ANÁLISE DE INTERVENÇÃO EM SÉRIES TEMPORAIS - APLICAÇÕES EM ECONOMIA AGRÍCOLA

Francisco Alberto Pino

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. PEDRO ALBERTO MORETTIN

- SÃO PAULO, JUNHO DE 1980 -

A meus pais
e irmãs.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece, em especial, a:

Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin, orientação;

Prof. Dr. Wilton Bussab, revisão crítica;

Prof. Clélia Maria de Castro Toloi, revisão e apoio constante;

Dr. Paulo Fernando Cidade de Araújo, apoio;

Dr. Natanael Miranda dos Anjos, apoio;

Maria Aparecida Vendramini, coleta de dados;

Lucy Bonfim Gruenwald, consultoria em programação;

Luiz Moricochi, colaboração na análise de séries de leite;

Gabriella Menni Ferreri, bibliografia;

Celuta Moreira Cesar Machado, editoração;

Elaine Orso, datilografia;

Instituto de Economia Agrícola, recursos materiais; e

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária, bolsa de estudos durante o curso de mestrado.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1
1.1 - REVISÃO DE LITERATURA 2
1.2 - OBJETIVOS 3
1.3 - PLANO DO TRABALHO 4

PARTE 1 - MODELOS PARA SÉRIES TEMPORAIS 5

CAPÍTULO 2 - CONCEITOS BÁSICOS EM SÉRIES TEMPORAIS 7
2.1 - PROCESSOS ESTOCÁSTICOS 7
2.2 - TIPOS DE MODELO 12
2.2.1 - Modelo de Filtro Linear 12
2.2.2 - Modelo Auto-regressivo 13
2.2.3 - Modelo de Médias Móveis 14
2.2.4 - Modelo Misto Auto-regressivo e de Médias Móveis 17
2.2.5 - Modelo de Função de Transferência 19
2.3 - AUTOCORRELAÇÃO 21
2.3.1 - Estimação da Média 24
2.3.2 - Estimação das Funções de Autocovariância e de Autocorrelação 24
2.3.3 - Intervalo de Confiança para a Autocorrelação 25

CAPÍTULO 3 - MODELOS DE BOX-JENKINS 27
3.1 - A FILOSOFIA DE BOX-JENKINS 27
3.2 - MODELOS LINEARES PARA SÉRIES ESTACIONÁRIAS 28
3.2.1 - Condições de Estacionaridade e de Invertibilidade 29
3.2.2 - Modelos Auto-regressivos 31

3.2.2.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos auto-regressivos 32
3.2.2.2 - Função de autocorrelação de processos auto-regressivos 36
3.2.2.3 - Variância de processos auto-regressivos 37
3.2.2.4 - Função de autocorrelação parcial de processos auto-regressivos 38
3.2.2.5 - Estimação da função de autocorrelação parcial 40
3.2.3 - Modelos de Médias Móveis 41
3.2.3.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos de médias móveis 41
3.2.3.2 - Função de autocorrelação de processos de médias móveis 43
3.2.4 - Modelos Mistos Auto-regressivos e de Médias Móveis 44
3.2.4.1 - Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos ARMA 44
3.2.4.2 - Função de autocorrelação de processos ARMA 45
3.3 - MODELOS LINEARES PARA SÉRIES NÃO-ESTACIONÁRIAS 47
3.3.1 - Dois Casos de Não-estacionaridade 48
3.3.2 - Formas do Modelo ARIMA 49
3.3.2.1 - Forma de equação de diferenças 51
3.3.2.2 - Forma de choques aleatórios 51
3.3.2.3 - Forma invertida 53

CAPÍTULO 4 - CONSTRUÇÃO DE MODELOS 55

4.1 - IDENTIFICAÇÃO DO MODELO 55
4.1.1 - Identificação do Grau de Diferenciação 56
4.1.2 - Identificação de p e q 56
4.1.3 - Estimação Inicial dos Parâmetros 68
4.1.4 - Unicidade do Modelo 69
4.1.5 - Formas Alternativas de Identificação 70
4.2 - ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS 74
4.3 - VERIFICAÇÃO 78
4.3.1 - Verificação pela Função de Autocorrelação 78
4.3.2 - Verificação pelo Periodograma Acumulado 79
4.3.3 - Uso dos Resíduos para Modificar o Modelo 81
4.4 - PREVISÃO 81
4.4.1 - Previsão de Erro Quadrático Médio Mínimo 83
4.4.2 - Intervalo de Confiança para a Previsão 85

CAPÍTULO 5 - MODELOS SAZONAIS E MODELOS DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA 86
5.1 - MODELOS SAZONAIS 86
5.1.1 - Modelo Sazonal Multiplicativo 88
5.1.2 - Modelo Sazonal Não-multiplicativo 89
5.1.3 - Identificação 89
5.1.4 - Estimação 91
5.1.5 - Generalização do Modelo 91
5.2 - MODELOS DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA 92
5.2.1 - Representação do Modelo por Equações de Diferenças 94
5.2.2 - Condições de Estabilidade 95
5.2.3 - Correlação Cruzada 96

5.2.3.1 - Estimação da função de covariância cruzada e da função de correlação cruzada 98
5.2.3.2 - Estimação da variância da correlação cruzada 99
5.2.4 - Identificação 99
5.2.4.1 - Identificação da função resposta de impulso 100
5.2.4.2 - Identificação de r, s e b 102
5.2.4.3 - Estimação preliminar dos parâmetros 103
5.2.4.4 - Identificação do modelo do ruído 103
5.2.5 - Estimação 104
5.2.6 - Verificação 105
5.2.6.1 - Modelo do ruído inadequado 106
5.2.6.2 - Modelo de função de transferência inadequado 107
5.2.7 - Generalização do Modelo 108

CAPÍTULO 6 - MODELOS DE INTERVENÇÃO 109
6.1 - MODELO DINÂMICO PARA INTERVENÇÃO 109
6.2 - EFEITOS DE INTERVENÇÃO 113
6.3 - ESTRUTURA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA 115
6.4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 120
6.4.1 - Previsão de Produção de Trigo 120
6.4.2 - Poluição em Los Angeles 122
6.4.3 - Poluição em New Jersey 125
6.4.4 - Previsão de Vendas 127
6.4.5 - Mortalidade Infantil em São Paulo 130
6.4.6 - Uso de Cinto de Segurança na Austrália 131
6.4.7 - Vazão do Rio Nilo 133
6.4.8 - Vazão do Rio South Saskatchewan 134
6.4.9 - Qualidade da Água em Rio do Canadá 134

6.4.10 - Movimento de Passageiros em Linhas Aéreas 135

CAPÍTULO 7 - ESTIMAÇÃO E TESTE DE INTEVENÇÃO 136
7.1 - TESTE t DE STUDENT 136
7.2 - TESTE DE QUI-QUADRADO 138
7.3 - PROCEDIMENTO ITERATIVO 141
7.4 - MODELO LINEAR GERAL 141
7.4.1 - Transformação do Modelo ARIMA num Modelo de Filtro Linear 141
7.4.2 - Efeito de Intervenção no Modelo ARIMA 143
7.4.3 - Transformação do Modelo ARIMA no Modelo Linear Geral 148
7.4.4 - Inclusão do Efeito de Intervenção no Modelo Transformado 150

PARTE 2 - APLICAÇÕES 156

CAPÍTULO 8 - MODELOS PARA SÉRIES DE LEITE 159
8.1 - DADOS 161
8.2 - MODELO UNIVARIADO PARA PRODUTIVIDADE 162
8.2.1 - Identificação 169
8.2.2 - Estimação e Previsão 173
8.3 - MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUTIVIDADE 178
8.3.1 - Identificação 178
8.3.2 - Estimação e Previsão 179
8.4 - MODELO UNIVARIADO PARA PRODUÇÃO 181
8.4.1 - Identificação 183
8.4.2 - Estimação e Previsão 187
8.5 - MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUÇÃO 192
8.5.1 - Identificação 192
8.5.2 - Estimação e Previsão 192
8.6 - MODELO DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA PARA PRODUÇÃO 193
8.6.1 - Identificação 194

8.6.2 - Estimação e Previsão 197

CAPÍTULO 9 - MODELOS PARA SÉRIES DE CAFÉ 199
9.1 - DADOS 201
9.2 - MODELO UNIVARIADO PARA PRODUÇÃO 211
9.2.1 - Identificação 211
9.2.2 - Estimação e Previsão 214
9.3 - MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUÇÃO 216
9.3.1 - Identificação 220
9.3.2 - Estimação e Previsão 223
9.4 - MODELO UNIVARIADO PARA PREÇO 227
9.4.1 - Identificação 227
9.4.2 - Estimação e Previsão 230
9.5 - MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PREÇO 231
9.5.1 - Identificação 236
9.5.2 - Estimação e Previsão 237
9.6 - MODELO PROPOSTO PARA PRODUTIVIDADE 242

CAPÍTULO 10 - CONCLUSÕES 245
10.1 - CONCLUSÕES GERAIS 245
10.2 - CONCLUSÕES ESPECÍFICAS 246
10.2.1 - Séries de Leite 247
10.2.2 - Séries de Café 247

SUMMARY 249

BIBLIOGRAFIA 250

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os métodos e as técnicas da análise de séries temporais vêm sendo usados com freqüência cada vez maior em áreas de estudo como a Engenharia, a Economia, a Administração, a Meteorologia, a Oceanografia e outras, onde esses métodos e técnicas evidenciam características dinâmicas dos fenômenos, razão pela qual vêm ganhando importância dentro da própria Estatística. Na prática, a ocorrência de um fenômeno num dado instante de tempo costuma estar associada a eventos que não ocorrem simultaneamente, mas, ao longo do tempo. Assim, observações no tempo não são independentes, sendo necessária a substituição dos métodos estatísticos usuais pelos métodos de séries temporais.

Dentro da análise de séries temporais, os modelos de previsão têm-se tornado cada vez mais comuns e importantes em aplicações práticas. Muitos modelos de previsão têm sido propostos, entretanto, na última década, popularizou-se o uso dos modelos ARIMA, uma classe bastante geral de modelos, do qual a maioria dos outros são apenas casos particulares. BOX & JENKINS (5) propuseram uma técnica iterativa para a construção de tais modelos, em que a escolha da estrutura do mo

delo é baseada nos próprios dados. Em geral resultam modelos com pequeno número de parâmetros e capazes de fazer previsões com boa precisão.

As principais vantagens da técnica de Box-Jenkins são: a) o modelo é escolhido dentro de uma grande variedade de tipos; b) a escolha é baseada no próprio comportamento das observações da série ao invés de ser arbitrária; c) o modelo é parcimonioso quanto ao número de parâmetros; e d) as previsões obtidas são das mais precisas.

Entre as desvantagens, a principal é que a determinação do modelo de previsão adequado tem-se constituído em sério obstáculo ao seu uso, uma vez que exige experiência e perspicácia do usuário.

Em resumo, um bom modelo de previsão deve produzir boas previsões. Em Economia, por exemplo, os resultados de STEKLER (33) mostram que os modelos econométricos não têm sido completamente bem sucedidos para prever atividades econômicas. De fato, os modelos estruturais, isto é, aqueles que contêm variáveis econômicas, ainda que elegantes na explicação do fenômeno, nem sempre são bons para fazer previsões (30).

Em modelos ARIMA podem-se incluir, ainda, os efeitos de outras séries, através de funções de transferência, em especial, o efeito de eventos esporádicos externos ao fenômeno em estudo, mas, que influenciam o comportamento da série temporal. O estudo deste último tipo de efeito caracteriza a análise de intervenção.

1.1 – REVISÃO DE LITERATURA

Sobre os modelos e técnicas de Box-Jenkins há diversas referências, como BOX & JENKINS (5), texto básico sobre o assunto, ANDERSON (2), mais simples, e JENKINS (19), com enfoque mais aplicado. Mais especificamente, GAIT (12) trata de modelos com sazonalidade, enquanto SILVA (32) mostra os modelos de função de transferência.

GRAY et alii (15) e OZAKI (25) tratam de métodos alternativos de identificação de modelos ARMA E ARIMA.

A análise de intervenção é tratada em BOX & TIAO (6), (7) e (8), em GLASS (13), em GLASS et alii (14) e em JENKINS (19).

Aplicações da análise de intervenção sobre séries de dados de qualidade do ar encontram-se em TIAO et alii (34) e em LEDOLTER et alii (22), sobre dados de vendas, em PACK (27), sobre dados de mortalidade infantil, em SABOIA (29), sobre acidentes rodoviários, em BHATTACHARYYA & LAYTON (4), sobre movimento de passageiros de linhas aéreas, em NEVES & FRANCO (24), sobre dados de recursos hidrológicos, em HIPEL et alii (16) e (17), e sobre dados de poluição de rios, em D'ASTOUS & HIPEL (10).

1.2 – OBJETIVOS

São objetivos deste trabalho:

a) expor a teoria relativa aos modelos de previsão de séries temporais, segundo Box-Jenkins, como base para a análise de intervenção;

b) conceituar e caracterizar o estudo de intervenções em séries temporais; e

c) aplicar a metodologia desenvolvida a séries de interesse prático, na área de Economia Agrícola.

1.3 – PLANO DO TRABALHO

Na primeira parte, desenvolvem-se a teoria e a técnica da construção de modelos de intervenção. Os capítulos 2 a 5 tratam dos modelos de Box-Jenkins, enquanto nos capítulos 6 e 7 mostram-se os tipos de efeitos de intervenção e os procedimentos para estimá-los e testá-los.

Na segunda parte, apresentam-se as aplicações. O capítulo 8 traz o estudo de séries temporais relacionadas à produção de leite no Estado de São Paulo, enquanto no capítulo 9 estudam-se séries relacionadas à produção de café no Brasil. O capítulo 10 traz as conclusões do trabalho.

PARTE 1

MODELOS PARA SÉRIES TEMPORAIS

Nesta primeira parte do trabalho, que compreende os capítulos 2 a 7, apresenta-se a teoria da análise de intervenção.

Existem várias formas de se estudar as séries temporais. Uma delas é a Análise Espectral, que estuda a série no domínio de frequência como uma superposição de harmônicos com amplitudes aleatórias:

$$z_t = \sum_k c_k \, e^{-i \lambda_k t} ,$$

com $$c_k = A_k \, e^{i \varphi \lambda_k} / 2 i$$

e $$\lambda_k = 2 \pi k / T ,$$

onde A é a amplitude, φ é a fase e T é o período do harmônico.

Outra forma é a que estuda a série no domínio de tempo como função de seus próprios valores passados, dos valores de outras séries

correlacionadas e de termos aleatórios. Uma classe bastante geral de modelos no domínio de tempo é a dos modelos denominados auto-regressivos-integrados-de-médias-móveis, abreviadamente ARIMA, apresentados por BOX & JENKINS (5) e aos quais ater-se-á o presente trabalho.

Embora os modelos ARIMA e os modelos espectrais sejam conceitualmente e matematicamente equivalentes (14, p.72), os modelos não-paramétricos, como os espectrais, não permitem fazer previsões para a série, ao contrário dos modelos paramétricos, como o ARIMA. A grosso modo, os modelos espectrais são interessantes para séries de alta freqüência, enquanto o ARIMA é interessante para séries de baixa freqüência, como as séries econômicas.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS EM SÉRIES TEMPORAIS

Este capítulo traz os pontos básicos da análise de séries temporais que serão utilizados no desenvolvimento dos modelos nos capítulos seguintes. Conceituam-se processos estocásticos e séries temporais, mostram-se os tipos dos modelos de previsão e conceitua-se autocorrelação, ferramenta básica no estudo de séries no domínio de tempo.

2.1 – PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Apresentam-se a seguir os conceitos de processo estocástico, série temporal, estacionaridade e ruído branco, além da notação a ser utilizada.

Definição 2.1 — Processo estocástico

Um processo estocástico (real ou complexo), $\{X(t,\omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$, é uma seqüência (no tempo) de variáveis aleatórias (com valores reais ou complexos), $X(t,\omega)$, definidas num mesmo espaço de probabilidades (Ω, A, P). Se T é o conjunto dos inteiros, tem-se um processo de tempo discreto, se T é o conjunto dos reais, tem-se um processo de tempo contínuo. ∎

Definição 2.2 — Série temporal

Uma série temporal $\{z_t,\ t \in T\}$ é um conjunto de observações geradas seqüencialmente no tempo. Quando os valores futuros de uma série temporal podem ser determinados exatamente por alguma função matemática, como

$$z_t = \cos(2\pi f t),$$

ela é chamada determinística. O caso mais comum, entretanto, é aquele em que seus valores futuros só podem ser descritos por uma distribuição de probabilidade, sendo, então, chamada estatística ou não-determinística. Neste último caso, a série temporal pode ser tomada como uma realização ou trajetória particular de um processo estocástico. Então, num processo estocástico, para t fixado $X(t,\omega)$ é uma variável aleatória e para ω fixado $X(t,\omega)$ é uma série temporal. ∎

Uma característica fundamental das séries temporais é que suas observações não são, em geral, independentes, mas, serialmente correlacionadas, sendo de interesse as relações entre duas observações

consecutivas.

Exemplo 2.1 - São exemplos de séries temporais:

a) uma série de vendas mensais de um determinado produto, como a apresentada por PACK (27);

b) uma série de leituras horárias de um processo químico, como as séries de leituras de concentração, de temperatura e de viscosidade de um processo químico apresentadas por BOX & JENKINS (5);

c) uma série relacionada à qualidade do ar, como a série de medidas horárias da concentração de monóxido de carbono em New Jersey apresentada por LEDOLTER et alii (22);

d) uma série demográfica, como a série mensal de nascimentos apresentada por GAIT (12);

e) uma série de preços mensais de um determinado produto, como as séries de preços mensais de leite e de café apresentadas nos quadros 8.4 e 9.2, respectivamente;

f) uma série de produção mensal (ou anual) de determinado produto, como às séries de produção mensal de leite apresentada no quadro 8.3 e a de produção anual de café, no quadro 9.1; e

g) uma série meteorológica de precipitação pluviométrica ou de temperatura diária de um determinado local. ■

O aparecimento de séries temporais é comum nos estudos econômicos e demográficos e nos estudos de processos biológicos, químicos e industriais.

Definição 2.3 — Processo estacionário

Um processo diz-se estacionário quando permanece numa espécie de equilíbrio estatístico ao redor de um nível médio constante (em particular, o processo tem média fixa). O processo diz-se estritamente estacionário quando sua estrutura de probabilidade não depende da origem do tempo, mas, de diferenças no tempo, isto é, a distribuição

conjunta de N observações $z_{t_1}, z_{t_2}, \ldots, z_{t_N}$ é a mesma que a de outro conjunto $z_{t_1+\tau}, z_{t_2+\tau}, \ldots, z_{t_N+\tau}$ afastadas no tempo de τ unidades:

$$P(z_{t_1+\tau} \in S_1, \ldots, z_{t_N+\tau} \in S_N) = P(z_{t_1} \in S_1, \ldots, z_{t_N} \in S_N),$$

para todo $t_1 < \ldots < t_N$, $\tau \in T$ e eventos reais $S_1, \ldots, S_N$. O processo diz-se fracamente estacionário de ordem m quando os momentos de ordem até m dependem somente de diferenças no tempo. Em geral, a estacionaridade fraca não implica a estacionaridade estrita. Uma exceção importante é a dos processos gaussianos, que são aqueles aos quais se associa a distribuição normal multivariada. Neste caso, a simples existência de uma média e de uma matriz de autocovariância já assegura estacionaridade, pois, a distribuição normal é completamente caracterizada pelos seus dois primeiros momentos. Então, estacionaridade de segunda ordem mais suposição de normalidade são suficientes para garantir estacionaridade estrita. ∎

Em caso contrário o processo diz-se não-estacionário. Muitas séries de importância na indústria ou na economia são não-estacionárias e algumas sequer têm média natural (5).

Definição 2.4 — Ruído branco

Seja uma seqüência $\{a_t, t \in T\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (não necessariamente, mas, usualmente com distribuição normal de média zero e variância constante σ_a^2). Tais variáveis são chamadas choques aleatórios e a seqüência é chamada ruído branco. ∎

Notação

No estudo dos processos a serem vistos no presente trabalho empregam-se os operadores definidos a seguir, os quais obedecem às leis da álgebra elementar:

a) operador translação para o passado (ou de retardamento, ou de atraso)

É denotado por B e definido por

$$B\, z_t = z_{t-1} \implies B^m z_t = z_{t-m} ;$$

b) operador translação para o futuro (ou de adiantamento)

É denotado por F e definido por

$$F\, z_t = z_{t+1} \implies F^m z_t = z_{t+m} .$$

Então, $F = B^{-1}$;

c) operador diferença

É denotado por ∇ e definido por

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1 - B)\, z_t .$$

Então, $\nabla = 1 - B$; e

d) operador soma

É denotado por S e definido por

$$S\, z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j}$$

$$= z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \ldots$$

$$= (1 + B + B^2 + \ldots)\, z_t$$

$$= (1 - B)^{-1}\, z_t$$

$$= \nabla^{-1}\, z_t \,.$$

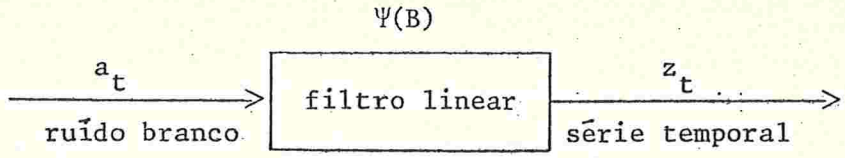
Então $\quad S = \nabla^{-1}$. ■

2.2 – TIPOS DE MODELO

Descrevem-se, a seguir, os principais tipos de modelos utilizados no estudo de séries temporais. Existem, ainda, modelos multivariados (19), que não serão tratados no presente trabalho.

2.2.1 – Modelo de Filtro Linear

Este modelo considera a série temporal como sendo gerada a partir de ruído branco, através de um filtro linear, como esquematizado abaixo:



A série é, então, representada por uma soma ponderada de observações prévias do ruído branco:

$$z_t = \mu + a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \ldots$$

$$= \mu + \Psi(B)\, a_t \,, \qquad (2.2.1)$$

onde μ é um parâmetro que determina o nível da série e

$$\Psi(B) = 1 + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \ldots$$

é o operador linear que transforma a_t em z_t, chamado função de transferência do filtro.

Quando a seqüência de pesos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ é finita, ou infinita e convergente, o filtro diz-se estável e a série z_t é estacionária, sendo μ a média ao redor da qual o processo varia. Caso contrário, z_t é não-estacionária e μ não tem significado especial, a não ser como ponto de referência para o nível da série.

2.2.2 – Modelo Auto-regressivo

Sejam $\tilde{z}_t = z_t - \mu$ os desvios em relação a μ. Então,

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \qquad (2.2.2)$$

é um processo auto-regressivo de ordem p, denotado por AR(p). Em outras palavras, a série é representada por uma soma ponderada de p observações anteriores da série mais um termo aleatório. Definindo-se o operador auto-regressivo de ordem p por

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$

pode-se escrever

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = a_t . \qquad (2.2.3)$$

Observa-se que $\phi(B) = \Psi^{-1}(B)$, isto é, que o modelo auto-regressivo pode ser escrito na forma do modelo de filtro linear.

Exemplo 2.2 – O quadro 2.1 e a figura 2.1 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo AR(1), onde $a_t \sim N(0,1)$:

$$z_t = 0{,}8\ z_{t-1} + a_t . \qquad \blacksquare$$

2.2.3 – Modelo de Médias Móveis

Um processo

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} , \qquad (2.2.4)$$

em que a série é vista como uma soma ponderada de q observações anteriores do ruído é chamado processo de médias móveis de ordem q, denota

QUADRO 2.1 - Série Simulada A, Modelo AR(1)

t	z_t	t	z_t
1	0,656	26	4,853
2	1,057	27	4,649
3	-1,750	28	4,821
4	-0,489	29	4,441
5	-2,861	30	5,496
6	-2,227	31	3,892
7	-2,014	32	4,290
8	-3,773	33	3,746
9	-3,333	34	3,723
10	-0,626	35	1,111
11	-0,731	36	3,480
12	-0,549	37	2,144
13	-1,801	38	1,252
14	-0,538	39	-0,006
15	-0,292	40	0,412
16	-0,444	41	1,958
17	1,648	42	1,883
18	2,183	43	0,344
19	-0,253	44	-0,708
20	-1,069	45	-1,852
21	-2,092	46	-2,318
22	-1,993	47	-2,300
23	-1,187	48	-0,937
24	1,394	49	-1,799
25	3,098	50	-1,698

Modelo: $z_t = 0,8\ z_{t-1} + a_t$.

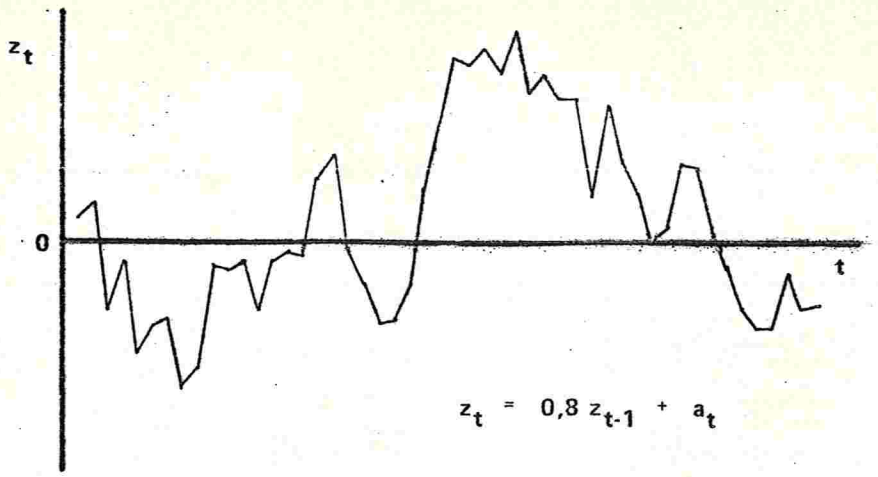


FIGURA 2.1 — Gráfico da Série Simulada A, Modelo AR (1).

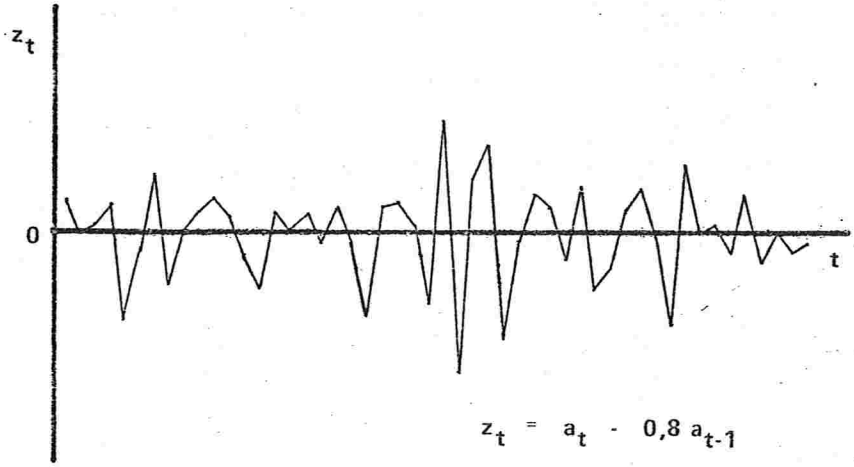


FIGURA 2.2 — Gráfico da Série Simulada B, Modelo MA (1).

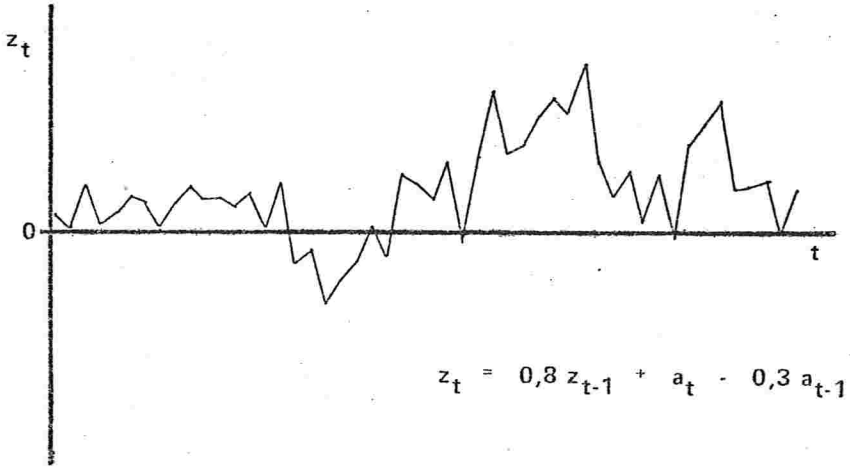


FIGURA 2.3 — Gráfico da Série Simulada C, Modelo ARMA (1,1).

do por MA(q). Definindo-se o operador de médias móveis de ordem q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

pode-se escrever

$$\tilde{z}_t = \theta(B)\, a_t \,. \qquad (2.2.5)$$

A expressão médias móveis não é apropriada neste caso, mas, seu uso já se generalizou.

Exemplo 2.3 - O quadro 2.2 e a figura 2.2 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo MA(1):

$$z_t = a_t - 0{,}8\, a_{t-1} \,. \qquad \blacksquare$$

2.2.4 – Modelo Misto Auto-regressivo e de Médias Móveis

É o modelo que inclui tanto termos auto-regressivos como termos de médias móveis, sendo denotado por ARMA (p,q):

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (2.2.6)$$

ou

$$\phi(B)\, \tilde{z}_t = \theta(B)\, a_t . \qquad (2.2.7)$$

Exemplo 2.4 - O quadro 2.3 e a figura 2.3 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte mo

QUADRO 2.2 - Série Simulada B, Modelo MA(1)

t	z_t	t	z_t
1	0,811	26	2,908
2	-0,028	27	-3,726
3	0,159	28	1,376
4	0,663	29	2,261
5	-2,299	30	-2,789
6	-0,494	31	-0,220
7	1,498	32	1,038
8	-1,408	33	0,730
9	0,032	34	-0,664
10	0,487	35	1,166
11	0,888	36	-1,548
12	0,458	37	-0,974
13	-0,316	38	0,524
14	-1,513	39	1,093
15	0,545	40	-0,118
16	0,071	41	-2,390
17	0,447	42	1,765
18	-0,287	43	-0,038
19	0,570	44	0,249
20	-0,336	45	-0,460
21	-2,074	46	0,894
22	0,748	47	-0,775
23	0,858	48	-0,031
24	0,248	49	-0,497
25	-1,902	50	0,288

Modelo: $z_t = a_t - 0,8\ a_{t-1}$.

delo ARMA (1,1):

$$z_t = 0{,}8\ z_{t-1} + a_t - 0{,}3\ a_{t-1}\ .$$

2.2.5 – Modelo de Função de Transferência

Este modelo considera a série temporal z_t como sendo gerada a partir de outra série temporal x_t através de um filtro linear, como esquematizado abaixo:

$$\underset{\text{série de entrada}}{\xrightarrow{x_t}} \overset{v(B)}{\boxed{\text{filtro linear}}} \underset{\text{série de saída}}{\xrightarrow{z_t}}$$

Então, a série de saída z_t pode ser escrita como uma soma ponderada de observações prévias da série de entrada x_t:

$$z_t = v_o\ x_t + v_1\ x_{t-1} + v_2\ x_{t-2} + \ldots$$

$$= v(B)\ x_t. \qquad (2.2.8)$$

A função de transferência do filtro,

$$v(B) = v_o + v_1\ B + v_2\ B^2 + \ldots$$

também pode ser expressa como a razão de dois polinômios:

QUADRO 2.3 - Série Simulada C, Modelo ARMA (1,1)

t	z_t	t	z_t
1	0,466	26	0,904
2	0,069	27	1,836
3	1,158	28	-0,259
4	0,187	29	1,876
5	0,483	30	3,688
6	0,920	31	1,988
7	0,754	32	2,241
8	0,218	33	2,993
9	0,810	34	3,515
10	1,250	35	3,185
11	0,949	36	4,370
12	0,913	37	1,929
13	0,705	38	0,874
14	1,009	39	1,556
15	0,147	40	0,267
16	1,336	41	1,496
17	-0,793	42	-0,207
18	-0,484	43	2,265
19	-1,932	44	2,819
20	-1,333	45	3,425
21	-0,752	46	1,072
22	0,092	47	1,150
23	-0,562	48	1,340
24	1,521	49	-0,047
25	1,336	50	1,100

Modelo: $z_t = 0,8\ z_{t-1} + a_t - 0,3\ a_{t-1}$.

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} = \frac{\omega_o - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r} \qquad (2.2.9)$$

A série de pesos v_o, v_1, v_2, ... é chamada função resposta de impulso. O filtro linear diz-se estável se a série $v(B)$ converge para $|B| \leqslant 1$.

O modelo de função de transferência pode conter, também, um ruído:

$$z_t = v(B)\ x_t + n_t, \qquad (2.2.10)$$

onde n_t e x_t são independentes. O ruído n_t pode, por sua vez, ser descrito por um modelo estocástico não-estacionário.

$$n_t = \Psi(B)\ a_t = \varphi^{-1}(B)\ \ \theta(B)\ a_t. \qquad (2.2.11)$$

Os modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q) são vistos com mais detalhes no próximo capítulo e os modelos de função de transferência, no capítulo 5.

2.3 – AUTOCORRELAÇÃO

Em geral, uma série temporal estacionária de 2ª ordem pode ser descrita por sua média, sua variância e sua função de autocorrelação, ou, de maneira equivalente, por sua média, sua variância e sua função densidade espectral. Para os objetivos do presente trabalho, a primeira maneira é mais interessante, como será visto nos itens seguintes.

Definição 2.5 — Autocovariância

Seja um processo estacionário z_t, $t = 1, 2, \ldots$ A covariância entre duas observações z_t e z_{t+k}, separadas por k intervalos de tempo, $k = 0, 1, \ldots$, é chamada autocovariância no *lag* k e é definida por

$$\gamma_k = \text{cov}\,[z_t, z_{t+k}] = E\,[(z_t - \mu)\,(z_{t+k} - \mu)]\ . \qquad (2.3.1)$$

A função de autocovariância é a autocovariância vista como função de k. *Lag* pode ser entendido como *defasagem*. ∎

Definição 2.6 — Autocorrelação

De maneira semelhante define-se a autocorrelação entre duas observações z_t e z_{t+k}, $t = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, 1, \ldots$, por

$$\rho_k = \frac{E\,[(z_t - \mu)\,(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]\ \ E\,[(z_{t+k} - \mu)^2]}}$$

$$= \frac{\gamma_k}{\sigma^2_z} = \frac{\gamma_k}{\gamma_o}\ , \qquad (2.3.2)$$

pois, uma vez que o processo é estacionário, a variância $\sigma^2_z = \gamma_o$ é constante no tempo.

Então, $\rho_o = 1$.

A função de autocorrelação é a autocorrelação vista como função de k. ■

Definição 2.7 — Espectro

A transformada de Fourier da função de autocovariância, definida no caso contínuo como

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\tau \; e^{-i\lambda\tau} \, d\tau ,$$

$$-\infty < \lambda < \infty , \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_\tau| \, d\tau < \infty , \tag{2.3.3}$$

e no caso discreto como

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\lambda k} ,$$

$$-\pi < \lambda \leqslant \pi , \quad \sum_k |\gamma_k| < \infty , \tag{2.3.4}$$

é chamada função densidade espectral e é utilizada na Análise Espectral (21). Matematicamente, ambas são equivalentes, mas, cada uma mostra o processo estocástico sob um ângulo diferente. ■

2.3.1 – Estimação da Média

Para processos que possuem média, ela pode ser estimada pela média aritmética das observações

$$\hat{\mu} = \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t \, . \tag{2.3.5}$$

2.3.2 – Estimação das Funções de Autocovariância e de Autocorrelação

Sendo $z_1, z_2, \ldots, z_N$ as observações da série temporal, a estimativa da autocovariância no *lag* k é dada por

$$\hat{\gamma}_k = c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}) \, , \tag{2.3.6}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, K,$$

de onde a estimativa da variância é dada por

$$\hat{\sigma}^2_z = c_o = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}) \, . \tag{2.3.7}$$

Essas estimativas são assintoticamente não-viciadas, quando N tende para infinito (20).

Das diversas estimativas sugeridas para a função de autocorrelação no *lag* k (20), a mais satisfatória tem sido

$$r_k = \frac{c_k}{c_o} \tag{2.3.8}$$

Na prática, para se obter uma boa estimativa são necessárias pelo menos 50 observações e K deve ser não superior a N/4 (5).

2.3.3 – Intervalo de Confiança para a Autocorrelação

Na fase de identificação do modelo, como será visto adiante, é necessária uma verificação mais ou menos grosseira para saber se ρ_k é nula além de um certo *lag*. Uma expressão aproximada para a variância da estimativa da autocorrelação de um processo estacionário normal foi desenvolvida por BARTLETT (3):

$$\text{var}\,(r_k) \simeq \frac{1}{N} \sum_{v=-\infty}^{\infty} [\rho^2_v + \rho_{v+k}\,\rho_{v-k} - 4\rho_k\,\rho_v\,\rho_{v-k} + 2\rho^2_v\,\rho^2_k] \qquad (2.3.9)$$

Para um processo em que as autocorrelações são nulas para $v > q$, todos os termos do lado direito de (2.3.9), exceto o primeiro, anulam-se quando $k > q$, simplificando a fórmula para

$$\text{var}\,(r_k) \simeq \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^{q} \rho^2_v], \; k > q \qquad (2.3.10)$$

Substituindo-se em (2.3.10) as autocorrelações por suas estimativas, obtém-se uma estimativa para a variância da estimativa da autocorrelação:

$$\hat{\sigma}^2(r_k) = \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^{q} r^2_v], \; k > q \qquad (2.3.11)$$

Sob a hipótese de normalidade de r_k, o que é razoável para N suficientemente grande (20, p.187), pode-se construir um intervalo de confiança aproximado para a autocorrelação:

$$r_k \pm t_{\alpha/2} \; \hat{\sigma}(r_k) \; , \qquad (2.3.12)$$

onde $t_{\alpha/2}$ é o valor da estatística t de Student ao nível de significância α. Na prática usa-se $t_{\alpha/2} = 2$.

Exemplo 2.5 - As estimativas das autocorrelações e de seus respectivos desvios padrões das séries simuladas A, B e C encontram-se no capítulo 4. As estimativas das médias e dos desvios padrões destas séries são:

a) processo AR(1)

$\bar{z}_A = 0{,}4578$ e $s_A = 2{,}4509$;

b) processo MA(1)

$\bar{z}_B = -0{,}0420$ e $s_B = 1{,}2726$; e

c) processo ARMA (1,1)

$\bar{z}_C = 1{,}0772$ e $s_C = 1{,}2988$. ■

CAPÍTULO 3

MODELOS DE BOX–JENKINS

Estudam-se neste capítulo os modelos de Box-Jenkins, tanto para processos estacionários, como para processos não-estacionários que exibem algum grau de homogeneidade. A base deste capítulo, como dos dois imediatamente seguintes, está quase toda em BOX & JENKINS (5).

3.1 – A FILOSOFIA DE BOX–JENKINS

Na última década tem-se usado bastante a filosofia de Box-Jenkins para construção de modelos em séries temporais, que se caracteriza por dois aspectos fundamentais:

a) parcimônia

Na prática, o modelo deve conter o menor número possível de parâmetros

a serem estimados; e

b) construção iterativa do modelo

O modelo é construído a partir dos próprios dados, ao invés de se considerar um modelo potencialmente apropriado e testar seu ajustamento. Constrói-se o modelo em etapas:

i) a primeira etapa é a de *identificação*, na qual procura-se determinar o tipo de modelo a ser usado, com base na análise das autocorrelações;

ii) a seguir vem a etapa de *estimação*, na qual estimam-se os parâmetros; e

iii) finalmente, na etapa de *verificação*, procura-se verificar se o modelo ajustado é adequado para descrever os dados. Se o modelo mostra-se inadequado volta-se à identificação e repete-se o processo.

O modelo assim obtido pode ser utilizado para fazer *previsão* de observações futuras ou *controle* do processo.

A fase crítica desse procedimento de construção de modelos é a etapa de identificação do modelo, que exige treino e perspicácia do pesquisador, uma vez que vários modelos semelhantes podem ser identificados. Muitos dos modelos em uso atualmente são casos particulares dos modelos de Box-Jenkins. Entretanto, uma identificação errônea pode levar a um modelo menos eficaz do ponto de vista de previsão.

3.2 – MODELOS LINEARES PARA SÉRIES ESTACIONÁRIAS

Uma série temporal pode ser representada de duas maneiras equivalentes:

a) como a saída de um filtro linear cuja entrada é ruído branco:

$$\tilde{z}_t = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots = \Psi(B)\, a_t, \qquad (3.2.1)$$

com $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j B^j$ e $\Psi_o = 1$; e

b) como uma soma ponderada de valores passados da série mais um erro aleatório:

$$\tilde{z}_t = \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \dots + a_t \;, \qquad (3.2.2)$$

ou $$\pi(B)\, \tilde{z}_t = a_t \;, \qquad (3.2.3)$$

com $$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j \;.$$

Aplicando-se $\Psi(B)$ e $\pi(B)$ simultaneamente sobre $\tilde{z}_t$ obtém-se uma relação entre os dois operadores:

$$\Psi(B)\ \pi(B)\ \tilde{z}_t = \Psi(B)\ a_t = \tilde{z}_t \;.$$

Então, $$\Psi(B)\ \pi(B) = 1$$

e $$\pi(B) = \Psi^{-1}(B) \;. \qquad (3.2.4)$$

3.2.1 — Condições de Estacionaridade e de Invertibilidade

Para que a série se apresente num certo estado de equilíbrio é preciso que seus parâmetros satisfaçam um conjunto de restri

ções chamadas condições de estacionaridade e de invertibilidade.

A função de autocovariância da série (3.2.1) é dada por

$$\gamma_k = E[\tilde{z}_t \, \tilde{z}_{t+k}]$$

$$= E[\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, a_{t-j} \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \, a_{t+k-i}]$$

$$= E[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-k}^{\infty} \Psi_j \, \Psi_{i+k} \, a_{t-j} \, a_{t-i}]$$

$$= \sigma^2_a \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, \Psi_{j+k} , \qquad (3.2.5)$$

uma vez que $E[a^2_t] = \sigma^2_a$ e $E[a_i \, a_j] = 0, \; i \neq j$.

Em particular, sua variância é dada por

$$\sigma^2_z = \gamma_o = \sigma^2_a \sum_{j=0}^{\infty} \Psi^2_j \qquad (3.2.6)$$

Para que a variância seja finita é necessário que os pesos Ψ_j decresçam, para a série em (3.2.6) convergir.

Para o processo ser estacionário é preciso que as autocovariâncias e autocorrelações satisfaçam certas condições. No caso de um processo linear, para o processo ser estacionário é necessário e suficiente que a série de pesos $\Psi(B)$ convirja para $|B| \leqslant 1$, isto é, sobre ou dentro do círculo unitário [5 e 2, p.15].

Exemplo 3.1 - Seja o processo AR(1)

$$(1 - \phi_1 B) \, \tilde{z}_t = a_t$$

$$\tilde{z}_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} \, a_t$$

$$= (1 - \phi_1 B - \phi^2_1 B^2 - \ldots) \, a_t .$$

Então, $\Psi_j = \phi_1^j$. Logo, se $|\phi_1| \geqslant 1$ a série de pesos diverge, o que implica que a variância do processo, dada em (3.2.6), não é finita e a série não pode ser escrita na forma (3.2.1). Portanto, a condição para a série do modelo AR(1) ser estacionária é que $|\phi_1| < 1$. ■

Impõe-se, também, uma restrição aos pesos π em (3.2.2) para assegurar o que se chama invertibilidade. A condição de invertibilidade não depende da condição de estacionaridade, podendo se aplicar também a processos não-estacionários. Estas condições são importantes para evitar multiplicidade de modelos, como será visto adiante (2). Num processo linear, a condição de invertibilidade é de que a série de pesos $\pi(B)$ convirja para $|B| \leqslant 1$, isto é, sobre ou dentro do círculo unitário.

Exemplo 3.2 – Seja o processo MA(1)

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

$$(1 - \theta_1 B)^{-1}\, \tilde{z}_t = a_t$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_1^2 B_1^2 - \ldots)\, \tilde{z}_t = a_t \, .$$

Então, $\pi_j = \theta_1^j$. Logo, se $|\theta_1| \geqslant 1$ a série de pesos diverge e o processo não é invertível. Portanto, a condição para a série do modelo MA(1) ser invertível é que $|\theta_1| < 1$. ■

3.2.2 – Modelos Auto-regressivos

Seja um processo AR(p)

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = a_t \, ,$$

que também pode ser escrito

$$\tilde{z}_t = \phi^{-1}(B)\, a_t = \Psi(B)\, a_t .$$

3.2.2.1 — Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos auto-regressivos

A equação

$$\phi(B) = 0$$

é chamada equação característica do processo. Se G_i^{-1}, $i = 1, 2, \ldots, p$ forem as raízes da equação característica, pode-se escrever

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B) \tag{3.2.7}$$

e, expandindo em frações parciais,

$$\Psi(B) = \phi^{-1}(B) = \sum_{i=1}^{p} \frac{K_i}{1 - G_i B} \tag{3.2.8}$$

Para que o processo seja estacionário é preciso que $\Psi(B)$ convirja para $|B| \leqslant 1$, o que ocorre se $|G_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Esta condição é equivalente à de que a equação característica tenha raízes fora do círculo unitário.

