

ANÁLISE ESPECTRAL DE SÉRIES TEMPORAIS  
COM OBSERVAÇÕES IRREGULARES

MARIANE STREIBEL

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. PEDRO ALBERTO MORETTIN

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pela FINEP

- SÃO PAULO, março de 1980

## AGRADECIMENTOS

Ao concluirmos este trabalho desejamos externar nossos agradecimentos

ao Prof. Dr. Pedro A. Morettin pela orientação segura;

ã Cátia S. Montagni pela elaboração do programa de computador;

ao Prof. Dr. Herbert G. Calhau pela iniciação na área estatística;

ã colega Jandyra M. G. Fachel pela amizade durante o curso de pós-graduação;

ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo excelente trabalho de datilografia.

São Paulo, março de 1980

Mariane Streibel



## Í N D I C E

Cap. 1 - INTRODUÇÃO . . . . .	1
Cap. 2 - ALGUNS RESULTADOS DA ANÁLISE ESPECTRAL . . . . .	4
2.1 - Introdução . . . . .	4
2.2 - Séries Temporais Estacionárias . . . . .	4
2.3 - Estimacão da Função Densidade Espectral. . . . .	7
2.4 - Estimadores Suavizados . . . . .	11
2.5 - Esperança e Variância Assintóticas dos Estimadores Suavizados . . . . .	16
2.6 - Distribuição Assintótica dos Estimadores Suavizados. . . . .	18
Cap. 3 - TEMPOS DE AMOSTRAGEM SEGUINDO UM PADRÃO PERIÓDICO. . . . .	19
3.1 - Introdução . . . . .	19
3.2 - Estimacão da Função Densidade Espectral. . . . .	19
3.3 - Variância do Estimador. . . . .	24
3.4 - Limite Superior da Variância do Estimador. . . . .	36
3.5 - Planejamento para uma Amostragem Periódica . . . . .	40
Cap. 4 - TEMPOS DE AMOSTRAGEM ALEATÓRIOS. . . . .	47
4.1 - Introdução . . . . .	47
4.2 - O Caso Binomial. . . . .	48
4.3 - O Caso Geral . . . . .	67
4.4 - Um Procedimento Alternativo. . . . .	76
Cap. 5 - SÉRIES TEMPORAIS CONTÍNUAS - TEMPOS DE AMOSTRAGEM IRREGULARES	80
5.1 - Introdução . . . . .	80
5.2 - O Fenômeno "Aliasing". . . . .	81
5.3 - Amostragem em Intervalos de Tempos Irregulares . . . . .	86
5.4 - Periodograma Compensado. . . . .	90
Cap. 6 - APLICAÇÕES . . . . .	96
6.1 - Aplicação 1 - Tempos Igualmente Espaçados. . . . .	97
6.2 - Aplicação 2 - Tempos de Amostragem Seguindo um Padrão Periódico. . . . .	98
6.3 - Aplicação 3 - Tempos de Amostragem Seguindo um Processo de Renovação. . . . .	99
6.4 - Aplicação 4 - Dados Oceanográficos . . . . .	101
6.5 - Tabelas e Figuras. . . . .	103
CONCLUSÕES FINAIS. . . . .	119
Referências . . . . .	121

## CAPITULO 1

### INTRODUÇÃO

Uma série temporal pode ser analisada no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Se a série for estacionária, isto é, se a série mantém as mesmas características gerais no decorrer do tempo, e basicamente estivermos interessados na periodicidade da série, a análise no domínio da frequência, onde a função densidade espectral tem papel fundamental, é de grande utilidade, devido às interpretações físicas dos fenômenos sob consideração serem imediatas, ou pelo menos mais fáceis de serem feitas.

O objetivo do presente trabalho é estimar a função densidade espectral de uma série temporal estacionária a partir de uma série amostrada em tempos não igualmente espaçados.

A motivação do trabalho se deve ao fato de que muitas vezes, a série em estudo apresenta perda de algumas observações. Isso ocorre frequentemente na Astronomia, quando enfrentamos problemas como reparos no telescópio ou intempéries, bem como na Oceanografia, quando ao medirmos a temperatura ou a salinidade do mar em diversas profundidades e possuímos apenas um instrumento, não podendo deixá-lo o tempo suficiente em cada profundidade.

Inicialmente, no capítulo 2, baseados em Koopmans [1974] e Brillinger [1975], abordamos alguns conceitos fundamentais sobre Análise Espectral, considerando a série amostrada em intervalos de tempo igualmente espaçados, bem como apresentamos estimadores assintoticamente não viciados e consistentes da função de densidade espectral.

No capítulo 3, segundo Jones [1962] e Parzen [1963], apresentamos um estimador da função densidade espectral, para série temporal estacionária, gaussiana, amostrada em grupos de  $\alpha$  observações, separados por  $\beta$  observações perdidas, e com auxílio de alguns resultados da Análise de Fourier mostramos que o estimador apresentado é consistente, e obtivemos um limite superior para a variância do estimador. Além disso tratamos o caso considerado por Van Ness [1976] em que os tempos de amostragem não são igualmente espaçados, porém seguem um padrão periódico.

A seguir, é analisado no capítulo 4 um caso mais geral de perdas. Dois enfoques diferentes foram estudados. Primeiramente com base nos artigos de Scheinok [1965] e Bloomfield [1970] apresentamos estimadores consistentes considerando o processo aleatório associado ao esquema de amostragem, causador da perda de algumas observações, para depois, seguindo Jones [1971] tratar o problema sem nos preocuparmos se o processo causador da perda de observações é aleatório ou determinístico.

O capítulo 5 versa sobre a estimação da função den-



sidade espectral de uma série temporal contínua, a partir de uma série amostrada discreta. Neste capítulo, além de tratarmos o problema de "aliasing" que ocorre quando amostramos a série em intervalos de tempo igualmente espaçados, apresentamos dois estimadores da função densidade espectral, um sugerido por Masry e Lui [1975] e o outro por Ferraz - Mello [1977], para o caso em que a série é amostrada em intervalos de tempo irregulares.

Finalmente, no capítulo 6 fizemos algumas aplicações dos resultados teóricos obtidos nos capítulos anteriores. Um programa em FORTRAN foi desenvolvido por Cátia S. Montagni e se encontra à disposição no Setor de Estatística Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

## CAPÍTULO 2

### ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA ESPECTRAL

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados fundamentais da Análise Espectral, que serão utilizados nos capítulos posteriores. Nosso maior interesse está em definir séries temporais estacionárias, função de autocovariância e função densidade espectral, obter estimadores para tais funções considerando a série temporal amostrada em intervalos de tempo igualmente espaçados, e estudar propriedades de tais estimadores para que possamos compará-los com os estimadores obtidos quando a série temporal é amostrada em intervalos de tempo não igualmente espaçados. O conteúdo deste capítulo pode ser visto em Koopmans [1974] e Brillinger [1975].

#### 2.2 - SÉRIES TEMPORAIS ESTACIONÁRIAS

DEFINIÇÃO 2.2.1 - Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Uma família indexada (real ou complexa) de variáveis aleatórias,  $\{X(t), t \in T\}$  definida neste espaço é chamada uma *série temporal* (ou processo estocástico). Se  $T$  consistir de números igualmente es-

paçados  $k\Delta t$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $\Delta t > 0$ , a série temporal é discreta e, se  $T$  consistir de um intervalo de números reais, a série é dita contínua.

DEFINIÇÃO 2.2.2 - Uma série temporal é dita estritamente estacionária se:

$$\begin{aligned} P[X(t_1 + \tau) \in S_1, X(t_2 + \tau) \in S_2, \dots, X(t_n + \tau) \in S_n] = \\ = P[X(t_1) \in S_1, X(t_2) \in S_2, \dots, X(t_n) \in S_n], \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $\tau \in T$  e  $S_1, S_2, \dots, S_n \in \mathcal{F}$ .

DEFINIÇÃO 2.2.3 - Uma série temporal complexa é dita fracamente estacionária ou estacionária de 2ª ordem, ou simplesmente estacionária se:

- i)  $E|X^2(t)| < \infty$ ,
- ii)  $E[X(t)] = m$ , constante para todo  $t \in T$ ,
- iii)  $E[X(t)\overline{X(s)}]$  depende somente de  $t - s$ ,  $t, s \in T$ .

Como a esperança de  $X(t)$  é constante, podemos, sem perda de generalidade, considerá-la igual a zero e então podemos escrever

$$C(\tau) = \text{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = E[X(t)\overline{X(t+\tau)}].$$

DEFINIÇÃO 2.2.4 - A função  $C(\tau) = \text{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\}$ ,  $\tau \in T$ , é chamada função de autocovariância da série temporal.

TEOREMA 2.2.1 - Seja  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  uma série temporal estacionária, complexa, contínua em média quadrática. Se  $C(\tau)$  é a função de autocovariância da série, então  $C(\tau)$  pode ser representada na forma



$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (2.1)$$

onde  $F(\lambda)$  é uma função não negativa, não decrescente e limitada, denominada função de distribuição espectral.

No caso em que  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  a função de autocovariância pode ser representada na forma

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda), \quad \tau \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

TEOREMA 2.2.2 - A toda série temporal estacionária, complexa,  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  está associado um processo complexo  $Z(\lambda)$ , de incrementos ortogonais, tal que  $X(t)$  pode ser representada na forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \quad (2.3)$$

onde  $Z(\lambda)$  é chamado processo espectral associado a  $X(t)$  e

- i)  $EZ(\lambda) = 0$ ,
- ii)  $E|Z(\lambda)|^2 = F(\lambda)$ ,
- iii)  $E dZ(\lambda) \overline{dZ(\mu)} \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda \neq \mu \\ dF(\lambda) & \text{para } \lambda = \mu \end{cases}$

Se a série for real, então  $Z(-\lambda) = \overline{Z(\lambda)}$ , e se a série for discreta, isto é,  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , temos que

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda). \quad (2.4)$$

OBSERVAÇÃO 2.2.1 - Se  $F(\lambda)$  é derivável e  $F'(\lambda) = f(\lambda)$  então pa-

ra  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  a função de autocovariância  $C(\tau)$  pode ser escrita na forma

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (2.5)$$

ou seja,  $C(\tau)$  é a transformada de Fourier de  $f(\lambda)$  e esta é a função densidade espectral ou espectro de 2ª ordem ou simplesmente espectro de  $X(t)$ .

OBSERVAÇÃO 2.2.2 - Se  $C(\tau)$  é absolutamente integrável a transformada inversa de Fourier de  $C(\tau)$ ,  $f(\lambda)$ , é expressa na forma

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau, \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (2.6)$$

Se a série é discreta,  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , substituiremos os limites de integração de (2.5) por  $-\pi$  e  $\pi$  ou seja

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} f(\lambda) d\lambda, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

e se  $C(\tau)$  é absolutamente somável, o espectro de 2ª ordem é expresso na forma

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (2.8)$$

### 2.3 - ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL

Vamos considerar uma série temporal discreta, estacionária, complexa, com média zero, gaussiana, isto é, para  $V$   $t_1, \dots, t_n$ ,  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  tem distribuição normal complexa,

n-variada, com espectro contínuo. Vamos supor ainda que a série é observada em N tempos igualmente espaçados.

A transformada finita de Fourier, normalizada, de  $X(t)$ , é expressa por

$$Z_{\nu}^{(N)} = \frac{1}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\lambda_{\nu} t}, \quad (2.9)$$

onde  $\lambda_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{N}$ , para  $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil \leq \nu \leq \lceil \frac{N}{2} \rceil$ , que usando a representação de  $X(t)$ , definida por (2.4), pode ser escrita na forma

$$Z_{\nu}^{(N)} = \frac{1}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^N e^{-i(\lambda_{\nu}-\lambda)t} dZ(\lambda). \quad (2.10)$$

A esperança de  $|Z_{\nu}^{(N)}|^2$  é aproximadamente igual a  $f(\lambda_{\nu})$ , pois, usando (2.9) e o Teorema 2.2.2, temos

$$\begin{aligned} E|Z_{\nu}^{(N)}|^2 &= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{-i(\lambda_{\nu}-\lambda)t} e^{i(\lambda_{\nu}-u)s} E dZ(\lambda) d\overline{Z(u)} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{t=1}^N e^{-i(\lambda_{\nu}-\lambda)t} \right|^2 f(\lambda) d\lambda, \\ &\approx f(\lambda_{\nu}), \end{aligned}$$

para N suficientemente grande, dado que

$$F_N(\lambda-\lambda_{\nu}) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N e^{i(\lambda-\lambda_{\nu})t} \right|^2$$

é o núcleo de Fejér, (ver Figueiredo [1977], pág. 81).

O fato da esperança de  $|Z_v^{(N)}|^2$  ser aproximadamente igual a  $f(\lambda_v)$ , nos sugere um estimador não viciado (no limite) para  $f(\lambda_v)$ . Tal estimador, é chamado periodograma, denotado por  $I_N(\lambda_v)$ , e sua expressão é

$$I_N(\lambda_v) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N X(t)X(s)e^{-i\lambda_v(t-s)}. \quad (2.11)$$

Do fato de  $Z_v^{(N)}$  ser uma combinação linear de variáveis aleatórias normalmente distribuídas, temos que  $Z_v^{(N)}$  tem distribuição normal multivariada complexa, e além disso pode-se demonstrar que as variáveis aleatórias  $Z_v^{(N)}$  são assintoticamente independentes, e, conseqüentemente, as variáveis  $I_N(\lambda_v)$  são assintoticamente independentes e têm distribuição assintótica qui-quadrado com 2 graus de liberdade para  $v \neq 0$ ,  $N/2$  e com 1 grau de liberdade para  $v = 0$ ,  $N/2$ , ou seja

$$I_N(\lambda_v) \sim \frac{1}{2}f(\lambda_v)\chi_2^2, \text{ para } v \neq 0, N/2$$

$$I_N(\lambda_v) \sim f(\lambda_v)\chi_1^2, \text{ para } v = 0, N/2.$$

Ver Koopmans [1974] para detalhes.

Temos, então, que a média e a variância assintóticas do periodograma são expressas por

$$E I_N(\lambda_v) = f(\lambda_v),$$

$$\text{Var } I_N(\lambda_v) = f^2(\lambda_v), \text{ para } v \neq 0, N/2$$

$$\text{Var } I_N(\lambda_v) = 2f^2(\lambda_v), \text{ para } v = 0, N/2.$$

Teoricamente, o periodograma pode ser definido para todo  $\lambda$ ,  $-\pi < \lambda \leq \pi$ , pela expressão

$$I_N(\lambda) = |Z^{(N)}(\lambda)|^2$$

onde

$$Z^{(N)}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\lambda t},$$

mas na prática a transformada finita de Fourier  $Z^{(N)}(\lambda)$  só pode ser calculada num conjunto finito de frequências  $\lambda_\nu$ ,  $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil \leq \nu \leq \lceil \frac{N}{2} \rceil$ . Isto porém não representa nenhum problema, pois a transformada finita de Fourier,  $Z^{(N)}(\lambda)$ , completamente determinada pelas frequências  $\lambda_\nu$ ,  $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil \leq \nu \leq \lceil \frac{N}{2} \rceil$ .

Brillinger [1975] mostrou que a condição de normalidade do processo não é necessária, ou seja, sob determinadas condições de regularidade, o periodograma tem distribuição assintótica qui-quadrado com 2 graus de liberdade para  $\lambda \neq 0, \pi$  e com 1 grau de liberdade para  $\lambda = 0, \pi$ , bem como, que para qualquer  $\lambda$ ,  $-\pi < \lambda \leq \pi$ , tem-se que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E I_N(\lambda) = f(\lambda),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } I_N(\lambda) = f^2(\lambda), \quad \lambda \neq 0, \pi$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } I_N(\lambda) = 2f^2(\lambda), \quad \lambda = 0, \pi.$$

Das expressões acima temos, a menos que  $f(\lambda) = 0$ , que a  $\text{Var } I_N(\lambda)$  não tende para zero quando  $N$  tende para infinito, ou seja, o



periodograma é um estimador assintoticamente não viciado, porém não consistente de  $f(\lambda)$ .

Vamos agora construir outros estimadores, consistentes, de  $f(\lambda)$ . Primeiramente escrevamos a função densidade espectral na forma

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} C(k). \quad (2.12)$$

Um estimador natural de  $f(\lambda)$  será

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} \hat{C}(k), \quad (2.13)$$

onde  $\hat{C}(k)$  é um estimador viciado da função de autocovariância definido por (supondo  $EX(t) = 0$ )

$$\hat{C}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} X(t)X(t+|k|) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Se no lugar de  $1/N$  colocarmos  $1/(N-|k|)$  obteremos um estimador não viciado de  $C(k)$ , entretanto este estimador tem erro quadrático maior do que o anterior.

Pode se demonstrar que o estimador de  $f(\lambda)$  obtido desta forma é o próprio periodograma, e portanto é não consistente.

#### 2.4 - ESTIMADORES SUAVIZADOS

Uma maneira de construirmos estimadores consistentes



tes, assintoticamente não viciados, é suavizando a função de autocovariância através de uma seqüência de pesos de tal sorte que iremos omitir as estimativas mais variáveis. A seqüência de pesos  $w_M(k)$ ,  $k=0, \pm 1, \dots$  é definida por  $w_M(k) = w(k/M)$ , onde  $w(v)$  é uma função real, seccionalmente lisa, tal que  $w(v) = 0$ , para  $|v| > 1$ . Se  $w(v)$  é uma função par e  $0 \leq w(v) \leq w(0) = 1$ , para  $|v| \leq 1$ , então a seqüência  $w_M(k)$ ,  $k=0, \pm 1, \dots$ , tem as seguintes propriedades:

- i)  $0 \leq w_M(k) \leq w_M(0) = 1$ ,
- ii)  $w_M(-k) = w_M(k)$ , para todo  $k$ ,
- iii)  $w_M(k) = 0$ , para  $|k| > M$ .

O estimador

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} w_M(k) \hat{C}(k) \quad (2.15)$$

é denominado *estimador suavizado de covariâncias*. O inteiro  $M < N$  é chamado "lag number", ou ponto de truncamento, a seqüência de pesos  $w_M(k)$  é chamado "lag window", e a transformada de Fourier de  $w_M(k)$ ,  $W_M(\lambda)$ , é a janela espectral, expressa na forma

$$W_M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} w_M(k). \quad (2.16)$$

Das propriedades da seqüência de pesos, facilmente podemos verificar que

- i)  $W_M(-\lambda) = W_M(\lambda)$ ,

$$\text{ii) } \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) d\lambda = 1.$$

O estimador suavizado de covariâncias é a transformada de Fourier ao produto  $w_M(k)\hat{C}(k)$ , portanto é equivalente à convolução do produto das respectivas transformadas de Fourier, ou seja

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\mu) I_N(\mu) d\mu. \quad (2.17)$$

Se aproximarmos a integral pela soma de Riemann, o estimador

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} W_M(\lambda-\lambda_\nu) I_N(\lambda_\nu) \quad (2.18)$$

tem a mesma distribuição assintótica que o estimador suavizado de covariâncias.

De um modo geral, para qualquer função  $K(\lambda)$ , real, simétrica, periódica, tal que

$$\sum_{\nu=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} K(\lambda_\nu) = 1,$$

podemos obter estimadores suavizados com a mesma distribuição assintótica que o estimador suavizado de covariâncias. Tais estimadores são chamados *estimadores suavizados de periodogramas*, e são expressos na forma

$$\sum_{\nu=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} K(\lambda-\lambda_\nu) I_N(\lambda_\nu). \quad (2.19)$$

As funções  $K(\lambda)$  e  $W_M(\lambda)$ , chamadas funções suavizadoras, têm a propriedade de serem altamente concentradas em torno do ponto  $\lambda = 0$ , isto é, a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(\lambda) g(\lambda) = g(0),$$

ou

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) g(\lambda) = g(0), \quad (2.20)$$

e estão relacionadas por

$$K(\lambda) = \frac{2\pi}{N} W_M(\lambda).$$

## 2.5 - ESPERANÇA E VARIÂNCIA ASSINTÓTICAS DOS ESTIMADORES SUAVIZADOS

A esperança do estimador (2.17) nas frequências  $\lambda_k = \frac{2\pi k}{N}$  é dada por

$$E\hat{f}(\lambda_k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda_k - \lambda) E I_N(\lambda) d\lambda,$$

logo

$$E\hat{f}(\lambda_k) \cong \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda_k - \lambda) f(\lambda) d\lambda,$$

para  $N$  suficientemente grande, dado que  $I_N(\lambda)$  é um estimador assintoticamente não viciado de  $f(\lambda)$ , e devido ao fato de  $W_M(\lambda)$  ter a propriedade (2.20). Ainda, considerando  $f(\lambda)$  essencialmente constante para cada frequência no intervalo de

comprimento comparável com a largura do pico, temos que

$$E\hat{f}(\lambda_k) \approx f(\lambda_k). \quad (2.21)$$

A covariância assintótica entre os estimadores suavizados nas frequências  $\lambda_k$  e  $\lambda_\ell$ , bem como a variância assintótica do estimador suavizado não serão deduzidas nesta secção, e sim na secção 3.3. Nós aqui só vamos indicar as suas expressões, ou seja,

$$\text{Cov}\{f(\lambda_k), f(\lambda_\ell)\} \approx \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda_k - \lambda) W_M(\lambda_\ell - \lambda) f(\lambda)^2 d\lambda, \quad (2.22)$$

e

$$\text{Var} \hat{f}(\lambda_k) \approx f^2(\lambda_k) \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda) d\lambda. \quad (2.23)$$

Como, pela desigualdade de Parseval

$$2\pi \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda) d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_M^2(k),$$

temos, usando as propriedades da seqüência de pesos, que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_M^2(k) \approx M \int_{-1}^1 w^2(v) dv, \quad (2.24)$$

de onde segue que

$$\text{Var} \hat{f}(\lambda_k) \approx f^2(\lambda_k) \frac{M}{N} \int_{-1}^1 w^2(v) dv. \quad (2.25)$$

Portanto, para  $M \rightarrow \infty$  o estimador suavizado de covariâncias é não

viciado, e para  $M \rightarrow \infty$  e  $N \rightarrow \infty$  de modo que  $M/N \rightarrow 0$ , o estimador é consistente.

## 2.6 - DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DOS ESTIMADORES SUAVIZADOS

Vamos considerar o estimador (2.18),

$$\hat{f}(\lambda_k) = \frac{2\pi}{N} \sum_{\nu=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} W_M(\lambda_k - \lambda_\nu) I_N(\lambda_\nu).$$

Se as frequências  $\lambda_\nu$  estão próximas da frequência  $\lambda_k$ , de tal sorte que  $\lambda_k - \lambda_\nu$  está na faixa do pico principal de  $W_M(\lambda)$  e se a função densidade espectral é constante nesta faixa então  $\frac{I_N(\lambda_\nu)}{1/2f(\lambda_k)}$  tem distribuição assintótica qui-quadrado, e

$$\hat{f}(\lambda_k) \approx f(\lambda_k) \frac{\pi}{N} \sum_{\nu=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} W_M(\lambda_k - \lambda_\nu) \frac{I_N(\lambda_\nu)}{1/2f(\lambda_k)}$$

é uma combinação linear de variáveis aleatórias com distribuição assintótica qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

Uma forma aproximada da distribuição do estimador (2.18) válida assintoticamente, pode ser obtida substituindo a janela espectral  $W_M(\lambda)$  por uma janela retangular centrada no valor do pico principal de  $W_M(\lambda)$ . Neste caso, a distribuição de (2.18) é aproximadamente qui-quadrado com  $r$  graus de liberdade,  $\hat{f}(\lambda_k) \sim c\chi_r^2$ . Os valores de  $r$  e  $c$  são obtidos a partir das propriedades da distribuição qui-quadrado, ou seja

$$E \hat{f}(\lambda_k) = cr$$



e

$$\text{Var } \hat{f}(\lambda_k) = 2rc^2,$$

portanto,

$$c = \frac{\text{Var } \hat{f}(\lambda_k)}{2E \hat{f}(\lambda_k)} \quad \text{e} \quad r = \frac{2[E \hat{f}(\lambda_k)]^2}{\text{Var } \hat{f}(\lambda_k)}.$$

O parâmetro  $r$  é conhecido por números equivalente de graus de liberdade.

De (2.21), (2.25) e (2.16) podemos expressar o número de graus de liberdade do estimador suavizado de covariâncias por

$$r = \frac{2N}{c_w M}, \quad \text{onde } c_w = \int_{-1}^1 w^2(v) dv,$$

e do estimador suavizado do periodograma (2.19) por

$$r = 2 / \sum_{v=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} K^2(\lambda_v),$$

onde  $K(\lambda)$  é qualquer função suavizadora do periodograma.

