

MODELOS DE FUNÇÕES  
DE TRANSFERÊNCIA

LÚCIA PEREIRA DA SILVA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM  
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

*Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin*

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1979 -

Aos meus pais  
pelo amor  
e  
formação  
que me deram

## AGRADECIMENTOS

*Ao terminarmos este trabalho, não poderemos esquecer a todos que nos ajudaram, e em especial*

- Ao Professor Doutor Pedro Alberto Morettin, pela paciência com que nos orientou nesta dissertação;*
- À Edina, Maria Cecília e Mônica, que foram minha família são-carlense, por todo apoio que me deram durante a realização deste trabalho;*
- À Clélia Maria de Castro Toloí, Amilton B. Ara e Francisco Alberto Pino, pela colaboração e incentivo que sempre me dispensaram;*
- À Maria Fátima Letícia Dallantonio, pelo cuidado de datilografar os manuscritos; e finalmente,*
- Ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pela paciência na correção final da datilografia.*

## Í N D I C E

CAP. I - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - Considerações Gerais .....	1
1.2 - Definições .....	5
1.3 - Descrição de Série Temporal no Domínio do Tempo .....	7
CAP. II - O MODELO DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA .....	11
2.1 - Introdução .....	11
2.2 - Modelos para Sistemas Dinâmicos Discretos .....	11
2.3 - Modelos para Sistemas Dinâmicos Contínuos .....	24
2.4 - Sistemas Contínuos Discretamente Coincidentes .....	31
CAP. III - IDENTIFICAÇÃO .....	38
3.1 - Introdução .....	38
3.2 - Casos Particulares de Função de Transferência .....	39
3.3 - Estimção Preliminar de Função Resposta de Impulso .....	47
3.4 - Pré-branqueamento da Série de Entrada .....	53
3.5 - Exemplos de Identificação .....	56
3.6 - Identificação do Modelo do Ruído do Sistema .....	65
CAP. IV - ESTIMAÇÃO .....	70
4.1 - Introdução .....	70
4.2 - Estimadores de Máxima Verossimilhança .....	71
4.3 - Estimção não Linear .....	74
4.4 - Distribuição dos Estimadores .....	81

CAP.V - VERIFICAÇÃO DO MODELO .....	90
5.1 - Introdução .....	90
5.2 - Resíduo e suas Funções de Autocorrelação e Correlação Cruzada.....	90
5.3 - Verificação do Modelo .....	96
5.4 - Teste para Verificação da Significância ou não das Funções de Autocorrelação do Resíduo e da função de Correlação Cruzada entre o Resíduo e a Entrada.....	100
5.5 - Conclusão .....	102
CAP.VI - ESTIMAÇÃO NO DOMÍNIO DE FREQUÊNCIA.....	104
6.1 - Introdução .....	104
6.2 - Transformada de Fourier .....	105
6.3 - O Espectro de um Processo Estocástico Estacionário .....	109
6.4 - Estimadores do Espectro .....	111
6.5 - O Espectro Cruzado.....	120
6.6 - Função Resposta de Frequência .....	122
6.7 - Estimação do Espectro do Ruído do Sistema .....	127
6.8 - Distribuição de Probabilidade dos Estimadores .....	128
6.9 - Conclusão .....	133
CAP.VII - APLICAÇÕES .....	135
7.1 - Introdução .....	135
7.2 - Exemplos .....	135
REFERÊNCIAS .....	166

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1. Considerações Gerais

Desde um passado remoto o homem tem associado a variável tempo aos mais diversos fenômenos observados por ele. Assim (1) os economistas observam anualmente os preços do trigo, (2) geneticistas observam diariamente a produção de ovos numa certa granja, (3) meteorologistas estudam diariamente a precipitação pluviométrica em uma dada cidade, (4) os físicos estudam o nível de ruído ambiente em um dado ponto do oceano, (5) os aerodinâmicos estudam a turbulência atmosférica da velocidade de um furacão, (6) engenheiros eletrônicos estudam o ruído interno do rádio receptor. Um conjunto de observações arranjadas cronologicamente é chamado numa série de tempo (Parzen, 1961). Uma definição formal é dada a seguir.

*Definição 1.1.* Se  $T$  é um conjunto arbitrário, um processo estocástico é uma família  $\{X(t), t \in T\}$ , tal que, para cada  $t \in T$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória.

Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (v.a)  $X(t)$  definidas em um espaço amostral  $\Omega$ , portanto  $X(t)$

é uma função de dois argumentos  $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ .

Para um  $\omega$  fixo,  $X(t, \omega)$  é uma série temporal, ou seja, uma série temporal é uma realização particular de um processo.

O conjunto  $T$  geralmente é o conjunto dos inteiros  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  ou o conjunto dos reais  $\mathbb{R}$ . Se  $T \subset Z$  diremos que o processo tem parâmetro discreto e indicaremos por  $\{X_t, t \in T\}$ , se no entanto  $T$  for um intervalo de  $\mathbb{R}$  diremos que o processo tem parâmetro contínuo, e denotaremos por  $\{X(t), t \in T\}$ .

A análise de séries temporais é utilizada em uma grande variedade de situações e tem aplicações em problemas que envolvem propaganda, ou controle de produtos, na recepção de ondas de rádio, na reprodução de imagens e som, em modelos de sistemas de orientação ou de controle de processos industriais.

Existem duas formas de analisar dados provenientes de uma série temporal; uma delas, é através da análise espectral. Este tipo de análise é embasado na análise de Fourier. A segunda forma de se estudar séries temporais, é aquela que constroi modelos para as mesmas no domínio do tempo.

Neste trabalho estaremos interessados em séries temporais bivariadas,  $\{X(t), Y(t)\}$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , para o caso contínuo ou  $\{X_t, Y_t\}$ , com  $t \in Z$ , para o caso discreto, quando há uma relação de causa entre as séries, isto é, quando por exemplo a série  $Y$  pode ser melhor explicada usando os valores passado de  $X$  e de  $Y$ , do que só de valores de  $Y$ . Estaremos interessados, então, nos chamados sistemas dinâmicos. A variável  $X$ , será a variável independente e chamada de entrada do siste

ma, e a variável  $Y$  será a variável dependente e chamada saída do sistema.

Exemplos desse tipo de sistema surgem nas mais diferentes áreas de estudo, tais como: (1) em processos químicos, onde se alteram as condições da experiência, por exemplo temperatura ou pressão, durante a realização da mesma e se mede a quantidade obtida do produto resultante, (2) em publicidade, onde se mede o efeito de uma campanha publicitária sobre as vendas de um produto, (3) em hidrologia, onde se mede o efeito da precipitação pluviométrica sobre a vazão dos rios.

Outros exemplos desse tipo de sistema estão em processos da engenharia de produção, em turismo, em admissões hospitalares, etc.

Neste trabalho suporemos que a relação existente entre as variáveis é linear, portanto

$$Y(t) = A(X(t)) \quad (1.1)$$

se o processo for contínuo, ou

$$Y_t = A(X_t) \quad (1.2)$$

se o processo for discreto, onde  $A$  é um operador linear, que é chamado de filtro linear.

Este filtro linear é conhecido como função de transferência para os engenheiros e função de defasagens distribuídas em Economia.

O nosso objetivo principal neste trabalho será tentar "explicitar" o comportamento de série de saída em termos da série de entrada,



relacionando as observações com algumas regras estruturais de comportamento, através de um modelo. A identificação da função de transferência e sua posterior estimação nos permite entender o processo gerador de série e, se preciso for, alterá-lo.

Assim o modelo que construiremos para explicar um sistema dinâmico será da forma

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j},$$

para o caso discreto, ou de forma

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du,$$

para o caso contínuo onde os pesos  $v_j$ 's ou a função  $v(u)$  assumem valores reais. Para o caso discreto os  $v_j$  são denominados de pesos de resposta de impulso e no caso contínuo de função resposta de impulso.

Assim em primeiro lugar desenvolveremos os modelos genéricos para explicar esse tipo de sistema, apresentando a seguir alguns casos particulares dos mesmos.

Em seguida, apresentaremos técnicas, que nos darão sugestões do modelo que deverá ser ajustado a um particular sistema dinâmico no que podemos estar interessados.

Os parâmetros do modelo identificado são por nós desconhecidos e o passo seguinte será estimá-los; a técnica que será usada aqui é a de mínimos quadrados não lineares.

Finalmente, após termos identificado e estimado, será necessário fazer uma verificação da adequabilidade do modelo estimado.

Os primeiros trabalhos desenvolvidos para analisar e prever séries de tempos foram feitos usando transformadas de Fourier, por esse motivo apresentaremos um capítulo onde essa técnica é usada.

Ao final do trabalho apresentaremos exemplos com dados reais de como construir a função de transferência, tanto usando o domínio do tempo, como o domínio de frequência.

## 1.2. Definições

Apresentaremos agora algumas definições que nos serão úteis nos capítulos subsequentes.

*Definição 1.2.* Um processo estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  diz-se estacionário de segunda ordem (ou fracamente estacionário) se e somente se

- i)  $E[X(t)] = \mu(t) = \mu_X$ , constante para todo  $t \in T$ ;
- ii)  $E[X^2(t)] < \infty$ , para todo  $t \in T$ ;
- iii)  $Cov(X(t_1), X(t_2)) = \gamma_{XX}(t_1, t_2)$  é função apenas de  $t_1 - t_2$ , e neste caso indicaremos por  $\gamma_{XX}(t_1 - t_2)$ .

Denominaremos esses processos simplesmente de processos estacionários, e chamaremos a função  $\gamma_{XX}(k)$  de função de autocovariância.

Observemos que  $\gamma_{XX}(k) = \gamma_{XX}(-k)$ , isto é, a função de autocovariância é simétrica em torno do zero.

A função de autocorrelação do processo é dada por

$$\rho_{XX}(k) = \gamma_{XX}(k) / \gamma_{XX}(0) \quad , \quad k \in T. \quad (1.4)$$

A função de autocorrelação / também é simétrica em torno do ze ro.

*Definição 1.3.* Um processo estocástico bivariado  $\{X(t), Y(t), t \in T\}$  é dito estacionário de segunda ordem se e somente se

- 1) suas componentes são estacionárias de segunda ordem;
- 2)  $Cov[X(t_1), Y(t_2)] = \gamma_{XY}(t_1, t_2)$  é função somente de  $t_1 - t_2$ .

Portanto se o processo  $\{X(t), Y(t), t \in T\}$  é estacionário ele pode ser identificado pelos momentos de 1ª e 2ª ordem, que serão denou dados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \mu_X & E[Y(t)] &= \mu_Y \\ Var[X(t)] &= \sigma_X^2 & Var[Y(t)] &= \sigma_Y^2 \\ Cov[X(t), X(t+k)] &= \gamma_{XX}(k) & Cov[Y(t), Y(t+k)] &= \gamma_{YY}(k) \\ Cov[X(t), Y(t+k)] &= \gamma_{XY}(k) & Cov[Y(t), X(t+k)] &= \gamma_{YX}(k), \quad k \in T \end{aligned} \quad (1.5)$$

Observemos que  $\gamma_{XY}(k) = \gamma_{YX}(-k)$ , e portanto a função de covariância cruzada não é simétrica em torno de zero.

A função de correlação cruzada entre os processos é dada pela quantidade

$$\rho_{XY}(k) = \gamma_{XY}(k) \sqrt{\frac{-1/2}{\gamma_{XX}(0)}} \sqrt{\frac{-1/2}{\gamma_{YY}(0)}} \quad , \quad k \in T. \quad (1.6)$$

*Definição 1.4.* Um processo estocástico real  $\{X(t), t \in T\}$ , diz-se *Gaussiano* se, para qualquer conjunto  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$ , as variáveis aleatórias  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  tem distribuição normal *n-variada*.

Há vários tipos de convergência de variáveis aleatórias que podem ser definidas, daremos aqui os dois tipos de convergência que usaremos posteriormente.

*Definição 1.5.* Seja  $\{X_n, n \geq 1\}$  uma sequência de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, A, P)$ .

i) - A sequência  $\{X_n\}$  converge em probabilidade para variável aleatória  $X$  se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{ |X_n - X| > \epsilon \} = 0. \quad (1.7)$$

Indicamos  $X_n \xrightarrow{P} X$  ou  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

ii) - A sequência  $\{X_n\}$  converge para variável aleatória  $X$  em *média quadrática* se e somente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{ |X_n - X|^2 \} = 0. \quad (1.8)$$

Indicamos  $X_n \xrightarrow{m.q.} X$ .

### 1.3. Descrição da Série Temporal no Domínio do Tempo

Entendemos por "*análise*" de uma série temporal a estimação e a reconstrução das propriedades do processo gerador subjacente. Daremos, a seguir, alguns tipos de modelos para os processos geradores.

Exemplo 1.1. Processo de Média Móvel

$$X(t) = \sum_{k=0}^q \theta_k a(t-k), \quad (1.9)$$

onde  $\theta_k$  são constantes complexas e  $a(t)$  são variáveis aleatórias independentes com média zero e variância constante.

Indicaremos esse modelo por  $MA(q)$ .

Exemplo 1.2. Processo Auto Regressivo

$$X(t) - \sum_{k=1}^p \phi_k X(t-k) = a(t), \quad (1.10)$$

onde  $\phi_k$  são constantes complexas e o processo  $a(t)$  é idêntico ao do exemplo anterior.

Indicaremos esse modelo por  $AR(p)$ .

Exemplo 1.3. Processo Misto Auto Regressivo - Médias Móveis

$$X(t) - \sum_{k=1}^p \phi_k X(t-k) = \sum_{k=0}^q \theta_k a(t-k), \quad (1.11)$$

onde  $\phi_k$  e  $\theta_k$  são constantes complexas e o processo  $a(t)$  idêntico ao do exemplo (1.1). A indicação para esse modelo é  $ARMA(p, q)$ .

Se o processo é estacionário já dissemos que ele pode ser estudado através de seus momentos de 1<sup>ª</sup> e 2<sup>ª</sup> ordem. Daremos, então, estimadores dos momentos de 1<sup>ª</sup> e 2<sup>ª</sup> ordem de um processo estacionário.

Pela teoria geral de estimação, nós deveríamos dispor de um número grande  $M$  de amostras (realização) do processo,

$$X^{(k)}(t), \quad k = 1, \dots, M,$$

para estimar  $E[X(t)]$  através de

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X^{(k)}(t),$$

chamada "média de conjunto" e que goza da propriedade

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{X}(t) = E[X(t)]$$

Mas nós temos, geralmente, apenas uma amostra do processo. Por isso, vamos nos valer do teorema ergódico, segundo o qual podemos estimar os momentos através de média sobre o tempo.

**Teorema 1.1. Teorema Ergódico:** Seja  $X(t)$  um processo estacionário. Sob determinadas condições de regularidade, valem as seguintes relações:

$$\mu_X = E\{X_t\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t \tag{1.12}$$

$$\gamma_{XX} = \text{Cov}\{X_t, X_{t+k}\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t X_{t+k}$$

no caso discreto, e

$$\mu_X = E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T X(t) dt \tag{1.13}$$

$$\gamma_{XX} = E[X(t), X(t+k)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T X(t) X(t+k) dt$$

no caso contínuo. (Os limites são tomados em média quadrática).

Então, no caso discreto as estimativas serão:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t \quad (1.14)$$

$$e_{XX}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X}) (X_{t+k} - \bar{X}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Um estimador para a covariância cruzada é

$$e_{XY}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X}) (Y_{t+k} - \bar{Y}), & \text{se } k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N+k} (X_{t-k} - \bar{X}) (Y_t - \bar{Y}), & \text{se } k = -1, -2, \dots, -N+1. \end{cases} \quad (1.15)$$

## CAPÍTULO II

### O MODELO DE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

#### 2.1. Introdução

Seja uma série de tempo bivariada, que indicaremos por  $\{X(t), Y(t)\}$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , se o processo a ser estudado é contínuo, e por  $\{X_t, Y_t\}$ , com  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , se representa um processo discreto. Se existir uma relação entre as variáveis  $X$  e  $Y$ , de forma que  $X(t)$  ( $X_t$ ) seja a variável independente e  $Y(t)$  ( $Y_t$ ) a variável dependente, este processo é conhecido como sistema dinâmico, a variável  $X$  como "entrada" e a variável  $Y$  como "saída". Sistemas dinâmicos são comuns em Engenharia e em Economia. Estaremos aqui preocupados com uma classe de relações que explicam a "saída" do processo através da "entrada", são as funções conhecidas por funções de transferência em Engenharia e por funções de defasagens distribuídas em Economia.

#### 2.2. Modelos para Sistemas Dinâmicos Discretos

Vamos primeiro estudar o caso em que a entrada e a saída do sistema dinâmico seja um processo discreto, isto é,  $(X_t, Y_t)$ , com  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; o modelo dinâmico pode ser escrito como (Jorgen



son, 1966)

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.1)$$

ou usando o operador atraso  $B$ , onde  $BX_t = X_{t-1}$ , a equação (2.1), transforma-se em

$$Y_t = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) X_t,$$

ou, ainda,

$$Y_t = v(B) X_t \quad (2.2)$$

onde o polinômio  $v(B)$  é conhecido como *função de transferência* e os pesos  $v_0, v_1, v_2, \dots$ , como *função resposta de impulso* do sistema.

Se o polinômio  $v(B)$  é uma função racional podemos escrevê-lo como

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \quad (2.3)$$

onde  $\omega(B)$  e  $\delta(B)$  são polinômios da forma

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s,$$

$$\delta(B) = \delta_0 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r.$$

Sem perda de generalidade (Jorgenson, 1966) podemos normalizar os coeficientes do polinômio  $\delta(B)$  e assim escrevê-los como

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r$$

e

$$\omega(B) = \frac{\omega_0}{\delta_0} - \frac{\omega_1}{\delta_0} B - \dots - \frac{\omega_s}{\delta_0} B^s.$$

Para facilitar a notação escreveremos  $\omega_i$  em vez de  $\omega_i/\delta_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$

e portanto

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s.$$

Logo, a equação (2.2) pode ser escrita como

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_t. \quad (2.4)$$

Estaremos aqui interessados em sistemas estáveis, isto é, incrementos finitos na entrada produzem incrementos finitos na saída. Então, se

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j}$$

e se  $X_t$  é finito implica que  $Y_t$  é finito, isso acarretará que

$\sum_{j=0}^{\infty} v_j$  é convergente.

Alguns  $v_j$ 's iniciais podem ser zero, e isto significa que há um atraso na resposta à entrada e dessa forma a equação (2.1) transforma-se em

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-b-j} \quad (2.5)$$

ou na forma da equação (2.2),

$$Y_t = v(B) X_{t-b}, \quad (2.6)$$

e portanto a equação (2.4) se transforma em

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_{t-b}, \quad (2.7)$$

onde  $b$  é o tempo de atraso na resposta.

Comparando as equações (2.6) e (2.7) obtemos a igualdade

$$v(B) \delta(B) = \omega(B) B^b \quad (2.8)$$

e desta igualdade tiramos as relações existentes entre os coeficientes dos polinômios  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $v$ .

Assim, de

$$\begin{aligned} (v_0 + v_1 B + \dots) (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) = \\ = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} v_j = 0, \text{ se } j < b; \\ v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0, \text{ se } j = b; \end{array} \right\} \end{array}$$

$$c) \quad \left| \begin{array}{l} v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, \text{ se} \\ j = b+1, b+2, \dots, b+s; \end{array} \right.$$

$$d) \quad \left| \begin{array}{l} v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, \text{ se } j > b + s. \end{array} \right.$$

Os coeficientes  $v_j$ 's podem ser escritos como função dos  $\delta$ 's,  $\omega$ 's e  $j$  :  $v_j = f(\omega, \delta, j)$ .

Se  $s > r$ , a solução desta equação seguirá a seguinte:

- a)  $\left| \begin{array}{l} v_0, v_1, \dots, v_{b-1} \text{ serão iguais a zero;} \end{array} \right.$
- b)  $\left| \begin{array}{l} v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r} \text{ seguirão um modelo não fixo;} \end{array} \right. \quad (2.10.a)$
- c)  $\left| \begin{array}{l} v_j \text{ com } j > b+s - r+1 \text{ serão dados pela equação de diferenças de} \\ \text{ordem } r, \delta(B) v_j = 0, \end{array} \right.$

ou

$$v_j - \delta_1 v_{j-1} - \delta_2 v_{j-2} - \dots - \delta_r v_{j-r} = 0,$$

que tem os  $r$  valores iniciais;  $v_{b+s}, \dots, v_{b+s-r+1}$ .

Se  $s < r$  teremos:

- a)  $\left| \begin{array}{l} \text{os } v_0, v_1, \dots, v_{b-1} \text{ serão iguais a zero;} \end{array} \right.$
- b)  $\left| \begin{array}{l} \text{os } v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+r-s} \text{ seguirão um modelo não fixo;} \end{array} \right. \quad (2.10.b)$
- c)  $\left| \begin{array}{l} \text{os } v_j, \text{ com } j > b+r - s+1 \text{ seguirão a equação de diferenças} \\ \delta(B) v_j = 0. \end{array} \right.$

Estas informações serão importantes quando tivermos que identificar o modelo de função de transferência para um conjunto de dados.

Como estamos trabalhando com sistemas estáveis, vamos observar quais as restrições que essa condição provocará na função de transferência.

Dado o sistema

$$Y_t = v(B) X_t,$$

ou

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \dots,$$

uma condição necessária para que o sistema seja estável é que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |v_j| = c, \quad c < \infty,$$

isto é, a série dos  $v_j$ 's seja convergente.

Portanto se estamos trabalhando com sistemas estáveis, a função resposta de impulso tem os pesos  $v_j$ , com  $j > K$ , tendendo a zero e a forma com que estes pesos decrescem depende da equação de diferenças que eles satisfazem quando  $j > b+s - r+1$  se  $s > r$  ou quando  $j > b+r - s+1$  se  $s < r$ . As soluções dessas equações de diferenças ou são somas exponenciais negativas, ou são somas de ondas senos suavizadas.

Assim como a função de transferência é a soma ponderada de todos os impulsos de entrada desde o tempo  $t-b$ , até o passado mais remo

to, poderá nos parecer que ela não possa ser encontrada na prática, já que não podemos, geralmente, encontrar os valores da entrada para tempo negativo, mas o fato dos  $v_j$ 's tenderem a zero, quando  $j$  cresce, torna a função de transferência possível fisicamente.

Se o sistema está representado na forma

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \dots + \delta_s Y_{t-s} + \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_r X_{t-b-r}$$

ou,

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_{t-b},$$

ou ainda

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b}, \quad (2.11)$$

uma condição necessária para que o sistema seja estável é análoga à condição de estacionariedade para o processo auto regressivo: a equação

$$1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r = 0$$

tem que ter raízes fora do círculo unitário, portanto se  $B^*$  é raiz desse polinômio,  $|B^*| > 1$  (Box-Jenkins, 1970).

### Ganho do Sistema

Definimos o ganho do sistema como sendo a quantidade final da saída, quando o sistema está em equilíbrio, e quando a entrada é constante e unitária, isto é,

$$Y_{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j = g. \quad (2.12)$$

Se o sistema está representado na forma

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b}$$

o ganho do sistema será

$$g = \frac{\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r}. \quad (2.13)$$

### Função Resposta de Passo

Vamos agora escrever a função de transferência com soma ponderada das diferenças das entradas; assim em vez das somas ponderadas dos impulsos de entrada, teremos a soma ponderada dos passos de entrada.

O passo é o salto que o processo dá entre o tempo  $t$  e o tempo imediatamente anterior; o passo de entrada no tempo  $t$  é  $X_t - X_{t-1}$ .

Se

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots,$$

podemos escrevê-la na forma

$$Y_t = v_0(X_t - X_{t-1}) + (v_0 + v_1)(X_{t-1} - X_{t-2}) + (v_0 + v_1 + v_2)(X_{t-2} - X_{t-3}) + (v_0 + v_1 + v_2 + v_3)(X_{t-3} - X_{t-4}) + \dots,$$

ou

$$Y_t = v_0(1 - B) X_t + (v_0 + v_1)(1 - B) X_{t-1} + (v_0 + v_1 + v_2)(1 - B) X_{t-2} + \dots,$$

ou

$$Y_t = (1 - B)(v_0 X_t + (v_0 + v_1) X_{t-1} + \dots),$$

ou ainda

$$Y_t = (1 - B) V(B) X_t, \tag{2.14}$$

onde

$$V(B) = V_0 + V_1 B + V_2 B^2 + \dots$$

e

$$V_j = \sum_{i=0}^j v_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Os pesos  $V_j$ 's são chamados de *função resposta de passo*. A relação existente entre as duas formas de escrever a função de transferência é a seguinte:

$$v(B) = (1 - B) V(B),$$



e assim se

$$\delta(B) v(B) = \omega(B) B^b$$

temos que

$$\delta(B) (1 - B) V(B) = \omega(B) B^b \quad (2.15)$$

e se

$$\delta^*(B) = (1 - B) \delta(B) = (1 - \delta_1^* B - \dots - \delta_{r+1}^* B^{r+1}),$$

onde

$$\delta_1^* = \delta_1 - 1$$

$$\delta_j^* = \delta_j - \delta_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, r$$

$$\delta_{r+1}^* = \delta_r,$$

teremos que

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_1^* B - \delta_2^* B^2 - \dots - \delta_{r+1}^* B^{r+1}) (V_0 + V_1 B + V_2 B^2 + \dots) \\ & = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b. \end{aligned}$$

Assim, análogas as equações (2.9) temos que

$$a) \quad | V_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, b-1$$

$$b) \quad | V_j = \delta_1^* V_{j-1} + \delta_2^* V_{j-2} + \dots + \delta_{r+1}^* V_{j-r-1} + \omega_0, \quad j = b$$

$$c) \quad \left| \begin{array}{l} V_j = \delta_1^* V_{j-2} + \dots + \delta_{r+1}^* V_{j-r-1} - \omega_{j-b}, \quad j = b+1, b+2, \dots, b+s \\ \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$d) \quad \left| \begin{array}{l} V_j = \delta_1^* V_{j-2} + \dots + \delta_{r+1}^* V_{j-r-1} - \omega_{j-b}, \quad j \geq b+s. \end{array} \right.$$

E da mesma forma teremos afirmações análogas a (2.10.a) se  $s > r+1$ :

- a) | os  $b$  primeiros valores de  $V_j$  são iguais a zero;
  - b) | os  $(s-r)$  valores seguintes de  $V_j$  seguem um modelo não fixo;
  - c) | os  $V_j$ 's, quando  $j > b+s-r$ , seguem o modelo dado pela equação de diferenças de ordem  $r+1$ ,  $\delta^*(B) V_j = 0$ , que possui como  $r+1$  valores iniciais,  $V_{b+s}, V_{b+s-1}, \dots, V_{b+s-r}$ , diferentes de zero.
- (2.17)

Afirmações semelhantes podem ser feitas quando  $s < r+1$ .

### Modelo de Função de Transferência Usando Operador Diferença

Como representamos o modelo de função de transferência na forma

$$Y_t = v(B) X_{t-b}$$

ou

$$\delta(B) Y_t = \omega(B) X_{t-b},$$

onde  $\delta(B)$  e  $\omega(B)$  são polinômios de ordens, respectivamente,  $r$  e  $s$ , que

usam o operador atraso, podemos transformá-los em polinômios  $\eta(\nabla)$  e  $\xi(\nabla)$  de ordens, respectivamente,  $r$  e  $s$ , onde  $\nabla$  é o operador diferença, definido como sendo

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}.$$

Observando que  $B = 1 - \nabla$  e tendo então

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) B^b X_t$$

e

$$\begin{aligned} & [1 - \delta_1(1 - \nabla) - \delta_2(1 - \nabla)^2 - \dots - \delta_r(1 - \nabla)^r] Y_t = \\ & = [\omega_0 - \omega_1(1 - \nabla) - \dots - \omega_s(1 - \nabla)^s] X_{t-b}, \end{aligned}$$

obtemos

$$(\xi_0 + \xi_1 \nabla + \dots + \xi_r \nabla^r) Y_t = (\eta_0 + \eta_1 \nabla + \dots + \eta_s \nabla^s) X_{t-b} \quad (2.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1 - \delta_1 - \dots - \delta_r, \\ \xi_i &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^r \binom{j}{i} \delta_j, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\eta_0 = \omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s$$

$$\eta_i = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^s \binom{j}{i} \omega_j, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

supondo que  $\binom{j}{i} = 0$  se  $j < i$ .

Se normalizarmos os coeficientes dos polinômios  $\eta(\nabla)$  e  $\xi(\nabla)$  não perderemos generalidade e teremos

$$(1 + \xi_1 \nabla + \xi_2 \nabla^2 + \dots + \xi_s \nabla^s) Y_t = g(1 + \eta_1 \nabla + \dots + \eta_s \nabla^s) X_{t-b}, \quad (2.20)$$

onde

$$g = \frac{\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r},$$

$$\eta_i = \frac{(-1)^{i-1}}{\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s} \sum_{j=1}^s \binom{j}{i} \omega_j, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.21)$$

e

$$\xi_i = \frac{(-1)^{i-1}}{1 - \delta_1 - \dots - \delta_r} \sum_{j=1}^r \binom{j}{i} \delta_j, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Nos modelos apresentados até aqui, supomos que não havia nenhuma interferência no sistema, mas geralmente isso não acontece. A saída vem normalmente acrescida de um ruído, assim nosso modelo passará a ser

$$Y_t = v(B) X_t + N_t. \quad (2.22)$$

Este ruído não é necessariamente o ruído branco, mas sim um processo genérico auto regressivo integrado de médias móveis, de ordem  $(p, d, q)$  e, portanto, pode ser escrito na forma

$$N_t = \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t,$$

onde  $a_t$  é um ruído branco,  $\phi(B)$  é o operador auto regressivo e  $\theta(B)$  é o operador de médias móveis, de ordens  $p$  e  $q$ , respectivamente.

Diversas são as interferências que podem surgir no sistema, em qualquer instante, só que suporemos que elas só interferem na saída aditivamente e que sejam independentes da entrada.

Assim, o modelo que teremos que identificar será da forma

$$Y_t = \delta^{-1}(B) \omega(B) X_{t-b} + \phi^{-1}(B) \theta(B) a_t. \quad (2.23)$$

### 2.3. Modelos para Sistemas Dinâmicos Contínuos

Apresentaremos, agora, sistemas dinâmicos contínuos, isto significa que  $t \in \mathbb{R}$ ; e a representação do processo será  $X(t)$  para a entrada e  $Y(t)$  para a saída.