Exemplo 3.3 - Seja o processo AR(1)

$$(1 - \phi_1 B)\, \tilde{z}_t = a_t .$$

Então,

$$\Psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j ,$$

que converge se $|\phi_1| < 1$. Como a raiz da equação característica

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B = 0$$

é $B = \phi_1^{-1}$, essa condição é equivalente a dizer que a raiz de $1 - \phi_1 B = 0$ deve cair fora do círculo unitário.

Nota-se que, se o parâmetro ϕ_1 não satisfizer a condição de estacionaridade, a série "explodirá" em alguma direção. ∎

Exemplo 3.4 - Seja o processo AR(2)

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\, \tilde{z}_t = a_t .$$

Para o processo ser estacionário, as raízes de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

devem estar fora do círculo unitário, isto é, $|G_1^{-1}| > 1$ e $|G_2^{-1}| > 1$.

Para raízes reais (figura 3.1), em que

$$\Delta = \phi_1^2 + 4\phi_2 \geqslant 0$$

e $$\phi(0) = 1,$$

tem-se

$$\phi(-1) > 0 \Rightarrow 1 + \phi_1 - \phi_2 > 0 \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1$$

e $$\phi(1) > 0 \Rightarrow 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0 \Rightarrow \phi_2 + \phi_1 < 1.$$

Para raízes complexas, em que

$$\Delta = \phi_1^2 + 4\,\phi_2 < 0,$$

tem-se

$$|G_1^{-1}| = |G_2^{-1}| \;,$$

pois, uma raiz complexa é o conjugado da outra, e

$$G_1^{-1}\;G_2^{-1} = -\frac{1}{\phi_2}\;,$$

o que sempre ocorre no trinômio do segundo grau. Portanto,

$$|G_1^{-1}\;G_2^{-1}| = \left|\frac{1}{\phi_2}\right| = |G_1^{-1}|^2 = |G_2^{-1}|^2 \;.$$

Da condição de estacionaridade,

$$|G_1^{-1}| > 1 \implies |\phi_2| < 1, \quad \text{e}$$

$$|G_2^{-1}| > 1 \implies |\phi_2| < 1,$$

isto é, $\quad -1 < \phi_2 < 1.$

Logo, as condições de estacionaridade do processo AR(2) são

$$\phi_1 + \phi_2 < 1,$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1 \quad \text{e}$$

$$-1 < \phi_2 < 1 \;. \tag{3.2.9}$$

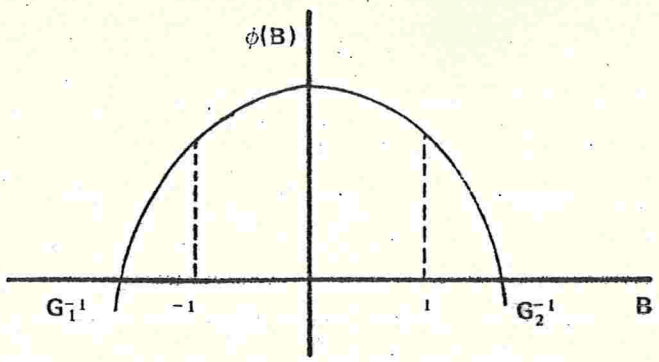


FIGURA 3.1 — Gráfico da Equação Característica do Processo AR (2).

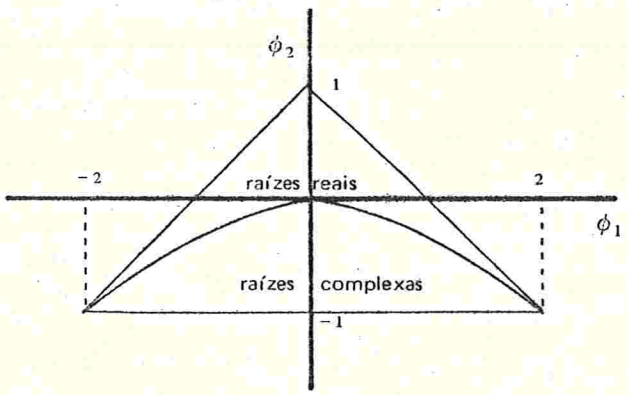


FIGURA 3.2 — Região de Estacionaridade do Progresso AR (2).

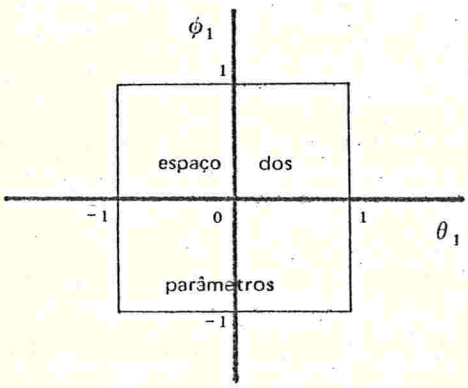


FIGURA 3.3 — Região de Estacionaridade e Invertibilidade do Processo ARMA (1,1).

A região de estacionaridade triangular assim definida encontra-se esquematizada na figura 3.2.

Quanto às condições de invertibilidade, como

$$\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$

é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar invertibilidade de um processo auto-regressivo.

3.2.2.2 — Função de autocorrelação de processos auto-regressivos

Seja o processo AR(p)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t .$$

Multiplicando-se membro a membro por $\tilde{z}_{t-k}$, obtém-se

$$\tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-k} \tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k} a_t . \qquad (3.2.10)$$

Tomando-se os valores esperados, obtém-se

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad , k > 0 , \qquad (3.2.11)$$

pois, a esperança $E[\tilde{z}_{t-k} a_t]$ desaparece quando $k > 0$, uma vez que $\tilde{z}_{t-k}$ só envolve choques aleatórios até a_{t-k}, que são não-correlacionados com a_t. Dividindo-se (3.2.11) por γ_o obtém-se

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} , \quad k > 0, \qquad (3.2.12)$$

que também pode ser escrito

$$\phi(B)\ \rho_k = 0 . \qquad (3.2.13)$$

Sejam G_i^{-1}, $i = 1, 2, \ldots, p$ as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$. Escrevendo-se $\phi(B)$ como em (3.2.7), a solução geral de (3.2.12) é

$$\rho_k = A_1\ G_1^k + A_2\ G_2^k + \ldots + A_p\ G_p^k , \qquad (3.2.14)$$

conforme BOX & JENKINS (5).

Uma vez que $|G_i| < 1$ é a condição de estacionaridade, se as raízes forem distintas, duas situações podem ocorrer:

a) se G_i é real, o termo $A_i\ G_i^k$ decai geometricamente até zero quando k aumenta, o que é chamado de uma exponencial amortecida; e

b) se um par (G_i, G_j) é complexo, ele contribui com um termo

$$A\ d^k\ \text{sen}\ (2\pi\ f\ k + F),$$

que segue uma onda senoidal amortecida (5).

De modo geral, a função de autocorrelação de um processo auto-regressivo é constituída de uma mistura de exponenciais e senóides amortecidas.

3.2.2.3 — Variância de processos auto-regressivos

Para k = 0 tomam-se os valores esperados em (3.2.10), obten-

do-se

$$\gamma_o = \phi_1 \gamma_{-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{-p} + \sigma_a^2 ,$$

uma vez que

$$E [\tilde{z}_t a_t] = E [a_t^2] = \sigma_a^2$$

Dividindo-se membro a membro por $\gamma_o = \sigma_z^2$ e substituindo-se $\gamma_{-k} = \gamma_k$, obtém-se

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1 \phi_1 - \ldots - \rho_p \phi_p} . \qquad (3.2.15)$$

que é a variância do processo AR(p).

3.2.2.4 — Função de autocorrelação parcial de processos auto-regressivos

Seja um processo AR(p).

Definição 3.1 — Equações de Yule-Walker

As equações de Yule-Walker são o conjunto de equações lineares dos parâmetros $\phi_1, \ldots, \phi_p$ em termos das autocorrelações $\rho_1, \ldots, \rho_p$

que se obtêm substituindo-se em (3.2.12) k = 1, 2, ..., p:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\
\dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

que também podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_p \end{bmatrix} \tag{3.2.17}$$

■

Definição 3.2 – Função de autocorrelação parcial

Denote-se por ϕ_{kj} o j-ésimo coeficiente num processo AR(k), de tal modo que ϕ_{kk} seja o último coeficiente. Resolvendo as equações de Yule-Walker sucessivamente para k = 1, 2, 3, ... obtêm-se:

$$\phi_{11} = \rho_1 ,$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} ,$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} , \quad \text{etc.} \tag{3.2.18}$$

A quantidade ϕ_{kk}, vista como função do *lag* k, é chamada função de autocorrelação parcial.

Para um processo AR(p), a função de autocorrelação parcial é não nula para k menor ou igual a p e vale zero em caso contrário (5), isto é, ela tem um corte depois do *lag* p

$$\phi_{kk} \begin{cases} \neq 0, & k \leqslant p, \\ = 0, & k > p. \end{cases}$$

3.2.2.5 — Estimação da função de autocorrelação parcial

Uma maneira de estimar a função de autocorrelação parcial consiste em estimar sucessivamente modelos auto-regressivos de ordens p = 1, 2, 3, ... por mínimos quadrados e tomar as estimativas do último coeficiente de cada ordem. Outra maneira, que pode ser utilizada quando os parâmetros não estão muito próximos dos limites de não-estacionaridade, consiste em substituir os valores em (3.2.12) pelas respectivas estimativas:

$$r_j = \hat{\phi}_{k1}\, r_{j-1} + \hat{\phi}_{k2}\, r_{j-2} + \ldots + \hat{\phi}_{kk}\, r_{j-k}, \qquad (3.2.19)$$

com j = 1, 2, ..., k; resolvendo essas equações para k = 1, 2, ... obtêm-se as estimativas aproximadas de Yule-Walker para ϕ_{kk} (5).

QUENOUILLE (28) mostra que, sob a condição de que o processo é AR(p), as autocorrelações parciais estimadas, de ordem p + 1 em diante, são, de forma aproximada, independentemente distribuídas, com variância

$$\text{var}\,[\hat{\phi}_{kk}] \simeq \frac{1}{N}\,, \quad k \geqslant p + 1\,. \tag{3.2.20}$$

Para N suficientemente grande $\hat{\phi}_{kk}$ tem aproximadamente distribuição normal (2), o que permite a construção de intervalo de confiança, como será visto adiante na parte de identificação do modelo.

3.2.3 — Modelos de Médias Móveis

Seja um processo MA(q)

$$\tilde{z}_t = \theta(B)\, a_t\,,$$

que também pode ser escrito

$$\pi(B)\, \tilde{z}_t = \theta^{-1}(B)\, \tilde{z}_t = a_t\,.$$

3.2.3.1 — Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos de médias móveis

A equação

$$\theta(B) = 0$$

é chamada equação característica do processo. Se H_j^{-1}, $j = 1, 2, \ldots, q$ forem as raízes da equação característica, pode-se escrever

$$\theta(B) = \prod_{j=1}^{q} (1 - H_j\, B) \tag{3.2.21}$$

e, expandindo em frações parciais,

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) = \sum_{j=1}^{q} \frac{M_j}{1 - H_j B} \tag{3.2.22}$$

Para que o processo seja invertível é preciso que $\pi(B)$ convirja para $|B| \leqslant 1$, o que ocorre se $|H_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Esta condição é equivalente à de que a equação característica tenha raízes fora do círculo unitário.

Exemplo 3.5 - Seja o processo MA(1)

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t.$$

Então,

$$\pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j ,$$

que converge se $|\theta_1| < 1$. Como a raiz da equação característica

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B = 0$$

é $B = \theta_1^{-1}$, essa condição é equivalente a dizer que a raiz de $1 - \theta_1 B = 0$ deve cair fora do círculo unitário.

As condições de invertibilidade de um processo MA(2) são análogas às condições de estacionaridade de um processo AR(2), visto no exemplo 3.4. ∎

Quanto às condições de estacionaridade, como

$$\Psi(B) = \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$$

é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar estacionaridade de um processo de médias móveis.

3.2.3.2 — Função de autocorrelação de processos de médias móveis

Seja o processo MA(q)

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

A função de autocovariância deste processo é dada por

$$\gamma_k = E[z_t z_{t-k}]$$

$$= E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \ldots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

$$= (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}) \sigma_a^2$$

$$= (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 , \qquad (3.2.23)$$

$$k = 1, 2, \ldots, q$$

e $\gamma_k = 0, \quad k > q.$

Então, a variância do processo é dada por

$$\sigma_z^2 = \gamma_o = (1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2) \sigma_a^2 \qquad (3.2.24)$$

e a função de autocorrelação, por

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \ldots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k > q. \end{cases} \qquad (3.2.25)$$

Observa-se, pela expressão acima, que a função de autocorrelação anula-se acima de q, isto é, num processo MA(q) a função de autocorrelação tem um corte depois do *lag* q, comportando-se de maneira semelhante à da função de autocorrelação parcial do processo auto-regressivo.

As expressões para a função de autocorrelação parcial do processo de médias móveis são, em geral, mais complicadas, entretanto, ela se comporta de maneira análoga à da função de autocorrelação do processo auto-regressivo. Se as raízes da equação característica forem distintas, duas situações podem ocorrer:

a) se as raízes são reais, a função de autocorrelação parcial é dominada por uma soma de exponenciais amortecidas; e

b) se as raízes são complexas, a função de autocorrelação parcial é dominada por uma senóide amortecida.

3.2.4 — Modelos Mistos Auto-regressivos e de Médias Móveis

Seja um processo ARMA (p, q)

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t\ .$$

3.2.4.1 — Condições de estacionaridade e de invertibilidade para processos ARMA

De maneira análoga aos processos anteriores, o processo é estacionário se as raízes da equação característica

$$\phi(B) = 0$$

caem todas fora do círculo unitário, e o processo é invertível se as raízes da equação característica

$$\theta(B) = 0$$

caem todas fora do círculo unitário.

Exemplo 3.6 - Seja o processo ARMA (1,1)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} .$$

De maneira análoga aos exemplos 3.3 e 3.5, chega-se às seguintes condições de estacionaridade e de invertibilidade, respectivamente:

$$|\phi_1| < 1 \quad \text{e} \quad |\theta_1| < 1 .$$

A região de variação dos parâmetros é dada por um quadrado (figura 3.3).■

3.2.4.2 – Função de autocorrelação de processos ARMA

Seja o processo ARMA (p,q):

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \ldots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} .$$

Multiplicando-se membro a membro por $\tilde{z}_{t-k}$ e tomando-se as esperanças, obtém-se a função de autocovariância

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - \ldots - \theta_q \gamma_{za}(k-q), \tag{3.2.26}$$

onde $\gamma_{za}(k)$ é a covariância cruzada entre z_t e a_t, definida por

$$\gamma_{za}(k) = E[\tilde{z}_{t-k}\, a_t] \quad . \tag{3.2.27}$$

Como $\tilde{z}_{t-k}$ só depende dos choques ocorridos até o instante t-k, tem-se

$$\gamma_{za} \begin{cases} = 0, & k > 0, \\ \neq 0, & k \leqslant 0. \end{cases}$$

Então, para $k \geqslant q+1$, a função de autocovariância é dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} \tag{3.2.28}$$

e a função de autocorrelação, por

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \quad . \tag{3.2.29}$$

Assim, no processo ARMA (p, q), as primeiras q autocorrelações dependem dos parâmetros auto-regressivos e dos parâmetros de médias móveis. Entretanto, após o *lag* q, as autocorrelações comportam-se como nos modelos auto-regressivos.

Se q < p a função de autocorrelação consiste de uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou de senóides amortecidas. Entretanto, se q > p, os q - p + 1 primeiros valores $\rho_o, \rho_1, \ldots, \rho_{q-p}$ não seguirão este padrão (5).

Quanto à função de autocorrelação parcial, seu comportamento assemelha-se ao de um processo de médias móveis, sendo dominada por uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou senóides amortecidas (5).

3.3 – MODELOS LINEARES PARA SÉRIES NÃO-ESTACIONÁRIAS

Um processo pode ser não-estacionário de muitas maneiras. Por exemplo, ele pode "explodir" em alguma direção, como em processos que representam o crescimento de microrganismos (5). Entretanto, são de especial importância certos processos não-estacionários que apresentam alguma homogeneidade em seu comportamento. Por exemplo, o processo pode permanecer ao redor de um nível médio temporário durante algum tempo e depois mudar para outro nível também temporário.

Seja um processo ARMA (p, q)

$$\phi(B)\ \tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t.$$

Para que ele seja estacionário é preciso que todas as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$ caiam fora do círculo unitário. A condição será menos restritiva se se permitir que algumas das raízes possam cair sobre o círculo unitário. Assim, tem-se uma classe mais geral de modelos.

Definição 3.3 – Modelo auto-regressivo-integrado-de-médias-móveis

Seja o modelo

$$\varphi(B)\ \tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t, \qquad (3.3.1)$$

onde $\varphi(B)$ é um operador auto-regressivo não-estacionário tal que d raízes de $\varphi(B) = 0$ são iguais a um e as restantes caem fora do círculo unitário. O modelo também pode ser escrito

$$\phi(B)\ \nabla^d\ z_t = \theta(B)\ a_t\ , \qquad (3.3.2)$$

onde $\phi(B)$ é um operador auto-regressivo estacionário e

$$\varphi(B)\ \tilde{z}_t = \phi(B)\ \nabla^d\ \tilde{z}_t = \phi(B)\ \nabla^d\ z_t,$$

pois, $\nabla^d\ \tilde{z}_t = \nabla^d\ z_t$ para $d \geqslant 1$.

Tal modelo é chamado auto-regressivo-integrado-de-médias-móveis e denotado por ARIMA (p, d, p). ■

É equivalente dizer que num modelo ARIMA (p, d, q) a d-ésima diferença é estacionária.

Às vezes, pode ser interessante, também, incluir no modelo um termo constante θ_o, para representar uma possível tendência determinística ao longo do tempo:

$$\varphi(B)\ z_t = \phi(B)\ \nabla^d\ z_t = \theta_o + \theta(B)\ a_t. \qquad (3.3.3)$$

Sem a constante o modelo inclui só tendências estocásticas.

Como o ARIMA é um modelo mais geral, alguns dos modelos vistos anteriormente podem ser tomados como casos particulares: a) o modelo AR(p) é o caso ARIMA (p, 0, 0); b) o modelo MA(q) é o caso ARIMA (0, 0, q); e c) o modelo ARMA (p, q) é o caso ARIMA (p, 0, q). O caso ARIMA (0, 1, q) é chamado modelo integrado-de-médias-móveis e denotado por IMA(q).

3.3.1 — Dois Casos de Não-estacionaridade

Dois casos interessantes e comuns de não-estacionaridade são o das séries não-estacionárias quanto ao nível e o das séries não-estacionárias quanto à inclinação (figura 3.4):

a) Séries não-estacionárias quanto ao nível

Quando a série é não-estacionária quanto ao nível ela osci

la ao redor de um nível médio durante algum tempo e depois salta para outro nível temporário. Para torná-la estacionária é suficiente tomar a primeira diferença (14, p.79):

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

Então, o modelo é ARIMA (p, 1, q):

$$\phi(B)\ \nabla\ z_t = \theta(B)\ ;\quad e$$

b) Séries não-estacionárias quanto à inclinação

Quando a série é não-estacionária quanto à inclinação ela oscila numa direção por algum tempo e depois muda para outra direção temporária. Para torná-la estacionária é necessário tomar a segunda diferença (14, p.79):

$$\nabla^2\ z_t = (z_t - z_{t-1}) - (z_{t-1} - z_{t-2})$$

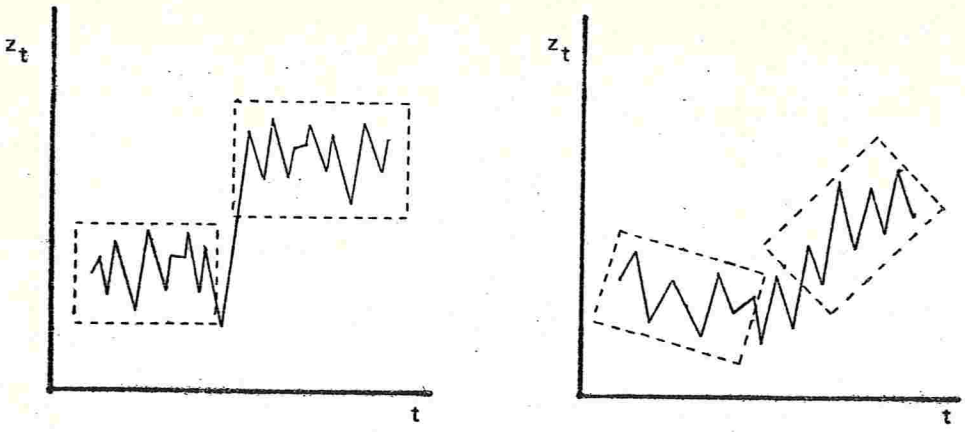
$$= z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2}\ .$$

Então, o modelo é ARIMA (p, 2, q):

$$\phi(B)\ \nabla^2\ z_t = \theta(B).$$

3.3.2 — Formas do Modelo ARIMA

O modelo ARIMA pode ser representado de três formas: a) em termos de valores prévios da série e do valor atual e prévios do ruído; b) em termos do valor atual e prévios do ruído; e c) em termos de valores prévios da série e do valor atual do ruído.



a) série não-estacionária quanto ao nível

b) série não-estacionária quanto à inclinação

FIGURA 3.4 — Séries Não-estacionárias Quanto ao Nível e quanto à Inclinação.

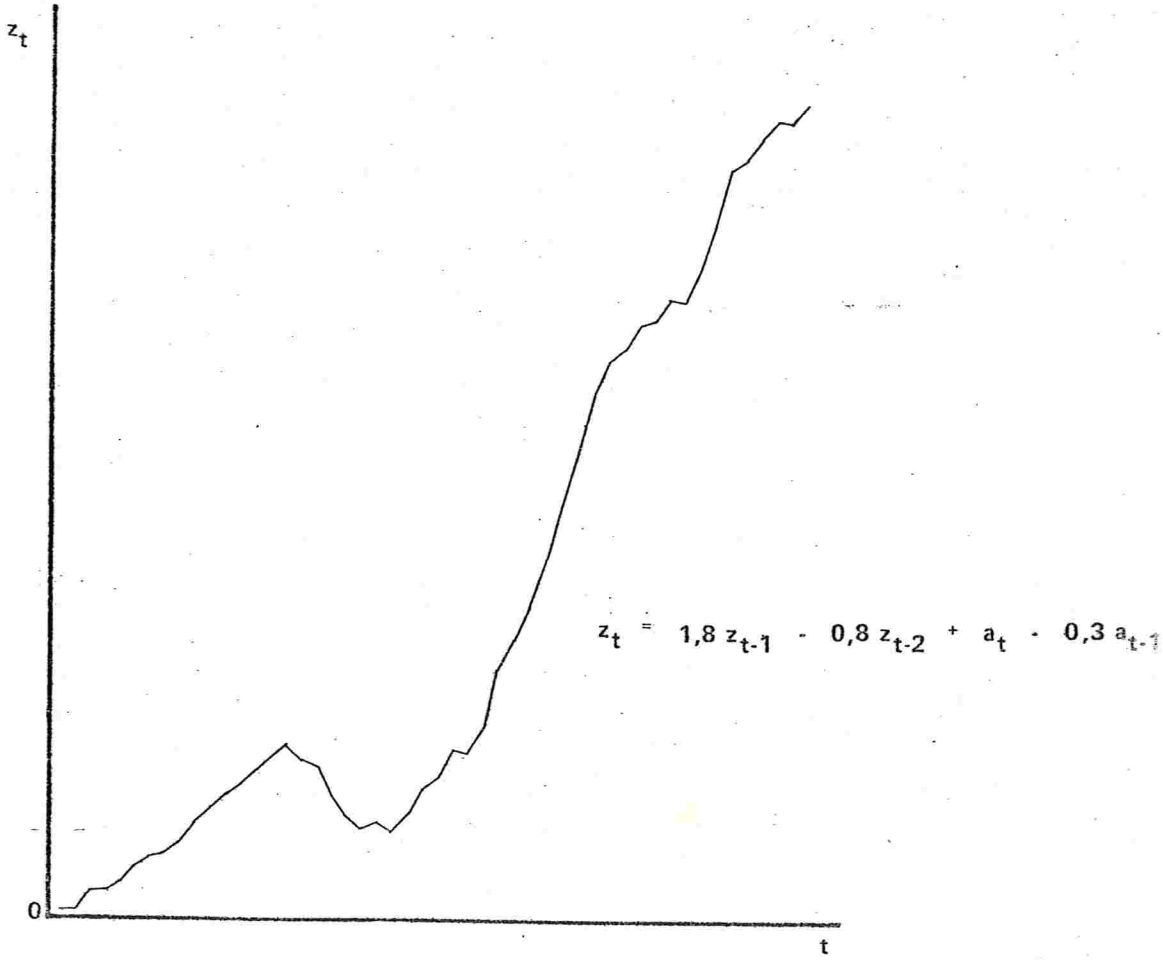


FIGURA 3.5 — Gráfico da Série Simulada D, Modelo ARIMA (1,1,1).

3.3.2.1 — Forma de equação de diferenças

É a forma usual do modelo:

$$z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \ldots + \varphi_{p+d} z_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} . \tag{3.3.4}$$

Esta é a melhor forma para calcular previsões.

3.3.2.2 — Forma de choques aleatórios

De forma análoga a (3.2.1) pode-se escrever

$$\begin{aligned} z_t &= \Psi(B)\, a_t \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j \, a_{t-j} , \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

com $\varphi(B) \; \Psi(B) = \theta(B)$.

Os pesos Ψ podem ser obtidos igualando-se os coeficientes das potências de B, e são usados para calcular as variâncias das previsões.

Em alguns casos é conveniente expressar o modelo em (3.3.5) em termos somente de t-k choques aleatórios, obtendo-se a forma truncada do modelo de choques aleatórios (5). A equação de diferenças dada em (3.3.1) tem solução

$$z_t = C_k (t-k) + I_k (t-k). \tag{3.3.6}$$

A função complementar C_k (t-k) é a solução geral da equação de diferenças

$$\varphi(B)\ C_k\ (t-k) = 0, \tag{3.3.7}$$

que, em geral, consiste de uma combinação linear de certas funções de tempo. A integral particular I_k (t-k) é qualquer função que satisfaça

$$\varphi(B)\ I_k\ (t-k) = \theta(B)\ a_t\ . \tag{3.3.8}$$

BOX & JENKINS (5) mostram que (3.3.8) é satisfeita para t-k > q por

$$I_k\ (t-k) = \begin{cases} 0, & t \leqslant k\ , \\ \sum\limits_{j=k+1}^{t} \Psi_{t-j}\ a_j\ , & t > k. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

A parte C_k (t-k) representa a componente de z_t que pode ser determinada pelas observações anteriores a k + 1, enquanto a parte I_k (t-k) representa a componente imprevisível que engloba todo o efeito dos choques aleatórios. De (3.3.5) e (3.3.9),

$$C_k\ (t-k) = \sum_{j=-\infty}^{k} \Psi_{t-j}\ a_j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{t-k+j}\ a_{k-j}\ . \tag{3.3.10}$$

Como será visto adiante, C_k (t-k) é a previsão de erro quadrático médio mínimo de z_t.

3.3.2.3 – Forma invertida

De forma análoga a (3.2.2) pode-se escrever

$$\pi(B)\ z_t = a_t,$$

ou

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j\ z_{t-j} + a_t, \qquad (3.3.11)$$

com

$$\varphi(B) = \theta(B)\ \pi(B)\ .$$

Os pesos π podem ser obtidos igualando-se os coeficientes das potências de B.

Exemplo 3.7 – O quadro 3.1 e a figura 3.5 apresentam os dados e o gráfico de uma série de 50 observações gerada de acordo com o seguinte modelo ARIMA (1,1,1):

$$(1 - 0{,}8B)\ (1 - B)\ z_t = (1 - 0{,}3B)\ a_t,$$

que também pode ser escrito

$$z_t = 1{,}8\ z_{t-1} - 0{,}8\ z_{t-2} + a_t - 0{,}3\ a_{t-1}\ . \qquad \blacksquare$$

QUADRO 3.1 - Série Simulada D, Modelo ARIMA (1,1,1)

t	z_t	t	z_t
1	0,466	26	9,371
2	0,535	27	11,207
3	1,693	28	10,948
4	1,880	29	12,824
5	2,363	30	16,512
6	3,283	31	18,500
7	4,037	32	20,741
8	4,255	33	23,734
9	5,065	34	27,249
10	6,315	35	30,434
11	7,264	36	34,804
12	8,177	37	36,733
13	8,882	38	37,607
14	9,891	39	39,163
15	10,038	40	39,430
16	11,374	41	40,926
17	10,581	42	40,719
18	10,097	43	42,984
19	8,165	44	45,803
20	6,832	45	49,228
21	6,080	46	50,300
22	6,172	47	51,450
23	5,610	48	52,790
24	7,131	49	52,743
25	8,467	50	53,843

Modelo: $(1 - 0,8\ B)\ (1 - B)\ z_t = (1 - 0,3\ B)\ a_t$.

CAPÍTULO 4

CONSTRUÇÃO DE MODELOS

A construção do modelo pela técnica de Box-Jenkins é feita de forma iterativa, em três fases distintas: a identificação do modelo, a estimação dos parâmetros e a verificação do modelo estimado. A construção iterativa do modelo e seu uso para fazer previsões é o assunto deste capítulo.

4.1 – IDENTIFICAÇÃO DO MODELO

O estágio de identificação do modelo consiste em se obter alguma informação a respeito dos possíveis valores de p, d e q do modelo ARIMA, além de estimativas grosseiras dos parâmetros a serem usadas como ponto de partida no estágio de estimação. A identificação baseia-se no comportamento das funções de autocorrelação e de autocorre

lação parcial. Também podem ser úteis o exame do gráfico da série, a construção de um histograma dos valores e um teste de normalidade.

4.1.1 — Identificação do Grau de Diferenciação

Pode-se mostrar (5) que, quando uma das raízes da equação característica $\phi(B) = 0$ está próxima da unidade, a função de autocorrelação não cai rapidamente para zero, mas, devagar e de forma aproximadamente linear. Então, o fato de a função de autocorrelação não cair rapidamente para zero é um indicador de que existe alguma raiz próxima ao círculo unitário, o que pode tornar o modelo não-estacionário. Se isto acontecer, tomam-se tantas diferenças quantas necessárias até se obter estacionaridade, identificando, assim, o valor d. Na prática, para modelos não-sazonais é suficiente examinar as vinte primeiras autocorrelações e, normalmente, d é igual a 0, 1 ou 2. Convém lembrar, entretanto, que este processo não conduz à estacionaridade se a série contém componentes sazonais (Ver capítulo 5).

4.1.2 — Identificação de p e q

Uma vez identificado o valor d, diferenciando-se o modelo d vezes obtém-se um modelo ARMA (p, q). Os valores p e q são identificados examinando-se a função de autocorrelação ρ_k e a função de autocorrelação parcial ϕ_{kk} (quadro 4.1):

a) se ρ_k decai para zero numa mistura de exponenciais amortecidas e/ou senóides amortecidas e se ϕ_{kk} sofre um corte depois do

QUADRO 4.1 - Resumo das Propriedades dos Processos Auto-regressivos, de Médias Móveis e Mistos

	AR(p)	MA(q)	ARMA (p, q)
Modelo	$\phi(B)\ \tilde{z}_t = a_t$	$\tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t$	$\phi(B)\ \tilde{z}_t = \theta(B)\ a_t$
Condição de estacionaridade	Raízes de $\phi(B)=0$ caem fora do círculo unitário	Sempre estacionário	Raízes de $\phi(B) = 0$ caem fora do círculo unitário
Condição de invertibilidade	Sempre invertível	Raízes de $\theta(B) = 0$ caem fora do círculo unitário	Raízes de $\theta(B) = 0$ caem fora do círculo unitário
Função de autocorrelação	Infinita (exponenciais e/ou senóides amortecidas)	Finita (corte após o *lag* q)	Infinita (exponenciais e/ou senóides amortecidas após o *lag* q - p)
Função de autocorrelação parcial	Finita (corte após o *lag* p)	Infinita (dominada por exponenciais amortecidas e/ou senóides)	Infinita (dominada por exponenciais amortecidas e/ou senóides após o *lag* p - q)

Adaptado de BOX & JENKINS (5), p.79.

lag p, tem-se um modelo AR(p);

b) se, ao contrário, ρ_k sofre um corte após o *lag* q e ϕ_{kk} decai exponencialmente e/ou senoidalmente, tem-se um processo MA(q); e

c) se ambos, ρ_k e ϕ_{kk}, decaem exponencialmente e/ou senoidalmente tem-se um modelo misto. Neste caso, ρ_k é uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou senóides amortecidas após o *lag* q - p e ϕ_{kk} é dominada por uma mistura de exponenciais amortecidas e/ou senóides após o *lag* p - q.

Na prática, constroem-se os gráficos de r_k e de $\hat{\phi}_{kk}$ com os respectivos intervalos de confiança construídos com os desvios padrões das estimativas.

Exemplo 4.1 - Sejam os dados da série simulada A (quadro 2.1). As estimativas das autocorrelações (quadro 4.2 e figura 4.1), para a série original, decaem exponencialmente, enquanto as estimativas das autocorrelações parciais sofrem um corte após o primeiro *lag*, indicando um processo AR(1). A estimativa do desvio padrão das autocorrelações parciais é dada por

$$\hat{\sigma}\,(\hat{\phi}_{kk}) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0{,}14\ ,$$

com a qual constrói-se o intervalo de confiança de dois desvios padrões que consta da figura 4.1.

Os valores de qui-quadrado que constam do quadro 4.2 servem para testar se a série (original ou diferenciada) é ruído branco. Como o valor crítico de qui-quadrado, com 10 graus de liberdade e nível de significância 5%, é igual a 18,307, rejeita-se a hipótese de que a série original é ruído branco.

Entretanto, os dados podem sugerir, também, outro modelo. Como as autocorrelações caem muito lentamente e a primeira diferença da série é ruído branco (qui-quadrado não-significativo), pode-se pensar, também, num modelo ARIMA (0, 1, 0). Isso acontece porque os dados foram gerados com o parâmetro $\phi_1 = 0{,}8$, que está muito próximo do

QUADRO 4.2 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada A

Lag (k)	Série original (z)			1ª diferença (∇_z)			2ª diferença (∇_z^2)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,85*	0,14	0,85*	-0,09	0,14	-0,09	-0,58*	0,14	-0,58*
2	0,72*	0,22	0,00	0,10	0,14	0,09	0,18	0,19	-0,23
3	0,57*	0,26	-0,14	-0,13	0,15	-0,12	-0,15	0,19	-0,25
4	0,45	0,29	-0,01	0,00	0,15	-0,03	0,13	0,19	-0,10
5	0,33	0,30	-0,06	-0,18	0,15	-0,16	-0,19	0,19	-0,27
6	0,26	0,31	0,10	0,07	0,15	0,04	0,18	0,20	-0,13
7	0,19	0,31	-0,08	-0,07	0,15	-0,04	-0,20	0,20	-0,29
8	0,14	0,32	0,01	0,21	0,15	0,17	0,33	0,21	0,09
9	0,04	0,32	-0,20	-0,23	0,16	-0,22	-0,33	0,22	-0,13
10	0,01	0,32	0,14	0,06	0,17	-0,02	0,20	0,23	-0,13
χ^2	100,15**			8,690			37,100**		

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 10 graus de liberdade.

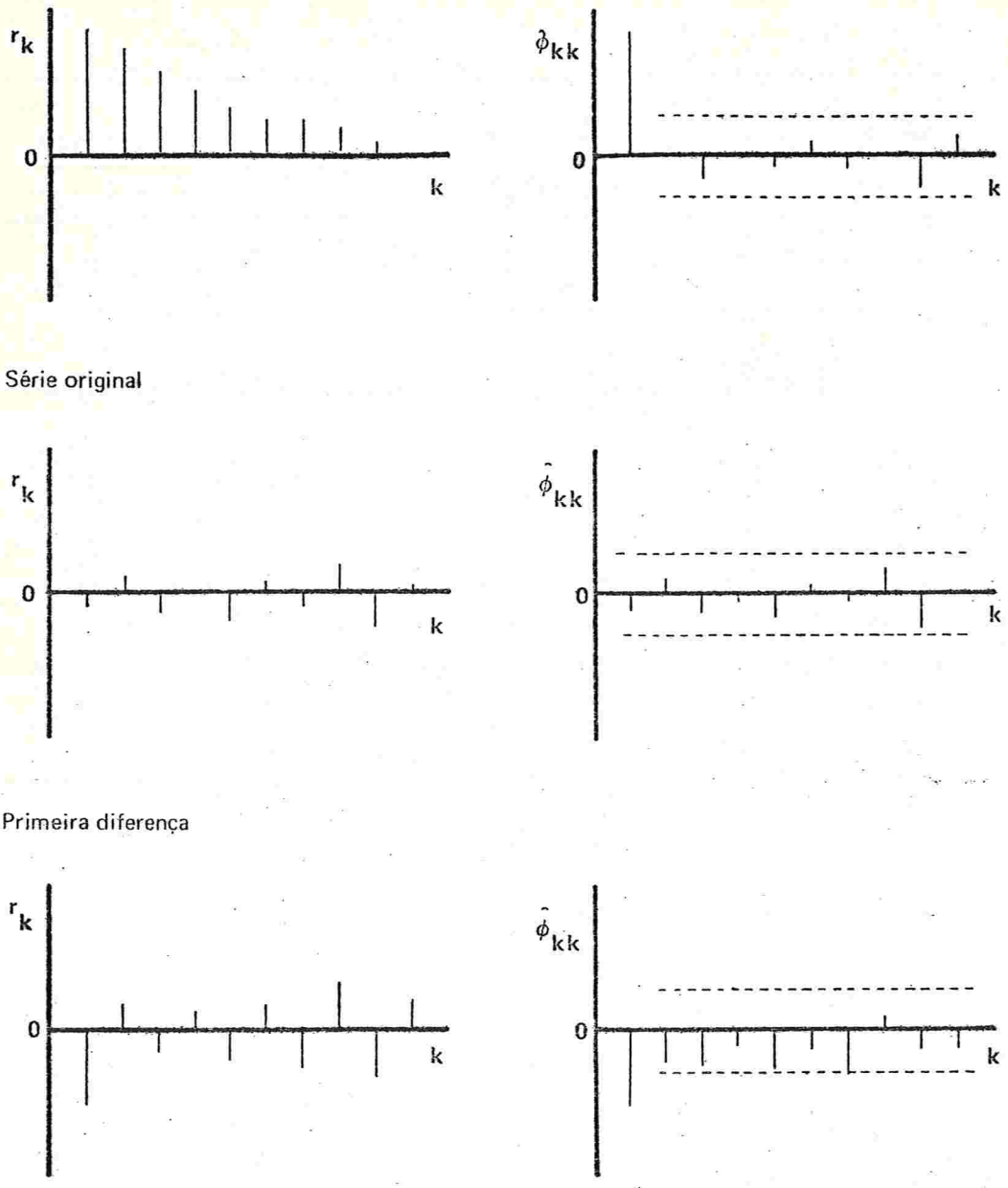


FIGURA 4.1 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada A.

limite de não-estacionaridade. ■

Exemplo 4.2 - Sejam os dados da série simulada B (quadro 2.2). As estimativas das autocorrelações sofrem um corte após o primeiro *lag* (quadro 4.3 e figura 4.2), enquanto as estimativas das autocorrelações parciais decaem dominadas por exponenciais amortecidas e senóides. O intervalo de confiança de dois desvios padrões para $\hat{\phi}_{kk}$ (figura 4.2) foi construído a partir da estimativa do desvio padrão

$$\hat{\sigma}\ (\hat{\phi}_{kk}) \simeq \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \simeq 0{,}14.$$

O teste de qui-quadrado significativo indica que a série original não é ruído branco.

Conclui-se que o modelo deve ser MA(1). ■

Exemplo 4.3 - Sejam os dados da série simulada C (quadro 2.3). Para a série original, tanto as estimativas das autocorrelação como as das autocorrelações parciais (quadro 4.4 e figura 4.3) decrescem rapidamente, sugerindo p = q com valores baixos, provavelmente ARMA (1,1).

O teste de qui-quadrado significativo indica que a série original não é ruído branco. ■

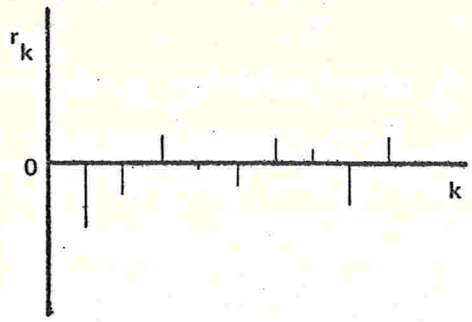
Exemplo 4.4 - Sejam os dados da série simulada D (quadro 3.1). As autocorrelações (quadro 4.5 e figura 4.4) não decaem rapidamente na série original, o que acontece na primeira diferença, sugerindo d = 1. A primeira diferença reduz-se ao caso do exemplo 4.3, identificando-se, então, o modelo ARIMA (1,1,1). ■

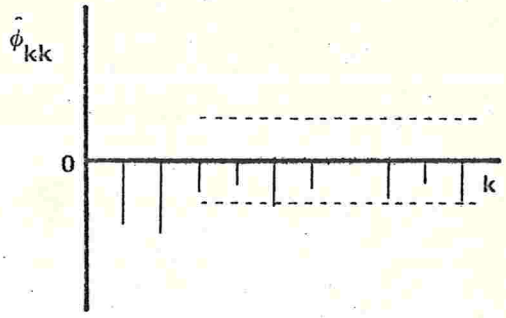
QUADRO 4.3 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada B

Lag (k)	Série original (z)			1ª diferença (∇_z)			2ª diferença (∇_z^2)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	-0,42*	0,14	-0,42*	-0,58*	0,14	-0,58*	-0,66*	0,14	-0,66*
2	-0,20	0,16	-0,47*	-0,06	0,18	-0,58*	0,08	0,20	-0,64*
3	0,18	0,17	-0,22	0,21	0,18	-0,42*	0,15	0,20	-0,57*
4	-0,02	0,17	-0,16	-0,01	0,19	-0,19	-0,01	0,20	-0,33*
5	-0,17	0,17	-0,31*	-0,17	0,19	-0,28	-0,15	0,20	-0,25
6	0,16	0,18	-0,18	0,13	0,19	-0,30*	0,09	0,20	-0,39*
7	0,09	0,18	0,01	0,12	0,19	0,05	0,14	0,20	-0,02
8	-0,29	0,18	-0,26	-0,31	0,20	-0,11	-0,32	0,21	-0,05
9	0,18	0,19	-0,14	0,24	0,21	0,01	0,29	0,22	0,19
10	-0,01	0,19	-0,27	-0,11	0,21	-0,26	-0,20	0,22	-0,14
χ^2	21,697**			29,538**			35,587**		

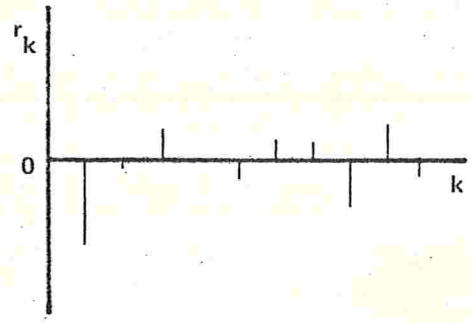
(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

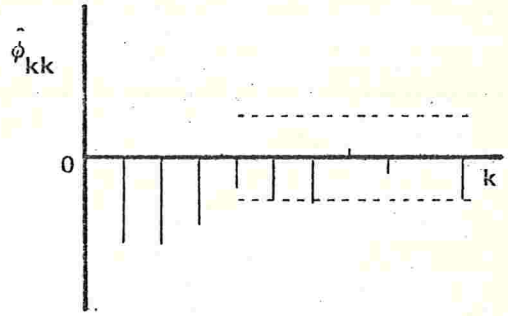
(**) Significativo ao nível de 5%, com 10 graus de liberdade.



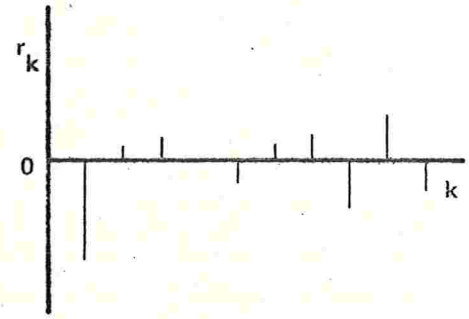


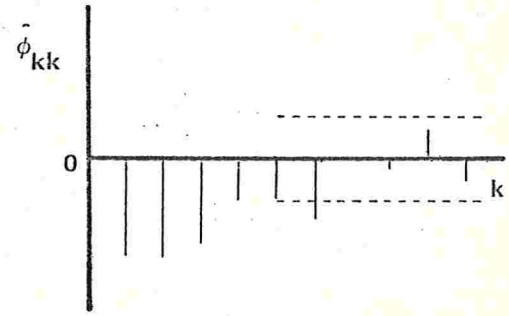
a) Série original





b) Primeira diferença





c) Segunda diferença

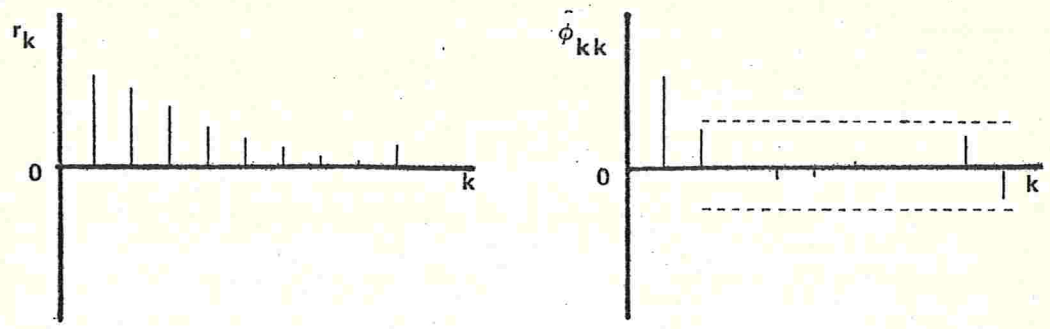
FIGURA 4.2 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada B.