Um outro parâmetro importante é conhecido por largura de faixa equivalente, dado por

$$\beta = \frac{2\pi}{N} \sum_{v=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} K^2(\lambda_v),$$

para o estimador suavizado do periodograma e, por



$$\beta = \frac{2\pi}{C_w M},$$

para o estimador suavizado de covariâncias.

A largura da faixa equivalente é obtida considerando-se primeiramente a largura da faixa do estimador cuja janela é retangular (estimador de Daniell), escrita em função do número de graus de liberdade deste, e em seguida substitui-se o número de graus de liberdade pelo número equivalente de graus de liberdade.

## CAPÍTULO 3

### TEMPOS DE AMOSTRAGEM SEGUINDO UM PADRÃO PERIÓDICO

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo nos propomos a obter um estimador assintoticamente não viciado e consistente da função densidade espectral de uma série temporal  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , definida em intervalos de tempo igualmente espaçados, porém, sistematicamente não observada. Para tal vamos considerar  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , estacionária, gaussiana, com média zero e com função densidade espectral contínua. Inicialmente, vamos tratar do caso particular em que a série é observada em  $\alpha$  tempos igualmente espaçados, separados, por  $\beta$  tempos igualmente espaçados,  $\alpha > \beta$ , em que a mesma não é observada. Em seguida vamos tratar do caso mais geral em que a série é observada em tempos não igualmente espaçados, porém o modelo dos tempos de amostragem segue um padrão periódico, com período de  $p$  unidades de tempo. O conteúdo deste capítulo pode ser encontrado em Jones [1962], Parzen [1963] e Van Ness [1976].

#### 3.2 - ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL

Uma série temporal amostrada na forma descrita na

secção 3.1 pode ser vista como uma versão de amplitude modulada da série original  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  e podemos escrever

$$Y(t) = g(t)X(t), \quad (3.1)$$

onde  $Y(t)$  é a série observada,  $X(t)$  é a série original, definida em intervalos de tempo igualmente espaçados, e  $g(t)$  é uma função não aleatória definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } X(t), \text{ foi observada no tempo } t \\ 0, & \text{se } X(t) \text{ não foi observada no tempo } t. \end{cases}$$

No caso particular em que a série é periodicamente observada em  $\alpha$  tempos, e então não observada em  $\beta$  tempos, a função  $g(\cdot)$  é uma função periódica, com período  $\alpha + \beta$ , e

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 1, 2, \dots, \alpha \\ 0, & \text{se } t = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + \beta. \end{cases} \quad (3.2)$$

O estimador da função de autocovariância da série original  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  é definido por

$$\hat{C}_X(k) = \frac{\hat{C}_Y(k)}{R_g(k)}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

onde  $\hat{C}_Y(k)$  é o estimador da função de autocovariância da série  $Y(t)$  definida em intervalos de tempo igualmente espaçados, e  $R_g(k)$  é o limite da razão entre o número de pares disponíveis para estimar  $C_X(k)$  e  $N$ , isto é,

$$R_g(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} g(t)g(t+k), \quad k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.4)$$

No caso em que  $k < 0$ , o número de pares disponíveis para estimar  $C_X(k)$  será

$$\sum_{t=k}^N g(t-k)g(t) = \sum_{t=1}^{N-k} g(t)g(t+k),$$

o que mostra que  $R_g(k)$  é uma função par.

Outra propriedade da função  $R_g(k)$  é a sua periodicidade, de período  $\alpha + \beta$ , pois,

$$\begin{aligned} R_g(k+\alpha+\beta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k-\alpha-\beta} g(t)g(t+k+\alpha+\beta) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k-\alpha-\beta} g(t)g(t+k) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ \sum_{t=1}^{N-k} g(t)g(t+k) - \sum_{t=N-k-\alpha-\beta+1}^{N-k} g(t)g(t+k) \right] = R_g(k), \end{aligned}$$

uma vez que

$$g(t+\alpha+\beta) = g(t),$$

e

$$\left| \sum_{t=N-k-\alpha-\beta}^{N-k} g(t)g(t+k) \right| \leq \alpha + \beta.$$

A seguir vamos determinar os valores de  $R_g(k)$ . Devido a periodicidade de  $R_g(k)$  será necessário determiná-los so-

mente para  $0 \leq k \leq \alpha + \beta - 1$ .

É fácil verificar que dentro de um mesmo grupo de  $\alpha + \beta$  observações temos  $\alpha - k$  pares disponíveis se  $k \leq \alpha$ , e zero caso contrário; e de dois grupos adjacentes temos  $k - \beta$  observações se  $k \geq \beta$  e zero caso contrário. Escrevendo  $N$  na forma  $N = j(\alpha + \beta)$ , obteremos um total de  $j(\alpha - k)$  pares disponíveis se  $k \leq \alpha$ , e  $(j - 1)(k - \beta)$  pares disponíveis se  $k \geq \beta$ , de tal modo que

$$\left. \begin{aligned} R_g(k) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j(\alpha - k)}{j(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha - k}{\alpha + \beta}, & 0 \leq k \leq \beta, \\ R_g(k) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j(\alpha - k) + (j - 1)(k - \beta)}{j(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, & \beta \leq k \leq \alpha, \\ R_g(k) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(j - 1)(k - \beta)}{j(\alpha + \beta)} = \frac{k - \beta}{\alpha + \beta}, & \alpha \leq k \leq \alpha + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

e, a expressão (3.4) pode ser escrita na forma

$$R_g(k) = \frac{1}{\alpha + \beta} \sum_{t=1}^{\alpha + \beta} g(t)g(t+k), \quad k=0, \dots, \alpha + \beta. \quad (3.6)$$

O estimador suavizado de covariâncias da função densidade espectral da série original  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  é análogo ao obtido na secção 2.4, ou seja

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} w_M(k) \hat{C}_X(k),$$

e usando as expressões (3.3), (2.14) e (3.1) temos que

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} w_M(k) \sum_{t=1}^{N-|k|} \frac{g(t)X(t)g(t+|k|)X(t+|k|)}{NR_g(k)} \\
 &= \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-i\lambda k} w_M(k) \sum_{t=1}^{N+k} \frac{g(t)X(t)g(t-k)X(t-k)}{R_g(k)} + \right. \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-k} e^{-i\lambda k} w_M(k) \sum_{t=1}^{N-k} \frac{g(t)X(t)g(t+k)X(t+k)}{R_g(k)} + \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^N \frac{g^2(t)X^2(t)}{R_g(0)} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\lambda k} w_M(k) \sum_{t=1}^{N-k} \frac{g(t)X(t)g(t+k)X(t+k)}{R_g(k)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{N-k} e^{-i\lambda k} w_M(k) \sum_{t=1}^{N-k} \frac{g(t)X(t)g(t+k)X(t+k)}{R_g(k)} + \sum_{t=1}^N \frac{g^2(t)X^2(t)}{R_g(0)} \right].
 \end{aligned}$$

Fazendo a transformação de variáveis,  $s = k+t$ ,  $t = t$ , temos

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_X(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{s=2}^N \sum_{t=1}^{s-1} e^{i(s-t)\lambda} \frac{w_M(s-t)g(s)X(s)g(t)X(t)}{R_g(s-t)} + \right. \\
 &\quad + \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{s=t+1}^N e^{-i(s-t)\lambda} \frac{w_M(s-t)g(t)X(t)g(s)X(s)}{R_g(s-t)} + \\
 &\quad \left. + \sum_{t=1}^N \frac{g^2(t)X^2(t)}{R_g(0)} \right],
 \end{aligned}$$



e fazendo a transformação, no 1º termo,  $s = t$ ,  $t = s$ , temos

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{t=2}^{N-1} \sum_{s=1}^{t-1} e^{-i(s-t)\lambda} \frac{w_M(s-t)g(t)X(t)g(s)X(s)}{R_g(s-t)} + \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{s=t+1}^N e^{-i(s-t)\lambda} \frac{w_M(s-t)g(t)X(t)g(s)X(s)}{R_g(s-t)} + \sum_{t=1}^N \frac{g^2(t)X^2(t)}{R_g(0)} \right],$$

e segue que o estimador da função densidade espectral,  $\hat{f}_X(\lambda)$  pode ser expresso na forma

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N e^{-i(s-t)\lambda} \frac{w_M(s-t)g(s)X(s)g(t)X(t)}{R_g(s-t)}. \quad (3.7)$$

### 3.3 - VARIÂNCIA DO ESTIMADOR

Vamos agora escrever a expressão (3.7) na forma

$$\hat{f}_X(\lambda) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s, t) e^{-i\lambda(s-t)} X(s)X(t), \quad (3.8)$$

onde

$$a(s, t) = \frac{g(s)g(t)w_M(s-t)}{2\pi N R_g(s-t)}, \quad (3.9)$$

e vamos definir

$$A(\lambda, \mu) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s, t) e^{-i(\lambda s - \mu t)}. \quad (3.10)$$

Lembramos que se  $X(t)$  é real  $X(t) = \overline{X(t)}$ , e considerando a representação espectral de  $X(t)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{f}_X(\lambda) &= \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s, t) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha s} dZ(\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\beta t} d\overline{Z}(\beta) e^{-i\lambda(s-t)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s, t) e^{-i[(\lambda-\alpha)s - (\lambda-\beta)t]} dZ(\alpha) d\overline{Z}(\beta), \end{aligned}$$

e, usando (3.10), temos que

$$\hat{f}_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) dZ(\alpha) d\overline{Z}(\beta). \quad (3.11)$$

A esperança de  $\hat{f}_X(\lambda)$  é

$$\begin{aligned} E \hat{f}_X(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) E dZ(\alpha) d\overline{Z}(\beta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) f_X(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (3.12)$$

pois

$$E dZ(\alpha) d\overline{Z}(\beta) = \begin{cases} f_X(\alpha) d\alpha, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (3.13)$$

A covariância

$$\text{Cov}\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\mu)\} = E[\hat{f}_X(\lambda)\hat{f}_X(\mu)] - E \hat{f}_X(\lambda) \cdot E \hat{f}_X(\mu),$$

é obtida através do teorema de Isserlis para variáveis aleatórias com distribuição normal complexa (ver Koopmans, [1974] pág. 27), que nos permite escrever:

$$\begin{aligned}
 E[\hat{f}_X(\lambda)\hat{f}_X(\mu)] &= \iiint\int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu-\alpha', \mu-\beta')}EdZ(\alpha) d\overline{Z(\beta)} dZ(\alpha') d\overline{Z(\beta')} \\
 &+ \iiint\int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu-\alpha', \mu-\beta')}EdZ(\alpha) d\overline{Z(\beta)}EdZ(-\alpha') d\overline{Z(-\beta')} \\
 &+ \iiint\int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\alpha)\overline{A(\mu-\alpha', \mu-\beta')}EdZ(\alpha) d\overline{Z(\alpha')}EdZ(-\beta) d\overline{Z(-\beta')} \\
 &+ \iiint\int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu-\alpha', \mu-\beta')}EdZ(\alpha) d\overline{Z(-\beta')}EdZ(-\beta) d\overline{Z(\alpha')}
 \end{aligned}$$

Usando (3.13), temos que

$$\begin{aligned}
 E[\hat{f}_X(\lambda)\hat{f}_X(\mu)] &= \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\alpha)\overline{A(\mu-\alpha', \mu-\alpha')}f_X(\alpha)f_X(\alpha')d\alpha d\alpha' \\
 &+ \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu-\alpha, \mu-\beta)}f_X(\alpha)f_X(\beta)d\alpha d\beta \\
 &+ \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu+\alpha, \mu+\beta)}f_X(\alpha)f_X(\beta)d\alpha d\beta,
 \end{aligned}$$

e, que

$$E\hat{f}_X(\lambda)E\hat{f}_X(\mu) = \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\alpha)\overline{A(\mu-\beta, \mu-\beta)}f_X(\alpha)f_X(\beta)d\alpha d\beta$$

e portanto a covariância entre  $\hat{f}_X(\lambda)$  e  $\hat{f}_X(\mu)$  será

$$Cov\{\hat{f}_X(\lambda), \hat{f}_X(\mu)\} = \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)\overline{A(\mu-\alpha, \mu-\beta)}f_X(\alpha)f_X(\beta)d\alpha d\beta$$

$$+ \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) \overline{A(\mu+\alpha, \mu+\beta)} f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta$$

e a variância de  $\hat{f}_X(\lambda)$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) \overline{A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)} f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta \\ &+ \iint_{-\pi}^{\pi} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) \overline{A(\lambda+\alpha, \lambda+\beta)} f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando que na maioria dos casos de interesse a núcleo bidimensional  $A(\lambda, \mu)$  tem massa concentrada na vizinhança de  $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ , o segundo termo da expressão (3.14) pode ser desprezado, visto que

$$\begin{aligned} A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) \overline{A(\lambda+\alpha, \lambda+\beta)} &= A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) A(-\lambda-\beta, -\lambda-\alpha) \\ &= A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta) A(\lambda+\alpha, \lambda+\alpha) \\ &\begin{cases} \approx 0, & \text{se } 0 < \lambda < \pi \\ = |A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)|^2 & \text{se } \lambda = 0, \pi \end{cases} \end{aligned}$$

e temos finalmente

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \begin{cases} \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)|^2 f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta, & \text{se } 0 < \lambda < \pi \\ 2 \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)|^2 f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta, & \text{se } \lambda = 0, \pi \end{cases} \quad (3.15)$$

No caso em que não existem observações perdidas, a função  $g(t)$  será definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 1, \dots, N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.16)$$

e o estimador da função densidade espectral (3.7) pode ser expresso por

$$\hat{f}_X(\lambda) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s,t) e^{-i\lambda(s-t)} X(s)X(t),$$

onde

$$a(s,t) = \frac{w_M(s-t)}{2\pi N}.$$

É possível demonstrar que quando  $a(s,t)$  depende de  $s$  e de  $t$  somente através da diferença  $s-t$ , a núcleo bidimensional  $A(\lambda, \mu)$  está concentrado na diagonal  $\lambda = \mu$ ,  $-\pi \leq \mu \leq \pi$ . Considerando este fato, e sob a suposição de que  $f_X(\alpha)$  e  $f_X(\beta)$  são aproximadamente constantes e iguais a  $f_X(\lambda)$ , chegamos a uma expressão aproximada para a variância do estimador  $\hat{f}_X(\lambda)$ ,

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) \approx f_X(\lambda)^2 \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)|^2 d\alpha d\beta, \text{ se } 0 < \lambda < \pi.$$

Como  $A(\lambda, \mu)$  é periódica com período  $2\pi$ , em relação a cada uma das coordenadas, temos que

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) \approx f_X(\lambda)^2 \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta, \text{ se } 0 < \lambda < \pi. \quad (3.17)$$



Esta última expressão é equivalente a expressão (2.25) quando não temos observações perdidas, pois

$$A(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \frac{w_M(s-t)}{2\pi N} e^{-i(\alpha s - \beta t)},$$

e a variância do estimador  $\hat{f}_X(\lambda)$  é

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= f_X^2(\lambda) \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{s,t=1}^N \frac{w_M(s-t)}{2\pi N} e^{-i(\alpha s - \beta t)} \sum_{r,v=1}^N \frac{w_M(r-v)}{2\pi N} e^{i(\alpha r - \beta v)} d\alpha d\beta \\ &= f_X^2(\lambda) \sum_{s,t=1}^N \sum_{r,v=1}^N \frac{w_M(s-t)w_M(r-v)}{(2\pi N)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(s-r)\alpha} d\alpha \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-v)\beta} d\beta \\ &= \frac{f_X^2(\lambda)}{N^2} \sum_{s,t=1}^N w_M(s-t)^2, \end{aligned}$$

e, fazendo a transformação de variáveis  $k = s-t$  e  $t = t$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= f_X^2(\lambda) \left[ \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \sum_{s=1}^{k+N} \frac{w_M(k)^2}{N^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{w_M(k)^2}{N^2} \right] \\ &= f_X^2(\lambda) \left[ \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \frac{w_M(k)^2}{N^2} (N+k) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=k+1}^N \frac{w_M(k)^2}{N^2} (N-k) \right] \\ &= \frac{f_X^2(\lambda)}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_M^2(k) \left(1 - \frac{|k|}{N}\right), \quad (3.18) \end{aligned}$$

e quando  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= f_X^2(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_M^2(k), \\ &= f_X^2(\lambda) M \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv, \end{aligned}$$

pois  $\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_M^2(k) (1 - \frac{|k|}{N})$  é uma soma de Cesàro, que converge para  $M \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv$ , dado que  $\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_M^2(k)$  converge para

$$M \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv,$$

(ver Brillinger, [1975], pág. 14), e portanto, a variância do estimador da função densidade espectral é assintoticamente igual a

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \frac{M}{N} f_X^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv. \quad (3.19)$$

Entretanto, se existirem observações perdidas,  $a(s,t)$  não dependerá de  $s$  e de  $t$  somente através da diferença  $s - t$  e  $A(\alpha, \beta)$  terá uma apreciável massa fora da diagonal, causando um aumento da variância do estimador, não nos permitindo mais usar a expressão (3.17). Este fenômeno Jones [1971] chamou de "Variance Leakage".

A fim de obtermos então uma expressão assintótica para a variância do estimador definido por (3.7) vamos precisar de alguns resultados da Análise de Fourier.

DEFINIÇÃO 3.3.1 - Se  $g(t)$ ,  $t = 0, \pm 1, \dots$ , é uma função periódica, com período  $\theta$ , então  $g(t)$  possui uma representação harmô-

nica

$$g(t) = \sum_{n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} G_n e^{i\lambda_n t}, \quad t=1, \dots, \theta$$

onde

$$G_n = \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta} g(t) e^{-i\lambda_n t}, \quad -[\frac{\theta-1}{2}] \leq n \leq [\frac{\theta}{2}]$$

e  $\lambda_n = \frac{2\pi n}{\theta}$

DEFINIÇÃO 3.3.2 - Se  $h(s, t)$ ,  $s, t = 0, \pm 1, \dots$ , é uma função pe-  
riódica com período  $\theta$ , no sentido que

$$h(s, t) = h(s+\theta, t+\theta),$$

então  $h(s, t)$  possui uma representação harmônica bidimensional

$$h(s, t) = \sum_{m, n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(s\lambda_m - t\lambda_n)} H_{m, n}, \quad t, s=1, \dots, \theta$$

onde

$$H_{m, n} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{s, t=1}^{\theta} e^{-i(s\lambda_m - t\lambda_n)} h(s, t), \quad -[\frac{\theta-1}{2}] \leq m, n \leq [\frac{\theta}{2}].$$

DEFINIÇÃO 3.3.3 - Se  $r(s, t)$  é uma função periódica que depen-  
de de  $s$  e de  $t$  somente através da diferença  $s - t$ , então a re-  
presentação harmônica de  $r(s-t)$  é dada por

$$r(s-t) = \sum_{m, n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(s\lambda_m - t\lambda_n)} R_{m, n}$$

onde

$$R_{m,n} = \begin{cases} R_n & \text{se } m = n \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$R_n = \frac{1}{\theta} \sum_{s=1}^{\theta} e^{-i\lambda_n s} r(s).$$

Com base nestas definições vamos escrever a função

$$A(\lambda, \mu) = \sum_{s,t=1}^N \frac{g(s)g(t)w_M(s-t)}{2\pi N R_g(s-t)} e^{-i(\lambda s - \mu t)}, \quad (3.20)$$

em termos de  $W_M(\lambda, \mu)$  cuja massa está concentrada na diagonal  $\lambda = \mu$ .

Na secção 3.2 vimos que  $R_g(k)$  é uma função par, periódica com período  $\theta = \alpha + \beta$ , expressa na forma

$$R_g(k) = \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta} g(t)g(t+k), \quad (3.6)$$

onde a função  $g(t)$  é definida por (3.2), e, usando a definição 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned} R_g(k) &= \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta} g(t) \sum_{m=-[\frac{\theta-1}{2}] }^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i\lambda_m(t+k)} G_m \\ &= \sum_{m=-[\frac{\theta-1}{2}] }^{[\frac{\theta}{2}]} G_m e^{i\lambda_m k} \sum_{t=1}^{\theta} g(t) e^{i\lambda_m t} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} G_m \overline{G}_m e^{i\lambda_m k}, \quad (3.21)$$

e o produto

$$\begin{aligned} g(s)g(t) &= \sum_{n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} G_n e^{i\lambda_n s} \sum_{m=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} \overline{G}_m e^{-i\lambda_m t} \\ &= \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} G_n \overline{G}_m e^{i(\lambda_n s - \lambda_m t)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da definição 3.3.3 temos que

$$[R_g(s-t)]^{-1} = \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(s\lambda_m - t\lambda_n)} W_{m,n}, \quad (3.23)$$

onde

$$W_{m,n} = \begin{cases} W_n & \text{se } m = n \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$W_n = \frac{1}{\theta} \sum_{s=1}^{\theta} e^{-i\lambda_n s} [R_g(s)]^{-1},$$

e a representação de

$$h(s,t) = \frac{g(s)g(t)}{R_g(s-t)},$$



será, usando a definição 3.3.2

$$h(s, t) = \sum_{m, n = -[\frac{\theta-1}{2}] }^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(s\lambda_m - t\lambda_n)} H_{m, n}, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{m, n} &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{s, t=1}^{\theta} e^{-i(s\lambda_m - t\lambda_n)} \frac{g(s)g(t)}{R_g(s-t)} \\ &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{s, t=1}^{\theta} e^{-is\lambda_m} g(s) e^{it\lambda_n} g(t) \cdot \sum_{j, k = -[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(s\lambda_j - t\lambda_k)} W_{j, k} \\ &= \sum_{j, k = -[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} W_{j, k} G_{m-j} \cdot \overline{G_{n-k}} = \sum_{k = -[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} W_{K} G_{m-k} \cdot \overline{G_{n-k}}. \end{aligned}$$

Destacamos aqui, que

$$H_{m, n} = \begin{cases} 1 & \text{para } m=n=0 \\ 0 & \text{para } m=n \neq 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

ver Jones, [1962].

Agora, usando a representação espectral de

$$h(s, t) = \frac{g(s)g(t)}{R_g(s-t)},$$

definida por (3.24) podemos escrever

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{s, t=1}^N \sum_{m, n = -[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{i(\lambda_m s - \lambda_n t)} H_{m, n} W_M(s-t) e^{-i(\lambda s - \mu t)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} H_{m,n} \sum_{s,t=1}^N w_M(s-t) e^{-i[(\lambda-\lambda_m)s-(\mu-\lambda_n)t]} \\
 &= \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} H_{m,n} W_M(\lambda-\lambda_m, \mu-\lambda_n) \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

onde

$$W_M(\lambda, \mu) = \sum_{s,t=1}^N \frac{w_M(s-t)}{2\pi N} e^{-i[\lambda s - \mu t]}.$$

Substituindo (3.26) em (3.15), temos que

$$\begin{aligned}
 \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= \iiint_{-\pi}^{\pi} \sum_{m,n,j,k=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} H_{m,n} \overline{H_{j,k}} W_M(\lambda-\lambda_m-\alpha, \mu-\lambda_n-\beta) \times \\
 &\quad \times \overline{W_M(\lambda-\lambda_j-\alpha, \mu-\lambda_k-\beta)} f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta,
 \end{aligned}$$

e devido o fato de  $W_M(\lambda, \mu)$  estar concentrada na origem, temos que

$$W_M(\lambda-\lambda_m-\alpha, \mu-\lambda_n-\beta) W_M(-\lambda+\lambda_j+\alpha, -\mu+\lambda_k+\beta) \approx 0,$$

a menos que  $m=j$  e  $n=k$ , e portanto

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} |H_{m,n}|^2 \iint_{-\pi}^{\pi} |W_M(\lambda-\lambda_m-\alpha, \mu-\lambda_n-\beta)|^2 f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta,$$

e, de (3.17), decorre que

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} |H_{m,n}|^2 f_X(\lambda-\lambda_m) f_X(\lambda-\lambda_n) \iint_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Finalmente, do resultado (3.19), chegamos a expressão assintótica,

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \frac{M}{N} \left[ \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} |H_{m,n}|^2 f_X(\lambda-\lambda_m) f_X(\lambda-\lambda_n) \right] \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv,$$

e do resultado (.25), temos que

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \frac{M}{N} \left[ f^2(\lambda) + \sum_{m \neq n} |H_{m,n}|^2 f_X(\lambda-\lambda_m) f_X(\lambda-\lambda_n) \right] \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv, \quad (3.27)$$

para  $0 < \lambda < \pi$ , que será multiplicada por 2 para  $\lambda = 0, \pi$ .

