ASPECTOS ESTRUTURAIS E DINÂMICOS DA TEORIA DA CONFIABILIDADE

VANDERLEI DA COSTA BUENO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. WAGNER DE SOUZA BORGES

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq

- São Paulo, abril de 1981 -

E R R A T A

PAG.	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
12	↑6	$m-[(\underset{\sim}{m}-\phi(\underset{\sim}{x}))\vee(\underset{\sim}{m}-\phi(\underset{\sim}{z}))]$	$m-[(m-\phi(\underset{\sim}{x}))\vee(m-\phi(\underset{\sim}{z}))]$
14	↓2	$\phi(\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z}) = \phi(\underset{\sim}{x})\phi\vee(\underset{\sim}{z})$	$\phi(\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z}) = \phi(\underset{\sim}{x})\vee\phi(\underset{\sim}{z})$
20	↓9	$\phi_U(k.\alpha(\underset{\sim}{x}))$	$\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x}))$
25	↑5	$\max\{\alpha_{12}(x),\alpha_{21}(\underset{\sim}{x})$	$\max\{\alpha_{12}(\underset{\sim}{x}),\alpha_{21}(\underset{\sim}{x})\}$
32	↓8	i) com ...	i) como ...
34	↓9	PROPOSIÇÃO 1.4	PROPOSIÇÃO 1.5
41	↑7	$+\sum_{\ell=1}^{m_i-1} P[\phi(\ell_i\underset{\sim}{X})\ldots-\bar{P}_i(\ell-1)]+\ldots$	$+\sum_{\ell=1}^{m_i-1} P[\phi(\ell_i\underset{\sim}{X})\ldots-\bar{P}_i(\ell+1)]+\ldots$
45	↑6	$= \max_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \ldots = \prod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \ldots$	$= \sum_{k=1}^{m} \max_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \ldots = \sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \ldots$
45	↑5	$= \min_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \ldots = \prod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \ldots$	$= \sum_{k=0}^{m-1} \min_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \ldots = \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \ldots$
47	↓8	$P[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} (1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=1]$	$P[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} (1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=0]$
48	↑5	$\ldots \geq \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{X})} (1-\bar{P}'_i(j+1))$	$\ldots \geq \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{x})} (1-\bar{P}'_i(j+1))$
48	↑4	$\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j+1) \leq \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{x})}$	$\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j+k) \leq \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{x})}$
52	↓1	$E[\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \geq \ldots$	$E[\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \geq \ldots$
62	↓9	$= \lim_{m} E[\phi_m(\underset{\sim}{X}'(t)\underset{\sim}{X}'(s)] = \ldots$	$= \lim_{m} E[\phi_m(\underset{\sim}{X}'(t),\underset{\sim}{X}'(s))] = \ldots$
66	↑1	$\underset{\sim}{W}(t) = \{\{(\min_{i\in C_1} X_1(t),\ldots$	$\{\underset{\sim}{W}(t) = (\min_{i\in C_1} X_i(t),\ldots$
69	↑4	... um valor ...	... um vetor ...
74	↑6	$T_{U_s} = \inf\{t\geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t)\notin U_k(s)\}$	$T_{U_s} = \inf\{t\geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t)\notin U_s\}$

Dedico

à Vera

e Samuel

AGRADECIMENTOS

Na realização desta Dissertação de Mestrado contamos com o incentivo dos colegas do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo em especial os do Grupo de Probabilidade Aplicada. Não poderíamos deixar de mencionar pessoas que direta ou indiretamente nos auxiliaram, em particular:

– o Professor Doutor Wagner de Souza Borges que me orientou com dedicação e paciência;

– o Professor Doutor Flávio Wagner Rodrigues e demais colegas do Grupo de Teoria da Confiabilidade;

– o Senhor João Baptista Esteves de Oliveira pelos cuidados dispensados no excelente trabalho de datilografia.