QUADRO 4.4 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada C

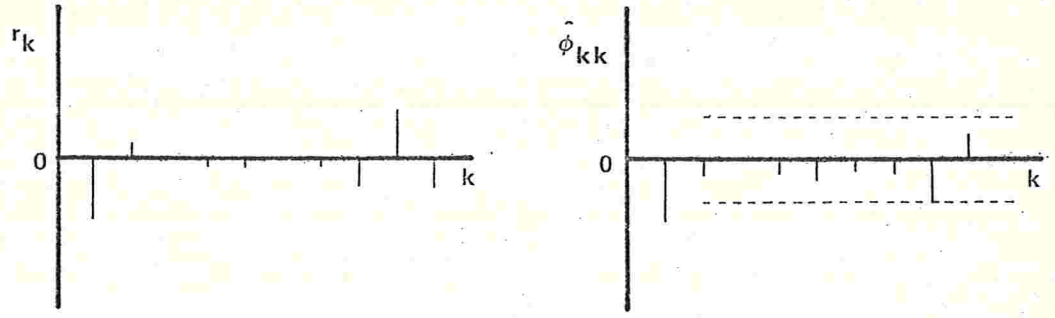
Lag (k)	Série original (z)			1ª diferença (∇_z)			2ª diferença (∇_z^2)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,60*	0,14	0,60*	-0,41*	0,14	-0,41*	-0,66*	0,14	-0,66*
2	0,52*	0,19	0,25	0,08	0,16	-0,11	0,19	0,20	-0,43*
3	0,39	0,21	0,01	-0,01	0,17	-0,02	-0,01	0,20	-0,25
4	0,26	0,23	-0,08	-0,05	0,17	-0,07	0,00	0,20	-0,12
5	0,18	0,23	-0,04	-0,05	0,17	-0,13	-0,05	0,20	-0,14
6	0,13	0,24	0,03	0,02	0,17	-0,07	0,05	0,20	-0,13
7	0,08	0,24	-0,02	-0,04	0,17	-0,07	0,02	0,20	-0,01
8	0,04	0,24	-0,02	-0,17	0,17	-0,27	-0,20	0,20	-0,36*
9	0,15	0,24	0,21	0,33	0,17	0,16	0,34	0,21	-0,06
10	0,00	0,24	-0,21	-0,19	0,18	-0,01	-0,29	0,22	-0,08
χ^2		47,007**			17,206			34,189**	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

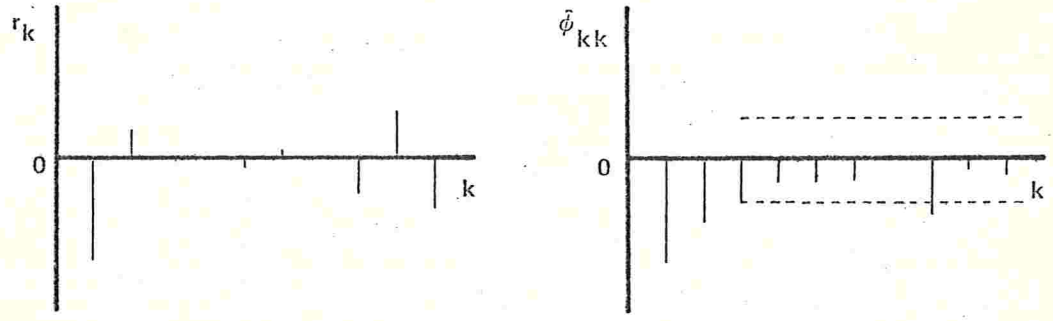
(**) Significativo ao nível de 5%, com 10 graus de liberdade.



a) Série original



b) Primeira diferença



c) Segunda diferença

FIGURA 4.3 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada C.

QUADRO 4.5 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada D

Lag (k)	Série original (z)			1ª diferença (∇_z)			2ª diferença (∇_z^2)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,95*	0,14	0,95	0,60*	0,14	0,60*	-0,40*	0,14	-0,40*
2	0,89*	0,24	-0,07	0,53*	0,19	0,26	0,07	0,17	-0,11
3	0,82*	0,30	-0,08	0,39	0,22	0,00	-0,01	0,17	-0,02
4	0,75*	0,34	-0,06	0,26	0,23	-0,09	-0,05	0,17	-0,07
5	0,68	0,37	-0,05	0,17	0,24	-0,03	-0,06	0,17	-0,13
6	0,61	0,39	-0,05	0,13	0,24	0,04	0,02	0,17	-0,07
7	0,55	0,41	0,00	0,07	0,24	-0,02	-0,03	0,17	-0,07
8	0,48	0,43	-0,02	0,04	0,24	-0,01	-0,17	0,17	-0,27
9	0,42	0,44	-0,02	0,15	0,24	0,22	0,33	0,17	0,17
10	0,36	0,45	-0,08	0,00	0,24	-0,22	-0,19	0,18	-0,01
χ^2	230,38**			45,597**			16,535		

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 10 graus de liberdade.

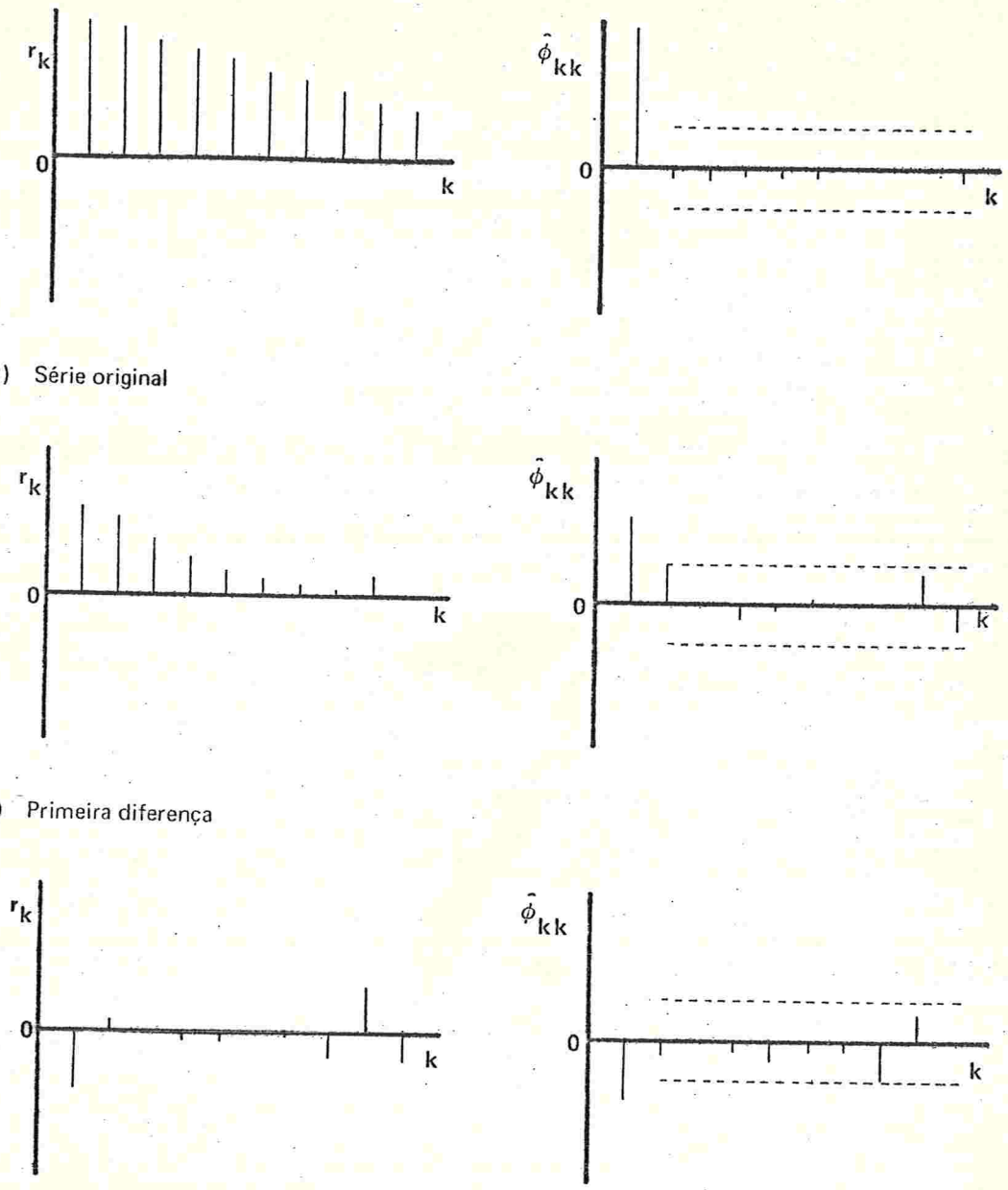


FIGURA 4.4 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série Simulada D.

4.1.3 — Estimação Inicial dos Parâmetros

É interessante fazer neste estágio uma estimação inicial dos parâmetros, ainda que grosseira, para servir de base à estimação propriamente dita.

Para um processo auto-regressivo obtêm-se estimativas iniciais dos parâmetros a partir das equações de Yule-Walker em (3.2.17), substituindo-se as autocorrelações pelas respectivas estimativas. Estas estimativas são boas e aproximam-se das obtidas com estimadores de máxima verossimilhança.

Para um processo de médias móveis obtêm-se estimativas iniciais dos parâmetros a partir das equações em (3.2.25), substituindo-se as autocorrelações pelas respectivas estimativas. Ao contrário do caso anterior, estas estimativas assim obtidas não são eficientes.

Exemplo 4.5 - Seja o modelo AR(1) identificado no exemplo 4.1 para a série simulada A. A estimativa inicial do parâmetro auto-regressivo é dada por

$$\hat{\phi}_1 = r_1 = 0,85. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.6 - Seja o modelo MA(1) identificado no exemplo 4.2 para a série simulada B. A estimativa inicial do parâmetro de médias móveis é dada por

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2},$$

de onde

$$\hat{\theta}_1 = -\frac{1}{2r_1} \pm \sqrt{\frac{1}{(2r_1)^2} - 1}\ .$$

Logo, $\hat{\theta}_1 = -1,84$ e $\hat{\theta}_1 = -0,54$ são soluções, mas, somente a segunda satisfaz a condição de invertibilidade dada no exemplo 3.5: $|\theta_1| < 1$. ■

Para processos de ordem mais alta pode se tornar trabalhoso resolver os sistemas de equações a fim de obter estimativas iniciais dos parâmetros. Em BOX & JENKINS (5) encontram-se tabelas e gráficos que permitem obtê-las mais facilmente.

4.1.4 — Unicidade do Modelo

Um modelo ARMA tem uma única matriz de covariância, mas, a recíproca não é verdadeira. Seja um processo ARMA (p, q), cujas equações características têm raízes G_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ e H_j, $j = 1, 2, \ldots, q$ dentro do círculo unitário:

$$\phi(B)\, \tilde{z}_t = \theta(B)\, a_t,$$

ou

$$\prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B)\, \tilde{z}_t = \prod_{j=1}^{q} (1 - H_j B)\, a_t .$$

Em BOX & JENKINS (5) mostra-se que a função geradora de covariância de z_t, definida por

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k , \qquad (4.1.1)$$

pode ser escrita

$$\gamma(B) = \frac{\prod_{j=1}^{q} (1 - H_j B)(1 - H_j F)}{\prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B)(1 - G_i F)}\, \sigma_a^2 . \qquad (4.1.2)$$

Uma vez que B F = 1 e

$$(1 - H_j B)(1 - H_j F) = H_j^2 (1 - H_j^{-1} B)(1 - H_j^{-1} F),$$

segue-se que qualquer processo

$$\prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B) z_t = \prod_{j=1}^{q} (1 - H_j^{\pm 1} B) k a_t , \qquad (4.1.3)$$

com a constante k apropriada, pode ter a mesma função geradora de covariâncias. Se uma raiz real H_j cair dentro do círculo unitário, H_j^{-1} cairá fora, do mesmo modo que se um par complexo H_j e H_k cair dentro, o par H_j^{-1} e H_k^{-1} cairá fora. Então, existe somente um processo estacionário e invertível que tem a função de autocovariância dada. Assim, a condição de invertibilidade é usada para assegurar a unicidade do modelo, como foi visto no exemplo 4.6.

4.1.5 — Formas Alternativas de Identificação

Um dos maiores obstáculos à utilização da filosofia de Box-Jenkins para construção de modelos está na identificação, que, em alguns casos, pode exigir do pesquisador prática e perspicácia.

GRAY et alii (15) apresentam uma solução satisfatória para tal problema, facilitando a identificação do modelo. A seguir procura-se dar uma idéia de tal procedimento.

Seja um processo ARMA (p, q) com função de autocorrelação ρ_k. Definem-se as seguintes funções:

$$H_n[\rho_k] = \begin{vmatrix} \rho_k & \rho_{k+1} & \cdots & \rho_{k+n+1} \\ \rho_{k+1} & \rho_{k+2} & \cdots & \rho_{k+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k+n-1} & \rho_{k+n} & \cdots & \rho_{k+2n-2} \end{vmatrix},$$

com $H_o[\rho_k] \equiv 1$, e

$$H_n[1;\rho_k] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \rho_k & \rho_{k+1} & \cdots & \rho_{k+n} \\ \rho_{k+1} & \rho_{k+2} & \cdots & \rho_{k+n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k+n-1} & \rho_{k+n} & \cdots & \rho_{k+2n-1} \end{vmatrix}$$

Definem-se, então,

$$R_n(\rho_k) = \frac{H_n[\rho_k]}{H_n[1;\rho_k]} \tag{4.1.4}$$

e

$$S_n(\rho_k) = \frac{H_{n+1}[1;\rho_k]}{H_n[\rho_k]}, \tag{4.1.5}$$

que podem ser obtidos recursivamente por

$$S_o(\rho_k) = 1,$$

$$R_1(\rho_k) = \rho_k,$$

$$R_{n+1}(\rho_k) = R_n(\rho_{k+1}) \left[\frac{S_n(\rho_{k+1})}{S_n(\rho_k)} - 1 \right]$$

e
$$S_n(\rho_k) = S_{n-1}(\rho_{k+1}) \left[\frac{R_n(\rho_{k+1})}{R_n(\rho_k)} - 1 \right],$$

para $n = 1, 2, \ldots$ e $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Os autores mostram que:

a) o comportamento de S_n quando $n = p$ é dado por

$$S_p(\rho_k) \begin{cases} = C_1, & k \geqslant q - p + 1, \\ = C_2, & k \leqslant -q - p, \\ \text{não constante}, & -q - p < k < q - p + 1, \end{cases}$$

$$S_p[(-1)^k \rho_k] \begin{cases} = C_3, & k \geqslant q - p + 1 \\ = C_4, & k \leqslant -q - p, \\ \text{não constante}, & -q - p < k < q - p + 1, \end{cases}$$

com

$$C_1 = (-1)^p \left(1 - \sum_{k=1}^{p} \phi_k\right),$$

$$C_2 = - C_1/\phi_p,$$

$$C_3 = (-1)^p \left[1 - \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \phi_k\right]$$

e $\qquad C_4 = (-1)^{p+1} \; C_3/\phi_p$,

isto é, S_p é constante para $k \geqslant q - p + 1$ e para $k \leqslant -q - p$; e

b) o comportamento de R_n quando $n = p$ é dado por

$$R_{p+1}\,[(-1)^k \rho_k] = R_{p+1}\,(\rho_k) \begin{cases} = 0, & k \geqslant q - p + 1 \text{ e } k \leqslant -q - p, \\ \neq 0, & -q - p < k < q - p + 1, \end{cases}$$

isto é, R_{p+1} é nulo fora do intervalo $(-q - p;\ q - p + 1)$.

Na prática, estimam-se R e S para diversos valores de n e k; do exame dos resultados identificam-se p e q.

Os autores sugerem, ainda, a estatística D(n, m) para medir a concordância com o padrão para um processo estacionário ARMA (p, q). Para cada par de inteiros (n, m), tais que $n = 0, 1, \ldots, N$ e $m = 0, 1, \ldots, M$, define-se

$$D(n, m) = \frac{\left| \dfrac{S_{n+1}\,(\rho_{-m-n-1})}{S_n\,(\rho_{-m-n})} \right|}{V}, \qquad (4.1.6)$$

$$\text{com } V = \left[\frac{S_n(\rho_{m-n+1}) + S_{n+1}(\rho_{m-n})}{S_{n-1}(\rho_{m-n-2}) + S_n(\rho_{m-n-1})} \right]^2 + \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{R_{n+1}(\rho_{-m-n-i})}{R_n(\rho_{-m-n-i+1})} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R_{n+1}(\rho_{m-n+1})}{R_n(\rho_{m-n+i+1})} \right)^2 \right],$$

onde $\qquad S_{-1}\,(\rho_m) \equiv 0 \quad$ e $\quad R_o\,(\rho_m) \equiv 1$

Estima-se D(n, m) para diversos valores de n e m tomam-se p e q tais que

$D(p, q) = \max D(n, m)$.

Os autores referem-se, também, ao caso não-estacionário.

OZAKI (25) sugere o uso do procedimento MAICE (minimum Akaike information criterium estimation), que escolhe o modelo através do critério da informação de Akaike (AIC), para identificar modelos ARIMA de modo quase automático. O autor mostra que o AIC normalizado de um modelo ARIMA (p, d, q) é dado por

$$AIC\ (p, d, q) = N \log \hat{\sigma}_a^2 + \frac{N}{N - d}\, 2(p + q + 1 + \delta_{do}) + N \log 2\pi + N, \qquad (4.1.7)$$

onde $$\delta_{do} = \begin{cases} 1, & \text{se } d = 0 \\ 0, & \text{se } d \neq 0. \end{cases}$$

O procedimento consiste em tomar o modelo que resulta em AIC mínimo, dados vários modelos prováveis.

Entretanto, embora existam formas alternativas de identificação do modelo, usar-se-á neste trabalho o procedimento usual de Box-Jenkins, por motivo de disponibilidade de programas de computador já desenvolvidos e por não ser o escopo deste trabalho comparar tais alternativas.

4.2 – ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS

Sejam N observações de um processo ARIMA (p, d, q)

$$\phi(B)\ \nabla^d\ z_t = \theta(B)\ a_t. \qquad (4.2.1)$$

Tomando-se as primeiras d diferenças obtêm-se $n = N - d$ observações de um processo ARMA (p, q)

$$\phi(B)\ (w_t - \mu) = \theta(B)\ a_t. \qquad (4.2.2)$$

Após a identificação do modelo têm-se p + q + 2 parâmetros a serem estimados, a saber, $\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q, \mu$ e σ_a^2, sendo equivalente estimá-los em (4.2.1) ou em (4.2.2). Em certos casos, como quando $d > 0$, pode-se assumir que $\mu = 0$. Caso contrário, substitui-se μ pela seguinte estimativa inicial:

$$\hat{\mu} = \overline{w} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} w_t\ . \qquad (4.2.3)$$

Os principais aspectos da estimação dos parâmetros, que se acha descrita em detalhes em BOX & JENKINS (5), são vistos a seguir.

Usam-se estimadores de mínimos quadrados que são eficientes e podem ser obtidos através de um processo iterativo não linear, o qual parte de estimativas iniciais, como aquelas obtidas no estágio de identificação do modelo.

A equação (4.2.2) pode ser escrita

$$a_t = \tilde{w}_t - \phi_1\ \tilde{w}_{t-1} - \ldots - \phi_p\ \tilde{w}_{t-p} - \theta_1\ a_{t-1} - \ldots - \theta_q\ a_{t-q}$$

Para calcular a_t é preciso encontrar os valores iniciais para os $\tilde{w}$'s e os a's. Essa questão dos valores iniciais pode ser resolvida através de dois procedimentos: um condicional, em que se substituem os valores iniciais desconhecidos por um conjunto de valores que se suponham razoáveis; outro incondicional, mais eficiente, em que os valores iniciais desconhecidos são estimados de uma amostra de dados.

No procedimento condicional, os valores iniciais podem ser substituídos por zeros, mas, isto introduz um erro que só desaparece muito lentamente, caso as equações características possuam raízes próximas do círculo unitário. Se forem dados p valores w_* e q valores a_* anteriores ao início das observações da série podem-se calcular os valores condicionais $a_t\ (\phi, \theta | w_*, a_*, w)$, $t = 1, \ldots, n$. Supondo-se que os a_t são independentes e normalmente distribuídos, a função densidade das observações, dados os valores iniciais assumidos, é da forma

$$p(a_1, \ldots, a_n) \propto \frac{1}{\sigma_a^n} \exp\left(-\frac{1}{2\,\sigma_a^2} \sum_{t=1}^{n} a_t^2\right). \qquad (4.2.4)$$

O logaritmo da função de verossimilhança condicional, dados os valores w_* e a_*, é

$$\ell_* (\phi, \theta, \sigma_a) = -n \ln \sigma_a - \frac{S_*(\phi, \theta)}{2\,\sigma_a^2}, \qquad (4.2.5)$$

onde $$S_* (\phi, \theta) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2 (\phi, \theta | w_*, a_*, w) \qquad (4.2.6)$$

é a soma de quadrados condicional. Então, as estimativas de máxima verossimilhança condicional são as mesmas que as de mínimos quadrados.

No procedimento incondicional os valores desconhecidos são substituídos por suas esperanças condicionais a um conjunto de dados e novamente é minimizada a soma de quadrados. A função densidade das observações, sob a hipótese de independência e normalidade, é da forma

$$p(a_1, \ldots, a_n) \propto \frac{1}{\sigma_a^n} f(\phi, \theta) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} S(\phi, \theta)\right], \qquad (4.2.7)$$

onde $f(\phi, \theta)$ é uma função dos coeficientes que não envolve os dados e

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=-\infty}^{n} E(a_t | \phi, \theta, w)^2 \qquad (4.2.8)$$

é a soma de quadrados incondicional. O logaritmo da função de verossimilhança incondicional é dado por

$$\ell(\phi, \theta, \sigma_a) = f(\phi, \theta) - n \ln \sigma_a - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma_a^2}. \qquad (4.2.9)$$

Para processos estacionários as esperanças em (4.2.8) tornam-se muito pequenas quando $t < 1 - Q$, onde Q é um inteiro positivo

suficientemente grande, o que nos permite minimizar a soma finita

$$S'(\phi, \theta) = \sum_{t=1-Q}^{n} E(a_t \mid \phi, \theta, w)^2 . \qquad (4.2.10)$$

Então, para amostras suficientemente grandes é aproximadamente equivalente minimizar a soma finita ou a soma infinita. As estimativas obtidas serão aproximadamente as de máxima verossimilhança.

Em BOX & JENKINS (5, p.240) encontram-se, ainda, estimativas da matriz de covariância das estimativas de máxima verossimilhança, com a qual é possível fazer inferências sobre os parâmetros.

Exemplo 4.7 - A estimação dos parâmetros das séries simuladas A, B e C conduz aos seguintes resultados:

a) série simulada A

$\hat{\phi} = 0,8622$ (I.C.: 0,7099 a 1,0145)

DPR = 1,3093,

onde DPR é o desvio padrão residual;

b) série simulada B

$\hat{\theta} = 1,0486$ (I.C.: 0,7662 a 1,3311)

DPR = 0,8986; e

c) série simulada C

$\hat{\mu} = 1,1352$ (I.C.: 0,0901 a 2,1802)

$\hat{\phi} = 0,8064$ (I.C.: 0,5414 a 1,0713)

$\hat{\theta} = 0,3289$ (I.C.: -0,0970 a 0,7548)

DPR = 1,0451.

Para a série D os resultados são semelhantes aos da série C.

■

4.3 – VERIFICAÇÃO

Neste estágio é preciso verificar se o modelo encontrado é adequado ou não para descrever os dados. Quando é possível supor *a priori* em que direção pode estar ocorrendo inadequação do modelo, pode-se superestimar com um modelo mais geral e, então, examinar os parâmetros estimados. Entretanto, a verificação pode ser feita com base nos próprios dados, analisando-se os resíduos, que são definidos por

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \quad \hat{\phi}(B) \; \tilde{w}_t. \tag{4.3.1}$$

Neste caso, dois testes são usados, um baseado na função de autocorrelação e outro baseado no periodograma acumulado.

4.3.1 – Verificação pela Função de Autocorrelação

Pode-se mostrar que, se o modelo é adequado,

$$\hat{a}_t = a_t + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

isto é, à medida que o número de observações da série cresce, os $\hat{a}_t$'s aproximam-se do ruído branco. Então, se os ruídos mostrarem-se correlacionados isto indicará inadequação do modelo.

Pode-se mostrar, ainda, como citado por BOX & JENKINS (5), que, para K suficientemente grande e se o modelo for apropriado, a quantidade

$$Q = n \sum_{k=1}^{K} r_k^2 (\hat{a}) \qquad (4.3.2)$$

tem distribuição aproximada de $\chi^2(K - p - q)$. Se o modelo não for apropriado, Q tende a ser grande, obtendo-se, assim, um teste de aderência aproximado para o modelo.

4.3.2 — Verificação pelo Periodograma Acumulado

Definição 4.1 — Periodograma

Uma série temporal a_t, $t = 1, 2, \ldots, n$ pode ser vista como constituída de senóides e cossenóides com diferentes freqüências, definindo-se o periodograma por

$$I(f_i) = \frac{2}{n} [(\sum_{t=1}^{n} a_t \cos 2\pi f_i t)^2 + (\sum_{t=1}^{n} a_t \operatorname{sen} 2\pi f_i t)^2], \qquad (4.3.3)$$

onde $f_i = \frac{i}{n}$ é a freqüência. ∎

O periodograma pode ser usado para testar a aleatoridade da série, detectando a existência de componentes periódicas, como sazonalidade. O periodograma acumulado normalizado é definido por

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} I(f_i)}{n\, s^2}, \qquad (4.3.4)$$

onde s^2 é uma estimativa de σ_a^2. Colocando-se num gráfico $C(f_j)$ contra f_j os pontos ficarão ao redor da reta que liga os pontos (0; 0) e (0,5; 1), caso a série seja ruído branco. Para saber se a série é mesmo ruído branco utiliza-se um teste do tipo Kolmogorov-Smirnov, traçando-se duas novas linhas ao redor da linha teórica, formando um limite superior e outro inferior (figura 4.5). Tais limites são dados por $\pm K_\alpha/\sqrt{q}$, onde

$$q = \begin{cases} (n-2)/2 \ , & n \text{ par} \\ (n-1)/2 \ , & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

e K vem de tabela, com nível de significância α

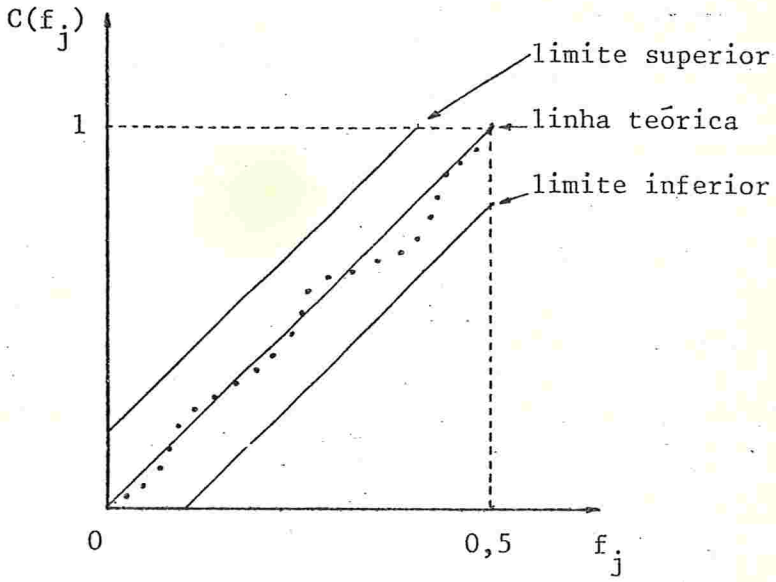


FIGURA 4.5 - Gráfico do Periodograma Acumulado contra a Freqüência.

4.3.3 – Uso dos Resíduos para Modificar o Modelo

A análise dos resíduos pode mostrar não só a inadequação do modelo, mas, também, como ele pode ser melhorado. Por exemplo, inicialmente identificou-se o modelo

$$\phi_o (B) \nabla^{d_o} z_t = \theta_o (B) b_t,$$

mas, posteriormente, verificou-se que os resíduos b_t não eram aleatórios, seguindo o seguinte modelo:

$$\phi_e (B) \nabla^{d_e} b_t = \theta_e (B) a_t ,$$

onde a_t é ruído branco. Então, o novo modelo será

$$\phi_o (B) \phi_e (B) \nabla^{d_o} \nabla^{d_e} z_t = \theta_o (B) \theta_e (B) a_t.$$

4.4 – PREVISÃO

Depois de encontrado o modelo que melhor se ajusta aos dados, pode-se usá-lo para prever valores futuros da série temporal.

A previsão de um valor futuro z_{t+l} é feita com base em observações prévias da série z_t, z_{t-1}, ... e do ruído a_t, a_{t-1}, ... Pode-se estudá-la em cada uma das três formas do modelo ARIMA vista em 3.3.2, mostrando diferentes aspectos da questão.

Para o instante $t + l$ as três formas do modelo ARIMA são:

a) forma de equação de diferença

$$z_{t+l} = \varphi_1 z_{t+l-1} + \ldots + \varphi_{p+d} z_{t+l-p-d} + a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} - \ldots - \theta_q a_{t+l-q}; \tag{4.4.1}$$

b) forma integrada

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, a_{t+l-j},$$

$$= C_t(l) + I_t(l), \tag{4.4.2}$$

com $\Psi_o = 1$ e $C_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{l+j} \, a_{t-j}$; e

c) forma invertida

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, z_{t+l-j} + a_{t+l} \, . \tag{4.4.3}$$

Notação — A seguinte notação é utilizada:

a) Previsão

Representa-se por $\hat{z}_t(l)$ a previsão no instante $t + l$ feita a partir do instante t ou, em outras palavras, a previsão de z_{t+l} na origem t;

b) Esperança condicional

Por simplificação representa-se a esperança condicional das seguintes formas:

$$[\, z_{t+l} \,] = \underset{t}{E} [\, z_{t+l} \,]$$

$$= E [\, z_{t+l} \,|\, z_t, z_{t-1}, \ldots \,] \; ; \text{ e}$$

c) Erro de previsão

O erro de previsão é representado por

$$e_t(l) = z_{t+l} - \hat{z}_t(l) \tag{4.4.4}$$

■

4.4.1 — Previsão de Erro Quadrático Médio Mínimo

Uma vez que a previsão na origem t só pode depender de valores até o instante t, a melhor previsão poderá ser escrita na forma

$$\hat{z}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi^*_{l+j} \, a_{t-j}. \tag{4.4.5}$$

Tomando-se o modelo na forma integrada (4.4.2), o erro quadrático médio da previsão é dado por

$$\begin{aligned} EQM[\hat{z}_t(l)] &= E[z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2 \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, a_{t+l-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Psi^*_{l+j} \, a_{t-j}\right]^2 \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j \, a_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{l+j} - \Psi^*_{l+j}) \, a_{t-j}\right]^2 \\ &= (1 - \Psi_1^2 - \ldots - \Psi_{l-1}^2)\,\sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{l+j} - \Psi^*_{l+j})^2 \sigma_a^2 , \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

uma vez que as covariâncias dos a_t são nulas.

De (4.4.6) conclui-se que o erro quadrático médio é minimizado quando $\Psi^*_{l+j} = \Psi_{l+j}$.

Então, a previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por

$$\hat{z}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{l+j}\, a_{t-j} = C_t(l) \,. \tag{4.4.7}$$

Como

$$z_{t+l} = (a_{t+l} + \Psi_1\, a_{t+l-1} + \ldots + \Psi_{l-1}\, a_{t+1}) + (\Psi_l\, a_t + \Psi_{l+1}\, a_{t-1} + \ldots)$$

$$= e_t(l) + \hat{z}_t(l), \tag{4.4.8}$$

o erro de previsão é dado por

$$e_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j\, a_{t+l-j} \,. \tag{4.4.9}$$

Como

$$E\,[e_t(l)] = 0,$$

a previsão dada por (4.4.7) é não-viciada.

Tomando-se a esperança condicional em (4.4.8), dado que todos os valores são conhecidos até o instante t, conclui-se que

$$\hat{z}_t(l) = \underset{t}{E}\,[z_{t+l}] \,. \tag{4.4.10}$$

4.4.2 — Intervalo de Confiança para a Previsão

A variância do erro de previsão sai de (4.4.9):

$$V(l) = \text{var}\,[e_t\,(l)]$$

$$= E\,[\,e_t\,(l)]^2$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j^2\,\sigma_a^2$$

$$= (1 + \Psi_1^2 + \ldots + \Psi_{l-1}^2)\,\sigma_a^2\,. \qquad (4.4.11)$$

Se se dispõem de pelo menos 50 observações, a estimativa da variância do erro de previsão pode ser dada por

$$\hat{V}\,(l) = \sum_{j=1}^{l-1} \Psi_j^2\;\; s_a^2\,, \qquad (4.4.12)$$

onde s_a^2 é a estimativa de σ_a^2.

Assim, sob a suposição de normalidade dos erros, podem-se construir intervalos de confiança aproximados, com nível $1 - \varepsilon$ de confiança, através de

$$\hat{z}_t\,(l) \pm u_{\varepsilon/2}\,\hat{V}\,(l)^{1/2}, \qquad (4.4.13)$$

onde $u_{\varepsilon/2}$ sai da normal padrão.

CAPÍTULO 5

MODELOS SAZONAIS E MODELOS DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Este capítulo tem duas partes distintas: na primeira, apresentam-se os modelos sazonais e na segunda, os de função de transferência. Os modelos sazonais aplicam-se a séries periódicas, enquanto os modelos de função de transferência são a base dos modelos de intervenção.

5.1 — MODELOS SAZONAIS

Algumas séries temporais apresentam comportamento periódico ou quase periódico que deve ser considerado no modelo.

Definição 5.1 — Sazonalidade

Diz-se que uma série temporal apresenta um componente periódico de período s quando os valores da série mostram semelhanças após s intervalos básicos de tempo. Quando a periodicidade é anual ou ocorre dentro do espaço de tempo de um ano, ela chama-se sazonalidade ou estacionalidade e diz-se que a série apresenta efeitos sazonais ou estacionais. ■

Normalmente, o período é de um ano (s = 12 meses ou s = 4 trimestres). A variação dentro do ano ocorre por causa de fatores climáticos, como temperatura e precipitação pluviométrica, de fatores institucionais, como datas festivas, e outros. Por exemplo, as vendas em lojas tendem a ser maiores em épocas bem definidas, como no Natal. Já nas séries de produção agrícola, a oferta de cada produto tende a ser maior durante a época da safra e menor na entressafra.

Pode haver, também, periodicidade dentro de cada mês. Por exemplo, o volume de negócios de um banco apresenta efeitos sazonais com período de 12 meses, mas, também experimenta variações dentro de cada mês, com período de 4 semanas, uma vez que os pagamentos de contas e de salários tendem a se concentrar em determinadas datas.

O comportamento periódico pode ser representado por misturas de senos e cossenos e estimado por uma série de Fourier, mas, este procedimento nem sempre leva a bons resultados, conforme BOX & JENKINS (5). Uma vez que as séries com componentes sazonais são homogêneas não-estacionárias, elas podem ser representadas também por um modelo ARIMA, que pode ser multiplicativo ou não.

Notação — Como duas observações distantes entre si de s intervalos de tempo apresentam algumas semelhanças, é interessante considerar um operador diferença mais generalizado que o definido anteriormente no item 2.1. Assim, define-se

$$\nabla_s z_t = (1 - B^s)\, z_t = z_t - z_{t-s}. \qquad ■$$

5.1.1 – Modelo Sazonal Multiplicativo

Seja uma série z_t com efeitos sazonais de período s. Suponha-se, para simplificação, que s = 12 meses. Então, é de se esperar que ocorram: a) relações entre as observações dos meses de um mesmo ano (variação dentro do período); e b) relações entre as observações de um mesmo mês em diferentes anos (variação entre períodos).

Exemplo 5.1 – Seja uma série temporal com observações de janeiro de 1975 a dezembro de 1979. O valor de janeiro de 1979 está relacionado aos valores dos outros meses de 1979 e também está relacionado aos valores de janeiro de 1975, de 1976, de 1977 e de 1978. ■

Para representar a relação entre as observações de um mesmo mês de diferentes anos, pode-se usar um modelo da forma

$$\Phi_P(B^s)\ \nabla_s^D\ z_t = \Theta_Q\ (B^s)\ \alpha_t, \qquad (5.1.1)$$

onde s = 12 meses,

$\Phi_P\ (B^s)$ e $\Theta_Q\ (B^s)$ são polinômios em B^s de graus P e Q, respectivamente, que satisfazem as condições de estacionaridade e invertibilidade.

Em grande parte dos casos é razoável supor que os parâmetros Φ e Θ são os mesmos para todos os meses.

O termo de erro α_t não é, em geral, ruído branco, podendo ser representado por

$$\phi_p(B)\ \nabla^d\ \alpha_t = \theta_q(B)\ a_t, \qquad (5.1.2)$$

onde a_t é ruído branco.

De (5.1.1) e (5.1.2) obtém-se o modelo sazonal multiplicativo proposto por BOX & JENKINS (5):

$$\phi_p(B)\ \Phi_P(B^s)\ \nabla^d\ \nabla_s^D\ z_t = \theta_q(B)\ \Theta_Q(B^s)\ a_t\ , \qquad (5.1.3)$$

que se diz modelo de ordem (p, d, q) x (P, D, Q).

5.1.2 – Modelo Sazonal Não-multiplicativo

Para muitas séries o modelo multiplicativo não é adequado, sendo preferível substituir $\theta(B)\ \Theta(B^s)$ por um operador de médias móveis mais geral $\theta^*(B)$, e $\phi(B)\ \Phi(B)$ por um operador auto-regressivo mais geral $\phi^*(B)$.

Exemplo 5.2 – Seja o operador multiplicativo

$$\theta(B)\ \Theta(B) = (1 - \theta_1\ B)\ (1 - \Theta_1\ B^{12})$$

e seja o operador não-multiplicativo

$$\theta^*(B) = 1 - \theta_1\ B - \theta_{12}\ B^{12} - \theta_{13}\ B^{13}\ .$$

Se θ_{13} diferir muito de $\theta_1\ \Theta_1$, o modelo não-multiplicativo será melhor, mas, se $\theta_{13} = \theta_1\ \Theta_1$ e $\theta_{12} = \Theta_1$, então, o modelo multiplicativo será mais parcimonioso. ∎

5.1.3 – Identificação

Para obter o modelo sazonal diferencia-se a série apropriadamente até se obter uma série estacionária:

$$w_t = \nabla^d \nabla_s^D z_t.$$

A seguir, ajusta-se um modelo ARMA, seguindo-se as fases de identificação, estimação e verificação.

A identificação do modelo é feita pelo exame das autocorrelações, sendo útil no cálculo o fato de que a função geradora de autocovariâncias do modelo sazonal multiplicativo é o produto das funções geradoras das componentes. Assim, se $\gamma(B)$ é a função geradora de autocovariâncias de (5.1.2) e $\Gamma(B^s)$ é a de (5.1.1), então, a função geradora de (5.1.3) é

$$\gamma(B)\ \Gamma(B^s).$$

Em BOX & JENKINS (5, p.329) encontram-se tabelas com as características das autocorrelações dos modelos mais comuns, que podem ser utilizadas na identificação.

Exemplo 5.3 - O modelo

$$w_t = (1 - \theta_1 B - \theta_s B^s)\ a_t$$

tem autocorrelações

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta_1/(1 + \theta_1^2 + \theta_s^2), & k = 1 \\ \theta_1\ \theta_s/(1 + \theta_1^2 + \theta_s^2), & k = s - 1 \\ -\theta_s/(1 + \theta_1^2 + \theta_s^2), & k = s \\ 0 & , \text{ nos outros casos.} \end{cases}$$

5.1.4 – Estimação

A estimação dos parâmetros nos modelos sazonais é feita do mesmo modo que nos modelos não-sazonais, vista em 4.2, calculando-se a soma de quadrados para diversos conjuntos de valores dos parâmetros e tomando-se as estimativas que resultem na menor soma de quadrados.

5.1.5 – Generalização do Modelo

O modelo sazonal (5.1.3) pode ser generalizado no sentido de conter mais de um componente sazonal e mais de um componentes auto-regressivo e de médias móveis:

$$\prod_i \phi_i(B) \prod_j \Phi_j(B^{s_j}) \nabla^d \nabla_{s_j}^{D_j} z_t =$$

$$= \theta_o + \prod_k \theta_k(B) \prod_m \Theta_m(B^{s_m}) a_t, \qquad (5.1.4)$$

onde θ_o é tendência determinística,

$\phi_i(B)$ são fatores auto-regressivos,

$\theta_k(B)$ são fatores de médias móveis,

$\Phi_j(B^{s_j})$ e $\Theta_m(B^{s_m})$ são fatores sazonais.

5.2 – MODELOS DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Em 2.2.5 foram definidos os modelos de função de transferência, em que se considera a série temporal como sendo gerada a partir de outra série temporal através de um filtro linear:

$$z_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \, x_{t-j}$$

$$= v(B) \, x_t, \qquad (5.2.1)$$

onde v(B) é a função de transferência do filtro.

O sistema diz-se *estável* quando a série v(B) converge para $|B| \leqslant 1$. A condição de estabilidade implica que mudanças finitas na série de entrada resultam em mudanças finitas na série de saída.

Às vezes, o efeito de uma mudança na série de entrada não se manifesta imediatamente sobre a série de saída, mas, após b instantes de tempo:

$$z_t = v(B) \, x_{t-b} \, . \qquad (5.2.2)$$

O modelo pode conter, ainda, um ruído independente de x_t:

$$z_t = v(B) \, x_{t-b} + n_t \, , \qquad (5.2.3)$$

Esse ruído não é, em geral, ruído branco, mas, pode, por sua vez, ser representado por um modelo ARIMA.

Definição 5.2 — Ganho do estado estável

Chama-se *nível do estado estável* ao valor da saída para um valor fixado da entrada. Seja $z_\infty(x)$ o valor para o qual a saída de um sistema estável atinge o equilíbrio para um nível x fixado da entrada. Em geral, a relação entre $z_\infty(x)$ e x é linear (5), o que permite escrever

$$z_\infty(x) = g\ x, \tag{5.2.4}$$

onde g é chamado ganho do estado estável.

Se a entrada for fixada no valor +1, isto é,

$$x_t = x_{t-1} = \ldots = 1,$$

então,

$$z_t = g$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = g, \tag{5.2.5}$$

isto é, para um sistema estável a soma dos pesos da resposta de impulso converge e é igual ao ganho do sistema. ∎

5.2.1 – Representação do Modelo por Equações de Diferenças

Pela filosofia de Box-Jenkins deve-se procurar representar o modelo com o menor número possível de parâmetros. Assim, pode-se mostrar (5, p.340) que, no caso de sistemas dinâmicos contínuos, o modelo em (5.2.1) pode ser representado parcimoniosamente pela seguinte equação linear diferencial:

$$(1 + \Xi_1 D + \ldots + \Xi_R D^R)\ z(t) = g(1 + H_1 D + \ldots + H_s D^s)\ x(t-\tau), \tag{5.2.6}$$

onde $D = \dfrac{d}{dt}$;

e, no caso de sistemas dinâmicos discretos, pela seguinte equação linear de diferenças:

$$(1 + \xi_1 \nabla + \ldots + \xi_r \nabla^r)\ z_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \ldots + \eta_s \nabla^s)\ x_{t-b}, \tag{5.2.7}$$

que também pode ser escrita em termos do operador $B = 1 - \nabla$ como

$$(1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r)\ z_t = (\omega_o - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s)\ x_{t-b}$$

ou

$$\delta(B)\ z_t = \omega(B)\ x_{t-b} \ . \tag{5.2.8}$$

O modelo, então, é chamado modelo de função de transferência de ordem (r, s). O ganho é dado pela razão

$$g = \frac{\omega_o - \omega_1 - \ldots - \omega_s}{1 - \delta_1 - \ldots - \delta_r} \ . \tag{5.2.9}$$

De maneira equivalente pode-se escrever

$$\delta(B)\ z_t = \Omega(B)\ x_t, \qquad (5.2.10)$$

com $\Omega(B) = \omega(B)\ B^b$.

É facil ver por (5.2.10) que o modelo ARIMA é o caso particular do modelo de função de transferência em que a série de entrada é ruído branco.