#### 3.4 - LIMITE SUPERIOR DA VARIÂNCIA DO ESTIMADOR

Como foi visto anteriormente, quando as observações são igualmente espaçadas, a variância assintótica de  $f_X(\lambda)$  é expressa por

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \frac{M}{N} f_X^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv,$$

e conseqüentemente, podemos de (3.27) inferir o efeito na variância quando a série observada é uma versão de amplitude modulada da série original:

Parzen [1963] obteve um limite superior para (3.27) substituindo  $f_X(\lambda-\lambda_m)$  e  $f_X(\lambda-\lambda_n)$  pelo  $\max f_X(\lambda)$ , ou seja,

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) \leq \frac{M}{N} \bar{H} \max_{\lambda} f_X^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} w^2(v) dv, \quad (3.28)$$

onde

$$\bar{H} = \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} |H_{m,n}|^2,$$

e, usando a definição 3.3.3 obteve que

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{\theta^4} \sum_{m,n=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} \sum_{s,t=1}^{\theta} \sum_{r,v=1}^{\theta} h(s,t)h(r,v) e^{-i(s\lambda_m-t\lambda_n)+i(r\lambda_m-v\lambda_n)} \\ &= \frac{1}{\theta^2} \sum_{s,t=1}^{\theta} [h(s,t)]^2 = \frac{1}{\theta^2} \sum_{s,t=1}^{\theta} \frac{g^2(s)g^2(t)}{[R_g(s-t)]^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

dado que para  $\theta$  impar

$$\sum_{m=-[\frac{\theta-1}{2}]}^{[\frac{\theta}{2}]} e^{-im\frac{2\pi}{\theta}(s-r)} = \begin{cases} \theta & \text{para } s = r \\ 0 & \text{para } s \neq r. \end{cases}$$

Tomando agora  $\rho$ , como sendo um limite inferior de  $R_g(k)$

$$|R_g(k)| \geq \rho, \text{ para } k=0,1,\dots,\alpha+\beta$$

segue que um limite superior para  $\bar{H}$  é

$$\bar{H} \leq \rho^{-2} \left[ \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta} g^2(t) \right]^2. \quad (3.30)$$

Uma expressão exata de  $\bar{H}$ , pode ser obtida fazendo a

transformação de variáveis  $k = s - t$ ,  $t = t$  na expressão (3.29),

$$\bar{H} = \frac{1}{\theta} \sum_{k=-(\theta-1)}^{\theta-1} R_g(k)^{-2} \sum_{t=1}^{\theta-|k|} g^2(t) g^2(t+|k|),$$

e quando  $g(t)$  é definida por (3.2), temos  $k \geq 0$  que

$$\frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta-k} g^2(t) g^2(t+k) = \begin{cases} \frac{\alpha-k}{\theta}, & k < \alpha \\ 0, & k \geq \alpha, \end{cases}$$

e portanto, lembrando que  $R_g(k)$  e  $\sum_{t=1}^{\theta-|k|} g(t) g(t+|k|)$  são funções pares, temos que

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{\theta^2} R_g(0)^{-2} \sum_{t=1}^{\theta} g^2(t) + \\ &+ \frac{2}{\theta^2} \left[ \sum_{k=1}^{\beta} R_g(k)^{-2} \sum_{t=1}^{\theta-k} g^2(t) g^2(t+k) + \sum_{k=\beta+1}^{\alpha} R_g(k)^{-2} \sum_{t=1}^{\theta-k} g^2(t) g^2(t+k) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{k=1}^{\beta} \frac{1}{\alpha-k} + 2 \sum_{k=\beta+1}^{\alpha} \frac{\alpha-k}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha-1} + \dots + \frac{\alpha-\beta+1}{\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

e substituindo cada denominador  $\alpha-k$ ,  $k = 0, \dots, \beta$  por  $\alpha-\beta$ , segue que

$$\bar{H} \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \quad (3.31)$$

A expressão (3.31) nos fornece um limite superior para  $\bar{H}$ , inferior ao limite obtido (3.30), dado que quando  $g(t)$  é definida por (3.2), temos



$$\rho = \frac{\alpha - \beta}{\beta + \alpha},$$

e

$$\bar{H} \leq \rho^{-2} \left[ \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^{\theta} g(t)^2 \right]^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (3.32)$$

Considerando  $r$ , a razão entre o número de observações perdidas e o número de observações presentes temos que para (3.31)

$$\bar{H} \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad (3.33)$$

e para (3.32),

$$\bar{H} \leq \left( \frac{1}{1-r} \right)^2, \quad (3.34)$$

de onde segue que estas expressões nos dão uma medida de quão rápido a variância do estimador da densidade espectral cresce, quando  $r$  tende para 1.

Finalmente, combinando as relações (3.29) e (3.33), e admitindo que o número de observações presentes  $T_0$ , é aproximadamente igual a

$$T_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} T,$$

podemos escrever a variância do estimador da função de densidade espectral em termos do número de observações presentes, ou seja

$$\frac{T_0^M \text{var } \hat{f}_X(\lambda)}{\left\{ \max_{\lambda} \hat{f}_X(\lambda) \right\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(v) dv} \leq \frac{1}{1-r}.$$

### 3.5 - PLANEJAMENTO PARA UMA AMOSTRAGEM PERIÓDICA

Vamos agora considerar a série temporal  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , estacionária, real gaussiana, com média zero e com função densidade espectral contínua, observada em tempos não igualmente espaçados, porém cíclicos. Denotaremos por  $p, p > 2$  o período amostral e por  $S$  um subconjunto ordenado de inteiros de  $0$  a  $p-1$ . Se a série  $X(t)$ , foi amostrada de acordo com  $S$ , sobre o intervalo  $[0, N]$ , podemos escrever a série amostrada  $Y(t)$  na forma

$$Y(t) = g(t)X(t),$$

onde  $g(t)$  é uma função não aleatória definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \bmod p \in S \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e usar o estimador da função de autocovariância definido na seção 3.2,

$$\hat{C}_X(k) = \frac{\hat{C}_Y(k)}{R_g(k)} \quad (3.35)$$

onde

$$R_g(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-k} g(t)g(t+k). \quad (3.36)$$

Agora, da relação (3.35) temos que o estimador da função de autocovariância só estará definido se  $R_g(k) > 0$ , e a fim de determinar os valores de  $R_g(k)$  vamos definir um operador de translação  $Q$ , sobre  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ , tal que

$$\begin{aligned} Q(S) &\equiv Q(s_1, \dots, s_k) \\ &\equiv \{(s_1+1) \bmod p, (s_2+1) \bmod p, \dots, (s_k+1) \bmod p\}, \end{aligned}$$

e

$$Q^v(S) \equiv \{(s_1+v) \bmod p, (s_2+v) \bmod p, \dots, (s_k+v) \bmod p\},$$

e apresentar alguns resultados.

PROPOSIÇÃO 3.5.1 -

$$\sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) > 0$$

se e somente se  $Q^k(S) \cap S \neq \emptyset$ .

PROVA - Se

$$\sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) > 0,$$

então existe um  $t_0$  tal que  $t_0 \in S \bmod p$ , e  $(t_0+k) \in S \bmod p$ . Mas se  $t_0 \in S \bmod p$ , então  $(t_0+k) \in Q^k(S)$ , portanto  $t_0 \in S \cap Q^k(S)$ , ou seja  $S \cap Q^k(S) \neq \emptyset$ .

Por outro lado se  $S \cap Q^k(S) \neq \emptyset$ , então existe um  $s_0$  tal

que  $s_0 \in S$  e  $s_0 \in Q^k(S)$ . Mas se  $s_0 \in Q^k(S)$ , existe um  $s_j \in S$  tal que  $s_0 = s_{j+k}$ , portanto  $(s_{j+k}) \in S$  e  $g(s_j)g(s_{j+k}) > 0$ .

PROPOSIÇÃO 3.5.2 - Seja  $\#A$  o número de pontos do conjunto  $A$  e, para  $x$  real  $[x]$  o maior inteiro não superior a  $x$ . Então

$$\left[ \frac{N-k}{p} \right] \#Q^k(S) \cap S \leq \sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) \leq \left( \left[ \frac{N-k}{p} \right] + 1 \right) \#Q^k(S) \cap S.$$

PROVA -

$$\sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) = \sum_{t=0}^{p-1} g(t)g(t+k) + \sum_{t=p}^{2p-1} g(t)g(t+k) + \dots +$$

$$+ \sum_{t=p \left[ \frac{N-k}{p} \right] - 1}^{p \left[ \frac{N-k}{p} \right] - 1} g(t)g(t+k) + \sum_{t=p \left[ \frac{N-k}{p} \right]}^{N-k-1} g(t)g(t+k)$$

$$= \left[ \frac{N-k}{p} \right] \sum_{t=0}^{p-1} g(t)g(t+k) + \sum_{t=p \left[ \frac{N-k}{p} \right]}^{N-k-1} g(t)g(t+k).$$

Mas  $\sum_{t=0}^{p-1} g(t)g(t+k)$  é igual ao número de  $t$ 's, tais que  $t \in S \pmod p$  e  $(t+k) \in S \pmod p$ , portanto é o número de  $t$ 's, tais que  $t \in Q^k(S) \cap S$ , ou seja, é a cardinalidade de  $Q^k(S) \cap S$ , e

$$0 \leq \sum_{t=p \left[ \frac{N-k}{p} \right]}^{N-k-1} g(t)g(t+k) \leq \#Q^{(k)}(S) \cap S,$$

de onde segue o resultado.

PROPOSIÇÃO 3.5.3 -

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) = \frac{1}{p} \# Q^{(k)}(S) \cap S \equiv R_g(k).$$

PROVA - Da proposição 3.5.2, e do fato de que  $N-1 < [N] < N+1$ , temos que

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) < \frac{1}{N} \left( \frac{N-k}{p} + 2 \right) \# Q^k(S) \cap S,$$

e o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) < \frac{1}{p} \# Q^k(S) \cap S,$$

e,

$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} f(t)g(t+k) > \frac{1}{N} \left( \frac{N-k}{p} - 1 \right) \# Q^k(S) \cap S,$$

e o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} g(t)g(t+k) > \frac{1}{p} \# Q^k(S) \cap S,$$

de onde segue o resultado.

Apesar de termos mostrado que

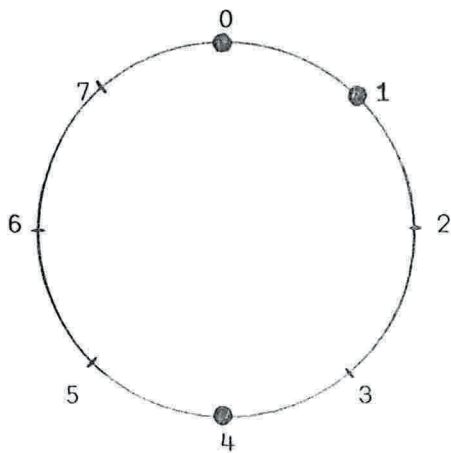
$$R_g(k) = \frac{1}{p} \# Q^k(S) \cap S,$$

ainda não sabemos se  $\hat{C}_X(k)$  está definido para todo  $k=0, \dots, N-1$ , pois se  $Q^k(S) \cap S = \emptyset$ ,  $R_g(k) = 0$  e  $\hat{C}_X(k)$  não está definido.

Uma forma simples para verificarmos quais  $R_g(k)$  que



são positivos, quando a série temporal é amostrada de acordo com o conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ , é dada com o auxílio de uma figura. Considere um círculo e divida-o em  $p$  segmentos iguais, onde  $p$  é o período amostral, enumerando-os de 0 a  $p-1$ , e, assinalando os pontos que pertencem a  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ . Por exemplo se a série foi amostrada ciclicamente, com período amostral  $p$  igual a 8 sobre  $S = \{0, 1, 4\}$  temos a seguinte figura.



Trace  $\binom{k}{2}$  linhas unindo os pontos assinalados dois a dois, e conte em ambas direções e número de segmentos entre dois pontos unidos. Defina  $V$  o conjunto formado pelo zero e por todos os números assim obtidos. No caso particular em que  $S = \{0, 1, 4\}$  é

fácil verificar que  $V = \{0, 1, 3, 4, 5, 7\}$ . Observe que neste caso  $1 \notin V$ , isto significa que existem duas observações separadas por uma unidade de tempo, mas  $2 \notin V$ , o que significa que não existem duas observações separadas por duas unidades de tempo, ou seja  $g(t)g(t+2) = 0$  para qualquer  $t$ . Neste caso  $\hat{C}_X(k)$  não está definido para  $k = 2$ , não interessando o tamanho da amostra.

No caso geral, onde  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  a função  $\hat{C}_X(k)$  está definida se e somente se  $|k| \bmod p \in V$ , e, portanto, somente se  $V \ni \{0, 1, \dots, p-1\}$  é que podemos usar o estimador  $\hat{C}_X(k)$ . Quando  $V \ni \{0, 1, \dots, p-1\}$  dizemos que  $S$  é uma *difference cover* para  $p$ . No exemplo,  $S = \{0, 1, 4\}$  e  $V = \{0, 1, 3, 4, 5, 7\}$  temos que  $S$

p	f(p)	uma difference cover									
1	1	0									
2	2	0	1								
3	2	0	1								
4	3	0	1	2							
5	3	0	1	4							
6	3	0	1	3							
7	3	0	1	3							
8	4	0	1	3	7						
9	4	0	1	3	7						
10	4	0	1	3	6						
11	4	0	1	4	6						
12	4	0	1	4	6						
13	4	0	1	3	9						
14	5	0	1	3	7	9					
15	5	0	1	3	7	10					
16	5	0	1	3	7	11					
17	5	0	1	3	7	12					
18	5	0	1	3	10	15					
19	5	0	1	3	9	15					
20	6	0	1	3	9	13	15				
21	5	0	1	4	14	16					
22	6	0	1	4	9	11	15				
23	6	0	1	4	11	13	19				
24	6	0	1	3	7	12	17				
25	6	0	1	3	7	12	15				
26	6	0	1	4	14	19	21				
27	6	0	1	4	10	12	17				
28	6	0	1	4	15	20	22				
29		?									
30	7	0	1	2	6	10	13	16			
31	6	0	1	3	8	12	18				
32	7	0	1	4	9	11	17	23			
33	7	0	1	2	3	8	13	17			
34	7	0	1	2	3	8	13	17			
35	7	0	1	2	3	8	13	17			
36	7	0	1	11	16	19	23	25			
37	7	0	1	6	10	17	23	35			
38-41		?									
42	8	0	1	6	10	19	26	37	40		
43	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
44	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
45	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
46	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
47	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
48	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
49	8	0	8	18	19	22	24	31	39		
50-55		≤9									
56	9	0	1	10	19	21	37	43	49	52	
57	8	0	1	3	13	32	36	43	52		

Tabela 3.1 - p=período amostral  
 f(p) = número mínimo de elementos que uma difference cover para p pode ter.

não é uma *difference cover* para  $p = 8$ , mas se  $S' = \{0, 1, 3, 7\}$  teremos  $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , ou seja  $S'$  é uma "difference cover" para  $p = 8$ .

Como acabamos de ver, para um dado período amostral  $p$ , nem todo conjunto  $S$  é uma "difference cover" para  $p$ . A pergunta natural que surge é quando para um dado  $p$ , um conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  é uma "difference cover" para  $p$ , ou melhor qual é o número mínimo de elementos de  $S$  e qual a configuração de  $S$  para que isso ocorra.

Van Ness [1976], com auxílio da Teoria dos Números determinou para alguns períodos amostrais o número mínimo de elementos de  $S$  bem como uma possível configuração de  $S$  para que  $S$  seja uma "difference cover" para  $p$  (Ver Tabela 3.1). Como ele próprio ponderou, a generalização é extremamente difícil.

Uma vez definido  $\hat{C}_X(k)$ , para todo  $k \leq N-1$ , a obtenção do estimador da função densidade espectral e da variância deste, é análoga a da secção 3.2.

## CAPÍTULO 4

### TEMPOS DE AMOSTRAGEM ALEATÓRIOS,

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Ao observarmos uma série temporal estacionária definida em intervalos de tempo igualmente espaçados pode acontecer que existe, associado a esta série temporal  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ , um processo aleatório  $\{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$  independente de  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  causando a perda de observações. Scheinok [1965], considerou o "caso binomial", quando o processo aleatório é tal que em cada instante  $t$ , a série temporal é observada com uma probabilidade  $p$ ,  $0 < p < 1$ , independente dos demais instantes. Bloomfield [1970] considerou um processo aleatório associado a série temporal  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  mais geral, e Jones [1971] não fez suposições sobre o processo causador da perda de observações.

Como nos capítulos anteriores nós supomos que o processo  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  é estacionário, com média zero e com função densidade espectral  $f(\lambda)$  contínua, e lembrando que se  $X(t)$ ,  $t = 1, \dots, N$ , é uma amostra de tamanho  $N$  do processo definida em intervalos igualmente espaçados, podemos estimar a função densidade espectral através das covariâncias amostrais

$$\hat{C}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|k|} X(t)X(t+|k|), & |k| \leq N-1 \\ 0, & |k| > N-1, \end{cases} \quad (2.14)$$

e então formar as somas suavizadas

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} w_M(k) \hat{C}(k). \quad (2.13)$$

#### 4.2 - O CASO BINOMIAL

Para estudarmos o caso binomial, inicialmente supomos que todas as observações estão presentes e com auxílio da função aleatória

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } X(t) \text{ é observado} \\ 0, & \text{se } X(t) \text{ não é observado,} \end{cases} \quad (4.1)$$

e

$$P[Y(t)=1] = p,$$

$$P[Y(t)=0] = 1-p$$

independente de  $t$ , podemos definir um estimador da função densidade espectral, assintoticamente não viciado e consistente por

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) I_N'(\alpha) d\alpha, \quad (4.2)$$

onde  $I_N'(\lambda)$  é o *periodograma modificado* definido por



$$I'_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p} + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \frac{Y(t)Y(s)X(t)X(s)}{p^2} e^{-i(t-s)\alpha} \right] \quad (4.3)$$

O valor esperado da relação (4.3) é

$$E[I'_N(\lambda)] = \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{1}{p} EY(t)^2 X(t)^2 + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \frac{1}{p^2} EY(t)Y(s)X(t)X(s) e^{-i(t-s)\alpha} \right],$$

e o fato de  $Y(t)$  ser estocasticamente independente de  $X(t)$ , pois  $Y(t)$  é uma propriedade do esquema de amostragem antes ao processo ter sido observado, implica

$$EY(t)^2 X(t)^2 = EY(t)^2 EX(t)^2 = p EX(t)^2,$$

e

$$EY(t)Y(s)X(t)X(s) = EY(t)Y(s)EX(t)X(s) = p^2 EX(t)X(s),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} EI'_N(\lambda) &= \frac{1}{2\pi N} \left[ \sum_{t=1}^N EX(t)^2 + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N EX(t)X(s) e^{-i(t-s)\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N EX(t)X(s) e^{-i(t-s)\alpha} = EI_N(\alpha), \end{aligned}$$

onde  $I_N(\alpha)$  é o periodograma dado por (2.11), e portanto  $\hat{f}(\lambda)$  definido por (4.2) é assintoticamente não viciado.

Para a obtenção da variância do estimador  $\hat{f}(\lambda)$  calcularemos, inicialmente, a covariância entre  $I'_N(\alpha)$  e  $I'_N(\beta)$ ,

pois

$$\text{Var } \hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) \text{Cov}\{I'_N(\alpha), I'_N(\beta)\} d\alpha d\beta. \quad (4.4)$$

De (4.3) decorre que

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{I'_N(\alpha), I'_N(\beta)\} = & \frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \text{Cov}\left\{\frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, \frac{Y(v)^2 X(v)^2}{p}\right\} \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{v=1 \\ r \neq v}}^N \sum_{r=1}^N \text{Cov}\left\{\frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, \frac{Y(v)Y(r)X(v)X(r)}{p^2} e^{-i(v-r)\beta}\right\} \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{v=1}^N \text{Cov}\left\{\frac{Y(t)Y(s)X(t)X(s)}{p^2} e^{-i(t-s)\alpha}, \frac{Y(v)^2 X(v)^2}{p}\right\} \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{v=1 \\ r \neq v}}^N \sum_{r=1}^N \text{Cov}\{Y(t)Y(s)X(t)X(s) e^{-i(t-s)\alpha}, \\ & Y(v)Y(r)X(v)X(r) e^{-i(v-r)\beta}\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Com base na suposição de que o processo é gaussiano,

$$EX(t)X(s)X(v)X(r) = \begin{cases} C(t-s)C(v-r) + C(t-v)C(s-r) + C(t-r)C(s-v), & \text{se } t \neq s \neq v \neq r \\ C(t-s)C(0) + 2C(t-v)C(s-v), & \text{se } t \neq s \neq v = r \\ C(0)^2 + 2C(t-v)^2, & \text{se } t = s \neq v = r \\ 3C(t-s)C(0), & \text{se } t \neq s = v = r \\ 3C(0)^2, & \text{se } t = s = v = r. \end{cases} \quad (4.6)$$

Desta forma, a covariância do primeiro termo de (4.5) reduz-se a

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left\{\frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, \frac{Y(v)^2 X(v)^2}{p}\right\} &= \\ &= \frac{1}{p^2} [EY(t)^2 X(t)^2 Y(v)^2 X(v)^2 - EY(t)^2 X(t)^2 EY(v)^2 X(v)^2] \\ &= \frac{1}{p^2} [EY(t)^2 Y(v)^2 EX(t)^2 X(v)^2 - EY(t)^2 EX(t)^2 EY(v)^2 EX(v)^2] \end{aligned}$$

e temos para  $t \neq v$

$$\frac{1}{p^2} [p^2 (C(0)^2 + 2C(t-v))^2 - p^2 C(0)^2] = 2C(t-v)^2,$$

e para  $t = v$ ,

$$\frac{1}{p^2} [p^3 C(0)^2 - p^2 C(0)^2] = (3p^{-1} - 1)C(0)^2,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \text{Cov}\left\{\frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, \frac{Y(v)^2 X(v)^2}{p}\right\} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq t}}^N 2C(t-v)^2 + \sum_{t=1}^N (3p^{-1} - 1)C(0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N 2C(t-v)^2 - \sum_{t=1}^N 2C(0)^2 + \sum_{t=1}^N (3p^{-1} - 1)C(0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ 3N(p^{-1} - 1)C(0)^2 + 2 \sum_{t=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (N - |t|)C(t)^2 \right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

A covariância do segundo termo de (4.5) reduz-se a

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left\{ \frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, \frac{Y(v)Y(r)}{p^2} X(v)X(r) e^{-i(v-r)\beta} \right\} = \\ & = \left[ E \frac{Y(t)^2 X(t)^2 Y(v)Y(r)X(v)X(r)}{p^3} - \right. \\ & \quad \left. - E \frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p} E \frac{Y(v)Y(r)X(v)X(r)}{p^2} \right] e^{-i(v-r)\beta} \\ & = \frac{1}{p^3} \left[ E Y(t)^2 Y(v)Y(r) E X(t)^2 X(v)X(r) - \right. \\ & \quad \left. - E Y(t)^2 E X(t)^2 E Y(v)Y(r) E X(v)X(r) \right] e^{-i(v-r)\beta}, \end{aligned}$$

e temos para  $t \neq v \neq r$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^3} \left[ p^3 C(v-r)C(0) + 2C(t-v)C(t-r) - p^3 C(0)C(v-r) \right] e^{-i(v-r)\beta} = \\ & = 2C(t-v)C(t-r) e^{-i(v-r)\beta}. \end{aligned}$$

