que a precariedade seja 10^{-4} .

O material de que é feita a mola tem uma resistência que segue a Weibull triparamétrica com os parâmetros

$$\begin{cases} r_0 = 100000 \frac{\text{libras}}{(\text{polegadas})^2} = 100000 \text{ psi} \\ \beta = 3 \\ \theta_1 = 130000 \text{ psi} \end{cases}$$

Suponhamos ainda que a carga agindo sobre a mola tem distribuição normal com $(C.V.)_s = \frac{\sigma_s}{\mu_s} = 0,02$.

É possível com esses dados e com o auxílio da Tab. 4.1 obter os parâmetros da tensão normal permissíveis que produzem a confiabilidade especificada.

Representemos os parâmetros por

$$\begin{cases} A = \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s} = \frac{100000 - 50\sigma_s}{\sigma_s} \\ B = \frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s} = \frac{130000 - 100000}{\sigma_s} = \frac{30000}{\sigma_s} \end{cases}$$

Portanto $B = 0,3A + 15$

Da Tab. 4.1 vê-se que quando $A = 0,6$ e $B = 15$ a probabilidade de falha (precariedade) é exatamente 0,0001.

O valor exato de B para $A = 0,6$ é:

$$B = 0,3 \cdot 0,6 + 15 = \underline{15,18}$$

produzindo

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{30000}{15,18} \approx \boxed{1,970 \text{ psi}} \\ \mu_s = \frac{\sigma_s}{0,02} = \boxed{98500 \text{ psi}} \end{array} \right.$$

Pode também ocorrer o caso inverso quando conhecemos μ_s e σ_s (por exemplo $\mu_s=100000\text{kPa}$ e $\sigma_s=10000\text{kPa}$ onde

$1\text{kPa} = 10^3 \frac{\text{Newtons}}{\text{m}^2}$ e Pa é a abreviatura de Pascal) e β e θ_1 (por exemplo $\beta=2,0$ e $\theta_1=550000\text{kPa}$).

Fixando-se um valor para a precariedade pode-se achar o parâmetro da resistência mínima r_0 .

Suponhamos que a precariedade deve ser 0,0002, então

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s} = \frac{550000 - r_0}{10000} \\ A = \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s} = \frac{r_0 - 100000}{10000} \end{array} \right. \longrightarrow \boxed{A = 45 - B}$$

A Tab.4.1 mostra que para $B = 45$ e $A = 0$ obtemos a probabilidade de falha requerida de 0,0002.

Igualando A a zero temos:

$$\boxed{r_0 = 100000 \text{ kPa}}$$

A \ B	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
.8	.0011	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000
.6	.0017	.0008	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
.4	.0025	.0011	.0007	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
.2	.0035	.0016	.0009	.0007	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
.0	.0049	.0022	.0012	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0002
-.2	.0067	.0030	.0017	.0011	.0008	.0006	.0004	.0003	.0003	.0002
-.4	.0089	.0040	.0023	.0014	.0010	.0007	.0006	.0004	.0004	.0003
-.6	.0116	.0052	.0030	.0019	.0013	.0010	.0007	.0006	.0005	.0004
-.8	.0149	.0067	.0038	.0024	.0017	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005
-1.0	.0188	.0085	.0048	.0031	.0021	.0016	.0012	.0009	.0008	.0006
-1.4	.0284	.0128	.0073	.0047	.0032	.0024	.0018	.0014	.0012	.0010
-1.8	.0407	.0185	.0105	.0067	.0047	.0034	.0026	.0021	.0017	.0014
-2.2	.0557	.0254	.0144	.0093	.0065	.0047	.0036	.0029	.0023	.0019
-2.6	.0733	.0336	.0191	.0123	.0086	.0063	.0048	.0038	.0031	.0026
-3.0	.0935	.0431	.0246	.0158	.0110	.0081	.0062	.0049	.0040	.0033
-3.4	.1159	.0538	.0308	.0198	.0138	.0102	.0078	.0062	.0050	.0041
-3.8	.1406	.0658	.0377	.0243	.0170	.0125	.0096	.0076	.0062	.0051
-4.2	.1671	.0789	.0453	.0293	.0205	.0151	.0116	.0092	.0074	.0061
-4.6	.1954	.0930	.0536	.0347	.0243	.0179	.0137	.0109	.0088	.0073
-5.0	.2251	.1082	.0626	.0406	.0284	.0210	.0161	.0127	.0103	.0086
-5.5	.2640	.1286	.0748	.0486	.0341	.0251	.0193	.0153	.0124	.0103
-6.0	.3043	.1504	.0879	.0573	.0402	.0297	.0228	.0181	.0147	.0121
-6.5	.3457	.1735	.1020	.0667	.0468	.0346	.0266	.0211	.0171	.0142
-7.0	.3876	.1977	.1170	.0767	.0539	.0399	.0307	.0244	.0198	.0164
-8.0	.4713	.2490	.1493	.0985	.0695	.0516	.0398	.0316	.0256	.0212
-9.0	.5525	.3032	.1845	.1226	.0869	.0646	.0499	.0396	.0322	.0267
-10.0	.6285	.3591	.2222	.1488	.1059	.0790	.0611	.0486	.0396	.0328

$$\beta = 2.00$$

$$A = \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s}$$

$$B = \frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s}$$

Tab. 4.1 - Tabela da precariedade C' para o caso de R com Weibull tri-paramétrica e S com distribuição normal

A \ B	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
.8	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.6	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.4	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.2	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0	.0008	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-.2	.0011	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-.4	.0016	.0005	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-.6	.0022	.0007	.0003	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
-.8	.0030	.0009	.0004	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
-1.0	.0041	.0012	.0005	.0003	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
-1.4	.0069	.0021	.0009	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000
-1.8	.0111	.0033	.0014	.0007	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001
-2.2	.0169	.0051	.0022	.0011	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001
-2.6	.0247	.0075	.0032	.0016	.0009	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002
-3.0	.0349	.0106	.0045	.0023	.0013	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002
-3.4	.0475	.0145	.0062	.0032	.0018	.0012	.0008	.0005	.0004	.0003
-3.8	.0630	.0193	.0082	.0042	.0024	.0015	.0010	.0007	.0005	.0004
-4.2	.0815	.0252	.0108	.0055	.0032	.0020	.0014	.0010	.0007	.0005
-4.6	.1031	.0322	.0138	.0071	.0041	.0026	.0017	.0012	.0009	.0007
-5.0	.1279	.0404	.0173	.0089	.0052	.0033	.0022	.0015	.0011	.0008
-5.5	.1634	.0524	.0225	.0116	.0067	.0043	.0029	.0020	.0015	.0011
-6.0	.2037	.0665	.0287	.0148	.0086	.0054	.0036	.0025	.0019	.0014
-6.5	.2485	.0828	.0360	.0186	.0108	.0068	.0046	.0032	.0023	.0018
-7.0	.2973	.1013	.0443	.0230	.0134	.0084	.0057	.0040	.0029	.0022
-8.0	.4039	.1454	.0645	.0336	.0196	.0124	.0083	.0059	.0043	.0032
-9.0	.5165	.1985	.0897	.0471	.0276	.0175	.0117	.0083	.0060	.0045
-10.0	.6269	.2600	.1202	.0636	.0374	.0237	.0160	.0112	.0082	.0062

$$\beta = 3$$

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

0 ponto representa a vírgula decimal

★EXEMPLO 4.2 - Cálculo de confiabilidade para o caso em que resistência e tensão estão distribuídas segundo a Weibull triparamétrica.

Sejam agora $f(s)$ e $g(r)$ as f.d. de S e R com a forma

$$f(s) = \frac{\beta_s}{\theta_s} \left(\frac{s-s_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s-1} \exp \left[- \left(\frac{s-s_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] \quad \Rightarrow (4.19)$$

para $s_0 \leq s < \infty$

$$g(r) = \frac{\beta_r}{\theta_r} \left(\frac{r-r_0}{\theta_r} \right)^{\beta_r-1} \exp \left[- \left(\frac{r-r_0}{\theta_r} \right)^{\beta_r} \right] \quad \Rightarrow (4.20)$$

para $r_0 \leq r < \infty$

(é óbvio que $f(s)$ e $g(r)$ são nulas para outros valores de s e r respectivamente).

Da (4.10) vem após algumas operações

$$C' = P(R \leq S) = \int_0^\infty e^{-t} \exp \left\{ - \left[\frac{\theta_r}{\theta_s} t^{\frac{1}{\beta_r}} + \frac{r_0-s_0}{\theta_s} \right]^{\beta_s} \right\} dt \quad \Rightarrow (4.21)$$

Na (4.21)

$$t = \left(\frac{r-r_0}{\theta_r} \right)^{\beta_r}$$

Os valores da integral (4.21) foram calculados por Lipson, Sheth e Disney [59] e [60] em 1967 e 1969, Brown e Rutemiller [6] apresentam inclusive um programa em FORTRAN IV.

★EXEMPLO 4.3 - A resistência distribuída segundo Weibull triparamétrica e a tensão tendo a distribuição do menor valor extremo do tipo III cuja F.D. é

$$F(s) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{s - \delta_s}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right]$$

para $\delta_s \leq s < \infty$, $\theta_s > 0$, $\beta_s > 0$.

A partir da (4.4) ou (4.7) pode-se chegar a expressão da confiabilidade

$$C = \int_0^{\infty} e^{-t} \exp \left[- \left(\frac{\delta_s - \theta_s \ln t - r_0}{\theta_r} \right)^{\beta_r} \right] dt \quad \Rightarrow (4.22)$$

★EXEMPLO 4.4 - A resistência tendo a distribuição do menor valor extremo do tipo I com F.D.

$$G(r) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{r - \delta_r}{\theta_r} \right) \right]$$

para $-\infty < r < \infty$, $\theta_r > 0$

e a tensão com a Weibull triparamétrica dada pela (4.16).