5.2.2 — Condições de Estabilidade

Para o sistema ser estável, é preciso que a função de transferência v(B) convirja para $|B| \leqslant 1$, como já foi visto. Como

$$v(B) = \frac{\omega_o - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r}, \qquad (5.2.11)$$

essa condição é equivalente à de que as raízes da equação caractarística

$$\delta(B) = 0$$

caiam fora do círculo unitário. Esta condição é análoga à de estacionaridade vista anteriormente.

Exemplo 5.4 — Seja um modelo de primeira ordem

$$z_t = \frac{\omega(B)}{1 - \delta_1 B}\ x_t\ .$$

A equação característica

$$1 - \delta_1 B = 0$$

tem raiz $G_1 = \dfrac{1}{\delta_1}$, que cai fora do círculo unitário se

$$-1 < \delta_1 < 1,$$

que é a condição de estabilidade do filtro. ■

5.2.3 – Correlação Cruzada

A seguir caracterizam-se as funções de covariância cruzada e de correlação cruzada, que são utilizadas na identificação do modelo de função de transferência.

Definição 5.3 – Covariância cruzada

Seja um processo estocástico bivariado estacionário (X_t, Z_t). A covariância cruzada entre x e z no *lag* k é definida por

$$\gamma_{xz}(k) = \text{cov}\,[x_t, z_{t+k}]$$

$$= E[(x_t - \mu_x)(z_{t+k} - \mu_z)] \qquad (5.2.12)$$

e a covariância cruzada entre z e x no *lag* k, por

$$\gamma_{zx}(k) = \text{cov}[z_t, x_{t+k}]$$

$$= E[(z_t - \mu_z)(x_{t+k} - \mu_x)] \quad , \qquad (5.2.13)$$

para k = 0, 1, 2, ...

e onde μ_x é a média de x e μ_z é a média de z.

Em geral,

$$\gamma_{xz}(k) \neq \gamma_{zx}(k),$$

entretanto,

$$\gamma_{xz}(k) = E[(x_t - \mu_x)(z_{t+k} - \mu_z)]$$

$$= E[(z_{t+k} - \mu_z)(x_t - \mu_x)]$$

$$= \gamma_{zx}(-k) \; .$$

A função de covariância cruzada é a covariância cruzada vista como função de k. ■

Definição 5.4 — Correlação cruzada

De forma semelhante define-se a correlação cruzada por

$$\rho_{xz}(k) = \frac{E[(x_t - \mu_x)(z_{t+k} - \mu_z)]}{\sqrt{E[(x_t - \mu_x)^2]\, E[(z_{t+k} - \mu_z)^2]}}$$

$$= \frac{\gamma_{xz}(k)}{\sigma_x \sigma_z} \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (5.2.14)$$

A função de correlação cruzada é a correlação cruzada vista como função de k.

Em geral,

$$\rho_{xz}(k) \neq \rho_{xz}(-k).$$

isto é, não é simétrica ao redor de k = 0. ■

5.2.3.1 — Estimação da função de covariância cruzada e da função de correlação cruzada

Sejam $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \ldots, (x_N, z_N)$ observações de um processo bivariado. Uma estimativa da covariância cruzada no *lag* k é dada por

$$c_{xz}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \overline{x})(z_{t+k} - \overline{z}), & k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \\ \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \overline{z})(x_{t-k} - \overline{x}), & k = 0, -1, -2, \ldots, \end{cases} \qquad (5.2.15)$$

onde $\overline{x}$ e $\overline{z}$ são as médias amostrais das séries de entrada e de saída, respectivamente.

A estimativa da correlação cruzada no *lag* k é dada por

$$r_{xz}(k) = \frac{c_{xz}(k)}{s_x \; s_z}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (5.2.16)$$

onde $s_x = \sqrt{c_{xx}(0)}$ e $s_z = \sqrt{c_{zz}(0)}$.

5.2.3.2 — Estimação da variância da correlação cruzada

Uma expressão aproximada para a variância da estimativa da correlação cruzada é dada por Bartlett ([1]), citado em BOX & JENKINS (5):

$$\mathrm{var}\,[\,r_{xz}(k)\,] \simeq \frac{1}{N-k} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \{\, \rho_{xx}(v)\ \rho_{zz}(v) +$$

$$+ \rho_{xz}(k+v)\ \rho_{xz}(k-v) +$$

$$+ \rho^2_{xx}(k)\ [\ \rho^2_{xz}(v) + \frac{1}{2}\ \rho^2_{xx}(v) + \frac{1}{2}\ \rho^2_{zz}(v)\ ] -$$

$$- 2\rho_{xz}(k)\ [\ \rho_{xx}(v)\ \rho_{xy}(v+k) + \rho_{xy}(-v)\ \rho_{zz}(v+k)]\,\}. \quad (5.2.17)$$

5.2.4 — Identificação

Seja o modelo

$$z_t = v(B)\ x_{t-b} + n_t$$

$$= \frac{\omega(B)}{\delta(B)}\ x_{t-b} + n_t, \quad (5.2.18)$$

([1]) BARTLETT, M.S. Stochastic processes. Cambridge University Press, Cambridge. 1955.

no qual z e x já foram devidamente diferenciadas.

A identificação do modelo segue os seguintes passos:

a) estimam-se aproximadamente os pesos da resposta de impulso;

b) usam-se as estimativas dos pesos para identificar as ordens r e s e o parâmetro de atraso b; e

c) com as estimativas $\hat{v}_j$ e os valores r, s e b obtêm-se estimativas iniciais dos parâmetros ω e δ.

5.2.4.1 — Identificação da função resposta de impulso

Os pesos v_j podem ser estimados diretamente a partir de (5.2.18). Multiplicando-se por x_{t-k} e tomando-se as esperanças obtém-se:

$$\gamma_{xz}(k) = v_o\, \gamma_{xx}(k) + v_1\, \gamma_{xx}(k-1) + \ldots , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.2.19}$$

Se os pesos forem nulos além de k = K, então, as primeiras k + 1 equações poderão ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz}(0) \\ \gamma_{xz}(1) \\ \ldots \\ \gamma_{xz}(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \ldots & \gamma_{xx}(K) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \ldots & \gamma_{xx}(K-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{xx}(K) & \gamma_{xx}(\ -1) & \ldots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o \\ v_1 \\ \ldots \\ v_K \end{bmatrix} \tag{5.2.20}$$

Substituindo-se as correlações cruzadas e as autocorrelações por suas estimativas e resolvendo-se as equações em (5.2.20) obtêm-se estimativas para v_j. Entretanto, além de tais estimativas não serem, geralmente, eficientes, ainda é difícil determinar o valor k a partir do qual os pesos são nulos e a solução do sistema de equações é trabalhosa.

A questão torna-se bem mais simples quando a entrada é ruído branco, o que pode ser conseguido pela operação denominada *pré-branqueamento*, que consiste em transformar o modelo de tal modo que a série de entrada seja ruído branco. Em primeiro lugar identifica-se e estima-se um modelo ARIMA para a série de entrada:

$$\phi_x(B)\ \theta_x^{-1}(B)\ x_t = \alpha_t, \tag{5.2.21}$$

onde α_t é ruído branco. Obtém-se, aqui, a estimativa de σ_α^2:

$$s_\alpha^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \hat{\alpha}_t^2. \tag{5.2.22}$$

Aplica-se, a seguir, a mesma transformação à série de saída:

$$\phi_x(B)\ \theta_x^{-1}(B)\, z_t = \beta_t \tag{5.2.23}$$

e à série de ruído

$$\phi_x(B)\ \theta_x^{-1}(B)\ n_t = \varepsilon_t\ . \tag{5.2.24}$$

Então, o modelo (5.2.18) pode ser escrito

$$\beta_t = v(B)\ \alpha_t + \varepsilon_t\ . \tag{5.2.25}$$

Multiplicando-se (5.2.25) por α_{t-k} e tomando-se as esperanças, chega-se a

$$\gamma_{\alpha\beta}(k) = v_k\ \sigma_a^2\ ,$$

de onde

$$v_k = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(k)}{\sigma_\alpha^2} = \rho_{\alpha\beta}(k) \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.2.26)$$

Substituindo-se os termos em (5.2.26) por suas estimativas tem-se uma estimativa para v_k:

$$\hat{v}_k = r_{\alpha\beta}(k) \frac{s_\beta}{s_\alpha}, \qquad (5.2.27)$$

que é ineficiente, mas, serve aos propósitos de identificação do modelo.

5.2.4.2 — Identificação de r, s e b

É fácil ver que

$$\delta(B)\ v(B) = \omega(B)\ B^b. \qquad (5.2.28)$$

Igualando-se os coeficientes das potências de B, têm-se:

$$v_j = \begin{cases} 0, & j < b \\ \omega_o, & j = b \\ \sum_{i=1}^{r} \delta_i\ v_{j-i} - \omega_{j-b}, & b+1 \leqslant j \leqslant b+s \\ \sum_{i=1}^{r} \delta_i\ v_{j-i}, & j > b+s, \end{cases} \qquad (5.2.29)$$

isto é, os pesos da resposta de impulso consistem de:

a) b valores nulos $v_o, v_1, \ldots, v_{b-1}$;

b) s - r + 1 valores $v_b, v_{b+1}, \ldots, v_{b+s-r}$ que não seguem um padrão fixo (e que não ocorrerm se s < r); e

c) valores v_j, com $j > b + s - r$, que seguem o padrão dado por uma equação de diferenças de ordem r com r valores iniciais $v_{b+s}, \ldots, v_{b+s-r+1}$.

Com isso, é possível identificar b, r e s a partir das estimativas iniciais $\hat{v}_j$.

5.2.4.3 — Estimação preliminar dos parâmetros

Os parâmetros $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ e $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_s$ podem ser estimados a partir de (5.2.29), substituindo-se os termos pelos seus valores iniciais encontrados.

5.2.4.4 — Identificação do modelo do ruído

Em (5.2.18) substituem-se os pesos v_j por suas estimativas iniciais e calcula-se

$$\hat{n}_t = z_t - \hat{v}(B)\, x_{t-b} \tag{5.2.30}$$

ou

$$\hat{n}_t = z_t - \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)} x_{t-b} \quad . \qquad (5.2.31)$$

A seguir, estima-se a função de autocorrelação de $\hat{n}_t$, com a qual se indentifica e se estima um modelo ARIMA para o ruído.

5.2.5 — Estimação

Seja o modelo

$$\tilde{z}_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \tilde{x}_{t-b} + n_t,$$

com $\quad n_t = \phi^{-1}(B)\ \theta(B)\ a_t.$

Os valores $\tilde{x}_t$ e $\tilde{z}_t$ representam desvios em relação aos valores esperados. Normalmente usam-se as médias amostrais como estimativas dos valores esperados. Se as séries foram diferenciadas tomam-se os valores esperados como iguais a zero.

Quando se dispõe de conjuntos $\underset{\sim}{x}_o$, $\underset{\sim}{z}_o$ e $\underset{\sim}{a}_o$ de valores iniciais, anteriores à origem das séries, pode-se calcular, dadas as observações,

$$a_t = a_t\ (b, \underset{\sim}{\delta}, \underset{\sim}{\omega}, \underset{\sim}{\phi}, \underset{\sim}{\theta} \mid \underset{\sim}{x}_o, \underset{\sim}{z}_o, \underset{\sim}{a}_o), \qquad t = 1, 2, \ldots N.$$

Com a suposição de normalidade do ruído branco, uma aproximação das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros pode ser obtida minimizando-se a seguinte soma de quadrados condicional:

$$S_o(b, \underset{\sim}{\delta}, \underset{\sim}{\omega}, \underset{\sim}{\phi}, \underset{\sim}{\theta}) = \sum_{t=1}^{N} a_t^2\ (b, \underset{\sim}{\delta}, \underset{\sim}{\omega}, \underset{\sim}{\phi}, \underset{\sim}{\theta} \mid \underset{\sim}{x}_o, \underset{\sim}{z}_o, \underset{\sim}{a}_o) \qquad (5.2.32)$$

Dados valores iniciais apropriados os valores de a_t podem ser calculados para qualquer conjunto de valores dos parâmetros. Primeiro, calcula-se a saída a partir de

$$z'_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b}.$$

A seguir obtém-se a série de ruído

$$n_t = z_t - z'_t$$

e, finalmente, o ruído branco

$$a_t = \theta^{-1}(B)\ \phi(B)\ n_t.$$

Na prática, calcula-se a soma de quadrados para diversos valores dos parâmetros e tomam-se os valores que minimizam tal soma.

5.2.6 – Verificação

Após a estimação dos parâmetros é preciso verificar se o modelo é adequado para descrever os dados. A inadequação pode aparecer em dois pontos: a) no modelo do ruído; e b) no modelo de função de transferência. A verificação pode ser feita pelo exame dos resíduos, apresentando-se dois testes de qui-quadrado descritos por Pierce ([2]), citado por BOX & JENKINS (5).

([2]) PIERCE, D.A. Distribution of residual correlations in dynamic / stochastic time series models. University of Wisconsin, Aug. 1968 (Technical Report 173).

Seja o modelo

$$z_t = v(B)\, x_t + \Psi(B)\, a_t \,,$$

que foi incorretamente estimado como

$$z_t = v_o(B)\, x_t + \Psi_o(B)\, a_{ot}.$$

Então,

$$a_{ot} = \Psi_o^{-1}(B)\, z_t - \Psi_o^{-1}(B)\, v_o(B)\, x_t$$

$$= \Psi_o^{-1}(B)\, [\, v(B) - v_o(B)\,]\, x_t + \Psi_o^{-1}(B)\, \Psi(B)\, a_t. \qquad (5.2.33)$$

5.2.6.1 — Modelo do ruído inadequado

Se somente o modelo do ruído está incorreto, isto é, se $v(B) = v_o(B)$, então, (5.2.33) torna-se

$$a_{ot} = \Psi_o^{-1}(B)\, \Psi(B)\, a_t. \qquad (5.2.34)$$

Observando-se (5.2.34) percebe-se que o processo a_{ot} é autocorrelacionado e que as correlações cruzadas de a_{ot} com x_t e com α_t são nulas, isto é, a_{ot} é independente de x_t e de α_t.

Tirando-se os valores iniciais dispõem-se de $m = N - u - p$ valores das estimativas dos resíduos $\hat{a}_t$, onde u é o maior entre r e s + b. Se os pesos Ψ_j podem ser considerados desprezíveis para $j > K$, então, pode-se mostrar (5) que a estatística

$$Q = m \sum_{k=1}^{K} r^2_{\hat{a}\hat{a}}(k), \qquad (5.2.35)$$

onde $r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ é a estimativa da função de autocorrelação das estimativas dos resíduos, tem distribuição de qui-quadrado com K - p - q graus de liberdade. A estatística dada em (5.2.35) fornece um teste aproximado de adequação do modelo do ruído.

5.2.6.2 – Modelo de função de transferência inadequado

Quando o modelo de função de transferência está incorreto, não só o ruído a_{ot} em (5.2.33) mostra-se autocorrelacionado, como também suas correlações cruzadas com x_t e α_t são não nulas. Isto acontece mesmo que o modelo do ruído esteja correto, isto é, mesmo que $\Psi_o(B) = \Psi(B)$, quando, então, (5.2.33) torna-se

$$a_{ot} = \Psi^{-1}(B)\,[\,v(B) - v_o(B)\,]\,x_t + a_t. \qquad (5.2.36)$$

De modo análogo ao do caso anterior, pode-se mostrar (5) que a estatística

$$S = m \sum_{k=0}^{K} r^2_{\alpha\hat{a}}(k), \qquad (5.2.37)$$

onde $r_{\alpha\hat{a}}(k)$ é a estimativa da função de correlação cruzada entre α e $\hat{a}$, tem distribuição de qui-quadrado com K + 1 - (r + s + 1) graus de liberdade. A estatística dada em (5.2.37) fornece um teste aproximado de adequação do modelo de função de transferência.

5.2.7 – Generalização do Modelo

O modelo de função de transferência (5.2.18) pode ser generalizado no sentido de conter: a) mais de um dos fatores ω e δ na função de transferência; b) mais de uma série de entrada; e c) fatores sazonais. Então, o modelo torna-se

$$\prod_i \nabla_{s_{iz}}^{D_{iz}} \nabla^d z_t =$$

$$= \theta_o + \sum_j \frac{\prod_k \omega_{jk}(B)}{\prod_m \delta_{jm}(B)} \prod_n \nabla_{s_{nx_j}}^{D_{nx_j}} x_{j,t-b_j} + n_t , \qquad (5.2.38)$$

onde θ_o é tendência determinística,

x_j são séries de entrada,

n_t é ruído,

$\nabla_{s_{iz}}^{D_{iz}}$ e $\nabla_{s_{nx_j}}^{D_{nx_j}}$ são fatores de diferenciação sazonal.

Os modelos de função de transferência encontram-se detalhados em BOX & JENKINS (5) e em SILVA (32).

CAPÍTULO 6

MODELOS DE INTERVENÇÃO

Basicamente, a construção de modelos de intervenção consiste em acrescentar aos modelos ARIMA descritos nos capítulos anteriores os efeitos de variáveis exógenas através de funções de transferência. Neste capítulo, que segue o enfoque dado por GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14), caracterizam-se os modelos de intervenção e seus tipos e apresentam-se exemplos de aplicações encontrados na literatura.

6.1 — MODELO DINÂMICO PARA INTERVENÇÃO

Seja uma série temporal para a qual identificou-se e estimou-se um modelo ARIMA com o qual se vêm fazendo previsões há algum tempo. Num dado instante ocorre um evento independente do fenômeno

que originou a série temporal, mas, cujos efeitos podem se manifestar sobre ele. Por exemplo, seja uma série de produção anual de determinado produto agrícola, para a qual se dispõe de um modelo adequado para fazer previsões. Num dado instante ou intervalo de tempo, a ocorrência de alterações climáticas como geada, seca ou enchente pode afetar, temporária ou permanentemente, essa produção agrícola e, conseqüentemente, o modelo utilizado para representá-la. A esse evento externo, cujo efeito deve-se incorporar ao modelo, chama-se intervenção.

Definição 6.1 — Intervenção

Seja uma série temporal z_t da qual se dispõe de N observações igualmente espaçadas no tempo. Define-se uma intervenção I como sendo um evento E, ao qual se associa uma variável aleatória X, cuja ocorrência num dado instante ou intervalo de tempo T pode estar ligada a mudanças na série z_t, em especial em seu nível e/ou em sua inclinação.

O termo *intervenção* foi introduzido por GLASS (13) em 1972, baseado em BOX & TIAO (6). ■

Notação

Neste trabalho as observações da série serão denotadas por O, as intervenções por I e o instante (ou intervalo) de tempo em que ocorre a intervenção por T. ■

Conceitualmente, o modelo de intervenção é equivalente a um modelo de função de transferência onde a série de entrada é binária. PACK (27) traça um paralelo entre o desenvolvimento da construção de modelos para séries temporais e a análise de regressão. Assim: a) modelos de função de transferência de entrada simples podem ser comparados a modelos de regressão simples; b) modelos de função de transferência de entrada múltipla são comparáveis a modelos de regressão múl

tipla; e c) modelos de intervenção representam a introdução de séries indicadoras (ou binárias, ou *dummy*) como séries de entrada.

Segundo JENKINS (19, p.70), "os modelos de intervenção representam generalizações de métodos usados para análise de dados, usualmente não expressos na forma de séries temporais, e aos quais os estatísticos referem-se pelo título geral Planejamento e Análise de Experimentos". Ainda que o modelo pareça simples, ele descreve um grande número de efeitos simultaneamente.

O modelo de intervenção tem a forma geral

$$Z_t = f(\kappa, X, t) + n_t, \tag{6.1.1}$$

onde

$Z_t = F(z_t)$ é alguma transformação apropriada da série, como $\log z_t$, $\sqrt{z_t}$ ou a própria z_t (de modo geral usa-se a transformação de Box-Cox);

$f(\kappa, X, t)$ pode ser algum efeito determinístico do tempo t, ou o efeito de variáveis exógenas X, em particular, de intervenções,

$$f(\kappa, X, t) = \sum_{j=1}^{k} v_j(B)\, X_{tj}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)}\, X_{tj}\ ; \tag{6.1.2}$$

X_{tj}, $j = 1, 2, \ldots, k$ são k variáveis exógenas (intervenções). Eventualmente pode-se usar X_{t-b}, onde b é o espaço de tempo decorrido entre as séries de entrada e saída (também chamada *defasagem* entre as séries);

κ é o conjunto de parâmetros desconhecidos que aparecem em $v_j(B)$ ou em $\omega_j(B)$ e $\delta_j(B)$;

$v_j(B) = \omega_j(B)/\delta_j(B)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ é a função de transferência da j-ésima variável exógena, sendo $v_j(B)$, $\omega_j(B)$ e $\delta_j(B)$ polinô

mios em B; e

n_t é um ruído que pode ser representado por um modelo ARIMA, inclusive com componentes sazonais.

Cada série X_{tj} é um indicador que assume os valores 0 ou 1, representando, respectivamente, a ausência ou a presença da j-ésima intervenção, isto é, a não-ocorrência ou a ocorrência do j-ésimo evento. As séries indicadoras podem ser representadas por dois tipos de função:

a) por uma função escada ou em degrau (*step function*)

$$X_{tj} = S_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geqslant T \end{cases} \qquad (6.1.3)$$

Neste caso, a intervenção age do instante T em diante e é chamada *contínua*, podendo ser assim esquematizada:

$$\cdots \quad 0_{T-3} \quad 0_{T-2} \quad 0_{T-1} \quad I \quad 0_T \quad I \quad 0_{T+1} \quad I \quad 0_{T+2} \quad \cdots$$

b) por uma função pulsação (*pulse function*)

$$X_{tj} = P_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases} \qquad (6.1.4)$$

Neste caso, a intervenção age somente no instante T e é chamada *temporária*, podendo ser assim esquematizada:

$$\cdots \quad 0_{T-3} \quad 0_{T-2} \quad 0_{T-1} \quad I \quad 0_T \quad 0_{T+1} \quad 0_{T+2} \quad \cdots$$

Pode-se referir, ainda, a um caso intermediário aos dois apresentados acima em que a intervenção age somente durante um intervalo de tempo iniciado em T_1 e terminado em T_2,

$$X_{tj} = \begin{cases} 0, & t < T_1 \quad e \quad t > T_2 \\ 1, & T_1 \leqslant t \leqslant T_2, \end{cases} \qquad (6.1.5)$$

podendo ser assim representada:

$$\ldots \; 0_{T_1-2} \; 0_{T_1-1} \; I \; 0_{T_1} \; I \; 0_{T_1+1} \; \ldots \; I \; 0_{T_2} \; 0_{T_2+1} \; 0_{T_2+2} \; \ldots$$

6.2 – EFEITOS DE INTERVENÇÃO

Há muitas formas pelas quais uma intervenção pode afetar uma série temporal. As alterações mais comuns são as mudanças no nível da série e as mudanças na direção ou inclinação da série. Estas últimas ocorrem quando a intervenção é complexa e seu efeito manifesta-se gradativamente. Além disso, a intervenção pode alterar a variância dos erros e também introduzir no modelo componentes que não havia antes, por exemplo, introduzir um componente auto-regressivo num processo de médias móveis.

A mudança pode ser abrupta (ou imediata) ou, então, só ocorrer depois de algum tempo de iniciada a intervenção (demorada ou defasada). Pode, ainda, ser temporária ou permanente, pode tornar a série mais estável ou aumentar sua variabilidade. A série também pode ser afetada de várias maneiras simultaneamente. A figura 6.1, adaptada de GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14), esquematiza os tipos mais comuns de efeitos de uma intervenção sobre uma série temporal.

O efeito de evolução mostrada na figura 6.1 acontece quando a série decai inicialmente, como se se extinguisse, para a seguir retomar seu desenvolvimento até um novo nível. Este tipo de efeito aparece, por exemplo, quando se estuda a sobrevivência de uma espécie após uma mutação adaptativa (14).

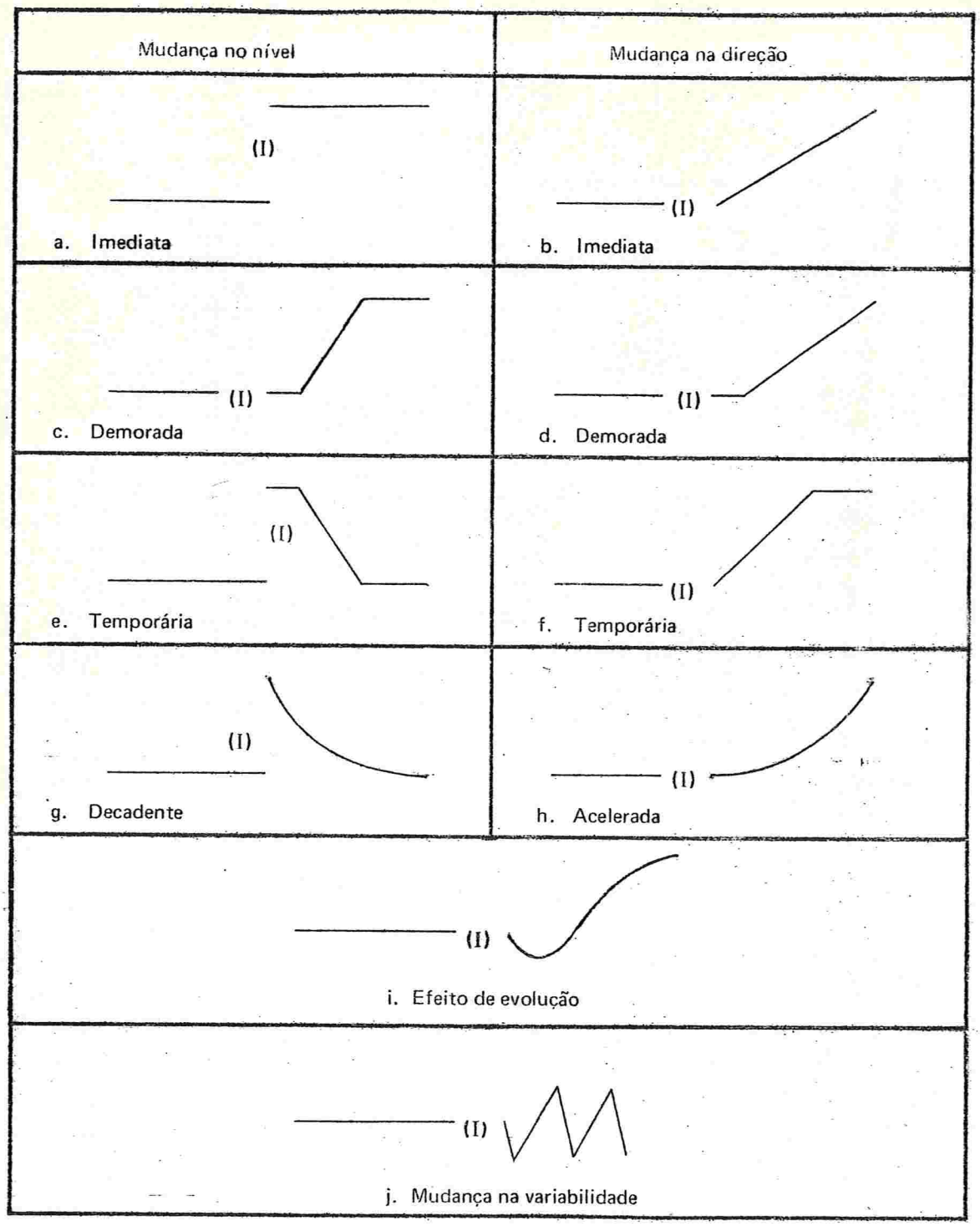


FIGURA 6.1 — Tipos Comuns de Efeitos de Intervenção sobre Séries Temporais, Adaptada de GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14).

Dois outros pontos devem ser considerados quando se estudam os efeitos de uma intervenção. O primeiro é que a intensidade da intervenção pode ser constante ao longo do tempo, mas, pode ser também variável. O outro é que, no caso de haver mais de uma intervenção, é possível existir interação entre elas, confundindo-se parte de seus efeitos.

6.3 – ESTRUTURA DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

O efeito da intervenção é determinado pela estrutura da função de transferência em (6.1.2). Por um lado, conhecendo-se a forma da função de transferência do modelo e estimando-se seus parâmetros, conhece-se também o tipo de efeito da intervenção. Por outro lado, o conhecimento do problema pode sugerir o possível efeito da intervenção, o que facilitará a identificação do modelo a ser usado. Em resumo, o conhecimento apriorístico do problema auxilia na identificação da função de transferência, enquanto os dados fornecem novas informações sobre efeitos desconhecidos *a priori*.

Seja o caso mais simples de uma única intervenção cujo modelo é dado por

$$z_t = v(B)\, X_t$$

$$= \frac{\omega(B)}{\delta(B)}\, X_t$$

$$= \frac{\omega_o - \omega_1 B - \ldots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \ldots - \delta_r B^r}\, X_t \,. \qquad (6.1.6)$$

Define-se

$$r_t = v(B)\, X_t$$

como a variação em z_t devida ao efeito de X_t acumulado durante o período t.

A seguir descrevem-se alguns dos casos mais comuns de efeitos de intervenção e suas respectivas funções de transferência, que são resumidos na figura 6.2, adaptada de PACK (27). Em BOX & JENKINS (5) encontram-se considerações semelhantes para modelos de função de transferência.

a) Caso em que a função de transferência é $v(B) = \omega_o$

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geqslant T, \end{cases}$$

$$\text{então,} \qquad r_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \omega_o, & t \geqslant T \end{cases}$$

e tem-se uma mudança imediata e permanente no nível da série de uma quantidade fixa ω_o. É o caso (a) da figura 6.1 e caso (a) da figura 6.2.

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T, \end{cases}$$

$$\text{então,} \qquad r_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ \omega_o, & t = T \end{cases}$$

e tem-se uma mudança no nível da série de uma quantidade ω_o somente no instante T. É o caso (b) da figura 6.2.

b) Caso em que a função de transferência é $v(B) = \omega_o/(1-\delta_1 B)$

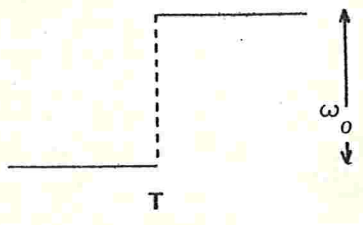
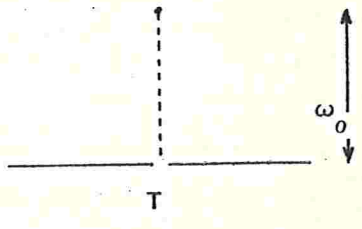
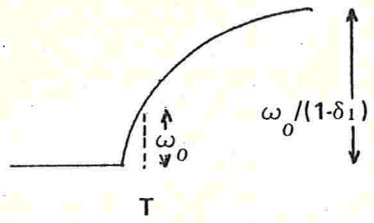
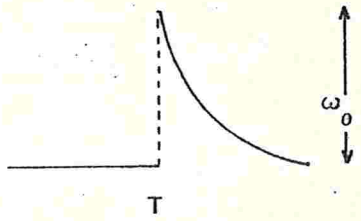
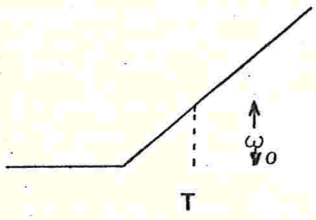
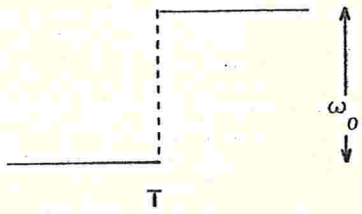
Função de transferência v(B)	$x_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geqslant T \end{cases}$	$x_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}$
ω_0	 (a)	 (b)
$\dfrac{\omega_0}{1-\delta_1 B}$, $\lvert\delta_1\rvert < 1$	 (c)	 (d)
$\dfrac{\omega_0}{1 - B}$	 (e)	 (f)

FIGURA 6.2 – Estrutura da Função de Transferência e Efeito de Intervenção, Adaptada de PACK (27).

Para garantir estacionaridade é preciso que $|\delta| < 1$. Neste caso,

$$r_t = \delta_1 r_{t-1} + \omega_o X_t .$$

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geqslant T, \end{cases}$$

então,

$$r_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \omega_o \sum_{j=0}^{k} \delta_1^j , & t = T + k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

e obtém-se uma progressão geométrica em que

$$r_t \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{\omega_o}{1 - \delta_1} .$$

Tem-se, portanto, uma mudança desacelerada no nível da série até a assíntota $\omega_o/(1 - \delta_1)$. É o caso (c) da figura 6.2.

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T, \end{cases}$$

então,

$$r_t = \begin{cases} 0 \\ \delta_1^k \omega_o, & t = T + k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

isto é, a mudança em z_t é inicialmente ω_o, depois decai exponencialmente até desaparecer o efeito da intervenção. É o caso (g) da figura 6.1 e o caso (d) da figura 6.2.

c) Caso em que a função de transferência é $v(B) = \omega_o/(1-B)$

Neste caso, $\delta_1 = 1$ e após a intervenção o modelo é não-estacionário.

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geqslant T, \end{cases}$$

então,

$$r_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ (k+1)\,\omega_o, & t = T + k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

e tem-se uma tendência determinística no modelo, introduzida pela intervenção a partir de T. É o caso (b) da figura 6.1 e o caso (e) da figura 6.2.

$$\text{Se} \quad X_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T, \end{cases}$$

então,

$$r_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ \omega_o, & t \geqslant T \end{cases}$$

e tem-se novamente uma mudança fixa e permanente no nível da série de uma quantidade ω_o. É o caso (a) da figura 6.1 e o caso (f) da figura 6.2.

6.4 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Tem-se aplicado, principalmente na década de 70, o método de Box-Jenkins na construção de modelos estatísticos com o objetivo de se fazerem previsões em séries temporais e, em certos casos, para fazer controle da série. A questão do controle é importante em processos químicos e em processos industriais. A questão da previsão é particularmente importante em Economia, quer em estudos macroeconômicos de séries temporais, nas quais podem se basear políticas econômicas, quer em estudos microeconômicos, onde se procure, por exemplo, fazer previsão de vendas numa empresa. Já a análise de intervenção tem sido aplicada principalmente na segunda metade da década.

A seguir relatam-se algumas aplicações da técnica de Box-Jenkins e, especialmente, da análise de intervenção encontradas na literatura.

6.4.1 – Previsão de Produção de Trigo

SCHMITZ & WATTS (30) utilizaram o método de Box-Jenkins para encontrar modelos paramétricos para séries temporais de produção de trigo dos Estados Unidos, do Canadá, da Austrália e da Argentina, no período 1900-66. O trabalho não faz análise de intervenção, mas, ilustra a aplicação da filosofia de Box-Jenkins na construção de modelos para previsão de séries de produção agrícola.

É comum utilizar-se um modelo de tendência para fazer previsão de produção. O modelo Box-Jenkins não identifica nem mede relações estruturais, como acontece quando se faz previsão com modelos econométricos. Os autores argumentam que os modelos estruturais (isto é,

que contêm variáveis econômicas) são bons para explicar o fenômeno, mas, nem sempre são bons para fazer previsão (se o for, pode ser utilizado). Quando se deseja fazer previsões, deve-se preferir sempre o modelo que fornece as melhores previsões. O estudo de STEKLER (33), citado pelos autores, sugere que "o grau de elegância dos modelos estruturais de previsão não está positivamente correlacionado com sua habilidade de fazer previsões".

Com os dados do período 1900-60 identificaram-se modelos IMA (1,1) da forma

$$z_t = z_{t-1} + \theta_o + a_t - \theta_1 a_{t-1} . \qquad (6.4.1)$$

O parâmetro θ_o, que se mostrou positivo e significativamente não nulo em todos os casos exceto para o Canadá, aparentemente representa o efeito da evolução das práticas culturais. Os parâmetros estimados para cada país encontram-se no quadro 6.1. O parâmetro θ_1, mostrou-se sempre positivo e significativamente não nulo.

QUADRO 6.1 - Estimativas dos Parâmetros dos Modelos, Séries de Produção de Trigo, 1900-60

País	$\hat{\theta}_o$	Desvio padrão	$\hat{\theta}_1$	Desvio padrão
Estados Unidos	0,21	0,11	0,50	0,10
Canadá	0,00	0,41	0,66	0,10
Austrália	0,20	0,05	0,88	0,06
Argentina	0,15	0,06	0,84	0,07

Fonte: SCHMITZ & WATTS (30).

Os autores também utilizaram o método de alisamento exponencial, chegando ao modelo

$$z_t = b_1 + b_2 t + a_t \tag{6.4.2}$$

que, diferençado, produz

$$z_t - z_{t-1} = b_2 + a_t - a_{t-1} \tag{6.4.3}$$

que é o caso particular de (6.4.1) em que $\theta_o = b_2$ e $\theta_1 = 1$.

A comparação entre os dois métodos através do coeficiente de Theil, definido por

$$u = \sqrt{\frac{\sum (z_t - \hat{z}_t)^2}{\sum (z_t - z_{t-1})^2}}, \tag{6.4.4}$$

mostrou ser a previsão obtida por alisamento exponencial melhor para os dados do Canadá, da Austrália e da Argentina.

6.4.2 — Poluição em Los Angeles

TIAO, BOX & HAMMING (34) utilizaram a análise de intervenção para estudar dados de poluição em Los Angeles no período de janeiro de 1955 a dezembro de 1972. Os dados referiam-se a medições horárias de poluentes primários como óxido nítrico, hidrocarbonetos, monóxido de carbono, dióxido de enxofre, e de poluentes secundários como ozônio e dióxido de nitrogênio, em diversos locais. O mais sério problema de poluição de Los Angeles não se refere aos poluentes primários, mas, a produtos, como ozônio, que se formam por reações fotoquímicas

entre alguns dos poluentes primários. Tais produtos são responsáveis pelo *smog* de Los Angeles, incluindo substâncias que causam irritações oculares e pulmonares e estando associados à diminuição da visibilidade.

As médias mensais de concentração de ozônio no centro de Los Angeles foram estudadas pelos autores. Os dados apresentam forte componente sazonal, sendo adequado o modelo

$$(1 - B^{12})\, z_t = (1 - \theta_1 B)\,(1 - \theta_2 B^{12})\, a_t \,. \qquad (6.4.5)$$

Em 1960, houve uma possível mudança no nível de ozônio devida à abertura da Golden State Freeway, que pode ter afetado o tráfego no centro da cidade, e à introdução de regulamento reduzindo a proporção de hidrocarbonetos reativos na gasolina vendida em Los Angeles. A alteração provável deve ter sido uma diminuição permanente no nível de ozônio, sugerindo a variável indicadora

$$X_{1t} = \begin{cases} 0, \text{ antes de } 1960 \\ 1, \text{ a partir de } 1960 \end{cases}$$

e a função de transferência

$$v(B) = \omega_o .$$

De 1966 a 1970 apareceram regulamentos alterando as emissões de hidrocarbonetos e de NO_x nos novos veículos. O fato de poder haver diferença entre os padrões no inverno e no verão sugere as seguintes variáveis indicadoras:

$$X_{2t} = \begin{cases} 0, \text{ até } 1966 \\ 1, \text{ nos meses de "verão" (junho a outubro) a partir de } 1966 \end{cases}$$

$$X_{3t} = \begin{cases} 0, \text{ até } 1966 \\ 1, \text{ nos meses de "inverno" (novembro a maio) a partir de } 1966. \end{cases}$$

Tem-se o seguinte modelo final:

$$z_t = \omega_o X_{1t} + \frac{\lambda_1}{1 - B^{12}} X_{2t} + \frac{\lambda_2}{1 - B^{12}} X_{3t} + \frac{(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12})}{1 - B^{12}} a_t \tag{6.4.6}$$

As estimativas dos parâmetros de (6.4.6) encontram-se nos quadro 6.2. Observa-se que o efeito da intervenção de 1960 foi significativo, tendo havido redução no nível de ozônio de 1,09 ppcm (partes por cem milhões). A estimativa de λ_1 indica um aumento fixo nos verões de 0,25 ppcm, enquanto a estimativa de λ_2 mostrou-se não diferir significativamente de zero. Os parâmetros de médias móveis mostraram-se significativamente não nulos.

QUADRO 6.2 - Estimativas dos Parâmetros do Modelo, Série de Medidas de Ozônio na Atmosfera, Los Angeles, 1955-72

Parâmetro	Estimativa	Desvio padrão
λ_1	0,25	0,07
λ_2	-0,07	0,06
ω_o	-1,09	0,13
θ_1	-0,24	0,03
θ_2	0,55	0,04

Fonte: TIAO, BOX & HAMMING (34).

6.4.3 — Poluição em New Jersey

LEDOLTER et alii (22) utilizaram a análise de intervenção para estudar dados de poluição atmosférica em New Jersey no período de janeiro de 1971 a junho de 1977. Os dados referiam-se a medições horárias da concentração de monóxido de carbono (CO) em sete locais.

As médias mensais de CO podem ser descritas por um modelo AR(1)

$$(1 - \phi B)\ (z_t - \mu) = a_t$$

ou

$$z_t = \mu + \frac{1}{1 - \phi B}\ a_t\ . \qquad (6.4.7)$$

Além disso, a série pode estar sendo afetada por três intervenções:

a) Os padrões federais de emissão de CO tornaram-se progressivamente mais rígidos no período considerado, esperando-se como resultado uma tendência de queda nas concentrações de CO, o que pode ser representado por

$$\frac{\omega_1}{1 - B}\ S_t^{(\text{fev. } 71)}\ ;$$

b) A crise de energia e petróleo provocou diminuição nas vendas de gasolina no inverno de 1973, iniciando-se em dezembro daquele ano, mas, voltando depois aos níveis normais, o que pode ser representado por

$$\frac{\omega_2}{1 - \delta B}\ P_t^{(\text{dez. } 73)}\ .$$

Se $\delta = 1$ a mudança no nível será permanente, mas, se $\delta < 1$ o efeito inicial sobre o nível da série será de ω_2, decaindo exponencialmente depois; e

c) Em fevereiro de 1974 iniciou-se um programa de inspeção e manutenção de veículos, à razão de 1/12 dos veículos por mês, esperando-se como resultado um decréscimo gradual na concentração de CO, o que pode ser representado por

$$\frac{\omega_3}{1 - B} \quad S_t^{(\text{fev. } 74)} .$$

Combinando (6.4.7) com as três intervenções tem-se o modelo

$$z_t = \mu + \frac{\omega_1}{1 - B} S_t^{(\text{fev. } 71)} + \frac{\omega_2}{1 - \delta B} P_t^{(\text{dez. } 73)} + \frac{\omega_3}{1 - B} S_t^{(\text{fev. } 74)} + \frac{1}{1-\phi B} a_t \tag{6.4.8}$$

Estimando-se os parâmetros e estudando o efeito de variáveis meteorológicas os autores concluíram que:

a) as estimativas de ω_1 e ω_3 estão altamente correlacionadas, não sendo possível separar seus efeitos, embora uma das duas deva, necessariamente, constar do modelo;

b) o nível de CO diminuiu no período estudado em média 28%, aproximadamente, podendo essa redução ser atribuída às três intervenções analisadas;

c) o efeito da crise de energia foi particularmente forte no inverno de 1973/74, diminuindo gradualmente depois;

d) as conclusões não se alteram quando se incluem variáveis meteorológicas como velocidade e direção do vento, temperatura, umidade relativa; e

e) do estudo da distribuição de freqüência dos dados verificou-se que a log-normal é adequada para representar medições horárias de CO, mas, a de Pareto é a mais adequada quando se consideram somente valores altos de CO.

6.4.4 — Previsão de Vendas

PACK (27) utilizou a análise de intervenção para estudar uma série de vendas de certo remédio no período de janeiro de 1954 a junho de 1960, num total de 78 observações. O produto é tradicional, sem competição direta, com estrutura de preços relativamente estável e com uma estabilidade geral devida à clientela fiel.

Ocorreram duas elevações de preços que podem ser encaradas como intervenções: uma de 6,5% em março de 1956 e outra de 6,8% em novembro do mesmo ano, numa elevação total de 13,8%. Dispunha-se, também, de uma série de gastos em publicidade.

Todos os modelos foram desenvolvidos sobre as primeiras 66 observações, ficando as últimas 12 para testar a qualidade das previsões de modelos alternativos. Testaram-se diversos modelos:

a) Modelo univariado para vendas

Identificou-se um modelo auto-regressivo com componente sazonal para a série de vendas:

$$(1 - \phi_6 B^6)(1 - B^6) z_t = a_t. \qquad (6.4.9)$$

A estimativa do parâmetro é $\hat{\phi}_6 = -0,58$, o desvio padrão residual é igual a 162,2 e a autocorrelação nos resíduos é não significativa. Usando o modelo para fazer previsão para as 12 últimas observações encontra-se o erro quadrático médio igual a 161,4. Os resultados estão resumidos no quadro 6.3.

Identificou-se, também, um modelo de médias móveis com sazonalidade para série de vendas:

$$(1 - B^{12})\, z_t = \theta_o + (1 - \theta_{12}\, B^{12})\, a_t. \qquad (6.4.10)$$

As estimativas dos parâmetros são $\hat{\theta}_o = -48{,}4$ e $\hat{\theta}_{12} = 0{,}59$, o desvio padrão residual é igual a 157,1, a autocorrelação é significativa no *lag* 15 e o erro quadrático médio é igual a 97,8 (quadro 6.3).