Para  $t = v \neq r$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^3} \left[ p^2 3C(v-r)C(0) - p^3 C(0)C(v-r) \right] e^{-i(v-r)\beta} = \\ & = \left[ (3p^{-1} - 1)C(v-r)C(0) \right] e^{-i(v-r)\beta}, \end{aligned}$$

e para  $t = r \neq v$ ,

$$\left[ (3p^{-1} - 1)C(r-v)C(0) \right] e^{-i(v-r)\beta},$$

portanto

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq v}}^N \text{Cov} \left\{ \frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, Y(v)Y(r)X(v)X(r)e^{-i(v-r)\beta} \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq v}}^N (3p^{-1}-1)C(v-r)C(0)e^{-i(v-r)\beta} + \right. \\
 &+ \sum_{r=1}^N \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq r}}^N (3p^{-1}-1)C(r-v)C(0)e^{-i(v-r)\beta} + \\
 &+ \left. \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ t \neq v \neq r}}^N 2C(t-v)C(t-r)e^{-i(v-r)\beta} \right] = \\
 &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq v}}^N (3p^{-1}-1)C(v-r)C(0) \left[ e^{-i(v-r)\beta} + e^{-i(r-v)\beta} \right] + \right. \\
 &+ \left. \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ t \neq v \neq r}}^N 2C(t-v)C(t-r)e^{-i(v-r)\beta} \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 N^2} \left[ \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^N (3p^{-1}-1)C(v-r)C(0)\cos(v-r)\beta + \right. \\
 &+ \left. \sum_{t=1}^N \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ t \neq v \neq r}}^N C(t-v)C(t-r)e^{-i(v-r)\beta} \right]. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

O terceiro termo de (4.5) é análogo ao segundo termo, portanto igual a

$$\frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{v=1}^N \text{Cov} \left\{ \frac{Y(t)Y(s)}{p^2} X(t)X(s)e^{-i(t-s)\alpha}, \frac{Y(v)^2 X(v)^2}{p^2} \right\} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N (3p^{-1}-1) C(t-s) C(0) \cos(t-s)\alpha + \right. \\
 &+ \left. \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{t=1 \\ v \neq t \neq s}}^N \sum_{s=1}^N C(v-t) C(v-s) e^{-i(t-s)\alpha} \right], \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

e a soma do segundo e do terceiro termo é igual a

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi^2 N^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N (3p^{-1}-1) C(t-s) C(0) (\cos(t-s)\beta + \cos(t-s)\alpha) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{t=1 \\ v \neq t \neq s}}^N \sum_{s=1}^N C(v-t) C(v-s) \left[ e^{-i(t-s)\alpha} + e^{-i(t-s)\beta} \right] \right]. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

A covariância do último termo de (4.5) é dada por

$$\begin{aligned}
 &\text{Cov} \left\{ Y(t) Y(s) X(t) X(s) e^{-i(t-s)\alpha}, Y(v) Y(r) X(v) X(r) e^{-i(v-r)\beta} \right\} = \\
 &= \frac{1}{p^4} \left[ EY(t) Y(s) Y(v) Y(r) EX(t) X(s) X(v) X(r) - \right. \\
 &- \left. EY(t) Y(s) EX(t) X(s) EY(v) Y(r) EX(v) X(r) \right] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta}
 \end{aligned}$$

e temos, para  $t \neq s \neq v \neq r$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{p^4} \left[ p^4 [C(t-s) C(v-r) + C(t-v) C(s-r) + C(t-r) C(s-v)] - \right. \\
 &- \left. p^4 [C(t-s) C(v-r)] \right] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta} = \\
 &= [C(t-v) C(s-r) + C(t-r) C(s-v)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta}.
 \end{aligned}$$

Para  $t \neq s$ ,  $t = v$ ,  $v \neq r$ ,  $s \neq r$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^4} \left[ p^3 [C(s-r)C(0) + 2C(s-t)C(r-t)] - \right. \\ & \left. - p^4 C(t-s)C(t-r) \right] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-r)\beta} = \\ & = [p^{-1}C(0)C(s-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(r-t)] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-r)\beta}, \end{aligned}$$

para  $t \neq s$ ,  $t = r$ ,  $v \neq r$ ,  $s \neq v$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^4} \left[ p^3 [C(s-v)C(0) + 2C(t-v)C(s-t)] - \right. \\ & \left. - p^4 C(t-s)C(v-t) \right] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-t)\beta} = \\ & = [p^{-1}C(0)C(s-v) + (2p^{-1}-1)C(t-v)C(s-t)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-t)\beta}, \end{aligned}$$

para  $t \neq s$ ,  $s = v$ ,  $v \neq r$ ,  $t \neq r$

$$[p^{-1}C(0)C(t-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(s-r)] e^{-i(t-s)\alpha - i(s-r)\beta},$$

para  $t \neq s$ ,  $s = r$ ,  $v \neq r$ ,  $t \neq v$

$$[p^{-1}C(0)C(t-v) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(v-s)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-s)\beta},$$

para  $t \neq s$ ,  $v \neq r$ ,  $t = v$ ,  $s = r$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^4} \left[ p^2 [C(0)^2 + 2C(t-s)^2] - p^4 C(t-s)^2 \right] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-s)\beta} = \\ & = [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-2}-1)C(t-s)^2] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-s)\beta}, \end{aligned}$$

para  $t \neq s$ ,  $v \neq r$ ,  $t = r$ ,  $s = v$

$$[p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-2}-1)C(t-s)^2]e^{-i(t-s)\alpha - i(s-t)\beta},$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{v=1}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq v}}^N \text{Cov} \left\{ Y(t)Y(s)X(t)X(s)e^{-i(t-s)\alpha}, \right. \\ & \left. Y(v)Y(r)X(v)X(r)e^{-i(v-r)\beta} \right\} = \\ & = \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s \neq v \neq r}}^N \sum_{v=1}^N \sum_{r=1}^N [C(t-v)C(s-r) + C(t-r)C(s-v)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta} + \right. \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s \\ r \neq t}}^N [p^{-1}C(0)C(s-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(t-r)] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-r)\beta} + \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq s \\ v \neq t}}^N [p^{-1}C(0)C(s-v) + (2p^{-1}-1)C(t-v)C(s-t)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-t)\beta} + \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t \\ r \neq s}}^N [p^{-1}C(0)C(t-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(s-r)] e^{-i(t-s)\alpha - i(s-r)\beta} + \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq t \\ v \neq s}}^N [p^{-1}C(0)C(t-v) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(v-s)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-s)\beta} + \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-1}-1)C(t-s)^2] e^{-i(t-s)\alpha - i(t-s)\beta} + \\ & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-1}-1)C(t-s)^2] e^{-i(t-s)\alpha - i(s-t)\beta}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo no terceiro termo a transformação  $v=r$ , no quarto termo a transformação  $s=t$ ,  $t=s$ , e no quinto termo  $v=r$ ,  $s=t$ ,  $t=s$ , temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s}}^N \sum_{v=1}^N \sum_{r=1}^N [C(t-v)C(s-r) + C(t-r)C(s-r)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta} \right. \\
 & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^N [p^{-1}C(0)C(s-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(t-r)] [e^{-i(t-s)\alpha - i(t-r)\beta} + \\
 & + e^{-i(t-s)\alpha - i(r-t)\beta} + e^{i(t-s)\alpha - i(t-r)\beta} + e^{i(t-s)\alpha - i(r-t)\beta}] + \\
 & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-1}-1)C(t-s)^2] [e^{-i(t-s)\alpha - i(t-s)\beta} + e^{-i(t-s)\alpha - i(s-t)\beta}] \\
 & = \frac{1}{(2\pi N)^2} \left[ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s}}^N \sum_{v=1}^N \sum_{r=1}^N [C(t-v)C(s-r) + C(t-r)C(s-v)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta} + \right. \\
 & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^N 4[p^{-1}C(0)C(s-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(t-r)] [\cos(t-s)\alpha \cos(t-r)\beta] + \\
 & + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-2}-1)C(s-t)^2] [e^{-i(t-s)(\alpha+\beta)} + e^{-i(t-s)(\alpha-\beta)}]. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Somando as relações (4.7), (4.10), (4.11) chegamos a uma expressão para a  $\text{Cov}\{I'_N(\alpha), I'_N(\beta)\}$ , que devido a sua forma é difícil ser computada, e somos obrigados a fazer algumas considerações assintóticas.

A relação (4.7), pode ser reescrita, usando a repre-

sentação espectral de  $C(k)$ , (2.2), na forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi N)^2} 3N(p^{-1}-1) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \\ & + \frac{2}{(2\pi N)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} (N-|t|) f(x) f(y) e^{it(x+y)} dx dy = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N} 3(p^{-1}-1) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \\ & + \frac{1}{2\pi^2 N^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N}{2}(x+y)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} f(x) f(y) dx dy, \end{aligned} \quad (4.12)$$

dado que

$$\sum_{t=-(N-1)}^{N-1} (N-|t|) e^{it(x+y)} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N}{2}(x+y)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)},$$

e para  $N$  suficientemente grande, usando o resultado (ver Figueiredo [1977], pág. 81)

$$\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N}{2}(x+y)\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} dy \sim f(-x), \quad (4.13)$$

e o fato de  $f(x)$  ser par, temos que a relação (4.7) é aproximadamente igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \text{Cov} \left\{ Y(t)^2 X(t)^2, Y(s)^2 X(s)^2 \right\} = \\ & = \frac{3(p^{-1}-1)}{2\pi^2 N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \frac{1}{\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \end{aligned} \quad (4.14)$$



A relação (4.10) é composta da soma das relações (4.8) e (4.9). Em virtude da analogia existente entre essas duas relações vamos desenvolver detalhadamente somente a relação (4.8), a qual pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{4\pi^2 N^2} \left[ 3(p^{-1}-1) \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N f(x)f(y) e^{i(t-s)x} [e^{i(t-s)\beta} + e^{-i(t-s)\beta}] dx dy + \right. \\ \left. + 2 \iint_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s \neq r}}^N \sum_{r=1}^N f(x)f(y) e^{i(t-s)x+i(t-r)y-i(s-r)\beta} dx dy \right]. \quad (4.15)$$

A soma existente no primeiro termo de (4.15)

$$\sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N e^{i(t-s)(x+\beta)} + \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N e^{i(t-s)(x-\beta)} = \\ = \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{i(t-s)(x+\beta)} + \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{i(t-s)(x-\beta)} - 2N = \\ = D_N(x+\beta) \overline{D_N(x+\beta)} + D_N(x-\beta) \overline{D_N(x-\beta)} - 2N,$$

onde

$$D_N(x) = \sum_{t=1}^N e^{itx}. \quad (4.16)$$

A soma existente no segundo termo de (4.15) pode ser decomposta em

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N e^{i(t-s)x+i(t-r)y-i(s-r)\beta} - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{r=1}^N e^{i(t-r)y-i(t-r)\beta} + N - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{i(t-s)x-i(s-t)\beta} + N - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{i(t-s)x+i(t-s)\beta} + N = \\
 & = \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^N e^{it(x+y)-is(x+\beta)-ir(y-\beta)} - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{r=1}^N e^{it(y-\beta)-ir(y-\beta)} - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{it(x+\beta)-is(x+\beta)} - \\
 & - \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N e^{it(x+y)-is(x+y)} + 2N,
 \end{aligned}$$

$$= D_N(x+y)D_N(x+\beta)D_N(y-\beta) - |D_N(y-\beta)|^2 - |D_N(x+\beta)|^2 - |D_N(x+y)|^2 + 2N,$$

considerando (4.16) e portanto podemos escrever (4.8) na forma

$$\frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N \sum_{r=1}^N \text{Cov} \left\{ \frac{Y(t)^2 X(t)^2}{p}, Y(s)Y(r)X(s)X(r)e^{-i(s-r)\beta} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3p^{-1}-1)}{2\pi N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(x+\beta)|^2}{2\pi N} f(x) dx dy + \right. \\
 &+ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(x-\beta)|^2}{2\pi N} f(x) dx dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \left. \right] + \\
 &+ \frac{1}{2\pi^2 N^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(y) \overline{D_N(x+y)} \overline{D_N(x+\beta)} \overline{D_N(y-\beta)} dx dy - \\
 &- \frac{1}{\pi N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(y-\beta)|^2}{2\pi N} f(y) dy dx + \right. \\
 &+ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(x+\beta)|^2}{2\pi N} f(x) dx dy + \\
 &+ \left. \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(x+y)|^2}{2\pi N} f(x) dx dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right]. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

O termo

$$\frac{1}{2\pi^2 N^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(y) \overline{D_N(x+y)} \overline{D_N(x+\beta)} \overline{D_N(y-\beta)} dx dy$$

pode ser aproximado por  $\frac{2}{N} f^2(\beta)$ , (ver Scheinok [1975]) e para os demais nós vamos usar o resultado (4.13), e temos, para N suficientemente grande uma expressão aproximada para (4.17) dada por

$$\begin{aligned}
 &\frac{(3p^{-1}-1)}{2\pi N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) f(\beta) dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) f(\beta) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right] + \\
 &+ \frac{2}{N} f^2(\beta) - \frac{1}{\pi N} \left[ 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(\beta) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(y) f(y) dy - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3p^{-1}-1)}{\pi N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy [f(\beta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx] \right] + \\
 &+ \frac{1}{N} \left[ 2f^2(\beta) - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [2f(\beta) + f(x)] dx \right] + \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right]. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Como a relação (4.9) é análoga a relação (4.8) segue que a soma das duas relações é aproximadamente igual a

$$\begin{aligned}
 &\frac{(3p^{-1}-1)}{\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \left[ f(\alpha) + f(\beta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right] + \\
 &+ \frac{2}{N} \left[ f^2(\alpha) + f^2(\beta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [f(\alpha) + f(\beta) + f(x)] dx + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right]. \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Para a relação (4.11), podemos também obter uma expressão aproximada, de um modo análogo ao procedimento para a obtenção da relação (4.19), porém nós não iremos repetir o argumento, apenas vamos escrever o resultado final, ou seja,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(2\pi N)^2} \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ t \neq s}}^N \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq r}}^N \sum_{r=1}^N [C(t-v)C(s-r) + C(t-r)C(s-v)] e^{-i(t-s)\alpha - i(v-r)\beta} + \\
 &+ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ r \neq s \\ r \neq t}}^N 4[p^{-1}C(0)C(s-r) + (2p^{-1}-1)C(t-s)C(t-r)] [\cos(t-s)\alpha \cos(t-r)\beta] + \\
 &+ \sum_{t=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^N [p^{-2}C(0)^2 + (2p^{-1}-1)C(s-t)^2] [e^{-i(t-s)(\alpha+\beta)} - e^{-i(t-s)(\alpha-\beta)}] = \\
 &= \frac{f(\alpha)f(\beta)}{N^2} [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] - \frac{2}{N} (f(\beta) + f(\alpha))^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2\pi N^2} [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] [f(\alpha)+f(\beta)] \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \\
 & + \frac{4}{\pi N} [f(\alpha)+f(\beta)] \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 N^2} [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 - 12N ] \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 N^2 p^2} [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 - \\
 & - \frac{(3-p^2)}{2\pi^2 p^2 N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \frac{1}{\pi p^2 N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [f(x+\alpha+\beta) + f(x+\alpha-\beta)] dx + \\
 & + \frac{1}{\pi p N^2} [f(\alpha) [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\
 & - \frac{2(3-p)}{\pi p N} [f(\alpha)+f(\beta)] \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{4\pi(2-p)}{p\pi N} f(\alpha)f(\beta) - \\
 & - \frac{1}{2\pi^2 N^2 p} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] + \frac{2(3-p)}{\pi^2 p N} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 - \\
 & - \frac{(2-p)}{\pi p N^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [f(x+\alpha+\beta) + f(x-\alpha+\beta) + f(x+\alpha-\beta) + f(x-\alpha-\beta)] dx. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Vejamos agora, como obter uma expressão assintótica para a variância do estimador da função densidade espectral a partir destas novas fórmulas. Primeiramente, notemos que todos os termos que compõem as relações (4.14), (4.19) dependem



de  $N^{-1}$ , o que não acontece com a relação (4.20), pois os termos que envolvem  $(|D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2)$  dependem de  $N^{-2}$ . Então, se denotarmos a soma de todos os termos que dependem de  $N^{-1}$  por  $N^{-1}g(\alpha, \beta)$ , temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{-\pi}^{\pi} N^{-1} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) g(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 0,$$

devido ao fato de  $W_M(\lambda)$  ter a propriedade de ser altamente concentrada em torno do ponto  $\lambda = 0$  (ver pág. 14), e portanto a variância assintótica de  $\hat{f}(\lambda)$  reduz-se a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } \hat{f}(\lambda) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left[ \iint_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) [f(\alpha) f(\beta)] - \frac{1}{2\pi} [f(\alpha) + f(\beta)] \cdot \right. \\ &\cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{4\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \frac{1}{4\pi^2 p^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \frac{1}{p\pi} f(\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\ &\left. - \frac{1}{2\pi^2 p} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \right] [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

O termo

$$\begin{aligned} &\iint_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) f(\alpha) f(\beta) [ |D_N(\alpha+\beta)|^2 + |D_N(\alpha-\beta)|^2 ] d\alpha d\beta = \\ &= \iint_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) f(\alpha) f(\beta) |D_N(\alpha+\beta)|^2 d\alpha d\beta + \\ &+ \iint_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\beta) f(\alpha) f(\beta) |D_N(\alpha-\beta)|^2 d\alpha d\beta = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\beta) f(\beta) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) W_M(\lambda-\alpha) |D_N(\alpha+\beta)|^2 d\alpha \right] d\beta +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\beta) f(\beta) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) W_M(\lambda-\alpha) |D_N(\alpha-\beta)|^2 d\alpha \right] d\beta,$$

pode, para N suficientemente grande, ser aproximado para

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\beta) f(\beta) [f(\beta) W_M(\lambda-\beta) 2\pi N] d\beta +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda-\beta) f(\beta) [f(\beta) W_M(\lambda+\beta) 2\pi N] d\beta =$$

$$= 2\pi N \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\beta) W_M(\lambda-\beta)^2 d\beta + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\beta) W_M(\lambda-\beta) W_M(\lambda+\beta) d\beta \right], \quad (4.22)$$

pois a janela espectral  $W_M(\lambda)$  acumula massa numa taxa muito mais lenta que o núcleo de Fejér (ver Rosenblatt, [1974], pág. 175).

Em virtude de  $W_M(\lambda)$  estar concentrada em torno de  $\lambda = 0$ , implicando que  $W_M(\lambda-\beta)W_M(\lambda+\beta)$  é aproximadamente zero, a menos que  $\lambda = 0, \pi$ , podemos desprezar o segundo termo de (4.22). Ainda, considerando a função densidade espectral aproximadamente constante no intervalo de frequências comparável a largura de  $W_M(\lambda)$ , segue que (4.22) é aproximadamente igual a

$$2\pi N f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\beta) d\beta, \quad \text{para } \lambda \neq 0, \pi$$

$$4\pi N f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\beta) d\beta, \text{ para } \lambda = 0, \pi.$$

Posto isto, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } \hat{f}(\lambda) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} 2\pi N \left\{ f^2(\lambda) - \frac{2}{2\pi} f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{2}{4\pi^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 p^2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \frac{1}{p\pi} f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{2\pi^2 p} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \left. \right\} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\beta)^2 d\beta = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[ 2\pi f^2(\lambda) - 2f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{2\pi} [1+p^{-2} - 2p^{-1}] \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 + \right. \\ &+ \frac{2}{p} f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \left. \right] \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\beta)^2 d\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \left[ f^2(\lambda) - \frac{2(1-p^{-1})}{2\pi} f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \right. \\ &+ (1-p^{-1})^2 \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \left. \right] \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\beta) d\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N} \left[ f(\lambda) - \frac{(1-p^{-1})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \cdot \\ &\cdot \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\beta) d\beta. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Agora, usando a relação (2.23), temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} \frac{M}{N} \left[ f(\lambda) - \frac{1}{2\pi} (1-p^{-1}) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \int_{-\pi}^{\pi} w^2(v) dv & \text{para } \lambda \neq 0, \pi \\ \frac{2M}{N} \left[ f(\lambda) - \frac{1}{2\pi} (1-p^{-1}) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 \int_{-\pi}^{\pi} w^2(v) dv & \text{para } \lambda = 0, \pi \end{cases} \tag{4.24}$$

Da expressão (4.24) notamos que, como no caso em que as observações são perdidas sistematicamente, existe um acréscimo na variância do estimador da função densidade espectral,

de modo que quando  $p$ , probabilidade de observarmos a série num instante  $t$ , decresce, a variância aumenta, e se  $p \rightarrow 1$ , o

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } \hat{f}_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{M}{N} f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(v) dv, & \text{para } \lambda \neq 0, \pi \\ 2 \frac{M}{N} f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(v) dv, & \text{para } \lambda = 0, \pi \end{cases}$$

é equivalente ao resultado obtido quando não existem observações perdidas (ver relação (2.24)).

#### 4.3 - O CASO GERAL

Na secção 4.2, nós vimos o caso em que a série temporal  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  é observada no instante  $t$ , com uma probabilidade  $p$ , independente de  $t$ . Vamos agora tratar o caso mais geral, quando o processo  $\{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$  associado a série  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  é tal que para todo  $t$ , temos que

$$\left. \begin{aligned} P[Y(t)=1] &= p > 0 \\ P[Y(t)=0] &= 1 - p \\ EY(t)Y(t+r) &= pu_r \\ EY(t)Y(t+q)Y(t+r)Y(t+s) &= p^2 v_{q,r,s}; \quad q,r,s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} (4.25)$$

Vamos supor ainda que estão satisfeitas as condições

$$u_r > 0, \quad r=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.26)$$

e

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |v_{r,q,q+s}^{-u_r} u_s| \leq V(|r|+|r|+1) < \infty. \quad (4.27)$$

Das relações (4.25) temos que

$$\text{Cov}[Y(t), Y(t+r)] = p(u_r^{-p}),$$

e da relação (4.27) temos que

$$U = \sum_{r=-\infty}^{\infty} |u_r^{-p}| < \infty, \quad (4.28)$$

de onde segue que, a menos que  $Y(t)$  seja periódico,

$$\text{Cov}\{Y(t), Y(t+r)\} \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

O processo complementar, definido por

$$Y^*(t) = 1 - Y(t),$$

também tem as propriedades (4.25), e pode ser demonstrado que satisfaz as condições (4.26) e (4.27), (ver Bloomfield [1970], pág. 371).

Como no capítulo 3, vamos definir

$$Z(t) = Y(t)X(t),$$

onde

$Z(t)$  é a série amostrada,

$X(t)$  é a série original

$Y(t)$  é o processo aleatório associado a  $X(t)$ .

Se  $\{X(t) t \in \mathbb{Z}\}$  é uma série estacionária de quarta ordem, com média zero, e admitindo que



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |C_X(k)| = G < \infty, \quad (4.29)$$

onde  $C_X(k)$  é a função de autocovariância da série, a função densidade espectral da série,

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X(k) e^{-ik\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

existe, e tem derivada contínua.

Admitindo ainda, que o cumulante de quarta ordem de  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ ,

$$\begin{aligned} Q_X(q, r, s) &= EX(t)X(t+q)X(t+r)X(t+s) - C_X(q)C_X(r-s) - \\ &- C_X(r)C_X(s-q) - C_X(s)C_X(q-r) \end{aligned}$$

satisfaz

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} |Q_X(q, r, s)| = Q < \infty, \quad (4.30)$$

temos que a dependência entre dois valores de  $X(t)$ , largamente espaçados é pequena, e estimadores consistentes de  $f_X(\lambda)$  podem ser obtidos quando não existem observações perdidas.

Lembrando a independência estocástica entre os processos  $\{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$  e  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  temos que

$$EZ(t) = EY(t)X(t) = 0,$$

e

$$C_Z(k) = EZ(t)Z(t+k) = EY(t)Y(t+k)EX(t)X(t+k)$$



$$C_Z(k) = C_X(k) p u_r, \quad (4.31)$$

e

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |C_Z(k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |C_X(k)| = G < \infty, \quad (4.32)$$

assegurando que a função densidade espectral do processo amostrado  $Z(t)$ ,

$$f_Z(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_Z(k) e^{-i\lambda k}, \quad (4.33)$$

existe e tem derivada contínua.

Podemos demonstrar, usando as relações (4.29), (4.30), (4.25) e (4.27) (ver Bloomfield [1970], pág. 373), que o cumulante de quarta ordem do processo  $Z(t)$ , satisfaz

$$\sum_{q, r, s=-\infty}^{\infty} |Q_Z(q, r, s)| < \infty. \quad (4.34)$$

A seguir vamos escrever a função densidade espectral de  $X(t)$  em termos da função densidade espectral de  $Z(t)$ .

Observemos primeiramente que se

$$a_r = (u_r - p) = p-1 \text{ Cov}(Y(t), Y(t+r)) \quad (4.35)$$

temos de (4.28) que  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |a_r| < \infty$ , e portanto a transformada de Fourier de  $a_r$ ,

$$a(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r e^{-irw},$$

existe, é contínua, e como  $p_a(w)$  é a função densidade espectral de  $Y(t)$ ,  $a(w)$  é positiva.