Então a expressão para a confiabilidade é

$$C = \int_0^{\infty} e^{-t} \exp \left[- \exp \frac{\theta_s}{\theta_r} \left(t^{1/\beta_s} - \frac{\delta_r - s_0}{\theta_s} \right) \right] dt \quad \Rightarrow (4.23)$$

sendo que na (4.23)

$$t = \left(\frac{s - s_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s}$$

★EXEMPLO 4.5 - A resistência tendo a distribuição do maior valor extremo do tipo I e a tensão tendo a distribuição de Weibull triparamétrica.

Se a F.D. do maior valor extremo do tipo I tiver a forma

$$G(r) = \exp\{-\exp[-(\frac{r-\delta_r}{\theta_r})]\}$$

para $-\infty < r < \infty$, $\theta_r > 0$

então a expressão para a confiabilidade é:

$$C = 1 - \int_0^\infty \exp\{-t + [\frac{\theta_r}{\theta_s} \ln t - \frac{\delta_r - s_0}{\theta_s}]^{\beta_s}\} dt \quad \rightarrow (4.24)$$

Na (4.24)

$$t = \exp\left[-(\frac{r-\delta_r}{\theta_r})\right]$$

★EXEMPLO 4.6 - A resistência tendo a distribuição de Weibull triparamétrica e a tensão S com a distribuição do maior valor extremo do tipo I cuja F.D. é

$$F(s) = \exp\left\{-\exp\left[-(\frac{s-\delta_s}{\theta_s})\right]\right\}$$

para $-\infty < s < \infty$, $\theta_s > 0$

Então a expressão para a confiabilidade é:

$$C = \int_0^\infty \exp\{-t - \exp[-(\frac{\theta_r}{\theta_s} t^{1/\beta_r} + \frac{r_0 - \delta_s}{\theta_s})]\} dt \quad \rightarrow (4.25)$$

A (4.25) é calculada através de processos de integração numérica e os detalhes estão na dissertação para obtenção de doutorado de Taraman [91].

Um trecho da tabela que dá a (4.25) está na Tab 4.2 onde $\beta_r = 2,0$ e $t = \left(\frac{r - r_0}{\theta_r} \right)^{\beta_r}$

B \ A	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25
-1.50	0.178603	0.246742	0.315060	0.380320	0.440771	0.495690	0.544978	0.588889	0.627850	0.662353
-1.00	0.328603	0.400397	0.466387	0.525570	0.577873	0.623713	0.663717	0.698572	0.728948	0.755456
-0.50	0.495244	0.558153	0.612944	0.660169	0.700669	0.735350	0.765068	0.790585	0.812561	0.831552
0.00	0.645980	0.694329	0.735081	0.769356	0.798207	0.822555	0.843179	0.860725	0.875722	0.888602
0.50	0.764035	0.798071	0.826195	0.849499	0.868891	0.885110	0.898752	0.910290	0.920106	0.928503
1.00	0.848077	0.870719	0.889205	0.904385	0.916929	0.927363	0.936100	0.943464	0.949711	0.955042
1.50	0.904361	0.918896	0.930678	0.940300	0.948217	0.954781	0.960262	0.964873	0.968776	0.972102
2.00	0.940039	0.949767	0.957133	0.963129	0.968050	0.972121	0.975516	0.978367	0.980778	0.982831
2.50	0.963476	0.969131	0.973682	0.977379	0.980409	0.982912	0.984997	0.986747	0.988227	0.989485
3.00	0.977644	0.981119	0.983911	0.936176	0.988030	0.989561	0.990836	0.991905	0.992808	0.993577
3.50	0.986357	0.983481	0.990186	0.991568	0.992699	0.993632	0.994409	0.995061	0.995611	0.996079
4.00	0.991686	0.992980	0.994019	0.994560	0.995548	0.996116	0.996589	0.996985	0.997320	0.997604
4.50	0.994935	0.995722	0.996353	0.996865	0.997283	0.997628	0.997915	0.998156	0.998359	0.998532
5.00	0.996911	0.997389	0.997773	0.998084	0.998338	0.998547	0.998722	0.998868	0.998991	0.999096
5.50	0.998112	0.998403	0.998635	0.998824	0.998978	0.999105	0.999211	0.999300	0.999375	0.999438
6.00	0.998841	0.999018	0.999159	0.999273	0.999367	0.999444	0.999508	0.999562	0.999608	0.999646
6.50	0.999234	0.999393	0.999477	0.999546	0.999603	0.999650	0.999689	0.999721	0.999749	0.999772
7.00	0.999553	0.999617	0.999669	0.999712	0.999746	0.999774	0.999798	0.999818	0.999835	0.999849
7.50	0.999716	0.999755	0.999786	0.999812	0.999833	0.999850	0.999864	0.999876	0.999887	0.999895
8.00	0.999814	0.999838	0.999857	0.999873	0.999886	0.999896	0.999905	0.999912	0.999918	0.999923

Fonte: Kapur e Lamberson [49]

o ponto representa a vírgula decimal

Tab. 4.2 - Confiabilidade quando a tensão S é distribuída com o maior valor extremo do tipo I e a resistência R tem distribuição de Weibull triparamétrica sendo

$$A = \frac{\theta_r}{\theta_s} \text{ e } B = \frac{r_0 - \delta_s}{\theta_s}$$

Análise semelhante a essa na obtenção da confiabilidade tem merecido muita atenção e as dificuldades da integração numérica tem sido superadas com o uso dos computadores.

Existem assim outras combinações para as distribuições de R e S e entre elas podemos citar a normal, a lognormal, a gama, as de valor extremo (maior ou menor valor) gerando as mais diversas expressões para a confiabilidade.

4.2 - FATOR DE SEGURANÇA

Chamaremos de fator de segurança F a razão

$$F = \frac{R}{S} \quad \Rightarrow (4.26)$$

Trataremos o fator de segurança F como uma v.a.

Sejam ainda μ_f , μ_r e μ_s os valores médios de F, R e S respectivamente e σ_f , σ_r e σ_s os respectivos desvios padrões.

Então da desigualdade de Bienaymé- Chebyshev temos

$$P(|F-a| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{E\{(F-a)\}^2}{\epsilon^2} \quad \Rightarrow (4.27a)$$

Fazendo $a=k\mu_f$ e $a-\epsilon=1$ pode-se obter a expressão

$$P(1 \leq F \leq 2k\mu_f - 1) \geq 1 - \frac{\mu_f^2 [(C.V.)_f^2 + (1-k)^2]}{(k\mu_f - 1)^2} \quad \Rightarrow (4.27b)$$

onde

$$(C.V.)_f = \frac{\sigma_f}{\mu_f}$$

Em vista da definição de confiabilidade (4.1) temos

$$C = P(F \geq 1) \quad \rightarrow (4.28)$$

Da (4.27b) e (4.28) vem:

$$C \geq 1 - \frac{\mu_f^2 [(C.V.)_f^2 + (1-k)^2]}{(k\mu_f - 1)^2} \quad \rightarrow (4.29)$$

A (4.29) dá assim o extremo inferior da confiabilidade.

O maior extremo inferior é obtido se minimizarmos:

$$\omega = \frac{\mu_f^2 [(C.V.)_f^2 + (1-k)^2]}{(k\mu_f - 1)^2} \quad \rightarrow (4.30)$$

em relação a k.

Temos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{-2\mu_f^3 [(C.V.)_f^2 + (1-k)^2]}{(k\mu_f - 1)^3} + \frac{-2\mu_f^2 (1-k)}{(k\mu_f - 1)^2} = 0$$

donde o valor crítico é

$$k^* = \frac{\mu_f [(C.V.)_f^2 + 1] - 1}{\mu_f - 1} \quad \Rightarrow (4.31)$$

A $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ calculada nesse ponto k^* é sempre positiva o que garante que k^* minimize ω .

De (4.29) e (4.31) temos:

$$C \geq 1 - \frac{\mu_f^2 (C.V.)_f^2}{\mu_f^2 (C.V.)_f^2 + (\mu_f - 1)^2} \quad \Rightarrow (4.32)$$

sendo esse o maior extremo inferior para a confiabilidade.

Da (4.32) pode-se também obter

$$\mu_f \geq \frac{1}{1 - (C.V.)_f \sqrt{\frac{C}{1-C}}} \quad \Rightarrow (4.33)$$

As equações (4.32) e (4.33) representam as relações desejadas entre a média do fator de segurança, o coeficiente de variação do fator de segurança e a confiabilidade.

A (4.33) dá o extremo inferior em μ_f que assegurará a probabilidade de achar F tal que o membro da esquerda, da (4.27b) seja C .

Uma outra forma para se obter esses extremos é através da utilização da série de Taylor.

Dessa forma de (4.26) vem:

$$\mu_f \cong \frac{\mu_r}{\mu_s} + \frac{\mu_r}{\mu_s^3} \sigma_s^2 \quad \Rightarrow (4.34)$$

Na obtenção da (4.34) considerou-se apenas os dois primeiros termos da expansão em série de Taylor.

Se representarmos $\frac{\mu_r}{\mu_s}$ por f_c que chamaremos de fator de segurança central da (4.34) vem:

$$\mu_f \cong f_c [1 + (C.V.)_s^2] \quad \Rightarrow (4.35)$$

Por outro lado

$$E(F^2) = E\left[\frac{R^2}{S^2}\right] \cong E(R^2) \left[\frac{1}{\mu_s^2} + 3 \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^4} \right]$$

ou

$$\sigma_f^2 + \mu_f^2 \cong (\sigma_r^2 + \mu_r^2) \left[\frac{1}{\mu_s^2} + 3 \frac{\sigma_s^2}{\mu_s^4} \right] \quad \Rightarrow (4.36)$$

De (4.35) e (4.36) temos:

$$(C.V.)_f \cong \frac{\{[1 + (C.V.)_r^2][1 + 3(C.V.)_s^2] - [1 + (C.V.)_s^2]^2\}^{1/2}}{1 + (C.V.)_s^2} \quad \Rightarrow (4.37)$$

De (4.28), (4.29), (4.37) e executando a derivação como fizemos anteriormente chega-se a expressão:

$$C \geq 1 - \frac{f_c^2 \{ [1 + (C.V.)_r^2] [1 + 3(C.V.)_s^2] + k^* (k^* - 2) [1 + (C.V.)_s^2]^2 \}}{\{ k^* f_c [1 + (C.V.)_s^2] - 1 \}^2} \quad \rightarrow (4.38)$$

onde

$$k^* = \frac{f_c^2 [1 + (C.V.)_r^2] [1 + 3(C.V.)_s^2] [1 + (C.V.)_s^2]^{-1} - 1}{f_c [1 + (C.V.)_s^2] - 1}$$

A (4.38) dá o extremo inferior da confiabilidade em termos do fator de segurança central f_c e dos coeficientes de variação da resistência R e da tensão S , respectivamente $(C.V.)_r$ e $(C.V.)_s$.