Uma forma de representar este sistema é através de uma equação diferencial de ordem  $(r, s)$ , dada por

$$\begin{aligned} Y(t) + \Lambda_1 \frac{d Y(t)}{dt} + \Lambda_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \dots + \Lambda_r \frac{d^r Y(t)}{dt^r} = \\ = g[X(t-\tau) + H_1 \frac{dX(t-\tau)}{dt} + H_2 \frac{d^2 X(t-\tau)}{dt^2} + \dots + H_s \frac{d^s X(t-\tau)}{dt^s}] \quad (2.24) \end{aligned}$$

ou usando o operador  $D = d/dt$  a equação (2.24) será

$$(1 + \Lambda_1 D + \Lambda_2 D^2 + \dots + \Lambda_r D^r) Y(t) = g(1 + H_1 D + H_2 D^2 + \dots + H_s D^s) X(t-\tau), \quad (2.25)$$

onde  $\tau$  representa o atraso da saída em relação a entrada; se a resposta é imediata,  $\tau$  é igual a zero.

A solução desse tipo de equação diferencial não é simples; ela só possui solução exata para casos particulares, no mais das vezes tem que ser resolvida por métodos numéricos, assim vamos considerar alguns casos particulares deste modelo.

#### A) - Sistemas Dinâmicos de 1<sup>a</sup> Ordem

Sistemas de 1<sup>a</sup> ordem são aqueles que têm  $r$  igual a um e  $s$  igual a zero; teremos então que a fórmula (2.25) fica reduzida a

$$(1 + \Lambda_1 D) Y(t) = X(t).$$

A solução dessa equação é dada por (Courant, 1967)

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du, \quad (2.26)$$

onde

$$v(u) = g/\Lambda_1 e^{-u/\Lambda_1}.$$

A função  $v(u)$  é conhecida como *função resposta de impulso*, a constante  $\Lambda_1$  como *constante de tempo* e a constante  $g$  como *ganho* do sistema; podemos fazer analogia entre este ganho e o ganho para o sistema discreto; aqui, quando temos uma entrada constante  $X$ , a saída para o tempo infinito é dada por

$$Y_\infty = g X . \quad (2.27)$$

A equação (2.26) tem solução exata para entradas particulares, por exemplo se a entrada for um impulso unitário no tempo zero, conservando-se nesse nível indefinidamente, teremos

$$Y(t) = g(1 - e^{-t/\Lambda_1}). \quad (2.28)$$

Nos casos que a função (2.26) não tem primitiva, métodos numéricos são usados para encontrá-la.

A saída pode não ter uma resposta imediata à entrada e nós teremos o modelo escrito da seguinte forma

$$(1 + \Lambda_1 D) Y(t) = g X(t-\tau), \quad (2.29)$$

o qual é um sistema dinâmico de primeira ordem com atraso; a solução dele é idêntica ao caso sem atraso só que transladada de  $\tau$ .

Estes tipos de modelos são comuns em processos físicos, apresentaremos assim um exemplo desse tipo de sistema.

*Exemplo 2* (Jenkins-Watts, 1969): Consideremos o sistema de mola na porta de vai e vem, exibido na figura 2.1. Suponha que a porta seja fecha

da violentamente; esta força produz uma compressão  $x(t)$  na mola (entra da) a qual produz um deslocamento na porta,  $y(t)$  (saída). A equação que explica esse problema mecânico é dada por

$$K x(t) - y(t) = D \frac{dy}{dt}, \quad (2.30)$$

onde  $K$  é a constante da mola e  $D$  é a velocidade constante com que a porta se fecha. Assim a equação (2.30), pode ser reescrita da forma

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

onde  $T$  é a constante de tempo do sistema.

A solução dessa equação diferencial é dada por

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-u/T} x(t-u) du,$$

logo a solução final depende da entrada  $x(t)$ . Suponhamos que a entrada tenha sido um impulso unitário no instante  $t$  igual a zero, voltando a origem instantaneamente; teremos

$$y(t) = (1 - e^{-t/T}).$$

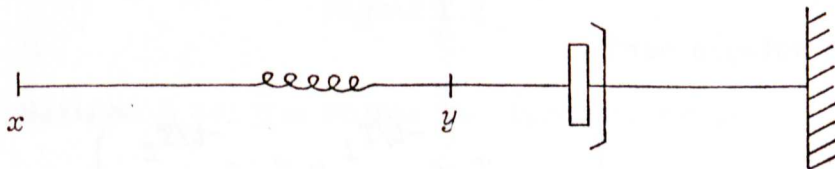


Figura 2.1

### B1 - Sistemas Dinâmicos de 2ª Ordem

Um segundo tipo de modelo com muita aplicação é aquele repre



sentado por uma equação diferencial de segunda ordem, isto é,  $r$  igual a *dois* e  $s$  igual a *zero*, que será dado pela equação

$$(1 + \Lambda_1 D + \Lambda_2 D^2) Y(t) = g X(t) \quad (2.31)$$

Esta equação tem a seguinte solução

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du \quad (2.32)$$

onde

$$v(u) = g(e^{-u/T_1} - e^{-u/T_2}) / (T_1 - T_2), \quad (2.33)$$

com

$$T_1 + T_2 = \Lambda_1 \quad \text{e} \quad T_1 T_2 = \Lambda_2.$$

As constantes  $T_1$  e  $T_2$  são conhecidas como constantes de tempo e a constante  $g$  é o ganho do sistema, que tem o mesmo significado do ganho para o sistema de primeira ordem.

A integral da expressão (2.32) tem solução para entradas particulares, por exemplo se a entrada for o passo unitário no tempo zero, a solução será

$$Y(t) = g \left[ 1 - \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_1 - T_2} \right] \quad (2.34)$$

*Exemplo 2.2.* (Nardizini, 1973): Os circuitos elétricos de segunda or

dem são aqueles que podem ser descritos por equações diferenciais de segunda ordem da seguinte forma

$$a_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d Y(t)}{dt} + a_0 Y(t) = X(t)$$

onde  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  são coeficientes e  $X(t)$  é a função excitação. Em circuitos elétricos,  $Y(t)$  representa a corrente,  $I(t)$ , ou a voltagem,  $V(t)$ . As constantes  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  dependeram dos resistores, indutores e capacitores do circuito.

Consideramos o circuito da figura 2.2

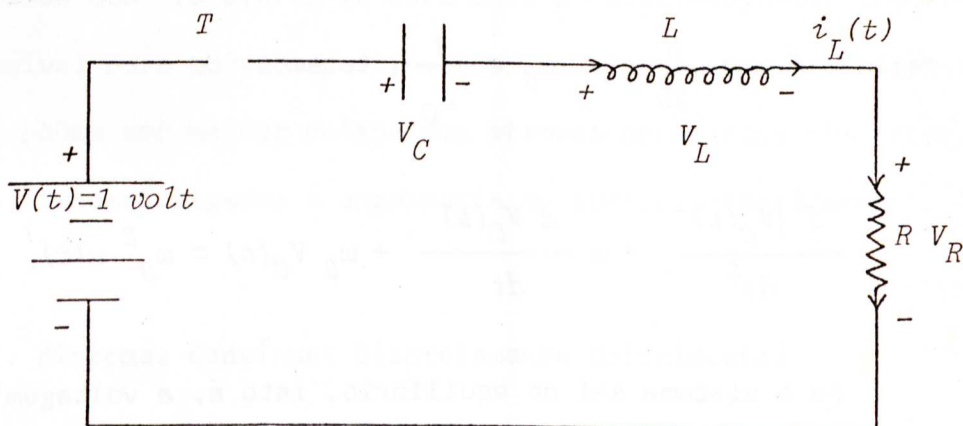


Figura 2.2

Segundo a lei das malhas de Kirchhoff temos

$$V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) = V(t) \tag{2.35}$$

onde  $V_L(t)$  é a voltagem do indutor,  $V_C(t)$  a voltagem do capacitor,

$V_R(t)$  a voltagem do resistor, e da lei dos nós temos:

$$\frac{V_R}{R} + C \frac{d V_0}{dt} = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^T V_L(u) du, \quad (2.36)$$

onde  $I_0$  é a corrente no indutor antes de fechar a chave e  $V_0$  é a voltagem no sistema antes de fechar a chave,  $L$ ,  $C$  e  $R$  são as constantes do indutor, capacitor e resistor, respectivamente.

Combinando as equações (2.35) e (2.36), obtemos:

$$L_C \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + R_C \frac{d V_C(t)}{dt} + V_C(t) = u(t), t \geq 0. \quad (2.37)$$

Se definimos  $\alpha = \frac{R}{2L}$  e  $\omega_0 = \frac{1}{L_C}$ , teremos

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + \alpha \frac{d V_C(t)}{dt} + \omega_0^2 V_C(t) = \omega_0^2 u(t). \quad (2.38)$$

Se o sistema sai do equilíbrio, isto é, a voltagem e a corrente inicial do indutor são nulas e se a função de excitação  $u(t)$  é o passo unitário (rampa unitária) no instante zero, teremos que a solução da equação (2.38) será, usando a equação (2.34)

$$V_C(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t} \right] + 1$$

onde

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} .$$

Nos exemplos exibidos nesta secção, as equações diferenciais que explicam o processo são naturalmente associadas ao mesmo; nesses casos o problema passa para a solução da equação diferencial associada ao sistema e a estimação dos parâmetros existentes nelas; existem en tretanto sistemas cujas equações diferenciais a eles associados têm que ser identificadas e nesses casos temos que usar das observações pa ra essa identificação; como as observações são tomadas em tempo discre to, e a função que explica o modelo é definida para o tempo contínuo, teremos que transformá-la para o tempo discreto; essa transformação é possível para modelos particulares. Existem também sistemas contínuos que podem ser melhor entendidos através de modelos discretos, por exem plo sistemas ligados à engenharia de controle (Box-Jenkins, 1970).

#### 2.4. Sistemas Contínuos Discretamente Coincidentes

Seja um sistema contínuo, que pode ser escrito na forma de filtro linear

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du,$$

e suponhamos que a entrada é pulsada, isto é, muda de nível imediata mente após uma observação e permanece nesse nível até pelo menos a pró

xima observação, quando pode mudar de nível ou não depois da observação, e assim sucessivamente. Esse tipo de entrada pode ser representada por uma onda quadrada (figura 2.3)

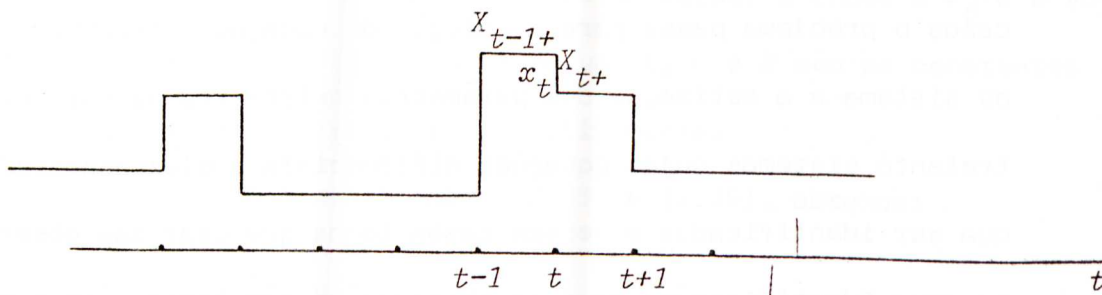


Figura 2.3

Denotaremos a entrada para o intervalo  $t - 1 < j < t$  por  $X_{t-1+}$ . Seja então o sistema representado por um filtro linear contínuo com um atraso de  $(b+c)$  períodos de tempo, onde  $b$  é inteiro e  $c$  é fracionário, teremos. Assim,

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du, \quad (2.39)$$

onde

$$v(u) = 0, \text{ para } u \leq b + c.$$

Se tivermos uma entrada pulsada, a equação (2.39) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y(t) = \int_{b+c}^{b+1} v(u) X_{t-b-1+} du + \int_{b+1}^{b+2} v(u) X_{t-b-2+} + \dots$$

Como a entrada é constante, ela pode ser colocada para fora da integral, logo

$$Y(t) = v_0 X_{t-b-1+} + v_1 X_{t-b-2+} + \dots, \quad (2.40)$$

ou

$$Y_t = v_0 X_{t-b-1+} + v_1 X_{t-b-2+} + \dots,$$

onde

$$v_0 = \int_{b+c}^{b+1} v(u) du,$$

$$v_j = \int_{b+j}^{b+j+1} v(u) du, \quad j \geq 1.$$

Esse tipo de sistema é chamado discretamente coincidente. Vejamos por exemplo o que acontece, quando o sistema é de primeira ordem e a entrada é pulsada. Seja

$$(1 + D T) Y(t) = g X(t).$$

Sabemos que a solução desse sistema é dada por

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du,$$

onde  $v(u) = g/T e^{-u/T}$ ; se tivermos uma entrada pulsada a partir do instante zero, teremos

$$Y(t) = \int_0^1 \frac{g}{T} e^{-u/T} X_{t-1+} + \int_1^2 \frac{g}{T} e^{-u/T} X_{t-2+} + \dots$$

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} g(1 - e^{-1/T}) e^{-j/T} X_{t-j-1+},$$

ou ainda

$$Y_t = v(B) X_t,$$

onde

$$v(B) = \sum_{j=0}^{\infty} g(1 - e^{-1/T}) e^{-j/T} B^{j+1}.$$

Como

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{j(B)},$$

onde

$$\omega(B) = \omega_0 B^b - \omega_1 B^{b+1} - \dots - \omega_s B^{b+s}$$

e

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r,$$

Precisamos identificar os valores de  $b$ ,  $s$  e  $r$ , usando as equações (2.10). Chegamos à conclusão que  $b$  é igual a  $um$ ,  $s$  é zero e  $r$  é  $um$ , pois

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = g(1 - e^{-1/T})$$

$$v_j = v_{j-1} e^{-1/T}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Teremos que o modelo discreto será da forma

$$(1 + \delta B) Y_t = \omega_0 X_{t-1}$$

onde

$$\delta = e^{-1/T},$$

visto que pelas equações (2.10)  $v_j = \delta v_{j-1}$  e que  $v_1 = \omega_0$  e assim  $\omega_0 = g(1 - \delta)$ .

Assim o sistema (2.40) será discretamente coincidente com o sistema

$$(1 + \ln T B) Y_t = g(1 + \ln T) X_{t-1}.$$

Se o sistema tiver um atraso, isto é, for da forma

$$(1 + D T) Y(t) = g X(t-b-c),$$



pode-se provar que ele, com uma entrada pulsada, será discretamente coincidente com o sistema

$$(1 - \delta B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_{t-b-1}$$

onde

$$\delta = e^{-1/T}, \quad \omega_0 = g(1 - \delta^{1-c}) \quad \text{e} \quad \omega_1 = g(\delta - \delta^{1-c}).$$

Assim sendo, modelos contínuos da forma

$$(1 + \Lambda_1 D + \Lambda_2 D^2 + \dots + \Lambda_R D^R) Y(t) = X(t-b-c),$$

serão, para valores particulares de  $\underline{\Lambda}$  e  $c$ , discretamente coincidentes com modelos da forma

$$(1 - \xi_1 \nabla - \dots - \xi_r \nabla^r) Y_t = (\eta_0 - \eta_1 \nabla - \dots - \eta_s \nabla^s) X_{t-b-c-1}$$

onde  $r$  e  $s$  são iguais a  $R$ ,  $\underline{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_R)$  e mais, se  $c$  for zero  $s$  será igual a  $r-1$ .

Assim sendo, sistemas representados por equações diferenciais de ordem  $(R, 0)$  são discretamente coincidentes com sistemas discretos representados por equações de diferenças de ordem  $(R, R)$ , quando a entrada é pulsada. (Box & Jenkins, 1970).

Assim, quando queremos identificar o modelo associado a um sistema contínuo, usaremos entradas observadas da seguinte forma:

$$X(t) = X_j, \quad j - 1/2 \leq t \leq j + 1/2$$

e os dados podem dessa forma ser representados pela equação de pulsos (2.40) onde  $X_{t+}$  é substituído por  $X_j$  e o atraso  $b+c$  por  $b+c-\frac{1}{2}$ , identificando a seguir o modelo de função de transferência e finalmente usando as afirmações do parágrafo anterior para identificar a equação diferencial que explica o sistema dinâmico contínuo. O único cuidado que se deve tomar é o de fazer observações em intervalos de tempo tão pequenos, de forma que não ocorram mudanças na entrada, entre duas observações e assim conseguiremos uma boa aproximação para o modelo.

## CAPÍTULO III

### IDENTIFICAÇÃO

#### 3.1. Introdução

Sabemos que o modelo a ser adotado para explicar um conjunto de observações de uma série de tempo bivariada  $(X_t, Y_t)$  será do tipo

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j} \quad (3.1)$$

ou, usando o operador atraso, da forma

$$Y_t = v(B) X_t.$$

Transformando  $v(B)$  no quociente de dois polinômios  $\omega(B)$  e  $\delta(B)$ , respectivamente de grau  $s$  e  $r$ , teremos

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b},$$

introduzindo também a defasagem  $b$ .

Nosso problema, agora, será identificar os valores de  $r$ ,  $s$  e  $b$  para podermos conhecer a particular forma da função de transferência, para a série de tempo que estamos observando, e então estimar seus parâmetros.

Este problema tem recebido grande atenção na literatura: Fisher, 1937 sugeriu originariamente que os pesos  $v_j$ 's da função resposta de impulso fossem tomados de uma série aritmética decrescente, o que obrigaria que os mesmos tendessem para zero quando  $j > K$ . Koyck, 1954, propôs que os pesos  $v_j$ 's formassem uma série geométrica decrescente, que como os pesos de Fisher tenderiam a zero. Solow, 1960 sugeriu que os  $v_j$ 's fossem várias convoluções de uma série geométrica decrescente. Cada uma dessas sugestões envolve a estimação de poucos parâmetros na função de transferência, mas elas têm uma desvantagem que é a impossibilidade de aproximar uma função de transferência arbitrária a um dado conjunto de observações. O que faremos aqui é identificar a função de transferência mais geral quanto possível.

Vamos, inicialmente, tomar alguns casos particulares de funções de transferências para estudá-las e desse estudo tirarmos sugestões para a identificação do modelo.

### 3.2. Casos Particulares de Função de Transferência

1) Se tivermos  $s$  e  $r$  iguais a zero e um atraso  $b$ , então

$$Y_t = \omega_0 X_{t-b}.$$

Temos, assim, que os pesos de função resposta de impulso são zeros para  $j \neq b$  e o peso  $v_b$  é igual a  $\omega_0$ ; isto significa que a saída é proporcional à entrada, atrasada de  $b$  intervalos de tempo.

2) Se  $r$  for zero e  $s$  diferente de zero e com um atraso  $b$ , então

$$Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) X_{t-b}$$

Temos que

$$\begin{cases} v_j = 0, & j < b \text{ e } j > b+s \\ v_{b+1} = \omega_0 \\ v_{j+b} = \omega_j, & b+2 \leq j \leq b+s \end{cases}$$

Assim, os pesos  $v_j$ 's são iguais a zero para  $j < b$ , seguindo um modelo não fixo para  $b+1 \leq j \leq b+s$ , voltando a ser zero para  $j > b+s$ .

3) Se  $r$  for diferente de zero e  $s$  for igual a zero e havendo um atraso  $b$ , ficamos com

$$(1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) Y_t = \omega_0 X_{t-b}$$

Temos que

$$\begin{cases} v_j = 0, & j < b \\ v_b = \omega_0 \\ v_j = \delta_1 v_{j-1} + \dots + \delta_r v_{j-r}, & j > b. \end{cases}$$

Assim, os  $v_j$ 's são nulos para  $j < b$ , seguem um modelo não fixo para  $j$  igual a  $b$  e depois satisfazem a equação das diferenças  $\delta(B)v_j = 0$ , que tem como valores iniciais  $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+r}$ , o que significa que eles decrescem seguindo somas de exponenciais negativas ou somas

de ondas senos suavizadas, dependendo se as raízes do polinômio característico  $\delta(B)$  forem reais ou imaginárias.

4) Se  $s$  e  $r$  são diferentes de zero e temos um atraso  $b$ , observemos o que acontece com a função resposta de impulso para diversos valores de  $s$  e  $r$ .

4.a) - Sejam  $s$  e  $r$  iguais a um; ficamos com

$$(1 - \delta_1 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_{t-b}.$$

Temos que

$$\begin{cases} v_j = 0, & j < b \\ v_b = \omega_0 \\ v_{b+1} = -\omega_1 + \delta_1 \omega_0 \\ v_{j+1} = \delta_1 v_j, & j > b+1 \end{cases}$$

Assim, os  $v_j$ 's são iguais a zero para  $j < b$ ,  $v_b$  e  $v_{b+1}$  seguem um modelo não fixo e os  $v_j$ 's para  $j > b+1$  decaem segundo a equação das diferenças  $v_{j+1} - \delta_1 v_j = 0$ , cuja solução é uma exponencial negativa e que usa como valores iniciais  $v_b$  e  $v_{b+1}$ .

4.b) - Se  $s$  é igual a um e  $r$  é dois, temos

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_{t-b}.$$

Temos

$$\begin{cases} v_j = 0, & j < b \\ v_b = \omega_0 \\ v_{b+1} = \delta_1 \omega_0 - \omega_1 \\ v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2}, & j > b+1. \end{cases}$$

Assim, os  $v_j$ 's são nulos para  $j < b$  e  $v_b$  e  $v_{b+1}$  também seguem um modelo não fixo e os  $v_j$ 's quando  $j > b+1$  decrescem segundo a equação de diferenças  $\delta(B) v_j = 0$ , que novamente usa como valores iniciais  $v_b$  e  $v_{b+1}$  e cuja a solução é uma onda seno suavizada.

4.c) - Se  $s$  é dois e  $r$  tem valor um, teremos

$$(1 - \delta_1 B) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B) X_{t-b}.$$

Temos que

$$\begin{cases} v_j = 0, & j < b \\ v_b = \omega_0 \\ v_{b+1} = \delta_1 \omega_0 - \omega_1 \\ v_{b+2} = \delta_1^2 \omega_0 - \delta_1 \omega_1 - \omega_2 \\ v_{j+1} = \delta_1 v_j, & j \geq b+2. \end{cases}$$

Assim os  $v_j$ 's são nulos para  $j < b$ , temos três  $v_j$ 's ( $v_b, v_{b+1}$  e  $v_{b+2}$ ) seguindo um modelo não fixo e os  $v_j$ 's, para  $j \geq b+2$ , obedecendo a equação das diferenças  $\delta(B)v_j = 0$ , cujo valor inicial é  $v_{b+1}$  e  $v_{b+2}$  e

cuja solução decai exponencialmente.

4.d) - Finalmente se  $s$  e  $r$  têm valor dois, temos

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) X_{t-b}$$

e portanto

$$\left\{ \begin{array}{l} v_j = 0, \quad j < b \\ v_b = \omega_0 \\ v_{b+1} = \delta_1 \omega_0 - \omega_1 \\ v_{b+2} = (\delta_1^2 + \delta_2) \omega_0 - \delta_1 \omega_1 - \omega_2 \\ v_{j+1} = \delta_1 v_j + \delta_2 v_{j-1}, \quad j \geq b+2. \end{array} \right.$$

Assim, os  $v_j$ 's são nulos para  $j < b$ , os três valores seguintes dos  $v_j$ 's ( $v_b, v_{b+1}$  e  $v_{b+2}$ ), seguem um modelo não fixo e os  $v_j$ 's para  $j > b+2$  obedecem a equação das diferenças  $\delta(B) v_j = 0$ , que tem como valores iniciais  $v_{b+1}$  e  $v_{b+2}$  e cuja solução é uma onda seno suavizada.

Assim para identificar a ordem da função de transferência será necessário encontrar os valores estimados dos pesos  $v_j$ 's e através do comportamento da função resposta de impulso identifica-se os possíveis valores de  $b, r$  e  $s$ . Observemos que, nos modelos particulares desenvolvidos aqui, o valor de  $b$  é sugerido pelo número de pesos iniciais  $v_j$ 's iguais a zero, o de  $s$  é sugerido pelo número de pesos diferentes de zero que não tem um comportamento regular e o de  $r$  pela forma final dos pesos  $v_j$ 's; se eles decrescem segundo uma exponencial, o



valor de  $r$  deve ser um; se decrescer segundo uma onda seno suavizada o  $r$  deve ser dois, outro qualquer valor de  $r$  fará com que os pesos de cresçam segundo uma soma de exponenciais negativas ou ondas senos sua vizadas, que são de difícil identificação.

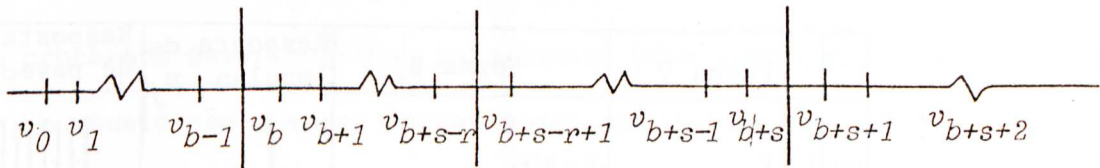
Assim, (Pack, 1977a) os valores de  $r$  podem ser identificados fazendo uma associação entre o modelo da função resposta de impulso e a função de autocorrelação associado ao modelo auto regressivo de or dem  $p$  de uma série univariada.

Para identificar o valor de  $r$  deve existir um grupo de  $r$  valo res iniciais dos  $v_j$ 's que satisfazem a equação  $\delta(B) v_j$ . Estes valores serão os  $v_j$ 's que aparecem na expressão, isto é,  $v_{b+s-r+1}, \dots, v_{b+s-1}, v_{b+s}$ .

Para identificar  $s$ , que é feita depois da identificação de  $r$ , observando a partir de qual  $v_j$  a função resposta de impulso segue um modelo fixo, esse  $j$  é igual a  $b+s$ , e como já conhecemos  $b$ , podemos calcu lar o valor de  $s$ .

A figura 3.1 (Pack, 1977a) apresenta um sumário do comporta mento da função resposta de impulso. O grupo 2 só existe se  $r \leq s$  são os pesos da função resposta de impulso que adicionados aos pesos do gru po 3 não seguem um modelo fixo, se  $r = s+1$ , o grupo 2 desaparece e se  $r > s+1$ , o grupo 1 e 3 formam um único grupo.

### Pesos da Resposta de Impulso



- 1)  $b$  pesos=0 2)  $s-r+1$  pesos 3)  $r$  valores iniciais 4) seguindo um mo  
delo fixo.

Figura 3.1

A estimação final do modelo nos permitirá acrescentar ou eli  
minar parâmetros do modelo.

A tabela 3.1 (Box-Jenkins, 1970), nos auxiliará a identificar os possíveis valores de  $r$ ,  $s$  e  $b$ , através de exemplos. No final des  
te capítulo exibiremos alguns exemplos para identificação de  $r$ ,  $s$  e  $b$ .

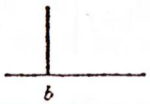
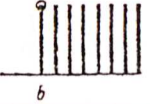
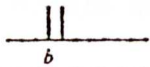
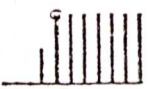
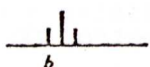

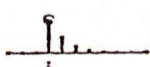

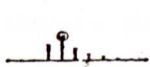



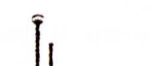
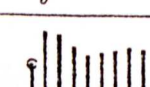

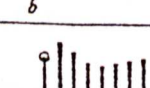

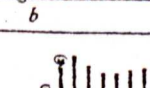
$r, s, b$	Forma $\nabla$	Forma B	Resposta de Impulso $v_j$	Resposta de passo
003	$Y_t = X_{t-3}$	$Y_t = B^3 X_t$		
013	$Y_t = (1 - .5\nabla) X_{t-3}$	$Y_t = (.5 + .5B) B^3 X_t$		
023	$Y_t = (1 - \nabla + .25\nabla^2) X_{t-3}$	$Y_t = (.25 + .50B + .25B^2) B^3 X_t$		
103	$(1 + \nabla) Y_t = X_{t-3}$	$(1 - .5B) Y_t = .5B^3 X_t$		
113	$(1 + \nabla) Y_t = (1 - .5\nabla) X_{t-3}$	$(1 - .5B) Y_t = (.25 + .25B) B^3 X_t$		
123	$(1 + \nabla) Y_t = (1 - \nabla + .25\nabla^2) X_{t-3}$	$(1 - .5B) Y_t = (.125 + .25B + .125B^2) B^3 X_t$		
203	$(1 - .25\nabla + .5\nabla^2) Y_t = X_{t-3}$	$(1 - .6B + .4B^2) Y_t = .8B^3 X_t$		
213	$(1 - .25\nabla + .5\nabla^2) Y_t = (1 - .5\nabla) X_{t-3}$	$(1 - .6B + .4B^2) Y_t = (.4 + .4B) B^3 X_t$		
223	$(1 - .25\nabla + .5\nabla^2) Y_t = (1 - \nabla + .25\nabla^2) X_{t-3}$	$(1 - .6B + .4B^2) Y_t = (.2 + .4B + .2B^2) B^3 X_t$		

TABELA 3.1 Exemplo de Função Resposta de Impulso e de Passo com  $g = 1$ .

### 3.3. Estimação Preliminar de Função Resposta de Impulso

O modelo de função de transferência só deve ser construída para processos estacionários, pois quando essa condição não é satisfeita, o modelo não obedece certas condições de regularidade.

Se o processo que estamos observando não for estacionário faremos transformações nas observações até que se torne estacionário, é com os dados transformados que trabalharemos.

A transformação mais usada é a diferença, isto é, obtemos a série

$$x_t = X_t - X_{t-1} .$$

Se esta primeira diferença não for suficiente para transformar a série original em estacionária, repetimos o processo até que ela se torne estacionária.

Uma outra transformação usada é a logarítmica (Nelson, 1972) que consiste em fazer a diferença entre os logaritmos naturais das observações, isto é,

$$x_t = \ln X_t - \ln X_{t-1} .$$

Neste caso estamos construindo a série da razão de crescimento do processo. Esta transformação é muito útil para séries econômicas.

Sejam  $(X_t, Y_t)$  observações de um sistema dinâmico, que podem ser provenientes de séries estacionárias ou não.