Usando as relações (4.33), (4.31) e (4.35) temos que a função densidade espectral de  $Z(t)$  é

$$\begin{aligned} f_Z(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(p+a_k) C_X(k) e^{-i\lambda k} = \\ &= \frac{1}{2\pi} p^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_X(k) e^{-i\lambda k} + \frac{1}{2\pi} p \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k C_X(k) e^{-i\lambda k} = \\ &= p^2 f_X(\lambda) + p \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda-w) f_X(w) dw, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde a segunda parcela de (4.36) é obtida devido ao fato da transformada de Fourier de um produto ser igual à convolução das transformadas.

Para escrevermos a função densidade espectral de  $X(t)$  em termos de  $Z(t)$ , vamos considerar

$$b_r = p^{-1} (p^{-1} - u_r^{-1}) = a_r [p^2 (a_r + p)]^{-1}.$$

De (4.26) segue que  $b_r$  é finito para todo  $r$  e de (4.28) que  $\sum_{r=-\infty}^{\infty} |b_r| < \infty$ , portanto, a transformada de Fourier,

$$b(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ikw},$$

existe, é contínua e limitada.

Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_Z(w) dw = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k C_Z(k) e^{-i\lambda k}$$

e

$$\begin{aligned} p^{-2} f_Z(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_Z(w) dw &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_Z(k) (p^{-2} - b_k) e^{-ik\lambda} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_Z(k)}{pu_k} e^{-ik\lambda}, \end{aligned}$$

pois

$$p^{-2} - b_k = (pu_k)^{-1},$$

e desta forma, temos que

$$f_X(\lambda) = p^{-2} f_Z(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) f_Z(w) dw. \quad (4.37)$$

Para o processo complementar  $Z^*(t)$  definido por

$$Z^*(t) = X(t)Y^*(t),$$

podemos, de uma forma análoga ao procedimento para obtenção de (4.36) mostrar que

$$f_Z^*(\lambda) = (1-p)^2 f_X(\lambda) + p \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda-w) f_X(w) dw.$$

Um estimador natural para  $f_X(\lambda)$  é obtido a partir de (4.37), ou seja

$$\hat{f}_X(\lambda) = p^{-2} \hat{f}_Z(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Z(w) dw, \quad (4.38)$$

e como a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Z(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-ik(\lambda-w)} \hat{f}_Z(w) dw =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \sum_{r=-\infty}^{\infty} w_M(r) \hat{C}_Z(r) e^{-i\lambda k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iw(r-k)} dw,$$

segue que

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}_Z(r) w_M(r)}{p u_r} e^{-ir\lambda}, \quad (4.39)$$

pois, como já tínhamos visto no capítulo 2,

$$\hat{f}_Z(\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} w_M(r) \hat{C}(r) e^{-ir\lambda}$$

é o estimador suavizado de covariâncias, assintoticamente não viciado e consistente.

Salientamos aqui, que nós não estamos supondo normalidade do processo  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ . Porém se  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  satisfaz as condições (4.29) e (4.30) as propriedades assintóticas do estimador (2.15) continuam valendo, (ver Brillinger [1975]).

Vamos mostrar agora que o estimador definido por (4.38) é assintoticamente não viciado e consistente.

É fácil verificar que

$$E \hat{f}_X(\lambda) \rightarrow f_X(\lambda), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

pois, de (4.38), temos que

$$E\hat{f}_X(\lambda) = p^{-2}E\hat{f}_Z(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)E\hat{f}_Z(w)dw,$$

e como  $\hat{f}_Z(\lambda)$  é assintoticamente não viciado de fato segue que  $\hat{f}_X(\lambda)$  é um estimador assintoticamente não viciado de  $f_X(\lambda)$ .

A variância do estimador  $\hat{f}_X(\lambda)$ , definido (4.38) é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{f}_X(\lambda) &= \text{Var}[p^{-2}\hat{f}_Z(\lambda)] + \text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)\hat{f}_Z(w)dw - \\ &- 2\text{Cov}\left\{p^{-2}\hat{f}_Z(\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)\hat{f}_Z(w)dw\right\}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

Agora,

$$\text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)\hat{f}_Z(w)dw = \iint_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)b(\lambda-v)\text{Cov}\left\{\hat{f}_Z(w), \hat{f}_Z(v)\right\}dw dv,$$

e usando a expressão (2.22)

$$\text{Cov}\left\{\hat{f}_Z(w), \hat{f}_Z(v)\right\} \approx \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(w-\alpha)W_M(v-\alpha) f^2(\alpha) d\alpha,$$

temos que para N suficientemente grande,

$$\text{Var} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)\hat{f}_Z(w)dw = \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w)W_M(w-\alpha)dw \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-v)W_M(v-\alpha)dv \right] \cdot$$

$$\cdot f^2(\alpha)d\alpha \approx \frac{2\pi}{N} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\alpha)b(\lambda-\alpha)f(\alpha)^2d\alpha = O(N^{-1}).$$

O terceiro termo de (4.40),

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{cov} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-w) \hat{f}_Z(w) dw, p^{-2} \hat{f}_Z(\lambda) \right\} = \\
 & = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b(\lambda-w)}{p^2} \operatorname{cov} \left\{ \hat{f}_Z(w), \hat{f}_Z(\lambda) \right\} dw = \\
 & = 2 \cdot \frac{2\pi}{N} \frac{1}{p^2} \int_{-\pi}^{\pi} b(\lambda-\alpha) W_M(\lambda-\alpha) f^2(\alpha) d\alpha = O(N^{-1}),
 \end{aligned}$$

e segue que

$$\operatorname{Var} \hat{f}_X(\lambda) = p^{-4} \operatorname{Var} \hat{f}_Z(\lambda) + O(N^{-1}),$$

ou seja,

$$\operatorname{Var} \hat{f}_X(\lambda) \approx \begin{cases} \frac{2\pi}{p^2 N} f_Z(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha)^2 d\alpha, & \text{para } \lambda \neq 0, \pi \\ \frac{4\pi}{p^2 N} f_Z(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha)^2 d\alpha, & \text{para } \lambda = 0, \pi \end{cases}$$

para  $N$  suficientemente grande.

Terminamos esta secção observando que observações perdidas sempre causam um acréscimo na variância, fato já visto nas secções anteriores, e para  $p \rightarrow 1$  a variância de  $\hat{f}_X(\lambda)$  tende para a variância  $\hat{f}_Z(\lambda)$ .

Observemos ainda que  $p$  e  $u_r$  em geral são desconhecidos, e somos obrigados a estimá-los. Se existir alguma informação sobre a estrutura do processo aleatório  $\{Y(t), t \in Z\}$ , obviamente esta informação deve ser usada, ajustando algum modelo paramétrico, mas se não existe nenhuma informação iremos estimar  $p$  e  $u_r$  diretamente da amostra. Neste último caso te-



mos que excluir a possibilidade da estimativa de  $pu_r$  ser muito pequena, e isto pode ser feito estimando  $pu_r$  por

$$\tilde{C}_Y(r) = \begin{cases} \frac{pu}{2} & \text{se } C'_Y(r) \leq \frac{pu}{2} \\ C'_Y(r) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.42)$$

onde

$$C'_Y(r) = \frac{1}{(N-|r|)} \sum_{t=1}^{N-|r|} Y(t)Y(t+|r|), \quad (4.43)$$

e  $u$  é um limite inferior de  $u_r$ .

Desta forma, temos um novo estimador para  $f_X(\lambda)$ , ou seja

$$\tilde{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{C}_Z(r)w_M(r)e^{-ir\lambda}}{\tilde{C}_Y(r)}, \quad (4.44)$$

e se o processo  $\{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$  satisfaz

$$\text{Var}[C'_Y(r)] \leq \frac{V}{N-|r|} < \infty,$$

temos que o novo estimador (4.44) é assintoticamente equivalente ao estimador (4.39), (ver Bloomfield [1970]).

#### 4.4 - UM PROCEDIMENTO ALTERNATIVO

Nas secções anteriores vimos como estimar a função densidade espectral,  $f(\lambda)$ , de uma série temporal com observações perdidas, levando em consideração o processo aleatório causador da perda das observações. Entretanto, com base no ar-

artigo de Jones [1971] podemos estimar  $f(\lambda)$  sem fazer suposições sobre o processo aleatório associado a série. Para tal, vamos analogamente a secção 3.2, considerar a série amostrada como uma versão de amplitude modulada da série original, ou seja

$$Y(t) = g(t)X(t),$$

onde  $g(\cdot)$  é uma função não aleatória, que assume o valor 1 se a série for observada no instante  $t$ , e 0 caso contrário. Admitindo que existe pelo menos um par de observações separadas pelo "lag"  $k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , podemos definir o estimador da função de autocovariância de  $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$  por

$$\hat{C}_X(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-|k|} Y(t)Y(t+|k|)}{M(k)}, \quad (4.45)$$

onde  $M(k)$  é o número de observações separadas pelo "lag"  $k$ , isto é,

$$M(k) = \sum_{t=1}^{N-|k|} g(t)g(t+|k|), \quad (4.46)$$

e então estimar a função densidade espectral  $f_X(\lambda)$  usando a relação

$$\hat{f}_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{C}_X(k) w_M(k) e^{-ik\lambda}. \quad (4.47)$$

Considerando agora os resultados obtidos nas secções 3.2 e 3.3, podemos escrever a relação (4.47) como uma forma

quadrática

$$\hat{f}_X(\lambda) = \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s,t) e^{-i\lambda(s-t)} X(s)X(t) \quad (4.48)$$

onde

$$a(s,t) = \frac{g(s)g(t)w_M(s-t)}{2\pi M(s-t)}, \quad (4.49)$$

e temos que a variância de (4.48) é dada por

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\lambda-\alpha, \lambda-\beta)|^2 f_X(\alpha) f_X(\beta) d\alpha d\beta, \quad 0 < \lambda < \pi.$$

Porém, como  $a(s,t)$  não depende de  $s$  e de  $t$  somente através da diferença  $s-t$ , não podemos remover  $f_X^2(\lambda)$  para fora da integral.

Jones [1971] com o propósito de comparar a variância do estimador de  $f_X(\lambda)$  obtido a partir de observações não igualmente espaçadas com a variância do estimador obtido a partir de observações igualmente espaçadas, supos ser constante a função densidade espectral  $f_X(\lambda)$ .

Desta forma, segue que

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = f_X(\lambda)^2 \iint_{-\pi}^{\pi} |A(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta,$$

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = f_X(\lambda)^2 \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N a(s,t)^2,$$

e usando a relação (4.49) temos

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = f_X(\lambda)^2 \sum_{k=-M}^M \frac{w_M(k)^2}{M(k)}.$$

Para o caso em que não existem observações perdidas,  $M(k) = N-k$ , e portanto

$$\text{Var } \hat{f}_X(\lambda) = f_X(\lambda)^2 \sum_{k=-M}^M \frac{w_M(k)^2}{N-k}.$$

Se supusermos que foram realmente observadas  $n$  observações num total de  $N$  temos que para  $M(k)$  próximo de  $n-k$ ,  $k=0, \dots, M$ , as propriedades do estimador de  $f_X(\lambda)$  não irão diferir, muito das do estimador obtido quando utilizamos uma amostra de tamanho  $N$  sem perda de observações. Entretanto se  $M(k)$  for muito inferior a  $n-k$ , o estimador sofrerá de "Variance leakage" e podemos concluir que a perda de observações sempre causa um acréscimo na variância do estimador dado que  $M(k) < n-k$ , quando existirem observações perdidas.

## CAPÍTULO 5

### SÉRIES TEMPORAIS CONTÍNUAS

#### TEMPOS DE AMOSTRAGEM IRREGULARES

##### 5.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo 2 vimos como estimar a função densidade espectral de uma série temporal discreta, definida em intervalos de tempo igualmente espaçados. Nos capítulos 3 e 4, tratamos da estimação da função densidade espectral, de uma série temporal definida em intervalos de tempo igualmente espaçados com observações perdidas. Entretanto, em muitos casos de interesse prático, a série temporal é contínua, e, devido a problemas computacionais, somos obrigados a converter uma série temporal contínua em discreta para então estimar a função densidade espectral da série contínua a partir da série discreta. Ao fazermos tal conversão deparamos com dois problemas que serão abordados neste capítulo. O primeiro, denominado fenômeno de "aliasing", refere-se a contribuição que frequências mais altas dão para  $f(\lambda)$  e o segundo trata de como estimar a função densidade espectral quando a série temporal é amostrada em intervalos de tempo não múltiplos de um número real, ou seja,



quando os tempos de amostragem são irregulares.

## 5.2 - O FENÔMENO DE "ALIASING"

O modo usual para convertermos a série temporal contínua  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  em discreta, é amostrar a série em intervalos de tempo igualmente espaçados,  $t_k = k\Delta t$ ,  $k=0, \pm 1, \dots$  de tal sorte que podemos escrever

$$Y(k) = X(k\Delta t),$$

onde  $Y(k)$  é a série amostrada, e,  $\Delta t$  é o intervalo de amostragem.

A representação espectral de uma série contínua é dada por

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k} dZ(\lambda),$$

de onde segue que

$$Y(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k\Delta t} dZ(\lambda).$$

Considerando o fato que para  $\lambda$  fixo, a função  $\phi_{\lambda}(k) = e^{i\lambda k\Delta t}$  é indistinguível da função  $\phi_{\left(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right)}(k)$ , para  $\ell=0, \pm 1, \dots$ ,

pois  $\phi_{\left(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right)}(k) = e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}\right)k\Delta t} = e^{i\lambda k\Delta t} \cdot e^{i2\pi\ell k} = e^{i\lambda k\Delta t}$ ,

temos que



$$Y(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k \Delta t} dZ(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2\ell-1)\pi}{\Delta t}}^{\frac{(2\ell+1)\pi}{\Delta t}} e^{i\lambda k \Delta t} dZ(\lambda),$$

e fazendo a transformação de variáveis  $\lambda = w + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}$ , podemos escrever

$$Y(k) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{i w k \Delta t} dZ(w + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}),$$

ou

$$Y(k) = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} e^{i\lambda k \Delta t} dZ_Y(\lambda),$$

onde

$$dZ_Y(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} dZ(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}).$$

Ainda no capítulo 2, vimos que

$$E[dZ(\lambda) \overline{dZ(\mu)}] = \begin{cases} dF(\lambda) & \text{se } \lambda = \mu \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \mu, \end{cases}$$

e portanto a esperança

$$E|dZ_Y(\lambda)|^2 = E \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} dZ(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}) \overline{\sum_{j=-\infty}^{\infty} dZ(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t})} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} E dZ(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}) dZ(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t}) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} dF(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}) \text{ para } -\frac{\pi}{\Delta t} < \lambda < \frac{\pi}{\Delta t}, \end{aligned}$$

e admitindo que o processo  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  tenha função distribuição espectral  $F(\lambda)$  absolutamente contínua, temos que

$$f_Y(\lambda) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}), \text{ para } -\frac{\pi}{\Delta t} < \lambda < \frac{\pi}{\Delta t}. \quad (5.1)$$

Esta última expressão nos diz que a função densidade espectral do processo original nas frequências transladas  $\lambda + \frac{2\pi\ell}{\Delta t}$ ,  $\ell = 0, \pm 1, \dots$ , contribui para a função densidade espectral do processo amostrado na frequência  $\lambda$  no intervalo  $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$ . Tais frequências são chamadas "aliases" de  $\lambda$  e não nos permitem determinar a função densidade do processo original a partir do processo amostrado sem ambiguidades, a menos que saibamos de antemão, que a função densidade espectral do processo original é zero nas frequências  $|\lambda| > \pi/\Delta t$ ; pois caso contrário uma família de funções densidades espectrais é compatível com os valores amostrados de  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ . A frequência  $\lambda = \pi/\Delta t$  é denominada de frequência de Nyquist e, se a função densidade espectral do processo original for determinada sem erros a partir da função densidade espectral do processo amostrado, o esquema da amostragem é dito ser livre de "aliasing".

Em esquemas de amostragem cujos intervalos de tempo são igualmente espaçados, o fenômeno de "aliasing" sempre existe, e uma forma de reduzi-lo é considerar intervalos de amostragem bem pequenos. Entretanto, quando a série original é amostrada em intervalos não igualmente espaçados, particularmente quando a série é amostrada em intervalos de tempo aleatórios, existem esquemas de amostragem livres de "aliasing". De um modo geral, podemos dizer que uma sequência  $\{t_n\}$ ,  $n=0, \pm 1, \dots$ , é livre de "aliasing" em relação a uma família de funções densidades espectrais, se qualquer função desta família pode ser determinada por uma operação linear da sequência de autocovariâncias da série amostrada  $X(t_n)$ , denotada por

$$c(n) = EX(t_{m+n})\overline{X(t_m)}.$$

Shapiro [1960], considerando o esquema de amostragem  $\{t_n\}$ ,  $n=0, \pm 1, \dots$ , em que cada tempo é obtido adicionando-se ao precedente uma variável aleatória independente, ou seja

$$t_n = t_{n-1} + \gamma_n$$

onde  $\gamma_n$ ,  $n=0, \pm 1, \dots$ , é uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com esperança zero e com função densidade de probabilidade  $p(\tau)$ , tal que  $p(\tau) \in L_2$  e  $p(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , determinou para  $f(\lambda) \in L_2$ , critérios para verificar quando o esquema é ou não livre de "aliasing". Baseado nestes critérios, concluiu que o esquema de Poisson, isto é,

$$p(\tau) = \begin{cases} \beta e^{-\beta\tau} & \text{para } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{para } \tau < 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde  $\beta > 0$  é a taxa de amostragem, é livre de "aliasing", bem como o esquema de Poisson alternado, em que a série é amostrada de acordo com o esquema de Poisson, porém é observada em um tempo sim outro não. No caso em que a série for observada a cada terceiro tempo, o fenômeno de "aliasing" persiste.

Um outro esquema de amostragem, também considerado por Shapiro [1960], é a amostragem com "jitter". Neste esquema os tempos de amostragem são da forma

$$t_n = n\Delta t + \gamma_n, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

onde  $\gamma_n$  é uma família de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, com distribuição normal, média zero e variância  $\sigma^2$ . Este esquema, também não é livre de "aliasing".

Beutler [1970], também desenvolveu vários critérios, que determinam quando uma sequência  $\{t_n\}$ ,  $n=0, \pm 1, \dots$ , é livre de "aliasing" em relação a uma determinada família de funções densidades espectrais, e com base nestes critérios generalizou o resultado de Shapiro [1960] para esquemas de Poisson, concluindo que é suficiente amostrar a série no semi-eixo (positivo ou negativo) e que o esquema de Poisson é livre de "aliasing" para qualquer função densidade espectral. Além disso, obteve mais dois resultados interessantes. O primeiro é



referente a esquemas cujos tempos de amostragem são igualmente espaçados, porém cada amostra  $X(k\Delta t)$  pode ser perdida com probabilidade  $1 - p$ , independente de  $k$ . O segundo resultado é referente a amostragem com "jitter". Em ambos os casos se a família de funções densidades espectrais é absolutamente contínua, com derivada em  $L_p(-\pi, \pi)$   $p > 1$  e o suporte da função densidade espectral é o intervalo  $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$ , temos esquemas de amostragem livres de "aliasing" em relação a família de funções densidades espectrais.

### 5.3 - AMOSTRAGEM EM INTERVALOS DE TEMPO IRREGULARES

Vamos agora apresentar estimadores da função densidade espectral  $f(\lambda)$ , de uma série temporal gaussiana, estacionária de segunda ordem, contínua, com média zero, amostrada em tempos discretos. Como já havíamos visto na secção 5.2, devido ao problema de "aliasing", não podemos estimar a função densidade espectral de uma série temporal contínua a partir de um conjunto de observações finito,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , igualmente espaçadas, quando a função densidade espectral não tem suporte compacto, e, uma forma de evitarmos o problema de "aliasing" é amostrar a série em instantes  $\{t_n\}$  aleatórios.

Jones [1970], considerou uma série temporal amostrada de acordo com um processo de Poisson, e apresentou o estimador

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{v=1}^N \sum_{u=1}^N w_{vu} X(t_v) X(t_u) e^{2\pi i(t_v - t_u)\lambda} \quad (5.3)$$

onde os pesos  $w_{vu}$ , simétricos, são definidos por

$$w_{vu} = \frac{T}{N^2} D[|t_v - t_u|],$$

$T$  é o tempo de amostragem, e  $D(\tau)$  é uma janela qualquer.

Lembramos que se uma série temporal contínua estacionária, com média zero é amostrada de acordo com um processo de Poisson, já caracterizado na secção 5.2, a série amostrada é discreta, estacionária, com média zero e com função de autocovariância  $c(n)$ . Shapiro [1960], mostrou que  $c(n)$  é dado por

$$c(0) = C(0)$$

$$\begin{aligned} c(n) &= E[X(t_{m+n})X(t_m)] = \\ &= E[E[X(t_{m+n})X(t_m) | t_{m+n} \text{ e } t_m \text{ fixos}]] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) p_n(\tau) d\tau, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

onde  $C(\tau)$  é a função de autocovariância da série contínua  $X(t)$ , e  $p_n(\tau)$  é a função densidade de probabilidade expressa na forma

$$p_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{n-1}(\tau-\mu) p(\mu) d\mu, \quad n \geq 2.$$

Como  $p(\mu) = 0$  se  $\mu < 0$ , decorre que



$$p_n(\tau) = \begin{cases} \int_0^\tau p_{n-1}(\tau-\mu)p(\mu) d\mu, & \text{se } n \geq 2 \\ p(\tau) & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ e } \tau = 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \text{ e } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

e se  $\{t_n\}$  é um processo de Poisson, temos de (5.2) que

$$p_n(\tau) = \frac{\beta(\beta-\tau)^{n-1} e^{-\beta\tau}}{(n-1)!} \quad (5.5)$$

Como já foi mencionado anteriormente, o esquema de Poisson é livre de "aliasing" e portanto, o conhecimento exato de  $c(n)$  nos permite obter a função densidade espectral  $f(\lambda)$ , mediante uma transformação linear de  $c(n)$ . Na prática, entretanto,  $c(n)$  é estimado, consistentemente, com base numa amostra finita, e a pergunta que surge, é quando o correspondente estimador de  $f(\lambda)$  é consistente. Beutler[1970], conjecturou que se a função densidade espectral tem suporte compacto  $[-\pi, \pi]$ , então, o estimador de  $f(\lambda)$  obtido a partir de um esquema de Poisson pode não ser consistente para  $\beta < 1$ , o que implicaria na inexistência de estimadores consistentes de  $f(\lambda)$  para qualquer taxa média de amostragem, no caso em que  $f(\lambda)$  não ter suporte compacto.

Masry & Lui [1975], porém, definindo o estimador de  $f(\lambda)$  para todo  $\beta$ ,  $0 < \beta < \infty$  por

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\pi N \beta} \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^{N-1} X(t_k) X(t_{k+n}) \cos \lambda (t_{k+n} - t_k) \quad (5.6)$$

onde  $M$  é inteiro positivo satisfazendo  $M < N$ ,  $M \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$  e  $M/N \rightarrow 0$  (ou seja, consideraram o estimador (5.3) com  $\beta$  estimado por  $N/T$  e  $D(\tau) = 1$  se  $\tau$  é menor que o ponto de truncamento  $\tau_M$ , e zero caso contrário), mostraram que se  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  é um processo estacionário de segunda ordem, gaussiano, com média zero, e se a função densidade espectral  $f(\lambda)$  é uma função racional em  $\lambda$ , isto é,

$$f(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)},$$

onde  $Q$  e  $P$  são polinômios de grau  $q$  e  $p$  respectivamente, o estimador definido por (5.6) é assintoticamente não viciado e a variância assintótica é dada por

$$\text{Var } \hat{f}(\lambda) = 2 \frac{M}{N} \left[ f^2(\lambda) + \frac{C(0) f(\lambda)}{\pi \beta} + \frac{C^2(0)}{(2\pi \beta)^2} \right]$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , e será multiplicada por 2 quando  $\lambda = 0$ .

A obtenção deste resultado, é o tema central do artigo de Masry & Lui [1975], e não será demonstrada aqui, uma vez que ela é extremamente trabalhosa, pois envolve a esperança em relação a  $X(t)$  e em relação ao processo pontual  $\{t_n\}$ .

Neste artigo, também foi comparado este resultado com os resultados clássicos obtidos quando a série é observada no intervalo  $[0, T]$ .