As equações (4.32), (4.33) e (4.37) podem ser combinadas e obtém-se

$$f_c \geq \frac{1}{1 + (C.V.)_s^2 - \{ [1 + (C.V.)_r^2] [1 + 3(C.V.)_s^2] - [1 + (C.V.)_s^2] \}^{1/2} \sqrt{\frac{C}{1-C}}} \quad \rightarrow (4.39)$$

Desprezando os termos de ordem três ou superior em $(C.V.)_r$ e $(C.V.)_s$ da (4.39) vem:

$$f_c \geq \frac{1}{1 + (C.V.)_s^2 - \left[(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2 \right]^{1/2} \sqrt{\frac{C}{1-C}}} \quad \rightarrow (4.40)$$

A (4.40) fornece o menor valor para o fator de segurança central com probabilidade de ao menos C de achar o atual fator de segurança no intervalo

$$1 \leq F \leq 2k^* f_c [1 + (C.V.)_s^2] - 1$$

Uma outra forma de obter a (4.40) é aplicar a fórmula de Taylor diretamente a (4.26) e obter

$$\sigma_f^2 \cong \frac{\sigma_r^2 \mu_s^2 + \sigma_s^2 \mu_r^2}{\mu_s^4} \quad \rightarrow (4.41)$$

Daí

$$(C.V.)_f = \frac{\sigma_f}{\mu_f} \cong \frac{[(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2]^{1/2}}{1 + (C.V.)_s^2} \quad \rightarrow (4.42)$$

O k^* que dá o maior extremo inferior da (4.29) é dado pela (4.31) e assim substituindo a (4.35) e a (4.42) na (4.31) vem:

$$k^* = \frac{f_c [(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2]}{[1 + (C.V.)_s^2] \{f_c [1 + (C.V.)_s^2] - 1\}} + 1 \quad \downarrow (4.43)$$

Substituindo na (4.29) os valores de μ_f , $(C.V.)_f$ e k^* dados pelas equações (4.35), (4.42) e (4.43) respectiva-

mente temos:

$$C \geq 1 - \frac{f_c^2 [(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2]}{f_c^2 [(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2] + \{f_c [1 + (C.V.)_s^2] - 1\}^2} \quad (4.44)$$

A (4.44) dá o extremo inferior em C dados $f_c, (C.V.)_s$ e $(C.V.)_r$.

Se utilizarmos a (4.33) teremos:

$$f_c \geq \frac{1}{1 + (C.V.)_s^2 - [(C.V.)_s^2 + (C.V.)_r^2]^{1/2} \sqrt{\frac{C}{1-C}}}$$

que é a própria (4.40).

Deve-se observar que a (4.32) e (4.33) nos dão os extremos exatos enquanto que a (4.38) e (4.39) nos dão os extremos aproximados, isto em vista do fato de que substituímos μ_f e $(C.V.)_f$ pelos seus valores aproximados dados pela série de Taylor.

Baseando-se nas equações (4.33), (4.39), (4.40) e (4.44) normalmente constroem-se nomogramas que podem ser usados pelo engenheiro para estimar a confiabilidade de um certo projeto e estudar o fator de segurança e a variabilidade das v.a. resistência e tensão.

★EXEMPLO 4.7 - A resistência de um componente tem distribuição de Weibull com os parâmetros

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_0 = 54 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} & (\text{resistência mínima do componente}) \\ \beta = 2 & (\text{parâmetro de forma}) \\ \theta_1 = 72 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} & (\text{parâmetro de escala}) \end{array} \right.$$

A tensão agindo no componente segue lei normal com média $\mu_s = 54 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$ e desvio padrão $\sigma_s = 1,8 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$

$$\text{Dessa forma } (C.V.)_s = \frac{1,8}{54} \approx 0,03333 \dots$$

Vamos calcular f_c e C .

Inicialmente calculemos μ_r e σ_r .

Da (1.13) e da (1.10) temos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_r = 54 \cdot 10^6 + (72 - 54) \cdot 10^6 \Gamma(1 + \frac{1}{2}) & \approx \boxed{69,95 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \\ \sigma_r^2 = (18 \cdot 10^6)^2 [\Gamma(\frac{2}{2} + 1) - \Gamma^2(\frac{1}{2} + 1)] & \approx \boxed{69,53 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \end{array} \right.$$

Portanto

$$(C.V.)_r = \frac{\sqrt{69,53}}{69,95} \approx \boxed{0,119}$$

Portanto

$$f_c = \frac{\mu_r}{\mu_s} = \frac{69,95}{54} \approx \boxed{1,295}$$

Da (4.44) temos:

$$C \geq 1 - \frac{1,295^2 (0,119^2 + 0,033^2)}{1,295^2 (0,119^2 + 0,033^2) + [1,295(1 + 0,033^2) - 1]^2} = \boxed{0,774}$$

Podemos entretanto, em vista dos resultados do Exemplo 4.1 obter a confiabilidade exata.

Temos

$$\begin{cases} A = \frac{r_0 - \mu_s}{\sigma_s} = \frac{54 - 54}{1,8} = 0 \\ B = \frac{\theta_1 - r_0}{\sigma_s} = \frac{72 - 54}{1,8} = 10 \end{cases}$$

Lê-se diretamente da Tab. 4.1 a precariedade

$$\boxed{C' = 0,0049}$$

Portanto temos a confiabilidade

$$C = 1 - C' = \boxed{0,9951}$$

4.3 - PRODUÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA A PARTIR DA VELOCIDADE DO VENTO.

Os geradores elétricos baseados no vento já foram sugeridos algumas dezenas de anos atrás.

O maior construído estava operando em Vermont, EUA. e foi construído em 1941.

Quebrou e não foi arrumado pois os custos do petróleo e do carvão eram baixos.

Agora a coisa está mudando...

É bastante desejável a análise de sistemas elétricos eólicos (S.E.E.).

No Brasil por exemplo na Universidade Federal da Paraíba está se construindo o inversor para o catavento e o Laboratório de Energia Eólica está em fase bem adiantada.

Analisaremos a viabilidade do desenvolvimento do S.E.E.

Potência do vento em watts é dada por:

$$P_w = \frac{1}{2} \rho A V^3 \quad \rightarrow (4.45)$$

Na (4.45)

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ é a velocidade do vento em } \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ A \text{ é a área exposta em } \text{m}^2 \\ \rho \text{ é a massa específica do ar em } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array} \right.$$

A massa específica é uma função da pressão, temperatura e da umidade relativa através da expressão.

$$\rho = \frac{1,2929 (P_r - P_v)}{760} \cdot \frac{273}{T} \quad \Rightarrow (4.46)$$

Na (4.46) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_r = \text{pressão em mm de mercúrio (H}_g\text{)} \\ P_v = \text{pressão do vapor de água} \\ T = \text{temperatura em graus Kelvin (}^0\text{K)} \end{array} \right.$$

A potência do vento é convertida em potência mecânica com uma eficiência C_p a qual é transmitida a um gerador através de uma transmissão mecânica com eficiência η_m a qual é convertida em eletricidade com eficiência η_g .

A saída elétrica é então:

$$P_e = C_p \eta_m \eta_g P_w \quad \Rightarrow (4.47)$$

Os valores ótimos para as eficiências que a parecem em (4.47) são:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = 0,4 \\ \eta_m = 0,9 \\ \eta_g = 0,9 \end{array} \right.$$

o que dá uma eficiência global de 32%.

Entretanto os valores experimentais atuais provavelmente não são maiores que 25 a 30%.

Isso irá variar com a velocidade do vento, como o tipo de turbina do vento e com a natureza da carga.

Para um dado sistema, P_w e P_e variam com a velocidade do vento como está mostrado na Fig. 4.2.

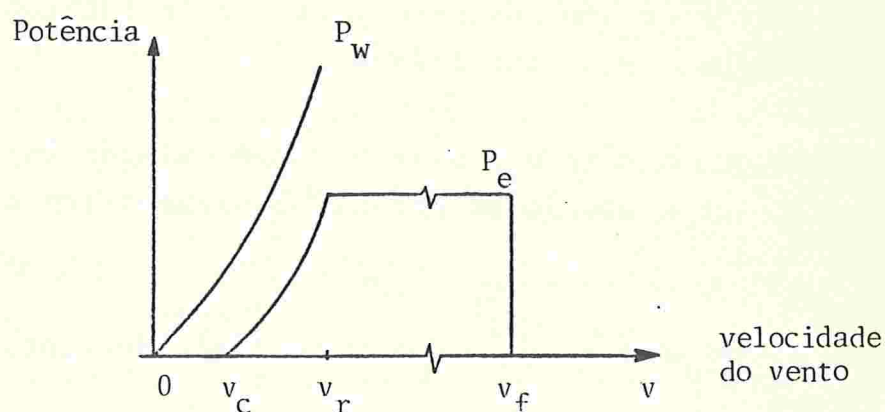


Fig. 4.2

Na Fig. 4.2 v_c é a velocidade que permite começar o fornecimento de eletricidade, v_r é a velocidade em que pode se atingir uma potência de saída constante e v_f é a velocidade final na qual a máquina é fechada para protegê-la do vento.

Assim a medida que a velocidade do vento aumenta de um valor baixo, a turbina, está apta a "conquistar" e sobrepujar as perdas mecânicas e elétricas.

4.3.1 - ESTATÍSTICA DO VENTO

O vento é uma fonte de potência altamente variável e existem vários métodos de caracterização dessa variabilidade.

Talvez o mais comum, seja através da curva da duração da potência.

Esse é um bom conceito porém não é fácil escolher, v_c e v_r para uma dada localidade.