Se as séries originárias não forem estacionárias,  $d$  diferenças são feitas para que elas se tornem estacionárias, e as séries resultantes serão indicadas por

$$x_t = \nabla^d X_t \quad \text{e} \quad y_t = \nabla^d Y_t.$$

Geralmente  $d$  assume valores 0, 1 ou 2.

Supondo que depois dessas  $d$  diferenças o número de observações seja  $n$ , estimadores para as funções de autocovariância desses processos, dadas pelas equações (1.9), serão

$$c_{xx}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x}) (x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t,$$

$$c_{yy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y}) (y_{t+k} - \bar{y}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

onde

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t.$$

Como  $\gamma_{xx}(0) = \sigma_x^2$ , estimadores para as funções de autocorrelação dos processos são dados por

$$r_{xx}(k) = c_{xx}(k) / c_{xx}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

e

$$r_{yy}(k) = c_{yy}(k) / c_{yy}(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Estes estimadores são assintoticamente não viciados se forem satisfeitas as condições do Teorema Ergódico (Jenkins-Watts, 1969).

Um estimador para a função de covariância cruzada entre a entrada e a saída é dado por

$$c_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(y_{t+k} - \bar{y}), & \text{se } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n+k} (x_{t-k} - \bar{x})(y_t - \bar{y}), & \text{se } k = -1, -2, \dots, -n+1 \end{cases} \quad (3.5)$$

e para função de correlação cruzada entre  $x$  e  $y$  é

$$r_{xy}(k) = c_{xy}(k) / c_{xx}^{1/2}(0) c_{yy}^{1/2}(0), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1).$$

Para testar se certos valores da função de correlação cruzada são ou não zero, teremos que conhecer o desvio padrão dos estimadores;

um valor aproximado da covariância entre os estimadores da covariância cruzada entre  $x$  e  $y$ , de lags  $k$  e  $k+l$ , foi dado por Bartlett (1946). Sob a suposição de normalidade, a covariância é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[ r_{xy}(k), r_{xy}(k+l) \right] \cong & \\ & (n-k)^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left[ \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v+l) + \rho_{xy}(v+2k+l) \rho_{xy}(-v) + \right. \\ & + \rho_{xy}(k) \rho_{xy}(k+l) \left\{ \rho_{xy}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(v) \right\} - \\ & - \rho_{xy}(k) \left\{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k+l) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k+l) \right\} - \\ & \left. - \rho_{xy}(k+l) \left\{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k) \right\} \right]. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Esta fórmula é válida para qualquer caso, mesmo aquele em que  $x_t \equiv y_t$ ; se quisermos a variância do estimador, basta substituir  $l$  por zero, assim

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ r_{xy}(k) \right] \cong & \left| \right. \\ & \frac{1}{n-k} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left[ \rho_{xx}(v) \rho_{yy}(v) + \rho_{xy}(v+k) \rho_{xy}(k-v) + \right. \\ & \left. + \rho_{xy}^2(k) \left\{ \rho_{xy}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(v) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(v) \right\} - \right. \end{aligned}$$

$$- 2\rho_{xy}(k) \{ \rho_{xx}(v) \rho_{xy}(v+k) + \rho_{xy}(-v) \rho_{yy}(v+k) \} ]$$

As variâncias para particulares valores de  $k$ ,  $l$ ,  $x_t$  e  $y_t$  se não estudadas oportunamente.

Através da regularidade das funções de autocorrelação e de correlação cruzada entre  $x$  e  $y$ , verificamos se as séries são estacionárias. Séries não estacionárias tem funções de autocorrelação e de correlação cruzada irregulares que não decrescem para *lag's* altos, o que não acontece quando as séries são estacionárias.

Seja o sistema escrito da forma

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j x_{t-j} + n_t$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $x_{t-k}$  temos

$$y_t x_{t-k} = v_0 x_t x_{t-k} + v_1 x_{t-1} x_{t-k} + \dots + n_t x_{t-k}$$

Calculando a esperança dos dois lados dessa igualdade teremos

$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + \dots, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

já que o ruído do sistema é independente da entrada, temos que  $\gamma_{xn}(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Como o sistema que trabalhamos é estável, sabemos que os  $v_j$ 's tendem a zero para  $j > J$  e usando essa suposição a expressão (3.7) se transforma em



$$\gamma_{xy}(k) = v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + \dots + v_j \gamma_{xx}(k-j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, J. \quad (3.8)$$

Se denotarmos

$$\underline{\gamma}_{xy} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy}(0) \\ \gamma_{xy}(1) \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(J) \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\sim xx} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(J) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(J-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}(J) & \gamma_{xx}(J-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix}$$

teremos que as equações (3.8), podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\underline{\gamma}_{xy} = \Gamma_{\sim xx} \underline{v} \quad (3.9)$$

Para encontrarmos os estimadores preliminares dos  $v_j$ 's basta substituir os valores das funções de covariância cruzada entre  $x$  e  $y$  e autocovariância da entrada pelos seus valores estimados e no sistema de equações (3.9), que se transforma em

$$C_{\sim xy} = C_{\sim xx} \hat{v}, \tag{3.10}$$

onde

$$C_{\sim xy} = \begin{bmatrix} c_{xy}(0) \\ c_{xy}(1) \\ \vdots \\ c_{xy}(J) \end{bmatrix} \qquad C_{\sim xx} = \begin{bmatrix} c_{xx}(0) & \dots & c_{xx}(J) \\ c_{xx}(1) & \dots & c_{xx}(J-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{xx}(J) & \dots & c_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_J \end{bmatrix}$$

e resolvê-lo. Este método é ineficiente dado que temos estimadores preliminares para os  $v_j$ 's, com  $j = 0, 1, \dots, J$ , mas não teremos estimadores preliminares para os  $v_j$ 's, com  $j > J$ . Assim, com este método, precisamos ter uma idéia do valor de  $J$  e isso nem sempre é possível. Apresentaremos a seguir um método, no qual essa suposição não é necessária.

### 3.4. Prê-Branqueamento da Série de Entrada

Nosso modelo é dado por

$$y_t = v(B) x_t + n_t \quad (3.11)$$

onde  $y_t$ ,  $x_t$  e  $n_t$  são as observações transformadas para tornar as séries estacionárias.

À série de entrada podemos ajustar um modelo *ARIMA* ( $p, d, q$ ) e portanto o modelo da série de entrada será:

$$x_t = \phi_x^{-1}(B) \theta_x(B) \alpha_t, \quad (3.12)$$

onde  $\phi_x(B)$  e  $\theta_x(B)$  são polinômios de graus  $p$  e  $q$ , respectivamente, e o processo  $\alpha_t$  é o ruído branco, que tem variância  $\sigma_\alpha^2$ .

Se aplicarmos a operação inversa em  $x_t$  obteremos o ruído branco como função da série de entrada, de modo que

$$\phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) x_t = \alpha_t.$$

Consideremos estes operadores aplicados à saída e ao ruído do processo:

$$\beta_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) y_t$$

e

$$\epsilon_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) n_t$$

e portanto a equação (3.11), pode ser reescrita da seguinte forma

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + \epsilon_t.$$

Se multiplicarmos essa igualdade por  $\alpha_{t-k}$  temos

$$\beta_t \alpha_{t-k} = v(B) \alpha_t \alpha_{t-k} + \varepsilon_t \alpha_{t-k}$$

e calculando a esperança, teremos

$$\gamma_{\alpha\beta}(k) = v_k \gamma_{\alpha\alpha}(0), \quad (3.13)$$

isso porque os  $\alpha_t$  não são correlacionados e mais, como o ruído do sistema não é correlacionado com a entrada, transformações lineares deles também não o serão, resultando  $\gamma_{\alpha\varepsilon}(k) = 0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Segue-se que um estimador de  $\hat{v}_k$  é dado por

$$\hat{v}_k = \frac{c_{\alpha\beta}(k)}{s_\alpha^2(k)} = \frac{s_\beta(k)}{s_\alpha(k)} r_{\alpha\beta}(k) \quad (3.14)$$

O pré-branqueamento da entrada torna o sistema de equações (3.10) ortogonal o que nos permite calcular estimadores iniciais para os  $v_j$ 's, qualquer que seja o  $j$ , sem a necessidade de supor que eles são zero a partir de um  $J$ .

E é a partir do comportamento dessa função resposta de impulso estimada, que decidiremos qual os prováveis valores para  $b$ ,  $r$  e  $s$ , usando as sugestões que foram feitas no início deste capítulo, a saber:

- 1) O número de  $\hat{v}_j$ 's iniciais iguais a zero, sugere o valor de  $b$ ;
- 2) O número de  $\hat{v}_j$ 's consecutivos que não seguem um modelo fixo sugerem o valor de  $s-r+1$ , se  $s > r$  e de  $r-s+1$  se  $s < r$ ;
- 3) O comportamento dos  $v_j$ 's a partir desses que não seguem um modelo

fixo sugere a ordem  $r$  da equação de diferenças que eles devem seguir.

Depois de determinar os valores de  $b$ ,  $r$  e  $s$  tomaremos as equações (2.9) e determinaremos os estimadores preliminares para os pesos  $\delta_i$  e  $\omega_i$ .

### 3.5. Exemplos de Identificação

Apresentamos, agora, alguns exemplos de identificação (Pack, 1977a).

*Exemplo 3.1.* Os gráficos da série  $Y_t$  e  $X_t$  estão na figura 3.2. Ambas as séries parecem ser estacionárias, e isto é confirmado examinando a função de autocorrelação estimada da série  $X_t$  que se encontra na tabela 3.2 e a função de correlação cruzada estimada entre  $X_t$  e  $Y_t$  que se encontra na tabela 3.3.

Examinando a função de autocorrelação estimada da entrada  $X_t$  chegamos a conclusão que ela é um ruído branco com média estimada 10,178, portanto a série  $\alpha_t = X_t - \bar{X}$  é um ruído branco com média zero.

A tabela 3.3, já apresenta a função de correlação cruzada estimada entre  $\alpha_t$  e  $y_t$ .

Assim os cálculos dos  $\hat{v}_k$ 's são feitos multiplicando a função de correlação cruzada estimada entre  $\alpha_t$  e  $Y_t$  por  $s_\beta/s_\alpha$ .

O gráfico da função de impulso resposta está na figura 3.3.

---

Obs. - Nas tabelas que aparecem neste trabalho o ponto representa a vírgula decimal

TABELA 3.2.

Função de Autocorrelação da Série de Entrada  $X_t$  da Exemplo 3.1.

Lag $u$	Autocorrelações $r_{xx}(u)$										
1 - 10	0.05	0.00	0.04	-0.06	-0.06	0.00	-0.10	0.04	0.13	-0.10	
e.p.	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
11 - 20	-0.20	0.04	0.03	0.06	0.03	-0.09	0.16	-0.01	-0.08	0.08	
e.p.	0.09	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
$\bar{X} = 10.38$											
$\hat{\sigma}_x = 2.36$											
Número de Observações = 125											

TABELA 3.3.

Função de Correlação Cruzada da Série de Entrada  $X_t$  e  
Série de Saída  $Y_t$  do Exemplo 1

Número de Lags na Entrada	Correlação Cruzada	Número de Lags na Entrada	Correlação Cruzada
0	-0.016	11	0.094
1	0.016	12	-0.054
2	0.826	13	-0.196
3	0.456	14	-0.036
4	0.220	15	-0.032
5	0.159	16	0.023
6	0.038	17	0.025
7	-0.036	18	-0.072
8	0.026	19	0.091
9	-0.082	20	0.067
10	0.002		
$\bar{X} = 10.18$		$\bar{Y} = 60.91$	
$\hat{\sigma}_x = 2.36$		$\hat{\sigma}_y = 8.57$	

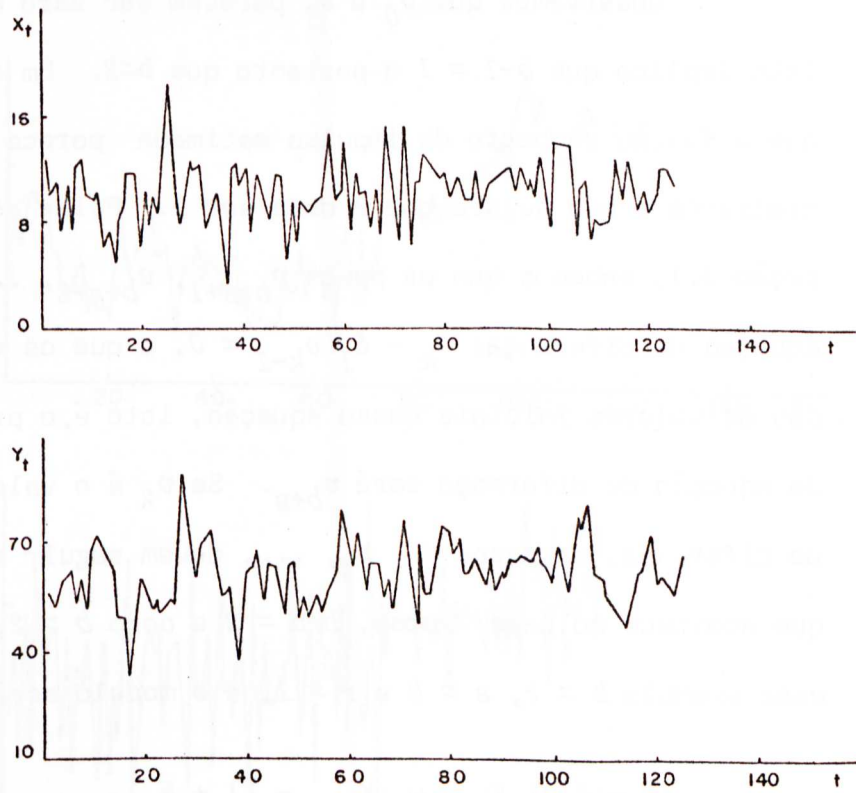


FIGURA 3.2: GRÁFICO DA SÉRIE DE SAÍDA  $y_t$  E DA SÉRIE DE ENTRADA  $x_t$  PARA O EXEMPLO 1.

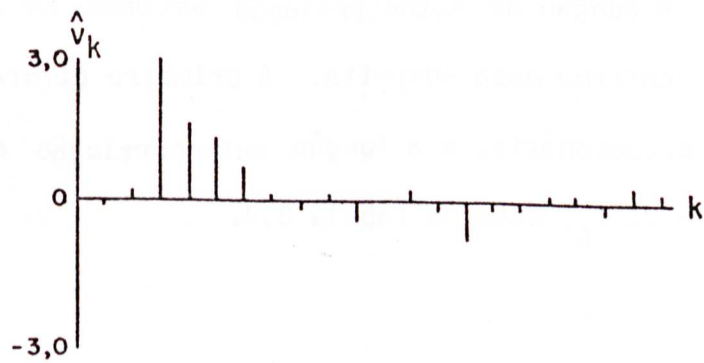


Figura 3.3 : Estimador dos Pesos de Resposta de Impulso do Exemplo 1



Observemos que  $\hat{v}_0$  e  $\hat{v}_1$  parecem ser zero e que  $v_2$  não é zero. Isto implica que  $b-1 = 1$  e portanto que  $b=2$ . Em seguida observemos que a função resposta de impulso estimada parece decrescer exponencialmente o que sugere que  $r$  deve ser 1. Pelas afirmações feitas na seção 3.1, sabemos que os pesos  $v_{b+s+1}, v_{b+s+2}, \dots$ , devem seguir a equação de diferenças  $v_k - \delta_1 v_{k-1} = 0$ , e que os valores  $v_j$  com  $\delta < b+s$  são os valores iniciais dessa equação, isto é, o primeiro valor inicial da equação de diferença será  $v_{b+s}$ . Se  $v_2$  é o valor inicial da equação de diferença, os pesos  $v_3, v_4, \dots$ , devem seguir o modelo fixo, e é o que acontece no caso; então,  $b+s = 2$  e como  $b = 2, s = 0$ . Assim para esse exemplo  $b = 2, s = 0$  e  $r = 1$ , e o modelo será da seguinte forma

$$(1 - \delta_1 B) Y_t = \omega_0 (X_{t-2} - \bar{X}) + N_t .$$

*Exemplo 3.2.* Os gráficos das séries  $X_t$  e  $Y_t$  estão na figura 3.4. Observamos que a série  $X_t$  não é estacionária.

A função de autocorrelação estimada de  $X_t$ , que está na tabela 3.4, confirma essa suspeita. A primeira diferença para série  $X_t$  torna-a estacionária, e a função autocorrelação estimada da primeira diferença de  $X_t$ , está na tabela 3.4.

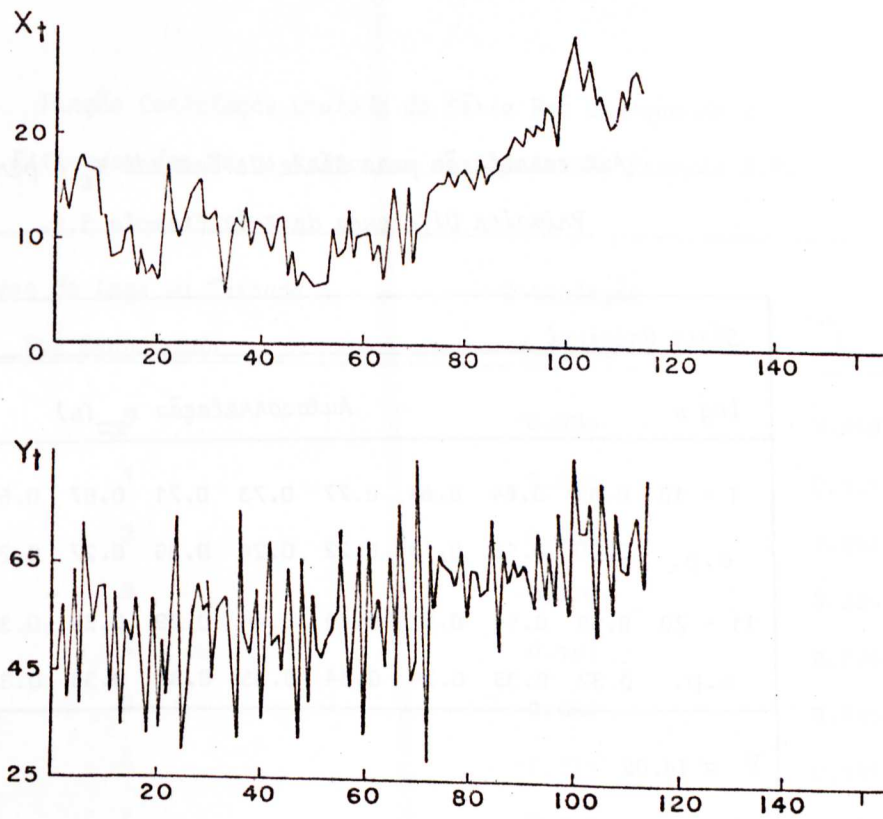


Figura 3.4 : Gráfico da Série de Saída  $Y_t$  e da Série de Entrada  $X_t$  para o Exemplo 2

TABELA 3.4.

Autocorrelação para Série de Entrada  $X_t$  e para  
Primeira Diferença de  $X$  do Exemplo 3.2.

Série Original										
Lag $u$	Autocorrelação $r_{xx}(u)$									
1 - 10	0.89	0.84	0.81	0.77	0.73	0.71	0.67	0.66	0.64	0.59
e.p.	0.09	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.27	0.29	0.30	0.31
11 - 20	0.55	0.54	0.52	0.48	0.44	0.39	0.39	0.35	0.31	0.30
e.p.	0.32	0.33	0.34	0.34	0.35	0.36	0.36	0.36	0.36	0.37
$\bar{x} = 14.09$										
$\hat{\sigma}_x = 5.95$										
Número de Observações = 115										
Primeira Diferença										
Lag $u$	Autocorrelação $r_{xx}(u)$									
1 - 10	-0.36	-0.07	0.10	-0.06	-0.03	0.07	-0.14	0.02	0.17	-0.11
e.p.	0.09	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
11 - 20	-0.17	0.12	0.01	0.03	0.04	-0.17	0.20	-0.01	-0.14	0.11
e.p.	0.11	0.11	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
$\bar{x} = 0.09$										
$\hat{\sigma}_x = 5.95$										
Número de Observações = 114										

TABELA 3.5.

Função Correlação Cruzada da Série Prê Branqueada e  
Estimador dos Pesos Respostas de Impulso do Exemplo 3.2.

Número de Lags na Entrada Prê Branqueada	Correlação Cruzada	$v_k$
0	-0.069	-0.399
1	0.024	0.137
2	0.684	3.967
3	-0.670	-3.885
4	0.151	0.874
5	0.084	0.485
6	-0.077	-0.445
7	0.005	0.027
8	0.039	0.224
9	-0.105	-0.608
10	0.102	0.592
11	0.030	0.171
12	-0.178	-1.032
13	-0.027	-0.158
14	0.162	0.937
15	-0.040	-0.234
16	0.005	0.027
17	-0.033	-0.189
18	-0.072	-0.418
19	0.172	0.995
20	-0.106	-0.616

O gráfico da série  $Y_t$  nos parece ambíguo, podendo ser estacionário ou não. Apesar da análise feita indicar que  $Y_t$  não precisa de diferença, nós consideraremos sua primeira diferença, para facilitar o entendimento do modelo.

Examinando a tabela 3.4, que contém função de autocorrelação estimada da série  $x_t = X_t - X_{t-1}$ , chegamos à conclusão que  $x_t$  é  $MA(1)$ , portanto

$$x_t = (1 - \theta_1 B) \alpha_t,$$

onde  $\alpha_t$  é ruído branco pois a função de autocorrelação da série  $x_t$  só é significativamente diferente de zero para o lag 1. Então o parâmetro  $\theta_1$  é estimado e tem o valor  $\hat{\theta}_1 = 0,4538$ .

Portanto, a série pré-branqueada é da forma

$$(1 - B) X_t = (1 - 0,4538 B) \alpha_t$$

e aplicando-se o mesmo operador à saída, teremos

$$(1 - B) Y_t = (1 - 0,4538 B) \beta_t.$$

A função de correlação cruzada estimada entre  $\alpha_t$  e  $\beta_t$ , e os pesos  $\hat{v}_k$  estão na tabela 3.5. O gráfico da função resposta de impulso estão na figura 3.5.

Os pesos  $\hat{v}_0, \hat{v}_1$  não são significantes, o que nos faz concluir que  $b$  deve ser 2. Os pesos  $\hat{v}_2$  e  $\hat{v}_3$  são diferentes de zero e são múltiplos da correlação cruzada. O comportamento dos pesos  $\hat{v}_4, \hat{v}_{12}, \hat{v}_{14}, \hat{v}_{19}$

é de difícil explicação, e é questionável se eles são significativos, dado que há 115 observações. Todos os outros pesos não são significativos.

Se consideramos só  $\hat{v}_2$  e  $\hat{v}_3$  diferentes de zero teremos que  $b = 2$ ,  $b+s = 3$  e portanto  $s = 1$  e  $r = 0$  já que para  $j \geq 4$  os pesos  $v_j$ 's podem ser considerados zeros, e portanto não seguem um modelo fixo.

Assim, o modelo é dado por

$$Y_t = (3,97 - 3,89 B) x_{t-2} + n_t .$$

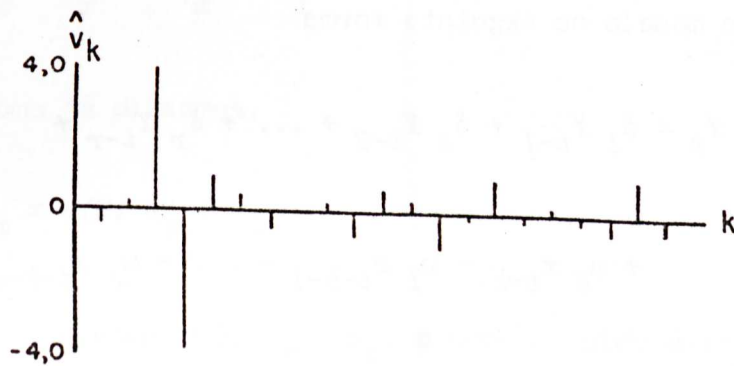


Figura 3.5 : Estimador dos Pesos de Resposta de Impulso do Exemplo 2

### 3.6. Identificação do Modelo do Ruído do Sistema

A identificação do modelo do ruído do sistema segue a técnica de identificação de modelo para série univariada. A série do ruído será construída através do resíduo da função de transferência preliminar

nar, ajustada ao modelo, sem que se façamos muitas suposições restriti-  
vas sobre os estimadores dos parâmetros da função de transferência não  
serem consistentes. Basta calcular o resíduo diretamente pela fórmu-  
la:

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}(B) x_t. \quad (3.18)$$

A única suposição usada aqui é que os  $v_j$ 's são nulos para  
 $j > J$  e a partir da série de resíduos, identifica-se o modelo da série  
usando as técnicas que se encontram no capítulo 6 de Nelson, 1972 ou  
capítulo 6 de Box-Jenkins, 1970.

A suposição de que os  $v_j$ 's são zero pode ser abandonada se  
usarmos o modelo na seguinte forma

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \dots + \delta_r Y_{t-r} + \\ + \omega_0 x_{t-b} - \omega_1 x_{t-b-1} - \dots - \omega_s x_{t-b-s} + n_t. \quad (3.19)$$

O resíduo será então dado por

$$\hat{n}_t = Y_t + \hat{\delta}_1 (\hat{n}_{t-1} - Y_{t-1}) + \dots + \hat{\delta}_r (\hat{n}_{t-r} - Y_{t-r}) - \\ - \hat{\omega}_0 x_{t-b} + \hat{\omega}_1 x_{t-b-1} + \dots + \hat{\omega}_s x_{t-b-s}. \quad (3.20)$$

A maneira de identificar o ruído não se altera se usarmos ou  
não a suposição que  $v_j$  é zero para  $j > J$ .

Existe uma forma indireta de identificar o modelo do resíduo,

que é assim chamada, por não ser necessário obter a série residual; é identificado o modelo do ruído pela função de autocorrelação residual estimada que passou pelo filtro de pré-branqueamento da entrada. Vejamos como se implementa esse método.

Sejam

$$\alpha_t = \theta_x^{-1}(B) \phi_x(B) x_t,$$

$$\beta_t = \theta_x^{-1}(B) \phi_x(B) y_t$$

e

$$\varepsilon_t = \theta_x^{-1}(B) \phi_x(B) n_t.$$

Como já dissemos,

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + n_t.$$

Se chamamos  $v(B) \alpha_t = u_t$ , e como o ruído é independente da entrada, teremos

$$\gamma_{\beta\beta}(k) = \gamma_{uu}(k) + \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(k)$$

ou

$$\gamma_{\varepsilon\varepsilon}(k) = \gamma_{\beta\beta}(k) - \gamma_{uu}(k) \quad | \quad (3.15)$$

Como

$$u_t = v_0 \alpha_t + v_1 \alpha_{t-1} + \dots \quad (3.16)$$



se multiplicarmos a expressão (3.16) por  $u_{t-k}$  teremos

$$u_t u_{t-k} = v_0 v_k \alpha_{t-k}^2 + v_1 v_{k-1} \alpha_{t-k-1}^2 + \dots + \text{produtos cruzados}$$

e calculamos a esperança de ambos os lados dessa igualdade teremos

$$\gamma_{uu}(k) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j v_{j+k} \sigma_{\alpha}^2 \quad (3.17)$$

já que  $\alpha_t$  é ruído branco e portanto não é autocorrelacionado, e dado que

$$v_j = \gamma_{\alpha\beta}(j) / \sigma_{\alpha}^2$$

temos que a expressão (3.15) pode ser reescrita na forma

$$\gamma_{\epsilon\epsilon}(k) = \gamma_{\beta\beta}(k) - \frac{1}{\sigma_{\alpha}^2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{\alpha\beta}(j) \gamma_{\alpha\beta}(j+k) \quad (3.18)$$

e como

$$\gamma_{\epsilon\epsilon}(0) = \gamma_{\beta\beta}(0) - \frac{1}{\sigma_{\alpha}^2} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{\alpha\beta}^2(j)$$

temos

$$\rho_{\epsilon\epsilon}(k) = \frac{\rho_{\beta\beta}(k) - \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{\alpha\beta}(j) \rho_{\alpha\beta}(j+k)}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{\alpha\beta}^2(j)} \quad (3.19)$$

Assim, um estimador preliminar da função de autocorrelação do ruído depois de passar pelo filtro que branqueia a entrada é dado por

$$r_{\epsilon\epsilon}(k) = \frac{r_{\beta\beta}(k) - \sum_{j=0}^{\infty} r_{\alpha\beta}(j) r_{\alpha\beta}(j+k)}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} r_{\alpha\beta}^2(j)} \quad (3.20)$$

Podemos, então, usando a função de autocorrelação estimada de  $\epsilon_t$ , identificar o seu modelo e através de operações inversas identificar o modelo do ruído. Se

$$\epsilon_t = \phi_{\epsilon}^{-1}(B) \theta_{\epsilon}(B) a_t$$

e como

$$\epsilon_t = \phi_x(B) \theta_x^{-1}(B) n_t,$$

temos que

$$n_t = \frac{\phi_{\epsilon}^{-1}(B) \theta_{\epsilon}(B)}{\phi_x(B) \theta_x^{-1}(B)} a_t \quad (3.21)$$

Como

$$n_t = (1 - B)^d N_t$$

temos, finalmente, identificado o modelo do ruído, dado por

$$N_t (1 - B)^d = \phi_{\epsilon}^{-1}(B) \theta_{\epsilon}(B) \phi_x^{-1}(B) \theta_x(B) a_t \quad (3.22)$$

## CAPÍTULO IV

### ESTIMAÇÃO

#### 4.1. Introdução

Tendo identificado o modelo da função de transferência que é dado por

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j} + N_t,$$

ou usando o operador atraso  $B$ ,

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (4.1)$$

cujos polinômios  $\omega(B)$ ,  $\delta(B)$ ,  $\theta(B)$  e  $\phi(B)$  têm graus  $s$ ,  $r$ ,  $q$  e  $p$ , respectivamente, e teremos idéia dos possíveis valores de  $b$ ,  $s$ ,  $r$ ,  $p$  e  $q$ . Precisamos, então, de técnicas que nos dêem os melhores ou os mais eficientes estimadores para os parâmetros de  $\omega(B)$ ,  $\delta(B)$ ,  $\theta(B)$  e  $\phi(B)$ , para em seguida usarmos esse modelo estimado para fazermos previsões futuras da variável dependente  $Y_t$ .

Os estimadores encontrados no capítulo anterior, não são consistentes e portanto não podem ser usados para previsão.