Quando a série é observada continuamente, temos que

o estimador da função de autocovariância é expresso por

$$\hat{C}_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} X(t)X(t+|\tau|) dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \quad (5.7)$$

e o estimador da função densidade espectral por

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-i\tau\lambda} w_M(\tau) \hat{C}_T(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

onde  $w_M(\tau)$  é a função suavizadora definida no capítulo 2.

Agora, admitindo

$$w_M(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M, \end{cases}$$

decorre que (5.8) é igual a

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-i\lambda\tau} \hat{C}_T(\tau) d\tau, \quad (5.9)$$

e pode-se demonstrar que o vício do estimador (5.9) tem um comportamento assintótico similar ao vício do estimador (5.6), e a variância do estimador (5.9) tem uma taxa de convergência  $M/T$ , similar a taxa de convergência do estimador (5.6),  $M/N$ .

#### 5.4 - PERIODOGRAMA COMPENSADO

Vamos agora, baseados em Ferraz-Mello [1977], estender alguns resultados obtidos no capítulo 2, para o caso em

que os tempos de amostragem não são igualmente espaçados. Como nos capítulos anteriores, vamos considerar a série temporal  $X(t)$ , estacionária de segunda ordem, com média zero.

No capítulo 2, vimos que o periodograma, definido por

$$I_N(\lambda_\nu) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{-i\lambda_\nu t} \right|^2,$$

$$\lambda_\nu = \frac{2\pi\nu}{N}, \quad -\left[\frac{N-1}{2}\right] \leq \nu \leq \left[\frac{N}{2}\right].$$

é um estimador da função densidade espectral  $f(\lambda)$ . A expressão (2.11) é a forma complexa do periodograma e é equivalente a forma

$$I_N(\lambda_\nu) = \frac{1}{2\pi} [a_\nu^2 + b_\nu^2] \quad (5.10)$$

onde

$$a_\nu = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^N X(t) \cos \lambda_\nu t$$

e

$$b_\nu = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^N X(t) \operatorname{sen} \lambda_\nu t.$$

Na realidade  $a_\nu$  e  $b_\nu$  são os coeficientes de regressão obtidos quando a série temporal é aproximada por uma combinação linear das funções

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= \cos \lambda_\nu t \\ H_2 &= \operatorname{sen} \lambda_\nu t, \quad t=0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Agora, se a série temporal é amostrada em tempos igualmente espaçados, o sistema de funções (5.11) é ortogonal, o que não acontece para uma série amostrada em intervalos de tempo irregulares. Então, se desejarmos aproximar a série temporal, amostrada em intervalos de tempo irregulares, por uma combinação linear de funções ortogonais, somos obrigados a ortogonalizar o sistema de funções (5.11).

A ortogonalização de um sistema de funções é feita por meio do processo de ortogonalização de Gram - Schmidt, e segue que para o sistema de funções definido por (5.11), temos que o novo sistema

$$h'_0 = H_0$$

$$h'_1 = H_1 - \frac{\langle H_1, h'_0 \rangle}{\langle h'_0, h'_0 \rangle} h'_0$$

$$h'_2 = H_2 - \frac{\langle H_2, h'_1 \rangle}{\langle h'_1, h'_1 \rangle} - \frac{\langle H_2, h'_0 \rangle}{\langle h'_0, h'_0 \rangle} h'_1$$

é ortogonal, e o sistema  $h_i = \frac{h'_i}{\|h'_i\|}$ ,  $i=0,1,2$ , é ortonormal ou seja,

$$h_0 = a_0 H_0$$

$$h_1 = a_1 H_1 - \langle H_1, h_0 \rangle h_0 a_1 \tag{5.12}$$

$$h_2 = a_2 H_2 - \langle H_2, h_1 \rangle h_1 a_2 - \langle H_2, h_0 \rangle h_0 a_2,$$



onde  $\langle g_1, g_2 \rangle$  indica o produto interno, definido por

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{i=1}^N g_1(t_i) g_2(t_i),$$

$\|g_i\|$  é a norma de  $g_i$ , ou seja,

$$\|g_i\| = [\langle g_i, g_i \rangle]^{1/2}$$

e os coeficientes  $a_i$ ,  $i=0,1,2$ , são expressos por

$$\left. \begin{aligned} a_0^{-2} &= N \\ a_1^{-2} &= \sum_{j=1}^N \cos^2 \lambda_{\nu} t_j - a_0^2 \left[ \sum_{j=1}^N \cos \lambda_{\nu} t_j \right]^2 \\ a_2^{-2} &= \sum_{j=1}^N \sin^2 \lambda_{\nu} t_j - a_0^2 \left[ \sum_{j=1}^N \sin \lambda_{\nu} t_j \right]^2 - a_1^2 \left[ \sum_{j=1}^N \cos \lambda_{\nu} t_j \cdot \sin \lambda_{\nu} t_j \right]^2 - \\ &\quad - a_0^4 a_1^2 \left[ \sum_{j=1}^N \cos \lambda_{\nu} t_j \right]^2 \left[ \sum_{j=1}^N \sin \lambda_{\nu} t_j \right]^2 + \\ &\quad + 2a_0^2 a_1^2 \sum_{j=1}^N \cos \lambda_{\nu} t_j \cdot \sum_{j=1}^N \sin \lambda_{\nu} t_j \cdot \sum_{j=1}^N \cos \lambda_{\nu} t_j \cdot \sin \lambda_{\nu} t_j. \end{aligned} \right\} (5.13)$$

Portanto, os coeficientes de regressão em relação ao sistema ortonormal (5.12) são

$$C_0 = \sum_{j=1}^N X(t_j) h_0$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^N X(t_j) h_1$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^N X(t_j) h_2,$$

e, admitindo que

$$\sum_{j=1}^N X(t_j) = 0,$$

temos que

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= a_1 \sum_{j=1}^N X(t_j) \cos \lambda_\nu t_j \\ C_2 &= a_2 \sum_{j=1}^N X(t_j) \operatorname{sen} \lambda_\nu t_j + a_1 a_2 \left[ a_0^2 \sum_{j=1}^N \cos \lambda_\nu t_j \cdot \sum_{j=1}^N \operatorname{sen} \lambda_\nu t_j \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^N \cos \lambda_\nu t_j \cdot \operatorname{sen} \lambda_\nu t_j \right] C_1. \end{aligned} \right\} (5.14)$$

O *periodograma compensado* é definido por

$$I_N(\lambda_\nu) = \frac{1}{2\pi} [C_1^2 + C_2^2]. \quad (5.15)$$

A expressão (5.15) é equivalente à expressão (2.11) no caso em que a série temporal é amostrada em intervalos de tempo igualmente espaçados, pois neste caso os coeficientes obtidos em (5.14) reduzem-se aos coeficientes clássicos definidos em (5.10), dado que  $\lambda_\nu t_j$ ,  $j=1, \dots, N$ , é igual a  $\lambda_\nu t$ ,  $t=1, \dots, N$ , e

$$\sum_{t=1}^N \cos \lambda_\nu t = \sum_{t=1}^N \operatorname{sen} \lambda_\nu t = \sum_{t=1}^N \operatorname{sen} \lambda_\nu t \cdot \cos \lambda_\nu t = 0,$$

$$\sum_{t=1}^N \cos^2 \lambda_{\nu} t = \sum_{t=1}^N \text{sen}^2 \lambda_{\nu} t = N/2,$$

(ver Fuller, [1976], pág. 94), de onde segue que

$$a_1^{-2} = N/2,$$

$$a_2^{-2} = N/2,$$

e portanto,

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X(t) \cos \lambda_{\nu} t,$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X(t) \text{sen} \lambda_{\nu} t.$$

## CAPÍTULO 6

### APLICAÇÕES

Com o objetivo de ilustrar alguns resultados teóricos obtidos nos capítulos anteriores, foi desenvolvido um programa em FORTRAN e foram utilizados inicialmente os dados de Jenkins & Watts [1968], ou seja, 400 valores do processo autoregressivo (AR) de segunda ordem,

$$X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t).$$

A função densidade espectral do processo é estimada considerando primeiramente o caso em que os tempos de amostragem são igualmente espaçados, para depois considerar o caso em que as observações são sistematicamente perdidas, e por fim, quando o processo autoregressivo é amostrado de acordo com um processo de renovação.

A seguir, foi estimada a função densidade espectral de uma série real, com observações perdidas, de temperaturas de um local do oceano.

### 6.1 - APLICAÇÃO 1 - TEMPOS IGUALMENTE ESPAÇADOS

Os dados utilizados na estimação da função densidade espectral encontram-se na Tabela 6.1, onde o intervalo de tempo  $\Delta t$ , é igual a 1.

Inicialmente foi subtraída a média de cada observação, e calculada uma estimativa da função de autocovariância através da expressão

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} X(t)X(t+k), \quad k=0, \dots, M, \quad (6.1)$$

para três valores diferentes de  $M$ ;  $M = 30$ ,  $M = 48$  e  $M = 80$ . Os valores de  $\hat{C}(k)$  estão registrados nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, respectivamente.

A seguir estimamos a função densidade espectral usando a expressão

$$\hat{f}(i) = \frac{1}{\pi} \left[ \hat{C}(0) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \hat{C}(k) w_M(k) \cos \left( \frac{\pi k i}{M} \right) \right], \quad i=1, \dots, M+1, \quad (6.2)$$

onde  $w_M(k)$  é a janela de hamming dada por

$$w_M(k) = \begin{cases} 0,56 + 0,46 \cos \frac{\pi k}{M}, & \text{se } k=0, \pm 1, \dots, \pm M \\ 0 & , \text{ se } |k| > M. \end{cases} \quad (6.3)$$

Nas Tabelas 6.5, 6.6 e 6.7 temos a função densidade espectral estimada na série, para cada valor de  $M$ , e, na Figura 6.1, temos uma representação gráfica da função densidade espectral estimada para os três casos, e a verdadeira função densidade espectral do



processo AR, (ver Jenkins & Watts [1968]).

$$f(\lambda) = \frac{1}{2,25 - 3\cos\pi\lambda + \cos 4\pi\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2.$$

## 6.2 - APLICAÇÃO 2 - TEMPOS DE AMOSTRAGEM SEGUINDO UM PADRÃO PERIÓDICO

Vamos novamente usar os dados da Tabela 6.1, porém admitimos agora que a série foi amostrada periodicamente em grupos de 7 observações separadas por grupos de 3 observações em que ela não é observada.

Inicialmente, subtraímos a média de cada observação, calculamos, usando os resultados do capítulo 3,  $R_g(k)$ , por

$$R_g(k) = \begin{cases} \frac{\alpha + (\alpha + \beta)j - k}{\alpha + \beta}, & \text{se } (\alpha + \beta)j \leq k \leq \beta + (\alpha + \beta)j, \\ \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, & \text{se } \beta + (\alpha + \beta)j \leq k \leq \alpha + (\alpha + \beta)j, \\ \frac{k - \beta + (\alpha + \beta)j}{\alpha + \beta}, & \text{se } \alpha + (\alpha + \beta)j \leq k \leq (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)j \end{cases} \quad (6.4)$$

$j = 0, \dots, [\frac{M}{\alpha + \beta}]$ ,  $k = 1, \dots, M$ ,  $\alpha = 7$ ,  $\beta = 3$ , e  $M = 48$ .

A estimativa da função de autocovariância foi calculada por

$$\hat{C}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} X(t)X(t+k)}{NR_g(k)}, \quad k=0, \dots, M, \quad (6.5)$$

e está registrada na Tabela 6.8. Na Tabela 6.9 temos uma estimativa da função densidade espectral da série, calculada analogamente ao caso em que os tempos de amostragem são igualmente espaçados e na Figura 6.2 temos uma representação gráfica desta estimativa, juntamente com a estimativa obtida a partir de dados igualmente espaçados.

### 6.3 - APLICAÇÃO 3 - TEMPOS DE AMOSTRAGEM SEGUNDO UM PROCESSO DE RENOVACÃO

Admitimos agora que a série registrada na Tabela 6.1 foi amostrada de tal sorte que os intervalos de tempo entre duas sucessivas observações, são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas com distribuição  $f_1 = 8/9$ ,  $f_2 = 1/9$ ,  $f_r = 0$ , para  $r > 2$ , ou seja, com probabilidade  $8/9$ , duas observações estão separadas por uma unidade de tempo e com probabilidade  $1/9$ , duas observações estão separadas por duas unidades de tempo, o que equivale a dizer que a série é amostrada de acordo com um processo de renovação onde a proporção de observações presentes é igual a  $0,9$ . Para maiores detalhes, ver Bloomfield [1970].

O processo de renovação  $Y(t)$  é gerado admitindo  $Y(1) = 1$ , a série de observações resultante encontra-se na Tabela 6.10, e, com base nos resultados teóricos da secção 4.3 as condições (4.26) e (4.27) valem para tal processo de amostragem.

A seguir calculamos primeiramente  $u_k$  através da expressão

$$u_k = \sum_{t=1}^k f_t u_{k-t}, \quad (6.6)$$

(ver Feller [1968], pag. 311), e a função densidade espectral da série por

$$\tilde{f}(i) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\hat{C}(0)}{P} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{\hat{C}(k) w_M(k) \cos\left(\frac{\pi k i}{M}\right)}{p u_k} \right], \quad i=1, \dots, M+1 \quad (6.7)$$

onde  $\hat{C}(k)$  foi calculado usando (6.1) e  $w_M(k)$  é a janela de hamming, com  $M = 48$ .

A estimativa da função de autocovariância se encontra na Tabela 6.11, a estimativa da função densidade espectral na Tabela 6.12 e sua representação gráfica na Figura 6.3.

Uma forma alternativa de estimar a função densidade espectral foi feita, ignorando o fato da série ter sido amostrada segundo um processo de renovação, ou seja, ao invés de calcularmos  $u_k$  através da expressão (6.6) nós construímos uma estimativa para  $p u_k$  a partir da amostra, utilizando a expressão (4.43), isto é,

$$\widehat{p u}_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} Y(t) Y(t+k), \quad k=0, \dots, M,$$

e então estimamos a função densidade espectral usando a relação (6.7).

Os valores da função densidade espectral e a sua representação gráfica encontram-se na Tabela 6.13 e na Figura 6.4, respectivamente.

Finalmente, estimamos a função densidade espectral não fazendo suposições sobre o processo de amostragem, ou seja, estimamos a função de autocovariância por

$$\hat{C}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} X(t)X(t+k)}{M(k)}, \quad k=0, \dots, M \quad (6.8)$$

onde  $M(k)$  é o número de observações separadas pelo "lag"  $k$ ,

$$M(k) = \sum_{t=1}^{N-k} g(t)g(t+k), \quad (6.9)$$

e

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{se a série é observada no instante } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função densidade espectral por (6.2).

A função densidade espectral estimada desta forma se encontra na Tabela 6.14 e a sua representação gráfica, junto com a estimativa obtida a partir de observações igualmente espaçados está na Figura 6.5.

#### 6.4 - APLICAÇÃO 4 - DADOS OCEANOGRÁFICOS

Os dados desta aplicação referem-se a temperaturas do oceano obtidas à profundidade de 500 m no ponto (00°N, 33°W) a bordo do N./Oc. Prof. W. Bernard do Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo durante a realização do FGGE (Ex-

perimento Meteorológico Mundial) no período de Fev/Mar. 79, e estão registradas na Tabela 6.15. Sete observações foram perdidas.

A função densidade espectral é estimada usando-se as relações (6.8), (6.9) e (6.2), com  $M = 40$ .

A seguir, para efeito de comparação, usamos o método utilizado em oceanografia, o qual consiste na interpolação de valores no tempo onde as observações foram perdidas.

As Tabelas 6.16 e 6.17 nos fornecem a estimativa da função densidade espectral quando procedemos à estimação sem interpolação e com interpolação respectivamente. A representação gráfica das duas estimativas está na Figura 6.6.



6.5 - TABELAS E FIGURAS

-0,88	-0,12	-0,89	-1,38	-0,07	1,03	2,14	0,35	-1,10	-1,78
-2,76	-1,77	0,98	1,00	-0,70	-1,01	-1,30	-0,85	-0,46	1,63
0,06	-0,17	-1,01	-1,04	-0,66	-1,12	-0,51	-0,71	-0,20	-0,13
0,14	1,59	-0,76	-1,08	-1,77	-1,20	0,45	-0,07	-0,63	-0,35
-0,87	-0,62	0,28	1,90	2,14	1,05	0,31	1,07	2,67	2,44
1,31	1,10	1,94	0,33	1,82	1,15	0,61	-1,08	-1,62	-0,39
0,19	-1,59	-2,25	0,29	1,73	2,30	0,80	-0,40	0,30	-0,50
-2,11	-2,43	0,72	3,09	4,96	1,81	-0,46	-0,33	0,04	0,82
-1,63	-2,29	-0,77	1,91	1,92	0,85	10,65	0,35	0,78	1,62
3,24	1,86	0,76	2,24	0,76	-0,15	0,18	0,60	0,92	-0,70
-0,03	1,07	0,28	-1,38	-0,63	-1,48	0,19	-1,14	0,31	0,39
-0,17	0,70	2,14	1,24	0,42	0,61	-0,76	-1,75	-0,37	1,21
1,40	2,46	1,74	0,78	0,90	1,11	2,20	0,52	-0,22	1,12
1,02	1,10	1,72	1,80	-0,46	-1,27	0,39	0,93	0,55	-0,45
-0,87	-0,90	0,64	2,29	2,75	1,43	0,47	1,80	0,46	0,32
-0,81	-1,81	-2,07	0,96	1,20	0,07	-0,98	-1,46	-1,30	-2,29
-1,81	-1,61	-1,01	-1,36	-1,78	0,04	1,44	2,58	0,54	0,27
-0,75	-0,70	0,45	-0,13	-1,03	-1,19	-0,31	1,77	1,89	0,88
0,58	0,70	-0,32	-1,62	1,08	1,25	0,19	-0,93	-0,61	0,83
0,46	1,12	0,11	-1,11	-0,85	-1,86	-0,74	-1,04	-0,42	0,16
0,55	-0,37	-0,62	-1,23	-0,76	-0,76	-1,99	-1,56	-0,36	1,00
0,02	-0,30	-0,23	-0,63	-1,61	-1,66	-0,80	-1,71	-0,87	-0,74
1,55	1,39	1,51	2,39	1,68	-0,04	-1,24	-2,24	-1,31	-0,10
0,46	1,06	1,37	1,67	0,29	-0,31	-2,08	-2,67	-1,51	-1,71
-0,70	-1,25	-0,25	0,14	1,43	0,47	-1,16	-3,68	-3,41	-1,43
1,06	2,86	0,72	-1,79	-2,26	-1,87	-1,53	0,85	1,40	3,37
0,85	-0,36	0,25	1,57	-0,08	0,78	-0,56	-1,22	0,07	-0,33
-0,15	1,56	2,23	2,01	0,42	-0,75	-0,47	1,55	3,60	2,07
1,32	0,06	0,87	0,51	-0,25	0,12	1,54	1,37	1,97	0,81
-0,67	-2,41	-1,82	-0,45	0,31	0,12	-1,01	-1,12	-1,69	-1,52
-0,82	-0,81	-0,33	-0,65	-1,86	-0,64	0,50	1,05	1,40	1,52
0,20	0,64	1,95	1,55	1,74	-0,22	-2,14	-2,33	-1,01	0,42
2,54	0,86	0,10	-0,04	-1,18	-0,40	-0,53	0,70	-0,14	-0,20
0,47	1,07	0,85	-0,35	-0,69	-0,03	-2,08	-1,56	-1,00	0,55
2,08	1,74	-0,34	-1,85	-1,29	1,74	2,58	1,64	1,85	-0,01
-0,16	-0,29	-0,66	-3,41	-2,33	-2,57	-1,78	-1,31	-2,69	-1,77
-0,57	1,58	1,78	1,09	-0,54	0,29	-0,26	0,01	1,05	0,94
-0,91	-2,09	-2,01	-1,12	-0,02	0,98	0,50	2,12	1,68	2,28
2,59	3,04	1,16	0,50	0,56	0,45	0,35	0,10	2,16	2,60
1,40	0,62	0,36	-0,09	1,93	1,80	1,13	-1,34	-1,94	-0,89

Tabela 6.1 - 400 valores do processo AR de segunda ordem

$$X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t)$$

Fonte: Jenkins & Watts, 1968, pág. 318.

lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$
0	2,1378				
1	1,2270	11	0,2217	21	0,0637
2	0,4364	12	0,2550	22	0,0086
3	-0,0602	13	0,0871	23	-0,0418
4	-0,1277	14	-0,0210	24	-0,1518
5	-0,0325	15	-0,1755	25	-0,1649
6	0,0866	16	-0,2755	26	-0,1503
7	0,2053	17	-0,1907	27	-0,1248
8	0,0892	18	-0,0088	28	-0,1091
9	0,0260	19	0,0539	29	-0,0424
10	0,0690	20	0,1468	30	-0,0790

Tabela 6.2 - Estimativa da função de autocovariância do processo AR de segunda ordem  
 $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t)$ ,  $M = 30$

lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$
0	2,1367						
1	1,2279	13	0,0842	25	-0,1705	37	0,1208
2	0,4330	14	-0,0251	26	-0,1547	38	0,0584
3	-0,0557	15	-0,1804	27	-0,1248	39	-0,0278
4	-0,1211	16	-0,2770	28	-0,1086	40	0,0002
5	-0,0345	17	-0,1894	29	-0,0424	41	0,0773
6	0,0751	18	-0,0014	30	-0,0760	42	0,2025
7	0,2032	19	0,0599	31	-0,1040	43	0,2295
8	0,0916	20	0,1505	32	-0,0341	44	0,0625
9	0,0375	21	0,0601	33	0,0091	45	0,0004
10	0,0831	22	0,0043	34	0,1716	46	0,0956
11	0,2253	23	-0,0457	35	0,2424	47	0,1846
12	0,2552	24	-0,1560	36	0,2022	48	0,0910

Tabela 6.3 - Estimativa da função de autocovariância do processo AR de segunda ordem  
 $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t)$ ,  $M = 48$

lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$
0	2,1378						
1	1,2270	21	0,0637	41	0,0698	61	-0,0318
2	0,4364	22	0,0086	42	0,1931	62	-0,0912
3	-0,0602	23	-0,0418	43	0,0221	63	-0,1488
4	-0,1277	24	-0,1518	44	0,0578	64	-0,2338
5	-0,0325	25	-0,1649	45	-0,0018	65	-0,2162
6	0,0866	26	-0,1509	46	0,0922	66	-0,1539
7	0,2053	27	-0,1248	47	0,1788	67	0,0469
8	0,0892	28	-0,1091	48	0,0905	68	0,0794
9	0,0260	29	-0,0424	49	-0,0121	69	0,0589
10	0,0690	30	-0,0790	50	-0,0920	70	-0,0989
11	0,2217	31	-0,1026	51	-0,1460	71	-0,2358
12	0,2550	32	-0,0326	52	-0,0607	72	-0,2721
13	0,0871	33	0,0113	53	0,0999	73	-0,2321
14	-0,0210	34	0,1755	54	0,2298	74	-0,1942
15	-0,1755	35	0,2409	55	0,2599	75	-0,2304
16	-0,2755	36	0,2041	56	0,1263	76	-0,1763
17	-0,1907	37	0,1253	57	0,0881	77	-0,0740
18	-0,0088	38	0,0560	58	0,0350	78	-0,0220
19	0,0539	39	-0,0336	59	-0,0152	79	0,0757
20	0,1468	40	-0,0082	60	-0,0185	80	0,1157

Tabela 6.4 - Estimativa da função de autocovariância do processo AR de segunda ordem

$$X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t), M=80$$



freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,8874				
0,0167	1,9172	0,1833	0,8118	0,3500	0,1773
0,0333	1,5549	0,2000	0,5033	0,3667	0,1022
0,0500	1,2227	0,2167	0,3685	0,3833	0,1101
0,0667	1,2106	0,2333	0,3147	0,4000	0,1746
0,8333	1,6509	0,2500	0,3426	0,4167	0,1871
0,1000	1,8178	0,2667	0,3917	0,4333	0,2093
0,1167	1,2015	0,2833	0,3140	0,4500	0,1944
0,1333	1,1248	0,3000	0,2003	0,4667	0,1339
0,1500	1,4412	0,3167	0,1339	0,4833	0,1339
0,1667	1,2804	0,3333	0,1685	0,5000	0,1533