Um outro método é usar a representação estatística e em particular o modelo de Weibull biparamétrico dado pela (1.3) ou (1.4).

Assim adotaremos que a velocidade do vento segue a Weibull com f.d.

$$f(v) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{v}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{v}{\theta}\right)^{\beta}\right] \quad \rightarrow (4.48)$$

O parâmetro de forma β em experimentos levados a efeito nos Estados Unidos posicionou-se entre 1,3 e 3.

Assim em vista da (1.9) pode-se achar que

$$1,11\mu_v \leq \theta \leq 1,13 \mu_v \quad \rightarrow (4.49)$$

Dessa forma o parâmetro de escala θ é diretamente proporcional a velocidade média do vento e é uns 12% maior que esse valor.

Existem, como se discutiu no capítulo 2 várias formas para estimar os valores de β e θ a partir de resultados amostrais.

Uma vez que o vento é descrito por uma distribuição de probabilidades, um projeto de um gerador elétrico eólico precisa também ser acompanhado de técnicas analíticas.

Potência de saída média, fator de carga, etc precisam e podem ser previstas analiticamente.

4.3.2 - FATOR DE ENERGIA DO VENTO

A potência média do vento é dada por:

$$\mu_w = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\infty} v^3 f(v) dv \quad \rightarrow (4.50)$$

em watts

A (4.50) pode também ser colocada na forma:

$$\mu_w = \frac{1}{2} \rho A \theta^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right) \quad \rightarrow (4.51)$$

A potência elétrica média gerada é

$$\mu_e = \frac{1}{2} \rho A \int_{v_c}^{v_r} C_p \eta_m \eta_g v^3 f(v) dv + \frac{1}{2} \rho A C_p \eta_m \eta_g v_r^3 \int_{v_r}^{\infty} f(v) dv \quad \rightarrow (4.52)$$

A variação de C_p , η_m e η_g com V deveria ser incluída para estudos econômicos detalhados para específicas turbinas de vento em localizações onde $f(v)$ é bem conhecida.

Normalmente $f(v)$ não é conhecida de forma adequada e assim para se obter resultados razoáveis atribui-se valores médios as eficiências e leva-se as mesmas para fora da integral (4.52).

Dessa forma a potência elétrica média pode ser escrita como:

$$\mu_e = k_g [S_1 + S_2] \quad \rightarrow (4.53)$$

Na (4.53) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \int_{v_c}^{v_r} v^3 f(v) dv \quad (\text{obtida através da integração numérica}). \\ S_2 = v_r^3 \int_{v_r}^{\infty} f(v) dv = \theta^3 \left(\frac{v_r}{\theta} \right)^3 \exp \left[- \left(\frac{v_r}{\theta} \right)^\beta \right] \\ k_g = \frac{1}{2} \rho A C_p \eta_m \eta_g \end{array} \right.$$

Definiremos como fator de energia do vento (F.E.V.) a grandeza

$$f_v = \frac{S_1 + S_2}{\theta^3} \quad \rightarrow (4.54)$$

Pode-se escolher v_r ou $\frac{v_r}{\theta}$ para maximizar o F.E.V.o que permitirá que o S.E.E. produza o máximo de energia por unidade de área do rotor.

O rotor e a torre representam ao menos 80% do custo total do sistema de forma que o máximo de energia por unidade de área corresponderá bem perto ao custo mínimo por kWh.

Na Fig. 4.3 temos os gráficos para o F.E.V. para os vários valores de β e $v_c = 0,5 v_r$.

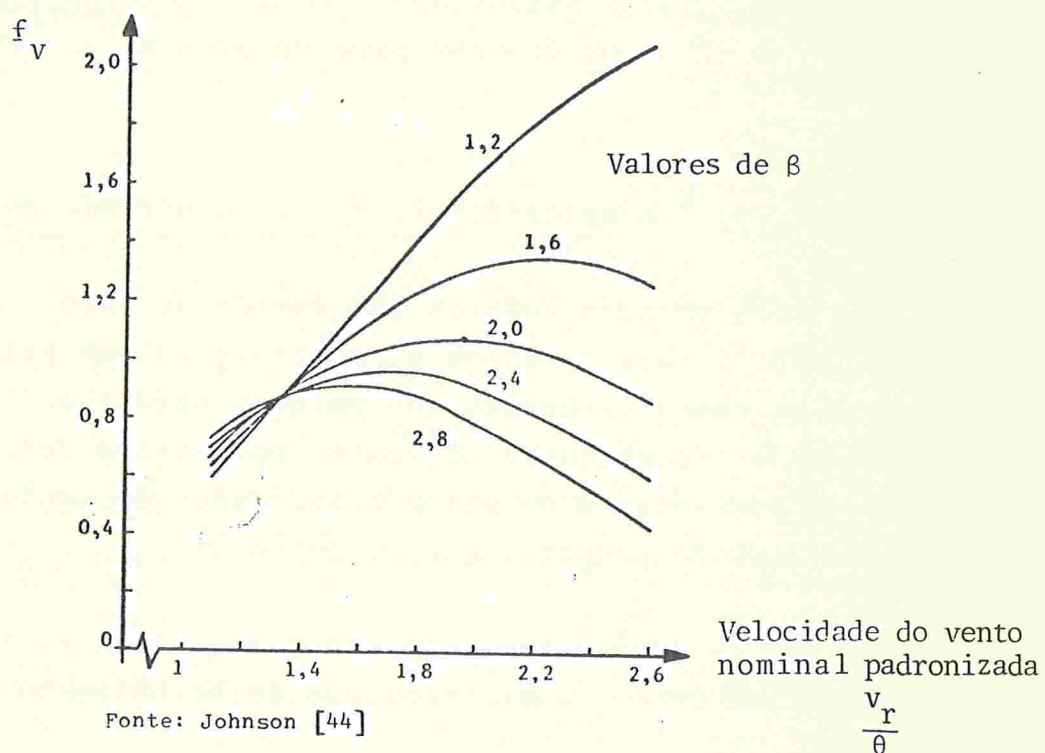


Fig. 4.3 - Gráfico para F.E.V. quando $v_c = 0,5 v_r$

Assim se temos um local onde $\beta=2,8$, a energia produzida por unidade de área é maximizada se $\frac{v_r}{\theta} = 1,5$ ou $v_r = 1,5\theta$.

Como $\theta \approx 1,12v$, a velocidade do vento nominal (rated wind speed) será 1,7 vezes a velocidade média do vento.

As curvas variam bem pouco com $\frac{v_r}{\theta}$ de forma que para $\beta \geq 2$, não existe uma grande diferença da saída de energia para velocidades do vento entre 1,3 θ e 1,9 θ .

Isso torna o problema de planejar bem simples.

Para valores baixos de β , F.E.V. é significativamente maior e os picos ocorrem para valores mais altos de $\frac{v_r}{\theta}$.

Se $\beta=1,2$ o maior F.E.V. é 2,27 ocorrendo em $\frac{v_r}{\theta}=3,4$

Esses grandes valores são devido ao fato de que grandes valores para β tendem a reunir-se em uma faixa relativamente estreita, enquanto que valores baixos de β tendem a dispersar as velocidades do vento, permitindo dessa forma uma grande percentagem de altas velocidades do vento que tem uma quantidade desproporcional de potência.

Não se deve entretanto esperar que com ventos de velocidade acima de $\frac{v}{\theta}=2$ a distribuição de Weibull descreva bem o fenômeno.

Dessa forma projetos envolvendo uma velocidade de vento acima de 2 θ devem ser analisados com muito cuidado.

Abaixando o v_c para $0,4 v_r$ teremos um efeito relativamente pequeno sobre as curvas da Fig. 4.3.

Isto aumenta o F.E.V. em tórno de 8% e desloca o pico levemente para a direita e a mesma filosofia de projeto, continua podendo ser aplicada.

4.3.3 - FATOR DE CARGA (F.C.)

Existem ao menos duas restrições no projeto de uma turbina de vento.

Uma é a maximização da potência média de saída.

A outra é encontrar a necessária exigência para o F.C.

Define-se o F.C. como

$$f_c = \frac{\mu_e}{\mu_{e, \text{ nominal}}} = \frac{S_1 + S_2}{v_r^3} \quad \rightarrow (4.55)$$

onde S_1 e S_2 são aquelas da (4.53).

Na Fig. 4.4 está o gráfico de f_c em função de $\frac{v_r}{\theta}$

A medida que cresce a velocidade nominal do vento aumenta a potência média, porém não tão rapidamente como a potência nominal.

Dessa forma o F.C. diminui de 0,5 até 0,2 ou menos quando $\frac{v_r}{\theta}$ crescer de 1 até 1,8 ou mais.

O F.C. tem uma grande importância se o gerador es-

tá sendo usado por exemplo para a irrigação e de uma forma assíncrona.

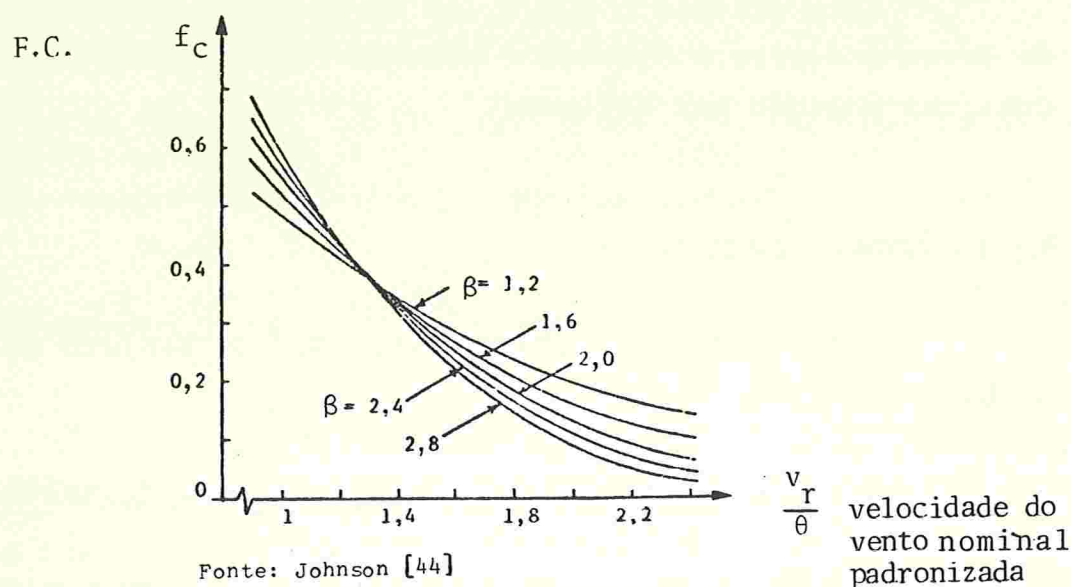


Fig. 4.4

F.C. em relação a $\frac{v_r}{\theta}$ onde $v_c = 0,5v_r$

Na prática, em irrigação, o F.C. mínimo é da ordem de 0,6 o que implica em uma penalidade substancial na energia em vista de ter que operar com $\frac{v_r}{\theta} < 1$.