Entenderemos que estimadores eficientes são aqueles que minimizam a diferença quadrática entre o verdadeiro valor do parâmetro e o

valor estimado para o mesmo. Sob a suposição de que as observações têm distribuição normal o estimador de mínimos quadrados é também o estimador de máxima verossimilhança, e são estes estimadores que deduziremos a seguir.

#### 4.2. Estimadores de Máxima Verossimilhança

Seja  $\{X_t, Y_t\}$ , com  $t = 1, 2, \dots, n$ , uma amostra de  $n$  observações da série gerada pelo modelo

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

se a série observada for estacionária, ou gerada pelo modelo

$$y_t \Big| = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

se os dados originários não forem estacionários, mas uma transformação deles o for.

Uma transformação que pode ser usada é calcular a série proveniente de " $d$ " diferenças da série original, e neste caso

$$y_t \Big| = \nabla^d Y_t \quad \text{e} \quad x_t = \nabla^d X_t.$$

Seja o vetor de parâmetros desse modelo definido como  $\underline{\mu} = (\omega_0, \dots, \omega_s, \delta_1, \dots, \delta_r, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$  e seja a função de resíduos

$$a_t = a_t(\underline{\mu}) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t - \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_t,$$

que também pode ser representada por (Pierce, 1972a)

$$\begin{aligned} a_t = & - \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r \theta_i \delta_j a_{t-i-j} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \phi_i \delta_{t-i-j} - \\ & - \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^s \phi_i \omega_j x_{t-b-i-j} + \sum_{i=0}^p \phi_i \omega_0 x_{t-b-i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde

$$\delta_0 = \phi_0 = \theta_0 = -1.$$

Esta função  $a_t$  nos dará o erro para o valor previsto quando o verdadeiro valor de parâmetros  $\underline{\mu}$  é usado.

Sob a suposição de normalidade dos erros o logaritmo da função de máxima verossimilhança é dado por

$$\log L = \text{const} - \frac{1}{2} n \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum a_t^2. \quad (4.3)$$

O máximo dessa função produzirá um estimador para o vetor de parâmetros  $\underline{\mu}$  e para variância do ruído branco

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n} \sum \hat{a}_t^2$$

onde  $\{\hat{a}_t\}$  são os resíduos obtidos na equação (4.2) substituindo o vetor  $\underline{\mu}$  pelo seu valor estimado  $\hat{\underline{\mu}}$ .

O problema de maximizar a função de máxima verossimilhança (4.3) é equivalente a minimizar a soma de quadrados

$$S(\underline{\mu}) = \sum_{t=0}^n a_t^2. \quad (4.4)$$

A função dos erros  $a_t$ , dada pela equação (4.2), quando calculada para qualquer  $t$ , envolverá toda a história passada da série de tempo em estudo, mas na prática nós só temos em mãos uma amostra da mesma, isto é só conhecemos seus valores para  $t = 1, 2, \dots, n$ , e teríamos que conhecer os valores de  $x_t$  para  $t = 0, -1, \dots, -p-s+1$ , de  $y_t$  para  $t = 0, -1, \dots, -p-r+1$ , e de  $a_t$  para  $t = 0, -1, \dots, -q-r+1$ .

Temos aqui um problema: quais os valores que devemos dar a esses dados desconhecidos?

Várias sugestões são encontradas na literatura para inicializar a série. Uma das sugestões é apresentada por Box-Jenkins, 1970; esses valores iniciais são obtidos, segundo eles, pela "previsão do passado", usando para essa previsão o modelo identificado e dos valores observados. Uma outra sugestão que é feita por Pierce, 1971 é que a esses valores iniciais seja dado o valor zero. Segundo Pierce, qualquer uma destas formas de inicializar o processo tem seu efeito sob a estimação do modelo assintoticamente tendendo a zero.

Uma terceira forma de inicializar o processo é usar parte dos dados somente como valores iniciais de  $x_t$ ,  $y_t$  e  $a_t$  e transladar a origem  $t$  do ponto 1 para uma origem  $t^*$  na qual é possível conhecer através das observações, todos os valores necessários para se calcular o resíduo  $a_0$ . Segundo esse método o primeiro valor conhecido para o ruído  $n_t$  será para  $t = u+1$  onde  $u = \max(r, s+b)$ , e o primeiro valor para  $a_t$  será para  $t = u+p+1$ .

Se usarmos este último método para inicializar o processo teremos  $n-u-p-1$  pontos para estimar os parâmetros de  $\delta(B)$ ,  $\omega(B)$ ,  $\theta(B)$ ,

$\phi(B)$  e  $b$  e a soma de quadrados a ser minimizada será dada por

$$S(\underline{\mu}) = \sum_{t=u+p+1}^n a_t^2 .$$

Dado que o número de observações deve ser grande a perda desses pontos iniciais pouco influirá na estimação e ela será por nós preferida.

A função a soma de quadrados que tem que ser minimizada não é uma função linear e portanto seu mínimo tem que ser calculado por métodos não lineares; daremos a seguir o procedimento usado por Draper Smith, 1966, para esse caso.

#### 4.3. Estimação não Linear

Nosso objetivo é minimizar a função  $S(\underline{\mu})$  dada

$$S(\underline{\mu}) = \sum_{t=1}^m a_t^2$$

onde  $m = n-p-u-1$ ,  $u = \max(r, s+b)$   $n$  é o número de observações e  $p$  o grau do polinômio  $\phi(B)$  definido em (4.1).

O vetor  $\hat{\underline{\mu}}$  que minimiza  $S(\underline{\mu})$  será o estimador de máxima verossimilhança de  $\underline{\mu}$ .

Para minimizar  $S(\underline{\mu})$  basta derivá-la em  $\underline{\mu}$  e igualar a zero e teremos a seguinte equação

$$\frac{\partial S(\underline{\mu})}{\partial \underline{\mu}} = \sum_{t=1}^m a_t \frac{\partial a_t}{\partial \underline{\mu}} = 0$$

que produzirá um sistema de  $(r+s+p+q-1)$  equações normais cuja solução é o estimador de máxima verossimilhança de  $\underline{\mu}$ , mas este sistema de equações não é linear, e portanto para encontrarmos sua solução teremos que nos valer de métodos iterativos.

Seja então

$$\underline{\mu}_0 = (\omega_{0,0}, \omega_{1,0}, \dots, \omega_{s,0}, \delta_{1,0}, \dots, \delta_{r,0}, \phi_{1,0}, \dots, \phi_{p,0}, \theta_{1,0}, \dots, \theta_{q,0})$$

e sejam as derivadas parciais não negativas do resíduo em relação as componentes de  $\underline{\mu}$  e calculadas no ponto  $\underline{\mu}_0$  definidas da seguinte forma

$$d_{i,t}^{(\delta)} = - \frac{\partial a_t}{\partial \delta_i} \Big|_{\underline{\mu}_0}, i = 1, 2, \dots, r; \quad d_{j,t}^{(\omega)} = - \frac{\delta a_t}{\partial \omega_j} \Big|_{\underline{\mu}_0}, j = 0, 1, \dots, s$$

$$d_{g,t}^{(\phi)} = - \frac{\partial a_t}{\partial \phi_g} \Big|_{\underline{\mu}_0}, g = 1, \dots, p; \quad d_{h,t}^{(\theta)} = - \frac{\partial a_t}{\partial \theta_h} \Big|_{\underline{\mu}_0}, h = 1, 2, \dots, q.$$

Usando a expansão de Taylor para  $a_{t,0} = a_t(\underline{\mu}_0)$  teremos

$$a_{t,0} \cong a_t + \sum_{i=1}^r (\delta_i - \delta_{i,0}) d_{i,t}^{(\delta)} + \sum_{j=0}^s (\omega_j - \omega_{j,0}) d_{j,t}^{(\omega)} + \sum_{g=1}^p (\phi_g - \phi_{g,0}) d_{g,t}^{(\phi)} + \sum_{h=1}^q (\theta_h - \theta_{h,0}) d_{h,t}^{(\theta)}$$

e portanto o resíduo pode ser escrito como



$$a_t = a_{t,0} - \left[ \sum_{i=1}^r (\delta_i - \delta_{i,0}) d_{t,i}^{(\delta)} + \sum_{j=0}^s (\omega_j - \omega_{j,0}) d_{j,t}^{(\omega)} + \sum_{g=1}^p (\phi_g - \phi_{g,0}) d_{g,t}^{(\phi)} + \sum_{h=1}^q (\theta_h - \theta_{h,0}) d_{h,t}^{(\theta)} \right]. \quad (4.5)$$

Se denotarmos

$$\beta_{i,0} = \begin{cases} \delta_i - \delta_{i,0} & , \text{ se } i = 1, 2, \dots, r \\ \omega_{i-r-1} - \omega_{i-r-1,0} & , \text{ se } i = r+1, \dots, r+s+1 \\ \phi_{i-r-s-1} - \phi_{i-r-s-1,0} & , \text{ se } i = r+s+2, \dots, r+s+p+1 \\ \theta_{i-r-s-p-1} - \theta_{i-r-s-p-1,0} & , \text{ se } i = r+s+p+2, \dots, r+s+p+q+1 \end{cases} \quad (4.6)$$

e

$$z_{i,a_t}^{(0)} = \begin{cases} d_{i,t}^{(\delta)} & , \text{ se } i = 1, 2, \dots, r \\ d_{i-r-1,t}^{(\omega)} & , \text{ se } i = r+1, \dots, r+s+1 \\ d_{i-r-s-1,t}^{(\phi)} & , \text{ se } i = r+s+2, \dots, r+s+p+1 \\ d_{i-r-s-p-1,t}^{(\theta)} & , \text{ se } i = r+s+p+2, \dots, r+s+p+q+1, \end{cases} \quad (4.7)$$

teremos que a equação (4.5) pode ser escrita como

$$a_t \cong a_{t,0} + \sum_{i=1}^{r+s+p+q+1} \beta_{i,0} z_{i,a_t}^{(0)} + \epsilon_{a_t} \quad (4.8)$$

e portanto com essa transformação teremos o erro linearizado, podendo

agora usar a teoria dos mínimos quadrados para modelos lineares.

Se

$$\underline{Z}_0 = \begin{bmatrix} z_{1,a_0}^{(0)} & z_{2,a_0}^{(0)} & \dots & z_{l,a_0}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{1,a_k}^{(0)} & z_{2,a_k}^{(0)} & \dots & z_{l,a_k}^{(0)} \\ z_{1,a_m}^{(0)} & z_{2,a_m}^{(0)} & \dots & z_{l,a_m}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i,a_t}^{(0)} \end{bmatrix}_{m \times l}$$

$$\underline{\beta}_0 = \begin{bmatrix} \beta_{1,0} \\ \beta_{2,0} \\ \vdots \\ \beta_{l,0} \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0^{(0)} \\ a_1 - \alpha_1^{(0)} \\ \dots \\ a_m - \alpha_m^{(0)} \end{bmatrix} = \underline{A}_{\sim t} - \underline{A}_{\sim t}^{(0)}$$

onde  $l = s+r+p+q+1$ , a equação (4.8) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{A}_{\sim t} \cong \underline{A}_{\sim t}^{(0)} + \underline{Z}_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\varepsilon}_{\sim t} \quad (4.9)$$

e uma solução dessa equação é dada por

$$\hat{\underline{\beta}}_0 = (\underline{Z}_0 \underline{Z}_0')^{-1} \underline{Z}_0 (\underline{A}_{\sim t} - \underline{A}_{\sim t}^{(0)}).$$

Este vetor minimizará a soma de quadrados

$$SS(\underline{\mu}) = \sum_{t=0}^m \{a_t - a_{t,0} - \sum_{i=1}^l \hat{\beta}_{i,0} z_{i,a_t}^{(0)}\}^2 \quad (4.10)$$

com respeito a  $\beta_{i,0}$   $i = 1, 2, \dots, l$ , que dados nas equações (4.6).

Se

$$\hat{\beta}_{i,0} = \begin{cases} \delta_{i,1} - \delta_{i,0} & , \text{ se } i = 1, \dots, r \\ \omega_{i-r-1,1} - \omega_{i-r-1,0} & , \text{ se } i = r+1, \dots, r+s+1 \\ \phi_{i-r-s-1,1} - \phi_{i-r-s-1,0} & , \text{ se } i = r+s+2, \dots, r+s+p+1 \\ \theta_{i-r-s-p-1,1} - \theta_{i-r-s-p-1,0} & , \text{ se } i = r+s+p+2, \dots, r+s+p+q+1 \end{cases}$$

teremos que  $\underline{\mu}_1 = (\delta_{1,1}, \dots, \delta_{r,1}, \omega_{0,1}, \dots, \omega_{s,1}, \phi_{1,1}, \dots, \phi_{p,1}, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{q,1})$  será um novo estimador para  $\underline{\mu}$ , melhor que  $\underline{\mu}_0$ .

Observemos que há diferença entre a soma de  $S(a_t)$  dada na equação (4.4), onde o modelo não linear correto é usado e a soma de quadrado  $SS(\underline{\mu})$  da equação (4.10) onde a expressão linear do modelo foi empregada.

Essa diferença pode ser minimizada se usarmos o processo iterativo, isto é, repetirmos o procedimento substituindo na equação (4.9)  $\underline{\beta}_0$  por  $\underline{\beta}_1$ , dado por

$$\beta_{\sim 1} = \begin{cases} \delta_i - \delta_{i,1} & , \text{ se } i = 1, 2, \dots, r \\ \omega_{i-r-1} - \omega_{i-r-1,1} & , \text{ se } i = r+1, \dots, r+s+1 \\ \phi_{i-r-s-1} - \phi_{i-r-s-1,1} & , \text{ se } i = r+s+2, \dots, r+s+p+1 \\ \theta_{i-r-s-p-1} - \theta_{i-r-s-p-1,1} & , \text{ se } i = r+s+p+2, \dots, r+s+p+q+1 \end{cases}$$

e encontrarmos um novo estimador para  $\beta_{\sim 1}$  e conseqüentemente um novo estimador de  $\mu$  que será  $\mu_{\sim 2}$ , e assim sucessivamente, de forma que,

$$\mu_{\sim k+1} = \mu_k + \hat{\beta}_{\sim k}$$

ou

$$\mu_{\sim k+1} = \mu_k + (Z_k' Z_k)^{-1} Z_k' (A_{\sim t} - A_{\sim t,k})$$

onde

$$Z_k = \{Z_{i,a_t}^{(k)}\}_{m \times l}$$

$$A_{\sim t,k}' = (a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{m,k})'$$

e

$$\mu_k = (\delta_{1,k}, \dots, \delta_{r,k}, \omega_{0,k}, \dots, \omega_{s,k}, \phi_{1,k}, \dots, \phi_{p,k}, \theta_{1,k}, \dots, \theta_{q,k})' \quad (4.11).$$

Este processo iterativo continua até que a solução convirja, isto é, até que em duas iterações sucessivas  $k, k+1$

$$| \{ \delta_{i,k} - \delta_{i,k+1} \} / \delta_{i,k} | < \epsilon, \quad i = 1, \dots, r$$

$$| \{ \omega_{j,k} - \omega_{j,k+1} \} / \omega_{j,k} | < \epsilon, \quad j = 0, \dots, s$$

$$| \{ \phi_{g,k} - \phi_{g,k+1} \} / \phi_{g,k} | < \epsilon, \quad g = 1, \dots, p$$

$$| \{ \theta_{h,k} - \theta_{h,k+1} \} / \theta_{h,k} | < \epsilon, \quad h = 1, 2, \dots, q$$

onde  $\epsilon$  é algum valor prefixado, e a solução do sistema será  $\mu_k$ . A cada iteração  $SS(\mu_k)$  pode ser calculada para observarmos se houve alguma redução em seu valor.

Este procedimento de linearização pode apresentar alguns "contra tempos", tais como:

- 1) Ele pode convergir lentamente, isto significa que um grande número de iterações pode ser requerida antes que a solução se estabilize, entretanto a soma de quadrados  $S(a_{t,k})$  pode ter decrescido significativamente, conforme  $k$  cresceu. Este comportamento não é habitual, mas pode ocorrer, essa pode ser uma regra de parada para o processo iterativo.
- 2) O método pode oscilar, mudando de direção continuamente, fazendo com que a soma de quadrados ora cresça ora decresça. Algumas vezes, apesar desta instabilidade, a solução pode convergir.
- 3) O método pode não convergir, ao invés disso diverge, então a soma de quadrados cresce a cada iteração, sem limite.

Uma correção para sanar esse defeito no método foi feita por Booth & Peterson, 1958. Se

$$SS(\underline{\mu}_{k+1}) > SS(\underline{\mu}_k)$$

ou

$$SS(\underline{\mu}_{k+1}) < SS(\underline{\mu}_k),$$

três pontos são encontrados entre  $\underline{\mu}_k$  e  $\underline{\mu}_{k+1}$  os quais incluem um mínimo local para  $S(\underline{\mu})$ . Então uma quadrática é usada para localizar o mínimo e o processo iterativo é retomado com esse ponto.

#### 4.4. Distribuição dos Estimadores

As propriedades dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros do modelo (4.1), quando o número de observações é grande, podem ser resumidos no teorema que daremos a seguir e que foi apresentado por Pierce, 1972a.

*Teorema 4.1.* Se no modelo

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

tivermos:

- a) os  $\{a_t\}$  independentes e identicamente distribuídos com zero, variância  $\sigma^2$  e coeficientes de assimetria  $k_1$  e de curtose  $k_2$ ;
- b) os valores dos parâmetros admissíveis;

c) os  $\{x_t\}$  são limitados, e para um valor fixo  $d$  a matriz  $\{(1/n) \gamma_{xxx}(j-i)\}$  de ordem  $d \times d$  é limitada positiva definida; então os estimadores  $\hat{\underline{v}} = (\hat{\underline{\delta}}, \hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\phi}}, \hat{\underline{\theta}}, \sigma^2)$  calculados na secção 4.2 possuem distribuição limite normal com média  $\underline{\mu}$  e tal que os seguintes resultados são válidos

i) a matriz de covariância assintótica dos estimadores  $\hat{\underline{\beta}} = (\hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\delta}})$ , dos parâmetros do modelo dinâmico, é da forma

$$\frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{F} \\ \underline{F}' & \underline{G} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \text{plim} \{(1/n) \sum b_{t-i} b_{t-j}\} \\ \underline{G} &= \text{plim} \{(1/n) \sum d_{t-i} d_{t-j}\} \\ \underline{F} &= \text{plim} \{(1/n) \sum b_{t-i} d_{t-j}\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

são matrizes de ordem  $(s+1) \times (s+1)$ ,  $r \times r$  e  $(s+1) \times r$ , respectivamente, e cujas quantidades  $b_{t-j}$  e  $d_{t-j}$  são dadas por

$$b_{t-j} = - \frac{\phi(B)}{\theta(B) \delta(B)} x_{t-j}, \quad d_{t-j} = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} b_{t-j}. \quad (4.14)$$

ii) Os estimadores  $\hat{\underline{\eta}} = (\hat{\underline{\phi}}, \hat{\underline{\theta}})$  dos parâmetros do modelo do ruído, são assintoticamente independentes de  $\hat{\underline{\beta}}$  com matriz de covariância da forma

$$\frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{C}} & \underline{\tilde{E}} \\ \underline{\tilde{E}'} & \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.15)$$

onde  $\underline{\tilde{C}} = \{\zeta_{(i-j)}\}$ ,  $\underline{\tilde{D}} = \{\alpha_{(i-j)}\}$  e  $\underline{\tilde{E}} = \{x_{(i-j)}\}$  são matrizes de ordem  $p \times p$ ,  $q \times q$  e  $p \times q$ , respectivamente, e cujos elementos são dados por

$$\zeta_k = E \{u_t, u_{t+k}\} \quad \alpha_k = E \{v_t, v_{t+k}\} \quad \text{e} \quad x_k = E \{u_t, v_{t+k}\}$$

$$u_t = \phi^{-1}(B) a_t \quad \text{e} \quad v_t = -\theta^{-1}(B) a_t.$$

iii) O estimador  $\tilde{\sigma}^2$  tem variância assintótica  $(2\sigma^4/n) \left(1 + 1/2k_2\right)$  e se  $k_2 = 0$  é independente de todos os estimadores anteriores.

A demonstração do item (a) desse teorema pode ser encontrada em Pierce, 1972a e dos itens (b) e (c) em Pierce, 1971.

Este teorema nos será útil para conhecermos um estimador da matriz de covariância do estimador de  $\underline{v} = (\underline{\delta}, \underline{\omega}, \underline{\phi}, \underline{\theta}, \sigma^2)$ .

Sabendo que a matriz de covariância dos estimadores  $\hat{\underline{\beta}} = (\hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\delta}})$  é dada por

$$\gamma_{\hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\delta}}} = \frac{\sigma^2}{n} \left[ \begin{array}{cc} \text{plim} \{1/n \sum b_{t-i} b_{t-j}\} & \text{plim} \{1/n \sum b_{t-i} d_{t-j}\} \\ \text{plim} \{1/n \sum b_{t-i} d_{t-j}\} & \text{plim} \{1/n \sum d_{t-i} d_{t-j}\} \end{array} \right]^{-1}$$

um estimador consistente de  $\gamma_{\hat{\underline{\omega}}, \hat{\underline{\delta}}}$  será dado por



$$Y_{\omega, \delta} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} \{1/n \sum \hat{b}_{t-i} \hat{b}_{t-j}\} & \{1/n \sum \hat{b}_{t-i} \hat{d}_{t-j}\} \\ \{1/n \sum \hat{b}_{t-i} \hat{d}_{t-j}\} & \{1/n \sum \hat{d}_{t-i} \hat{d}_{t-j}\} \end{bmatrix}^{-1}$$

Observemos que

$$b_{t-k} = \frac{\partial a_t}{\partial \omega_k}$$

De fato, usando (4.2) temos que

$$\frac{\partial a_t}{\partial \omega_k} = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r \theta_i \delta_j \frac{\partial a_{t-i-j}}{\partial \omega_k} - \sum_{i=0}^s \phi_i x_{t-b-i-k}$$

e

$$\sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^r \theta_i \delta_j \frac{\partial a_{t-i-j}}{\partial \omega_k} = - \sum_{i=0}^s \phi_i x_{t-i-k}$$

assim

$$\theta(B) \delta(B) \frac{\partial a_t}{\partial \omega_k} = - \phi(B) x_{t-b-k} \quad (4.16)$$

Comparando esta igualdade com as equações (4.14) chegamos a conclusão que

$$b_{t-j} = \frac{\partial a_t}{\partial \omega_j}$$

Analogamente pode se demonstrar que

$$d_{t-j} = \frac{\partial a_t}{\partial \delta_j}$$

Como o logaritmo da função de máxima verossimilhança é dado

por

$$\log L = \text{const} - \frac{1}{2} n \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum a_t^2,$$

derivando-a em relação a  $\omega_j$ , temos que

$$\frac{\partial \log L}{\partial \omega_j} = \frac{1}{2\sigma^2} 2 \sum a_t \frac{\partial a_t}{\partial \omega_j}.$$

Usando a equação (4.16) temos

$$\frac{\partial \log L}{\partial \omega_j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum a_t b_{t-j}$$

e derivando novamente em relação a  $\omega_i$ , temos que

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_j \partial \omega_i} = - \frac{1}{\sigma^2} \sum b_{t-j} b_{t-i}.$$

Dividindo por  $n$  ambos os membros dessa equação teremos

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_j \partial \omega_i} = - \frac{1}{n \sigma^2} \sum b_{t-j} b_{t-i},$$

e assim um estimador da matriz  $B$  é dado por

$$\hat{B} = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_j \partial \omega_i} \Bigg|_{\underline{v} = \hat{v}}.$$

Analogamente, concluiremos que

$$- \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{1}{n \sigma^2} \sum d_{t-i} d_{t-j}$$

e que

$$-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_i \partial \delta_j} = \frac{1}{n \sigma^2} \sum b_{t-i} d_{t-j}$$

e portanto um estimador da matriz de covariância  $\hat{\gamma}_{\hat{\omega}, \hat{\delta}}$  é dado por

$$\hat{\gamma}_{\hat{\omega}, \hat{\delta}} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_j \partial \omega_i} \Big|_{\underline{v}=\hat{v}} \right\} & \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_i \partial \delta_j} \Big|_{\underline{v}=\hat{v}} \right\} \\ \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \delta_i \partial \omega_j} \Big|_{\underline{v}=\hat{v}} \right\} & \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \Big|_{\underline{v}=\hat{v}} \right\} \end{bmatrix}^{-1}$$

Sabemos que a matriz de covariância de  $\eta = (\hat{\phi}, \hat{\theta})$ , de ordem  $(p+q) \times (p+q)$ , é dada por

$$\hat{\gamma}_{\hat{\phi}, \hat{\theta}} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{bmatrix} \{E(u_t | u_{t+(i-j)})\} & \{E(u_t | v_{t+i-j})\} \\ \{E(u_t | v_{t+j-i})\} & \{E(v_t | v_{t+(i-j)})\} \end{bmatrix}^{-1}$$

onde

$$u_t = \phi^{-1}(B) a_t \quad \text{e} \quad v_t = -\theta^{-1}(B) a_t.$$

Um estimador dessa matriz será dado pela substituição de suas matrizes componentes por estimadores destas.

Então um desenvolvimento análogo ao feito para matriz de covariância dos estimadores  $\hat{\beta} = (\hat{\delta}, \hat{\omega})$  pode ser aplicado aqui.

Assim, um estimador para  $\gamma_{\hat{\phi}, \hat{\theta}}$  será dado pela matriz

$$\hat{\gamma}_{\hat{\phi}, \hat{\theta}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{E}' \\ \hat{E}' & \hat{D} \end{bmatrix}^{-1} \cdot 0$$

Então (Pierce, 1971a) pode se demonstrar que

$$-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_j \partial \phi_i} = \frac{1}{n \sigma^2} \Sigma u_{t-i} u_{t-j} \quad (4.17)$$

e a matriz derivada do segundo membro da equação (4.17) converge estocasticamente para  $\sigma^{-2} \underline{C}$  e dessa forma um estimador da matriz  $\underline{C}$  será

$$\hat{\underline{C}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \Big|_{\underline{v} = \hat{\underline{v}}}$$

e mais, como a matriz

$$\left\{ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} = \left\{ \frac{1}{n \sigma^2} \Sigma v_{t-j} v_{t-i} \right\}$$

converge em probabilidade para  $\sigma^2 \underline{D}$  temos que um estimador da matriz  $\underline{D}$  será dado por

$$\hat{\underline{D}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\underline{v} = \hat{\underline{v}}} \right\}.$$

Finalmente, temos que a matriz

$$\left\{ -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_j \partial \theta_i} \right\} = \left\{ \frac{1}{n \sigma^2} (\Sigma u_{t-j} v_{t-i} + \Sigma a_t \frac{\partial a_t^2}{\partial \phi_j \partial \theta_i}) \right\}.$$

converge em probabilidade para a matriz  $\sigma^{-2} \underline{E}$  e portanto um estimador de  $\underline{E}$  será dado por

$$\hat{E} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \left\{ - \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_j \partial \theta_i} \left|_{\underline{v} = \underline{\hat{v}}} \right. \right\}.$$

Podemos concluir agora que um estimador da matriz de covariância dos estimadores de  $\underline{\eta} = (\underline{\phi}, \underline{\theta})$  será dado por

$$\hat{Y}_{\underline{\phi}, \underline{\theta}} = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \left|_{\underline{v} = \underline{\hat{v}}} \right. \right\} & \left\{ - \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_i \partial \theta_j} \left|_{\underline{v} = \underline{\hat{v}}} \right. \right\} \\ \left\{ - \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i \partial \phi_j} \left|_{\underline{v} = \underline{\hat{v}}} \right. \right\} & \left\{ - \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \left|_{\underline{v} = \underline{\hat{v}}} \right. \right\} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Como o estimador de  $\sigma^2$  produzido pela equação de mínimos quadrados é dado por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum a_t^2$$

temos que um estimador de sua variância é dado por

$$\widehat{Var} \hat{\sigma}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum \hat{a}_t^2 \right)^2 \cdot \frac{2}{n} \left( 1 + \frac{1}{2} K_2 \right).$$

Se  $a_t$  tem distribuição normal,  $K_2 = 3$ , e teremos que

$$\widehat{Var} (\hat{\sigma}^2) = \left( \frac{1}{n} \sum \hat{a}_t^2 \right)^2 \frac{5}{n}.$$

Podemos agora afirmar que um estimador da matriz de covariância do estimador  $\underline{\hat{v}}$  será dado pela fórmula (4,18), e com a hipótese de normalidade sob os resíduos podemos calcular os intervalos de confiança para os componentes de  $\underline{\hat{v}} = (\hat{\omega}, \hat{\delta}, \hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ .

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_v = & \left[ \begin{array}{cccc}
 \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \omega_i \partial \delta_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & 0 & 0 \\
 \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \delta_i \partial \omega_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & 0 & 0 \\
 \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \phi_i \partial \theta_j} \right\}_{v \neq \tilde{v}} & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\}^{-1} & 0 \\
 \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & \left\{ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}_{v=\tilde{v}} & \left. \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right\}^{-1} & 0
 \end{array} \right] \frac{5}{n^3} (\sum \alpha_t^2)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

## CAPÍTULO V

### VERIFICAÇÃO DO MODELO

#### 5.1. Introdução

Dado que o modelo já foi identificado como sendo

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (5.1)$$

e que os parâmetros dos operadores  $\omega(B)$ ,  $\delta(B)$ ,  $\theta(B)$ ,  $\phi(B)$  e o parâmetro  $b$  foram estimados através do método de mínimos quadrados não linear, resta-nos verificar se o modelo foi identificado corretamente ou se será necessário acrescentar ou retirar algum parâmetro. Para efetuar essa verificação usaremos o resíduo, o qual o modelo não conseguiu explicar.