Tabela 6.5 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  
 $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M = 30$

freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,8682						
0,0104	1,8665	0,1354	1,1053	0,2604	0,4314	0,3854	0,1116
0,0208	2,1331	0,1458	1,5585	0,2708	0,4028	0,3958	0,1689
0,0313	1,5987	0,1563	1,4439	0,2813	0,3573	0,4063	0,2124
0,0417	1,1174	0,1667	0,3500	0,2917	0,2380	0,4167	0,1746
0,0521	1,3063	0,1771	0,9589	0,3021	0,1936	0,4271	0,1845
0,0625	1,1329	0,1875	0,6427	0,3125	0,1365	0,4375	0,2341
0,0729	1,0599	0,1979	0,4965	0,3229	0,1153	0,4479	0,2308
0,0833	1,7598	0,2083	0,4450	0,3333	0,1463	0,4583	0,1322
0,0938	2,1434	0,2188	0,3588	0,3438	0,2430	0,4688	0,1162
0,1042	1,8102	0,2296	0,3180	0,3542	0,1599	0,4792	0,1081
0,1146	1,2590	0,2396	0,3160	0,3646	0,0690	0,4896	0,1450
0,1250	0,7474	0,2500	0,3217	0,3750	0,0697	0,5000	0,1689

Tabela 6.6 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR segunda ordem  
 $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M = 48$

freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,9926						
0,0063	1,8488	0,1313	0,8018	0,2563	0,4635	0,3813	0,1090
0,0125	1,5280	0,1375	1,1890	0,2625	0,4593	0,3875	0,1013
0,0188	2,3936	0,1438	1,8812	0,2688	0,3595	0,3938	0,1436
0,0250	2,3674	0,1500	1,6797	0,2750	0,4105	0,4000	0,2266
0,0313	1,4916	0,1563	1,1457	0,2813	0,3951	0,4063	0,2206
0,0375	1,0118	0,1625	1,5624	0,2875	0,2464	0,4125	0,1732
0,0438	0,9109	0,1688	1,5126	0,2938	0,1951	0,4188	0,1871
0,0500	1,4836	0,1750	0,9701	0,3000	0,2071	0,4250	0,1432
0,0563	1,5083	0,1813	0,6824	0,3063	0,1588	0,4313	0,1898
0,0625	0,9925	0,1875	0,7253	0,3125	0,1366	0,4375	0,2494
0,0688	0,9027	0,1938	0,5489	0,3188	0,1116	0,4438	0,2887
0,0750	1,0330	0,2000	0,3649	0,3250	0,1045	0,4500	0,2165
0,0813	1,3738	0,2063	0,4934	0,3313	0,1057	0,4563	0,1334
0,0875	2,4948	0,2125	0,4479	0,3375	0,1806	0,4625	0,1081
0,0938	2,2272	0,2188	0,3172	0,3438	0,3099	0,4688	0,1203
0,1000	1,7941	0,2250	0,2311	0,3500	0,2613	0,4750	0,1295
0,1063	1,7765	0,2313	0,3462	0,3563	0,1158	0,4813	0,1066
0,1125	1,5061	0,2375	0,3721	0,3625	0,0538	0,4875	0,1271
0,1188	0,8644	0,2438	0,2351	0,3688	0,0591	0,4938	0,1871
0,1250	0,5280	0,2500	0,2499	0,3750	0,0759	0,5000	0,1601

Tabela 6.7 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t)$ ,  $M = 80$

lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$	lag (k)	$\hat{C}(k)$
0	1,6420						
1	1,1816	13	0,3025	25	-0,2537	37	0,1091
2	0,3585	14	0,0305	26	-0,1652	38	0,1194
3	-0,1329	15	-0,2245	27	-0,1645	39	0,0261
4	-0,1662	16	-0,3256	28	-0,1266	40	0,0362
5	-0,1794	17	-0,2019	29	-0,0708	41	-0,0415
6	-0,1249	18	0,0061	30	-0,0989	42	0,0956
7	0,0500	19	0,0625	31	-0,0279	43	0,2079
8	0,0481	20	0,1500	32	0,1017	44	-0,0690
9	0,0804	21	0,1573	33	0,0189	45	-0,0560
10	0,1265	22	0,1322	34	0,3062	46	0,2572
11	0,3167	23	0,0809	35	0,4121	47	0,4840
12	0,4156	24	-0,2484	36	0,2856	48	0,2297

Tabela 6.8 - Estimativa da função de autocovariância do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \varepsilon(t)$ ,  $M = 48$ , com observações perdidas periodicamente,  $\alpha = 7$  e  $\beta = 3$



freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,6683						
0,0104	1,4245	0,1354	0,8474	0,2604	0,3637	0,3854	-0,0003*
0,0208	1,5550	0,1458	1,4023	0,2708	0,2116	0,3958	0,0138
0,0313	1,0220	0,1563	1,2250	0,2813	0,2218	0,4063	0,0055
0,0417	0,5452	0,1667	1,1322	0,2917	0,0328	0,4167	-0,0426*
0,0521	1,0515	0,1771	0,8224	0,3021	0,0673	0,4271	0,0391
0,0625	1,1419	0,1875	0,4179	0,3125	0,0718	0,4375	0,1145
0,0729	1,0661	0,1979	0,1567	0,3229	-0,0182*	0,4479	0,1012
0,0833	2,2136	0,2083	0,1809	0,3333	-0,1085*	0,4583	-0,0255*
0,0938	2,5678	0,2188	0,4114	0,3438	0,1048	0,4688	0,0602
0,1042	1,8444	0,2296	0,5325	0,3542	-0,0094*	0,4792	0,0002
0,1146	0,8792	0,2396	0,3047	0,3646	-0,1579*	0,4896	-0,0222*
0,1250	0,3751	0,2500	0,2144	0,3750	-0,0929*	0,5000	-0,0236*

Tabela 6.9 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M=48$ , com observações perdidas periodicamente,  $\alpha=7$  e  $\beta=3$

lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$	lag (k)	$\hat{c}(k)$
0	0,13647						
1	0,9146	13	0,0061	25	-0,1591	37	0,0267
2	0,2888	14	-0,0081	26	-0,1527	38	-0,0230
3	-0,0942	15	-0,0989	27	-0,1043	39	-0,0664
4	-0,1732	16	-0,2050	28	-0,1131	40	-0,0120
5	-0,0342	17	-0,1069	29	-0,1131	41	0,1089
6	0,0760	18	-0,0459	30	-0,0924	42	0,2023
7	0,1280	19	0,0438	31	-0,0984	43	0,1615
8	0,0866	20	0,0764	32	-0,0662	44	-0,0114
9	0,0945	21	0,0449	33	-0,0143	45	-0,0066
10	0,0554	22	-0,0107	34	0,0845	46	0,0706
11	0,0983	23	-0,0553	35	0,1291	47	0,1243
12	0,0563	24	-0,1042	36	0,1178	48	0,0760

Tabela 6.11 - Estimativa da função de autocovariância do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ , com observações perdidas de acordo com um processo de renovação.

-0,88	0,00	-0,89	-1,38	-0,07	1,03	2,14	0,35	0,00	-1,78
0,00	-1,77	0,00	1,00	-0,70	0,00	-1,30	0,00	-0,46	0,00
0,06	-0,17	-1,01	-1,04	-0,66	-1,12	-0,51	-0,71	-0,20	-0,13
0,14	1,59	-0,76	-1,08	0,00	-1,30	0,45	-0,07	-0,63	-0,35
-0,87	-0,62	0,28	1,90	0,00	1,05	0,31	0,00	2,67	2,44
1,31	1,10	1,94	0,33	0,00	1,15	0,61	0,00	-1,62	-0,89
0,19	-1,59	-2,25	0,29	1,73	0,00	0,80	0,00	0,30	-0,50
-2,11	-2,43	0,00	3,09	4,96	1,81	-0,46	-0,33	0,04	0,82
-1,63	-2,29	0,00	1,91	1,92	0,85	0,00	0,35	0,78	1,62
3,24	1,86	0,76	2,24	0,00	-0,15	0,18	0,60	0,92	0,00
-0,03	0,00	0,28	-1,38	-0,63	-1,48	0,19	-1,14	0,31	0,39
-0,17	0,70	2,14	1,24	0,00	0,61	0,00	-1,75	-0,37	0,00
1,40	2,46	0,00	0,78	0,90	1,11	2,20	0,52	-0,22	1,12
1,02	1,10	1,72	1,80	-0,46	-1,27	0,39	0,00	0,55	0,00
-0,87	-0,90	0,64	2,29	2,75	1,43	0,47	1,80	0,46	0,32
-0,81	-1,81	-2,07	0,96	1,20	0,77	-0,98	-1,46	-1,30	-2,29
-1,81	-1,61	-1,01	-1,36	0,00	0,04	1,44	2,58	0,54	0,00
-0,75	-0,70	0,45	-0,13	-1,03	-1,19	-0,31	1,77	1,89	0,88
0,58	0,00	-0,32	-1,62	1,08	1,25	0,19	-0,93	-0,61	0,83
0,46	0,00	0,11	-1,11	-0,85	-1,86	-0,74	0,00	-0,42	0,16
0,55	-0,37	-0,62	0,00	-0,76	-0,79	-1,99	-1,56	-0,36	1,00
0,02	-0,30	-0,23	-0,63	-1,61	-1,66	-0,80	-1,71	-0,87	-0,74
1,55	1,39	1,51	2,39	1,68	-0,04	-1,24	0,00	-1,31	-0,10
0,46	1,06	1,37	1,67	0,29	-0,31	-2,08	0,00	-1,50	-1,71
-0,70	-1,25	-0,25	0,14	1,43	0,47	-1,16	-3,68	-3,41	-1,43
1,06	2,86	0,72	-1,79	-2,26	-1,87	-1,53	-0,25	1,40	3,37
0,85	-0,36	0,25	1,57	-0,08	0,78	-0,56	-1,22	0,07	-0,33
-0,15	1,56	2,23	2,01	0,00	-0,75	0,00	1,55	3,60	2,07
1,32	0,06	0,87	0,51	-0,25	0,12	1,54	1,37	1,97	0,81
-0,67	-2,41	-1,82	-0,45	0,31	0,00	-1,01	-1,12	0,00	-1,52
-0,82	-0,81	-0,33	-0,65	-1,86	0,00	0,50	0,00	1,40	1,52
0,20	0,64	0,00	1,55	1,74	0,22	-2,14	-2,33	0,00	0,42
2,54	0,86	0,10	-0,04	-1,18	-0,40	-0,53	0,70	-0,14	-0,20
0,47	1,07	0,00	-0,35	-0,69	-0,63	-2,08	-1,56	-1,00	0,55
2,08	1,74	-0,34	-1,85	-1,29	1,74	0,00	1,64	1,85	-0,01
-0,16	-0,29	-0,66	-3,41	0,00	-2,57	-1,78	-1,31	-2,69	-1,77
-0,57	1,58	1,78	1,09	-0,54	0,29	-0,26	0,01	1,05	0,94
-0,91	0,00	-2,01	-1,12	-0,02	0,00	0,50	2,12	1,68	2,28
2,59	3,04	1,16	0,50	0,56	0,45	0,35	0,10	2,16	2,60
1,40	0,62	0,36	-0,09	1,93	1,80	1,13	-1,34	-1,94	-0,89

Tabela 6.10 - Valores do processo AR de segunda ordem, amostrado de acordo com um processo de renovação.



freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,1153						
0,0104	1,4243	0,1354	1,1057	0,2604	0,1297	0,3854	-0,0725*
0,0208	1,8053	0,1458	1,3887	0,2708	0,0801	0,3958	-0,0386*
0,0313	1,2289	0,1563	1,1024	0,2813	0,1080	0,4063	0,0182
0,0417	0,9007	0,1667	0,9718	0,2917	0,0912	0,4167	0,0324
0,0521	1,0831	0,1771	0,6574	0,3021	0,0308	0,4271	0,0152
0,0625	0,8420	0,1875	0,5037	0,3125	-0,0631*	0,4375	-0,0000*
0,0729	0,7288	0,1979	0,4583	0,3229	-0,0351*	0,4479	0,0068
0,0833	1,3221	0,2083	0,4067	0,3333	0,0544	0,4583	-0,0031*
0,0938	1,7503	0,2188	0,3364	0,3438	0,1048	0,4688	0,0237
0,1042	1,5343	0,2296	0,1707	0,3542	0,0704	0,4792	-0,0402*
0,1146	1,2388	0,2396	0,0821	0,3646	0,0258	0,4896	-0,0951*
0,1250	0,9006	0,2500	0,0488	0,3750	-0,0395*	0,5000	-0,1233*

Tabela 6.12 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M = 48$ , com observações perdidas de acordo com um processo de renovação, supondo conhecido  $p_{u_k}$

freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,2109						
0,0104	1,4894	0,1354	1,1564	0,2604	0,1270	0,3854	-0,0922*
0,0208	1,8883	0,1458	1,4528	0,2708	0,0765	0,3958	-0,0529*
0,0313	1,2844	0,1563	1,1534	0,2813	0,1071	0,4063	0,0058
0,0417	0,9395	0,1667	1,0171	0,2917	0,0862	0,4167	0,0173
0,0521	1,1291	0,1771	0,6870	0,3021	0,0197	0,4271	-0,0032*
0,0625	0,8770	0,1875	0,5227	0,3125	-0,0770*	0,4375	-0,0175*
0,0729	0,7613	0,1979	0,4750	0,3229	-0,0454*	0,4479	-0,0117*
0,0833	1,3832	0,2083	0,4230	0,3333	0,0481	0,4583	-0,0215*
0,0938	1,8330	0,2188	0,3493	0,3438	0,1024	0,4688	0,0087
0,1042	1,6072	0,2296	0,1745	0,3542	0,0659	0,4792	-0,0571*
0,1146	1,2969	0,2396	0,0805	0,3646	0,0181	0,4896	-0,1180*
0,1250	0,9418	0,2500	0,0444	0,3750	-0,0549*	0,5000	-0,1526*

Tabela 6.13 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M = 48$ , com observações perdidas de acordo com um processo de renovação, estimando  $p_{u_k}$

freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	1,1978						
0,0104	1,4898	0,1354	1,1560	0,2604	0,1290	0,3854	-0,0963*
0,0208	1,9236	0,1458	1,4753	0,2708	0,0727	0,3958	-0,0549*
0,0313	1,2797	0,1563	1,1535	0,2813	0,1078	0,4063	0,0065
0,0417	0,9234	0,1667	1,0254	0,2917	0,0863	0,4167	0,0178
0,0521	1,1386	0,1771	0,6816	0,3021	0,0188	0,4271	-0,0038*
0,0625	0,8690	0,1875	0,5179	0,3125	-0,0833*	0,4375	-0,0188*
0,0729	0,7375	0,1979	0,4735	0,3229	-0,0491*	0,4479	-0,0118*
0,0833	1,3913	0,2083	0,4226	0,3333	0,0483	0,4583	-0,0231*
0,0938	1,8609	0,2188	0,3509	0,3438	0,1051	0,4688	0,0112
0,1042	1,6171	0,2296	0,1695	0,3542	0,0662	0,4792	-0,0583*
0,1146	1,3008	0,2396	0,0758	0,3646	0,0181	0,4896	-0,1205*
0,1250	0,9254	0,2500	0,0378	0,3750	-0,0577*	0,5000	-0,1570*

Tabela 6.14 - Estimativa de função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $X(t) = X(t-1) - 0,5X(t-2) + \epsilon(t)$ ,  $M = 48$ , com observações perdidas de acordo com um processo de renovação, sem fazermos suposições sobre o processo de amostragem.

6,49	6,10	6,13	6,36	6,28*	6,19	6,13	5,96	6,08	6,25
5,73	6,24	6,81	5,75	6,38*	7,02	6,87	6,93	6,97	6,69
7,20	6,65	6,67	6,95	6,78	6,72	6,72	6,49	6,79	6,88
6,36	6,61	6,54	6,67	6,78	7,13	6,74	6,46	6,67	6,59
6,51	6,55	6,63	6,54	6,55	6,66	6,87	7,07	6,69	6,47
6,48	6,61	6,50	6,74	6,69	7,99	6,62	6,76	6,69	6,60
6,75	6,83	6,61	6,58*	6,55	6,68	6,66	6,56	6,59*	6,62*
6,65	6,80	6,79	7,09	6,99*	6,88*	6,77	6,50	6,51	

Tabela 6.15 - Série de temperaturas do oceano obtidas à profundidade de 500 m no ponto (00°N, 33°W).

\* Observações interpoladas.



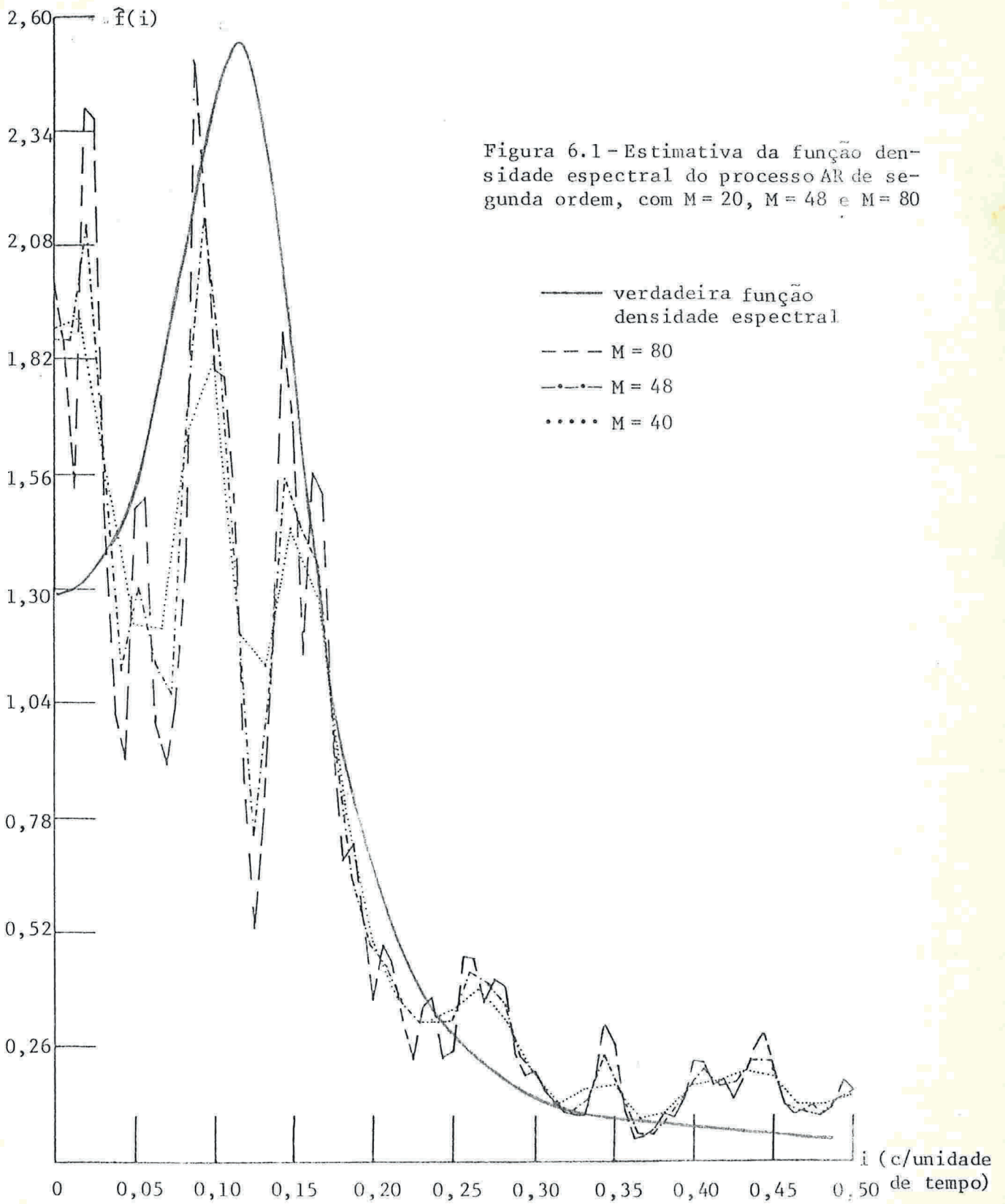
freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	0,1109						
0,0125	0,1335	0,1375	0,0081	0,2625	0,0300	0,3875	0,0254
0,0250	0,1803	0,1500	0,0264	0,2750	0,0103	0,4000	0,0134
0,0375	0,1449	0,1625	0,0353	0,3875	0,0146	0,4125	0,0067
0,0500	0,0994	0,1750	0,0069	0,3000	0,0177	0,4250	0,0031
0,0625	0,0518	0,1875	0,0061	0,3125	0,0119	0,4375	0,0006
0,0750	0,0124	0,2000	0,0042	0,3250	0,0084	0,4500	0,0098
0,0875	0,0126	0,2125	-0,0013*	0,3375	0,0417	0,4625	0,0116
0,1000	0,0149	0,2250	0,0147	0,3500	0,0457	0,4750	0,0093
0,1125	0,0356	0,2375	0,0258	0,3675	0,0398	0,4875	0,0258
0,1250	0,0079	0,2500	0,0353	0,3750	0,0432	0,5000	0,0295

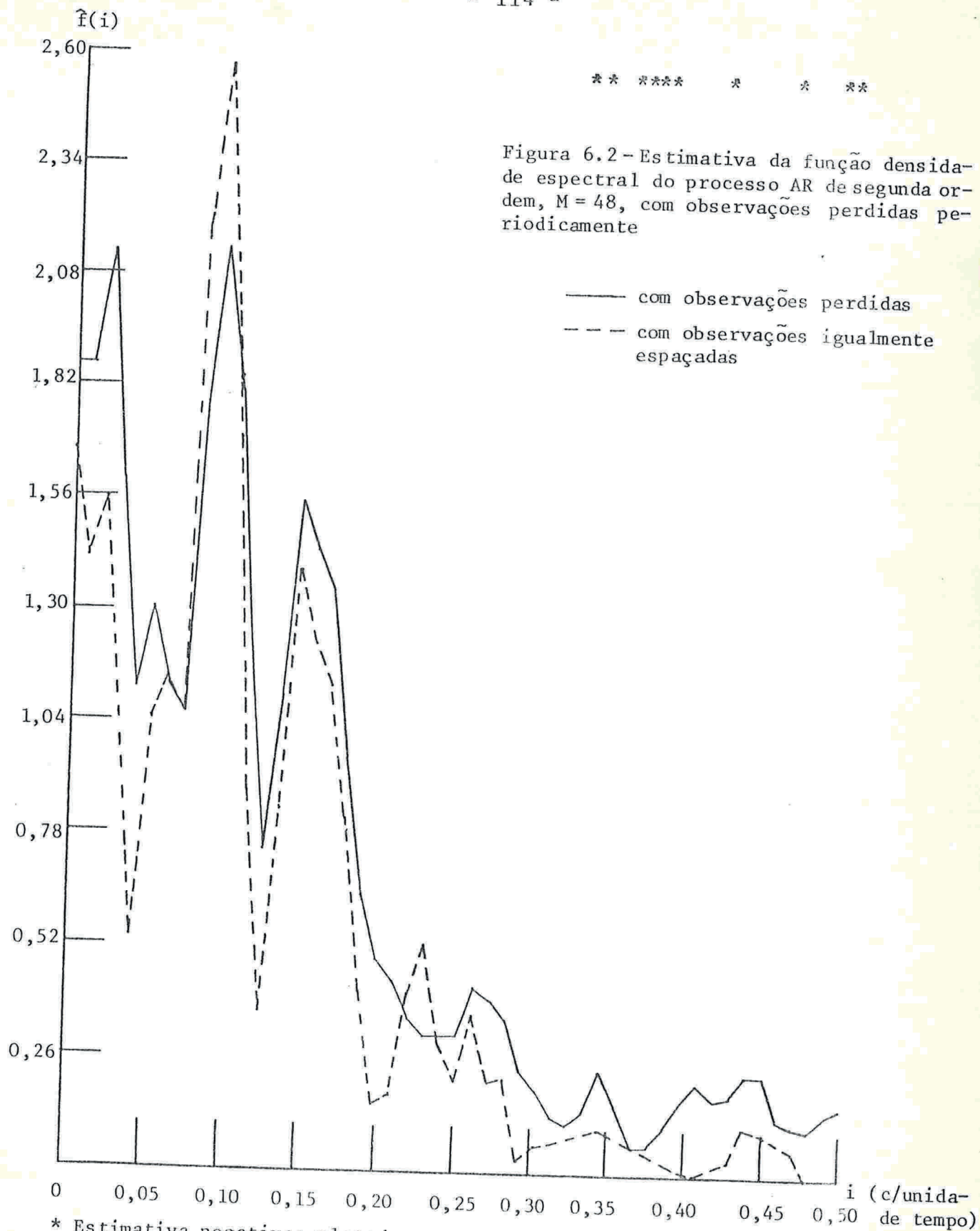
Tabela 6.16 - Estimativa da função densidade espectral da série de temperaturas da Tabela 6.15, M= 40, sem interpolação

freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$	freq. (i)	$\hat{f}(i)$
0,0000	0,1260						
0,0125	0,1372	0,1375	0,0142	0,2625	0,0259	0,3875	0,0162
0,0250	0,1559	0,1500	0,0305	0,2750	0,0092	0,4000	0,0100
0,0375	0,1325	0,1625	0,0315	0,2875	0,0116	0,4125	0,0082
0,0500	0,0905	0,1750	0,0115	0,3000	0,0201	0,4250	0,0066
0,0625	0,0492	0,1875	0,0077	0,3125	0,0177	0,4375	0,0067
0,0750	0,0208	0,2000	0,0100	0,3250	0,0153	0,4500	0,0132
0,0875	0,0188	0,2125	0,0121	0,3375	0,0374	0,4625	0,0155
0,1000	0,0444	0,2250	0,0211	0,3500	0,0421	0,4750	0,0114
0,1125	0,0409	0,2375	0,0242	0,3625	0,0323	0,4875	0,0159
0,1250	0,0133	0,2500	0,0298	0,3750	0,0278	0,5000	0,0178