CONTEÚDO

JB

CAPÍTULO 0

INTRODUÇÃO E SUMÁRIO

Um problema central em teoria da Confiabilidade é determinar o relacionamento entre a confiabilidade de um sistema complexo e a confiabilidade de suas componentes. No entanto, a maioria dos trabalhos desenvolvidos até então tratam do estudo dos sistemas binários de componentes binárias. Especificamente tratam do estudo do sistema cujo estado, indicado pela variável dicotômica ϕ, que é um se o sistema funcionar e zero, se o sistema não funcionar, é completamente determinado pelos estados das componentes, estes indicados pelas variáveis dicotômicas x_i que é um, se a componente i funcionar e zero se a componente i não funcionar, $i = 1,\ldots,n$, onde n é o número de componentes do sistema, denominado ordem do sistema. Dessa maneira indica-se o estado do sistema na forma funcional $\phi = \phi(\underset{\sim}{x})$ que é denominada função de estrutura do sistema.

É natural esperar que na troca de uma componente falhada por uma em funcionamento melhore a performance do sistema, bem como é natural desprezar componentes que não são fundamentais para o sistema. Estes dois fatos podem ser tratados matematicamente admitindo-se as seguintes restrições para uma estrutura ϕ de ordem n:

1) A função de estrutura $\phi(\underset{\sim}{x})$ é monótona crescente em cada uma das variáveis.

2) Toda componente i é relevante, isto é, existe $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ com $\phi(1_i, \underset{\sim}{x}) > \phi(0_i, \underset{\sim}{x})$.

A função de estrutura que satisfaz 1) e 2) acima denomina-se estrutura coerente.

É fácil mostrar que se ϕ é uma estrutura coerente, então:

a) $\phi(\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{y}) \geq \phi(\underset{\sim}{x}) \vee \phi(\underset{\sim}{y})$

b) $\phi(\underset{\sim}{x} \wedge \underset{\sim}{y}) \leq \phi(\underset{\sim}{x}) \wedge \phi(\underset{\sim}{y})$

com a igualdade valendo em a) (b)) se e somente se o sistema for paralelo (série).

Na teoria binária os particulares sistemas, em série e em paralelo, são de grande importância uma vez que todo sistema coerente ϕ pode ser representado como um sistema composto série-paralelo (paralelo-série) desde que seja permitida a multiplicação de componentes. Para esclarecer de que maneira essa representação pode ser obtida, considere o argumento abaixo.

Se $C = \{1, 2, \ldots, n\}$ dizemos que um subconjunto P de C é um caminho para a estrutura ϕ de ordem n se $\phi(\underset{\sim}{1}^P, \underset{\sim}{0}) = 1$ onde $(\underset{\sim}{1}^P, \underset{\sim}{0})$ denota o vetor com coordenada 1 na i-ésima posição se $i \in P$ e coordenada 0 para essa posição se $i \notin P$. Se, além disso, para todo subconjunto P' de P, tivermos $\phi(\underset{\sim}{1}^{P'},\underset{\sim}{0}) = 0$ dizemos que P é um caminho minimal. Além disso, dados $P_1,\ldots,P_p$, subconjuntos de C, dizemos que esses conjuntos formam um sistema de Sperner se para todo i,j , $i \neq j$, $P_i \not\subset P_j$. Se além disso $\bigcup_{i=1}^{p} P_i = C$ dizemos que esses conjuntos formam um recobrimento de Sperner. É possível mostrar que dados p subconjuntos de C, existe uma estrutura coerente ϕ cujo conjunto dos caminhos minimais é formado por esses subconjuntos, se e somente se eles constituem um recobrimento de Sperner. Dessa forma para toda estrutura coerente ϕ, podemos escrever

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \max_{1\leq j\leq p} \min_{i\in P_j} x_i$$

onde os P_i, i=1,...,p, são os caminhos minimais de ϕ.

De maneira análoga, obtém-se uma representação utilizando subconjuntos K_j de C, $1 \leq j \leq k$, que satisfazem

$$\phi(\underset{\sim}{0}^{K_j},\underset{\sim}{1}) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(\underset{\sim}{0}^{K},\underset{\sim}{1}) = 1$$

para todo subconjunto K de C com $K \subset K_j$. Os conjuntos K_j são denominados cortes minimais e formam um recobrimento de Sperner, Se ϕ for uma estrutura coerente podemos representá-la por

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \min_{1\leq j\leq k} \max_{i\in K_j} x_i$$

onde os K_j, $i \leq j \leq k$, são os cortes minimais de ϕ.