#### 5.2. Resíduo e suas Funções de Autocorrelação e Correlação Cruzada

Se a saída pode ser escrita por uma equação da forma de (5.1), temos que a estimativa da saída será dada por

$$\hat{y}_t = \frac{(\hat{\omega}_0 - \hat{\omega}_1 B - \dots - \hat{\omega}_s B^s)}{(1 - \hat{\delta}_1 B - \dots - \hat{\delta}_r B^r)} \cdot x_{t-b} +$$

$$+ \frac{(1 - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \dots - \hat{\theta}_q B^q)}{(1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \dots - \hat{\phi}_p B^p)} a_t \quad (5.2)$$

e portanto o resíduo será estimado por

$$\hat{a}_t = y_t - \hat{y}_t,$$

ou seja,

$$\hat{a}_t = y_t - \frac{(\hat{\omega}_0 - \hat{\omega}_1 B - \dots - \hat{\omega}_s B^s)}{(1 - \hat{\delta}_1 B - \dots - \hat{\delta}_r B^r)} x_{t-b} - \frac{(1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q)}{(1 - \hat{\phi}_1 B - \dots - \hat{\phi}_p B^p)} a_t. \quad (5.3)$$

Um estimador para a autocorrelação do resíduo será (Pierce, 1972b) dado por

$$r_{\hat{a}\hat{a}}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^m \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum_{t=1}^m \hat{a}_t^2}, \quad (5.4)$$

onde  $m$  é igual ao número de observações, se supusermos que os valores iniciais de  $\hat{a}_t$  são zeros ou será dado pelo número de observações menos o  $\max(r, s+b)$  menos  $(p+1)$ , se usarmos os valores iniciais observados para estimarmos os valores de  $\hat{a}_t$ .

Temos que (Pierce, 1972b)  $\hat{a}_t \xrightarrow{P} a_t$ , para todo  $t$ , quando o número de observações,  $n$ , tende para infinito.

Assim, usando a suposição que, se o número de observações é



grande, a distribuição de  $r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$  é aproximadamente a mesma da  $r_{aa}(k)$ , faremos uma análise sobre a função de autocorrelação estimada do resíduo.

*Teorema 5.1.* (Box-Pierce, 1970): Se o modelo (5.1) é apropriado para explicar o processo e se os  $a_t$ 's de uma particular série amostral são calculados usando os verdadeiros valores dos parâmetros, e portanto esses  $a_t$ 's não são correlacionados, temos que suas  $K$  primeiras autocorrelações amostrais,  $\underline{r} = (r_{aa}(1), r_{aa}(2), \dots, r_{aa}(K))$ , com  $K$  pequeno em relação a  $m$  e

$$r_{aa}(k) = \frac{\sum a_t a_{t-k}}{\sum a_t^2}, \quad (5.5)$$

terão uma distribuição multinormal quando  $m$  é grande.

Além disso, os  $r_{aa}(k)$  são não correlacionados e têm variância dada por

$$V [ r_{aa}(k) ] = \frac{m-k}{m(m+2)} \approx 1/m. \quad (5.6)$$

Deste teorema segue que a estatística

$$Q = m(m+2) \sum_{k=1}^K (m-k)^{-1} r_{aa}^2(k), \quad (5.7)$$

para  $m$  grande, tem distribuição  $\chi^2$  com  $K$  graus liberdade, ou usando uma aproximação mais conveniente,

$$Q = m \sum_{k=1}^K r_{aa}^2(k) \sim \chi_K^2.$$

Observemos que para calcularmos  $\hat{r}$  usamos os verdadeiros valores dos parâmetros, os quais na realidade não conhecemos e temos que estimá-los.

Assim se tivermos que estimar o resíduo através de um modelo *ARIMA* ( $p, d, q$ ) estimado teremos que a estatística

$$Q = m \sum_{k=1}^K \frac{\hat{r}_{aa}^2(k)}{\hat{\sigma}_{aa}^2} \quad (5.8)$$

tem distribuição  $\chi^2$  com  $\nu$  graus de liberdade onde  $\nu = K-p-q$  (Box-Pierce, 1970).

Assim, através desta estatística, poderemos testar se a autocorrelação residual é zero ou não. Discutiremos o significado da existência da autocorrelação na seção seguinte.

### Correlação Cruzada entre o Resíduo e a Entrada

A correlação cruzada entre a entrada e o resíduo pode ser diferente de zero sem que isso indique que o modelo ajustado esteja incorreto, pois usando a expressão (3.8) temos que:

$$\rho[r_{xa}(k), r_{xa}(k+l)] \approx \rho_{xx}(l)$$

e portanto, mesmo que o modelo esteja correto, ainda existe correlação cruzada entre a entrada e o resíduo. Isso porque para um dado par de séries, há relações entre séries e relação dentro de cada série, em particular, o pré-branqueamento da série de entrada faz com que esses valores não sejam correlacionados. Por isso estudaremos a correlação

cruzada entre a entrada pré branqueada e o resíduo.

Faremos inicialmente algumas restrições sobre a entrada para entendermos melhor o modelo (5.1), e a seguir, generalizaremos os resultados obtidos.

Suponhamos então que a entrada seja um ruído branco,  $\alpha_t$ ; assim, a equação (5.1) transforma-se em

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \alpha_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \alpha_t, \quad (5.9)$$

e consideremos a correlação cruzada entre o resíduo e a entrada,

$$\hat{r}_{\alpha\alpha}(k) = \sum \alpha_{t-k} \hat{a}_t / (\sum \alpha_t^2 \sum \hat{a}_t^2)^{1/2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, u, \quad (5.10)$$

onde  $u$  é pequeno em relação ao número de observações.

**Teorema 5.2.** (Pierce, 1972b): Temos que as  $(u+1)$  primeiras correlações cruzadas amostrais entre o resíduo e a entrada

$$\hat{\tilde{r}}_{\alpha\alpha}^* = (\hat{r}_{\alpha\alpha}^*(0), \hat{r}_{\alpha\alpha}^*(1), \dots, \hat{r}_{\alpha\alpha}^*(u)),$$

têm distribuição multinormal quando o número de observações tende a infinito, com média zero e matriz de covariâncias  $\tilde{\Sigma}$  dada por

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{m} [ \tilde{I} - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}' ]$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & X_0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1 & 1 & \dots & 0 & X_1 & X_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & X_0 \\ \xi_\mu & \xi_{\mu-1} & \dots & \xi_{\mu-r} & X_\mu & X_{\mu-1} & \dots & X_{\mu-r+1} \end{bmatrix} \cdot \quad (u+1) \times (u+r+1)$$

Aqui,

$$\xi_0 + \xi_1 B + \dots = \xi(B) = \phi(B) / \theta(B) \delta(B) \quad (5.12)$$

e

$$X_0 + X_1 B + \dots = \chi(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \cdot \xi(B) = \frac{\omega(B) \phi(B)}{\delta^2(B) \theta(B)} \quad (5.13)$$

A matriz  $\Sigma$  é singular, seu posto é  $u-s-r$ , e idempotente. Da do que se conhece a distribuição de  $\hat{r}^*$ , podemos construir testes para testar se as componentes desse valor são zero ou não, se a entrada for um ruído branco.

Infelizmente, nem sempre a entrada pode ser controlada de tal forma a ser um ruído branco, mas pode ser transformado nele.

Seja  $\alpha_t$  a entrada pré branqueada; então teremos que

$$\phi_x(B) \cdot x_t = \theta_x(B) \alpha_t \quad (5.14)$$

onde  $\phi_x(B)$  e  $\theta_x(B)$  são polinômios de graus  $p_x$  e  $q_x$  respectivamente. Se ja então

$$T(B) = \phi_x(B) \cdot \theta_x^{-1}(B). \quad (5.15)$$

É possível demonstrar que (Pierce, 1972)

$$\hat{r}_{\alpha\hat{a}}(k) \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_\alpha} \left| T(F) \hat{r}_{x\hat{a}}(k), \quad (5.16)$$

onde  $F = B^{-1}$ , é o operador avanço, tal que  $F\{\hat{r}_{x\hat{a}}(k)\} = \hat{r}_{x\hat{a}}(k+1)$  e a distribuição de  $\hat{r}_{\alpha\hat{a}}(k)$  já é conhecida.

Assim, para uma escolha adequada de  $u$  e um número de observação grande e matriz de covariâncias  $\Sigma = \frac{1}{m}[I - X(X'X)^{-1}X']$  do vetor  $\sqrt{m} \hat{r}^*$  é idempotente e de posto  $u-s-r$ , e portanto a estatística

$$S = m \sum_{k=0}^u r_{\alpha\hat{a}}^2(k), \quad (5.17)$$

tem distribuição aproximada  $\chi^2$  com  $u-s-r$  graus de liberdade (Pierce, 1972b).

Poderemos assim verificar se a correlação cruzada entre a entrada e o resíduo é nula para os  $(u+1)$  primeiros "lags".

### 5.3. Verificação do Modelo

Suponhamos que o modelo identificado seja da seguinte forma

$$y_t = v^*(B) x_t + \psi^*(B) a_t^* \quad (5.18)$$

e que o modelo correto seja dado por

$$y_t = v(B) x_t + \psi(B) a_t \quad (5.19)$$

Teremos que o resíduo será dado por

$$a_t^* = \psi^{*-1}(B) \{v(B) - v^*(B)\} x_t + \psi^{*-1}(B) \psi(B) a_t. \quad (5.20)$$

Se o modelo estiver totalmente incorreto tanto a função de autocorrelação residual como a função de correlação cruzada entre a entrada pré-branqueada e o resíduo serão diferentes de zero. Observemos o que acontece em cada caso em particular:

1) Supondo que a função resposta de impulso tenha sido identificada corretamente, teremos então que

$$v^*(B) = v(B)$$

e portanto

$$a_t^* = \psi^{*-1}(B) \psi(B) a_t, \quad (5.21)$$

o que implicará que o resíduo não será correlacionado com a entrada pré-branqueada  $a_t$ , mas a autocorrelação residual será diferente de zero. Uma análise feita sobre esta autocorrelação diferente de zero nos permitirá fazer alterações no modelo do ruído, já que este é uma série univariada. Sugestões de mudanças do modelo do ruído podem ser encontradas no capítulo 5 de Nelson, 1972.

2) Suponhamos que o ruído foi identificado corretamente, mas a função resposta de impulso não o foi; teremos então

$$a_t^* = \psi^{*-1}(B) \{v(B) - v^*(B)\} x_t + a_t. \quad (5.22)$$

Neste caso teremos correlação cruzada entre a entrada  $x_t$  e o resíduo  $a_t^*$ , e mais, teremos também autocorrelação no resíduo.

Por existir autocorrelação residual fica difícil sabermos se o erro do modelo está só na função resposta de impulso. Então, por isso, passaremos para o caso seguinte, onde tentaremos fazer uma correção na função resposta de impulso, para depois verificarmos se o modelo do ruído está correto.

3) Suponhamos que nem o modelo do ruído nem da função resposta de impulso foi identificado corretamente. Teremos, então, que

$$a_t^* = \psi^{*-1}(B) \{v(B) - v^*(B)\} x_t + \psi^{*-1} \psi(B) a_t. \quad (5.23)$$

Teremos, como no caso anterior, correlação cruzada entre a entrada  $x_t$  e o resíduo  $a_t^*$  e autocorrelação entre os resíduos, mas observemos o seguinte.

Seja a entrada pré-branqueada  $\alpha_t$ , como em (5.14) e  $T(B)$ , como em (5.15) e sejam os seguintes processos

$$\beta_t = T(B) y_t \quad (5.24)$$

e

$$\varepsilon_t = T(B) a_t. \quad (5.25)$$

Teremos, então,

$$\beta_t = v^*(B) \alpha_t + \epsilon_t^*$$

ou

$$\epsilon_t^* = \beta_t - v^*(B) \alpha_t. \tag{5.26}$$

Isto indicará que há correlação cruzada entre  $\alpha_t$  e  $\epsilon_t^*$ , e se multiplicarmos a expressão (5.26) por  $\alpha_{t-k}$  e calcularmos a esperança da expressão obtida teremos

$$\gamma_{\alpha\epsilon^*}(k) = \gamma_{\alpha\beta}(k) - v_k^* \sigma_\alpha^2. \tag{5.27}$$

Usando a equação (3.16) temos

$$\gamma_{\alpha\beta}(k) = v_k \sigma_\alpha^2,$$

portanto uma medida da diferença entre a função resposta de impulso estimada e a verdadeira é dada por

$$v_k - v_k^* = \rho_{\alpha\epsilon^*}(k) \sigma_{\epsilon^*} / \sigma_\alpha \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.28}$$

Substituindo na equação (5.28)  $\rho_{\alpha\epsilon^*}(k)$  por seu valor estimado  $r_{\alpha\epsilon^*}(k)$  teremos novos valores preliminares para a função resposta de impulso, os quais poderiam sugerir-nos uma nova função de transferência. Depois de feita essa nova identificação é que nos preocuparemos com o ruído, pois pode acontecer que somente a correção da função de transferência seja suficiente para tornar o modelo satisfatório. Se não o for, voltaremos para o item 1 e tentaremos identificar um novo modelo para o ruído.



#### 5.4. Teste para Verificação da Significância ou não das Funções de Autocorrelação do Resíduo e da Função de Correlação Cruzada entre o Resíduo e a Entrada

Na secção anterior apresentamos tres casos de erros possíveis de se cometer na identificação do modelo da função de transferência e que podem ser detectadas através da função de autocorrelação residual e da função de correlação cruzada. Precisamos verificar se elas são realmente zero ou não. A técnica usada para isso se desenvolverá em cinco passos.

1) - Se encontramos que a autocorrelação residual é diferente de zero, isto nos indicará que pode haver erro na identificação do modelo do ruído ou mais na identificação da função de transferência.

2) - Observaremos a função de correlação cruzada entre o ruído e a entrada. Se ela não for significativa, é porque o erro está na identificação do ruído e nos preocupamos só com ele.

Assim se pela equação (5.18) temos

$$n_t = \psi^*(B) a_t^*$$

e ainda pela equação (5.21) temos

$$a_t^* = U(B) a_t$$

onde

$$U(B) = \psi^{*-1}(B) \psi(B),$$

ficamos com .

$$n_t = U(B) \psi^*(B) a_t .$$

Isto nos indica que alguma modificação deve ser feita no modelo do ruído; essa modificação pode ser sugerida pelo próprio resíduo, usando as técnicas, por exemplo, encontradas no capítulo 8 de Box-Jenkins, 1970.

3) Para se verificar se a autocorrelação residual é significativa ou não, não basta compará-la com sua variância, pois suas propriedades estatísticas são boas quando se usam os verdadeiros valores dos parâmetros, mas estão comprometidos para os "lags" baixos quando são usados os estimadores dos parâmetros. Assim, deve-se calcular a estatística apresentada em (5.8) e compará-la com  $\chi^2$  com  $(K-p-q)$  graus de liberdade onde  $K$  é tal que  $\psi_j$  para  $j > K$  tende obrigatoriamente a zero, e portanto os  $r_{\hat{a}\hat{a}}(j)$  para  $j > K$ , também. Esta estatística é mais estável que a variância da autocorrelação residual estimada.

4) Para se verificar se a correlação cruzada entre o ruído e a entrada pré-branqueada é zero ou não, não basta compará-la com sua variância, pois como vimos na seção 5.1, elas são correlacionadas, mesmo no caso em que a entrada é o ruído branco. Da mesma forma que no passo anterior, deve-se calcular a estatística  $S$  apresentada em (5.17) e compará-la com  $\chi^2$  com  $(K+1) - (r+s+1)$  graus de liberdade onde  $K$  é o mesmo do passo anterior.

5) Se, finalmente, observarmos que a função de correlação cruzada en

tre o resíduo e a entrada pré-branqueada é diferente de zero isto poderá nos sugerir mudanças na função de transferência usando as sugestões apresentadas na seção 5.2.

Teremos, aqui, que tomar algum cuidado, pois a correlação cruzada entre o ruído e a entrada pode ser proveniente somente do fato de termos uma entrada autocorrelacionada; basta tomar a expressão (5.8) para o caso em que  $y_t = a_t$  e teremos então

$$\rho [ r_{xa}(k), r_{xa}(k+l) ] \equiv \rho_{aa}(l).$$

Esta coincidência desaparece quando substituimos a entrada pela entrada pré-branqueada; é por isso que nós não nos preocupamos com a significância ou não da função de correlação cruzada entre a entrada e o resíduo, e sim com a correlação entre o resíduo e entrada pré-branqueada.

Observemos que quando a correlação cruzada entre o resíduo e a entrada pré-branqueada é diferente de zero, nós podemos ter erro na função de transferência somente, ou nela e no modelo do ruído. O que deve ser feito neste caso é, primeiro, uma modificação na função de transferência e depois, somente se necessário, no modelo do ruído.

### 5.5. Conclusão

Na seção anterior apresentamos a maneira de verificarmos se o modelo está correto ou não, se a ele devem ou não ser acrescentados parâmetros no modelo do ruído e na função de transferência. Mas não

foi feita nenhuma sugestão se devemos reduzir o número de parâmetros destas funções. Estas sugestões serão feitas pelos intervalos de confiança dos parâmetros estimados; se estes intervalos sugerirem que algum parâmetro é zero este deve ser eliminado do modelo.

Toda a verificação feita sobre o modelo identificado foi feito supondo independência entre a entrada do processo e o ruído do mesmo. Quando essa suposição é violada, os testes usados na verificação perdem muito do seu poder.

Keviczky, 1975, faz sugestões no planejamento do experimento para que essa suposição não seja violada.

## CAPÍTULO VI

### ESTIMAÇÃO NO DOMÍNIO DE FREQUÊNCIA

#### 6.1. Introdução

O modelo que empregamos nos capítulos anteriores, para explicarmos um sistema dinâmico, com uma entrada  $X_t$  e uma saída  $Y_t$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , no caso contínuo, foram construídos no domínio do tempo. Os estimadores dos parâmetros desse tipo de modelo têm propriedades estatísticas não muito boas e são altamente correlacionadas.

Para contornar este problema o modelo pode ser construído no domínio da frequência, pois neste caso o problema de correlação serial é eliminado, os componentes são ortogonais. Além disso, os parâmetros estimados no domínio da frequência podem ser transformados para o domínio do tempo.

A estimação dos parâmetros, no domínio da frequência, é feita usando o espectro da série de entrada e o espectro cruzado entre a série de entrada e a série de saída. Daremos agora algumas definições que nos serão úteis para descrever o modelo no domínio da frequência.

## 6.2. Transformada de Fourier

*Definição 6.1.* Seja  $x(t)$  uma função definida em  $\mathbb{R}$ , periódica de período  $T$ . A série trigonométrica

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{i2\pi mt/T} \quad (6.1)$$

é a série de Fourier de  $x(t)$  se os seus coeficientes são dados pela fórmula

$$X_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi mt/T} dt, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \quad (6.2)$$

Estes coeficientes são as transformadas de Fourier finitas da função  $x(t)$ , e as frequências  $2\pi m/T$  são conhecidas como frequências harmônicas e são denotadas por  $\omega_m$ .

*Teorema 6.1.* Se a função  $x(t)$  é seccionalmente contínua no intervalo  $(0, T)$  e periódica de período  $T$  então  $\tilde{x}(t)$  converge para o valor  $\frac{1}{2} [x(t_+) + x(t_-)]$ , com  $-\infty < t < \infty$ , para todo  $t$  onde  $x(t)$  tem derivada à direita e à esquerda.

A demonstração desse teorema encontra-se em Churchill, 1963, pg. 90/91.

Se a série de Fourier de  $x(t)$  converge para  $x(t)$  escrevemos

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{i2\pi mt/T}$$

caso contrário escreveremos

$$x(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{i2\pi mt/T}.$$

Podemos reescrever a expressão (6.1) da seguinte forma:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (T X_m) e^{-im2\pi t/T} \cdot \frac{1}{T}. \quad (6.2)$$

À medida que  $T \rightarrow \infty$ ,  $m/T$  tende para  $f$  e  $1/T$  para  $df$  então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (T X_m) = X(f). \quad (6.3)$$

Portanto,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (6.4)$$

e a expressão (6.2) fica

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi ft/T} df, \quad (6.5)$$

Usando o teorema 6.1 teremos que

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-i2\pi ft}. \quad (6.6)$$

As relações (6.4) e (6.6) definem a transformada de Fourier e sua inversa respectivamente.

Para funções  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e de  $L_1$  temos algumas propriedades que são válidas para sua transformada de Fourier e que enunciaremos a seguir mas não as demonstraremos; estas demonstrações podem ser encontradas

tradas em Figueiredo, 1977.

- i)  $X(\cdot)$  é contínua
- ii)  $\lim_{f \rightarrow \infty} X(f) = 0$
- iii) se indicamos

$$X(f) = F[x](f)$$

o operador  $F$  é um operador linear, no sentido que

$$F[\alpha x + \beta y] = \alpha F[x] + \beta F[y]$$

para  $x$  e  $y$  funções de  $L_1$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  complexos

- iv) Se  $x$  e  $y$  são de  $L_1$ , contínuas e limitadas em  $\mathbb{R}$  então para a convolução de  $x$  e  $y$ , definida por

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s) y(s) ds \tag{6.7}$$

temos

$$F[x * y] = F[x] F[y] \tag{6.8}$$

Definimos a transformada de Fourier e sua inversa para o caso de funções de  $L_1$ , mas essa definição pode ser estendida para outras classes de funções. A tabela 6.1 fornece um sumário das transformadas de Fourier e sua inversa para os casos de nosso interesse.



TABELA 6.1

## Sumário de Transformadas de Fourier

FUNÇÃO	DOMÍNIO DA FUNÇÃO	TRANSFORMADA DE FOURIER	TRANSFORMADA INVERSA
Sequência finita, $x_n$	$-(N-1), \dots, 0, \dots, N$	$c_k = \frac{1}{2N} \sum_{n=-(N-1)}^N x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$ $k = -(N-1), \dots, 0, \dots, N.$	$X_n = \sum_{k=-(N-1)}^N c_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn}$ $n = -(N-1), \dots, 0, \dots, N$ pode ser estendida a $n = 0, \pm 1, \dots$
Sequência infinita, $x_n$ , absolutamente somável.	$0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n x_n e^{-i\omega n}$ $-\pi < \omega < \pi$ , periódica de período $2\pi$ .	$x_n = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
$x(t)$ contínua, seccionalmente lisa.	$[-\pi, \pi]$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} dt,$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$x(t) = \sum_k c_k e^{ikt},$ $t \in [-\pi, \pi]$ , pode ser estendida como uma função periódica de $\mathbb{R}$
$x(t)$ contínua, seccionalmente lisa, período $T$ .	$[-T/2, T/2]$ pode ser estendida a $\mathbb{R}$ .	$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi kt/T} dt,$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$x(t) = \sum_k c_k e^{i2\pi kt/T}$ $-T/2 \leq t \leq T/2$ , pode ser estendida a $\mathbb{R}$ .
$x(t)$ de $L_1(\mathbb{R})$ .	$\mathbb{R}$	$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$ $-\infty < \omega < +\infty$	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $-\infty < t < +\infty$

Fonte: Fuller, 1976.

### 6.3. O Espectro de um Processo Estocástico Estacionário

Na análise espectral, a característica fundamental é o espectro, que é a transformada de Fourier da função de autocovariância. Logo sob o ponto de vista da quantidade de informação probabilística que fornecem o espectro e a função de autocovariância são ferramentas equivalentes (Morettin, 1979).

Seja  $X(t)$ , um processo estocástico estacionário com média  $\mu_X$  e função de autocovariância  $\gamma_{XX}(u)$ . Sejam  $x(1), x(2), \dots, x(T)$  observações desse processo; temos que um estimador de função de autocovariância do processo é

$$c_{xx}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|u|} (x(t) - \bar{x})(x(t+|u|) - \bar{x}) dt, & 0 \leq |u| \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.9)$$

se o processo é contínuo e

$$c_{xx}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|u|} (x(t) - \bar{x})(x(t+|u|) - \bar{x}), & 0 \leq |u| \leq T-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.10)$$

se o processo é discreto.

Suporemos ainda, que uma condição de independência assintótica esteja satisfeita, no sentido que valores do processo bastante separados no tempo sejam pouco dependentes.

Esta condição é expressa por

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} | \gamma_{XX}(u) | < \infty \quad (6.11a)$$

no caso discreto e por

$$\int_{-\infty}^{\infty} | \gamma_{XX}(u) | du < \infty \quad (6.11b)$$

no caso contínuo, ou seja  $\gamma_{XX}(u) \rightarrow 0$  quando  $|u| \rightarrow \infty$ . Nestas condições o espectro de  $X(t)$  é definido como a transformada de Fourier de  $\gamma_{XX}(u)$ , ou seja,

$$\Gamma_{XX}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(u) e^{-i2\pi fu}, \quad -\infty < f < \infty \quad (6.12)$$

para o caso discreto, e

$$\Gamma_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(u) e^{-i2\pi fu} df, \quad -\infty < f < \infty \quad (6.13)$$

para o caso contínuo.

Observemos que a transformada inversa do espectro nos dá a função de autocovariância do processo. Teremos, portanto,

$$\gamma_{XX}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2\pi fu} \Gamma_{XX}(f) df, \quad (6.14)$$

para o caso discreto,

$$\gamma_{XX}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fu} \Gamma_{XX}(f) du \quad (6.15)$$

para o caso contínuo.

#### 6.4. Estimadores do Espectro

Estamos interessados em construir estimadores do espectro  $\Gamma_{XX}(f)$  do processo estocástico estacionário  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  definido por

$$\Gamma_{XX}(f) = (2\pi)^{-1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi fu} \gamma_{XX}(u), \quad (6.16)$$

com  $-\infty \leq f \leq \infty$ . Os estimadores são baseados em  $N$  observações do processo.

Definiremos um particular estimador, que foi introduzido por Schuster, 1894, o *periodograma* ou *espectro amostral*. Este estimador é frequentemente usado em ciências aplicadas e o seu limite, quando  $N \rightarrow \infty$  é chamado de espectro de potências. Este estimador é adequado quando temos sinais determinísticos, mas quando temos processos aleatórios o limite em questão pode não ter sentido, já que o periodograma, como um estimador, será uma variável aleatória (Morettin, 1979).

Vejamos então como se define o periodograma.

Seja  $x(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  um sinal determinístico; sua variância ou energia média no domínio de  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$  será

$$s_T^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |X_m|^2 \quad (6.17)$$

onde  $X_m$  é definido em (6.2), portanto a variância (ou energia média) de  $x(t)$  é

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_m (T |X_m|^2) \frac{1}{T} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(f) df ,$$

onde

$$\Gamma(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T |X_m|^2 \tag{6.18}$$

é chamado espectro de potências. Por (6.2), temos que

$$T |X_m|^2 = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \tag{6.19}$$

e este é chamado de periodograma. A definição (6.18), não é satisfatória se  $x(t)$  é um processo estocástico pois (6.19) é uma variável aleatória e pode não convergir para nenhum valor limite, quando  $T \rightarrow \infty$ .

Definiremos agora a transformada de Fourier finita para um processo estocástico  $\{X_t, | t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dadas  $N$  observações do mesmo, por

$$d_m^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{t=1}^N X_t e^{-\frac{i2\pi mt}{N}} , \tag{6.20}$$

com  $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil \leq m \leq \lceil \frac{N}{2} \rceil$ , onde por  $\lceil a \rceil$  se entende o maior inteiro contido em  $a$ .

Pode-se provar (Morettin, 1979) que se  $\Gamma_{XX}(f)$  é contínua, para  $N$  grande,

$$E\{|d_m^{(N)}|^2\} \approx \Gamma_{XX}\left(\frac{2\pi m}{N}\right), \quad (6.21)$$

e esta aproximação é tanto melhor quanto mais suave for  $\Gamma_{XX}(f)$  na vizinhança de  $f = \frac{2\pi m}{N}$ .

Também se o processo for estacionário, satisfazendo à condição

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |u| |\gamma_{XX}(u)| < \infty,$$

então

$$\text{Cov}\{d_{m_1}^{(N)}, d_{m_2}^{(N)}\} = \Gamma_{XX}\left(\frac{2\pi m_1}{N}\right) + o(N^{-1}) \quad (6.22)$$

e sob certas condições de regularidade sobre as frequências  $\frac{2\pi m}{N}$ ,

$d_m^{(N)}$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , tem distribuição assintótica normal complexa

$N_1^c(0, \Gamma_{XX}(\frac{2\pi m}{N}))$ , se  $m \neq 0, \frac{N}{2}$  e tem distribuição assintótica

$N_1(0, \Gamma_{XX}(\frac{2\pi m}{N}))$ , se  $m = 0$  ou  $\frac{N}{2}$ , com  $-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor \leq m \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ .

As demonstrações desses fatos encontram-se em Brillinger, 1975 cap. 4.

Assim a equação (6.21) sugere um estimador para  $\Gamma_{XX}(f)$  dado por

$$I_m^{(N)} = |d_m^{(N)}|^2 = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-i \frac{2\pi m t}{N}} \right|^2 \quad (6.22)$$

com  $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil \leq m \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ .

Este estimador é chamado periodograma dos valores  $X_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Podemos definir periodograma para qualquer frequência  $f \in \mathbb{R}$ :

$$I^{(N)}(f) = |d^{(N)}(f)|^2 \quad (6.23)$$

mas na prática só poderá ser calculado para um número finito de frequências.

Pode-se demonstrar que o periodograma é um estimador assintoticamente não viciado, (Parzan, 1964), isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ I_{(m)}^{(N)} \right] = \Gamma_{XX} \left( \frac{2\pi m}{N} \right) \quad (6.24)$$

Se  $X(t)$  é Gaussiano temos o resultado seguinte

**Teorema 6.2.** As ordenadas do periodograma  $I_m^{(N)}$  são variáveis aleatórias assintoticamente independentes e têm distribuição assintótica múltipla de uma variável aleatória qui-quadrado com dois graus de liberdade se  $m \neq 0$  e  $m \neq \frac{N}{2}$ , e com um grau de liberdade se  $m = 0$  ou  $m = \frac{N}{2}$ .

A demonstração pode ser encontrada em Morettin, (1979, capítulo 6.

Assim, teremos que assintoticamente,

$$E [ I_m^{(N)} ] = \Gamma_{XX} \left( \frac{2\pi m}{N} \right)$$

$$Var [ I_m^{(N)} ] = \Gamma_{XX}^2 \left( \frac{2\pi m}{N} \right), \quad m \neq 0 \text{ e } m \neq \frac{N}{2} \quad (6.25)$$

$$Var [ I_m^{(N)} ] = 2 \Gamma_{XX}^2(0), \quad m = 0$$

$$= 2 \Gamma_{XX}^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right), \quad m = \frac{N}{2}$$

Observamos que o periodograma não é um estimador consistente, apesar de ser assintoticamente não viciado; sua variância não decresce conforme o número de observações aumenta.

Para contornar este problema, são definidos os estimadores alisados do espectro que consideraremos a seguir.