★EXEMPLO 4.8 - Na Tab. 4.3 temos alguns dados do estado de Kansas - Estados Unidos tirados do trabalho de Johnson [44]

Note-se que apenas algumas leituras por ano foram acima de 40 nós (20,6 m/s) de forma que somente velocidades de 40 nós ou menores são consideradas.

Os parâmetros de Weibull β e θ foram calculados ca da mês e então tomada uma média.

Utilizou-se a (4.53) para obter μ_e na altura do anemômetro.

Os fatores $\frac{1}{2}\rho$ e $C_p \eta_m \eta_g$ foram tomados como iguais a 0,0835 e 0,25 respectivamente o que dá uma densidade da potência média em $\frac{\text{watts}}{\text{m}^2}$ para uma turbina com uma eficiência global de 25% localizada numa corrente de ar com temperatura e pressão padrões.

Com o intuito de fazer comparações tomou-se $v_r=18$ nós (9,3m/s) e $v_c=9$ nós (4,65m/s).

A coluna que chamamos de "densidade de potência calculada" foi obtida de (4.47) supondo que o vento mantém-se em estado estacionário ou fixo dado pelo "ponto" registrado até que a próxima observação seja atingida.

Velocidades do vento abaixo de 9 nós não geram potência enquanto que acima de 18 nós geram uma potência que corresponde a velocidade nominal de 18 nós.

Pode-se ver da Tab. 4.3 que a densidade de potência média obtida pela Weibull a partir dos valores estimados de θ e β é em média 6% menor do que a densidade de potência calculada.

Considerando a qualidade dos dados originais e a variabilidade inerente do vento, é uma concordância bastante adequada.

Um fator de correção pode ser aplicado observando-se a razão $\frac{\theta}{\mu_v}$ que é teoricamente por volta de 1,12 como já foi destacado anteriormente.

Cidade	Anos	H (p's)	μ_v (nos)	θ (nos)	$\frac{a}{\mu_v}$	Densidade de potência por Weibull $(\frac{W}{m^2})$	Densidade de potência cal- culada	Diferença	$\frac{v_r}{\theta}$	$\frac{f_v}{f_{v_{max}}}$	f_c
Dodge City	48-61	58	12.91	14.87	1.15	2.42	53.71	+ 5.18	1.21	0.80	0.43
Dodge City	62-73	20	11.02	12.45	1.13	2.08	38.48	+ 3.78	1.45	0.90	0.31
Goodland	50-60	25	10.86	12.77	1.18	2.16	40.18	+12.48	1.41	0.90	0.31
Goodland	61-64	31	11.34	12.08	1.06	1.80	37.00	- 8.38	1.49	0.85	0.30
Goodland	70-73	21	11.11	12.52	1.12	2.06	38.93	+ 4.08	1.44	0.86	0.31
Russell	50-67	29	11.09	11.67	1.05	1.86	34.71	-13.08	1.54	0.89	0.28
Russell	70-73	29	11.85	14.52	1.23	2.65	51.75	+18.48	1.24	0.87	0.41
Wichita	48-52	61	12.14	13.19	1.09	2.03	43.02	- 7.38	1.36	0.82	0.35
Wichita	54-67	32	11.10	11.89	1.07	1.91	35.67	- 9.18	1.51	0.88	0.29
Wichita	68-73	25	10.58	11.53	1.09	1.87	33.42	- 4.08	1.56	0.89	0.27
Chanute	48-59	42	9.94	10.77	1.08	1.73	30.30	- 4.38	1.67	0.90	0.21
Chanute	60-64	51	11.39	12.07	1.06	1.91	36.48	-10.48	1.49	0.88	0.28
Topeka	48-50	58	8.70	8.58	0.98	1.38	20.77	-19.38	2.10	0.89	0.16
Topeka	51	73	8.96	9.25	1.03	1.58	22.17	-14.88	1.95	0.93	0.17
Topeka	52-54	58	9.24	9.25	1.00	1.55	22.44	-20.38	1.95	0.94	0.17
Topeka	55-64	72	10.20	10.25	1.00	1.63	27.45	-20.88	1.76	0.91	0.22
Topeka	65-73	25	8.20	8.10	0.98	1.46	17.35	-15.98	2.22	0.94	0.14
Grandview, Mo.	55-56	25	10.95	11.55	1.06	1.81	34.14	- 9.78	1.56	0.87	0.27
Grandview, Mo.	57	96	8.05	7.60	0.91	1.30	17.83	-18.18	2.37	0.90	0.13
Grandview, Mo.	58-61	10	7.52	7.48	0.98	1.42	14.82	- 4.08	2.41	0.98	0.12
Grandview, Mo.	62-70	21	7.40	7.27	0.98	1.39	14.00	- 4.38	2.48	0.97	0.11

0 ponto representa a vírgula decimal

Fonte: Johnson [44]

Tab. 4.3

Como se vê na Tab. 4.3 se a razão é menor que 1,12 a densidade da potência de Weibull é menor do que a densidade de potência calculada e em caso contrário é maior.

A vantagem de se utilizar a distribuição de Weibull no lugar de não fazer nenhum enfoque probabilístico está mostrada nas três últimas colunas da direita da Tab.4.3,

A razão $\frac{v_r}{\theta}$ é determinada e para cada caso usando-se a Fig. 4.3 pode-se achar a razão $\frac{f_v}{f_{vm\acute{a}xima}}$

Isto indica o quanto poderíamos ganhar mudando a velocidade do vento nominal do valor arbitrário de 18 nós para algum outro valor nominal.

Pode-se também ver que em cada caso a densidade da potência média é pelo menos 0,80 da ótima, o que implica que uma dada turbina do vento é conveniente para uma amplitude bem larga de regimes de vento.

Esta observação pode ser muito útil no caso de uma situação de produção em massa.

A Fig. 4.4 é então usada para determinar o F.C. que varia de cerca de três para um de uma região para outra de Kansas.

O F.C. pode ser aumentado reduzindo-se v_r e com isso reduzindo-se o F.E.V.

No estudo das turbinas de vento alguns outros fatores são importantes e entre eles destacaremos.

I - Efeito da altura

Pode-se adotar que

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1/7} \quad \Rightarrow (4.56)$$

onde v é a velocidade do vento prevista a altura z e v_0 é a velocidade do vento medida com o anemômetro a altura z_0 .

Os parâmetros θ e β da Weibull, ambos mudam com a altura.

O efeito analítico da altura sobre a potência gerada é bem difícil de ser determinado.

Baseando-se na (4.52) e (4.56) pode-se tomar aproximadamente que:

$$\mu_e(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^m \mu_e(z_0) \quad \Rightarrow (4.57)$$

onde $\mu_e(z)$ e $\mu_e(z_0)$ são as potências médias respectivamente nas alturas z e z_0 .

O expoente m foi calculado para diversas velocidades nominais para cada uma das estações de observação de Kansas.

Um gráfico de m em relação as diversas velocidades nominais está na Fig. 4.5.

II) - Variação sazonal da potência do vento

Na Fig. 4.6 temos a variação da potência média em

Russel.

Esse gráfico ilustra uma das dificuldades com os S.E.E., a grande variabilidade de mês a mês.

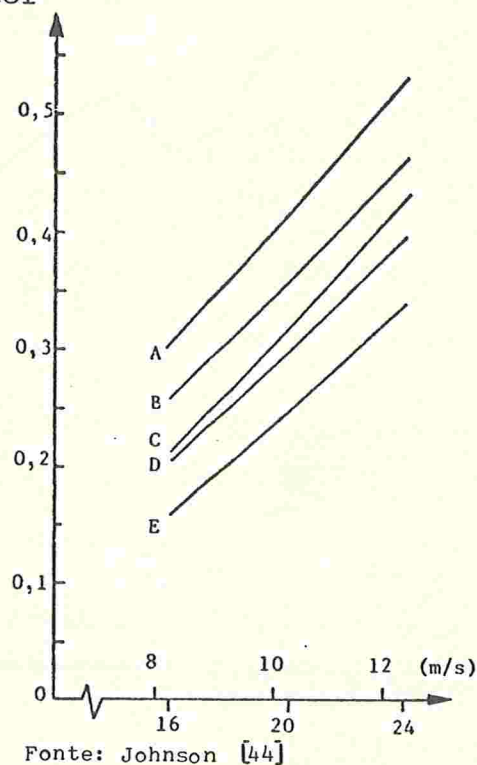
III - Variação diária da potência do vento

A potência do vento também tem uma variação diária como mostrado na Fig. 4.7 .

Pode-se ver que a potência média varia de cerca de 0,8 da potência média anual nas primeiras horas da manhã até cerca de 1,2, da potência média nas horas da tarde.

Isso é menos do que a variação típica da demanda de carga para as utilidades elétricas.