O termo confiabilidade é usado em engenharia como medida de performance de sistemas e suas componentes. As medidas mais usuais de confiabilidade são dadas em geral por características de operação do sistema e/ou componentes tais como a distribuição do tempo de vida, o tempo de vida médio, a distribuição do nível de performance e a performance média. No caso binário, Barlow e Proscham (1975) utilizam estas duas últimas características de operações mencionadas. Especificamente a confiabilidade de um sistema ϕ ou de uma de suas componentes X_i é dada pela probabilidade de que esteja no estado 1. Evidentemente supõe-se que os estados do sistema e de suas componentes são variáveis aleatórias com valores em $\{0,1\}$.

Introduz-se dessa maneira a função de confiabilidade de um sistema binário coerente ϕ com componentes independentes, que é definida por $h(\underset{\sim}{p}) = E[\phi(\underset{\sim}{X})]$, onde $\underset{\sim}{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ e $p_i = P[X_i=1]$, $i = 1,\ldots,n$.

A função de confiabilidade do sistema ϕ com componentes independentes $h(\underset{\sim}{p}) = E[\phi(\underset{\sim}{X})]$ tem, entre outras, as seguintes propriedades:

1) é linear em cada p_i;

2) é monótona crescente e é estritamente crescente no retângulo aberto $(0,1)^n$.

Além disso, podemos caracterizar através dessa função o sistema em série (paralelo). Precisamente, é possível mostrar que, se h é a função de confiabilidade de um sistema coerente, com componentes independentes, então:

a) $h(\underset{\sim}{p} \amalg \underset{\sim}{p}') \geq h(\underset{\sim}{p}) \amalg h(\underset{\sim}{p}')$

b) $h(\underset{\sim}{p} \Pi \underset{\sim}{p}') \leq h(\underset{\sim}{p}) \Pi h(\underset{\sim}{p}')$

para todo $\underset{\sim}{p}$ e $\underset{\sim}{p}'$, e que a igualdade vale em a) (b)) se e somente se o sistema for paralelo (série).

Em vista das dificuldades freqüentemente encontradas no cálculo da confiabilidade de sistemas complexos procurou-se obter limites superiores e inferiores para essa medida utilizando a representação por cortes e caminhos.

Barlow & Proscham (1975) consideraram também o estado da componente i como um processo estocástico decrescente no tempo e estudaram a relação entre os tempos de vida das componentes e o tempo de vida do sistema. Neste sentido analisaram classes de distribuições de vida de importância direta na análise da confiabilidade de sistemas. Uma dessas classes é a das distribuições IFRA (Increasing Failure Rate Average) que é obtida tomando distribuições de vida de sistemas coerentes com componentes exponenciais independentes e seus limites em distribuição. Uma outra classe de distribuições de vida analisada, e que é grandemente utilizada em política de manutenção, é a classe das distribuições NBU (New Better than Used). Maiores detalhes sobre estas e outras classes não paramétricas de distribuição de vida podem ser encontradas em Barlow & Proscham (1975).

Recentemente surge algumas propostas de extensão dessa teoria binária, para tratar da situação mais realista de que tanto o estado do sistema quanto de suas componentes passam por vários estágios de deteriorização. Em um primeiro trabalho Barlow & Wu (1978) propuseram um modelo para essa situação generalizando o modelo binário a partir da decomposição por cortes e caminhos.

A primeira abordagem axiomática caracterizando modelos para esse problema foi proposta por El Neweihi, Proschan & Sethuruman (1978) que introduziram a noção de relevância nesse caso mais geral. Uma abordagem mais completa foi proposta por Griffith (1980) que considera classes maiores de funções de estrutura. Nestes trabalhos muitos resultados obtidos no caso binário tem uma extensão natural, entre outros a mesma caracterização estrutural para sistemas em série e em paralelo.

Não obstante, em toda essa teoria, uma hipótese básica era que o sistema e suas componentes tinham o mesmo espaço de estados. No Capítulo 1 de nosso trabalho consideramos várias extensões de conceitos e propriedades descritas por esses autores. Fundamentalmente nossa abordagem trata de sistemas em que o espaço de estados do sistema e de suas componentes são distintos. Neste capítulo, em uma primeira parte, vamos considerar o relacionamento estrutural entre o sistema e suas componentes. Numa segunda parte estenderemos e estudaremos algumas medidas de confiabilidade, procurando obter generalizações de resultados para estruturas binárias. Discutiremos também o conceito de importância e finalizamos o capítulo com o desenvolvimento de limites inferiores e superiores para a confiabilidade de sistemas nesse contexto mais geral, estendendo os resultados obtidos por Barlow & Proscham (1975).