**Definição 6.2.** Chama-se estimador alisado do espectro qualquer estimador do tipo

$$\bar{I}(f) = I^{(N)}(f) * w_M(f) \quad (6.26).$$

Ou seja, o estimador alisado do espectro é dado pela convolução entre o periodograma e uma função  $w_M(f)$ , onde  $w_M(f)$  é a transformada



da de Fourier de uma função  $w_M(u)$  que satisfaz as seguintes condições:

- i)  $w_M(u)$  é par
  - ii)  $w_M(0) = 1$
  - iii)  $w_M(u) = 0$  ,  $|u| > M, M \leq T$
- (6.27)

As funções  $w_M(u)$  e  $W_M(f)$  são chamadas, respectivamente, de ja nela temporal e janela espectral.

O procedimento de suavização foi introduzido por Bartlett, 1953. Para o leitor melhor entender a idéia desse procedimento sugerimos ler Morettin, 1979 pg. 149 - 156.

Usando-se a propriedade (iv) de transformada de Fourier a expressão (6.26) fica

$$\bar{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_M(u) c_{XX}(u) e^{-i2\pi tu} du$$

Se denotarmos por  $\bar{c}_{XX}(u)$  o produto da janela temporal pela função de autocorrelação estimada, teremos

$$\bar{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_{XX}(u) e^{-i2\pi fu} du . \tag{6.28}$$

Observemos que as fórmulas (6.26) e (6.28) nos dão dois métodos para calcular o estimador alisado do espectro, um que é chamado di reto, que corresponde a fazer a convolução do periodograma  $I(f)$  pela janela espectral escolhida, e o segundo método, que é chamado indireto e é feito usando a transformada de Fourier da função de autocovariân

cia amostral multiplicada pela janela temporal.

Em princípio, qualquer função  $w_M(u)$  que satisfaz as propriedades (6.27) pode ser usada como janela temporal. A tabela 6.2 apresenta as janelas temporais e suas respectivas janelas espectrais mais usadas.

Pode-se demonstrar (ver Jenkins & Watts, 1968, pg. 412) que

$$E\{\bar{I}(f)\} \cong \Gamma_{XX}(f)$$

$$\text{Var}\{\bar{I}(f)\} \cong \frac{2\pi}{N} \Gamma_{XX}^2(f) \int_{-\pi}^{\pi} w_M^2(\alpha) d\alpha. \quad (6.29)$$

Observemos que qualquer que seja a janela a variância do estimador do espectro alisado tende a zero quando  $N \rightarrow \infty$ , o que o torna consistente. A tabela 6.3 apresenta o viés e a variância das janelas mais usadas (Jenkins & Watts, 1969).

A escolha da janela é feita segundo o critério de ter o menor viés e a menor variância. Observe que a janela retangular produz o estimador do espectro quando  $M = T$ .

Mas a escolha da janela envolve mais problemas do que o sugerido aqui. Como estamos aqui interessados da função resposta da frequência, não nos deteremos neste assunto. Ver Jenkins & Watts, 1969 para detalhes.

Estenderemos a seguir estes conceitos para os processos bivariados.

TABELA 6.2

Janelas Temporais e Espectrais

DESCRIÇÃO	JANELA TEMPORAL	JANELA ESPECTRAL
Retangular	$D_M(u) = \begin{cases} 1, &  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$Q_M(f) = 2M \left[ \frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} \right], \quad -\infty < f < \infty$
Bartlett	$D_M(u) = \begin{cases} 1 - \frac{ u }{M}, &  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$Q_M(f) = M \left[ \frac{\sin \pi f M}{\pi f M} \right]^2, \quad -\infty < f < \infty$
Tukey	$D_M(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right), &  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$Q_M(f) = M \left\{ \frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi M \left( f + \frac{1}{2} M \right)}{2\pi M \left( f + \frac{1}{2} M \right)} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\pi M \left( f - \frac{1}{2} M \right)}{2\pi M \left( f - \frac{1}{2} M \right)} \right\}$ $= M \left[ \frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} \right] \left[ \frac{1}{1 - (2fM)^2} \right], \quad -\infty < f < \infty$
Parzen	$D_M(u) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{ u }{M} \right)^2 + 6 \left( \frac{ u }{M} \right)^3, &  u  \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left( 1 - \frac{ u }{M} \right)^3, & \frac{M}{2} <  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$Q_M(f) = \frac{3}{4} M \left[ \frac{\sin \pi f M / 2}{\pi f M / 2} \right]^4, \quad -\infty < f < \infty$

TABELA 6.3

JANELA	Viés do estimador alisado $V\left[\bar{C}_{xx}(f)\right] = E\left[\bar{C}_{xx}(f)\right] - \Gamma_{xx}(f)$	Variância do estimador alisado
RETANGULAR	$\int_{ u  \leq M} \gamma_{xx}(u) e^{-i2\pi fu} du$	$2 \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \frac{M}{T}$
HAMMING	$\frac{0.060}{M^2} \frac{d^2}{df^2} \Gamma_{xx}(f) + o\left(M^{-4}\right)$	$0.795 \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \frac{M}{T}$
TUKEY	$\frac{0.063}{M^2} \frac{d^2}{df^2} \Gamma_{xx}(f) + o\left(M^{-4}\right)$	$0.750 \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \frac{M}{T}$
BARTLETT	$\frac{1}{M} TF \left[ - u  \gamma_{xx}(u) \right]$	$0.667 \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \frac{M}{T}$
PARZEN	$\frac{0.152}{M^2} \frac{d^2}{df^2} \Gamma_{xx}(f) + o\left(M^{-3}\right)$	$0.539 \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \frac{M}{T}$

\*  $TF$  indica a transformada de Fourier da função

### 6.5. O Espectro Cruzado

*Definição 6.3.* O espectro cruzado de um processo estocástico estacionário bivariado  $(X(t), Y(t))$  é dado pela transformada de Fourier da função de covariância cruzada entre a entrada  $(X(t))$  e a saída  $(Y(t))$ , isto é,

$$\Gamma_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XY}(u) e^{-i2\pi fu} du, \quad (6.30)$$

supondo-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{XY}(u)| du < \infty.$$

Analogamente ao estimador do espectro do processo  $X(t)$ , um estimador para o espectro cruzado será dado por

$$I_{XY}^{(N)}(m) = \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{t=1}^N X(t) e^{+ \frac{i2\pi mt}{N}} \right] \left[ \sum_{l=1}^N Y(l) e^{- \frac{i2\pi ml}{N}} \right] \quad (6.31)$$

com  $-\left[ \frac{N-1}{2} \right] \leq m \leq \left[ \frac{N}{2} \right]$

ou

$$I_{XY}^{(N)}(m) = d_X^{(N)}(m) * d_Y^{(N)}(m)$$

que é chamado *periodograma cruzado*.

---

Obs.  $Z^*$  é o conjugado de  $Z$ .

Naturalmente, podemos definir o periodograma cruzado para qualquer frequência  $f \in \mathbb{R}$ ,

$$I_{XY}^{(N)}(f) = (d_X^{(N)}(f)) * d_Y^{(N)}(f). \quad (6.32)$$

Se  $X(f)$  é uma função definida no conjunto dos complexos ela pode ser escrita da seguinte forma

$$X(f) = |X(f)| e^{iF_X(f)}$$

onde  $|X(f)|$  é chamada amplitude da função e  $F_X(f)$  a fase, onde

$$F_X(f) = \text{arc tg} \frac{\text{Im} [X(f)]}{\text{Re} [X(f)]}$$

Assim

$$|I_{XY}^{(N)}(f)| = |d_X^{(N)}(f)| |d_Y^{(N)}(f)| e^{i[F_X(f) - F_Y(f)]} \quad (6.33)$$

onde

$$|d_X^{(N)}(f)| |d_Y^{(N)}(f)| = A_{XY}(f)$$

é a amplitude cruzada e

$$[F_X(f) - F_Y(f)] = F_{XY}(f)$$

é a fase cruzada.

Definiremos a *coerência*  $K$  como sendo

$$K_{XY}(f) = |\Gamma_{XY}(f)| / (\Gamma_{XX}(f)\Gamma_{YY}(f))^{\frac{1}{2}}. \quad (6.34)$$

Um estimador de coerência será dado por

$$\hat{K}_{XY}(f) = A_{XY}(f) / (I_{XX}^{(N)}(f)I_{YY}^{(N)}(f))^{\frac{1}{2}}. \quad (6.35)$$

Pelo mesmo motivo do caso univariado, temos que usar as janelas espectrais para que os estimadores do espectro cruzado sejam consistentes. Assim,

$$\bar{I}_{XY}(f) = I_{XY}(f) * W_M(f) \quad (6.36)$$

ou se usamos transformada de Fourier

$$\bar{I}_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_M(u) e^{-i2\pi fu} du \quad (6.37)$$

onde  $W_M(f)$  e  $w_M(u)$  são respectivamente a janela espectral e a janela temporal definidas antes.

### 6.6. Função Resposta de Frequência

Seja um processo estocástico bivariado  $(X(t), Y(t))$ ,  $t \in R$  ou  $t \in Z$ , onde há uma relação de dependência entre  $Y(t)$ , a saída do processo e  $X(t)$ , a entrada do sistema.

No capítulo II descrevemos um modelo para um tipo de sistema dinâmico, que é dado pela relação

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u)X(t-u)du + N(t) \quad (6.38)$$

para o caso contínuo, ou por

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} v_j X_{t-j} + N_t = v(B) X_t + N_t, \quad (6.39)$$

para o caso discreto.

Aqui  $v(u)$  e  $v(B)$  são funções resposta de impulso e  $N(t)$  ( $N_t$ ) é o ruído do sistema, que é não correlacionado com a entrada.

Observemos que a expressão (6.38) pode ser escrita na fórmula de convolução, de modo que

$$Y(t) = v(t) * X(t) + N(t) \quad (6.40)$$

Usando as propriedades de transformada de Fourier, teremos que

$$TF[Y(t)] = TF[v(t)] \cdot TF[X(t)] + TF[N(t)]$$

A transformada de Fourier de função resposta de impulso é conhecida como *função resposta de frequência* e é denotada por  $H(f)$ .

Se  $f_X(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade de  $X(t)$ , vem que

$$\begin{aligned} \mu_Y = E(Y(t)) &= E \left[ \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du + N(t) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du \right] f_X(x) dx + E[N(t)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} v(u) \int_{-\infty}^{\infty} X(t-u) f_X(x) dx du + \mu_N \\
 &= \int_0^{\infty} v(u) \mu_X du + \mu_N = \mu_X \int_0^{\infty} v(u) du + \mu_N, \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

logo a função de covariância cruzada  $\gamma_{YX}(\tau)$  fica

$$\begin{aligned}
 \gamma_{YX}(\tau) &= E\{[Y(t+\tau) - \mu_Y][X(t) - \mu_X]\} = \\
 &= E\left\{\left[\int_0^{\infty} v(u) X(t+\tau-u) du + N(t+\tau) - \mu_X \int_0^{\infty} v(u) du - \mu_N\right][X(t) - \mu_X]\right\} = \\
 &= E\left\{\left[\int_0^{\infty} v(u)[X(t+\tau-u) - \mu_X] du + N(t+\tau) - \mu_N\right][X(t) - \mu_X]\right\} = \\
 &= E\left\{\int_0^{\infty} v(u)[X(t+\tau-u) - \mu_X][X(t) - \mu_X] du + \right. \\
 &\quad \left. + E[N(t+\tau) - \mu_N] \cdot [X(t) - \mu_X]\right\} = \\
 &= \int_0^{\infty} v(u) E[X(t+\tau-u) - \mu_X][X(t) - \mu_X] du + \gamma_{NX}(\tau),
 \end{aligned}$$

portanto

$$\gamma_{YX}(\tau) = \int_0^{\infty} v(u) \gamma_{XX}(\tau-u) du. \tag{6.42}$$

Esta expressão é válida porque o termo  $\gamma_{NX}(\tau)$  é nulo, pois a entrada é não correlacionada com o ruído.

Então aplicando a transformada de Fourier na expressão (6.42) obtemos

$$\Gamma_{XY}(f) = \Gamma_{XX}(f) H(f) \quad (6.43)$$

e portanto

$$H(f) = \Gamma_{XY}(f) / \Gamma_{XX}(f). \quad (6.44)$$

Analogamente a expressão (6.42), temos que

$$\gamma_{YY}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty v(u)c(u')\gamma_{XY}(\tau+u+u')du du' \quad (6.45)$$

aplicando-se na expressão (6.45) a transformada de Fourier obtemos

$$\Gamma_{YY}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{XX}(f).$$

Assim a coerência, fica dada por

$$K_{XY}(f) = |\Gamma_{XY}(f)| / (\Gamma_{XX}(f)\Gamma_{YY}(f))^{1/2}$$

$$= |\Gamma_{XX}(f)| |H(f)| / \sqrt{|\Gamma_{XX}(f)| |H(f)|^2 \Gamma_{XX}(f)} = 1,$$

portanto se  $K_{XY}(f) = 1$  há uma relação linear entre a entrada e a saída.

Um estimador da função resposta de frequência será

$$\hat{H}(f) = I_{XY}(f) / I_{XX}(f) \quad (6.46)$$

e usando a transformada inversa, obteremos que um estimador da função resposta de impulso, dado por

$$\hat{v}(u) = TF^{-1} \left[ \hat{H}(f) \right]. \quad (6.47)$$

Escrevendo-se

$$\hat{H}(f) = \hat{G}(f) e^{i\hat{F}(f)},$$

onde  $\hat{G}(f)$  e  $\hat{F}(f)$  são respectivamente o ganho e a fase estimados do sistema, temos que

$$\hat{G}(f) = A_{XY}(f) / I_{XX}(f) \quad (6.48)$$

e

$$\hat{F}(f) = F_{XY}(f). \quad (6.49)$$

Apesar das variâncias dos estimadores da fase e da amplitude do espectro cruzado e da variância do estimador do espectro da entrada independerm do número de observações (Jenkins & Watts, 1969), é conveniente reduzir a variância desses estimadores usando o espectro alisado, dessa forma as equações (6.48) e (6.49) se transformam em

$$\bar{G}(f) = \bar{A}_{XY}(f) / \bar{I}_{XY}(f) \quad (6.50)$$

e

$$\bar{F}(f) = \text{arc tg} \left\{ - \text{Im} \left[ \bar{I}_{XY}(f) \right] / \text{Re} \left[ \bar{I}_{XY}(f) \right] \right\} \quad (6.51)$$

### 6.7. | Estimação do Espectro do Ruído do Sistema

O modelo proposta na secção (6.5) para explicar um sistema dinâmico é da forma

$$Y(t) = \int_0^{\infty} v(u) X(t-u) du + N(t),$$

ou escrevendo, na forma de convolução,

$$Y(t) = v(t) * X(t) + N(t) \tag{6.52}$$

e aplicando-se a transformada de Fourier na equação (6.52) obtemos

$$Y(f) = H(f) X(f) + N(f). \tag{6.53}$$

Supondo que o número de observações é  $T$ , a transformada de Fourier finita do ruído é

$$d_N^{(T)}(f) = d_Y^{(T)}(f) - H(f) d_X^{(T)}(f)$$

e um estimador para o espectro do resíduo é dado por

$$\hat{d}_N^{(T)}(f) = d_Y^{(T)}(f) - \hat{H}(f) d_X^{(T)}(f). \tag{6.54}$$

Mas o estimador de resíduo no domínio da frequência não poderá ser usado para se calcular o espectro amostral, pelo seguinte fato:

$$\begin{aligned} I_{\hat{N}\hat{N}}(f) &= \frac{1}{T} |\hat{d}_N^{(T)}(f)|^2 = \frac{1}{T} |d_Y^{(T)}(f) - d_X^{(T)}(f) \hat{H}(f)|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ |d_Y^{(T)}(f)|^2 - |d_X^{(T)}(f) d_Y^{(T)}(f)|^2 |d_X^{(T)}(f)|^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{T} [I_{YY}(f)] \{1 - K_{XY}^2(f)\} = 0 \end{aligned}$$

pois  $K_{XY} = 1$  para esse tipo de modelo.

Assim o espectro amostral da entrada e o espectro amostral cruzado só nos dão informação sobre o ganho e a fase do sistema, não dando nenhuma informação sobre o ruído do sistema.

Para obtermos informações sobre o espectro do ruído do sistema, temos que calcular o estimador alisado do espectro do mesmo. Assim, a expressão (6.54) se transforma em

$$\hat{\bar{I}}_{NN}(f) = \bar{I}_{YY}(f) (1 - \bar{K}_{XY}^2(f)) \quad (6.55)$$

### 6.8. Distribuição de Probabilidade dos Estimadores

As funções de distribuição dos estimadores do espectro de energia estão associadas ao tipo de estimador usado. Ao usarmos uma janela temporal para estimarmos um espectro, estamos tentando reduzir a variância do estimador, de forma que ele se torna consistente. Pode-se demonstrar (Jenkins - Watts, 1969) que a razão  $L/T$  representa a proporção que a variância é reduzida entre o estimador alisado e o natural, onde  $L$  é dado por

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} W_M^2(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} w_M^2(u) du.$$

A essa relação se dá o nome de razão de variância, por exemplo  $L = 2M$  para janela retangular, e portanto a razão de variância para essa janela é  $2M/T$ . Se por exemplo, usarmos  $M = 0,2T$  a razão de variância será  $0,4$  o que significa que a variância do estimador alisado do espectro será reduzida em 40% em relação a variância do estimador

TABELA 6.4

DESCRIÇÃO	JANELA ESPECTRAL	RAZÃO DE VARIÂNCIA	GRAUS DE LIBERDADE
Retangular	$2M \frac{\text{sen}2\pi fM}{2\pi fM}$	$2 \frac{M}{T}$	$\frac{T}{M}$
Bartlett	$M \left( \frac{\text{sen}\pi fM}{\pi fM} \right)^2$	$0.667 \frac{M}{T}$	$3 \frac{T}{M}$
Tukey	$M \left( \frac{\text{sen}2\pi fM}{2\pi fM} \cdot \frac{1}{1 - (2\pi fM)^2} \right)$	$0.75 \frac{M}{T}$	$2.667 \frac{T}{M}$
Parzen	$\frac{3}{4} M \left( \frac{\text{sen}(\pi fM/2)}{\pi fM/2} \right)^4$	$0.539 \frac{M}{T}$	$3.71 \frac{T}{M}$

natural do espectro.

Supondo que  $X(t)$  é um processo Gaussiano, pode-se demonstrar (Akaike, 1962), que a distribuição de probabilidade de  $\bar{I}_{XX}(f)$  pode ser aproximada pela distribuição de  $\alpha \chi_v^2$ , onde

$$v \cong 2 \{E [\bar{I}_{XX}(f)]\}^2 / 2 \text{Var} [\bar{I}_{XX}(f)] = 2 \frac{T}{L} \quad (6.56)$$

e

$$\alpha \cong \frac{E [\bar{I}_{XX}(f)]}{v} = \frac{\Gamma_{XX}(f)}{v} \quad (6.57)$$

Assim, o intervalo de confiança com nível de confiança  $\alpha$ , para  $\Gamma_{XX}(f)$  é dado por

$$\left[ \frac{v \bar{I}_{XX}(f)}{\chi_{v, (1-\frac{\alpha}{2})}^2}, \frac{v \bar{I}_{XX}(f)}{\chi_{v, \alpha/2}^2} \right] \quad (6.58)$$

A tabela (6.4) nos apresenta a razão de variância e os graus de liberdade para os diversos tipos de janelas.

Podemos reescrever a expressão (6.53) na forma

$$\begin{aligned} N(f) &= Y(f) - H(f) X(f) \\ &= \{Y(f) - X(f) \hat{H}(f)\} + X(f) \{\hat{H}(f) - H(f)\}, \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$|N(f)|^2 = |Y(f) - X(f) \hat{H}(f)|^2 + |X(f)|^2 |\hat{H}(f) - H(f)|^2 \quad (6.59)$$

O produto cruzado desaparece, pois

$$X^*(f) Y(f) = H(f) |X(f)|^2$$

Então, dividindo a igualdade (6.59) por  $T$ , temos

$$I_{NN}(f) = I_{\hat{NN}}(f) + I_{XX}(f) | \hat{H}(f) - H(f) |^2 \quad (6.60)$$

Como o estimador natural do espectro do resíduo é zero temos que usar o estimador alisado o que transformará a expressão (6.60) em

$$\bar{I}_{NN}(f) = \bar{I}_{\hat{NN}}(f) + \bar{I}_{XX}(f) | \bar{H}(f) - H(f) |^2. \quad (6.61)$$

Como  $N(t)$  é um processo Gaussiano, temos que

$$v \bar{I}_{NN}(f) / \Gamma_{NN}(f) \sim \chi_v^2$$

onde  $v$ , o número de graus de liberdade, depende da janela espectral usada. Assim a expressão (6.61) pode ser escrita na forma

$$v \frac{\bar{I}_{NN}(f)}{\Gamma_{NN}(f)} = v \frac{\bar{I}_{\hat{NN}}(f)}{\Gamma_{\hat{NN}}(f)} + v \frac{\bar{I}_{XX}(f)}{\Gamma_{NN}(f)} | \bar{H}(f) - H(f) |^2. \quad (6.62)$$

Assim, teremos que os componentes desse  $\chi^2$  estão distribuídos da seguinte forma:

$$v \frac{\bar{I}_{\hat{NN}}(f)}{\Gamma_{\hat{NN}}(f)} \sim \chi_{v-2}^2 \quad \text{e} \quad v \frac{\bar{I}_{XX}(f)}{\Gamma_{NN}(f)} | \bar{H}(f) - H(f) |^2 \sim \chi_2^2$$

Pode-se demonstrar, também, que essas componentes são estatisticamente independentes.



Podemos agora testar a existência de função resposta frequência, e mais, construir intervalos de confiança para o ganho e a fase do sistema.

A) | - *Teste para a Coerência Diferente de Zero*

Suponha que  $H(f)$  é identicamente nula para todo  $f$  (isto significa que a entrada e a saída são não correlacionadas e ainda que a coerência é zero).

Assim se  $H(f) = 0$  temos que o segundo termo da expressão (6.62) é dado por

$$v \frac{\bar{I}_{XX}(f) \bar{G}^2(f)}{\Gamma_{NN}(f)} = v \frac{\bar{I}_{YY}(f) \bar{K}_{XY}^2(f)}{\Gamma_{NN}(f)} \sim \chi_2^2$$

e o primeiro termo da expressão (6.62) é dado por

$$v \frac{\bar{I}_{NN}(f)}{\Gamma_{NN}(f)} = v \frac{\bar{I}_{YY}(1 - \bar{K}_{XY}^2(f))}{\Gamma_{NN}(f)} \sim \chi_{v-2}^2$$

e portanto a estatística

$$\frac{(v-2) \bar{K}_{XY}^2(f)}{2(1 - \bar{K}_{XY}^2(f))} \tag{6.63}$$

tem distribuição aproximada  $F_{2, v-2}$ , se  $H(f) = 0$

B) - Os intervalos de confiança aproximados para o ganho e a fase do sistema são deduzidos analogamente e são dados pelas seguintes fórmulas

a) - para a diferença entre a função resposta de frequência estimada e real,

$$| \bar{H}(f) - H(f) |^2 \leq \frac{2}{\nu-2} \frac{\bar{I}_{\hat{N}\hat{N}}(f)}{\bar{I}_{XX}(f)} \cdot F_{2, \nu-2}(1-\alpha)$$

b) - para o ganho do sistema,

$$\bar{G}(f) \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{2}{\nu-2}} F_{2, \nu-2}(1-\alpha) \left( \frac{1 - \bar{K}_{XY}^2(f)}{\bar{K}_{XY}^2(f)} \right) \right\}$$

c) - para a fase do sistema

$$\bar{F}_{XY}(f) \pm \text{arc sen} \sqrt{\frac{2}{\nu-2}} F_{2, \nu-2}(1-\alpha) \left( \frac{1 - \bar{K}_{XY}^2(f)}{\bar{K}_{XY}^2(f)} \right)$$

Note que os intervalos de confiança são pequenos quando o número de graus de liberdade,  $\nu$ , é grande e quando a coerência  $\bar{K}_{XY}^2(f)$  também é grande.

### 6.9. Conclusão

Dado que a função resposta de frequência já foi estimada podemos através dela estimar a função resposta de impulso que será calculada através de

$$v(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-i2\pi fu} df .$$

Quando o processo é discreto a forma de calcular é dada por

$$v_K = \int_0^{1/2} \frac{\text{Re} [\bar{I}_{XY}(f)]}{\bar{I}_{XX}(f)} \cos 2\pi fK df + \\ + \int_0^{1/2} \frac{\text{Im} [\bar{I}_{XY}(f)]}{\bar{I}_{XX}(f)} \text{sen } 2\pi fK df.$$

Essa é uma outra forma de se calcular a função resposta de im pulso onde não é necessário pré branquear a entrada, para ortogonali zar o sistema (3.13).

## CAPÍTULO VII

### APLICAÇÕES

#### 7.1. Introdução

Para finalizar este trabalho, apresentaremos alguns exemplos, onde aplicaremos as técnicas descritas nos capítulos de identificação, de estimação e de verificação do modelo de função de transferência. Também aplicaremos a técnica do espectro cruzado para identificar a resposta da frequência.

#### 7.2. Exemplos

*Exemplo 7.1.* (Box-Jenkins, 1970) Em uma experiência para otimização da concentração de Gás Carbônico ( $CO_2$ ) em uma fornalha, foi empregado como entrada uma combinação de ar com metano para formar uma mistura de gases contendo  $CO_2$  (dióxido de carbono). A quantidade de ar era constante mas a razão do gás metano era variável de maneira a variar a concentração de  $CO_2$ . A figura 7.1, nos dá o gráfico da concentração de  $CO_2$  como  $Y(t)$  e de uma transformação de concentração do metano como  $X(t)$ .

A relação entre a concentração do metano e  $X(t)$  é dada por

$$\text{Concentração Metano} = 0,60 - 0,04 X(t).$$

Essa transformação é feita para que a média de entrada seja zero. O ruído neste particular processo foi induzido deliberadamente, por isso nós conhecemos sua forma, mas procederemos como se fosse desconhecido.

Os dados foram tomados em intervalos de tempo de 9 s., num total de 296. A entrada  $X_t$  assume valores de -2,5 a 2,5 pés cúbicos por minuto e a saída  $Y_t$  de 0,5 a 0,7 pés cúbicos por minuto.

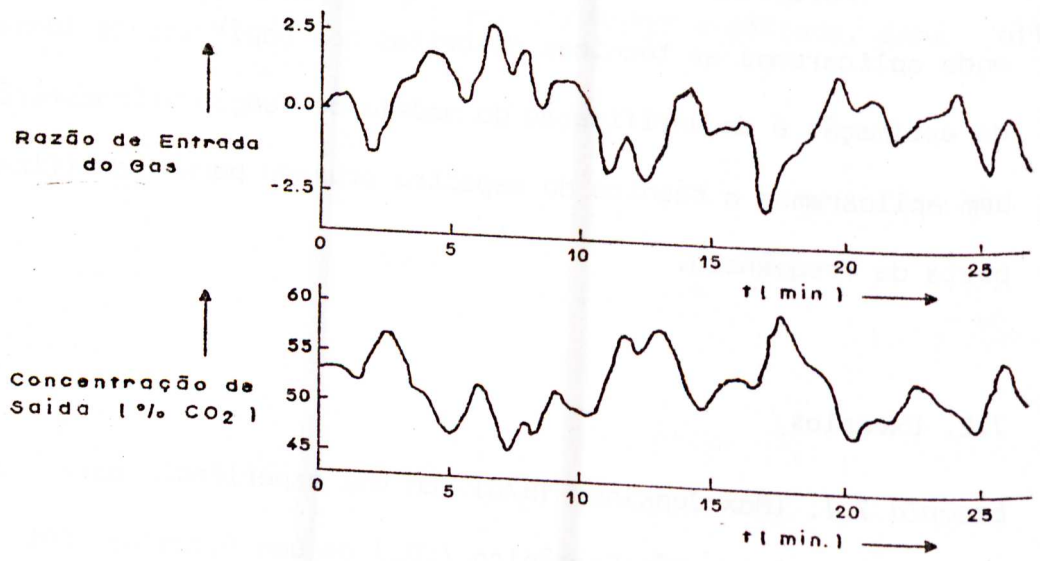


Figura 7.1:

Observando a figura 7.1 das séries de entrada e saída não encontramos nenhuma tendência nelas, o que sugere que essas séries devem ser estacionárias e portanto não há necessidade de se calcular as

ries de diferenças.

Em seguida, calcularemos a função de autocorrelação de série de entrada, cujos valores se encontram na tabela 7.1.

Em seguida, foi identificado o modelo que a série de entrada segue, usando o procedimento do capítulo 4 de Box - Jenkins (1970), optando-se por um processo autoregressivo de ordem três.

Assim, obtemos o modelo

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3) X_t = \alpha_t$$

onde  $\alpha_t$  é o ruído branco.

TABELA 7.1

Funções de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial da Série de Entrada do Exemplo 7.1

Lag u	Autocorrelações $r_{xx}(u)$												
1 - 12	0.94	0.83	0.68	0.53	0.41	0.32	0.26	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	
e.p.	0.06	0.10	0.12	0.13	0.14	0.14	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
13-24	0.15	0.13	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.04	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06
e.p.	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
Lag u	Autocorrelações Parciais $\phi_{uu}$												
1 - 12	0.94	-0.52	-0.17	0.13	0.15	0.00	-0.04	0.03	0.07	-0.00	-0.08	-0.04	
e.p.	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
13-24	0.04	0.00	0.03	-0.01	-0.06	0.05	0.08	-0.01	-0.03	-0.02	-0.00	0.01	
e.p.	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
$\bar{X} = -0.04723$													
$\hat{\sigma}_x = 1.0714$													
Número de Observações = 296													

Os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  foram estimados usando mínimos quadrados não lineares e os valores encontrados foram os seguintes:

$$\hat{\phi}_1 = 1,97 ; \quad \hat{\phi}_2 = - 1,37 ; \quad \hat{\phi}_3 = 0,34 \quad \text{e} \quad s_\alpha^2 = 0,0353$$

Portanto, a série de entrada pré-branqueada é a seguinte:

$$\alpha_t = (1 - 1,97 B + 1,37 B^2 - 0,34 B^3) X_t .$$

Aplicando-se o mesmo operador na série de saída obteremos o processo

$$\beta_t = (1 - 1,97 B + 1,37 B^2 - 0,34 B^3) Y_t .$$

$\beta_t$  não é obrigatoriamente um ruído branco, é só uma transformação da série de saída.