Logo, com base na autocorrelação dos resíduos, o modelo (6.4.9) é melhor, mas, com base no desvio padrão residual e no erro quadrático médio, o modelo (6.4.10) é melhor.

b) Modelo de função de transferência

Identificou-se o seguinte modelo de função de transferência para a série de vendas, tendo como entrada a série de publicidade:

$$(1 - B^{12})z_t = \theta_o + (\omega_o - \omega_1 B - \omega_2 B^2)(1 - B^{12})\, x_t + (1 - \theta_{12}B^{12})\, a_t\,. \qquad (6.4.11)$$

As estimativas são:

$$\begin{aligned} \theta_o &= -\,36{,}0, \\ \omega_o &= 0{,}25, \\ \omega_1 &= 0{,}21, \\ \omega_2 &= 0{,}19, \\ \theta_{12} &= 0{,}16, \end{aligned}$$

e o restante no quadro 6.3.

c) Modelo de intervenção para vendas

Definem-se as variáveis binárias

$$X_{1t} = \begin{cases} 0, & t \text{ até fevereiro de } 1956 \\ 1, & t \text{ a partir de março de } 1956 \end{cases}$$

e

$$X_{2t} = \begin{cases} 0, & t \text{ até outubro de } 1956 \\ 1, & t \text{ a partir de novembro de } 1956. \end{cases}$$

QUADRO 6.3 - Autocorrelações nos Resíduos, Desvios Padrões Residuais e Erros Quadráticos Médios das Previsões, Série de Vendas de Remédio , 1954-60

Modelo	Autocorrelação nos resíduos	Desvio padrão residual	Erro quadrático médio
Univariado AR	n.s.	162,2	161,4
Univariado MA	no *lag* 15	157,1	97,8
Função de transferência	n.s.	139,7	107,0
Intervenção	...	159,5	103,0
Função de tranferência e intervenção	...	141,4	...

n.s. = não significativo.

Fonte: PACK (27).

O exame do gráfico da série de vendas mostra que o comportamento da série é predominante, não devendo ser muito significativos os efeitos das intervenções. Se existir algum efeito será o de introduzir uma longa tendência determinística de diminuição das vendas, sugerindo o modelo

$$z_t = \frac{\omega_o}{1 - B} X_{1t} + \frac{\omega'_o}{1 - B} X_{2t} + (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t. \qquad (6.4.12)$$

As estimativas de ω_o e ω'_o estão fortemente correlacionadas, impedindo a distinção dos efeitos das duas elevações de preços, verificando-se que o modelo baseado na primeira intervenção é o melhor. As estimativas são $\hat{\omega}_o = -2,83$ e $\hat{\theta}_{12} = 0,57$ (quadro 6.3).

d) Modelo combinando função de transferência e intervenção

O modelo incorporando o efeito da publicidade ao da elevação de preços é dado por

$$(1-B^{12})z_t = \theta_o + (\omega_o + \omega_1 B + \omega_2 B^2)(1-B^{12})x_t + \frac{\omega_o}{1-B} X_{1t} + (1-\theta_{12}B^{12})\, a_t \qquad (6.4.13)$$

Estimou-se $\hat{\theta}_{12} = -0{,}66$ e os demais parâmetros foram não significativos.

Comparando-se os resultados, resumidos no quadro 6.3, conclui-se que o modelo univariado (6.4.10) é o melhor e que a influência atribuída ao aumento de preço diminui muito com a inclusão da variável publicidade.

6.4.5 — Mortalidade Infantil em São Paulo

SABOIA (29) utilizou a análise de intervenção para estudar o efeito da queda no padrão de vida sobre o índice de mortalidade infantil no município de São Paulo. Na evolução do índice de mortalidade infantil (IMI) em São Paulo distinguem-se duas fases bem distintas: entre 1920 e 1961 há decréscimo acentuado, enquanto, a partir de 1962, o processo inverte-se.

É razoável supor-se que a maioria dos óbitos de crianças menores de um ano ocorra nas famílias de baixo poder aquisitivo, as quais dependem essencialmente do salário mínimo, e que a diminuição do salário mínimo real (SMR) seja um indicador da deterioração do padrão de vida dos trabalhadores. O SMR apresenta a seguinte evolução: no período 1952-57 apresenta aumento considerável; entre 1957 e 1961 estabiliza-se; a partir de 1962 sofre queda devida, inicialmente, à inflação acelerada e, a partir de 1964, à política oficial de controle inflacio

nário e salarial; e, a partir de 1971, começa a recuperar-se lentamente.

Utilizando-se a transformação logarítmica

$$w_t = \log z_t - \log z_{t-1} , \qquad (6.4.14)$$

na qual a série w_t é interpretada como a taxa de variação anual do IMI, identificou-se, para o período 1920-61, o seguinte modelo ARMA (1,1):

$$(1 - \phi_1 B)\, w_t = \theta_o + (1 - \theta_1 B)\, a_t . \qquad (6.4.15)$$

Na estimação dos parâmetros obtiveram-se

$$\hat{\phi}_1 = 0{,}36, \qquad \hat{\theta}_o = -0{,}017 \qquad \text{e} \qquad \hat{\theta}_1 = 0{,}76 .$$

Usando o modelo (6.4.15) para fazer previsões para o período 1962-75 e comparando-se as previsões obtidas com os valores observados verificou-se que o modelo não é apropriado para o segundo período. Define-se, então a série binária

$$X_t = \begin{cases} 0, & t < 1962 \\ 1, & t \geqslant 1962, \end{cases}$$

que representa a deterioração no padrão de vida indicada pelo SMR.

O exame do gráfico da série mostra que a partir de 1962 há um aumento anual do IMI aproximadamente constante, sugerindo o modelo de intervenção

$$w_t = \frac{\theta_o}{1 - \phi_1 B} + \frac{1 - \theta_1 B}{1 - \phi_1 B}\, a_t + \beta X_t . \qquad (6.4.16)$$

Multiplicando-se por $(1 - \phi_1 B)/(1 - \theta_1 B)$ obtém-se

$$w_t' = \alpha + \beta X_t' + a_t , \qquad (6.4.17)$$

que é uma equação de regressão linear simples, cujos parâmetros podem ser estimados por $\hat{\alpha} = -0{,}062$ e $\hat{\beta} = 0{,}050$. Como $\hat{\beta}$ é significativamente diferente de zero, conclui-se que "o efeito de intervenção foi o aumento anual de 5% no IMI a partir de 1962".

6.4.6 — Uso de Cinto de Segurança na Austrália

BHATTACHARYYA & LAYTON (4) utilizaram a análise de intervenção para verificar a eficácia da legislação sobre uso de cinto de segurança na diminuição do número de pessoas mortas em acidentes nas estradas de Queensland, no período 1950-73.

Encontrou-se o seguinte modelo univariado para o número de pessoas mortas em acidentes:

$$(1 - B^4)\, z_t = \theta_o + (1 + \theta_4 B^4)\,(1 + \theta_3 B^3 + \theta_5 B^5)\, a_t. \qquad (6.4.18)$$

As intervenções foram as seguintes:

a) em 1/1/1969 uma lei tornou obrigatória a instalação de cintos em veículos novos;

b) em 1/1/1971, nova lei sobre o assunto; e

c) em 1/1/1972 o uso dos cintos colocados tornou-se obrigatório.

Verificou-se que somente após a terceira intervenção seu efeito manifestou-se, tendo se chegado ao seguinte modelo:

$$(1 - B^4) z_t = \theta_o + \omega_o S_t + (1 + \theta_4 B^4)\,(1 + \theta_3 B^3 + \theta_5 B^5)\, a_t. \qquad (6.4.19)$$

Mesmo introduzindo no modelo uma série de consumo de petró

leo, como medida do volume de atividades de trânsito nas estradas, concluiu-se que a legislação teve efeito muito significativo sobre o número de mortes em acidentes.

6.4.7 – Vazão do Rio Nilo

HIPEL et alii (17) estudaram a vazão média anual do Rio Nilo em Assuã, Egito, de outubro de 1870 a outubro de 1945. A primeira barragem de Assuã foi terminada em 1902 e o reservatório foi enchido pela primeira vez em 1902/03. A construção da represa causou uma queda de cerca de 22% na vazão média do rio.

Verificou-se ser necessária a transformação logarítmica dos dados e estimaram-se dois modelos de intervenção que se mostraram semelhantes:

$$y_t - \overline{y} = -0{,}2298\,(x_t - \overline{x}) + \frac{1}{1 - 0{,}4041}\,a_t \qquad (6.4.20)$$

e

$$y_t - \overline{y} = -0{,}2403\,(x_t - \overline{x}) + (1 + 0{,}4085)\,a_t. \qquad (6.4.21)$$

Os autores concluem que houve efeito significativo da construção da represa e do enchimento do reservatório sobre a vazão do rio. Mostram, também, que é grande o potencial de aplicações da análise de intervenção em estudos de recursos hidrológicos.

6.4.8 – Vazão do Rio South Saskatchewan

HIPEL, McLEOD & McBEAN (16) estudaram a vazão média mensal do Rio South Saskatchewan, em Saskatoon, Canadá, de janeiro de 1942 a dezembro de 1974. A represa Gardiner entrou em operação total em janeiro de 1969, alterando os padrões de vazão do rio.

Usou-se a transformação logarítmica dos dados e um termo de intervenção específico para cada mês, resultando no modelo

$$z_t - \bar{z} = y_t + \sum_{i=1}^{12} \omega_{oi} (x_{ti} - \bar{x}_i) + \frac{1}{1 - \phi B} a_t , \qquad (6.4.22)$$

onde y_t é uma componente determinística.

Concluiu-se que a operação da represa afetou significativamente as vazões médias mensais do rio. Existem, também, aumentos significativos na vazão de novembro a março.

Os autores sugerem, ainda, que a análise de intervenção pode vir a ser utilizada para verificar os efeitos de mudanças no uso da terra, como crescimento urbano, reflorestamento, construção e operação de represas, canais de desvio, e outras, sobre os padrões de vazão de rios.

6.4.9 – Qualidade da Água em Rio do Canadá

D'ASTOUS & HIPEL (10) estudaram dados de qualidade da água em dois locais do Grand River, em Ontario, Canadá. Os dados são médias mensais de concentração de fósforo, em miligramas por litro, tomadas abaixo das usinas de tratamento de esgotos. Uma das séries vai de janeiro de 1970 a dezembro de 1977 e a outra, de janeiro de 1970 a de

zembro de 1976.

A análise de intervenção é utilizada para estudar a capacidade de um processo convencional de tratamento para reduzir os níveis de fósforo nas águas, iniciada em janeiro de 1974 num dos locais e em fevereiro no outro. Utiliza-se, também, um procedimento para recuperar observações perdidas nas séries.

Os autores concluem que a introdução do tratamento teve efeito significativo, diminuindo as concentrações de fósforo nos dois locais de estudo.

6.4.10 — Movimento de Passageiros em Linhas Aéreas

NEVES & FRANCO (24) estudaram o efeito do depósito compulsório, instituído em junho de 1976, sobre o movimento mensal de passageiros das linhas aéreas entre o Brasil e a Europa, de janeiro de 1970 a março de 1977.

Utilizou-se a transformação de Box-Cox dos dados, para eliminar a heterocedasticidade, isto é, a variação do desvio padrão da série ao longo do tempo.

Para analisar o efeito da intervenção, os autores identificaram e estimaram um modelo ARIMA $(1,0,0) \times (0,1,1)_{12}$ para as observações anteriores a ela. Com esse modelo fizeram previsões para os meses seguintes, verificando que, com exceção do mês de junho de 1976, os valores observados sempre caem fora dos intervalos de confiança dos valores previstos, concluindo que o efeito da intervenção foi significativo, ainda que relacionado a outras variáveis econômicas.

CAPÍTULO 7

ESTIMAÇÃO E TESTE DE INTERVENÇÃO

Os procedimentos estatísticos usuais, quer paramétricos, quer não-paramétricos, não podem ser utilizados, a não ser em casos muito especiais, para fazer inferências sobre intervenções. De modo geral, na estimação e na inferência em modelos de séries temporais procura-se reduzi-los ao caso do modelo linear geral. É este o caminho adotado por GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14) que, entre outros, é apresentado neste capítulo.

7.1 – TESTE t DE STUDENT

Seja uma série temporal z_t da qual se dispõem de $n = n_1 + n_2$ observações igualmente espaçadas no tempo, sendo n_1 anteriores à ocor

rência de uma intervenção e n_2 posteriores, de tal modo que a série pode ser repartida em duas séries menores.

Se as observações são independentes com

$$z_1, \ldots, z_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

e

$$z_{n_1+1}, \ldots, z_n \simeq N(\mu_2, \sigma^2) ,$$

então, pode-se fazer inferências sobre a mudança de nível $\delta = \mu_2 - \mu_1$ usando o teste t de Student através da estatística

$$\frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \delta}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad (7.1.1)$$

onde $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$ são as médias amostrais de cada uma das duas séries menores e s é a estimativa de σ, conforme BOX & TIAO (6).

Se as observações não são independentes, mas, as situações "ocorre a intervenção" e "não ocorre a intervenção" podem ser aplicadas aleatoriamente, então, a distribuição t de Student pode ser usada como uma aproximação, fornecendo base válida para inferência (6).

Na prática, porém, as observações de séries temporais são quase sempre dependentes, não há possibilidade de aleatorização e freqüentemente a série é não-estacionária, podendo haver, ainda, fortes efeitos sazonais. Todos estes fatos invalidam seriamente os procedimentos estatísticos usuais baseados na distribuição t de Student.

7.2 – TESTE DE QUI-QUADRADO

Um procedimento natural para testar efeitos de intervenção, encontrado em BOX & TIAO (8), consiste em: a) identificar e estimar um modelo estocástico apropriado para a parte da série anterior à intervenção; b) usá-lo para fazer previsões de valores posteriores à intervenção; e c) calcular funções apropriadas dos erros de previsão que possam apontar as mudanças ocorridas no modelo.

Como visto no item 4.4.1, a previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por

$$\hat{z}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{l+j}\, a_{t-j} \tag{7.2.1}$$

e o erro de previsão por

$$e_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j\, a_{t+l-j}\,, \tag{7.2.2}$$

com $$a_l = e_1(l), \tag{7.2.3}$$

isto é, a_l é o erro de previsão um passo adiante.

Para $l = 1, 2, \ldots, m$, definem-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_{t+1} \\ \cdots \\ a_{t+m} \end{bmatrix}, \qquad \underset{\sim}{e} = \begin{bmatrix} e_t(1) \\ \cdots \\ e_t(m) \end{bmatrix},$$

$m \times 1$ $\qquad$ $m \times 1$

$$\underset{\sim}{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_2 & \Psi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_3 & \Psi_2 & \Psi_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{m-1} & \Psi_{m-2} & \Psi_{m-3} & \Psi_{m-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$m \times m$$

$$\underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\Psi}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\pi_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\pi_2 & -\pi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\pi_3 & -\pi_2 & -\pi_1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\pi_{m-1} & -\pi_{m-2} & -\pi_{m-3} & -\pi_{m-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} . \qquad (7.2.4)$$

$$m \times m$$

Então,

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\Psi} \; \underset{\sim}{a} \qquad \text{e} \qquad \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{\pi} \; \underset{\sim}{e}$$

A matriz de covariâncias (m x m) dos erros de previsão é dada por

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{V} &= E\,(\underset{\sim}{e}\;\underset{\sim}{e}') \\ &= E\,(\underset{\sim}{\Psi}\;\underset{\sim}{a}\;\;\underset{\sim}{a}'\;\underset{\sim}{\Psi}') \\ &= \underset{\sim}{\Psi}\;E\,(\underset{\sim}{a}\;\underset{\sim}{a}')\;\underset{\sim}{\Psi}' \\ &= \underset{\sim}{\Psi}\;\underset{\sim}{\Psi}'\;\sigma^2 . \end{aligned} \qquad (7.2.6)$$

Se o modelo é apropriado para o período de t + 1 a t + m , então, a estatística

$$Q = \underset{\sim}{e}' \, \underset{\sim}{V}^{-1} \, \underset{\sim}{e} \tag{7.2.7}$$

tem distribuição de qui-quadrado com m graus de liberdade. Caso contráio, Q tende a ser grande.

Como $\underset{\sim}{V}^{-1} = \underset{\sim}{\pi}' \, \underset{\sim}{\pi}/\sigma^2$,

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{e}' \frac{\underset{\sim}{\pi}' \, \underset{\sim}{\pi}}{\sigma^2} \underset{\sim}{e}$$

$$= \frac{a' \, a}{\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{l=1}^{m} a_l^2 \tag{7.2.8}$$

Então, a soma dos quadrados dos erros de previsão um passo adiante fornece um teste de qui-quadrado para intervenção.

Uma boa aproximação é dada pela estimativa

$$\hat{Q} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{l=1}^{m} a_l^2 ,$$

sendo que $\hat{Q}/m$ pode ser comparado ao valor de uma tabela F com m e n-p graus de liberdade, sendo n o número de observações e p o número de parâmetros estimados.

7.3 – PROCEDIMENTO ITERATIVO

Um procedimento interessante para testar efeitos de intervenção consiste em identificar e estimar modelos de intervenção através de funções de transferência, seguindo a filosofia de Box-Jenkins, conforme descrito nos capítulos 5 e 6. Com a matriz de covariância das estimativas dos parâmetros é possível fazer inferências, testando se cada parâmetro é estatisticamente não nulo e verificando, assim, se o modelo é apropriado ou não. Se o modelo final incluir componentes de intervenção isto significará que seu efeito é significativo.

7.4 – MODELO LINEAR GERAL

Um procedimento para estimar e testar os efeitos de intervenção transformando o modelo ARIMA no modelo linear geral é apresentado em GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14) e descrito para um caso particular em GLASS (13), sendo mostrado a seguir.

7.4.1 – Transformação do Modelo ARIMA num Modelo de Filtro Linear

Como visto no item 3.3.2, o modelo ARIMA pode ser escrito na forma de um modelo de filtro linear, também chamado forma integrada ou forma de choques aleatórios:

$$z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \, a_{t-j}$$

$$= \Psi(B) \, a_t, \qquad (7.4.1)$$

onde $\Psi(B) \, \phi(B) \, \nabla^d = \theta(B)$, (7.4.2)

Igualando-se os coeficientes das potências de B em (7.4.2) obtêm-se os pesos Ψ_j. De modo geral, segundo GLASS, WILLSON & GOTTMAN (14), pode-se determinar os pesos através das seguintes equações:

$$\Psi_o = 1$$

$$\Psi_1 \, \alpha_o + \Psi_o \, \alpha_1 = -\theta_1$$

$$\Psi_2 \, \alpha_o + \Psi_1 \, \alpha_1 + \Psi_o \, \alpha_2 = -\theta_2$$

$$\cdots$$

$$\Psi_h \, \alpha_o + \ldots + \Psi_o \, \alpha_h = -\theta_h \qquad (7.4.3)$$

Os α's são definidos por

$$\alpha_k = \sum_{r=0}^{k} \binom{d}{r} (-1)^r \, (-\phi_{k-r}) \, , \qquad (7.4.4)$$

onde d é o grau de diferenciação,

$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ são os parâmetros auto-regressivos e

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ são os parâmetros de médias móveis do processo.

Convencionam-se:

a) $\binom{d}{r} = 0$, se $r > d$;

b) $-\phi_o = 1$;

c) $\phi_{k-r} = 0$, se $k - r > p$; e

d) $\theta_h = 0$, se $h > q$.

Quando se dispõe de N observações da série é suficiente calcular os pesos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$. Os erros a_t, $t \leqslant 0$, são igualados a zero, como indicado por AIGNER (1).

7.4.2 – Efeito de Intervenção no Modelo ARIMA

Seja um processo ARIMA (p, d, q) cujo nível inicial é μ:

$$z_t = \mu + \sum_{j=0}^{t-1} \Psi_j \; a_{t-j} \tag{7.4.5}$$

Suponha-se que ocorre uma intervenção no instante T, cujo efeito é alterar o nível da série de uma quantidade δ a partir deste instante. Então,

$$z_t = \begin{cases} \mu + \Psi(B)\, a_t, & t < T \\ \mu + \delta + \Psi(B)\, a_t, & t \geqslant T \end{cases} \tag{7.4.6}$$

Para estimar e testar o efeito δ da intervenção é necessário transformar o modelo ARIMA (p, d, q) num modelo linear e, então, aplicar os procedimentos usuais.

Exemplo 7.1 – Seja o processo MA(1)

$$z_t = \mu + a_t - \theta a_{t-1} ,$$

que após a intervenção torna-se

$$z_t = \mu + \delta + a_t - \theta a_{t-1}.$$

Vamos transformar z_t numa série y_t que esteja na forma do modelo linear geral, isto é, na qual todos os erros, exceto a_t, tenham sido removidos. A primeira observação já está na forma desejada:

$$y_1 = z_1 = \mu + a_1$$

A segunda observação também estaria se não fosse o termo θa_1, que deve ser removido:

$$y_2 = z_2 + \theta y_1$$

$$= \mu + a_2 - \theta a_1 + \theta \mu + \theta a_1$$

$$= (1 + \theta) \mu + a_2 .$$

De modo análogo, verifica-se que as outras observações podem ser transformadas através da relação recursiva

$$y_t = z_t + \theta y_{t-1}$$

$$= (1 + \theta + \ldots + \theta^{t-1}) \mu + a_t.$$

Após a intervenção, tem-se

$$y_T = z_T + \theta y_{T-1}$$

$$= \mu + \delta + a_T - \theta a_{T-1} + \theta(1 + \theta + \ldots + \theta^{T-2}) \mu + \theta a_{T-1}$$

$$= (1 + \theta + \ldots + \theta^{T-1}) \mu + a_T + \delta.$$

É fácil mostrar que, para $t \geqslant T$,

$$y_t = (1 + \theta + \ldots + \theta^{T-1})\,\mu + (1 + \theta + \ldots + \theta^{t-T})\,\delta + a_t.$$

Em forma matricial pode-se escrever

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{a},$$

com

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_{T-1} \\ \hline y_T \\ \ldots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \theta & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 1 + \ldots + \theta^{T-2} & 0 \\ \hline 1 + \ldots + \theta^{T-1} & 1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 + \ldots + \theta^{N-1} & 1 + \ldots + \theta^{N-T} \end{bmatrix},$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_N \end{bmatrix}.$$

Os estimadores de mínimos quadrados de μ e δ são dados por

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\underset{\sim}{X}'\,\underset{\sim}{X})^{-1}\,\underset{\sim}{X}'\,\underset{\sim}{y}\,.$$

As estimativas dos erros são dadas por

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{X}\,\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

e a soma de quadrados das estimativas dos erros, por

$$SQ\ (\theta \mid \underset{\sim}{z}) = \hat{\underset{\sim}{a}}'\ \hat{\underset{\sim}{a}}\ .$$

Na prática, calcula-se SQ para diversos valores de θ, tomando-se como estimativa $\hat{\theta}$ o valor que minimiza SQ, o que é equivalente a minimizar a estimativa da variância residual do erro, s_a^2.

Sob a suposição de normalidade,

$$\frac{\mu - \hat{\mu}}{s_a \sqrt{c_{11}}} \sim t_{N-2}$$

e

$$\frac{\delta - \hat{\delta}}{s_a \sqrt{c_{22}}} \sim t_{N-2}\ ,$$

onde

$$s_a^2 = \frac{\hat{\underset{\sim}{a}}'\ \hat{\underset{\sim}{a}}}{N-2}$$

c_{jj} é o j-ésimo elemento da diagonal principal de $(\underset{\sim}{X}'\ \underset{\sim}{X})^{-1}$,

e

t_{N-2} indica a distribuição t de Student com N-2 graus de liberdade.

O intervalo de confiança ao nível α de significância para o efeito da intervenção pode ser construído, obtendo-se

$$\hat{\delta} \pm t_{N-2}\ (1 - \frac{\alpha}{2})\ \ s_a \sqrt{c_{22}}\ \ . \qquad \blacksquare$$

Exemplo 7.2 - Seja o processo AR(1)

$$z_t - \mu = \phi\ (z_{t-1} - \mu) + a_t$$

ou $$z_t = (1 - \phi)\ \mu + \phi z_{t-1} + a_t\ .$$

A transformação num modelo linear é feita por

$$y_1 = z_1 = \mu + a_t$$

$$y_2 = z_2 - \phi z_1$$

$$= (1 - \phi)\ \mu + \phi\ z_1 + a_t - \phi\ z_1$$

$$= (1 - \phi)\ \mu + a_t$$

e, de modo geral,

$$y_t = z_t - \phi z_{t-1}$$

$$= (1 - \phi)\ \mu + a_t.$$

Após a intervenção o modelo torna-se

$$z_t - (\mu + \delta) = \phi\ [\ z_{t-1} - (\mu + \delta)\ ] + a_t$$

ou $$z_t = (1 - \phi)\ \ (\mu + \delta)\ + \phi\ z_{t-1} + a_t.$$

A transformação fica sendo

$$y_T = (1 - \phi)\ \mu + \delta + a_T$$

e $$y_t = (1 - \phi)\ (\mu + \delta) + a_t\ \ ,\ t > T$$

O restante segue análogo ao exemplo 7.1, com exceção da matriz X que aqui é definida por

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\phi & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 1-\phi & 0 \\ \hline 1-\phi & 1 \\ 1-\phi & 1-\phi \\ \cdots & \cdots \\ 1-\phi & 1-\phi \end{bmatrix} . \qquad \blacksquare$$

7.4.3 — Transformação do Modelo ARIMA no Modelo Linear Geral

Como visto nos exemplos 7.1 e 7.2, para estimar e testar o efeito δ da intervenção transforma-se o modelo ARIMA (p, d, q) no modelo linear geral e aplicam-se os procedimentos estatísticos usuais. Os parâmetros e o efeito da intervenção são estimados por mínimos quadrados e testados pelo teste t de Student. Desenvolve-se, a seguir, a transformação do modelo geral ARIMA (p, d, q), dado por (7.4.6), no modelo linear geral.

Seja y_t a série transformada que satisfaz as condições do modelo linear geral. O objetivo é transformar z_t em y_t de tal modo que todos os erros, exceto a_t, sejam removidos. Tomem-se os primeiros termos de (7.4.5):

$$z_1 = \mu + \Psi_o a_1 = \mu + a_1$$

$$z_2 = \mu + \Psi_1 a_1 + \Psi_o a_2$$

$$z_3 = \mu + \Psi_2 a_1 + \Psi_1 a_2 + \Psi_o a_3 .$$

A primeira observação já satisfaz as condições do modelo linear geral:

$$y_1 = z_1 = \mu + a_1. \tag{7.4.7}$$

A segunda observação já estaria na forma desejada se não fosse o termo $\Psi_1 a_1$, que pode ser assim removido:

$$\begin{aligned} y_2 &= z_2 - \Psi_1 y_1 \\ &= \mu + \Psi_1 a_1 + a_2 - \Psi_1 (\mu + a_1) \\ &= (1 - \Psi_1) \mu + a_2 . \end{aligned} \tag{7.4.8}$$

A terceira observação pode ser transformada por

$$\begin{aligned} y_3 &= z_3 - \Psi_1 y_2 - \Psi_2 y_1 \\ &= \mu + \Psi_2 a_1 + \Psi_1 a_2 + a_3 \\ &\quad -\Psi_1 (1 - \Psi_1)\mu - \Psi_1 a_2 \\ &\quad - \Psi_2 \mu - \Psi_2 a_1 \\ \hline &= [1 - \Psi_1 (1 - \Psi_1) - \Psi_2] \mu + a_3 \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

Generalizando, a transformação é dada por

$$\begin{aligned} y_t &= z_t - \sum_{j=1}^{t-1} \Psi_j y_{t-j} \\ &= g_t (\mu) + a_t , \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

isto é, a série transformada compreende o erro a_t mais uma função li

near de μ .

7.4.4 — Inclusão do Efeito de Intervenção no Modelo Transformado

Suponha-se que os efeitos de m intervenções, cujos parâmetros são $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$, possam ser representados por uma função linear destes parâmetros e do nível inicial da série:

$$f_t(\mu, \delta_1, \ldots, \delta_m) = x_{t1}\,\mu + x_{t2}\,\delta_1 + \ldots + x_{t,m+1}\,\delta_m,$$

$$t = 1, 2, \ldots, N. \qquad (7.4.11)$$

Na forma matricial,

$$\underset{\sim}{f}(\mu, \delta_1, \ldots, \delta_m) = \underset{\sim}{X}\ \underset{\sim}{\beta}, \qquad (7.4.12)$$

onde

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,m+1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{N,m+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta_1 \\ \cdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \qquad (7.4.13)$$

Então, o modelo ARIMA (p, d, q) com intervenção torna-se

$$z_t = f_t(\mu, \delta_1, \ldots, \delta_m) + \sum_{j=0}^{t-1} \Psi_j\, a_{t-j} \qquad (7.4.14)$$

A série z_t em (7.4.14) pode ser transformada através de (7.4.10). Sejam x^*_{tk} , t = 1, 2, ..., N e k = 1, 2, ..., m, os pesos

dos parâmetros na série transformada.

Para a primeira observação

$$y_1 = z_1 = x_{11}\,\mu + x_{12}\,\delta_1 + \ldots + x_{1,m+1}\,\delta_m + a_t$$

$$= x^*_{11}\,\mu + x^*_{12}\,\delta_1 + \ldots + x^*_{1,m+1}\,\delta_m + a_t\,. \qquad (7.4.15)$$

Logo, $x^*_{1k} = x_{1k}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, m.$

Para a segunda observação

$$y_2 = z_2 - \Psi_1\,y_1 = x_{21}\,\mu + x_{22}\,\delta_1 + \ldots + x_{2,m+1}\,\delta_m + \Psi_1\,a_1 + a_2$$

$$\underline{-\Psi_1\,x^*_{11}\,\mu - \Psi_1\,x^*_{22}\,\delta_1 - \ldots - \Psi_1\,x_{1,m+1}\,\delta_m - \Psi_1\,a_1}$$

$$= (x_{21} - \Psi_1\,x^*_{11})\,\mu + (x_{22} - \Psi_1\,x^*_{12})\,\delta_1 + \ldots + a_2$$

$$= x^*_{21}\,\mu + x^*_{22}\,\delta_1 + \ldots + a_2 \qquad (7.4.16)$$

Logo, $x^*_{21} = x_{21} - \Psi_1\,x^*_{11}$

$x^*_{22} = x_{22} - \Psi_1\,x^*_{12}$, etc.

De modo geral,

$$x^*_{tk} = x_{tk} - \sum_{j=1}^{t-1} \Psi_j\,x^*_{t-j,k} \qquad (7.4.17)$$

e a série transformada é dada por

$$y_t = x^*_{t1}\,\mu + \sum_{k=1}^{m} x^*_{t,k+1}\,\delta_k + a_t. \qquad (7.4.18)$$

Em forma matricial

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}^* \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{a} , \qquad (7.4.19)$$

onde

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_N \end{bmatrix} , \qquad \underset{\sim}{X}^* = \begin{bmatrix} x^*_{11} & x^*_{12} & \cdots & x_{1,m+1} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & \cdots & x^*_{2,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^*_{N1} & x^*_{N2} & \cdots & x^*_{N,m+1} \end{bmatrix} ,$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta_1 \\ \cdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_N \end{bmatrix} . \qquad (7.4.20)$$

O vetor $\underset{\sim}{\beta}$ pode ser estimado por mínimos quadrados, através de

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = [(\underset{\sim}{X}^*)' \ \underset{\sim}{X}^*]^{-1} \ (\underset{\sim}{X}^*)' \ \underset{\sim}{y} , \qquad (7.4.21)$$

podendo-se construir testes de significância e intervalos de confiança segundo a teoria dos modelos lineares (Ver, por exemplo, SEARLE (31)).

Para cada conjunto de valores possíveis dos parâmetros auto-regressivos ϕ e de médias móveis θ, dentro da região de invertibilidade e estacionaridade, encontra-se uma solução para (7.4.21). Toma-se a solução para a qual a variância residual do erro, s_a^2, é mínima, o que equivale a minimizar a soma dos quadrados dos erros.

Têm-se, ainda, as estimativas dos erros

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{X}^* \hat{\underset{\sim}{\beta}} , \qquad (7.4.22)$$

a estimativa da variância residual dos erros

$$s_a^2 = \frac{\hat{\underset{\sim}{a}}' \underset{\sim}{a}}{N-2} \tag{7.4.23}$$

e as estatísticas

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{s_a \sqrt{c^{11}}} \sim t_{N-2} \tag{7.4.24}$$

e

$$\frac{\hat{\delta}_j - \delta_j}{s_a \sqrt{c^{kk}}} \sim t_{N-2}\,, \tag{7.4.25}$$

com $j = 1, 2, \ldots, m$ e $k = j - 1$,

onde c^{kk} é o k-ésimo elemento da diagonal principal de $[(X^*)' X^*]^{-1}$.

Exemplo 7.3 - Seja o modelo MA(1) do exemplo 7.1. Naquele caso, ter-se-ia por (7.4.13) e (7.4.20) que

$$\underset{\sim}{X} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{X}^* = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 + \theta & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 1 + \ldots + \theta^{T-2} & 0 \\ \hline 1 + \ldots + \theta^{T-1} & 1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 + \ldots + \theta^{N-1} & 1 + \ldots + \theta^{N-T} \end{array}\right],$$

uma vez que $\Psi_1 = -\theta$ e, por (7.4.17),

$$x^*_{11} = x_{11} = 1,$$

$$x^*_{12} = x_{12} = 0$$

$$x^*_{21} = x_{21} - \Psi_1 x^*_{11}$$

$$= 1 - \theta$$

$$x^*_{22} = x_{22} - \Psi x^*_{12}$$

$$= 0$$

e assim por diante.

Exemplo 7.4 - Seja o modelo de intervenção dado em (6.1.6), com N=5 e

$$X_t = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ 1, & t \geqslant 3. \end{cases}$$

Se a função de transferência for $v(B) = \omega_o = \delta$, então, o efeito da intervenção será o de alterar o nível da série de μ para $\mu + \delta$ a partir do instante T = 3. As matrizes de (7.4.13) ficarão

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta \end{bmatrix}$$

■

Exemplo 7.5 - Seja o modelo de intervenção dado em (6.1.6), com N=5 e

$$X_t = \begin{cases} 0, & t \neq 3 \\ 1, & t = 3. \end{cases}$$

Se $v(B) = \omega_o/(1 - \delta_1 B) = \delta/(1 - k B)$, com $k = 1/2$, então, o efeito da intervenção será o de alterar, inicialmente, o nível da série de μ para $\mu + \delta$, decaindo geometricamente depois com razão k. As matrizes de (7.4.13) ficarão

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & k \\ 1 & k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \delta \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

PARTE 2

APLICAÇÕES

Nesta parte, que inclui os capítulos 8, 9 e 10, procura-se aplicar a análise de intervenção e os modelos de Box-Jenkins em séries reais, com ênfase em séries de importância em economia agrícola. O estudo de séries temporais em economia agrícola é de grande importância prática, principalmente para fazer previsões. É também interessante pelas características de suas séries temporais:

a) séries agronômicas de maneira geral possuem forte componente sazonal devido aos ciclos biológicos e de cultivo e às variações climáticas estacionais;

b) séries agronômicas são muito afetadas localmente por variações climáticas de grande intensidade, como geadas, secas e enchentes, que podem ser tratadas como intervenções;

c) medidas de política agrícola, que atuam como intervenções, podem ter grande efeito sobre séries agronômicas, sendo interes

sante verificar se esse efeito equivale ao esperado no momento da aplicação da medida; e

d) séries de produção agropecuária geralmente respondem a preços, além de sentirem efeitos de substituição de culturas e de substituição entre produtos alternativos, o que sugere modelos de função de transferência.

Convém lembrar, neste ponto, que nos países não desenvolvidos o estudo de séries temporais não experimentais, como as econômicas e sociais, é bastante dificultado por não se dispor de séries de boa qualidade e suficientemente longas para permitirem análises com alguma sofisticação.

Para os cálculos neste trabalho utilizou-se o programa de computador desenvolvido por PACK (26), que faz identificação, estimação e previsão de séries temporais, conforme BOX & JENKINS (5), para os seguintes tipos de modelos: a) modelo univariado (ARIMA); b) modelo de função de transferência; c) modelo de intervenção; e d) modelo de intervenção e função de transferência.

Nos modelos de intervenção utilizou-se o seguinte procedimento, proposto por PACK (27):

a) construir um modelo univariado para a série z_t em estudo, que será usado como modelo do ruído;

b) identificar o possível efeito de intervenção pelo conhecimento *a priori* do fenômeno envolvido e pelo exame do gráfico da série; e

c) com a função de transferência apropriada ao efeito de intervenção identificado proceder à estimação do modelo.

Como critério para comparação de modelos usar-se-á o desvio padrão do resíduo (DPR), que mede o grau de ajustamento do modelo aos dados. Não se usará o desvio padrão do resíduo calculado sobre as previsões, uma vez que as séries são curtas ou não permitem a divisão em duas partes, uma para ajustamento e outra para previsão.

No capítulo 8, analisam-se os efeitos de mudanças nas estru

turas de produção e de mercado do leite no Estado de São Paulo. No capítulo 9, analisam-se os efeitos da ocorrência de geadas e doenças e de acontecimentos históricos sobre a cafeicultura do Estado de São Paulo e do Brasil. As conclusões do trabalho são apresentadas no último capítulo.

CAPÍTULO 8

MODELOS PARA SÉRIES DE LEITE

A produção de leite de vaca no Estado de São Paulo encontra-se atualmente em fase de transição. Tradicionalmente, o leite tem sido produzido por dois tipos de produtores: a) produtores permanentes, que produzem leite com gado especializado, alguns usando tecnologia moderna e obtendo produtividade satisfatória; e b) produtores eventuais, que criam gado de corte, mas, nos meses de safra, comercializam o excedente de leite como subproduto, obtendo baixa produtividade.

Vários fatores afetaram a produção e a produtividade do leite na década de 70:

a) preços desestimulantes forçaram produtores menos eficientes, principalmente os eventuais, a sair do mercado;

b) bons preços da carne levaram pecuaristas de corte a usar leite como alimento de bezerros, diminuindo sua participação na produção de leite;

c) programas de crédito, principalmente de investimento, e de assistência técnica aceleraram a adoção de tecnologia mais moderna e a procura de touros reprodutores e vacas leiteiras de boa produtividade;

d) em decorrência, estimulou-se a produção de leite tipo B, que exige tecnologia mais avançada que a do tipo C;

e) geadas afetaram pastagens em alguns anos, prejudicando a alimentação; e

f) a maior rentabilidade de outros setores, como as culturas de soja e de cana-de-açúcar levou alguns produtores a abandonar a atividade leiteira.

O efeito conjunto desses fatores parece ter sido o seguinte:

a) diminuição do número de produtores (quadro 8.5);

b) aumento da produtividade média do Estado (quadros 8.1 e 8.2) a partir da safra 1976/77; e

c) ligeira diminuição seguida de pequeno aumento na produção devida ao efeito conjunto dos dois fatos acima enumerados.

Nesta fase de transição, que caracteriza os últimos anos da década, as alterações vêm se processando continuadamente, devendo se estabilizar quando forem atingidos os níveis de produtividade da nova estrutura de produção.

Detalhes sobre a pecuária leiteira paulista encontram-se em MORICOCHI et alii (23).

8.1 – DADOS

Dados mensais de produção e de produtividade de leite no Estado de São Paulo vêm sendo obtidos pelo Instituto de Economia Agrícola (IEA), através de levantamentos por amostragem em cerca de 6.000 propriedades agrícolas, como descrito em CAMPOS & PIVA (9), desde dezembro de 1975. Antes desta data, os dados eram obtidos em apenas cinco meses do ano, como mostram os quadros 8.1 e 8.5. Também se têm obtido séries de preços mensais recebidos pelos produtores.

Para este trabalho organizaram-se as seguintes séries temporais:

a) Série 1 - produtividade média mensal de leite no Estado de São Paulo, de dezembro de 1975 a novembro de 1979, com 48 observações (quadro 8.2 e figura 8.1);

b) Série 2 - produção mensal de leite no Estado de São Paulo, de dezembro de 1975 a novembro de 1979, com 48 observações (quadro 8.3 e figura 8.2);

c) Série 3 - preço médio mensal recebido pelos produtores de leite do Estado de São Paulo, de dezembro de 1975 a novembro de 1979, deflacionados pelo índice geral de preços (base: 1975) da Fundação Getúlio Vargas (11), (quadro 8.4 e figura 8.3); e

d) Série 4 - número mensal de produtores de leite no Estado de São Paulo, de dezembro de 1975 a novembro de 1979 (quadro 8.5 e figura 8.4).

A produtividade é definida como a produção média diária de uma vaca em lactação.

QUADRO 8.1 - Produtividade Média de Leite, Estado de São Paulo, Janeiro de 1972 a Novembro de 1975

(em litros por cabeça por dia)

Mês	1972	1973	1974	1975
Jan.	3,14	2,99	2,58	...
Fev.	...	...	...	3,63
Mar.	3,86	3,60	...	...
Abr.	...	...	...	3,45
Mai.	...	...	...	...
Jun.	3,51	3,46	3,28	3,24
Jul.	...	...	...	...
Ago.	...	...	...	...
Set.	3,53	3,28	2,93	2,99
Out.	...	...	...	...
Nov.	3,37	3,76	3,51	3,68
Dez.	...	...	...	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

8.2 — MODELO UNIVARIADO PARA PRODUTIVIDADE

A seguir, identifica-se e estima-se um modelo univariado para a produtividade de leite, conforme visto no capítulo 4.

QUADRO 8.2 - Série 1: Produtividade Média Mensal de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979

(em litros por cabeça por dia)

Mês	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	...	3,56	3,77	4,09	4,11
Fev.	...	3,74	3,95	4,42	4,41
Mar.	...	3,43	3,71	4,02	3,99
Abr.	...	3,65	3,78	3,99	4,11
Mai.	...	3,48	3,59	3,78	3,89
Jun.	...	3,53	3,64	3,85	3,93
Jul.	...	3,39	3,44	3,80	3,78
Ago.	...	3,43	3,42	3,78	3,77
Set.	...	3,67	3,80	4,02	4,17
Out.	...	3,54	3,84	3,93	4,13
Nov.	...	3,75	4,07	4,32	4,42
Dez.	3,55	3,80	4,12	4,16	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

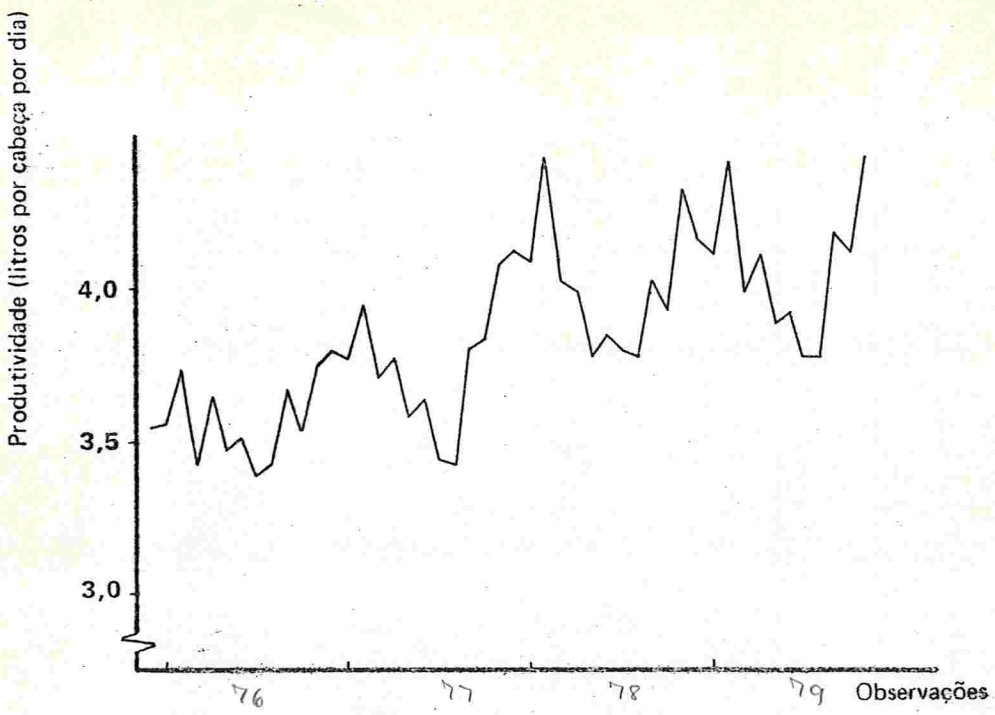


FIGURA 8.1 — Série 1: Produtividade Média Mensal de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979.