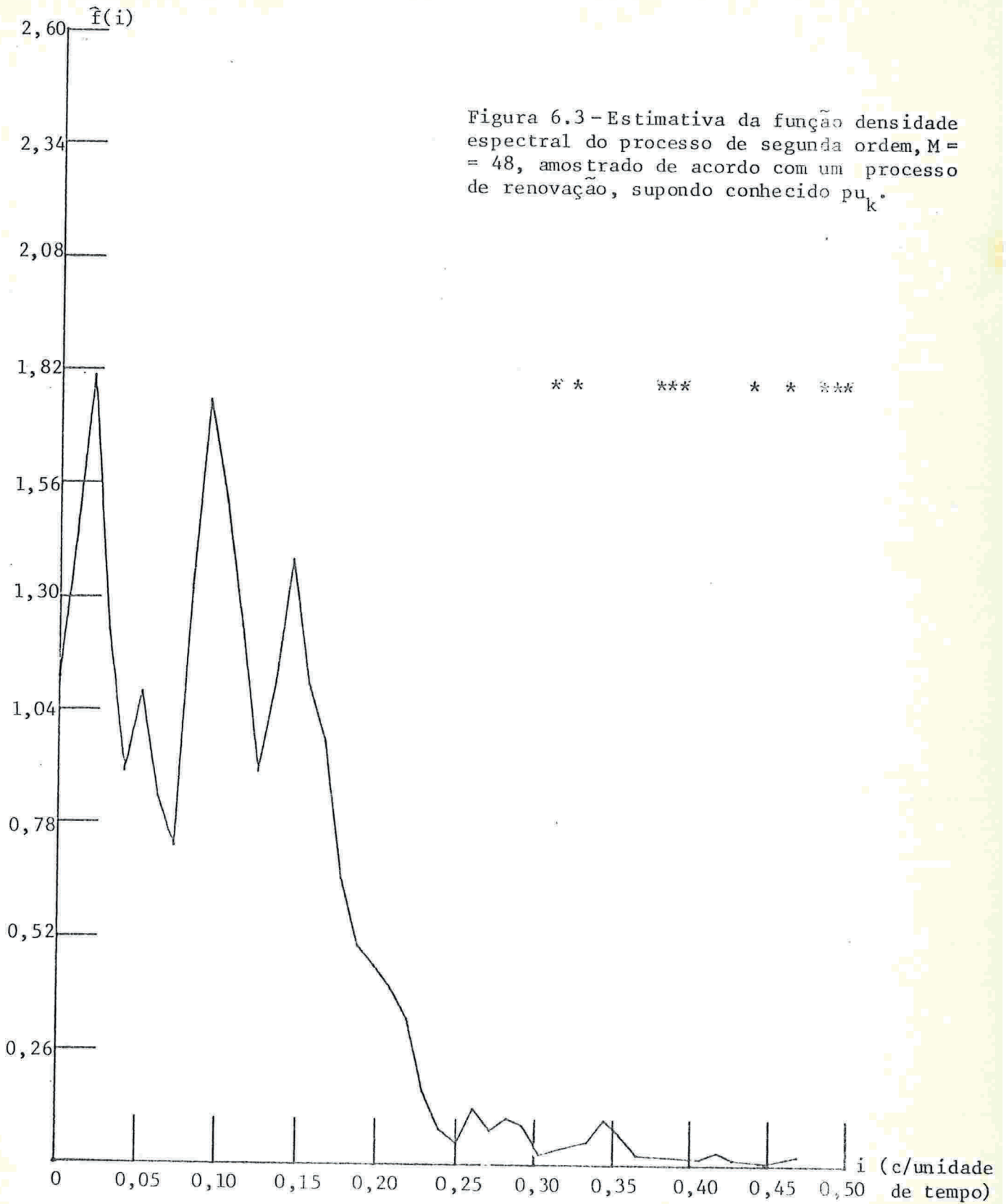
Tabela 6.17 - Estimativa da função densidade espectral da série de temperaturas da Tabela 6.15, M= 40, com interpolação.







\* Estimativa negativa; plotada como sendo igual ao valor máximo dos valores restantes.



\* Estimativa negativa; plotada como sendo igual ao valor máximo dos valores restantes.

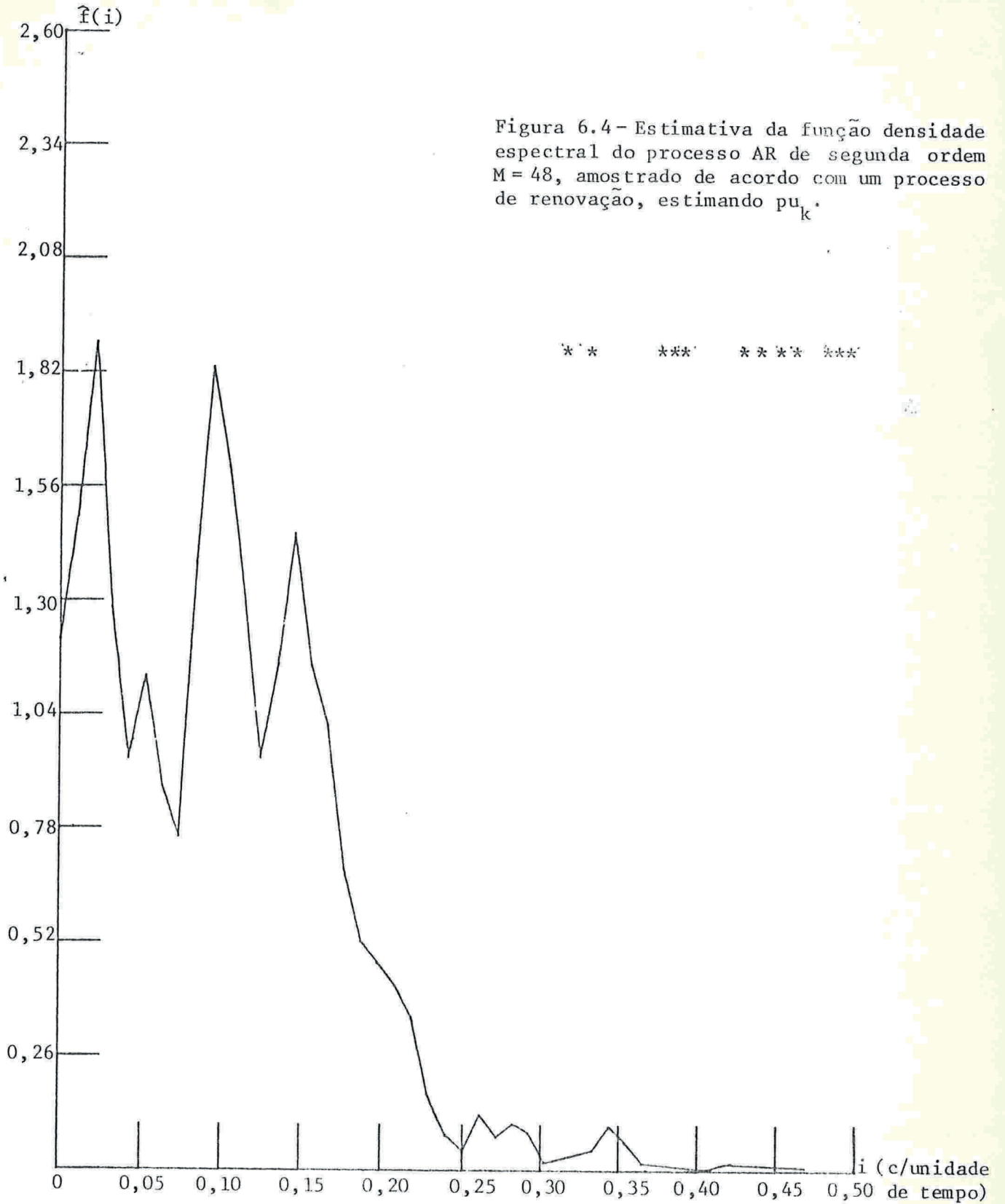
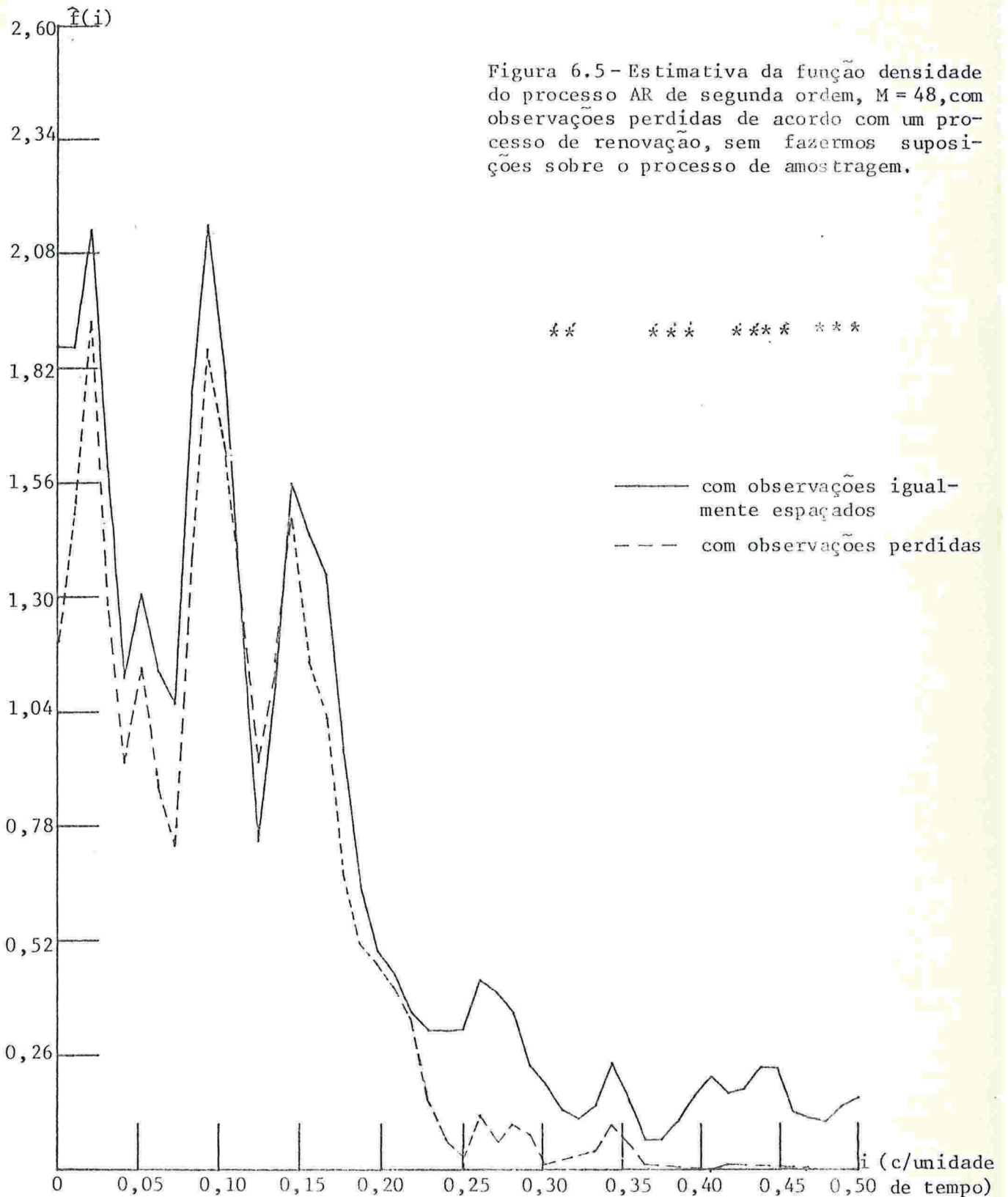


Figura 6.4 - Estimativa da função densidade espectral do processo AR de segunda ordem  $M = 48$ , amostrado de acordo com um processo de renovação, estimando  $p_{uk}$ .

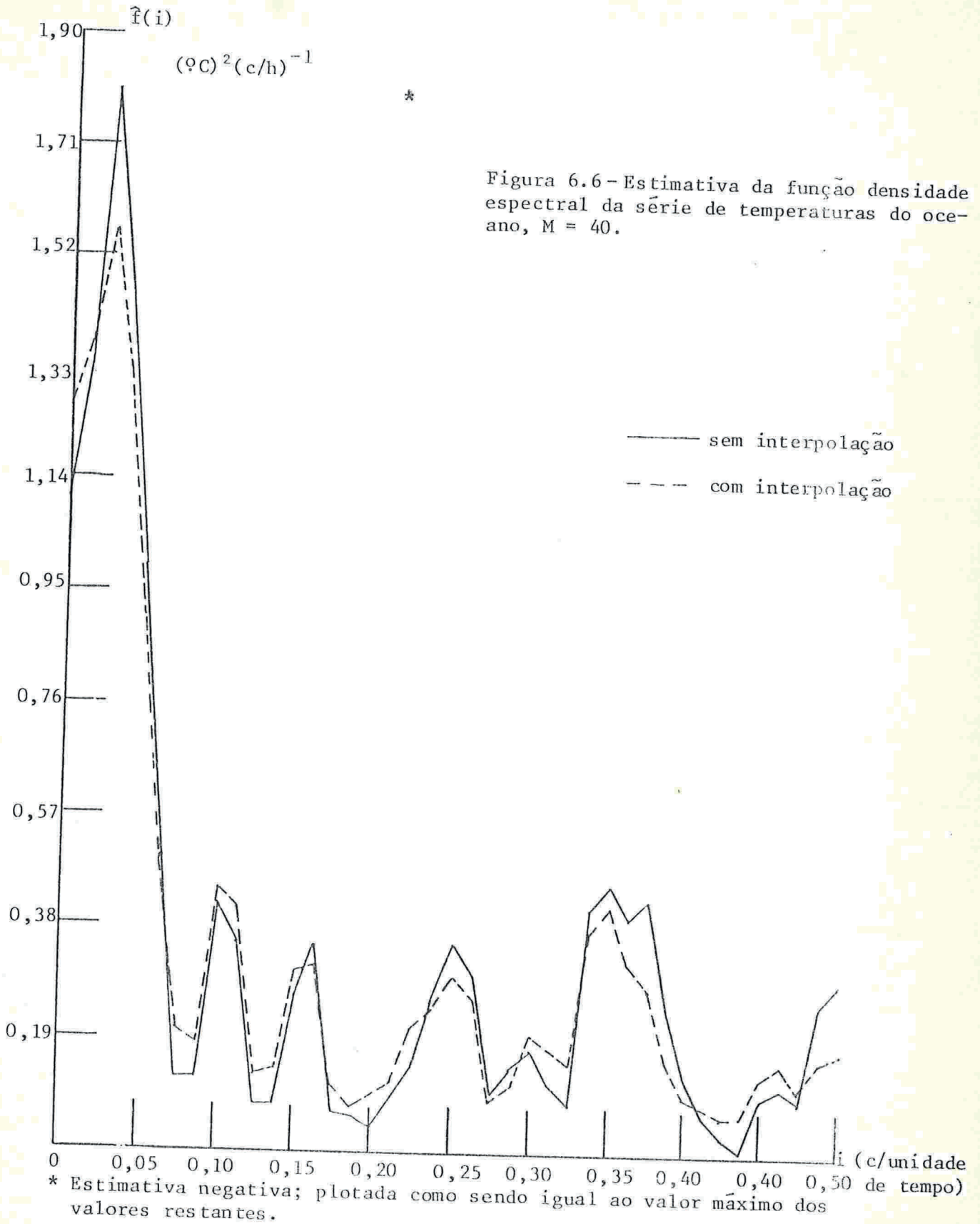
\* \* \* \* \*

\* Estimativa negativa; plotada como sendo igual ao valor máximo dos valores restantes.



\* Estimativa negativa; plotada como sendo igual ao valor máximo dos valores restantes.





## CONCLUSÕES FINAIS

Em nosso trabalho, estimamos a função densidade espectral de uma série temporal amostrada em intervalos de tempo não igualmente espaçados. Nos capítulos 3 e 4 nós estudamos o problema referente a perda de observações de uma série temporal definida em tempos igualmente espaçados, enquanto que no capítulo 5 nós supomos que a série em estudo é contínua e que os intervalos de tempo entre duas observações não são múltiplos de um número real. Algumas aplicações para os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 foram realizados e, com base nestas aplicações podemos verificar que apesar de ter havido uma sub ou super estimação na amplitude, as frequências onde os picos ocorreram permaneceram inalteradas. Portanto, se basicamente estivermos interessados na periodicidade de séries igualmente espaçados com observações perdidas os métodos apresentados nos parecem ser válidos. Para séries temporais contínuas, amostradas segundo um processo de Poisson um programa em FORTRAN está sendo desenvolvido.

Todavia, em artigos mais recentes, outros métodos têm sido abordados.

Jones [1977], apresenta, para uma série temporal con-

tínua, amostrada em intervalos de tempo irregulares, um procedimento que consiste em ajustar uma função densidade espectral racional aos dados pelo método de máxima verossimilhança. Para uma série temporal discreta, Jones [1977a] descreve um método de ajuste de modelos autoregressivos de médias móveis (ARMA) a séries temporais estacionárias. Neste trabalho são considerados os erros de observação e a perda de observações, e a função densidade espectral é obtida a partir dos parâmetros do modelo autoregressivo de médias móveis estimados. Em seu mais recente trabalho, Jones [1979], com base nos resultados obtidos em Jones [1978] e considerando o fato de que uma série temporal contínua, com função densidade espectral racional, amostrada em intervalos de tempo igualmente espaçados ser um processo autoregressivo de médias móveis nos tempos amostrados, apresenta um novo procedimento para ajustar uma função densidade espectral racional a dados não igualmente espaçados.

Por fim, gostaríamos de mencionar ainda o artigo de Sakai, Soeda e Tokumaru [1979] que relaciona a análise no domínio do tempo com a análise no domínio da frequência. Neste artigo os autores expressam a matriz de covariância dos erros das estimativas dos parâmetros do processo autoregressivo em termos de periodograma, e fazem uma aplicação considerando dados não igualmente espaçados.

## REFERÊNCIAS

- [1] - Beutler, F.J., (1970), Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes, *IEEE Trans. Information Theory*, 16: 147-152.
- [2] - Bloomfield, P., (1970), Spectral analysis with randomly missing observations, *J. Roy. Statist. Soc., Serie B*, 32(3): 369-380.
- [3] - Brillinger, D.R., (1975), *Time series, data analysis and theory*, New York, Holt, 500p.
- [4] - Feller, W., (1968), *An Introduction to probability theory and its applications*, 3 ed., New York, John Wiley, v. 1.
- [5] - Ferraz - Mello, S. (1977), *Determination of periods from unevenly spaced data: review paper*, São Paulo, 1977, 25p., Presented at the Colloquium on Binary Stars, São Paulo, 1977.
- [6] - Figueiredo, D.G., (1977), *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Rio de Janeiro, IMPA, 274p. (Projeto Euclides).
- [7] - Fuller, R. W., (1976), *Introduction to statistical time series*, New York, John Willey, 470 p.
- [8] - Jenkins, G.M. & Watts, D.G., (1968), *Spectral analysis and its applications*, San Francisco, Holden-Day, 529p.
- [9] - Jones, R.H., (1962), Spectral analysis with regulary missed observations, *Ann. Math. Statist.*, 33(2): 455-461.
- [10] - Jones, R.H., (1970), Spectrum estimation with unequally spaced observations, In: KYOTO INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIRCUIT AND SYSTEM THEORY, Kyoto, 1970, *Proceedings*, S.n.t., p. 253-254.
- [11] - Jones, R.H., (1971), Spectrum estimation with missing observations, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 23: 387-398.
- [12] - Jones, R.H., (1977), Spectrum estimation from unequally spaced data. In: CONFERENCE ON PROBABILITY AND STATISTICS, 5º, Las Vegas, 1977. (*Proceeding*), Boston, Amer. Meteor. Soc., s.d. Preprint.



- [13] - Jones, R.H., (1979a), *Maximum likelihood fitting of ARMA models to time series with missing observations*, Denver, University of Colorado Medical Center, Department of Biometrics, 29p. (Technical Report).
- [14] - Jones, R.H., (1979b), Fitting rational spectra with unequally spaced data. In: CONFERENCE ON PROBABILITY AND STATISTICS, 6<sup>o</sup>, Banff, 1979, (*Proceedings*), Boston, Amer. Meteor. Soc., s.d. Preprint.
- [15] - Koopmans, L.H., (1974), *The spectral analysis of time series*, N. York, Academic Press, 366p. (Probability and Mathematical Statistics, 22).
- [16] - Masry, E. & Lui, M.C., (1975), A consistent estimate of the spectrum by random sampling of the time series, *SIAM J. Appl. Math.*, 28, (4): 793-810.
- [17] - Parzen, E., (1963), On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation, *Sankhya*, Serie A, 25(4): 383-392.
- [18] - Rosenblatt, M., (1974), *Random Processes*, 2. ed. New York, Springer, 228p. (Graduate Texts in Mathematics, 17).
- [19] - Sakai, H.; Soeda, T. & Tokumaru, H., (1979), On the relation between fitting autoregression and periodogram with applications, *Ann. Statist.*, 7(1): 96-107.
- [20] - Scheinok, P.A., (1965), Spectral analysis with randomly missed observations: the binomial case, *Ann. Math. Statist.*, 36(3): 917-977.
- [21] - Shapiro, H.S. & Silverman, R.A., (1960), Alias-free sampling of random noise, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8(2): 225-248.
- [22] - Van Ness, J.N. & Clinger, W., (1976), On unequally spaced time points in time series, *Ann. Statist.*, 4(4): 736-745.

#### REFERÊNCIAS ADICIONAIS

- [1] - Anderson, T.W., (1971), *The statistical analysis of time series*, New York, John Wiley, 704p.



- [2] - Hoel, P.G.; Port, S.C. & Stone, C.J., (1972), *Introduction to stochastic processes*, Boston, Houghton Mifflin, 203 p.
- [3] - Lang, S., (1966), *Algebra linear*, São Paulo, Edgard Blüch, 271p.
- [4] - Loynes, R.M., (1969), Aliasing and related questions in stationary process. In: Pyke, R. ed. *Time series and stochastic processes, convexity and combinatorics: proceedings of the 12th. Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress, Vancouver, 1969*, Montreal, Canadian Mathematical Congress, Società Mathématique du Canada, 1970, p.89-98.
- [5] - Morettin, P.A., (1979), *Análise harmônica de processos estocásticos*, Rio de Janeiro, IMPA, 176p.
- [6] - Parzen, E., (1967), *Time series analysis papers*, San Francisco, Holden-Day, 565 p.
- [7] - Rudin, W., (1971), *Princípios de análise matemática*, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 296p.
- [8] - Sidki, S., (1975), *Introdu o   teoria dos números*, Rio de Janeiro, IMAP, 1 v. (v rias pagina es).
- [9] - Tolstov, G.P., (1962), *Fourier series*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 336 p.
- [10] - Yaglom, A.M., (1962), *An introduction to the theory of stationary random functions*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 235 p.
- [11] - Zigmund, A., (1952), *Trigonometrical series*, 2 ed., New York, Chelsea, 329 p. (Monografje Matematyczne, 5).