Usando a fórmula (3.16) teremos que um estimador preliminar da função resposta de impulso será

$$\hat{v}_k = r_{\alpha\beta}(k) \cdot \frac{s_\beta}{s_\alpha} .$$

Portanto, como  $s_\alpha = 0,188$  e  $s_\beta = 0,358$ , teremos

$$\hat{v}_k = \frac{0,358}{0,188} r_{\alpha\beta}(k)$$

A tabela 7.2, nos dá os valores de  $r_{\alpha\beta}(k)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ , seus respectivos desvios padrões e os pesos  $\hat{v}_k$ . A figura 7.3, nos dá o gráfico da função resposta de impulso. O desvio padrão de  $r_{\alpha\beta}(k)$  foi calculado supondo que:

- i) - As correlações cruzadas são zeros para os "lags" menores que 2 e maiores que 8;
- ii) - As autocorrelações  $r_{\alpha\alpha}(k)$  são nulas para  $k < 0$ .
- iii) - As autocorrelações  $r_{\beta\beta}(k)$  são nulas para  $k > 4$ .
- iv) - Substituindo as correlações teóricas pelas estimadas que se encontram na tabela 7.2.

TABELA 7.2

*Estimação da Função de Correlação Cruzada dos Dados Prê-branqueados*

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{\alpha\beta}$	-0.01	0.05	-0.03	-0.28	-0.33	-0.46	-0.27	-0.17	-0.03	0.03	-0.05
$\hat{\sigma}(r)$	0.06	0.06	0.06	0.05	0.06	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
$\hat{v}_k$	-0.02	0.10	-0.06	-0.53	-0.63	-0.88	-0.52	-0.32	-0.06	0.06	-0.10

No gráfico da figura (7.2) da função de correlação cruzada entre  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  estimada, observamos que o desvio padrão da função difere pouco do valor  $n^{-1/2} = 0,06$  o que já era esperado, pois as séries são não correlacionadas.



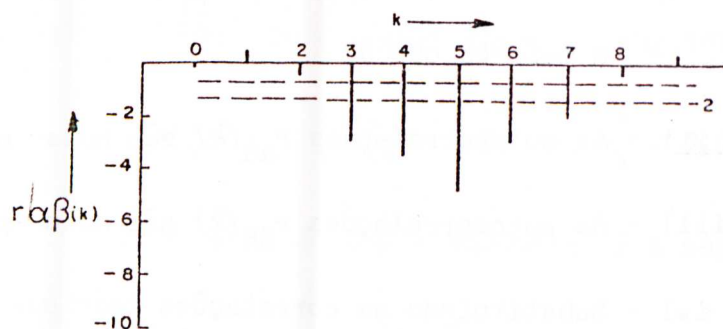


FIGURA 7.2: ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO CRUZADA DO GAS DE FORNALHA DEPOIS DO PRÉ-BRANQUEAMENTO.

Observando a figura 7.3 temos que  $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2$  são pequenos com parados com seu desvio padrão, o que sugere que  $b$  seja três. Agora, precisamos saber os valores de  $r$  e  $s$ ; usando as afirmações do capítulo 3, sugerimos que  $r$  possa ser um ou dois e  $s$  seja dois. A primeira sugestão é devida ao fato de  $\hat{v}_3$  e  $\hat{v}_4$  serem valores preliminares para um modelo fixo que os  $v_j$ 's seguiriam com  $j \geq 5$ , sendo esse modelo uma exponencial negativa dada pela equação de diferença

$$v_j - \delta_1 v_{j-1} = 0, \quad j \geq 5.$$

A segunda sugestão terá  $\hat{v}_3$  como valor preliminar e  $\hat{v}_3$  e  $\hat{v}_4$  como valores iniciais para um modelo fixo que os  $v_j$ 's, com  $j \geq 5$ , seguiriam, dado pela equação de diferenças

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} - \delta_2 v_{j-2} = 0, \quad j > 5.$$

Investigações preliminares sugeriram que fiquemos com o segundo modelo que será da forma

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) X_{t-b} \quad (7.1)$$

Assumindo que  $b = 3$  e das equações (2.9) temos que

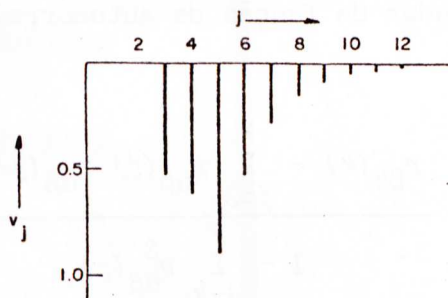


FIGURA 7.3: FUNÇÃO RESPOSTA DE IMPULSO

$$\begin{aligned} v_j &= 0, \quad j < 3 & v_5 &= \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3 - \omega_2 \\ v_3 &= \omega_0 & v_6 &= \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4 & (7.2) \\ v_4 &= \delta_1 v_3 - \omega_1 & v_7 &= \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5 \end{aligned}$$

Substituindo nessas equações os estimadores preliminares dos  $v_j$ 's, obtemos os seguintes estimadores preliminares para os  $\delta$ 's e  $\hat{\omega}$ 's, de forma que a estimação preliminar da equação (7.1) é:

$$(1 - 0,57 B - 0,02 B^2) Y_t = - (0,537 + 0,33 B + 0,51 B^2) X_{t-3} \quad (7.2)$$

Teremos agora que identificar o modelo do ruído para depois encontrarmos os estimadores eficientes do modelo.

Para identificar o modelo do ruído usaremos a série  $\epsilon_t$  dada por

$$\varepsilon_t = \phi_x(B) \left| \theta_x^{-1}(B) n_t \right. \quad (7.3)$$

Depois, por operações inversas, identificaremos o modelo do ruído.

Um estimador da função de autocorrelação da série  $\varepsilon_t$  é dado por

$$r_{\varepsilon\varepsilon}(k) = \frac{r_{\beta\beta}(k) - \sum_{j=3}^7 r_{\alpha\beta}(j) r_{\alpha\beta}(j+k)}{1 - \sum_{j=3}^7 r_{\alpha\beta}^2(j)}$$

Isto por que já supusemos que  $r_{\beta\beta}(k) = 0$ , se  $k > 4$  e  $r_{\alpha\beta}(k) = 0$  se  $k < 3$ .

TABELA 7.3

*Estimação das Funções de Autocorrelação do Processo Prêbranqueado*

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_{\beta\beta}(k)$	1.000	0.223	0.359	0.126	0.081	0.000	0.000	0.000
$r_{\alpha\beta}(k)$	0.000	0.000	0.000	-0.283	-0.331	-0.456	-0.268	-0.168
$r_{\varepsilon\varepsilon}(k)$	1.000	-0.382	0.126	-0.011	0.064	0.000	0.000	0.000

A tabela 7.3 apresenta-nos os valores de  $r_{\varepsilon\varepsilon}(k)$ . Os valores estimados da função de autocorrelação podem nos sugerir um modelo autorregressivo de 1ª ordem ou um médias móveis de 1ª ordem, essa escolha não afetará muito o modelo do ruído.

Suponhamos que  $\epsilon_t$  seja  $AR(1)$ ; então

$$\hat{\phi}_1 = \hat{r}_{\epsilon\epsilon}(1) = 0,38.$$

Então teríamos

$$(1 + 0,38 B) \epsilon_t = a_t,$$

mas

$$\epsilon_t = (1 - 1,97 B + 1,37 B^2 - 0,34 B^3) N_t$$

portanto

$$(1 + 0,38 B) (1 - 1,97 B + 1,37 B^2 - 0,34 B^3) N_t = a_t$$

ou

$$(1 - 1,59 B + 0,62 B^2 + 0,18 B^3 - 0,13 B^4) N_t = a_t.$$

Como os dois últimos coeficientes do modelo são pequenos em relação aos demais podemos abandoná-los e o modelo para o ruído será dado por

$$(1 - 1,6 B + 0,6 B^2) N_t = a_t.$$

Se assumirmos que  $\epsilon_t$  é um  $MA(1)$  da forma

$$\epsilon_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

teremos que  $\hat{\theta}_1 = 0,46$  e portanto nosso modelo para o ruído seria

$$(1 - 1,97 B + 1,37 B^2 - 0,34 B^3) N_t = (1 - 0,46 B) a_t$$

ou, fazendo a divisão,

$$(1 - 1,51 B + 0,68 B^2) N_t = a_t$$

que é semelhante ao modelo anterior.

Assim, o modelo sugerido para este sistema será:

$$Y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} X_{t-3} + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t \quad (7.4)$$

onde

$$\hat{\omega}_0 = -0,53; \quad \hat{\omega}_1 = 0,33; \quad \hat{\omega}_2 = 0,51; \quad \hat{\delta}_1 = 0,57; \quad \hat{\delta}_2 = 0,02;$$

$$\hat{\phi}_1 = 1,51; \quad \hat{\phi}_2 = 0,68;$$

podem ser usados como estimadores preliminares na estimação não linear dos parâmetros.

Usando a estimação não linear, na qual os valores iniciais para os parâmetros foram

$$\omega_0 = \delta_1 = \delta_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0,10 \quad e \quad \omega_1 = \omega_2 = -0,10$$

e usando de  $296 - 8 = 288$  observações, obteve-se depois de 9 iterações os seguintes estimadores dos parâmetros com seus respectivos desvios padrões

$$\hat{\delta}_1 = +0,57 \text{ e } s_{\hat{\delta}_1} = 0,01; \quad \hat{\delta}_2 = 0,01 \text{ e } s_{\hat{\delta}_2} = 0,14;$$

$$\hat{\omega}_0 = -0,53 \text{ e } s_{\hat{\omega}_0} = 0,08; \hat{\omega}_1 = 0,37 \text{ e } s_{\hat{\omega}_1} = 0,15; \hat{\omega}_2 = 0,51 \text{ e } s_{\hat{\omega}_2} = 0,08;$$

$$\hat{\phi}_1 = 1,53 \text{ e } s_{\hat{\phi}_1} = 0,05; \hat{\phi}_2 = -0,63 \text{ e } s_{\hat{\phi}_2} = 0,16.$$

A tabela 7.4 nos dá o valor de cada parâmetro estimado a cada iteração e a respectiva soma de quadrado

TABELA 7.4

*Convergência dos Mínimos Quadrados não Lineares*

<i>Iteração</i>	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\phi_1$	$\phi_2$	<i>Soma de Quadrado</i>
0	0.10	-0.10	-0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	13.601
1	-0.46	0.63	0.60	0.14	0.27	1.33	-0.27	273.1
2	-0.52	0.45	0.31	0.40	0.52	1.37	-0.43	92.5
3	-0.63	0.60	0.01	0.12	0.73	1.70	-0.76	31.8
4	-0.54	0.50	0.29	0.24	0.42	1.70	-0.81	19.7
5	-0.50	0.31	0.51	0.63	0.09	1.56	-0.68	16.84
6	-0.53	0.38	0.53	0.54	0.01	1.54	-0.64	16.60
7	-0.53	0.37	0.51	0.56	0.01	1.53	-0.63	16.60
8	-0.53	0.37	0.51	0.56	0.01	1.53	-0.63	16.60
9	-0.53	0.37	0.51	0.57	0.01	1.53	-0.63	16.60
<i>Estimadores Preliminares</i>	-0.53	0.33	0.51	0.57	0.02	1.51	-0.68	

O estimador de variância do ruído branco é  $\hat{\sigma}_a^2 = 0,0561$ . Antes de aceitarmos que esse modelo seja correto, precisamos verificar as funções de autocorrelação e de correlação cruzada.

A tabela 7.5 nos apresenta os estimadores da função de autocorrelação residual, da função de correlação cruzada entre a entrada e o resíduo e da função de correlação cruzada entre a entrada pré-branqueada e o resíduo para os lags de 1 a 36.

Se analisarmos a função  $r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ , observando a estatística  $Q$ , dada por

$$Q = 289 \sum_{k=1}^{36} r_{\hat{a}\hat{a}}(k) = 41,7$$

e comparando com um  $\chi^2$  de  $k-p-q = 34$  graus de liberdade não questionamos que o modelo é inadequado.

Não nos será útil comparar a função de correlação cruzada  $r_{x\hat{a}}(k)$  com seu desvio padrão; essa comparação não nos indica nada, pois os valores de  $r_{x\hat{a}}(k)$  são muito menores que o erro padrão, isso é devido a autocorrelação existente entre os diversos lags de  $r_{x\hat{a}}(k)$ , pois mesmo que o modelo seja correto vimos que  $\hat{a}_t$  e  $x_t$  são correlacionados. Assim, o que devemos observar é a correlação cruzada entre  $\hat{a}_t$  e  $\alpha_t$ . Observando a estatística

$$S = 289 \sum_{k=0}^{35} r_{\alpha\hat{a}}(k) = 29,4$$

e comparando-a com  $\chi^2$  com  $(k+1) - (r+s+1) = 31$  graus de liberdade, não há razão para verificar se o modelo não seja correto.

TABELA 7.5

<i>Estimação da Função de Autocorrelação Residual</i>													
<i>Lag k</i>	$r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$												<i>Limite Superior do Desvio Padrão</i>
1 - 12	0.02	0.06	-0.07	-0.05	-0.05	0.12	0.03	0.03	-0.08	0.05	0.02	0.10	±0.06
13 - 24	-0.04	0.05	-0.09	-0.01	-0.08	0.00	-0.12	0.00	-0.01	0.08	0.02	-0.01	±0.06
25 - 35	0.04	-0.02	0.02	0.09	-0.12	0.06	-0.03	-0.06	-0.11	0.02	0.03	0.06	±0.06
<i>Estimação da Função de Correlação Cruzada entre a Entrada e o Resíduo</i>													
<i>Lag k</i>	$r_{\hat{x}\hat{a}}(k)$												<i>Limite Superior do Desvio Padrão</i>
0 - 11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.02	-0.03	-0.05	-0.06	-0.05	±0.06
12 - 23	-0.03	-0.03	-0.03	-0.07	-0.10	-0.12	-0.12	-0.10	-0.04	-0.01	-0.01	-0.02	±0.06
24 - 35	-0.03	-0.04	-0.04	-0.02	-0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07	0.06	±0.06
<i>Estimação da Função de Correlação Cruzada entre a Entrada Pré Branqueada e o Resíduo</i>													
<i>Lag k</i>	$r_{\hat{a}\hat{a}}(k)$												<i>Limite Superior do Desvio Padrão</i>
0 - 11	-0.06	0.03	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	-0.04	0.02	0.07	-0.03	-0.02	±0.06
12 - 23	-0.03	-0.11	0.02	0.04	0.04	0.01	0.01	-0.15	-0.03	-0.07	-0.08	0.02	±0.06
24 - 35	-0.01	0.02	0.05	-0.07	0.00	0.04	-0.15	0.04	0.03	-0.02	0.00	0.03	±0.06



O valor estimado para  $\delta_2$  é muito pequeno em comparação a seu desvio padrão, assim pode ser tirado do modelo sem alterar os outros parâmetros estimados. Assim, a forma final do modelo será

$$Y_t = \frac{-(0,53 + 0,37 B + 0,51 B^2)}{(1 - 0,57 B)} X_{t-3} + \frac{1}{1 - 1,53B + 0,63B^2} a_t \quad (7.5)$$

Calcularemos o ganho do estado estável par podermos compará-lo com o que obteremos na estimação da função resposta de frequência:

$$g = - \frac{(0,53 + 0,37 + 0,51)}{1 - 0,57} = - 3,3 \cdot$$

*Exemplo 7.2.* (Pack, 1976b) Palda e outros têm analisado conjunto de observações anuais de séries de venda e de publicidade para um dado medicamento (Lygia E. Pinkham's Vegetable Compound). Dada a longa história do produto, a falta de competição direta, a relativa estabilidade da estrutura de preço e a estabilidade geral devido a um bom segmento de fregueses extremamente leais, os dados são adequados para estudar as relações entre vendas e publicidade.

Palda também dá mensalmente as vendas e a publicidade para esta patente médica para o período de janeiro de 1954 a junho de 1960, num total de 78 observações para cada série, as variáveis sendo medidas em dólar.

Os gráficos destas estão na figura 7.4.

O produto era vendido de duas formas, tônico líquido e tabletes, cada uma sendo responsável pela metade da venda total, aproximadamente.

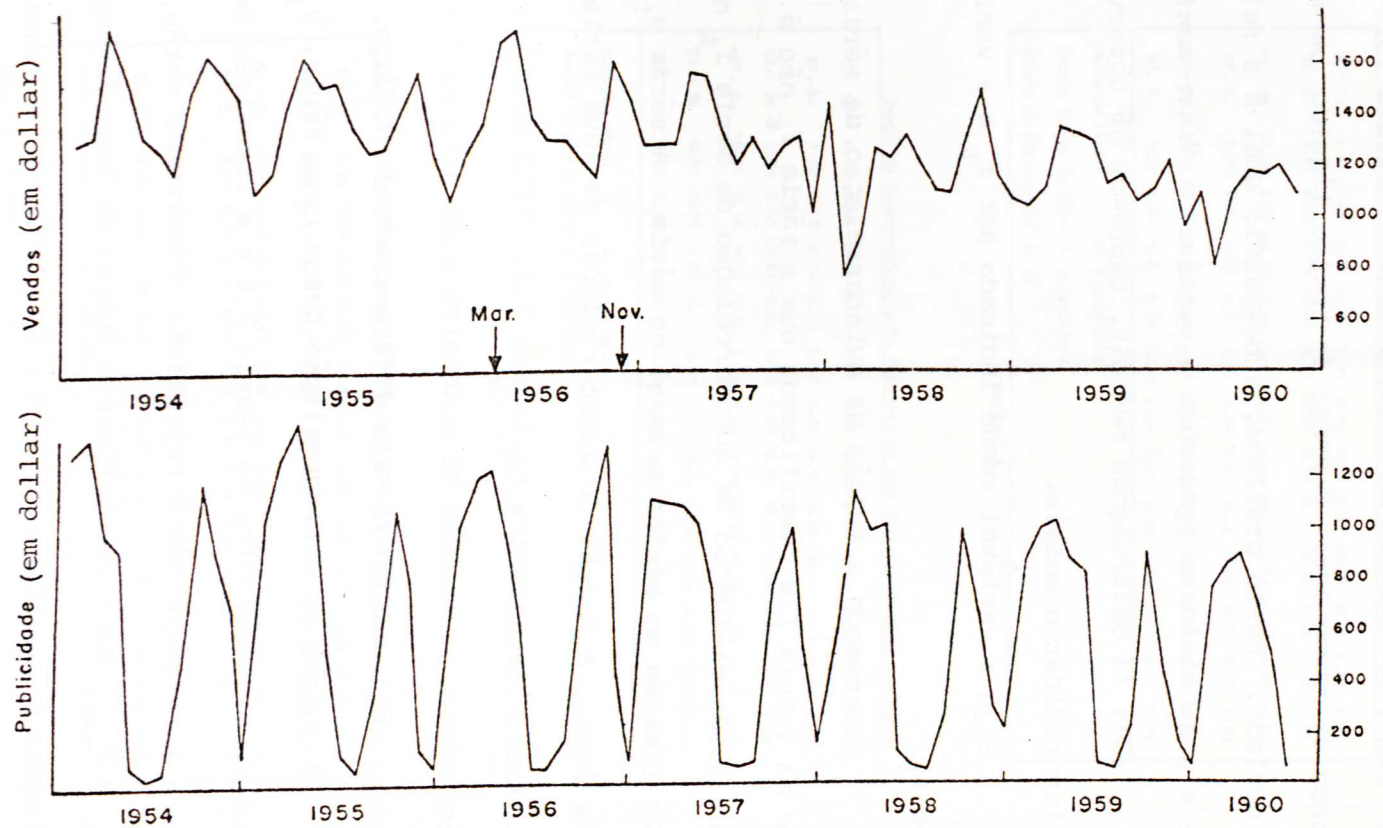


Figura 7.4: Gastos com Vendas e Publicidades Mensais de Lydia E. Pinkham  
 Janeiro 1954 - Julho 1960

O tablete sofreu dois incrementos de preço nesse período, o primeiro de 6,5% em março de 1956 e o segundo de 6,8% em novembro de 1956. Logo, em outubro de 1956, o produto estava 13,8% mais caro que em março do mesmo ano. O preço do tônico líquido se manteve durante esse período. Nosso problema, é descobrir qual é a relação entre a venda e a publicidade ignorando a variável - "*incremento de preço*".

Das 78 observações mensais, usaremos 66 observações mensais para identificar o modelo.

Seja a variável venda indicada por  $Y_t$  e a variável publicidade por  $X_t$ .

Observando a função de autocorrelação da série  $Y_t$ , que se encontra na tabela 7.6, verificamos que a série  $Y_t$  não é estacionária, os valores altos da função de autocorrelação da série  $Y_t$  nos lags 6, 12, 18 e 24 indicam um efeito sazonal na série. A série  $w_t$  é a diferença de seis lags. A função de autocorrelação de nova série  $w_t = Y_t - Y_{t-6}$  é calculada e se encontra na tabela 7.7. Esta nova série também não é estacionária, novamente há autocorrelação alta no lag 6, isso sugere que a série original seja diferenciada de 12 lags.

A função de autocorrelação dessa nova série,  $y_t = Y_t - Y_{t-12}$ , é calculada e se encontra na tabela 7.8 e a suposição de estacionariedade para esta série não é rejeitada. Ficaremos, então, com a série  $y_t = Y_t - Y_{t-12}$  para identificar a função de transferência. O mesmo procedimento é repetido para série  $X_t$  e chega-se a mesma conclusão, isto é, que a série  $x_t = X_t - X_{t-12}$  é estacionária.

TABELA 7.6

Função de Autocorrelação para Série de Vendas

1 - 12	0.41	-0.00	-0.15	-0.08	0.34	0.45	0.29	-0.02	-0.15	-0.08	0.22	0.44
ST. E.	0.12	0.14	0.14	0.14	0.15	0.16	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.19
13 - 24	0.28	0.01	-0.27	-0.18	0.18	0.24	0.18	-0.08	-0.28	-0.25	0.02	0.20
ST. E.	0.20	0.21	0.21	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.23	0.23	0.23
25 - 36	0.15	0.03	-0.21	-0.15	-0.03	0.09	0.12	-0.11	-0.22	-0.24	-0.08	0.09
ST. E.	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25
Média da Série = 0.13117E+04												
Desvio Padrão da Série = 0.18933E+03												
Número de Observações = 68												

TABELA 7.7

Função de Autocorrelação para Diferença de Seis Períodos de Série de Vendas

1 - 12	0.12	0.08	0.02	-0.12	-0.01	-0.58	-0.13	-0.04	0.13	0.10	-0.07	0.18
ST. E.	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18
13 - 24	0.08	0.05	-0.24	-0.04	0.11	-0.04	-0.08	-0.12	0.05	-0.11	-0.07	-0.02
ST. E.	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19
25 - 36	-0.03	0.24	0.06	0.11	0.03	0.00	0.00	-0.20	-0.05	-0.08	0.02	0.00
ST. E.	0.19	0.19	0.19	0.19	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
Média da Série = -0.20217E+02												
Desvio Padrão da Série = 0.19111E+03												
Número de Observações = 60												

TABELA 7.8

Função de Autocorrelação para Diferença de Doze Períodos de Série de Vendas

1 - 12	0.16	0.04	0.20	-0.03	0.06	-0.04	-0.09	0.05	0.04	0.02	-0.07	-0.36
ST. E.	0.14	0.14	0.14	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
13 - 24	-0.03	-0.13	-0.37	-0.09	0.08	0.07	-0.04	0.05	-0.09	-0.08	-0.00	-0.10
ST. E.	0.16	0.16	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
25 - 36	-0.09	0.19	0.14	0.01	0.04	-0.02	0.08	-0.12	-0.08	0.06	-0.07	0.03
ST. E.	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.20	0.20
Média da Série = 0.43970E+02												
Desvio Padrão da Série = 0.17828E+03												
Número de Observações = 54												

A série  $x_t$  é prébranqueada, e um modelo encontrado para ela é dado por

$$x_t = (1 - \theta_{12} B^{12}) \alpha_t$$

ou

$$(1 - B^{12}) X_t = (1 - \theta_{12} B^{12}) \alpha_t \quad (7.6)$$

onde  $\alpha_t$  é o ruído branco. Portanto, a série de entrada prébranqueada será

$$\alpha_t = X_t - X_{t-12} + 0,49 \alpha_{t-12},$$

e aplicando-se esse mesmo operador na série de saída, obtemos

$$\beta_t = Y_t - Y_{t-12} + 0,49 \beta_{t-12}.$$

Determinando a função de correlação cruzada entre  $\alpha_t$  e  $\beta_t$ , que se encontra na tabela 7.9, podemos calcular estimadores preliminares para os pesos da resposta de impulso usando a expressão (3.16). Temos, então,

$$v_k = r_{\alpha\beta}(k) \frac{s_\beta}{s_\alpha}.$$

A tabela 7.10, dá os estimados de  $v_k$ 's. Observamos que somente  $v_0$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são significativamente diferente de zero, assim  $b = 0$ ,  $s = 3$  e  $r = 0$ .

Resta-nos identificar o modelo do ruído que neste caso é cal

TABELA 7.9

*Correlação Cruzada entre a Série Prê-branqueada  
de Publicidade e de Venda*

<i>Lag k</i>	<i>Correlação Cruzada</i>	<i>Lag k</i>	<i>Correlação Cruzada</i>
0	0.305	10	0.050
1	0.337	11	0.089
2	0.284	12	-0.095
3	-0.065	13	-0.084
4	-0.222	14	0.120
5	-0.141	15	-0.199
6	-0.046	16	-0.155
7	0.230	17	-0.044
8	-0.100	18	-0.093
9	-0.044		

TABELA 7.10

*Estimador dos Pesos de Resposta de Impulso*

<i>Lag k</i>	<i>Peso <math>v_k</math></i>
0	0.229
1	0.253
2	0.213
3	-0.049
4	-0.166
5	-0.106
6	-0.034
7	0.172
8	-0.075
9	-0.033
10	0.037
11	0.067
12	-0.071
13	-0.063
14	0.090
15	-0.149
16	-0.116
17	-0.033
18	-0.070

culado pela fórmula

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}_0 x_t - \hat{v}_1 x_{t-1} - \hat{v}_2 x_{t-2}$$

Observando a função de autocorrelação do ruído, que se encontra na tabela 7.11, temos que um modelo possível para o ruído é dado por:

$$n_t = (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$$

Logo, o modelo da função de transferência está completamente identificado, e é dado por

$$(1 - B^{12}) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) (1 - B^{12}) X_t + (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t \quad (7.7)$$

Estimação deste modelo indica que os quatro componentes  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\theta_{12}$  são estatisticamente significantes e não havia autocorrelação residual. Entretanto, a média residual era significativamente diferente de zero, e para eliminar este problema foi acrescentado ao modelo um parâmetro de tendência e o modelo estimado final é dado por

$$(1 - B^{12}) Y_t = -36,0 + (0,25 + 0,21 B + 0,19 B^2) (1 - B^{12}) X_t + (1 - 0,66 B^{12}) a_t$$



TABELA 7.11

*Função de Autocorrelação para a Série de Ruído*

1 - 6	0.07	0.10	0.17	-0.37	0.16	-0.04
e.p.	0.17	0.17	0.17	0.17	0.20	0.20
7 - 12	-0.25	0.21	-0.04	-0.04	0.07	-0.45
e.p.	0.20	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21

*Média da Série* =  $-0.58812E+02$   
*Desvio Padrão da Série* =  $0.13610E+03$   
*Número de Observações* = 36

*Exemplo 7.3.* (Lorenzetti, 1976) A ilha de Cananéia, que se caracteriza por ser bastante estreita em relação ao seu comprimento, está abrigada de mar aberto, a leste pela Ilha Comprida e ao sul pela Ilha do Cardoso. Com o objetivo de estudar o comportamento da maré local, foi instalado defronte a Base de Pesquisas Oceanográficas, situada na cidade de Cananéia, um marégrafo. Naturalmente, estando este aparelho situado dentro de um canal, e bastante protegido por ilhas, é possível que o comportamento e características da maré por ele registrada, apresente diferenças significativas em relação a maré existente fora do sistema de baías e ilhas. Justamente com o objetivo de estudar esta questão, foi instalado um marégrafo na Ilha de Bom Abrigo. As marés no canal de Cananéia estão registradas desde 01/03/1954 e na Ilha do Bom Abrigo, os registros são observações de aproximadamente um mês e meio, no período de 11/12/61 a 23/12/62.

Na tentativa de explicar a maré em Cananéia, a maré registrada em Bom Abrigo, foi considerada como série de entrada (função exitadora) e aquela como série de saída. Temos 1032 observações, resultantes da amostragem dos registros com intervalo de amostragem de uma hora. Assim o model usado para explicar esse sistema é da forma

$$y_t + M_c = \sum_{j=0}^{\infty} v_j x_{t-j},$$

onde  $y_t$  e  $x_t$  são respectivamente as marés em Cananéia e Bom Abrigo, reduzidas da média, e  $M_c$  é a maré média de Cananéia.

Usando a janela de Tukey foram estimados o espectro de coerência e de fase entre as oscilações de nível de mar para Bom Abrigo e

Cananéia, para diversos valores de  $M = \text{ponto de truncamento}$ . Estes es  
pectros estão representados nas figuras 7.5 e 7.6, o número  $\nu$  indicado  
em cada uma das figuras se refere ao número de graus de liberdade uti  
lizados nas estimativas dos espectros.

O primeiro fato marcante numa comparação entre estas figuras  
é a grande redução da variância destas funções com o aumento de  $\nu$ . Os  
espectros de fase e de coerência, para  $\nu = 10$ , não nos permite qual  
quer conclusão devido a enorme flutuação. A partir de  $\nu = 20$  os espec  
tros já começam a se estabilizar, apresentando pouca variabilidade com  
a mudança de  $\nu$ .

Examinando os espectros de coerência, esses revelam valores  
bastante altos, próximos da unidade, justamente nas bandas de frequên  
cia onde estão centrados os picos de energia da maré, que foram encon  
trados nos espectros de energia das marés de Cananéia e do Bom Abrigo  
que se encontram nas figuras 7.7 e 7.8, e observando-se entre essas  
bandas de energia de maré, nota-se um abrupto amortecimento de coerên  
cia. Deve-se observar um suave amortecimento no nível destes platôs  
de alta coerência até  $f \approx 0,16 \text{ cph}$ , a partir daí nota-se uma abrupta  
queda na coerência, que então passa a oscilar de modo mais ou menos  
aleatório. Explicações para este comportamento do espectro de coerên  
cia, entre as marés de Bom Abrigo e de Cananéia foram encontradas por  
Lorenzetti, 1976, mas que não discorreremos aqui por não ser este o ob  
jetivo deste trabalho.