No Capítulo 2 consideramos alguns aspectos dinâmicos da teoria da confiabilidade. Desenvolvemos, baseados em um trabalho de Block & Savits (1979), teoria e propriedades dos processos IFRA multidimensionais e obtemos resultados mais fortes que os desenvolvidos por Barlow & Proscham (1975) para sistemas binários de componentes independentes. Estudamos o relacionamento deste processo com o conceito de distribuição IFRA multivariada devido aos mesmos autores e com o conceito de distribuição IFRA multivariada devido a Esary & Marshall (1975). Finalmente construímos um processo IFRA a partir de uma distribuição IFRA multivariada.

Paralelamente, introduzimos um novo conceito, o de processo NBU multidimensional e obtemos as mesmas propriedades desenvolvidas para o processo IFRA multidimensional.

CAPÍTULO 1

O MODELO MATEMÁTICO

1.1 - SISTEMAS MONÓTONOS

Consideremos um sistema formado por n componentes sujeitas a vários estágios de deterioração e denotemos por x_i o estado da componente i $(i=1,2,...,n)$. O espaço de estados da componente i será denotado por $S_i=\{0,1,...,m_i\}$ e interpretamos $x_i=0$ e $x_i=m_i$ como os estados de "total avaria" e "perfeição" da componente i $(i=1,...,n)$ respectivamente. Obviamente $1 \leq x_i \leq m_i$ denotará os diferentes estados de funcionamento precário da componente i $(i=1,...,n)$. Cada "vetor de estados"

$$\underset{\sim}{x} = (x_1,...,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$$

determinará de maneira única o estado do sistema que por esse motivo será denotado em forma funcional por $\phi(\underset{\sim}{x})$. O espaço de estados do sistema será denotado por $S=\{0,...,m\}$, e a função

$$\phi: \prod_{i=1}^{n} S_i \longrightarrow S$$

acima definida é denominada (função de) estrutura do sistema.

A decomposição que segue é de grande importância na derivação de provas indutivas e propriedades probabilísticas de estruturas em geral.

PROPOSIÇÃO 1 - Para qualquer estrutura ϕ, vale a seguinte decomposição:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{j=1}^{m_i} \underset{[x_i=j]}{I(\underset{\sim}{x})}\ \phi(j_i,\underset{\sim}{x})$$

para qualquer i, $1 \le i \le n$, fixado, onde

$$\underset{[x_i=j]}{I(x)} = \begin{cases} 1 \text{ se } x_i = j \\ \\ 0 \text{ se } x_i \ne j. \end{cases}$$

A prova é óbvia e a omitiremos.

Note que repetidas aplicações da Proposição 2 nos dá:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{y_1=1}^{m_1} \underset{[x_1=y_1]}{I(\underset{\sim}{x})}\ \phi((y_1)_1,\underset{\sim}{x}) = \sum_{y_1=1}^{m_1}\sum_{y_2=1}^{m_2} \underset{[x_1=y_1]}{I(\underset{\sim}{x})}\ \underset{[x_2=y_2]}{I(\underset{\sim}{x})}\ \phi((y_1)_1,(y_2)_2,\underset{\sim}{x}) =$$

$$= \sum_{\underset{\sim}{y}}\left(\prod_{i=1}^{n} \underset{[x_i=y_i]}{I(\underset{\sim}{x})}\right)\phi(\underset{\sim}{y}),$$

onde a soma é estendida a todo vetor $\underset{\sim}{y} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$.

Na maioria dos sistemas de interesse é natural esperar-se que a melhora do nível de performance de uma ou mais componentes acarrete a melhora do nível de performance do sistema como um todo. Matematicamente este fato é traduzido monotonicidade crescente da função de estrutura.

DEFINIÇÃO 2 - Um sistema será dito monótono se sua estrutura for uma função monótona crescente.