Expoente do fator
de altura \underline{m}



Fonte: Johnson [44]

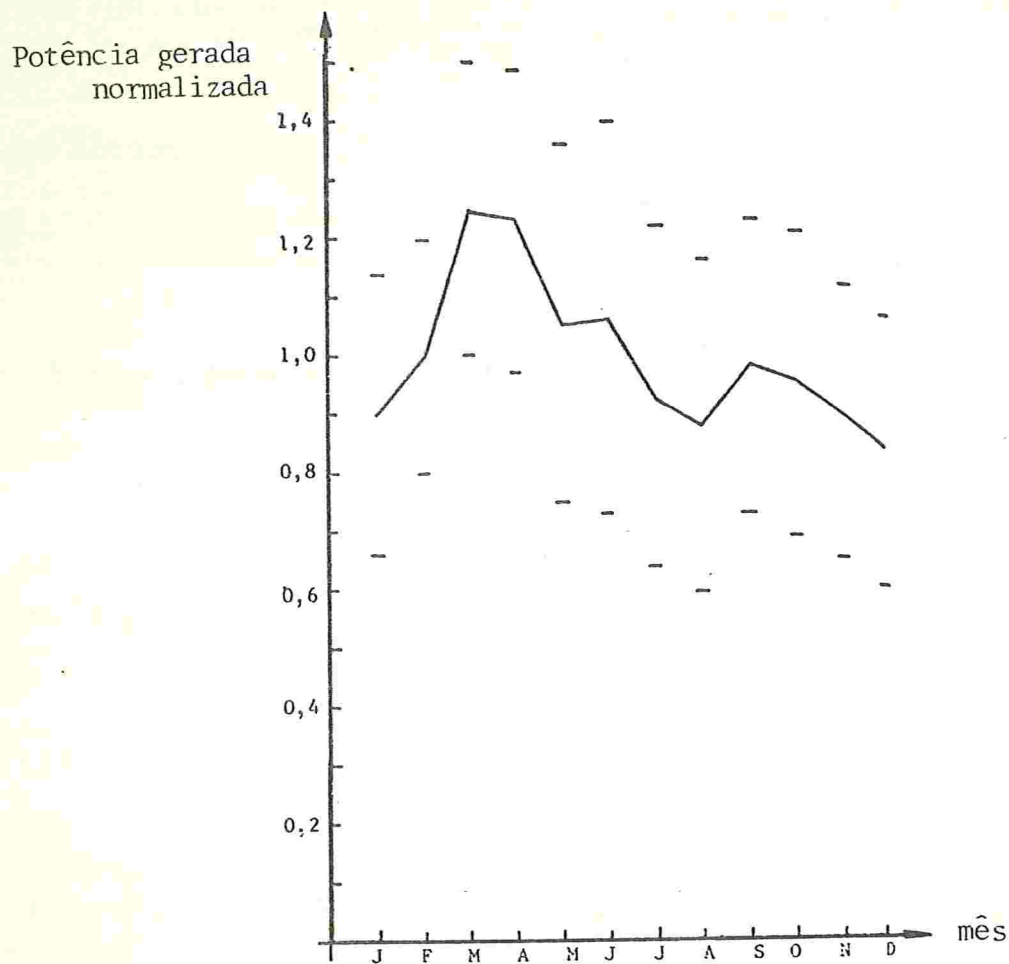
Fig. 4.5

velocidade do vento
nominal em nós

Variação do expoente \underline{m}

Na Fig. 4.5 temos

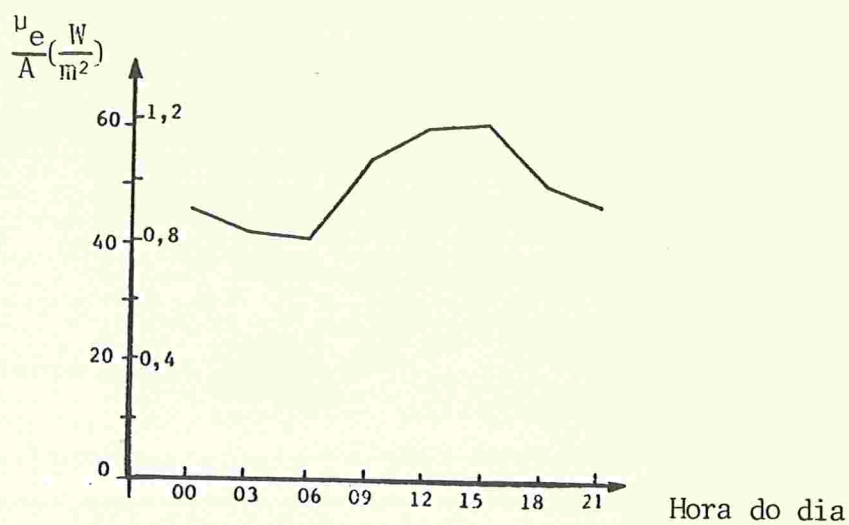
- (A) - Kansas - Leste - Verão
- (B) - Kansas - Leste - Outono e Inverno
- (C) - Kansas - Oeste - Verão
- (D) - Kansas - Oeste - Outono e Inverno
- Kansas - Leste - Primavera
- (E) - Kansas - Oeste - Primavera



Fonte: Johnson [44]

Fig . 4.6

Potência gerada normalizada em Russel de 1950 - 1967, 1970 - 1973, com altura do anemômetro a 29 pés.



Fonte: Johnson [44]

Fig . 4.7

Densidade de potência média e potência média normalizada na cidade de Dodge (1948-1961) - altura do anemômetro a 58 pés.

★EXEMPLO 4.9 - Em Russel, Kansas está instalado um S.E.E. para fornecer energia elétrica com 60 Hz, com nenhum tipo de armazenamento.

A velocidade do vento nominal é $v_r=10\text{m/s}$ e a velocidade de entrada é $v_c=5\text{m/s}$.

A altura efetiva da turbina de vento é de 30m e a eficiência global é de 25%.

A graduação do gerador é de 200kW o que corresponde a um rotor cujo diâmetro é de 41m.

O custo combinado do rotor, torre e da terra supõe-se que seja 100 u.m. por metro quadrado do rotor.

Adota-se também que o custo do gerador elétrico, dos interruptores de circuitos e das interconecções é de 100 u.m. por kW.

Com uma área do rotor de 1300 m^2 o custo total é de 150000 u.m. ou $\frac{750 \text{ u.m.}}{\text{kW}}$ (u.m. = unidades monetárias).

Esse valor é bem mais baixo que o caso atual da S.E.E. porém pode ser tecnicamente possível dado que esse projeto pode atingir produção em massa.

Na Fig. 4.8 temos a densidade de potencia média em Russel a $v_r = 10 \text{ m/s}$ e uma altura do anemômetro a 29 pés (8,8m) é de $40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

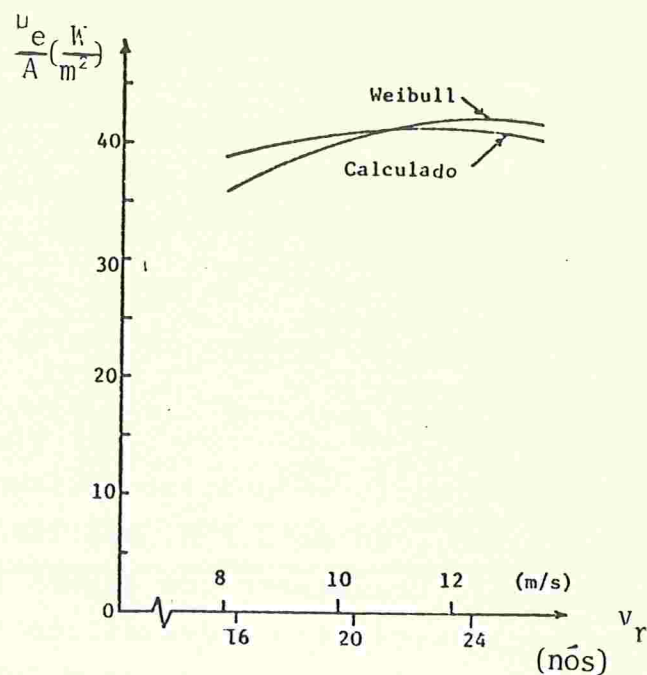
A densidade de potencia sazonal é estimada da Fig. 4.6.

A densidade de potência média nos meses de março, abril e maio é $\frac{40(1,25+1,23+1,05)}{3} = 47 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

O expoente de altura m para essa região de Kansas na primavera é 0,235 para $v_r = 10 \text{ m/s}$.

Assim da (4.57) vem:

$$\frac{\mu_{e, \text{primavera}}}{A} = \left(\frac{30}{8,8} \right)^{0,235} 47 = 63 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Fonte: Johnson [44]

Fig. 4.8

Densidade de potência média em Russel
(1950-1967) e (1970-1973)
Anemômetro a altura de 29 pés

Continuando o processo para os outros meses obtem-se:

$$\frac{u_{e, \text{média}}}{A} = 56 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Dessa forma a energia anual \tilde{e} :

$$E = 0,056 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} \cdot 1300 \text{m}^2 \cdot 8760 \text{h} \cong \boxed{6,38 \cdot 10^5 \text{ kWh}}$$

Dividindo-se a energia anual pelo investimento temos 4,25 kWh por u.m. investida.

A taxa desejada de retorno determina o custo por kWh.

Se a nossa u.m. fosse o dolar teríamos que os custos assumidos na elaboração de S.E.E. não são ainda presentemente competitivos. Entretanto com alguns fatos como o aumento do custo do combustível e o decréscimo dos custos das S.E.E. pela produção em massa, os mesmos podem se tornar competitivos. É possível que se desenvolvam bons sistemas de armazenamento e que nós permitam ter uma base de crédito maior ainda para a potência do vento.

- ALGUMAS CONCLUSÕES -

A distribuição de Weibull tem uma grande versatilidade pois pode assumir uma grande variedade de formas ao se variar θ , β e δ .

Tem entretanto também as suas limitações.

Assim contrariamente ao que "popularmente" se acredita existem também muitas situações nas quais a distribuição "não se ajusta bem" e precisamos procurar um outro modelo entre aqueles indicados na Fig. 1.2

A assimetria e a curtose (que são indicadores da forma da distribuição) possuem valores que as vezes não se pode atingir com a distribuição de Weibull por mais modifi-

cações que se faça nos seus parâmetros e nesse caso devem ser usadas outras distribuições como a gama ou lognormal, pois essas podem atingir essas posições.