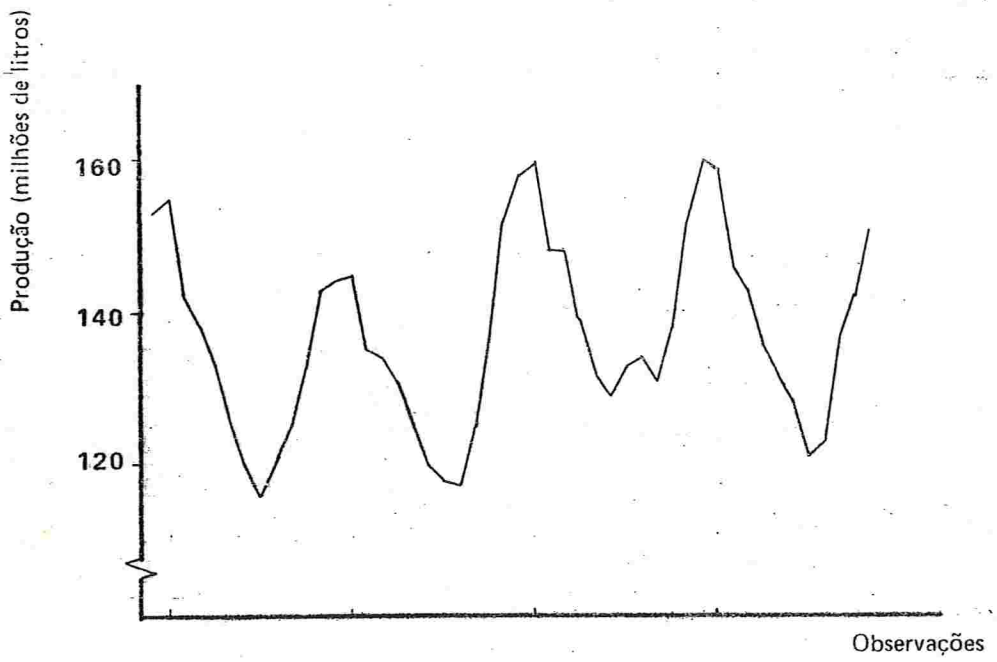


FIGURA 8.2 — Série 2: Produção Mensal de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979.

QUADRO 8.3 - Série 2: Produção Mensal de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979

(em litros)

Mês	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	...	155.482.210	145.280.450	159.660.290	158.844.260
Fev.	...	141.921.580	135.331.880	148.546.360	146.355.890
Mar.	...	137.733.810	134.185.960	147.669.380	143.058.130
Abr.	...	132.774.660	130.651.640	138.878.020	136.594.640
Mai.	...	125.996.320	124.886.580	132.462.220	131.655.440
Jun.	...	120.267.710	119.975.040	129.020.000	128.028.660
Jul.	...	116.588.890	117.647.810	133.071.030	121.261.170
Ago.	...	120.722.870	116.986.550	134.030.050	123.179.940
Set.	...	125.371.670	125.194.440	131.469.040	137.336.060
Out.	...	132.933.250	135.916.200	138.523.290	141.571.790
Nov.	...	142.903.850	152.422.010	152.561.370	151.225.870
Dez.	152.786.920	144.203.230	158.331.370	159.594.170	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 8.4 - Série 3: Preço Médio Mensal Recebido pelos Produtores de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979

(em cruzeiro corrente e cruzeiro de 1975)

Mês	Preço corrente					Preço deflacionado				
	1975	1976	1977	1978	1979	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	...	1,47	1,95	3,17	4,09	...	1,27	1,14	1,35	1,23
Fev.	...	1,49	1,98	3,26	4,11	...	1,23	1,22	1,34	1,19
Mar.	...	1,49	2,14	3,17	4,14	...	1,17	1,17	1,27	1,13
Abr.	...	1,51	2,30	3,19	4,35	...	1,16	1,20	1,23	1,14
Mai.	...	1,56	2,45	3,58	4,49	...	1,16	1,24	1,34	1,15
Jun.	...	1,58	2,61	3,65	4,57	...	1,14	1,29	1,32	1,14
Jul.	...	1,58	2,90	3,86	4,88	...	1,10	1,41	1,36	1,16
Ago.	...	1,78	3,10	4,01	5,20	...	1,19	1,49	1,37	1,17
Set.	...	1,92	3,10	4,04	5,60	...	1,24	1,46	1,34	1,17
Out.	...	1,94	3,19	4,03	5,76	...	1,23	1,46	1,31	1,14
Nov.	...	1,96	3,15	4,10	6,21	...	1,22	1,41	1,29	1,17
Dez.	1,46	1,98	3,19	4,11	...	1,30	1,20	1,40	1,28	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

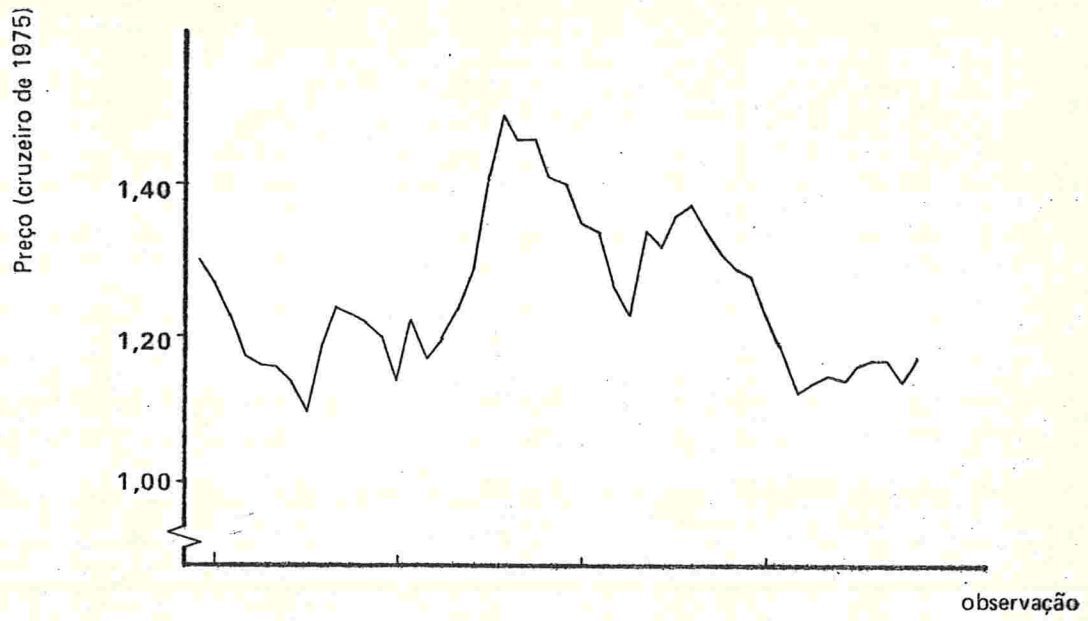


FIGURA 8.3 — Série 3: Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Leite, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979.

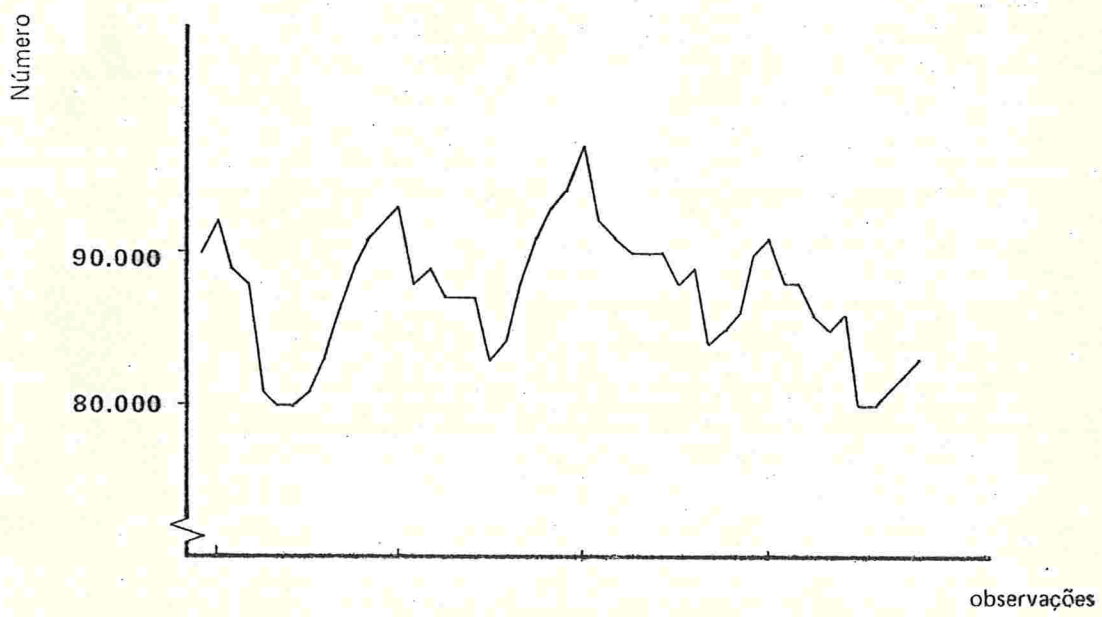


FIGURA 8.4 — Série 4: Número de Produtores de Leite, Estado de São Paulo, Dezembro de 1975 a Novembro de 1979.

QUADRO 8.5 - Série 4: Número de Produtores de Leite, Estado de São Paulo, Janeiro de 1972 a Novembro de 1979

Mês	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	108.390	113.870	103.460	...	92.210	92.880	96.830	90.900
Fev.	...	...	...	101.150	89.100	87.940	91.600	87.720
Mar.	101.500	102.370	...	...	88.020	89.030	91.230	87.680
Abr.	...	...	...	92.800	81.290	87.280	89.930	86.570
Mai.	...	...	...	...	79.970	87.080	90.340	85.300
Jun.	94.850	99.390	96.760	84.430	80.030	87.260	89.990	85.560
Jul.	...	...	...	...	81.080	82.640	88.270	80.290
Ago.	...	...	...	...	82.900	83.520	89.300	80.400
Set.	101.800	101.880	88.880	87.920	86.390	88.580	84.570	81.360
Out.	...	...	...	...	88.630	91.310	84.810	82.220
Nov.	106.080	96.350	96.100	94.580	90.780	93.160	85.870	83.470
Dez.	...	...	...	90.190	91.590	94.540	90.250	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

8.2.1 — Identificação

O gráfico das observações (figura 8.1) leva a crer que há sazonalidade com período s = 12. A média da série é 3,84, com desvio padrão igual a 0,27.

As estimativas das autocorrelações e das autocorrelações parciais encontram-se no quadro 8.6 e nas figuras 8.5 a 8.8, com base nas quais identificaram-se os seguintes modelos:

a) para a série original a função de autocorrelação decai rapidamente para zero após o segundo *lag* enquanto a autocorrelação parcial tem um corte após o segundo *lag*, indicando o modelo ARMA (2,2):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(z_t - \mu) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t ; \qquad (8.2.1)$$

b) a fim de considerar a sazonalidade provável da série, pode-se atentar para a diferença de ordem 12, na qual apenas r_1 e $\hat{\phi}_{11}$ são não-nulos, indicando o modelo ARIMA $(1,0,1) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - \phi B)(1 - B^{12}) z_t = (1 - \theta B) a_t ; \qquad (8.2.2)$$

c) também é interessante o modelo ARIMA $(1,0,0) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - \phi B)(1 - B^{12}) z_t = a_t ; \text{ e} \qquad (8.2.3)$$

d) como o teste de qui-quadrado para a primeira diferença da diferença de ordem 12 é não significativo ao nível de 5%, conclui-se que ela é ruído branco, o que sugere o modelo ARIMA $(0,1,0) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - B)(1 - B^{12}) z_t = a_t . \qquad (8.2.4)$$

QUADRO 8.6 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 1

(continua)

Lag (k)	Série original (z)			Primeira diferença (∇_z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,68*	0,14	0,68*	-0,44*	0,15	-0,44*
2	0,63*	0,20	0,31*	0,33	0,17	0,17
3	0,41	0,24	-0,19	0,00	0,18	0,25
4	0,23	0,25	-0,23	-0,29	0,18	-0,36*
5	0,22	0,26	0,23	0,24	0,19	-0,07
6	0,04	0,26	-0,15	-0,63*	0,20	-0,55*
7	0,20	0,26	0,34*	0,27	0,24	-0,24
8	0,16	0,26	0,06	-0,31	0,24	-0,20
9	0,31	0,27	0,19	0,07	0,25	-0,04
10	0,38	0,27	0,02	0,27	0,25	0,21
11	0,33	0,28	-0,07	-0,31	0,26	-0,26
12	0,46	0,29	0,19	0,65*	0,27	0,09
13	0,22	0,31	-0,29*	-0,29	0,30	0,07
14	0,19	0,31	-0,14	0,27	0,30	0,01
15	0,02	0,31	0,02	-0,06	0,31	-0,06
16	-0,10	0,31	-0,12	-0,20	0,31	-0,02
17	-0,12	0,31	-0,10	0,17	0,31	-0,09
18	-0,25	0,31	-0,05	-0,45	0,31	0,04
19	-0,13	0,32	-0,06	0,16	0,33	-0,15
20	-0,15	0,32	0,03	-0,18	0,33	0,03
χ^2		94,42 (**)			97,94 (**)	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 20 graus de liberdade.

QUADRO 8.6 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 1

(conclusão)

Lag (k)	Diferença sazonal (∇_{12} z)			Diferença sazonal ($\nabla \nabla_{12}$ z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,68*	0,17	0,68*	-0,05	0,17	-0,05
2	0,41	0,23	-0,10	-0,25	0,17	-0,26
3	0,29	0,25	0,10	-0,10	0,18	-0,13
4	0,20	0,26	-0,03	0,03	0,18	-0,06
5	0,11	0,27	-0,04	0,11	0,18	0,05
6	-0,03	0,27	-0,17	-0,12	0,18	-0,14
7	-0,09	0,27	0,02	-0,13	0,19	-0,13
8	-0,06	0,27	0,06	-0,08	0,19	-0,18
9	0,01	0,27	0,10	0,27	0,19	0,18
10	-0,11	0,27	-0,29	0,01	0,20	-0,06
11	-0,25	0,27	-0,14	0,00	0,20	0,12
12	-0,40	0,28	-0,32	-0,35	0,20	-0,40*
13	-0,32	0,29	0,28	-0,05	0,22	-0,09
14	-0,22	0,30	-0,04	0,20	0,22	-0,12
15	-0,24	0,31	-0,01	-0,08	0,22	-0,15
16	-0,18	0,31	0,03	0,01	0,22	-0,05
17	-0,11	0,31	-0,05	-0,01	0,22	0,01
18	-0,05	0,31	-0,14	0,00	0,22	-0,26
19	0,01	0,32	0,16	0,05	0,22	-0,08
20	0,02	0,32	0,00	0,16	0,22	-0,04
χ^2		46,34 (**)			14,01	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 20 graus de liberdade.

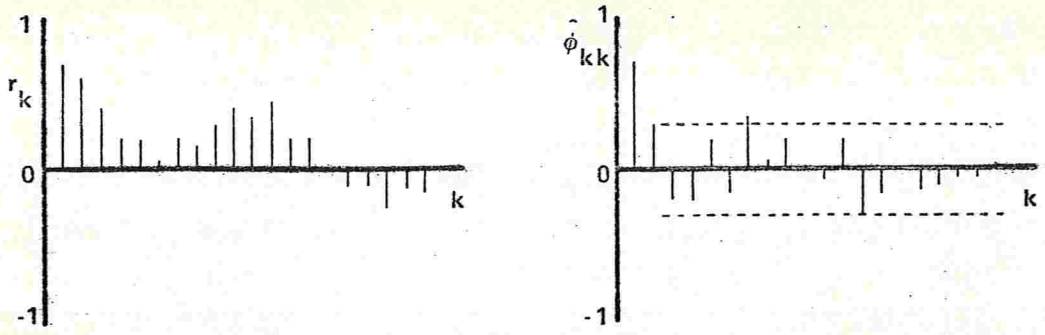


FIGURA 8.5 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 1, Série Original (z).

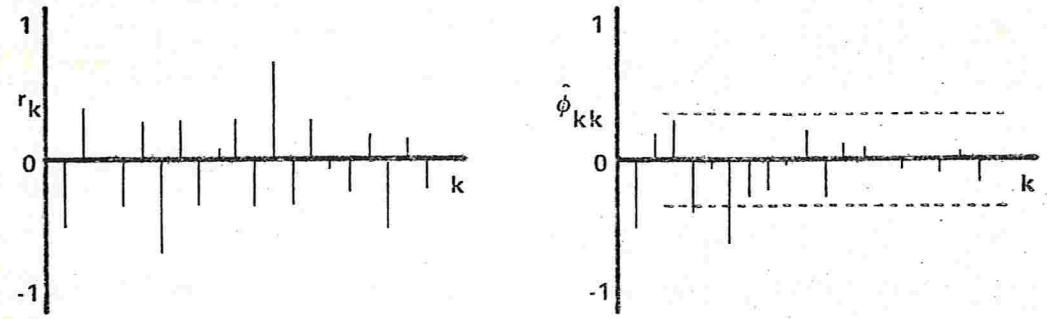


FIGURA 8.6 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 1, Primeira Diferença (∇_z).

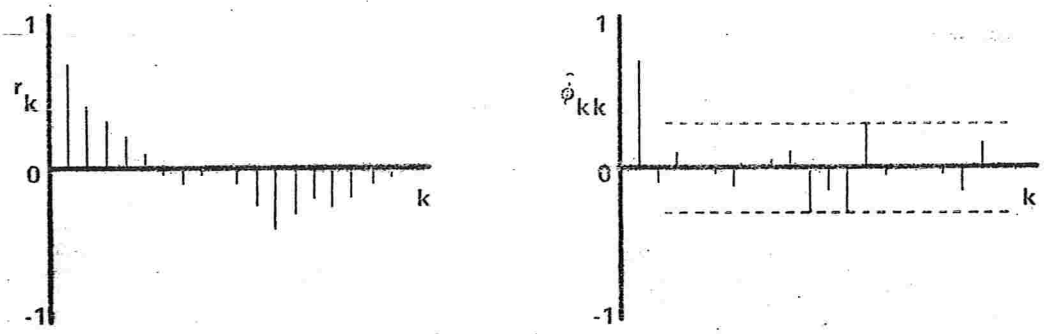


FIGURA 8.7 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 1, Diferença de Ordem 12 (∇_{12} z).

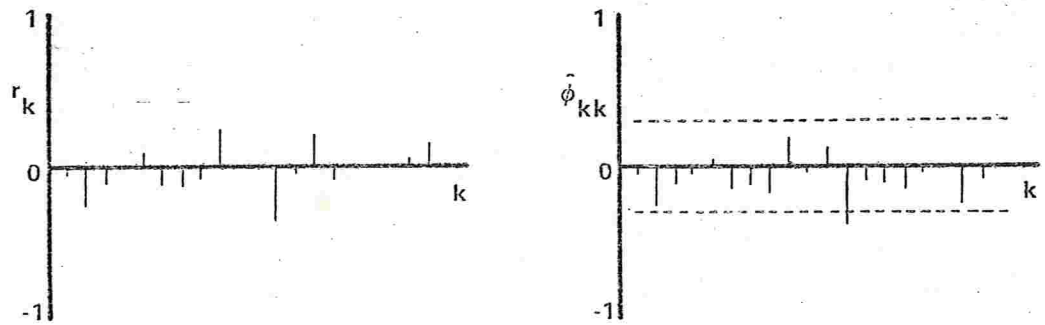


FIGURA 8.8 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 1, Primeira Diferença da Diferença de Ordem 12 ($\nabla \nabla_{12}$ z).

8.2.2 — Estimação e Previsão

As estimativas dos parâmetros para os quatro modelos alternativos identificados encontram-se no quadro 8.7.

Como a média dos resíduos não diferiu significativamente de zero em nenhum dos modelos não foi preciso incluir um parâmetro de tendência determinística.

Pelo critério do desvio padrão residual o modelo ARMA (2,2) é o que menos se ajusta aos dados, sendo, ainda, o único a apresentar autocorrelação nos resíduos no *lag* 12, indicando a presença de sazonalidade.

No modelo ARIMA $(1,0,1) \times (0,1,0)_{12}$ o parâmetro de médias móveis mostrou-se não significativo, sugerindo o modelo ARIMA $(1,0,0) \times (0,1,0)_{12}$. Este mostrou-se o melhor de todos e o fato de seu parâmetro auto-regressivo ser próximo da unidade explica porque o modelo (8.2.4), só com as diferenças, também se mostrou bom.

Escolhe-se, portanto, o seguinte modelo univariado:

$$(1 - 0{,}8757\ B)\ (1 - B^{12})\ z_t = a_t$$

ou

$$z_t = 0{,}8757\ z_{t-1} + z_{t-12} - 0{,}8757\ z_{t-13} + a_t \qquad (8.2.5)$$

As previsões de 1 a 12 passos adiante, feitas com este modelo, encontram-se no quadro 8.8 e na figura 8.9.

QUADRO 8.7 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 1

(continua)

Modelo (8.2.1): ARMA (2,2)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
μ	4,0167 (*)	3,6985	4,3349
ϕ_1	-0,1688 (*)	-0,3369	-0,0008
ϕ_2	0,8395 (*)	0,4755	1,2035
θ_1	-0,8042 (*)	-1,0777	-0,5307
θ_2	0,3192	-0,1580	0,7963
Desvio padrão do resíduo		0,1835	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 12	

Modelo (8.2.4): ARIMA $(0,1,0) \times (0,1,0)_{12}$

Desvio padrão do resíduo	0,0995
Autocorrelação no resíduo	—

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 8.7 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 1

(conclusão)

Modelo (8.2.2): ARIMA $(1,0,1) \times (0,1,0)_{12}$

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,8714 (*)	0,6926	1,0503
θ	-0,0208	-0,4169	0,3754
Desvio padrão do resíduo		0,0987	
Autocorrelação no resíduo		—	

Modelo (8.2.3): ARIMA $(1,0,0) \times (0,1,0)_{12}$

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,8757 (*)	0,7222	1,0293
Desvio padrão do resíduo		0,0973	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 8.8 - Previsões do Modelo Univariado, Produtividade de Leite, Estado de São Paulo, Série 1, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980

(em litros por cabeça por dia)

Número de passos adiante	Mês	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	Dez. 79	4,0600	4,2476	4,4351
2	Jan. 80	3,9374	4,1867	4,4360
3	Fev. 80	4,1893	4,4772	4,7650
4	Mar. 80	3,7346	4,0488	4,3630
5	Abr. 80	3,8285	4,1615	4,4945
6	Mai. 80	3,5884	3,9351	4,2818
7	Jun. 80	3,6126	3,9695	4,3264
8	Jul. 80	3,4501	3,8146	4,1791
9	Ago. 80	3,4301	3,8003	4,1705
10	Set. 80	3,8220	4,1965	4,5711
11	Out. 80	3,7754	4,1532	4,5311
12	Nov. 80	4,0600	4,4403	4,8207

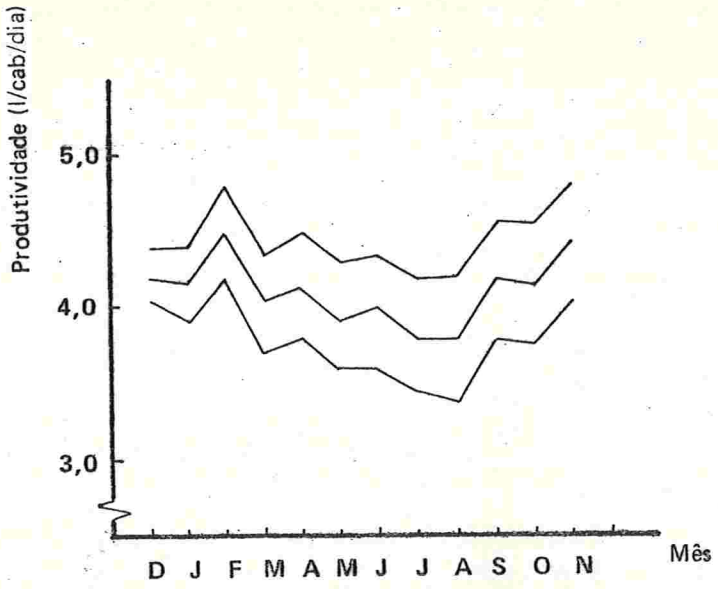


FIGURA 8.9 — Previsões do Modelo Univariado, Produtividade de Leite, Estado de São Paulo, Série 1, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980.

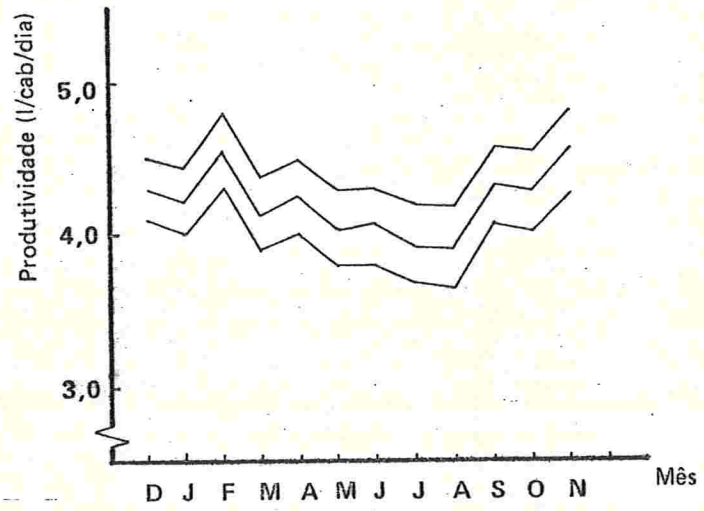


FIGURA 8.10 — Previsões do Modelo de Intervenção, Produtividade de Leite, Estado de São Paulo, Série 1, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980.

8.3 – MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUTIVIDADE

A intervenção ocorreu de forma difusa ao longo dos anos de 1975 e 76 e consiste no efeito conjunto de diversos fatores enumerados no início do capítulo. Seu efeito parece não ter sido imediato, sendo difícil precisar o exato instante em que os efeitos da intervenção mostram-se mensuráveis. Entretanto, como a flutuação sazonal da produtividade de leite está ligada à redução das pastagens no inverno e de outros alimentos como milho e soja, é razoável localizar a intervenção logo após o início do ano agrícola 1976/77, em novembro de 1976, o que pode ser confirmado pelo exame do gráfico da série 1 (figura 8.1). Como a intervenção ocorre ao longo do tempo, ela pode ser representada pela seguinte série binária:

$$X_t = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 11 \\ 1, & t = 12, 13, \ldots, 48. \end{cases} \qquad (8.3.1)$$

8.3.1 – Identificação

O efeito da intervenção consiste na mudança permanente no nível da série, podendo-se propor as seguintes variações:

a) mudança desacelerada no nível da série, como no caso (c) da figura 6.2, em que a função de transferência é dada por

$$v(B) = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B}, \qquad |\delta_1| < 1,$$

e o modelo de intervenção proposto é

$$(1 - B^{12})\ z_t = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B}\ X_t + \frac{1}{1 - \phi B}\ a_t\ ; \qquad (8.3.2.)$$

b) mudança imediata no nível da série, como no caso (a) da figura 6.2, em que a função de transferência é dada por

$$v(B) = \omega_o\ ,$$

e o modelo de intervenção proposto é

$$(1 - B^{12})\ z_t = \omega_o\ X_t + \frac{1}{1 - \phi B}\ a_t\ . \qquad (8.3.3)$$

8.3.2 — Estimação e Previsão

As estimativas dos parâmetros para os dois modelos alternativos propostos encontram-se no quadro 8.9.

Como a média dos resíduos não diferiu significativamente de zero em nenhum dos modelos não foi preciso incluir um parâmetro de tendência determinística.

Embora seu desvio padrão residual seja mais baixo que os dos modelos univariados, o modelo (8.3.2) mostrou-se inadequado, uma vez que ambos os parâmetros de intervenção não são significativos. Isso ocorre porque a correlação entre os parâmetros δ_1 e ω_o é igual a -1,0000, indicando que apenas um deles é necessário, o que nos leva ao modelo (8.3.3).

No modelo (8.3.3) todos os parâmetros são significativos, não há autocorrelação significativa no resíduo e o desvio padrão do resíduo é o

QUADRO 8.9 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos de Intervenção, Série 1

Modelo (8.3.2)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,6898(*)	0,4318	0,9478
ω_o	0,1590	-497,23	497,55
δ_1	0,0000	-3127,4	3127,4
Desvio padrão do resíduo		0,0955	
Autocorrelação no resíduo		—	

Modelo (8.3.3)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,6898(*)	0,4383	0,9413
ω_o	0,1590(*)	0,0559	0,2622
Desvio padrão do resíduo		0,0941	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

menor dentre os de todos os modelos estudados.

Escolhe-se, portanto, o seguinte modelo de intervenção:

$$(1 - B^{12})\, z_t = 0{,}1590\, X_t + \frac{1}{1 - 0{,}6898\, B}\, a_t$$

ou

$$z_t = 0{,}6898\, z_{t-1} + z_{t-12} - 0{,}6898\, z_{t-13} + 0{,}1590\, X_t - 0{,}1097\, X_{t-12} + a_t \qquad (8.3.4)$$

Portanto, o efeito da intervenção foi significativo, consistindo em mudança mais ou menos imediata no nível da série. Antes da intervenção, a produtividade de leite oscilava ao redor da média estadual anual de 3,5 litros por cabeça por dia, passando a oscilar ao redor de 4,0 litros por cabeça por dia após a intervenção.

As previsões de 1 a 12 passos adiante, feitas com o modelo (8.3.4), encontram-se no quadro 8.10 e na figura 8.10.

Comparando-se as previsões, verifica-se que o modelo de intervenção dá previsões ligeiramente superiores às do modelo univariado, permanecendo, porém, a forma de seu gráfico. O DPR do modelo de intervenção é 3% menor que o do univariado, indicando melhor ajustamento do modelo aos dados. Os intervalos de confiança das previsões tornaram-se mais estreitos com a inclusão do efeito de intervenção, isto é, as previsões tornaram-se mais precisas.

8.4 – MODELO UNIVARIADO PARA PRODUÇÃO

A seguir, identifica-se e estima-se um modelo univariado para a produção de leite, conforme visto no capítulo 4.

QUADRO 8.10 - Previsões do Modelo de Intervenção, Produtividade de Leite, Estado de São Paulo, Série 1, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980

(em litros por cabeça por dia)

Número de passos adiante	Mês	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	Dez. 79	4,0939	4,2783	4,4627
2	Jan. 80	4,0170	4,2410	4,4649
3	Fev. 80	4,3091	4,5497	4,7902
4	Mar. 80	3,8876	4,1357	4,3837
5	Abr. 80	4,0083	4,2598	4,5114
6	Mai. 80	3,7895	4,0427	4,2959
7	Jun. 80	3,8307	4,0846	4,3386
8	Jul. 80	3,6817	3,9360	4,1903
9	Ago. 80	3,6725	3,9270	4,1814
10	Set. 80	4,0730	4,3276	4,5822
11	Out. 80	4,0334	4,2880	4,5427
12	Nov. 80	4,3237	4,5784	4,8330

8.4.1 — Identificação

O gráfico das observações (figura 8.2) leva a crer que há sazonalidade com período s = 12. A média da série é $136{,}90 \times 10^6$, com desvio padrão igual a $12{,}20 \times 10^6$.

As estimativas das autocorrelações e das autocorrelações parciais encontram-se no quadro 8.11 e nas figuras 8.11 a 8.14, com base nas quais identificaram-se os seguintes modelos:

a) para a série original a função de autocorrelação é constituída de senóides amortecidas e a função de autocorrelação parcial tem um corte após o segundo *lag*, indicando o modelo AR(2):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(z_t - \mu) = a_t \; ; \qquad (8.4.1)$$

b) na função de autocorrelação da série original r_6 é significativamente não nulo, $r_5 \simeq r_7$ e $r_4 \simeq r_8$, indicando, conforme BOX & JENKINS (5, p.330), o modelo ARIMA $(0,0,2) \times (0,0,1)_6$:

$$z_t - \mu = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \Theta B^6)\, a_t ; \qquad (8.4.2)$$

c) na diferença de ordem 12 o fato de r_1, r_2, $\hat{\phi}_{11}$ e $\hat{\hat{\phi}}_{11,11}$ serem significativos pode sugerir o modelo ARIMA $(1,0,2) \times (1,1,0)_{12}$:

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})(1 - B^{12})\, z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\, a_t ; \text{ e} \qquad (8.4.3)$$

d) como o teste de qui-quadrado para a primeira diferença da diferença de ordem 12 é não significativo ao nível de 5%, conclui-se que ela é ruído branco, o que sugere o modelo ARIMA $(0,1,0) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - B)(1 - B^{12})\, z_t = a_t \; . \qquad (8.4.4)$$

QUADRO 8.11 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 2

(continua)

Lag (k)	Série original (z)			Primeira diferença (∇_z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,80*	0,14	0,80*	0,50*	0,15	0,50*
2	0,45*	0,22	-0,54*	0,25	0,18	0,00
3	0,05	0,24	-0,27	-0,10	0,19	-0,30*
4	-0,27	0,24	-0,09	-0,25	0,19	-0,13
5	-0,50*	0,24	-0,21	-0,40*	0,19	-0,20
6	-0,60*	0,26	-0,11	-0,50*	0,21	-0,33*
7	-0,52	0,29	0,12	-0,48	0,24	-0,24
8	-0,28	0,31	0,16	-0,25	0,26	-0,02
9	0,02	0,31	0,03	-0,12	0,26	-0,23
10	0,34	0,31	0,29*	0,25	0,26	0,17
11	0,53	0,32	-0,10	0,37	0,27	0,05
12	0,58	0,34	0,01	0,58	0,28	0,25
13	0,44	0,36	-0,11	0,38	0,30	-0,13
14	0,21	0,37	0,03	0,26	0,31	0,09
15	-0,07	0,37	-0,10	-0,03	0,32	-0,10
16	-0,35	0,37	-0,13	-0,21	0,32	-0,07
17	-0,54	0,38	-0,05	-0,38	0,32	-0,05
18	-0,59	0,40	-0,04	-0,38	0,33	0,08
19	-0,51	0,41	-0,14	-0,36	0,34	-0,01
20	-0,32	0,43	-0,10	-0,20	0,35	-0,04
χ^2		191,52(**)			111,02(**)	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 20 graus de liberdade.

QUADRO 8.11 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 2

(conclusão)

Lag (k)	Diferença sazonal (∇_{12} z)			Diferença sazonal ($\nabla \nabla_{12}$ z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,78*	0,17	0,78*	0,09	0,17	0,09
2	0,52	0,25	-0,22	-0,38*	0,17	-0,39*
3	0,43	0,28	0,28	-0,13	0,19	-0,05
4	0,38	0,30	-0,07	0,10	0,20	-0,03
5	0,29	0,31	-0,01	0,11	0,20	0,04
6	0,19	0,32	-0,09	-0,02	0,20	-0,02
7	0,09	0,32	-0,05	0,00	0,20	0,07
8	0,01	0,32	-0,10	0,10	0,20	0,12
9	-0,15	0,32	-0,28	0,14	0,20	0,17
10	-0,34	0,32	-0,22	0,04	0,20	0,12
11	-0,52	0,33	-0,37*	-0,23	0,20	-0,14
12	-0,58	0,35	0,00	-0,39	0,21	-0,39*
13	-0,47	0,38	0,21	0,11	0,23	-0,02
14	-0,39	0,39	0,00	0,15	0,23	-0,27
15	-0,38	0,41	0,19	0,06	0,23	0,06
16	-0,37	0,41	-0,04	-0,08	0,23	-0,10
17	-0,35	0,42	-0,02	-0,07	0,24	0,07
18	-0,33	0,43	-0,10	-0,02	0,24	-0,03
19	-0,29	0,44	-0,12	-0,10	0,24	-0,02
20	-0,19	0,44	0,05	-0,09	0,24	-0,01
χ^2		111,09(**)			17,39	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 20 graus de liberdade.

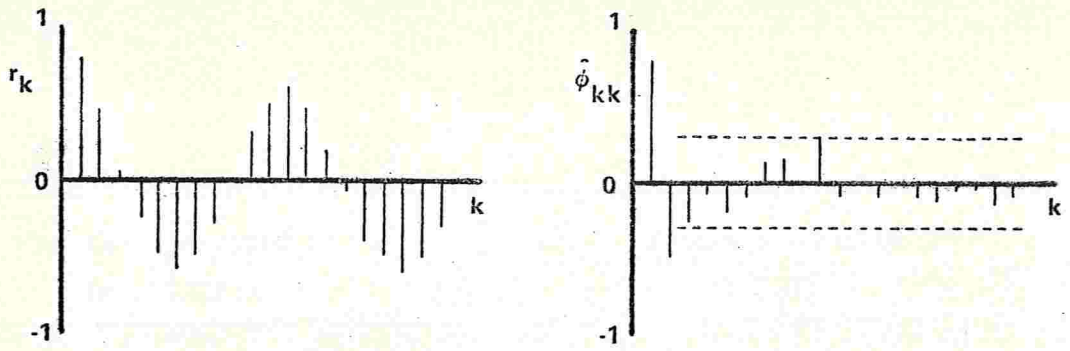


FIGURA 8.11 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 2, Série Original (z).

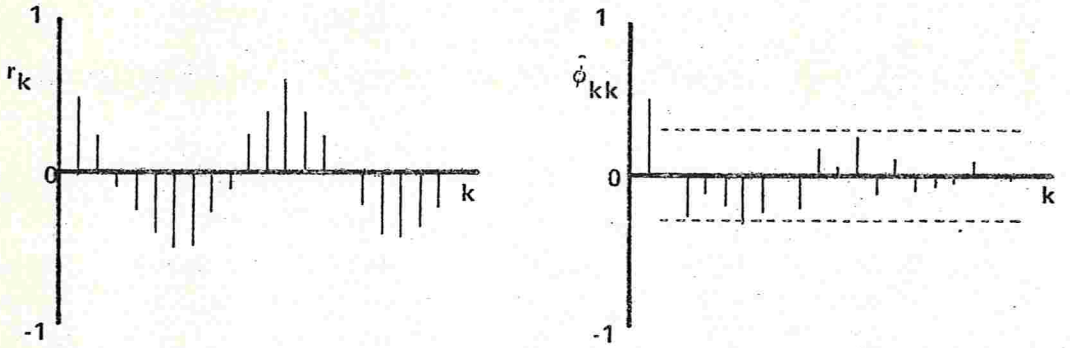


FIGURA 8.12 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 2, Primeira Diferença (∇_z).

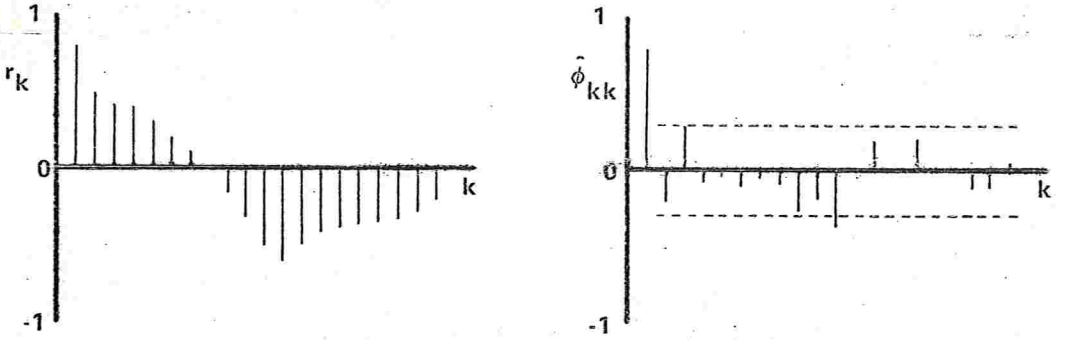


FIGURA 8.13 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 2, Diferença de Ordem 12 (∇_{12} z).

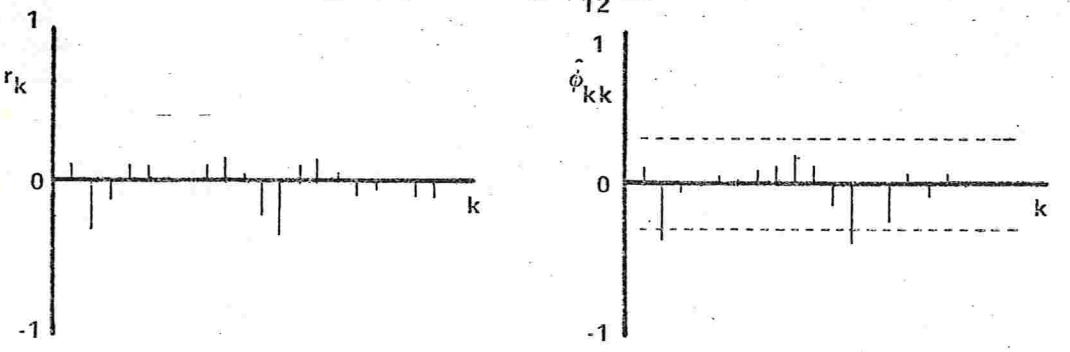


FIGURA 8.14 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 2, Primeira Diferença da Diferença de Ordem 12 ($\nabla \nabla_{12}$ z).

8.4.2 – Estimação e Previsão

As estimativas dos parâmetros para os quatro modelos alternativos identificados estão no quadro 8.12 (por facilidade, trabalhou-se com a produção em mil litros).

Como a média dos resíduos não diferiu significativamente de zero em nenhum dos modelos, não houve necessidade de se incluir um parâmetro de tendência determinística.

Pelo critério do desvio padrão residual (DPR) o modelo que melhor se ajusta aos dados é o ARIMA $(1,0,2) \times (1,1,0)_{12}$. Entretanto, como um dos parâmetros de médias móveis mostrou-se não significativo, e como o parâmetro auto-regressivo ϕ mostrou-se próximo da unidade, preferiu-se trabalhar com o modelo ARIMA $(0,1,2) \times (1,1,0)_{12}$, cujas estimativas encontram-se no quadro 8.12.

Portanto, o modelo escolhido é:

$$(1 + 0{,}8139\, B^{12})(1 - B)(1 - B^{12})\, z_t = (1 - 0{,}8557\, B^2)\, a_t$$

ou

$$z_t = z_{t-1} + 0{,}1861\, z_{t-12} - 0{,}1861\, z_{t-13} - 0{,}8139\, z_{t-24} + 0{,}8139\, z_{t-25} + a_t - 0{,}8557\, a_{t-2} \qquad (8.4.5)$$

As previsões de 1 a 12 passos adiante, feitas com este modelo, encontram-se no quadro 8.13 e na figura 8.15.

QUADRO 8.12 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 2

(continua)

Modelo (8.4.2): ARIMA (0,0,2) x $(0,0,1)_6$

Parâmetro	Estimativa		Intervalo de confiança (95%)	
μ	138100	(*)	134480	141720
θ_1	-1,0287	(*)	-1,2966	-0,7607
θ_2	-0,5920	(*)	-0,8797	-0,3043
Θ	0,2719		-0,0668	0,6107
Desvio padrão do resíduo			6396,6	
Autocorrelação no resíduo			—	

Modelo (8.4.1): AR(2)

Parâmetro	Estimativa		Intervalo de confiança (95%)	
μ	136470	(*)	131020	141930
ϕ_1	1,3666	(*)	1,1312	1,6020
ϕ_2	-0,6547	(*)	-0,8859	-0,4235
Desvio padrão do resíduo			5326,0	
Autocorrelação no resíduo			*lag* 12	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 8.12 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 2

(conclusão)

Modelo (8.4.4): ARIMA $(0,1,0 \times (0,1,0)_{12}$			
Desvio padrão do resíduo		4.769,4	
Autocorrelação no resíduo		—	
Modelo (8.4.3): ARIMA $(1,0,2) \times (1,1,0)_{12}$			
Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	1,0005 (*)	0,9450	1,0560
Φ	-0,5929 (*)	-1,0680	-0,1178
θ_1	0,5362	-0,1663	1,2386
θ_2	1,4083 (*)	0,6641	2,1524
Desvio padrão do resíduo		2.506,6	
Autocorrelação no resíduo		—	
Modelo ARIMA $(0,1,2) \times (1,1,0)_{12}$			
Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
Φ	-0,8139 (*)	-1,1235	-0,5043
θ_2	0,8557 (*)	0,5150	1,1963
Desvio padrão do resíduo		3.239,7	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 8.13 - Previsões do Modelo Univariado, Produção de Leite, Estado de São Paulo, Série 2, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980

(em mil litros)

Número de passos adiante	Mês	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	Dez. 79	154.925	161.248	167.571
2	Jan. 80	156.758	165.700	174.642
3	Fev. 80	145.342	154.330	163.318
4	Mar. 80	143.969	153.003	162.037
5	Abr. 80	135.564	144.645	153.725
6	Mai. 80	129.378	138.504	147.630
7	Jun. 80	125.856	135.027	144.198
8	Jul. 80	127.848	137.065	146.282
9	Ago. 80	128.941	138.202	147.464
10	Set. 80	129.446	138.752	148.059
11	Out. 80	135.931	145.282	154.633
12	Nov. 80	149.109	158.504	167.900

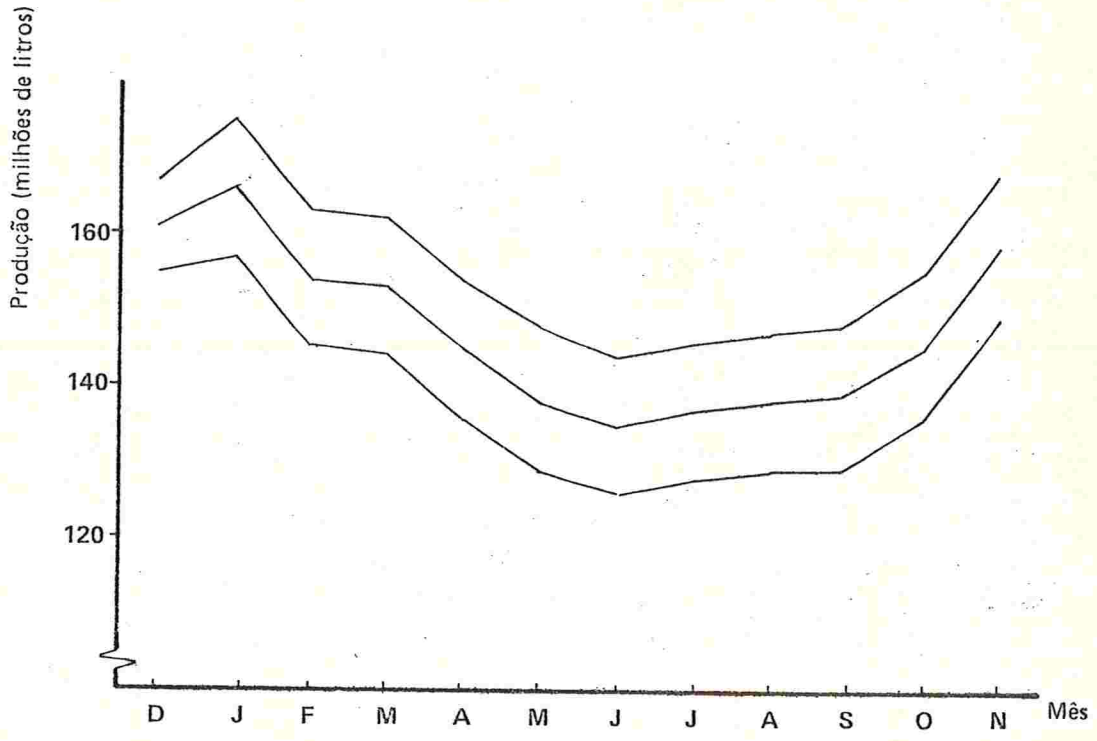


FIGURA 8.15 — Previsões do Modelo Univariado, Produção de Leite, Estado de São Paulo, Série 2, Dezembro de 1979 a Novembro de 1980.