Os gráficos não foram estendidos até a frequência de corte,  $f_C = 0,5$  cph (ciclo por hora) pois, a partir de  $f \approx 0,16$  cph, os valores da coerência além de serem muito baixos, apresentam grande variância.

Apesar dos espectros de coerência começarem a apresentar baixos valores a partir de frequências menores que  $f_C/2$ , podemos considerar como boa a coerência entre as oscilações de nível entre os dois locais, uma vez que os valores próximos da unidade cobrem uma região do espectro na qual está concentrada a maior parte de energia.

Ao analisarmos conjuntamente os espectros de coerência e fase verifica-se que estes últimos tendem a se estabilizar, apresentando variações suaves nas faixas de alta coerência, e nas faixas de baixa coerência os valores do espectro de fase, passam a oscilar com grande variância.

Assim o fato da coerência ser alta para a parte do espectro onde está concentrada grande parte da energia, sugere que a modelagem do sistema por filtro linear é bastante plausível.

Tendo calculado a função de resposta de frequência  $H(f)$  através da fórmula (6.46), calculou-se a transformada de Fourier inversa desta função a fim de se obter a estimativa da função resposta ao impulso do sistema. Na figura 7.10, estão locados os valores de  $v_k$  da função de resposta ao impulso correspondente ao espectro cruzado com 30 graus de liberdade.

Tomando como valores de entrada os valores de Bom Abrigo, uti

lizou-se a expressão

$$y_t + M_c = \sum_{k=0}^K v_k x_{t-k}$$

onde  $y_t$  e  $x_t$  representem os valores de flutuação do nível do mar para Cananéia e Bom Abrigo em torno dos seus respectivos níveis médios;  $M_c$  representa o nível médio do mar para Cananéia. Na fórmula utilizou-se  $K = 84$  uma vez que se verificou que daí em diante os valores de  $v_k$  eram tão pequenos que poderiam ser desprezadas.

A figura 7.10, mostra a comparação entre os valores previstos pela fórmula acima com os valores observados. Como se vê, as duas curvas apresentam boa concordância em fase, sendo visível entretanto uma sensível redução de amplitude nas variações de nível para a curva prevista. Acredita-se que esta redução seja devida ao alisamento aplicado aos espectros amostrais através da janela espectral escolhida.

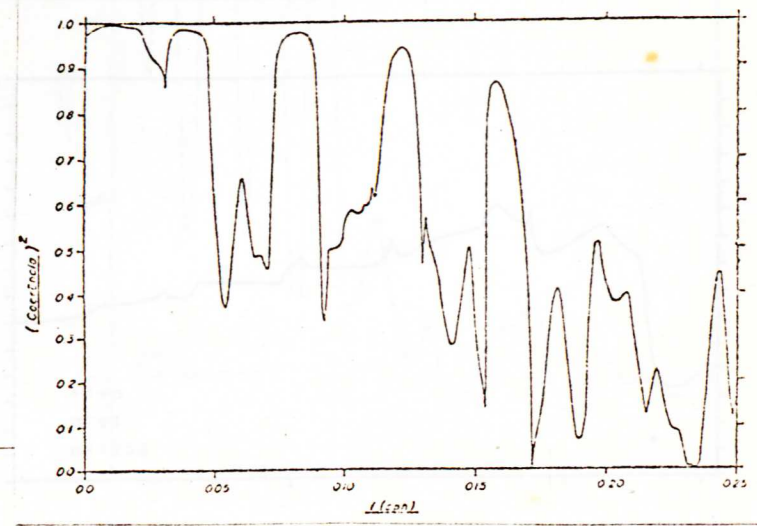
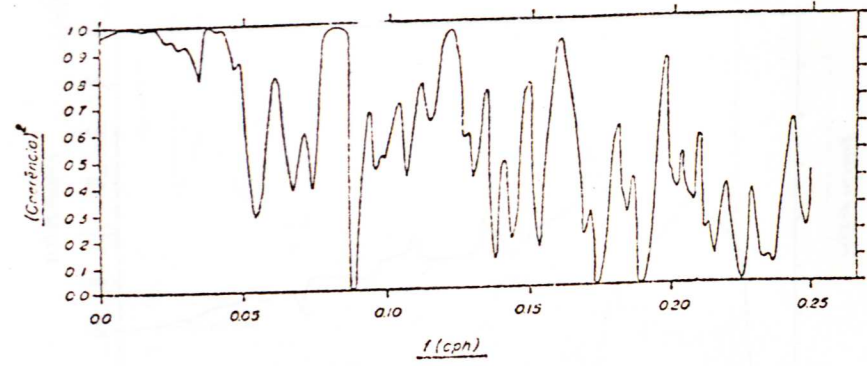
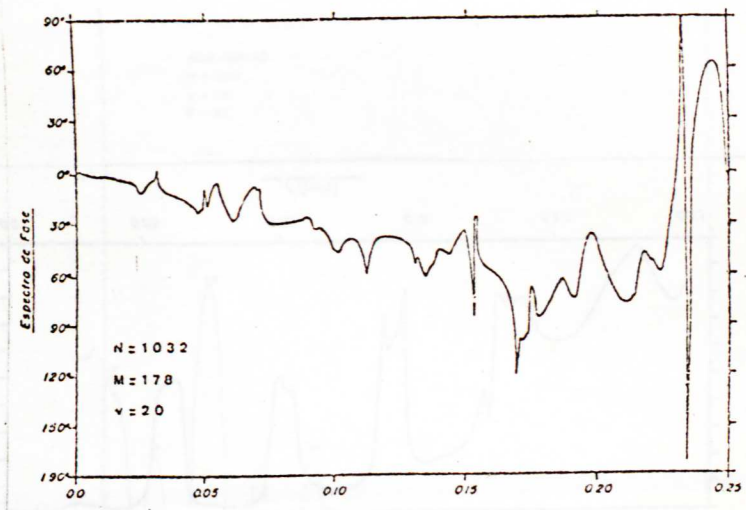
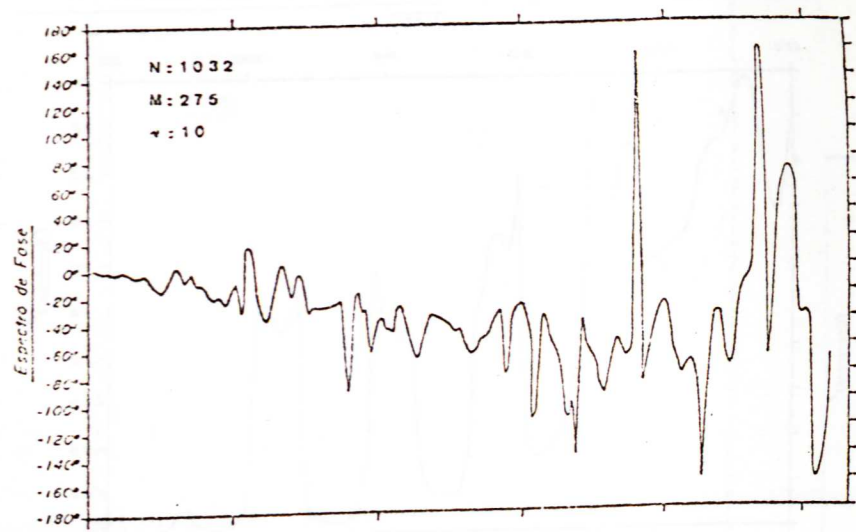


Figura 7.5 Espectros de Fase (superior) e coerência (inferior) para as oscilações do nível do mar observadas simultaneamente em Bom Abrigo e Cananéia.

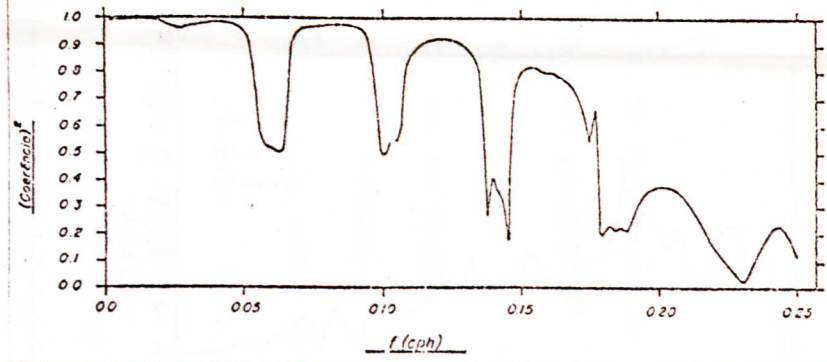
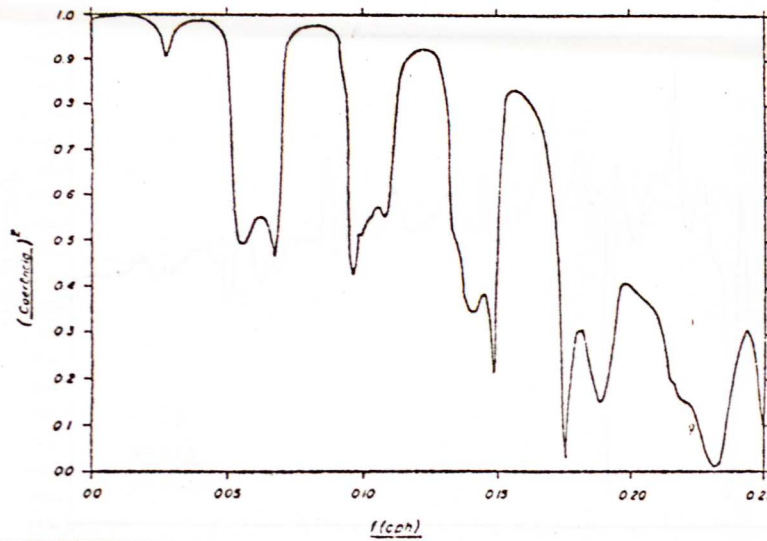
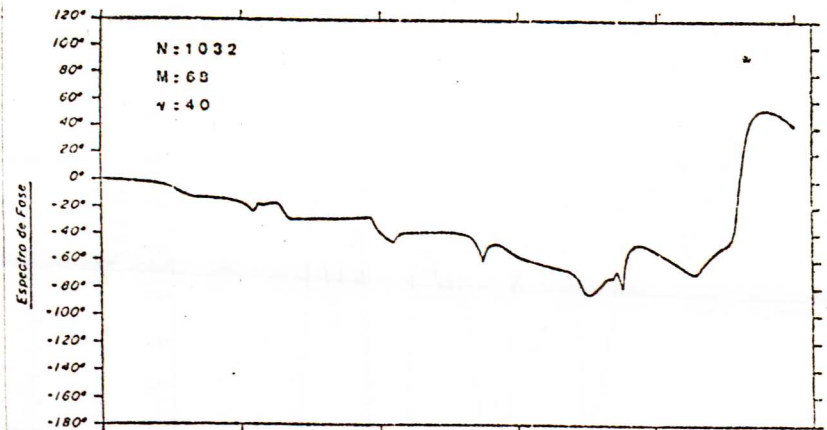
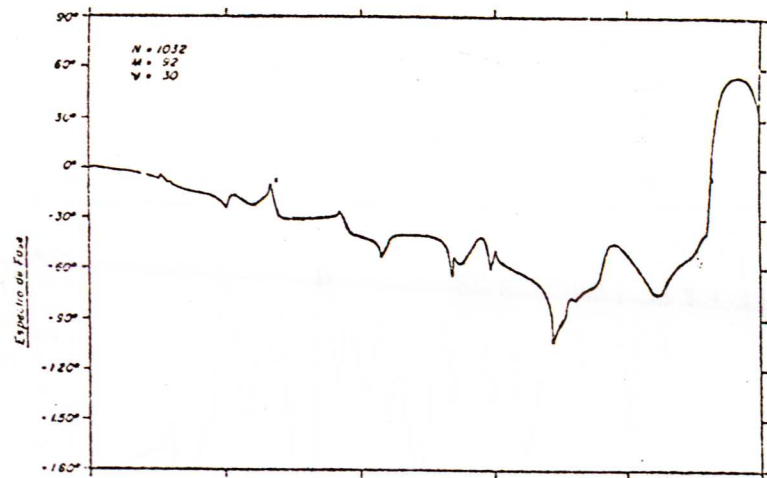


Figura 7.6 Espectros de fase (superior) e coerência (inferior) para as oscilações do nível do mar observadas simultaneamente em Bom Abrigo e Cananéia.

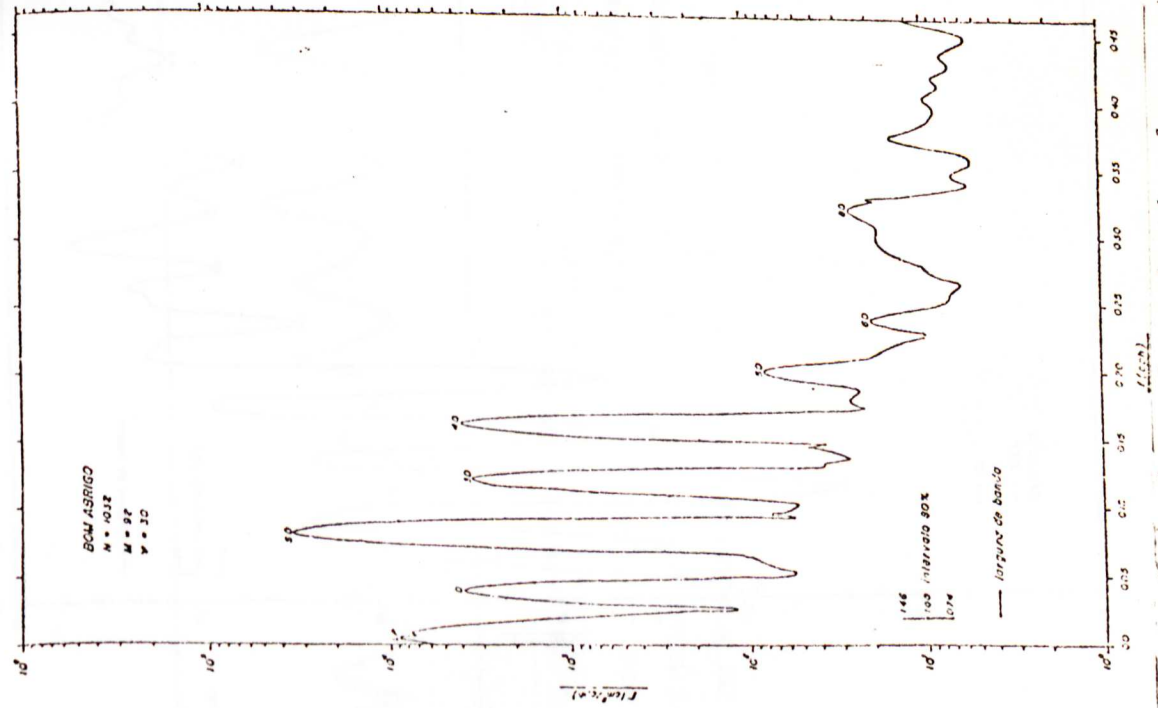
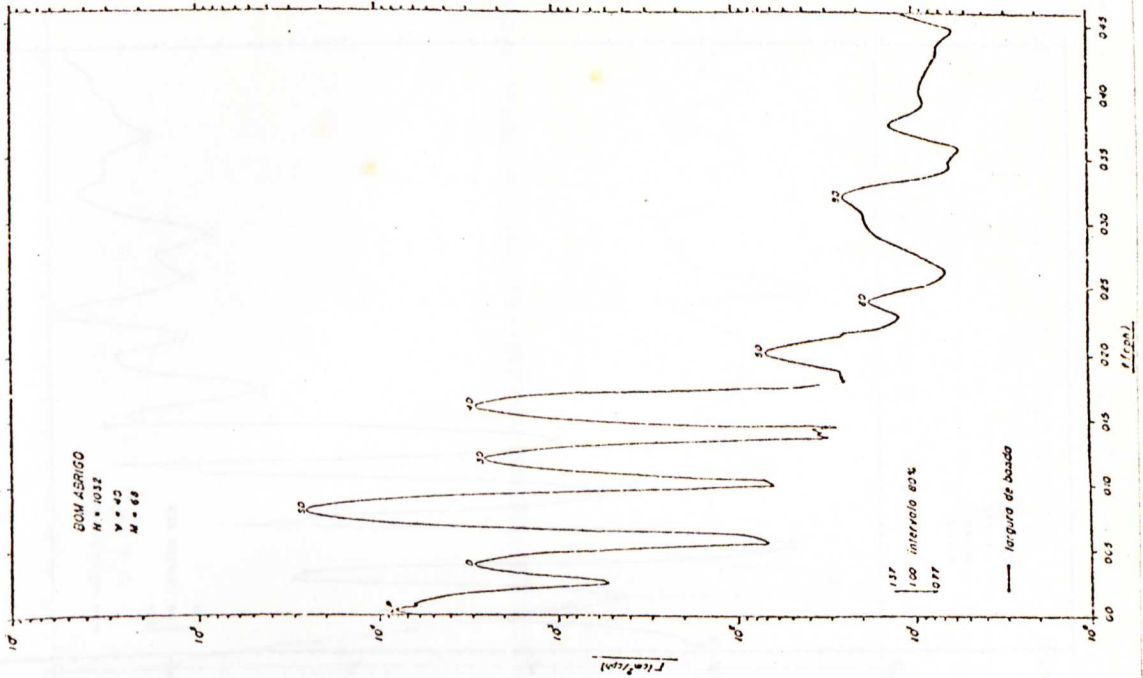


Figura 7.7 Gráfico da estimativa do espectro de energia das oscilações do nível do mar observadas em Bom Abrigo



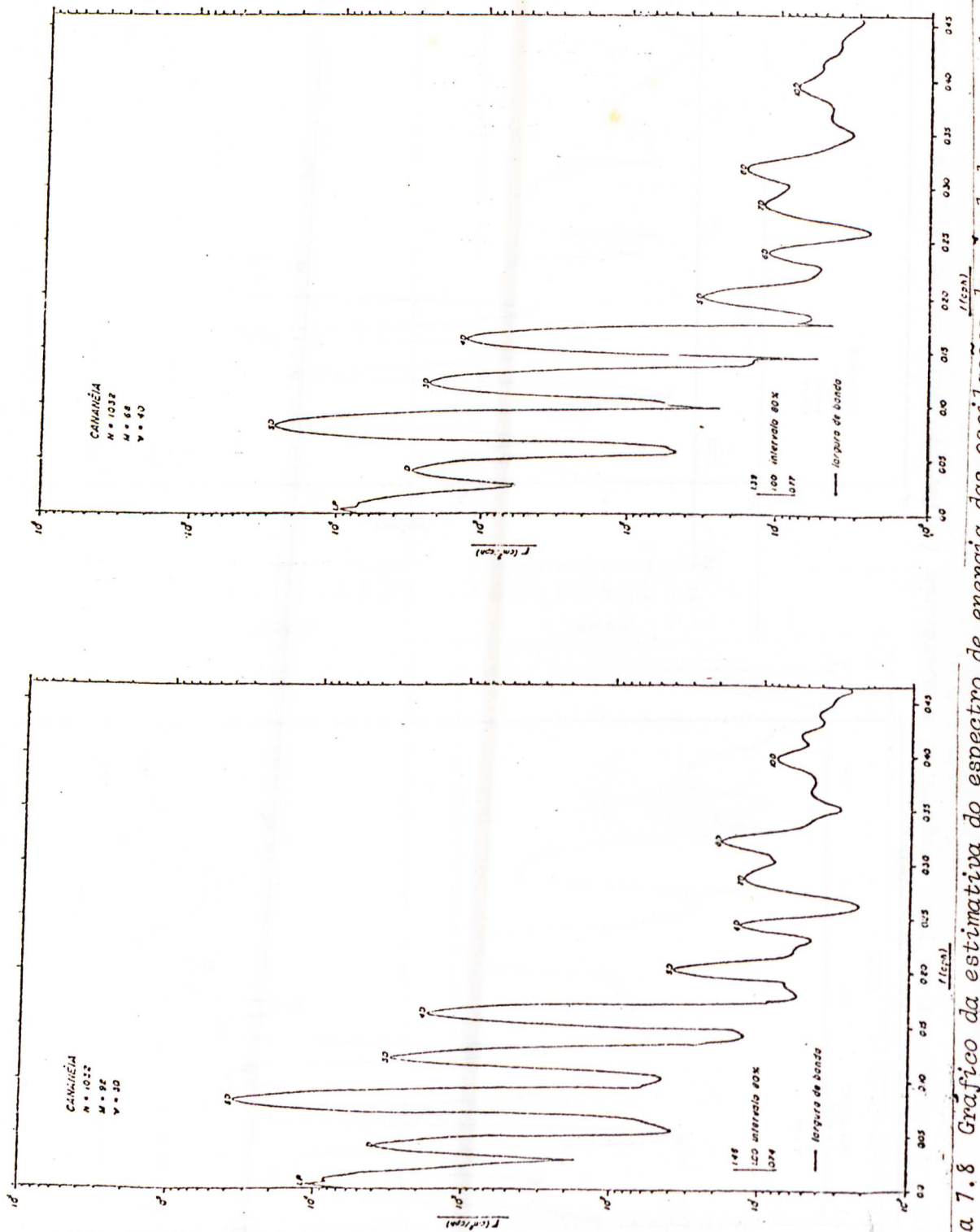


Figura 7.8 Gráfico da estimativa do espectro de energia das oscilações do nível do mar observadas em Cananéia.

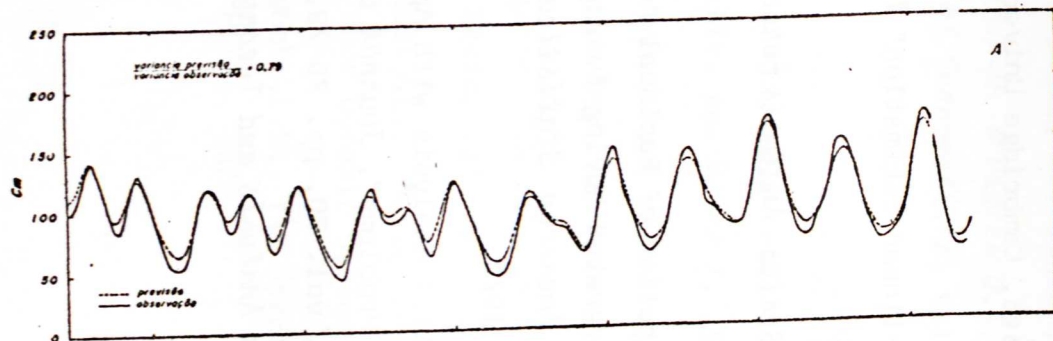


Figura 7.10 Comparação entre os valores de variação horária do nível do mar para Cananéia obtidos através da convolução de  $v_k$  com os valores para Bom Abrigo e os valores observados.

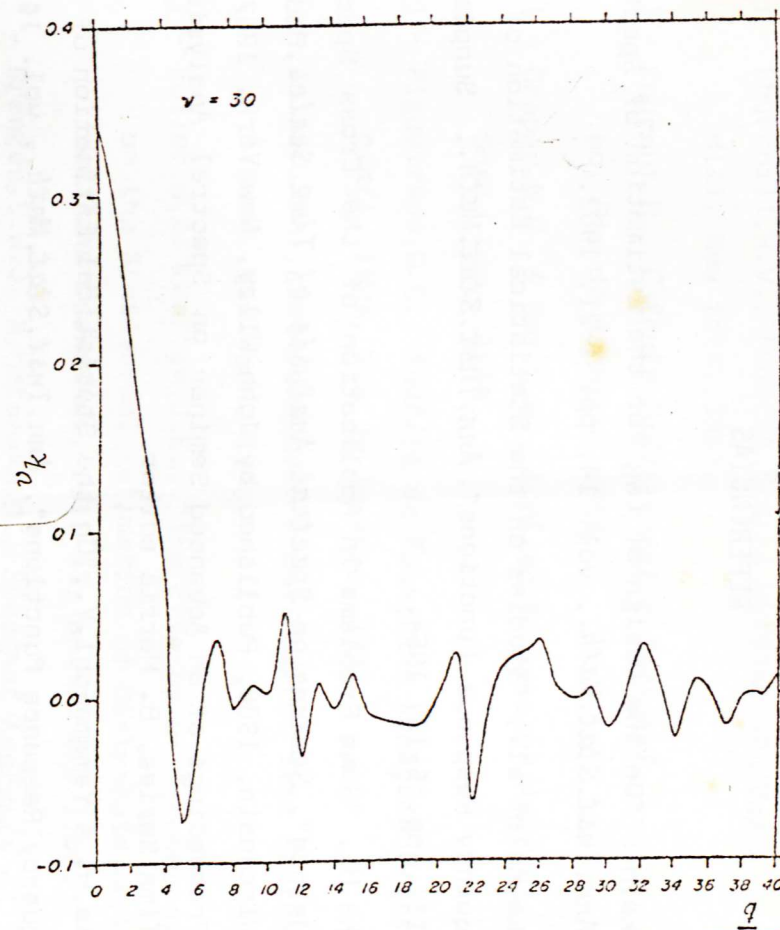


Figura 7.9 Estimativa da função de resposta ao impulso  $v_k$  obtida de um espectro com  $\nu = 30$ .

REFERÊNCIAS

- [1] - Akaike, H., "On the Design of Lag for the Estimation of Spectra", *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 14, pp. 1-21, 1962.
- [2] - Akaike, H. et al., "Studies on the Statistical Estimation of Frequency Response Functions", *Ann. Inst. Stat. Math.*, Supplement III, pp. 5-15, 1964.
- [3] - Akaike, H., "Some Problems in Application of the Cross Spectral Method", *Seminar on Spectral Analysis of Time Series*, Madison, Wisconsin, 1966, Published by John Wiley, New York, 1967, as Proceedings of an Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series, B. Harris editor.
- [4] - Akaike, H. & Yamamouchi, Y., "On the Statistical Estimation of Frequency Response Functions", *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 14, pp. 23-56, 1962.
- [5] - Bartlett, M.S., *Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1955.
- [6] - Booth, G.W. & Peterson, T.L., "Non-linear Estimation", *I.B.M.*, Share Program Pa n° 687 WLNLI L (1958).
- [7] - Box, G.E.P. & Jenkins, G.M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, 1970.
- [8] - Box, G.E.P. & Pierce, D.A., "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive - Integrated Moving Average Time Series Models", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 65, pp. 1509-1526, 1970.
- [9] - Box, G.E.P. & Tiao, G.C., "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 70, pp. 70-79, 1975.
- [10] - Brillinger, D.R., *Time Series, Data Analysis and Theory*, Holt, New York, 1975.

- [11] - Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [12] - Courant, R., *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. II, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1966.
- [13] - Draper, N.R. & Smith, H., *Applied Regression Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [14] - Figueiredo, D.G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [15] - Fuller, W.A., *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [16] - Fuller, W.A. & Martin, J.E., "The Effects of Autocorrelated Errors on the Statistical Estimation of Distributed Lag Models", *Journal Farm Economics*, vol. 43, pp. 71-82, 1961.
- [17] - Granger, C.W.J. & Hatanaka, M., *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton, 1964.
- [18] - Haugh, L.D. & Pierce, D.A., "Causality in Temporal Systems", *Journal of Econometrics*, Vol. 5, pp. 265-293, 1977.
- [19] - Hemer, R.M. & Johansson, J.K., "An Exposition of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising-Sales Relationship", *Journal of Marketing Research*, vol. XIV, pp. 239-277, 1977.
- [20] - Jenkins, G.M. & Watts, D.G., *Spectral Analysis its Applications*, Holden Day, San Francisco, 1969.
- [21] - Jorgenson, D.W., "Rational Distributed Lags Functions", *Econometrica*, vol. 32, pp. 135-149, 1966.
- [22] - Kaviczky, L., "Design of Experiments for the Identification of Linear Dynamic Systems", *Technometrics*, vol. 17, pp. 303-308, 1975.
- [23] - Koopmans, L.H., *The Spectral Analysis of Time Series*, Academic Press, 1974.

- [24] - Lorenzetti, J.A., *Aplicação da Técnica de Análise Espectral Cruzada ao Estudo de Correlação entre Oscilações do Nível de Mar Observadas em Cananéia e Bom Abrigo*, Dissertação de Mestrado, Instituto Oceanográfico - USP, 1976.
- [25] - Morettin, P.A., *Análise Harmônica de Processos Estocásticos*, IMPA, CNPq, 1979.
- [26] - Nardizini, L.J., *Basic Circuits and Electronics Experiments*, D. Van Nostrand Company, 1973.
- [27] - Nelson, C.R., *Applied Time Series Analysis for Managerial Forecasting*, Holden Day Inc., 1975.
- [28] - Nelson, C.R. & Schwert, G.W., "Estimating the Parameters of Distributed Lag Model from Cross-section Data: the Case of Hospital Admissions and Discharges", *Journal of the Amer. Statist. Assoc.* vol. 69, pp. 627-633, 1974.
- [29] - Pack, D.J., "Concepts, Theories and Techniques Revealing Time Series Interrelationships", *Decision Sciences*, vol. 8, pp. 377-402, 1977a.
- [30] - Pack, D.J., "Forecasting Time Series Affected by Identifiable Isolated Events", *Working Paper Series 77-46*, College of Adm. Scienc. , Ohio State Univ., Sept, 1977b.
- [31] - Palda, K.S., *The Measurement of Cumulative Advertising Effect*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1964.
- [32] - Parzen, E., "An Approach to Time Series Analysis", *Ann. of Math. Statistic.*, vol. 32, pp. 951-981, 1961.
- [33] - Pierce, D.A., "Least Squares Estimation in the Regression Model with Autoregressive-Moving Average Errors", *Biometrika*, vol. 58, pp. 299-312, 1971.
- [34] - Pierce, D.A., "Least Squares Estimation in Dynamic-Disturbance Time Series Models", *Biometrika*, vol. 59, pp. 73-78, 1972a.
- [35] - Pierce, D.A., "Residual Correlations and Diagnostic Checking in Dynamic-Disturbance Time Series Models", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 67, pp. 636-640, 1972b.