Felizmente, na grande maioria das aplicações de Engenharia a distribuição de Weibull está suficientemente próxima para fornecer uma indicação razoável.

As vezes deve-se usar os seus casos particulares que seriam as distribuições exponencial e a Rayleigh.

O método de estimação gráfica, rápido e "fortemente" visual pode ser usado para a distribuição de Weibull dando-lhe uma grande vantagem nas suas aplicações.

É verdade que existem muitos "candidatos" para as possíveis representações gráficas e se a escolha é crítica, então fica-se em dificuldade, porque não existe uma escolha que seja a correta.

É também uma técnica bastante pobre em certos casos a estimação de vida mínima é através de métodos gráficos quando o método de Dubey, por exemplo deve ser empregado.

Quando o tamanho das amostras completas ou censuradas é pequeno, o procedimento gráfico pode produzir viés, particularmente ao se estimar percentis baixos da distribuição.

Infelizmente a estimativa de percentis baixos de pequenas amostras é muito mais uma regra do que uma exceção, nas aplicações de Engenharia.

Nesse caso, sem dúvida o melhor procedimento é aque

le de estimar os parâmetros através dos E.M.V. dos M.E.L.I., dos M.E.L.N.V., etc.

Feitos esses cálculos, pode-se executar a representação no papel de Weibull usando os parâmetros estimados e aí as estimativas dos percentis tirados do gráfico serão bem mais precisas.

Concluindo, obtido o modelo a sua aplicação aos problemas de confiabilidade de sistemas pode ser feita e estaremos aptos a controlar o projeto de Engenharia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Anderson, J.W. & Darling, D.A., Asymptotic Theory of Certain Goodness of Fit Criteria Based on Stochastic Process, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, pp. 193-212, 1952.
- [2] - Bain, L.J., Inferences Based on Censored Sampling from the Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, vol. 14, pp. 831-840, 1972.
- [3] - Billman, B.R., Antle, C.E. & Bain, L.J., Statistical Inference from Censored Weibull Samples, *Technometrics*, vol. 14, no 4, pp. 831-840, 1972.
- [4] - Blom, G., *Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables*, John Wiley and Sons, New York, 1958.
- [5] - Bogdanoff, D.A. & Pierce, D.A., Bayes Fiducial Inference for the Weibull Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 68, pp. 659-664, 1973.
- [6] - Brown, G.G. & Rutenmiller, H.C., Evaluation of $P(X \geq Y)$ when Both X and Y are from Three-Parameter Weibull Distributions, *I.E.E. E. Transactions on Reliability*, vol R-22, pp. 78-82, 1973.
- [7] - Chan, L.K. & Kabir, A.B.M.L., Optimum Quantities for the Linear Estimation of the Parameters of the Extreme-Value Distribution in Complete and Censored Samples, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 16, pp. 381-404, 1969.

- [8] - Chan, L.K., Cheng, S.W. & Mead, E.R., Simultaneous Estimation of Location and Scale Parameters of the Weibull Distribution, *I.E.E.E. Transactions on Reliability*, vol. R-23, pp. 335-341, 1974.
- [9] - Chernoff, H. & Lieberman, G.J., Use of Normal Probability Paper, *American Statistical Association Journal*, pp. 778-785, 1954.
- [10] - Cohen, A.C. Jr., Progressively Censored Samples in Life Testing, *Technometrics*, vol. 5, pp. 327-339, 1963.
- [11] - Cohen, A.C. Jr., Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Samples, *Technometrics*, vol. 7, pp. 579-588, 1965.
- [12] - Cohen, A.C. Jr., Estimation in Mixtures of Two Normal Distributions, *University of Georgia, Institute of Statistics TR - n° 13*, 1965.
- [13] - Cohen, A.C. Jr., Estimation in a Mixture of a Poisson with a Negative Binomial Distribution, *University of Georgia, Institute of Statistics, TR n° 15*, 1965.
- [14] - Cohen, A.C. Jr., Estimation in Mixtures of Poisson and Mixtures of Exponential Distributions, *NASA - Technical Memorandum, TMX - 53245*, 1965.
- [15] - Cohen, A.C. Jr., Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution, *Technometrics*, vol. 17, pp. 347-351, 1975.
- [16] - Danziger, I., Planning Censored Life Tests for Estimation of the Hazard Rate of a Weibull Distribution with Prescribed Precision, *Technometrics*, vol. 12, n° 2, pp. 408-412, 1970.
- [17] - Dao-Thien, M. & Massoud, M., On the Relation between the Factor of Safety and Reliability, *Journal of Engineering for Industry Transactions of ASME paper n° 73, WA/DE-1*, 1973.
- [18] - Disney, R.L. & Sheth, N.J., The Determination of the Probability of Failure Stress/Strength Interference Theory, *Proceedings of Annual Symposium on Reliability*, pp. 417-422, 1968.

- [19] - Dubey, S.D., Hyper-efficient Estimator of the Location Parameter of the Weibull Laws, *Naval Research Logistics Quarterly* vol. 13, pp. 253-263, 1966.
- [20] - Dubey, S.D., Some Percentile Estimators of Weibull Parameters, *Technometrics*, vol. 9, n° 1, pp. 119-129, 1967.
- [21] - Dubey, S.D., On Some Permissible Estimators of the Location Parameter of the Weibull and Certain Other Distributions, *Technometrics*, vol. 9, n° 2, pp. 293-307, 1967.
- [22] - Engelhardt, M. & Bain, L.J., Some Complete and Censored Sampling Results for the Weibull or Extreme-Value Distribution, *Technometrics*, vol. 15, pp. 541-549, 1973.
- [23] - Engelhardt, M. & Bain, L.J., Some Results on Point Estimation for the Two-Parameters Weibull or Extreme-Value Distribution, *Technometrics*, vol. 16, n° 1, pp. 49-56, 1974.
- [24] - Engelhardt, M., On Simple Estimation of the Parameters of the Weibull or Extreme-Value Distribution, *Technometrics*, vol. 17, n° 3, pp. 369-374, 1975.
- [25] - Engelhardt, M. & Bain, L.J., Simplified Statistical Procedures for the Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, vol. 19, n° 3, pp. 323-331, 1977.
- [26] - Epstein, B. & Sobel, M., Life Testing, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 48, pp. 486-502, 1953.
- [27] - Falls, L.W., Estimation of Parameters in Compound Weibull Distributions, *Technometrics*, vol. 12, pp. 399-407, 1970.
- [28] - Finkelstein, J.M., Confidence Bounds on the Parameters of the Weibull Process, *Technometrics*, vol. 18, n° 1, pp. 115-117, 1976.
- [29] - Golding, E.W., *The Generation of Electricity by Wind Power*, London, Halsted Press, 1976.
- [30] - Gross, A.J. & Lurie, D., Monte Carlo Comparisons of Parameter Estimators of the 2-parameter Weibull Distribution, *I.E.E.E.*

Transactions on Reliability, vol.R-26, pp. 356-359, 1977.

- [31] - Gumbel, E.J., *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.
- [32] - Hahn, G.L. & Shapiro, S.S., *Statistics Models in Engineering*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [33] - Harter, H.L. & Moore, A.H., Point and Interval Estimators Based on m Order Statistics for the Scale Parameter of a Weibull Population with known Shape Parameter, *Technometrics*, vol.7, n^o 3, pp.405-422, 1965.
- [34] - Harter, H.L. & Moore, A.H., Maximum Likelihood Estimation from Doubly Censored Samples of the Parameters of the First Asymptotic Distribution of Extreme Values, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 63, pp. 889-901, 1968.
- [35] - Haugen, E.B., Statistical Methods for Structural Reliability Analysis, *Proceedings of the Tenth National Symposium on Reliability and Quality Control*, pp. 97-121, 1964.
- [36] - Haugen, E.B., Implementing a Structural Reliability Program, *Proceedings of the Eleventh National Symposium on Reliability and Quality Control*, pp. 158-168, 1965.
- [37] - Haugen, E.B., *Probabilistic Approach to Design*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- [38] - Hazen, A., *Flood Flows*, John Wiley and Sons, New York, 1930.
- [39] - Hogg, R.V. & Craig, A.T., *An Introduction to Mathematical Statistics*, Macmillan, New York, 1965.
- [40] - Jayadev, T.S., Windmills Stage a Comeback, *I.E.E.E. Spectrum*, vol. 13, n^o 11, pp.44-49, 1976.
- [41] - Johns, M.V.Jr. & Lieberman, G.J., An Exact Asymptotically Efficient Confidence Bound for Reliability in the Case of the Weibull Distribution. *Technometrics*, vol. 8, pp. 135-175, 1966.

- [42] - Johnson, L.G., The Median Ranks of Sample Values in Their Populations with an Application to Certain Fatigues Studies, *Industrial Mathematics*, vol. 2, pp. 1-6, 1951.
- [43] - Johnson, L.G., *Theory and Technique of Variation Research*, Elsevier Publishing Company, New York, 1964.
- [44] - Johnson, G.L., Economic Design of Wind Electric Systems, *I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-97, no 2, pp. 554-562, 1978.
- [45] - Jorgensen, G.E., Lotker, M. & Brierley, D., Design, Economic and System Considerations of Large Wind-Driven Generators, *I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-95, no 3, pp. 870-878, 1977.
- [46] - Kao, J.H.K., A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life-Testing of Electron Tubes, *Technometrics*, vol. 1, no 4 pp. 389-407, 1959.
- [47] - Kao, J.H.K., Gamma and Weibull Life - Quality Plots, *Department of Industrial Engineering and Operations Research*, New York University, 1964.
- [48] - Kapur, K.C., Reliability Bounds in Probabilistic Design, *I.E.E.E. Transactions on Reliability*, vol. R-24, no 3, 1975.
- [49] - Kapur, K.C. & Lamberson, L.R., *Reliability in Engineering Design* John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [50] - Kimball, B.F., On the Choice of Plotting Positions on Probability Paper, *Journal of the American Statistical Association*, vol 55, pp. 546-560, 1960.
- [51] - Kleye, R., Approximate Lower Confidence Limits for the Weibull Reliability Function, *I.E.E.E. Transactions on Reliability* vol. R-27, pp. 153-160, 1978.
- [52] - Kuiper, N.H., Tests Concerning Random Points on a Circle, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandske Akademie van Wetens*

chappen 1, vol. 63, pp. 38-47, 1960.