8.5 – MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUÇÃO

Como no caso da produtividade, a intervenção pode ser representada pela série binária dada por (8.3.1).

8.5.1 – Identificação

O efeito da intervenção deverá ter sido mais suave que sobre a produtividade, pois, de um lado, a produção aumentou com a elevação da produtividade, de outro, diminuiu com o decréscimo do número de produtores. O efeito consiste na mudança permanente e imediata no nível da série, como no caso (a) da figura 6.2, propondo-se o modelo

$$(1 - B)\ (1 - B^{12})\ z_t = \omega_o\ X_t + \frac{1 - \theta_2\ B^2}{1 - \Phi\ B^{12}}\ a_t \qquad (8.5.1)$$

8.5.2 – Estimação e Previsão

As estimativas dos parâmetros para o modelo proposto encontram-se no quadro 8.14. Verifica-se que o efeito de intervenção foi não signficativo, isto é, o efeito conjunto das mudanças de que se compunha a intervenção foi aproximadamente nulo. A correlação entre os parâmetros Φ e ω_o é alta (-0,73), indicando que o fator auto-regressivo foi capaz de captar as mudanças ocorridas, não sendo necessária a inclusão do termo de intervenção no modelo.

8.14 - Estimativas dos Parâmetros, Modelo de Intervenção, Série 2

Modelo (8.5.1)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
Φ	-0,6660 (*)	-1,0560	-0,2758
θ_2	0,9278 (*)	0,6483	1,2073
ω_o	-0,1432	-0,3912	0,1049
Desvio padrão do resíduo		3.204,3	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

8.6 – MODELO DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA PARA PRODUÇÃO

A série de produção de leite pode, ainda, ser vista como a saída de um modelo de filtros lineares, onde as entradas são as séries de produtividade, de número de produtores e de preço.

8.6.1 — Identificação

Primeiramente, identificaram-se e estimaram-se, da maneira usual (capítulo 4), modelos univariados para as séries 3 (de preços) e 4 (de número de produtores), chegando-se a:

a) modelo univariado para preço

$$(1 - 0{,}9016\ B)\ (z_t - 1{,}2255) = a_t\ , \qquad (8.6.1)$$

com DPR = 0,0453, parâmetros significativos ao nível de 5% e sem autocorrelação no resíduo; e

b) modelo univariado para número de produtores

$$(1 - 0{,}8140\ B)\ (z_t - 86.644) = a_t\ , \qquad (8.6.2)$$

com DPR = 2.481,1, parâmetros significativos ao nível de 5% e sem autocorrelação no resíduo.

As correlações cruzadas das séries 1,3 e 4 com a série 2 estão no quadro 8.15. Os grupos de valores positivos e de negativos que se alternam devem-se à sazonalidade da produção. O pico no *lag* zero para as séries 1 e 4 indica b = 0.

As estimativas dos pesos da resposta de impulso estão no quadro 8.16, de onde se observa que:

a) para a série 1 não há valores nulos no início (b = 0) e os pesos decrescem segundo uma onda senoidal amortecida, de onde sugere-se r = 2 e s = 0 ou 1, conforma SILVA (32); e

b) para a série 3 não há valores nulos no início (b = 0), os pesos não seguem padrão definido entre os pontos 0 e 4, mas, decrescem segundo uma senóide amortecida após v_5, o que sugere r = 2 e s superior a r.

QUADRO 8.15 - Correlações Cruzadas, Séries 1,3 e 4 com Série 2

Lag na série 2	Série 1 (produtividade)	Série 3 (preço)	Série 4 (produtores)
0	0,64	0,09	0,67
1	0,57	-0,10	0,58
2	0,36	-0,26	0,34
3	0,13	-0,34	0,02
4	-0,10	-0,33	-0,26
5	-0,25	-0,30	-0,42
6	-0,32	-0,13	-0,54
7	-0,30	-0,01	-0,56
8	-0,12	0,08	-0,49
9	0,07	0,05	-0,32
10	0,30	-0,06	-0,14
11	0,41	-0,19	0,05
12	0,38	-0,33	0,21
13	0,32	-0,42	0,22
14	0,16	-0,50	0,13
15	-0,01	-0,52	-0,03
16	-0,23	-0,44	-0,19
17	-0,36	-0,31	-0,32
18	-0,41	-0,14	-0,43
19	-0,39	0,02	-0,45
20	-0,22	0,10	-0,38

QUADRO 8.16 - Estimativas dos Pesos da Resposta de Impulso, Série 2

Lag	Série 1 (produtividade)	Série 3 (preço)	Série 4 (produtores)
0	18,68	17,38	0,59
1	-10,76	3,70	-0,46
2	-23,47	3,86	-0,27
3	-1,26	-2,43	0,09
4	6,64	-0,87	-0,12
5	15,59	22,80	0,00
6	-9,24	-33,70	0,32
7	-7,73	8,70	-0,44
8	-3,14	-10,30	0,33
9	8,26	14,68	0,41
10	18,87	10,42	-0,29

8.6.2 — Estimação e Previsão

Estimando-se tentativamente alguns modelos encontram-se correlações altas entre alguns dos parâmetros das três séries de entrada. Por isso optou-se por um modelo de uma só entrada, preferindo-se a série de preço, o que é mais usual em Economia.

O modelo de função de transferência escolhido foi

$$(1 - B)\ (1 - B^{12})\ z_t = \frac{\omega_o}{1 - \delta_2 B^2} X_t + \frac{1 - \theta_2 B^2}{1 - \Phi B^{12}} a_t, \qquad (8.6.3)$$

onde X_t, $t = 1, 2, \ldots, 48$ é a série 3 (preço). As estimativas dos parâmetros estão no quadro 8.17.

Pelo critério do desvio padrão residual este foi o melhor modelo obtido. Entretanto, há autocorrelação significativa nos resíduos no *lag* 2 e o parâmetro ω_o é não significativo, indicando que o modelo pode não ser adequado. As correlações entre os parâmetros são muito altas (quadro 8.18).

QUADRO 8.17 - Estimativas dos Parâmetros, Modelo de Função de Transferencia, Série 2

Modelo (8.6.3): série 2 com série 3

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
Φ	-0,8654(*)	-0,9430	-0,7878
θ_2	1,9930(*)	1,7917	2,1944
ω_o	1,6336	-0,2032	3,4704
δ_2	-1,1996(*)	-1,3039	-1,0952
Desvio padrão do resíduo		2.045,8	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 2	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 8.18 - Matriz de Correlação dos Parâmetros, Modelo de Função de Função de Transferência, Série 2

	Φ	θ_2	ω_o	δ_2
Φ	1,00			
θ_2	1,00	1,00		
ω_o	-0,93	-0,90	1,00	
δ_2	-0,83	-0,78	0,98	1,00

CAPÍTULO 9

MODELOS PARA SÉRIES DE CAFÉ

O café tem sido, ao longo do último século, o principal produto de exportação do país, estando muitas de suas crises associadas à história nacional. Diversos fatores afetam sua produtividade e sua produção, sendo a ocorrência de geadas seu principal problema, principalmente quando afeta as principais regiões produtoras nos Estados de São Paulo e Paraná. Cada um desses fatores pode ser tratado como uma intervenção. Além disso, a planta apresenta um ciclo biológico de dois anos, alternando-se altas e baixas produções.

Os principais eventos e ocorrências que podem ter afetado a produção cafeeira, conforme IBC (18) são resumidos como segue:

a) 1888 - os ex-escravos abandonam as lavouras, sendo substituídos pela mão-de-obra imigrante mais cara;

b) 1902 - o plantio é proibido em São Paulo e ocorre geada afetando as duas safras seguintes;

c) 1914-18 - bloqueio marítimo na Europa devido à Primeira

Guerra Mundial;

d) 1918 - geada reduz as safras de 1918 e 1919;

e) 1929-30 - crise econômica mundial;

f) 1939-45 - bloqueio dos mercados europeus devido à Segunda Guerra Mundial;

g) 1953 - geada no Paraná atingindo 80% dos cafezais;

h) 1955 - geada no Paraná;

i) 1962-66 - erradicação de 724 milhões de cafeeiros;

j) 1963 - seca em São Paulo, seca e geada no Paraná, afetando gravemente a safra seguinte;

l) 1966-67 - erradicação de 656 milhões de cafeeiros; geada no Paraná em 1966;

m) 1967/68 - estabelecimento de sistema de quotas pela Organização Internacional do Café (OIC);

n) 1969 - geada no Paraná destruindo 80% da safra;

o) 1970 - aparecimento de ferrugem nos cafezais, causada por *Hemileia vastatrix* Berk. e Br.;

p) 1975 - geada em julho com perda total no Paraná e parcial em São Paulo; e

q) 1978 - geada em agosto.

É interessante estudar o efeito de tais ocorrências, principalmente das geadas, sobre a produção e a produtividade do café. Entretanto, as séries de produção e produtividade são anuais, não permitindo refinar a análise até o nível mensal. Uma possível maneira de contornar o problema é trabalhar com séries mensais de preços, permitindo uma análise de algumas das conseqüências econômicas da ocorrência dos

eventos, ainda que não permita a análise das conseqüências agronômicas.

Assim, nos itens 9.2 e 9.3 estudam-se modelos de intervenção para produção, nos itens 9.4 e 9.5, modelos para preços, e no item 9.6 discutem-se as possibilidades de um modelo de intervenção para produtividade.

9.1 – DADOS

Em nível nacional as estatísticas sobre café são elaboradas pelo Instituto Brasileiro do Café (IBC), enquanto no Estado de São Paulo são elaboradas pelo Instituto de Economia Agrícola (IEA).

Para este trabalho organizaram-se as seguintes séries temporais:

a) Série 5 - produção exportável de café no Brasil, de 1882 a 1977, com 96 observações (quadro 9.1 e figura 9.1); e

b) Série 6 - preço médio mensal recebido pelos cafeicultores no Estado de São Paulo, de julho de 1954 a junho de 1979, com 300 observações (quadros 9.2 e 9.3 e figura 9.2).

Os preços foram deflacionados pelo Índice Geral de Preços (índice 2) da Fundação Getúlio Vargas (11) transformando-se em cruzeiros de 1975.

Não se obtiveram séries de produtividade.

QUADRO 9.1 - Série 5: Produção Exportável de Café, Brasil, 1882-1977
(Ano de Colheita)

(em milhões de sacas de 60kg de café beneficiado)

Ano	Produção	Ano	Produção	Ano	Produção	Ano	Produção	Ano	Produção
1881	...	1901	16,09	1921	12,90	1941	15,80	1961	39,60
1882	6,72	1902	13,07	1922	10,20	1942	13,60	1962	28,90
1883	5,05	1903	11,13	1923	14,90	1943	12,20	1963	23,20
1884	6,43	1904	10,52	1924	14,60	1944	9,10	1964	8,30
1885	5,57	1905	11,49	1925	15,50	1945	12,70	1965	37,00
1886	6,03	1906	20,22	1926	15,90	1946	14,00	1966	18,80
1887	3,14	1907	10,97	1927	27,10	1947	13,60	1967	24,50
1888	7,02	1908	12,97	1928	18,60	1948	17,00	1968	17,00
1889	4,44	1909	14,72	1929	28,20	1949	16,30	1969	20,60
1890	5,58	1910	10,85	1930	16,60	1950	16,80	1970	11,00
1891	7,60	1911	13,26	1931	28,30	1951	15,00	1971	24,60
1892	6,34	1912	12,79	1932	19,90	1952	16,10	1972	24,50
1893	4,84	1913	14,12	1933	29,70	1953	15,10	1973	14,30
1894	7,04	1914	14,48	1934	18,20	1954	14,50	1974	28,10
1895	5,79	1915	14,89	1935	21,00	1955	22,10	1975	22,20
1896	9,11	1916	13,16	1936	26,40	1956	12,50	1976	6,00
1897	11,01	1917	14,92	1937	23,50	1957	21,60	1977	15,30
1898	9,12	1918	9,07	1938	23,20	1958	26,80	1978	...
1899	9,25	1919	7,50	1939	19,10	1959	44,10	1979	...
1900	11,31	1920	14,50	1940	16,50	1960	29,80	1980	...

Fonte: Henry Hopp, "A lei da oferta e procura em relação ao preço do café", citado por IBC (18), e Instituto Brasileiro do Café.

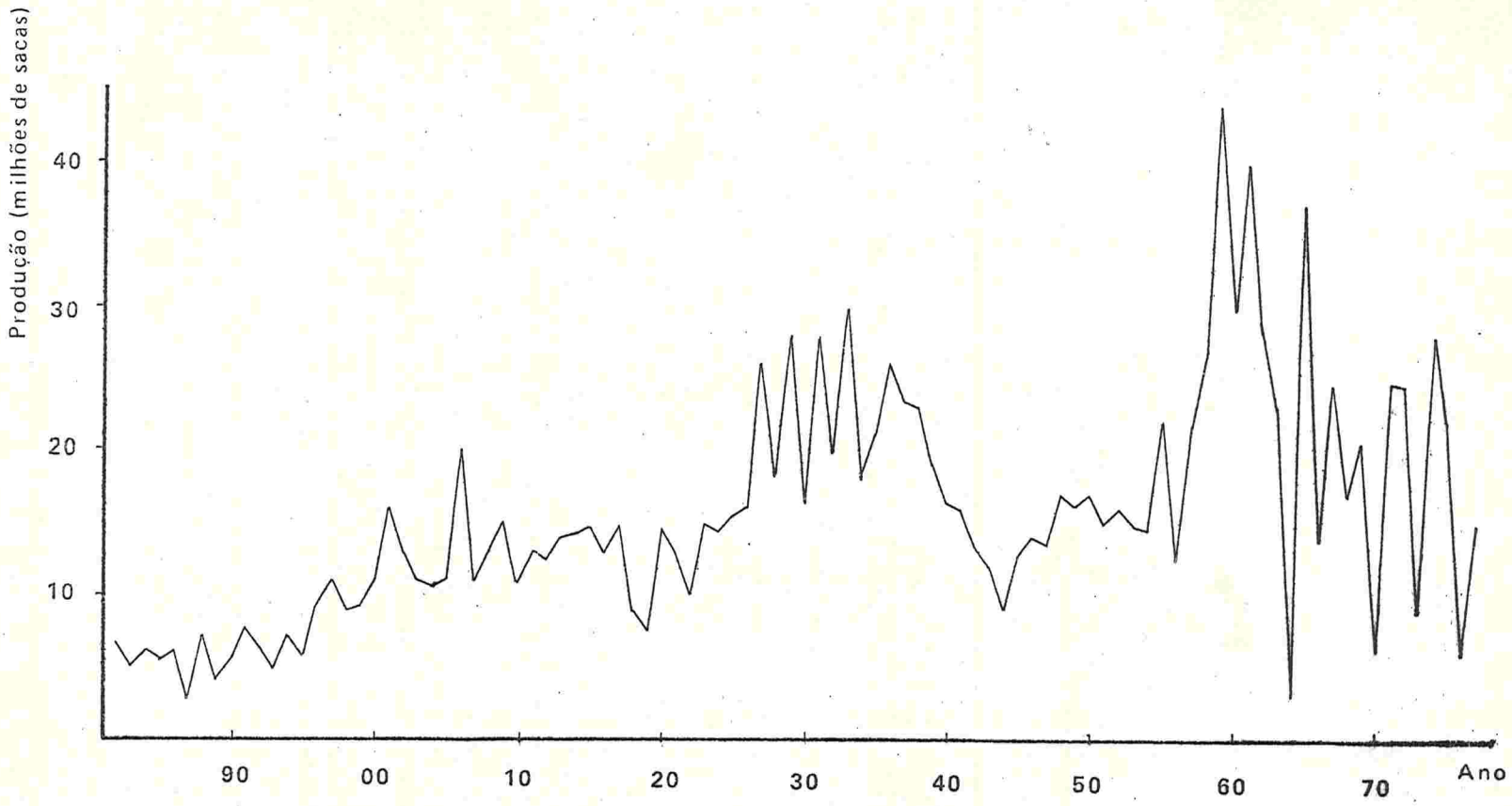


FIGURA 9.1 — Série 5: Produção Exportável de Café, Brasil, 1882-1977.

QUADRO 9.2 - Preço Médio Mensal (Corrente) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiros)

(continua)

Mês	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Jan.	...	2,09	2,06	2,20	2,39	1,67	2,03	2,74	3,80	6,47
Fev.	...	2,04	2,26	2,19	2,37	1,68	2,07	2,70	3,82	6,64
Mar.	...	1,97	2,19	2,21	2,36	1,75	2,10	2,73	4,08	6,28
Abr.	...	1,97	2,22	2,26	2,27	1,68	2,25	2,79	4,31	6,43
Mai.	...	1,94	2,26	2,16	2,13	1,65	2,33	2,95	4,73	6,65
Jun.	...	1,84	2,26	2,29	2,04	1,70	2,40	3,14	5,03	7,43
Jul.	2,21	2,02	2,37	2,47	1,84	1,68	2,49	3,32	5,44	8,78
Ago.	2,18	2,25	2,30	2,32	1,69	1,96	2,48	3,57	6,11	9,16
Set.	2,28	2,21	2,27	2,32	1,69	1,98	2,57	3,55	6,16	9,45
Out.	2,18	2,16	2,24	2,37	1,70	1,93	2,62	3,55	6,36	11,51
Nov.	2,11	2,01	2,23	2,34	1,69	2,01	2,66	3,46	6,63	12,58
Dez.	2,10	1,98	2,16	2,39	1,67	2,02	2,68	3,72	6,42	14,53

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 9.2 - Preço Médio Mensal (Corrente) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiros)

(continua)

Mês	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
Jan.	22,83	33,61	30,95	29,29	44,40	56,88	123,30	138,82	139,14	228,06
Fev.	23,90	32,83	30,48	29,47	45,45	67,15	134,77	131,46	141,21	238,34
Mar.	26,50	32,67	30,06	29,83	40,43	67,46	141,16	137,50	144,07	245,27
Abr.	26,96	33,33	30,76	30,36	47,56	71,12	144,62	138,22	149,38	249,25
Mai.	26,86	31,84	31,65	31,45	52,09	71,54	145,76	134,05	157,44	248,89
Jun.	27,90	30,74	31,53	36,58	56,07	71,88	142,45	130,25	163,45	256,21
Jul.	28,84	29,02	30,52	38,57	57,79	70,82	144,18	126,55	182,50	278,78
Ago.	29,71	29,74	30,15	39,40	58,16	74,16	147,68	126,47	222,07	287,00
Set.	30,18	30,25	30,13	39,84	59,85	100,88	148,95	125,50	221,98	286,27
Out.	33,34	30,01	30,87	40,90	62,37	105,37	147,83	127,09	213,60	287,70
Nov.	33,43	29,73	30,42	42,05	65,27	117,62	146,69	129,85	216,65	291,40
Dez.	34,06	30,20	29,17	43,00	66,06	119,71	144,50	132,16	218,61	298,40

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 9.2 - Preço Médio Mensal (Corrente) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiros)

(conclusão)

Mês	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	301,41	337,38	768,39	2.045,40	2.097,80	1.907,80
Fev.	312,84	339,39	891,40	2.158,00	1.968,60	1.970,50
Mar.	367,31	333,07	919,20	3.401,30	1.896,20	2.045,20
Abr.	379,06	327,49	1.057,70	3.763,80	1.867,90	2.211,80
Mai.	368,57	335,09	1.418,20	3.013,90	1.815,70	2.452,00
Jun.	353,05	376,00	1.423,80	2.574,90	1.956,20	2.915,40
Jul.	340,50	383,57	1.412,40	2.158,50	1.859,90	...
Ago.	322,89	632,51	1.368,70	1.908,40	1.878,20	...
Set.	314,30	638,12	1.446,50	1.801,20	2.013,50	...
Out.	307,03	640,45	1.492,20	1.741,20	1.947,00	...
Nov.	308,70	635,82	1.651,60	2.075,50	1.939,90	...
Dez.	315,95	649,45	1.792,30	2.089,00	1.843,40	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 9.3 - Série 6: Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiro de 1975)

(continua)

Mês	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Jan.	...	557,03	489,45	408,67	427,13	233,72	209,14	215,61	195,75	213,23
Fev.	...	543,70	520,82	406,81	422,33	219,58	208,02	211,65	193,52	206,62
Mar.	...	520,52	499,06	411,77	414,52	225,37	207,96	209,45	203,34	183,32
Abr.	...	520,52	504,02	422,37	393,08	211,90	219,28	204,09	213,07	185,05
Mai.	...	503,91	498,34	404,92	362,69	205,59	226,71	212,75	224,77	183,62
Jun.	...	477,93	482,71	429,29	346,40	209,68	232,05	223,04	231,83	195,48
Jul.	645,11	518,10	499,25	461,62	307,34	202,72	235,91	232,32	239,91	222,40
Ago.	630,35	565,27	474,71	430,96	276,26	225,84	228,26	237,61	261,92	223,71
Set.	644,07	544,07	453,26	432,27	268,39	222,30	227,66	226,68	258,64	219,43
Out.	613,00	525,43	441,52	440,24	261,18	211,64	220,92	209,24	259,91	251,99
Nov.	580,01	487,01	433,96	430,76	249,03	212,80	217,70	194,58	252,43	263,19
Dez.	569,60	477,85	419,01	433,45	243,74	211,31	214,75	201,80	230,14	287,32

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 9.3 - Série 6: Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiro de 1975)

(continua)

Mês	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
Jan.	405,65	330,18	221,12	154,78	190,33	198,11	358,21	337,68	282,43	400,58
Fev.	398,12	312,98	211,84	153,09	190,83	229,96	386,05	314,78	281,04	413,89
Mar.	411,25	294,08	203,61	151,12	166,33	229,74	396,93	321,71	283,06	419,97
Abr.	400,16	293,55	199,11	150,09	190,55	239,54	404,80	318,53	289,78	420,91
Mai.	388,33	276,07	199,81	153,01	206,01	238,34	402,48	303,22	302,54	415,72
Jun.	386,94	263,18	195,82	176,56	216,17	234,37	384,68	288,24	311,16	423,33
Jul.	376,15	242,03	183,42	181,87	220,03	224,94	382,61	276,07	343,17	456,93
Ago.	376,28	245,04	177,71	184,37	218,72	231,94	383,59	272,98	411,26	465,42
Set.	367,80	243,03	172,61	183,62	221,01	309,20	378,86	267,12	406,19	459,38
Out.	389,28	237,37	173,61	185,72	224,90	315,08	369,88	267,72	387,39	454,54
Nov.	364,64	231,86	169,52	188,15	232,62	346,64	365,53	270,74	389,46	455,68
Dez.	350,90	231,41	161,09	191,01	234,07	352,80	357,17	272,77	390,69	460,75

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

QUADRO 9.3 - Série 6: Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979

(em cruzeiro de 1975)

(conclusão)

Mês	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Jan.	452,85	378,78	661,55	1.197,54	894,26	571,87
Fev.	457,69	372,84	737,42	1.223,73	811,53	569,23
Mar.	514,07	360,09	732,73	1.853,33	756,75	558,44
Abr.	504,04	347,92	813,51	1.970,29	721,05	582,15
Mai.	473,65	348,74	1.053,76	1.523,10	679,09	630,48
Jun.	445,31	382,87	1.030,45	1.276,00	706,21	724,42
Jul.	424,24	382,32	984,98	1.047,63	652,99	...
Ago.	397,45	613,49	916,95	914,66	642,13	...
Set.	380,01	604,59	937,32	848,03	671,17	...
Out.	366,17	593,94	943,98	798,32	631,15	...
Nov.	362,52	576,56	1.025,76	927,32	612,02	...
Dez.	362,69	576,98	1.087,80	914,03	572,73	...

Fonte: Instituto de Economia Agrícola.

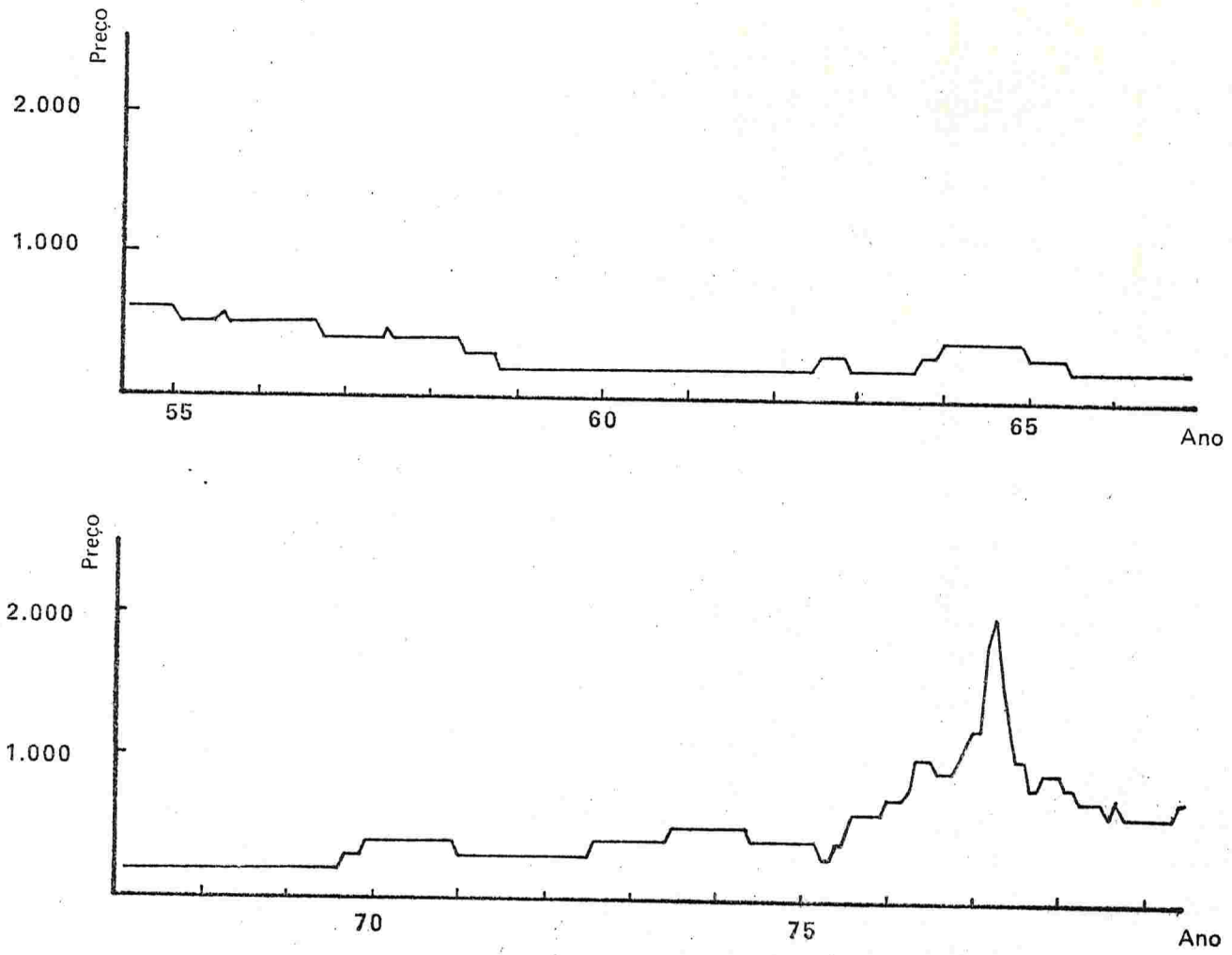


FIGURA 9.2 — Série 6: Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Julho de 1954 a Junho de 1979.

9.2 – MODELO UNIVARIADO PARA PRODUÇÃO

A seguir, identifica-se e estima-se um modelo univariado para produção de café.

9.2.1 – Identificação

A média da série é 15,78, com desvio padrão igual a 7,92.

As estimativas das autocorrelações e das autocorrelações parciais encontram-se no quadro 9.4 e nas figuras 9.3 e 9.4, com base nas quais identificaram-se os seguintes modelos:

a) como a função de autocorrelação para a série original não decai rapidamente, concluiu-se que pelo menos uma diferença é necessária; para a primeira diferença a função de autocorrelação decai rapidamente, enquanto a função de autocorrelação parcial sofre um corte após o primeiro *lag* indicando o modelo ARIMA (1,1,0):

$$(1 - \phi B)\ (1 - B)\ z_t = a_t\ ; \qquad (9.2.1)$$

b) levando-se em conta, na primeira diferença, que r_1, r_2, r_5, $\hat{\phi}_{11}$ e $\hat{\phi}_{55}$ são significativos, tem-se o modelo ARIMA (5,1,5):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_5 B^5)\ (1 - B)\ z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_5 B^5)\ a_t\ ; \qquad (9.2.2)$$

c) se as raízes não estiverem muito próximas do círculo uni

QUADRO 9.4 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 5

Lag (k)	Série original (z)			Primeira diferença (∇z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,59*	0,10	0,59*	-0,59*	0,10	-0,59*
2	0,65*	0,13	0,46*	0,26*	0,13	-0,13
3	0,51*	0,16	0,05	-0,21	0,14	-0,18
4	0,53*	0,18	0,11	0,27	0,14	0,15
5	0,33	0,19	-0,20	-0,42*	0,15	-0,29*
6	0,46*	0,20	0,22*	0,34	0,16	-0,06
7	0,32	0,21	0,01	-0,11	0,17	0,15
8	0,27	0,22	-0,19	-0,01	0,17	-0,09
9	0,23	0,22	0,04	-0,05	0,17	-0,06
10	0,23	0,22	0,01	0,16	0,17	0,02
11	0,11	0,22	-0,07	-0,24	0,17	-0,16
12	0,18	0,22	0,10	0,15	0,17	-0,03
13	0,13	0,23	-0,02	0,02	0,17	0,07
14	0,06	0,23	-0,12	-0,02	0,17	0,03
15	0,01	0,23	-0,07	-0,06	0,17	0,02
16	0,01	0,23	-0,05	0,06	0,17	-0,13
17	-0,04	0,23	0,08	-0,06	0,18	-0,06
18	-0,03	0,23	0,02	-0,07	0,18	-0,12
19	0,02	0,23	0,08	0,02	0,18	-0,24*
20	0,07	0,23	0,22	0,03	0,18	-0,12
21	0,09	0,23	0,09	-0,04	0,18	-0,08
22	0,13	0,23	0,03	0,04	0,18	-0,08
23	0,15	0,23	0,03	0,02	0,18	-0,03
24	0,15	0,23	-0,01	0,01	0,18	0,03
χ^2		197,12(**)			92,10(**)	

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 24 graus de liberdade.

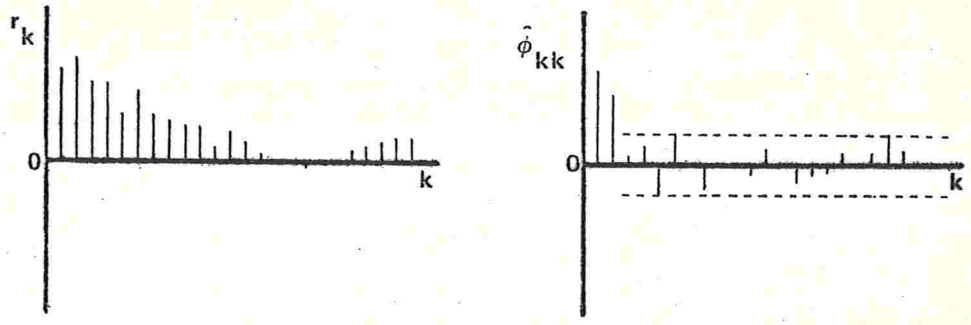


FIGURA 9.3 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 5, Série Original (z).

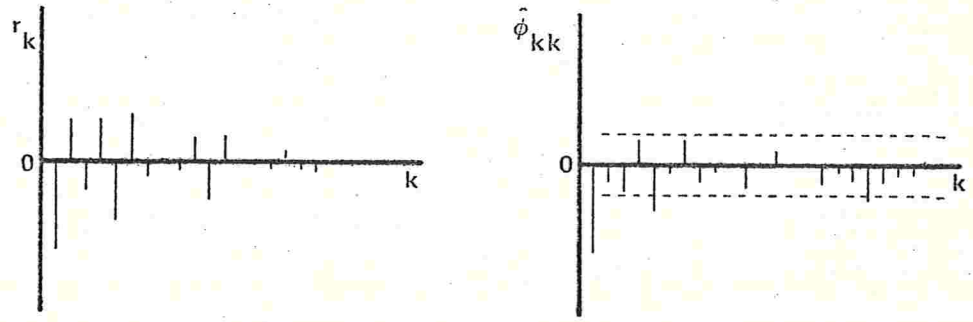


FIGURA 9.4 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 5, Primeira Diferença (∇_z).

tário, pode-se ter um modelo AR(2) ao invés do modelo (9.2.1):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(z_t - \mu) = a_t \qquad (9.2.3)$$

9.2.2 — Estimação e Previsão

Na estimação dos parâmetros a transformação logarítmica mostrou-se melhor que a série original (a transformação elimina problemas de heterocedasticidade e de não-normalidade). Assim, trabalhou-se com a série transformada

$$w_t = \ln z_t , \qquad t = 1, 2, \ldots, 96. \qquad (9.2.4)$$

As estimativas dos parâmetros para os modelos alternativos identificados encontram-se no quadro 9.5.

Como a média dos resíduos não diferiu significativamente de zero em nenhum dos modelos, não foi preciso incluir um parâmetro de tendência determinística. Também nenhum dos modelos apresentou autocorrelação significativa no resíduo.

Pelo critério do desvio padrão residual o modelo ARIMA (5,1,5) seria o melhor, entretanto, nenhum de seus parâmetros mostrou-se significativo, havendo grande correlação entre eles.

Escolhe-se, portanto, o seguinte modelo univariado:

$$(1 - 0{,}3311\, B - 0{,}4782\, B^2)(w_t - 2{,}6964) = a_t$$

ou

$$w_t = 0{,}5142 + 0{,}3311\, w_{t-1} + 0{,}4782\, w_{t-2} + a_t . \qquad (9.2.5)$$

QUADRO 9.5 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 5

Modelo (9.2.1): ARIMA (1,1,0)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	-0,5747 (*)	-0,7508	-0,3986
Desvio padrão do resíduo		0,3459	
Autocorrelação no resíduo		—	

Modelo (9.2.3): AR (2)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
μ	2,6964(*)	2,3294	3,0633
ϕ_1	0,3311(*)	0,1453	0,5169
ϕ_2	0,4782(*)	0,2917	0,6646
Desvio padrão do resíduo		0,3369	
Autocorrelação no resíduo		—	

Modelo (9.2.2): ARIMA (5,1,5)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ_1	-0,4697	-0,9833	0,0438
ϕ_5	-0,3586	-0,7338	0,0166
θ_1	0,1529	-0,4061	0,7118
θ_2	0,1928	-0,2056	0,5913
θ_5	-0,1575	-0,5314	0,2165
Desvio padrão do resíduo		0,3293	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

As previsões de 1 a 10 passos adiante, feitas a partir deste modelo, encontram-se no quadro 9.6 e na figura 9.5.

9.3 – MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PRODUÇÃO

As intervenções cujos efeitos parecem ter sido mais marcantes sobre a produção de café no período 1882-977 são as seguintes:

a) abolição da escravatura, em 1888, que pode ser representada por

$$X_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 6 \\ 1, & t = 7, 8, \ldots, 96; \end{cases} \qquad (9.3.1)$$

b) geada em 1902, representada por

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} 0, & t \neq 21 \\ 1, & t = 21; \end{cases} \qquad (9.3.2)$$

c) Primeira Guerra Mundial em 1914-18 e geada em 1918, representadas por

$$X_t^{(3)} = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 32, 38, \ldots, 96 \\ 1, & t = 33, 34, 35, 36, 37; \end{cases} \qquad (9.3.3)$$

d) crise econômica de 1929, representada por

QUADRO 9.6 - Previsões do Modelo Univariado, Produção Exportável de Café, Brasil, Série 5, 1978-87

(em milhões de sacas de 60kg de café beneficiado)

Número de passos adiante	Ano	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	1978	5,0229	9,7207	18,8123
2	1979	6,5284	13,0876	26,2370
3	1980	5,2425	11,6260	25,7826
4	1981	5,6204	12,8873	29,5500
5	1982	5,2767	12,6004	30,0890
6	1983	5,3804	13,1381	32,0814
7	1984	5,2886	13,1785	32,8390
8	1985	5,3279	13,4582	33,9953
9	1986	5,3136	13,5720	34,6654
10	1987	5,3390	13,7473	35,3975

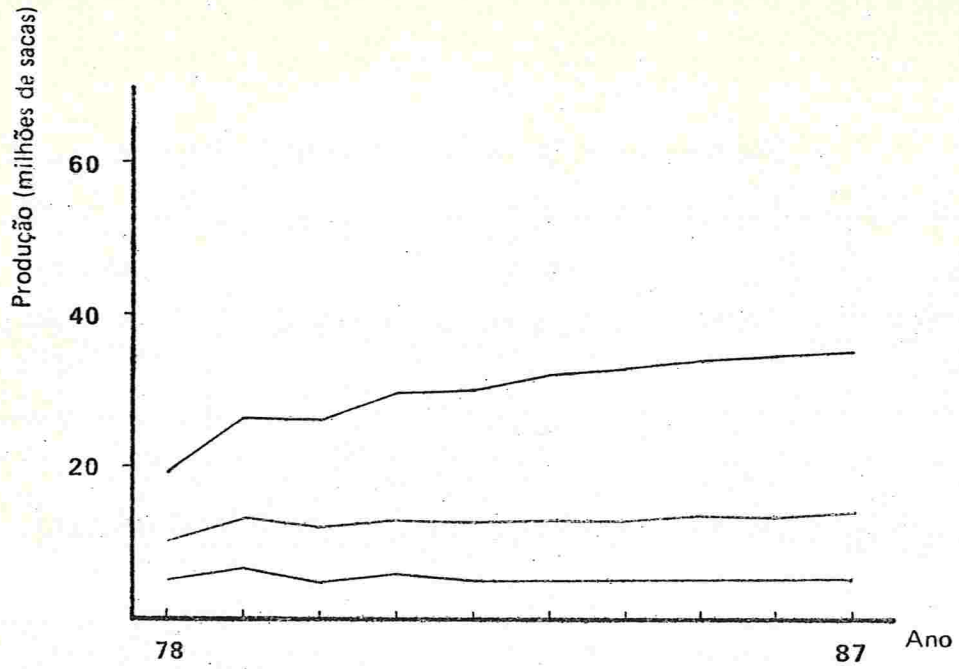


FIGURA 9.5 — Previsões do Modelo Univariado, Produção Exportável de Café, Brasil, Série 5, 1978-87.

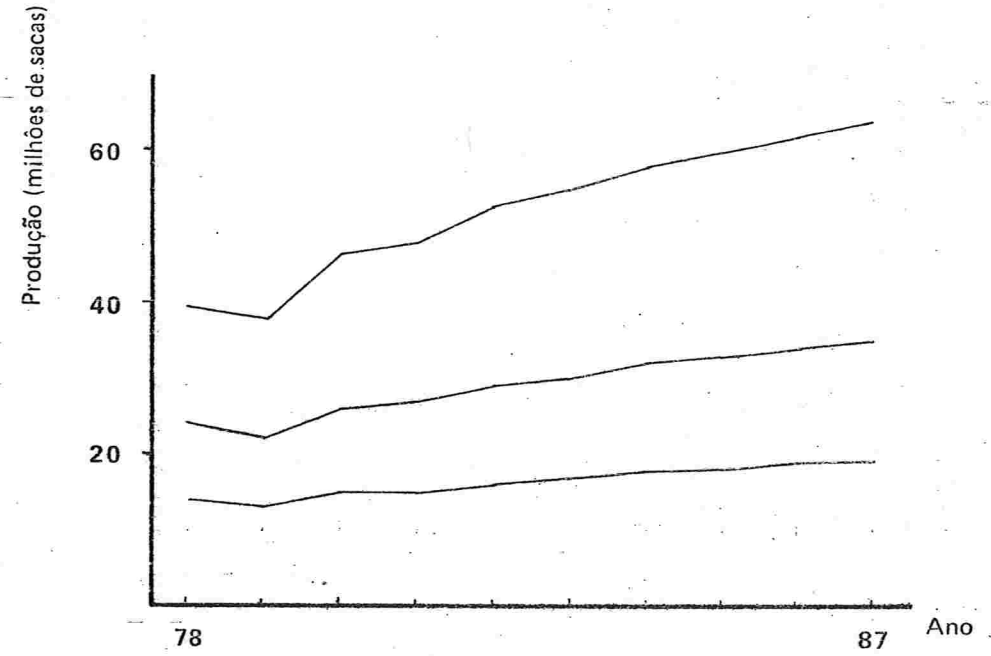


FIGURA 9.6 — Previsões do Modelo de Intervenção, Produção Exportável de Café, Brasil, Série 5, 1978-87.

$$X_t^{(4)} = \begin{cases} 0, & t \neq 48 \\ 1, & t = 48; \end{cases} \qquad (9.3.4)$$

e) Segunda Guerra Mundial em 1939-45, representada

$$X_t^{(5)} = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 57, 65, \ldots, 96 \\ 1, & t = 58, 59, \ldots, 64; \end{cases} \qquad (9.3.5)$$

f) geada em 1955, representada por

$$X_t^{(6)} = \begin{cases} 0, & t \neq 74 \\ 1, & t = 74; \end{cases} \qquad (9.3.6)$$

g) seca e geada em 1963, representadas por

$$X_t^{(7)} = \begin{cases} 0, & t \neq 82 \\ 1, & t = 82; \end{cases} \qquad (9.3.7)$$

h) geada em 1969, representada por

$$X_t^{(8)} = \begin{cases} 0, & t \neq 88 \\ 1, & t = 88; \end{cases} \qquad (9.3.8)$$

i) aparecimento da ferrugem em 1970, representada por

$$X_t^{(9)} = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 88 \\ 1, & t = 89, 90, \ldots, 96; \end{cases} \qquad (9.3.9)$$

j) geada em 1975, representada por

$$X_t^{(10)} = \begin{cases} 0, & t \neq 94 \\ 1, & t = 94. \end{cases} \qquad (9.3.10)$$

9.3.1 — Identificação

Os efeitos esperados das intervenções são os seguintes, onde os casos referem-se à figura 6.2:

a) a abolição da escravatura pode ter mudado o nível, como no caso (a) da figura 6.2, ou a inclinação da série, como no caso (e), com as respectivas funções de transferência dadas por

$$v_1(B) = \omega_o$$

e

$$v_1'(B) = \frac{\omega_o}{1 - B} \quad ;$$

com b = 0;

b) a geada de 1902 afetou as duas safras seguintes, sugerindo

$$v_2(B) = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B} \quad ; \quad |\delta_1| < 1 \ ,$$

com b = 1;

c) com a Primeira Guerra cessou alguma tendência ao crescimento da produção, enquanto a geada de 1918 reduziu a safra dos anos corrente e seguinte, sugerindo

$$v_3(B) = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B} , \quad |\delta_1| < 1 ,$$

com b = 0;

d) a crise de 1929 afetou, basicamente, a produção do ano seguinte e, talvez, a tendência a longo prazo, sugerindo

$$v_4(B) = \omega_o ,$$

com b = 1;

e) a conseqüência da Segunda Guerra parece ter sido uma mudança no nível ou na inclinação da série, representadas, respectivamente, por

$$v_5(B) = \omega_o$$

e

$$v_5'(B) = \frac{\omega_o}{1 - B} ,$$

com b = 0;

f) a geada de 1955 afetou a produção do ano seguinte, sugerindo

$$v_6(B) = \omega_o ,$$

com b = 1;

g) a seca e a geada de 1963 afetaram a produção do ano seguinte, sugerindo

$$v_7 (B) = \omega_o,$$

com b = 1;

h) a geada de 1969 afetou a produção do ano seguinte, sugerindo

$$v_8 (B) = \omega_o ,$$

com b = 1;

i) o aparecimento da ferrugem em 1970 pode ter causado mudança no nível da série, sugerindo

$$v_9 (B) = \omega_o$$

com b = 0; e

j) a geada de 1975 afetou a produção dos dois anos seguintes, sugerindo

$$v_{10} = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B} , \quad |\delta_1| < 1 ,$$

com b = 1.

Pode-se, ainda, tentar incluir no modelo o ciclo bianual de produções altas e baixas, característico do café em certos períodos.

Propõem-se, então, os seguintes modelos de intervenção, com as variações nas funções de transferência:

a) sem o ciclo bianual

$$w_t - \mu = \sum_{i=1}^{10} v_i\ (B)\ X_{t-b_i}^{(i)} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2}\ a_t; \qquad (9.3.11)$$

b) com o ciclo bianual

$$(1 - B^2)\ w_t = \sum_{i=1}^{10} v_i\ (B)\ X_{t-b_i}^{(i)} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2}\ a_t\ . \qquad (9.3.12)$$

9.3.2 — Estimação e Previsão

Usou-se a transformação logarítmica dos dados.

Por limitações do programa de computador testaram-se alguns modelos parciais alternativos, chegando-se às seguintes conclusões:

a) a inclusão do ciclo bianual piora a ajustamento;

b) os efeitos das intervenções (9.3.6), (9.3.7), (9.3.8) e (9.3.10) são significativos, com função de transferência

$$v_i\ (B) = \omega_o^{(i)}\ ;$$

c) é difícil separar os efeitos da geada de 1969 (9.3.8) dos efeitos do aparecimento da ferrugem em 1970 (9.3.9); e

d) os efeitos das intervenções (9.3.1) e (9.3.5) são significativos, com função de transferência

$$v_i\ (B) = \frac{\omega_o}{1 - B}\ .$$

Das seis intervenções de efeitos significativos, a (9.3.6) é a de efeito menos sensível, sendo eliminada também, em virtude de li

mitações no número de séries permitido no programa.

Então, o modelo escolhido, cujas estimativas encontram-se no quadro 9.7, é:

$$(w_t - 1{,}9037) = \frac{0{,}0241}{1 - B} X_t^{(1)} - \frac{0{,}1042}{1 - B} X_t^{(5)} - 1{,}0746\, X_{t-1}^{(7)}$$

$$- 0{,}6615\, X_{t-1}^{(8)} - 1{,}3851\, X_{t-1}^{(10)} + \frac{1}{1 - 0{,}2376\, B - 0{,}3806\, B^2}\, a_t \,. \quad (9.3.13)$$

A média e os parâmetros $\omega_o^{(1)}$ e $\omega_o^{(7)}$ apresentam correlação alta (respectivamente, -0,84 para os dois primeiros, -0,85 para os dois últimos e 0,53 para os outros dois).

Pelo critério do desvio padrão residual, o modelo de intervenção é melhor que o modelo univariado. Quanto aos efeitos de intervenção, conclui-se que:

a) após a abolição da escravatura, em 1888, a série de produção de café passou a aumentar, à razão média de 1,02 milhões de sacas por ano, onde $\omega_o = 0{,}0241 = \ln 1{,}02$;

b) após a guerra de 1939-45, a série de produção de café passou a diminuir, em relação à tendência anterior, à razão média de 1,11 milhões de sacas por ano;

c) os efeitos das geadas mais fortes, como as de 1963, 69 e 75 foram de diminuição na safra do ano seguinte, voltando depois aos níveis normais; e

d) o modelo para produção é, provavelmente, mais complexo do que o apresentado e deve incluir outras variáveis, não havendo sido estudado por causa das limitações já citadas.

As previsões de 1 a 10 passos adiante, feitas a partir do modelo (9.3.13), encontram-se no quadro 9.8 e na figura 9.6.

Comparando-se as previsões, verifica-se que o modelo univariado conserva a queda de produção havida em 1975, devida à geada, es

QUADRO 9.7 - Estimativas dos Parâmetros, Modelo de Intervenção, Série 5

Modelo (9.3.13)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
μ	1,9037 (*)	1,5667	2,2407
ϕ_1	0,2376 (*)	0,0280	0,4472
ϕ_2	0,3806 (*)	0,1700	0,5912
$\omega_o^{(1)}$	0,0241 (*)	0,0138	0,0344
$\omega_o^{(5)}$	-0,1042 (*)	-0,1821	-0,0263
$\omega_o^{(7)}$	-1,0746 (*)	-1,5540	-0,5952
$\omega_o^{(8)}$	-0,6615 (*)	-1,1392	-0,1838
$\omega_o^{(10)}$	-1,3851 (*)	-1,9001	-0,8701
Desvio padrão do resíduo		0,2603	
Autocorrelação no resíduo		—	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 9.8 - Previsões do Modelo de Intervenção, Produção Exportável de Café, Série 5, 1978-87

(em milhões de sacas de 60kg de café beneficiado)

Número de passos adiante	Ano	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	1978	14,2554	23,7435	39,5467
2	1979	13,2720	22,4219	37,8799
3	1980	14,9256	26,3876	46,6518
4	1981	15,1898	27,0855	48,2972
5	1982	16,2475	29,2649	52,7117
6	1983	16,8113	30,3840	54,9148
7	1984	17,5833	31,8645	57,7449
8	1985	18,1843	32,9927	59,8603
9	1986	18,8284	34,1877	62,0764
10	1987	19,4118	35,2606	64,0494

tabilizando as previsões ao redor de 13 milhões de sacas, o que não é real. Já o modelo de intervenção volta a valores mais razoáveis, acima de 20 milhões, apresentando tendência ao aumento constante a longo prazo, o que pode, também, não ser real. O DPR do modelo de intervenção é 23% menor que o do univariado, indicando que se ajusta bem melhor aos dados. Os intervalos de confiança das previsões do modelo de intervenção são proporcionalmente mais estreitos em relação ao modelo univariado, isto é, as previsões são mais precisas.

9.4 – MODELO UNIVARIADO PARA PREÇO

A seguir identifica-se e estima-se um modelo univariado para preço de café a nível de produtor.

9.4.1 – Identificação

A média da série é 404,14, com desvio padrão igual a 254,84.

As estimativas das autocorrelações e das autocorrelações parciais encontram-se no quadro 9.9 e nas figuras 9.7 e 9.8, com base nas quais identificaram-se os seguintes modelos:

a) para a série original a função de autocorrelação não decai rapidamente para zero, indicando que pelo menos uma diferença é necessária; já para a primeira diferença ela decai rapidamente, enquanto as duas primeiras autocorrelações parciais são não nulas, sugerindo o modelo ARIMA (2,1,0):

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - B) z_t = a_t ; \qquad (9.4.1)$$

QUADRO 9.9 - Estimativas das Autocorrelações, dos Respectivos Desvios Padrões e das Autocorrelações Parciais, Série 6

Lag (k)	Série original (z)			Primeira diferença (∇z)		
	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$	r_k	$s(r_k)$	$\hat{\phi}_{kk}$
1	0,97*	0,06	0,97*	0,30*	0,06	0,30*
2	0,92*	0,10	-0,25*	-0,06	0,06	-0,16*
3	0,88*	0,12	0,10	-0,06	0,06	0,01
4	0,85*	0,14	0,01	-0,13*	0,06	-0,13*
5	0,82*	0,16	0,09	-0,12	0,06	-0,05
6	0,79*	0,17	0,05	-0,13*	0,06	-0,12*
7	0,78*	0,18	0,09	-0,04	0,07	0,01
8	0,76*	0,19	-0,01	0,09	0,07	0,06
9	0,74*	0,20	-0,06	0,12	0,07	0,05
10	0,72*	0,21	-0,07	0,20*	0,07	0,17*
11	0,68*	0,22	-0,14*	0,08	0,07	-0,04
12	0,64*	0,23	-0,03	-0,10	0,07	-0,07
13	0,60*	0,23	0,03	-0,09	0,07	-0,01
14	0,57*	0,24	0,00	-0,03	0,07	0,04
15	0,54*	0,24	-0,06	-0,07	0,07	-0,05
16	0,51*	0,25	0,02	-0,13	0,07	-0,10
17	0,49	0,25	0,06	0,00	0,07	0,05
18	0,47	0,25	-0,06	0,03	0,07	-0,07
19	0,45	0,26	0,02	0,14	0,07	0,14*
20	0,42	0,26	-0,13*	-0,01	0,07	-0,17*
21	0,39	0,26	0,13*	-0,14	0,07	-0,08
22	0,36	0,26	0,04	-0,08	0,07	-0,03
23	0,35	0,27	0,02	-0,13	0,07	-0,11
24	0,33	0,27	0,04	-0,12	0,07	-0,07
χ^2	3096,5 (**)			99,77(**)		

(*) Valores que caem fora do intervalo de dois desvios padrões.

(**) Significativo ao nível de 5%, com 24 graus de liberdade.

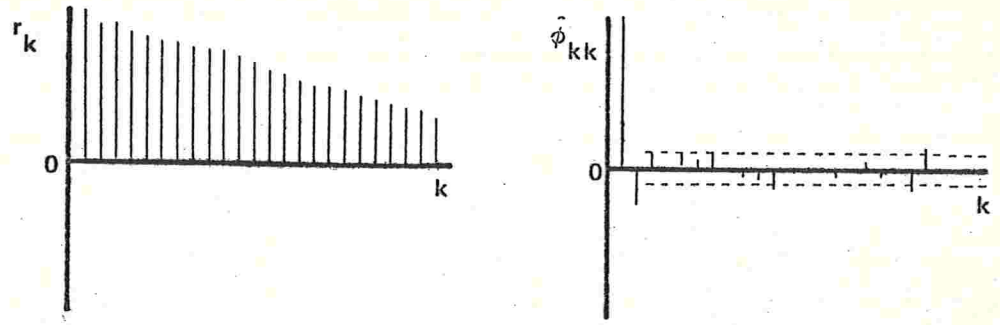


FIGURA 9.7 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 6, Série Original (z).

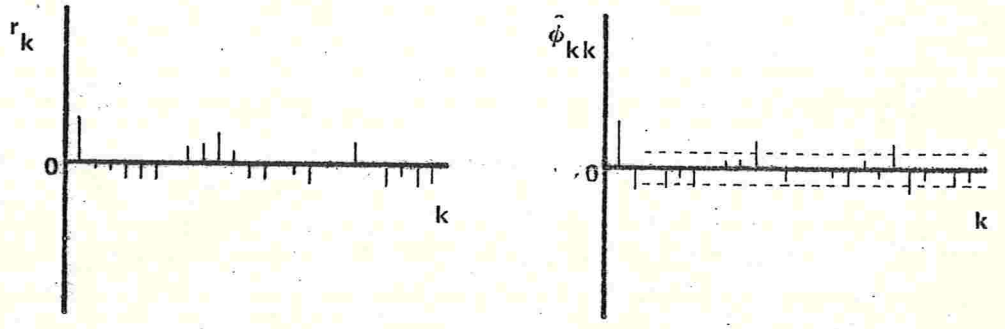


FIGURA 9.8 — Estimativas das Autocorrelações e das Autocorrelações Parciais, Série 6, Primeira Diferença (∇_z).

b) também é possível considerar o modelo ARIMA (1,1,0):

$$(1 - \phi B)(1 - B) z_t = a_t ; \qquad (9.4.2)$$

c) a primeira diferença também pode indicar o modelo ARIMA (1,1,1):

$$(1 - \phi B)(1 - B) z_t = (1 - \theta B) a_t ; \qquad (9.4.3)$$

d) a fim de considerar a possibilidade de sazonalidade é interessante o modelo ARIMA $(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$:

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})(1 - B)(1 - B^{12}) z_t = a_t ; \qquad (9.4.4)$$

e) também é interessante o modelo ARIMA $(1,1,0) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - \phi B)(1 - B)(1 - B^{12}) z_t = a_t ; \text{ e} \qquad (9.4.5)$$

f) finalmente, o modelo só de diferenças, ARIMA $(0,1,0) \times (0,1,0)_{12}$:

$$(1 - B)(1 - B^{12}) z_t = a_t . \qquad (9.4.6)$$

9.4.2 — Estimação e Previsão

Na estimação dos parâmetros, a transformação logarítmica mostrou-se melhor que a série original. Assim, trabalhou-se com a série transformada

$$w_t = \ln z_t , \quad t = 1, 2, \ldots, 300. \qquad (9.4.7)$$

As estimativas dos parâmetros para os modelos alternativos identificados encontram-se no quadro 9.10.

Como a média dos resíduos não diferiu significativamente de zero em nenhum dos modelos, não foi preciso incluir um parâmetro de tendência determinística. Todos os modelos apresentaram autocorrelação significativa nos resíduos, entretanto, somente nos modelos (9.4.4), (9.4.5) e (9.4.6) o resíduo não é ruído branco, o que indica inadequação desses modelos.

Pelo critério do desvio padrão residual os modelos (9.2.2) e (9.2.3) são os melhores. Entretanto, neste último o parâmetro de médias móveis não é significativo, apresentando correlação alta com o outro parâmetro, igual a 0,96.

Escolheu-se, portanto o seguinte modelo univariado:

$$(1 - 0{,}2476\ B)\ (1 - B)\ w_t = a_t$$

ou

$$w_t = 1{,}24776\ w_{t-1} - 0{,}2476\ w_{t-2} + a_t. \qquad (9.4.8)$$

As previsões de 1 a 12 passos adiante, feitas a partir deste modelo, encontram-se no quadro 9.11 e na figura 9.9.

9.5 – MODELO DE INTERVENÇÃO PARA PREÇO

As principais intervenções ocorridas no período de julho de 1954 a junho de 1979 são as seguintes:

a) geada em julho de 1955, representada por

$$X_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t \neq 13 \\ 1, & t = 13 \end{cases} \qquad (9.5.1)$$

QUADRO 9.10 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 6

(continua)

Modelo (9.4.6): ARIMA $(0,1,0) \times (0,1,0)_{12}$			
Desvio padrão do resíduo		0,1076	
Autocorrelação no resíduo		*lags* 1, 12, 13	

Modelo (9.4.5): ARIMA $(1,1,0) \times (0,1,0)_{12}$			
Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,2678(*)	0,1537	0,3819
Desvio padrão do resíduo		0,1038	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 12	

Modelo (9.4.4): ARIMA $(1,1,0) \times (1,1,0)_{12}$			
Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,2834(*)	0,1656	0,4013
Φ	-0,4778	-0,5860	-0,3695
Desvio padrão do resíduo		0,0930	
Autocorrelação no resíduo		*lags* 12, 21 e 24	

Modelo (9.4.1): ARIMA (2,1,0)			
Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ_1	0,2315(*)	0,1148	0,3482
ϕ_2	0,0687	-0,0482	0,1856
Desvio padrão do resíduo		0,0708	
Autocorrelação no resíduo		*lags* 21 e 24	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 9.10 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos Univariados, Série 6

(conclusão)

Modelo (9.4.3): ARIMA (1,1,1)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,4796(*)	0,0870	0,8722
θ	0,2466	-0,1858	0,6790
Desvio padrão do resíduo		0,0707	
Autocorrelação no resíduo		*lags* 21 e 24	

Modelo (9.4.2): ARIMA (1,1,0)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,2476(*)	0,1344	0,3607
Desvio padrão do resíduo		0,0707	
Autocorrelação no resíduo		*lags* 21 e 24	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 9.11 - Previsões do Modelo Univariado, Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Série 6, Julho de 1979 a Junho de 1980

(em cruzeiro de 1975)

Número de passos adiante	Mês	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	Jul. 79	652,71	749,76	861,25
2	Ago. 79	605,84	756,17	943,81
3	Set. 79	569,03	757,77	1.009,11
4	Out. 79	539,52	758,16	1.065,41
5	Nov. 79	515,02	758,26	1.116,38
6	Dez. 79	494,05	758,29	1.163,86
7	Jan. 80	475,66	758,29	1.208,86
8	Fev. 80	459,27	758,29	1.252,02
9	Mar. 80	444,46	758,30	1.293,74
10	Abr. 80	430,94	758,30	1.334,31
11	Mai. 80	418,51	758,30	1.373,95
12	Jun. 80	406,99	758,30	1.412,82

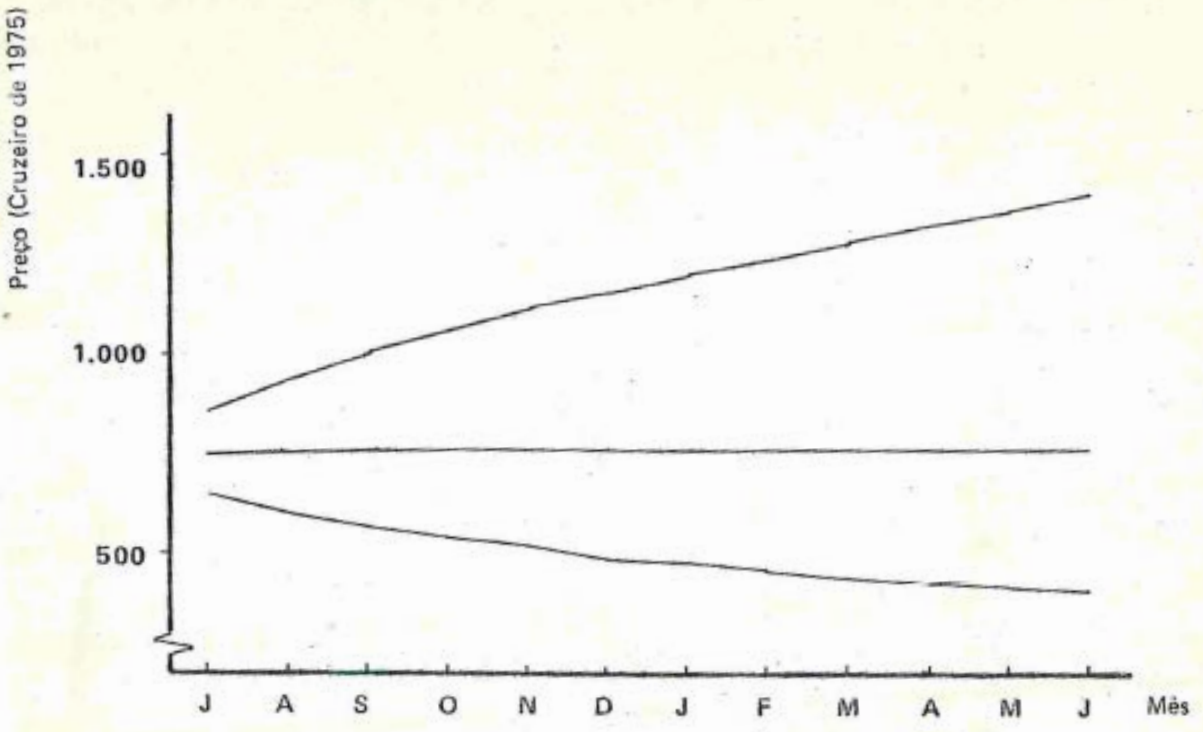


FIGURA 9.9 — Previsões do Modelo Univariado, Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Série 6, Julho de 1979 a Junho de 1980.

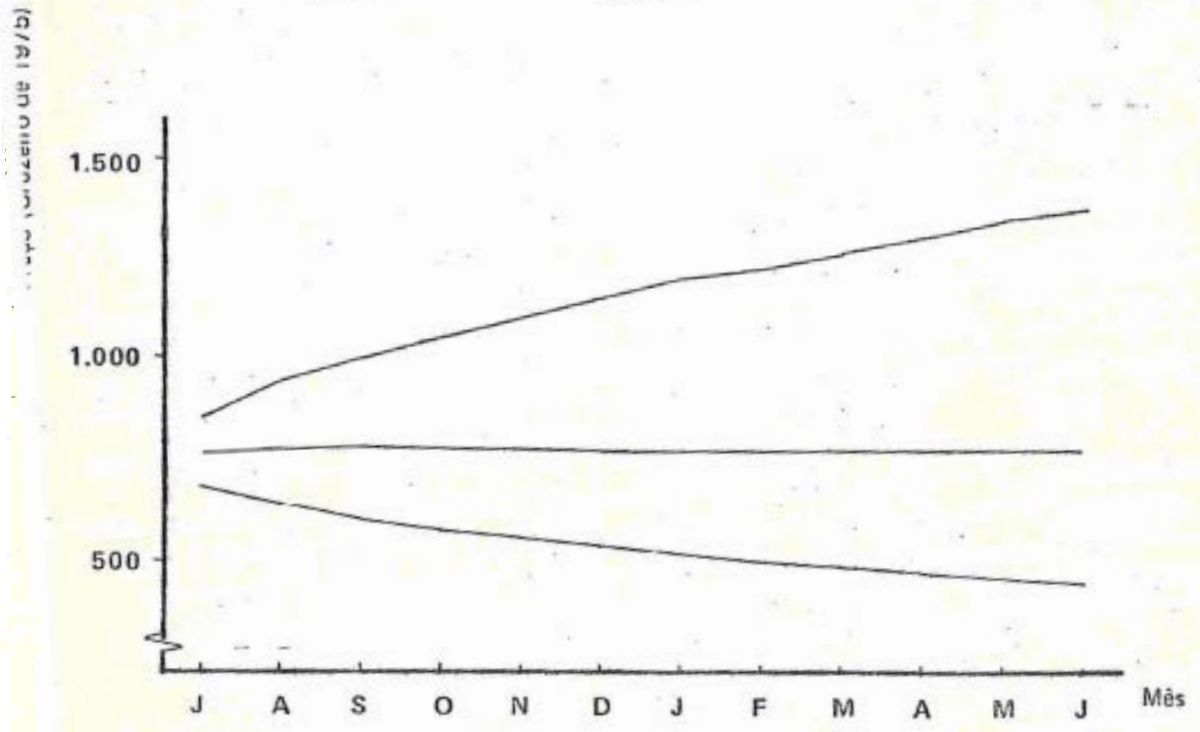


FIGURA 9.10 — Previsões do Modelo de Intervenção, Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Série 6, Julho de 1979 a Junho de 1980.

b) seca e geada em julho de 1963, representadas por

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} 0, & t \neq 109 \\ 1, & t = 109 \end{cases} \qquad (9.5.2)$$

c) geada em julho de 1969, representada por

$$X_t^{(3)} = \begin{cases} 0, & t \neq 181 \\ 1, & t = 181; \end{cases} \qquad (9.5.3)$$

d) aparecimento da ferrugem em março de 1970, representada por

$$X_t^{(4)} = \begin{cases} 0, & t = 1, 2, \ldots, 188 \\ 1, & t = 189, \ldots, 300; \text{ e} \end{cases} \qquad (9.5.4)$$

e) geada em julho de 1975, representada por

$$X_t^{(5)} = \begin{cases} 0, & t \neq 253 \\ 1, & t = 253. \end{cases} \qquad (9.5.5)$$

9.5.1 — Identificação

O efeito das geadas deve ser o de uma elevação temporária dos preços, voltando depois aos preços normais, sugerindo, em sua forma mais simples,

$$v_1(B) = v_2(B) = v_3(B) = v_5(B) = \omega_o ,$$

como no caso (b) da figura 6.2.

O aparecimento da ferrugem pode ter causado mudança no nível da série, sugerindo

$$v_4(B) = \omega_o ,$$

como no caso (a) da figura 6.2.

Resulta daí o modelo de intervenção

$$(1 - B)\, w_t = \sum_{i=1}^{5} v_i(B)\, X_{t-b_i}^{(i)} + \frac{1}{1 - \phi B}\, a_t . \qquad (9.5.6)$$

9.5.2 — Estimação e Previsão

Como no caso univariado, usou-se a transformação logarítmica dos dados.

Testaram-se, inicialmente, os valores b = 0,1 e 6 no modelo com todas as intervenções (quadro 9.12). Com base nos resultados obtidos formulou-se o modelo

$$(1 - B)\, w_t = \omega_o^{(2)}\, X_{t-6}^{(2)} + \omega_o^{(5)}\, X_t^{(5)} + \frac{1}{1 - \phi B}\, a_t \qquad (9.5.7)$$

e estimaram-se seus parâmetros (quadro 9.12), obtendo-se

$$(1 - B)\, w_t = 0{,}3257\, X_{t-6}^{(2)} + 0{,}4774\, X_t^{(5)} + \frac{1}{1 - 0{,}3044 B}\, a_t \qquad (9.5.8)$$

Pelo critério do desvio padrão residual o modelo de intervenção é melhor que o modelo univariado. Quanto aos efeitos de inter

QUADRO 9.12 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos de Intervenção, Série 6

(continua)

Modelo (9.5.6) com b = 0

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,2966(*)	0,1839	0,4093
$\omega_o^{(1)}$	0,0714	-0,0634	0,2061
$\omega_o^{(2)}$	0,1104	-0,0244	0,2451
$\omega_o^{(3)}$	-0,0448	-0,1795	0,0898
$\omega_o^{(4)}$	0,0072	-0,0116	0,0261
$\omega_o^{(5)}$	-0,1591(*)	-0,2940	-0,0241
Desvio padrão do resíduo		0,0702	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 24	

Modelo (9.5.6) com b = 1

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,3018(*)	0,1884	0,4152
$\omega_o^{(1)}$	0,0754	-0,0493	0,2000
$\omega_o^{(2)}$	-0,0245	-0,1495	0,1006
$\omega_o^{(3)}$	-0,0375	-0,1621	0,0871
$\omega_o^{(4)}$	0,0016	-0,0160	0,0192
$\omega_o^{(5)}$	0,4766(*)	0,3520	0,6013
Desvio padrão do resíduo		0,0650	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 13	

(*) significativo ao nível de 5%.

QUADRO 9.12 - Estimativas dos Parâmetros, Modelos de Intervenção, Série 6

(conclusão)

Modelo (9.5.6) com b = 6

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,2453(*)	0,1298	0,3608
$\omega_o^{(1)}$	0,0140	-0,1192	0,1472
$\omega_o^{(2)}$	0,3289(*)	0,1954	0,4625
$\omega_o^{(3)}$	-0,0062	-0,1394	0,1271
$\omega_o^{(4)}$	0,0053	-0,0123	0,0229
$\omega_o^{(5)}$	0,1086	-0,0249	0,2422
Desvio padrão do resíduo		0,0686	
Autocorrelação no resíduo		*lag* 21	

Modelo (9.5.7)

Parâmetro	Estimativa	Intervalo de confiança (95%)	
ϕ	0,3044(*)	0,1914	0,4176
$\omega_o^{(2)}$	0,3257(*)	0,2065	0,4449
$\omega_o^{(5)}$	0,4774(*)	0,3585	0,5963
Desvio padrão do resíduo		0,0621	
Autocorrelação no resíduo		——	

(*) significativo ao nível de 5%.

venção, conclui-se que:

a) a geada e a seca de 1963 ocasionaram elevações do preço real recebido pelos produtores, com defasagem de vários meses (b = 6), o que mostra que a seca também teve influência sobre o preço;

b) o efeito da geada de 1975 sobre os preços foi mais imediato, talvez pela sua intensidade;

c) não se detectou o efeito de geadas mais fracas e/ou localizadas;

d) o efeito do aparecimento da ferrugem em 1970 pode não ter se manifestado no modelo por diversas razões: primeiro, porque a produção não caiu bruscamente em virtude das precauções tomadas na época, segundo, porque o efeito a longo prazo acaba sendo absorvido pelo próprio modelo, que é auto-regressivo.

As previsões de 1 a 12 passos adiante, feitas a partir do modelo (9.5.8), encontram-se no quadro 9.13 e na figura 9.10.

Há que ressaltar, ainda, que fatores do mercado internacional podem também afetar os preços a nível de produtor, mas, que, embora não tenham sido incluídos diretamente no modelo, podem em parte estar sendo detectados pelo termo auto-regressivo.

Comparando-se as previsões, observa-se que ambos os modelos, univariado e de intervenção, resultam em previsões aproximadamente constantes depois de alguns meses. O DPR do modelo de intervenção é 12% menor que o do univariado, indicando melhor ajuste aos dados. As previsões do modelo de intervenção são mais precisas, uma vez que seus intervalos de confiança são mais estreitos que os das previsões do univariado.

QUADRO 9.13 - Previsões do Modelo de Intervenção, Preço Médio Mensal (Deflacionado) Recebido pelos Produtores de Café, Estado de São Paulo, Série 6, Julho de 1979 a Junho de 1980

(em cruzeiro de 1975)

Número de passos adiante	Mês	Limite inferior (95%)	Previsão	Limite superior (95%)
1	Jul. 79	669,05	755,71	853,59
2	Ago. 79	626,62	765,50	935,16
3	Set. 79	590,94	768,51	999,43
4	Out. 79	561,57	769,42	1.054,21
5	Nov. 79	536,96	769,70	1.103,34
6	Dez. 79	515,83	769,79	1.148,79
7	Jan. 80	497,31	769,82	1.191,65
8	Fev. 80	480,80	769,82	1.232,60
9	Mar. 80	465,88	769,83	1.272,06
10	Abr. 80	452,27	769,83	1.310,35
11	Mai. 80	439,75	769,83	1.347,66
12	Jun. 80	428,15	769,83	1.384,18

9.6 – MODELO PROPOSTO PARA PRODUTIVIDADE

A produtividade de uma cultura é definida como a produção por unidade de área.

O cafeeiro apresenta um ciclo biológico de dois anos, alternando-se altas e baixas produções. Este ciclo é detectável a nível de propriedade agrícola, mas, dilui-se a nível regional e mais ainda a nível estadual ou nacional, quando se misturam cafezais de diferentes idades, isto é, cujos ciclos não se encontram em concordância de fase. Quando ocorre um evento que pode ser representado por uma *pulse function*, como uma geada, numa grande região produtora, a produtividade da maioria dos cafezais cai bruscamente, às vezes a zero, afetando uma ou duas safras seguintes. Aos poucos recuperam-se as plantas e a produtividade volta aos níveis normais. Os ciclos entram, então, em concordância de fase e a média regional de produtividade passa a mostrar o ciclo bianual, que vai desaparecendo aos poucos, à medida que novos cafeeiros entram em produção. Esquematicamente, obtém-se o gráfico da figura 9.11, semelhante ao do efeito de evolução (caso i. da figura 6.1).

No modelo de previsão univariado, dado por

$$\phi(B)\ (1 - B)^d\ z_t = \theta(B)\ a_t\ ,$$

introduz-se, além do termo de intervenção, um fator diferenças de ordem 2, temporariamente. Se a intervenção ocorre no instante T_1, a produtividade inicia sua recuperação em T_2 e o ciclo bianual introduzido cessa em T_3, tem-se o seguinte modelo proposto:

$$(1 - B^2)X_t^{(2)}\ (1 - B)^d\ z_t = \frac{\omega_o}{1 - \delta_1 B}\ X_{t-b}^{(1)} + \frac{\theta\ (B)}{\phi\ (B)}\ a_t, \qquad (9.6.1)$$

com $|\delta_1| < 1$

e onde

$$X_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t \neq T_1 \\ 1, & t = T_1 \end{cases}$$

$$X_t^{(2)} = \begin{cases} 0, & t < T_2 \quad e \quad t > T_3 \\ 1, & T_2 \leqslant t \leqslant T_3 \end{cases},$$

$\dfrac{\omega_o}{1 - \delta_1 B} X_{t-b}^{(1)}$ representa o efeito da intervenção e

$(1 - B^2) X_t^{(2)}$ representa o ciclo bianual introduzido temporariamente.

Para um estudo mais rigoroso do efeito de geadas sobre a produtividade de café sugere-se o uso futuro de séries geradas a partir de dados obtidos por sensoriamento remoto. A energia é refletida ou irradiada por diferentes objetos na superfície da Terra em diferentes faixas do espectro eletromagnético, podendo ser medida por sensores colocados em satélites do tipo Landsat III, que passam sobre uma mesma região a cada 18 dias. Os padrões obtidos com café sadio e com café queimado por geada são diferentes, permitindo a medida da extensão dos prejuízos e uma medida indireta da produtividade. À medida que os padrões voltam ao normal é possível acompanhar a recuperação das plantas. Atualmente não é possível esse enfoque, uma vez que o número de observações é pequeno e não igualmente espaçadas no tempo (entre outras, por causa do recobrimento de nuvens) e o custo de recuperação dos dados para formar a série é muito alto.

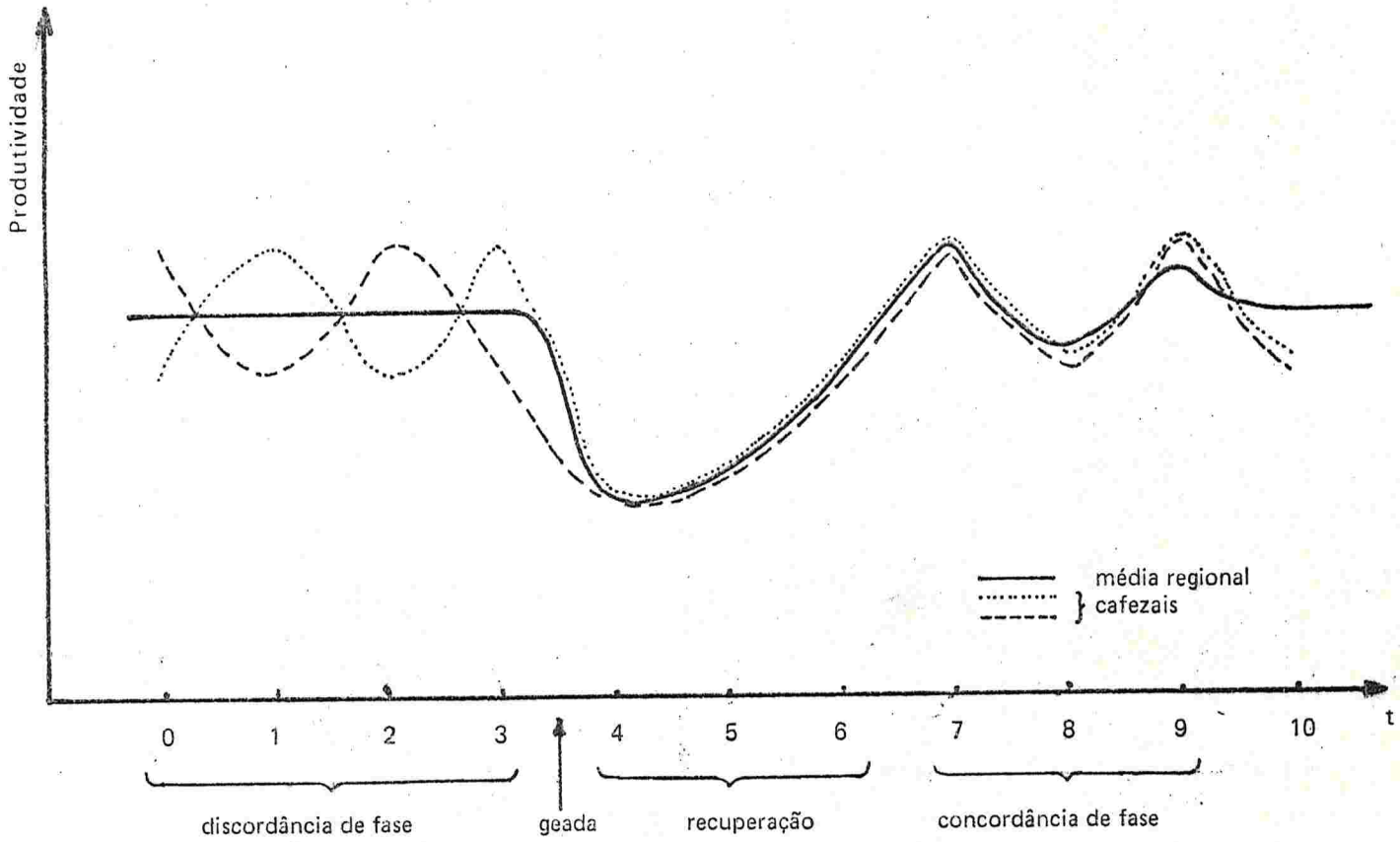


FIGURA 9.11 — Esquema do Efeito de Geada sobre a Produtividade Regional de Café.

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES

As conclusões do trabalho a seguir apresentadas dividem-se em duas partes: as conclusões gerais a respeito da análise de intervenção com modelos de Box-Jenkins e sua utilização em estudos de economia agrícola, e as conclusões específicas sobre as séries analisadas.

10.1 – CONCLUSÕES GERAIS

Do exposto nos outros capítulos evidencia-se que:

a) Os modelos para séries temporais propostos por Box e Jenkins são bastante gerais e fornecem previsões precisas, razões pelas quais vêm sendo bastante utilizados. Sua maior limitação está na fase de identificação do modelo, que exige experiência e perspicácia

do pesquisador;

b) Os modelos de intervenção permitem incluir o efeito de acontecimentos extraordinários sobre as previsões;

c) A análise de intervenção pode ter dois enfoques, que podem ser simultâneos: o modelo pode servir para o estudo dos efeitos da intervenção em si (ponto de vista da intervenção), ou, alternativamente, o modelo de previsão pode ser melhorado pela inclusão dos efeitos de intervenção (ponto de vista da previsão);

d) A aplicação prática da metodologia apresentada exige uso de computador, podendo ser bastante limitada por detalhes de programação, na medida em que se limitam os números de séries, de observações e de parâmetros; e

e) Em países menos desenvolvidos há dificuldades para se conseguir séries econômicas suficientemente longas, uma vez que, na prática, é necessário um mínimo de cerca de 50 observações. Entretanto, como se mostrou nos capítulos 8 e 9 é viável e interessante a utilização desse tipo de modelos em economia agrícola.

10.2 – CONCLUSÕES ESPECÍFICAS

Da análise de dados reais tiraram-se as conclusões abaixo enumeradas.

10.2.1 — Séries de Leite

a) Mudanças nas estruturas de produção e de mercado do leite no Estado de São Paulo, durante a década de 70, ocasionaram elevação da produtividade média anual do Estado de cerca de 3,5 para cerca de 4,0 litros por cabeça por dia;

b) A produção não foi sensivelmente alterada, uma vez que a elevação de produtividade foi compensada pela diminuição do número de produtores; e

c) Tanto a produção quanto a produtividade possuem componentes sazonais.

10.2.2 — Séries de Café

a) O número de intervenções importantes para as séries de café é grande, não tendo sido possível estudá-los todos conjuntamente;

b) Acontecimentos como a abolição da escravatura em 1888 e a guerra de 1939-45 tiveram como efeito a mudança na inclinação da série de produção brasileira de café, aumentando-a no primeiro caso e diminuindo-a no segundo;

c) As geadas mais fortes causaram diminuição na produção exportável do ano seguinte, voltando depois aos níveis normais;

d) Não é detectável no modelo o ciclo bianual do café na produção nacional, a não ser em alguns períodos;

e) Os efeitos da guerra de 1914-18, da crise de 1929-30 e de geadas mais fracas ou localizadas são parcialmente absorvidos pelos próprios modelos, que são auto-regressivos;

f) Geadas fortes ocasionaram elevação no preço real recebido pelos produtores, não se detectando os efeitos de geadas mais fracas ou localizadas;

g) Não se detectou o efeito do aparecimento da ferrugem em 1970 porque as precauções tomadas à época impediram quedas bruscas de produção e conseqüentes elevações exageradas de preços, e também porque o efeito a longo prazo acaba sendo absorvido pelo próprio modelo, que é auto-regressivo; e

h) Propõe-se um modelo teórico para o efeito da ocorrência de geada sobre a produtividade de café de uma região e a utilização no futuro de séries geradas a partir de dados obtidos por sensoriamento remoto.

INTERVENTION ANALYSIS WITH APPLICATIONS TO RURAL ECONOMY TIME SERIES

SUMMARY

The Box-Jenkins approach for time series modelling is developed and the effects of isolated events are introduced. Two case studies are presented:

a) time series on milk production, productivity and price, in the State of São Paulo, Brazil, are analysed with an intervention effect due to production and market structures changes; and

b) time series on coffee production and price, in the State of São Paulo and in Brazil, are analysed and several intervention effects due to frosts, plant diseases and historical events are discussed.

BIBLIOGRAFIA

1 - AIGNER, D. J. A compendium on estimation of the autoregressive - moving average model from time series data. International Economic Review, 12(3):348-371, Oct. 1971.

2 - ANDERSON, O. D. Time series analysis and forecasting - The Box-Jenkins approach. London, Butterworths, 1977.

3 - BARTLETT, M. S. On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series. Journal of the Royal Statistical Society, B 8 (1):27-41, 1946.

4 - BHATTACHARYYA, M. N. & LAYTON, A. P. Effectiveness of seat belt legislation on the Queensland road toll - An Australian case study in intervention analysis. Journal of the American Statistical Association, 74(367):596-603, Sep. 1979.

5 - BOX, G. E. P. & JENKINS, G. M. Time series analysis, forecasting and control. San Francisco, Holden-Day, 1976.

6 - BOX, G. E. P. & TIAO, G. C. A change in level of a non-stationary time series. Biometrika, 52,(1/2):181-192, 1965.

7 - _____. Intervention analysis with applications to economic and environmental problems. Journal of the American Statistical Association, 70 (349):70-79, Mar. 1975.

8 - _____. Comparison of forecast and actuality. Applied Statistics, 25 (3):195-200, 1976.

9 - CAMPOS, H. & PIVA, L. H. O. Dimensionamento de amostra para estimativa e previsão de safra no Estado de São Paulo. Agricultura

em São Paulo, 21 (3):65-88, 1974.

10 - D'ASTOUS, F. & HIPEL, K. W. Analyzing environmental time series. Journal of the Environmental Engineering Division, 105 (EE5) : 979-992, Oct. 1979.

11 - FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS. Índices Econômicos. Conjuntura Econômica, 8/33 (7/11), jul. 1954/nov. 1979.

12 - GAIT, N. Ajustamento sazonal de séries temporais. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1975. (Dissertação de Mestrado)

13 - GLASS, G. V. Estimating the effects of intervention into a non-stationary time series. American Educational Research Journal, 9 (3):463-477, 1972.

14 - GLASS, G. V.; WILLSON, V. L.; GOTTMAN, J. M. Design and analysis of time series experiments. Boulder, Colorado, Colorado Associated University Press, 1975.

15 - GRAY, H. L.; KELLEY, G.; McINTIRE, D. A new approach to ARMA modeling. Dallas, Texas, Southern Methodist University, Department of Statistics, Dec. 1977 (Technical Report, 126).

16 - HIPEL, K. W.; McLEOD, A. I.; McBEAN, E. A. Stochastic modelling of the effects of reservoir operation. Journal of Hydrology, 32:92-113, 1977.

17 - HIPEL, K. W. et alii. Intervention analysis in water resources. Water Resources Research, 11 (6):855-861, Dec. 1975.

18 - INSTITUTO BRASILEIRO DO CAFÉ. Coordenadoria de Estudos da Economia Cafeeira. Anuário Estatístico do Café. Rio de Janeiro, nº 11, dez. 1977.

19 - JENKINS, G. M. Practical experiences with modelling and forecasting time series. Jersey, Channel Islands, GJP Publications, 1979.

20 - JENKINS, G. M. & WATTS, D. G. Spectral analysis and its applications. San Francisco, Holden-Day, 1968.

21 - KOOPMANS, L. H. The spectral analysis of time series. New York, Academic Press, 1974.

22 - LEDOLTER, J. et alii. Statistical analysis of multiple time series associated with air quality data: New Jersey CO data. Madison, Wisconsin, University of Wisconsin, Jun. 1978. (Technical Report, 529).

23 - MORICOCHI, L. et alii. Situação da pecuária leiteira em São Paulo. Agricultura em São Paulo, 20 (1/2):1-42, 1973.

24 - NEVES, C. & FRANCO, F. M. A influência do depósito compulsório no movimento de passageiros das linhas aéreas entre o Brasil e a Europa. Revista Brasileira de Estatística, 39 (153): 45-58, jan./mar. 1978.

25 - OZAKI, T. On the order determination of ARIMA models. Applied Statistics, 26 (3): 290-301, 1977.

26 - PACK, D. J. A computer program for the analysis of time series models using the Box-Jenkins philosophy. Columbus, Ohio, The Ohio State University, College of Administrative Science, Data Center, May 1977.

27 - _____. Forecasting time series affected by identifiable isolated events. Columbus, Ohio, The Ohio State University, College of Administrative Science, Sep. 1977 (Working Paper Series 77-46).

28 - QUENOUILLE, M. H. Approximate tests of correlation in time series. Journal of the Royal Statistical Society, B 11 (1): 68-84, 1949.

29 - SABOIA, J. L. M. Mortalidade infantil e salário mínimo - uma análise de intervenção para o município de São Paulo. Revista de Administração de Empresas, 16 (3):47-50, mai./jun. 1976.

30 - SCHMITZ, A. & WATTS, D. G. Forecasting wheat yields: an application of parametric time series modelling. American Journal of Agricultural Economics, 52 (2):247-254, 1970.

31 - SEARLE, S. R. Linear models. New York, J. Wiley, 1971.

32 - SILVA, L. P. Modelos de funções de transferência. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1979. (Dissertação de Mestrado)

33 - STEKLER, H. O. Forecasting with econometric models: an evaluation. Econometrica, 36 (3/4):437-463, Jul./Oct. 1968.

34 - TIAO, G. C.; BOX, G. E. P.; HAMMING, W. J. Analysis of Los Angeles photochemical smog data: a statistical overview. Journal of the Air Polution Control Association, 25 (3): 260-268, Mar. 1975.