- 53] - Lawless, J.F., Conditional versus Unconditional Confidence Intervals for the Parameters of the Weibull Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 68, pp. 665-669, 1973.
- 54] - Lawless, J.F., On the Estimation of Safe Life when the Underlying Life Distributions is Weibull, *Technometrics*, vol. 15, n° 4, pp. 857-865, 1974.
- 55] - Lee, L. & Lee, S.F., Some Results on Inference for the Weibull Process, *Technometrics*, vol. 20, n° 1, pp. 41-45, 1978.
- 56] - Lemon, G.N., Maximum Likelihood Estimation for the Three-parameter Weibull Distribution based on Censored Samples, *Technical Report of Convair Aerospace Division of General Dynamics* 1974, *Technometrics*, vol. 17, n° 2, pp. 247-254, 1975.
- 57] - Lieblein, J., A New Method of Analyzing Extreme-Value Data, *Technical Note 3053*, National Advisory Committee for Aeronautics, 1954.
- 58] - Lieblein, J. & Zelen, M., Statistical Investigation of the Fatigue Life of Deep-Groove Ball Bearings, *Journal of Research-National Bureau Standards*, vol. 57, pp. 273-316, 1956.
- 59] - Lipson, C., Sheth, N.J. & Disney, R.L., Reliability Prediction - Mechanical Stress/Strength Interference Rome Air Development Center, *Technical Report-RADC-TR-66-710*, 1967.
- 60] - Lipson, C., Sheth, N.J., Disney, R.L. & Altum, M., Reliability Prediction-Mechanical Stress/Strength Interference Final, *Technical Report RADC-TR-68-403*, Rome Air Development, Research and Technology Division, Griffing Air Force Base, New York, 1969.
- 61] - Mandel, J., *The Statistical Analysis of Experimental Data*, Interscience Publishers, 1964.
- 62] - Mann, N.R., *Tables for Obtaining the Best Linear Invariant Esti-*

mates of Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, vol. 9, n^o 4, pp. 629-645, 1967.

- [63] - Mann, N.R., Results on Location and Scale Parameter Estimation with Application to the Extreme-Value Distribution, *Aerospace Research Laboratories Report*, ARL-67, 0023, 1967.
- [64] - Mann, N.R., Point and Interval Estimation Procedures for the Two-Parameter Weibull and Extreme-Value Distributions, *Technometrics*, vol. 10, n^o 2, pp. 231-256, 1968.
- [65] - Mann, N.R., Results on Statistical Estimation and Hypothesis Testing with Application to the Weibull and Extreme-Value Distributions, *Aerospace Research Laboratories Report*, ARL, 68, 0068, 1968.
- [66] - Mann, N.R., Cramér-Rao Efficiencies of Best Linear Invariant Estimators of Parameters of the Extreme-Value Distribution under Type II Censoring from Above, *SIAM, Journal of Applied Mathematics*, vol. 17, pp. 1150-1166, 1969.
- [67] - Mann, N.R., Estimation of Location and Scale Parameters under Various Models of Censoring and Truncation, *Aerospace Research Laboratories Report*, ARL, 70 - 0026, 1970.
- [68] - Mann, N.R., Estimators and Exact Confidence Bounds for Weibull Parameters Based on a Few Ordered Observations, *Technometrics*, vol. 12, n^o 2, pp. 345-361, 1970.
- [69] - Mann, N.R., Warranty Periods Based on Three Ordered Sample Observations from Weibull Population, *I.E.E.E. Transactions on Reliability*, vol. R-19, pp. 167-171, 1970.
- [70] - Mann, N.R., Best Linear Invariant Estimation for Weibull Parameters under Progressive Censoring, *Technometrics*, vol. 13, pp. 521-533, 1971.
- [71] - Mann, N.R. & Fertig, K.W., Tables for Obtaining Confidence Bounds and Tolerance Bounds Based on Best Linear Invariant Estima-

tes of Parameters of the Extreme-Value Distribution, *Technometrics*, vol. 15, pp. 87-101, 1973.

- [72] - Mann, N.R. & Fertig, K.W., A Goodness of Fit for the Two-Parameter versus Three-Parameter Weibull Confidence Bounds for Threshold, *Technometrics*, vol. 17, n° 2, pp. 237-245, 1975.
- [73] - Mann, N.R. & Fertig, K.W., Simplified Efficient Point and Interval Estimators for Weibull Parameters, *Technometrics*, vol. 17, n° 3, pp. 361-368, 1975.
- [74] - Mann, N.R. & Fertig, K.W., Efficient Unbiased Quantile Estimators for Moderate-Size Complete Samples from Extreme-Value and Weibull Distributions, Confidence Bounds and Tolerance and Predictions Intervals, *Technometrics*, vol. 19, n° 1, pp. 87-93, 1977.
- [75] - Mann, N.R., Fertig, K.W. & Scheuer, F.M., Confidence and Tolerance Bounds and a New Goodness of Fit Test for Two-Parameter Weibull or Extreme-Value Distribution with Tables for Censored Samples of Size 3(1) 25, *Aerospace Research Laboratories Report*, ARL, 71 0077, 1971.
- [76] - Mann, N.R., & Saunders, S.C., On Evaluation of Warranty Assurance when Life has a Weibull Distribution, *Biometrika*, vol. 56, pp. 615-625, 1969.
- [77] - Mann, N.R., Schafer, R.E. & Singpurwalla, N.D., *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [78] - Mann, N.R., Scheuer, E.M. & Fertig, K.W., A New Goodness of Fit Test for the Two-Parameter Weibull or Extreme-Value Distribution with Unknown Parameters, *Communications in Statistics*, vol. 2, pp. 383-400, 1973.
- [79] - Massey, F.J., The Kolmogorov-Smirnov Teste for Goodness of Fit, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 46, pp. 68-78, 1951.

- [80] - Menon, M.V., Estimation of the Shape and Scale Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, vol. 5, pp. 175-182, 1963.
- [81] - Miller, I. & Freund, J.E., *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall, 1965.
- [82] - Mischke, C., A Method of Relating Factor of Safety and Reliability, *Journal of Engineering for Industry Transactions of ASME*, pp. 537-542, 1970.
- [83] - Mood, A.M. & Graybill, F.G., *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [84] - Mosteller, F., On Some Useful Inefficient Statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 17, pp. 377-407, 1946.
- [85] - Patnaik, P.B., The Non-Central χ^2 and F distributions and Their Applications, *Biometrika*, vol. 36, pp. 202-232, 1949.
- [86] - Pearson, K.S., Contributions to the Mathematical Theory of Evolution, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pp. 71-110, 1899.
- [87] - Pearson, K.S., *Tables of the Incomplete Beta Function*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1932.
- [88] - Putnam, P.C., *Power from the Wind*, Van Nostrand, New York, 1948.
- [89] - Pyke, R., Spacings, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, vol. 27, pp. 395-449, 1965.
- [90] - Shaw, L., Shooman, M. & Schatz, R., Time Dependent Stress/Strength Models for Non-Electrical Systems, *Annals of Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 186-197, 1972.
- [91] - Taraman, S.I., *Design Reliability Models and Determination by Stress/Strength Interference Theory*, Tese de Doutorado ainda não publicada, Dept. of Industrial Engineering, Wayne State University, Detroit, Michigan, 1975.
- [92] - Thoman, D.R. & Bain, L.J., Two Sample Tests in the Weibull Distri-

bution, *Technometrics*, vol. 11, pp. 805-815, 1969.

- [93] - Thoman, D.R., Bain, L.J. & Antle, C.E., Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, vol. 12, pp. 445-460, 1969.
- [94] - Thoman, D.R., Bain, L.J. & Antle, C.E., Reliability and Tolerance Limits in the Weibull Distributions, *Technometrics*, vol. 12, n^o 2, pp. 363-371, 1970.
- [95] - Van Montfort, M.A.J., On Testing that the Distribution of Extremes is of Type I when Type II is the Alternative, *Journal of Hydrology*, vol. 11, pp. 421-427, 1970.
- [96] - Vincent, L.R. & Kececioglu, D.B., An Approach to Reliability Determination of a Rotating Component Subjected to Complex Fatigue, *Annals of Reliability and Maintainability*, pp. 534-548, 1970.
- [97] - Weibull, E.H.W., A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, *Journal of Applied Mechanics*, n^o 18, pp. 293-297, 1951.
- [98] - Weibull, E.H.W., Statistical Design of Fatigue Experiments, *Journal of Applied Mechanics*, n^o 19, pp. 109-113, 1952.
- [99] - White, J.S., The Moments of Log-Weibull Order Statistics, *Technometrics*, vol. 2, n^o 2, pp. 373-386, 1969.
- [100] - Wingo, D.R., Solution of the Three-Parameter Weibull Equations by Constrained Modified Quasilinearization (progressively censored samples), I.E.E., *Transactions on Reliability*, R-22, n^o 2, pp. 96-102, 1973.

SIMBOLOGIA

a.a.	amostra aleatória
C.C.O.	curva característica de operação
C.V.	coeficiente de variação
E.M.V.	estimador de máxima verossimilhança
E.M.V.M.	estimador de máxima verossimilhança modificado
E.N.V.V.M.	estimador não viciado de variância mínima
E.Q.M.	erro quadrático médio
F.C.	fator de carga
f.d.	função de densidade ou função de densidade de probabilidade
F.D.	função de distribuição
F.E.V.	fator da energia do vento
F.V.	função de verossimilhança
g.l.	graus de liberdade
I.C.	intervalo de confiança
I.P.	intervalo de predição
M.A.V.C.	matriz assintótica de variâncias-covariâncias
M.E.L.I.	melhor estimador linear invariante
M.E.L.N.V.	melhor estimador linear não viciado
S.S.E.	sistemas elétricos eólicos
v.a.	variável aleatória
v.a.i.	variáveis aleatórias independentes