Usaremos a notação ϕ: EM para indicar que ϕ é uma estrutura monótona, isto é, uma função monótona crescente definida em $\prod_{i=1}^{n} S_i$ com valores em S. Além disso nos referiremos a um sistema ϕ, possivelmente monótono, sempre que quisermos especificar sua estrutura.

Daremos a seguir alguns exemplos típicos de estruturas monótonas:

EXEMPLO 3 - a) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$

b) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i$

c) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \max\limits_{1 \leq j \leq p} \min\limits_{i \in P_j} x_i$

onde $P_1, P_2, \ldots, P_p$ é um recobrimento de Sperner de $C = \{1, \ldots, n\}$.

d) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$, com $m_1 = \ldots = m_n = m$

onde $[\cdot]$ é a função "maior inteiro $\leq \cdot$".

e) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, com $m_1 = \ldots = m_n = 1$ e $m = n$.

OBSERVAÇÕES - Nos exemplos acima, a) e b) estão ligadas a extensão da noção de sistemas em série e paralelo, como veremos a seguir, do caso binário para o caso multiestados. O exemplo c) representa uma classe especial de estruturas, inicialmente considerada por Barlow (1978). O exemplo d) foi introduzido por Griffith (1980) para modelar sistemas com reserva e o exemplo e) representa uma contrapartida mais simples para a proposta de Griffith que se torna possível devido a flexibilidade do modelo geral com que trabalhamos.

Outra noção importante que pode ser estendida para a teoria que ora desenvolvemos é a de estrutura dual. No caso binário esta noção é bastante utilizada em análise de árvores de eventos e simplifica sobremaneira alguns argumentos teóricos fundamentais. Nossa generalização, fundamenta-se na teoria binária e preserva certas propriedades essenciais da noção primitiva.

DEFINIÇÃO 4 - Se ϕ for uma estrutura monótona, então

$$\phi^D(\underset{\sim}{x}) = m - \phi(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}),$$

onde $\underset{\sim}{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ é denominada estrutura dual de ϕ.

Note ainda que a função

$$\phi^D: \prod_{i=1}^{n} S_i \longrightarrow S$$

definida acima é uma estrutura monótona e que

$$[\phi^D]^D(\underset{\sim}{x}) = m - \phi^D(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}) = m - (m-\phi(\underset{\sim}{x})) = \phi(\underset{\sim}{x}).$$

PROPOSIÇÃO 5 - As seguintes expressões são equivalentes:

a) ϕ: E.M.

b) $\phi(\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{z}) \geq \phi(\underset{\sim}{x}) \vee \phi(\underset{\sim}{z})$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{z} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$

c) $\phi(\underset{\sim}{x}\wedge\underset{\sim}{z}) \leq \phi(\underset{\sim}{x})\wedge\phi(\underset{\sim}{z})$, $\forall \underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$.

PROVA - A expressão a) implica a expressão b), pois

$$\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z} \geq \underset{\sim}{x} \Rightarrow \phi(\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z}) \geq \phi(\underset{\sim}{x})$$

$$\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z} \geq \underset{\sim}{z} \Rightarrow \phi(\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z}) \geq \phi(\underset{\sim}{z}),$$

e conseqüentemente

$$\phi(\underset{\sim}{x}\vee\underset{\sim}{z}) \geq \phi(\underset{\sim}{x})\vee\phi(\underset{\sim}{z})$$

Para verificar que a expressão b) implica a expressão c) note que

$$\underset{\sim}{x}\wedge\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{m} - [(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})\vee(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z})],$$

e portanto

$$\begin{aligned}\phi(\underset{\sim}{x}\wedge\underset{\sim}{z}) &= \phi(\underset{\sim}{m}-[(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})\vee(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z})]) = \\ &= m - \phi^D((\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})\vee(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z})) \leq \\ &\leq m - [\phi^D(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})\vee\phi^D(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z})] = \\ &= m - [(m-\phi(\underset{\sim}{x}))\vee(m-\phi(\underset{\sim}{z}))] = \\ &= \phi(\underset{\sim}{x})\wedge\phi(\underset{\sim}{z}).\end{aligned}$$

A expressão c) implica a expressão a), pois

$$\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{z} \Longrightarrow \underset{\sim}{x}\wedge\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{x}.$$

Assim,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \phi(\underset{\sim}{x}\wedge\underset{\sim}{z}) \leq \phi(\underset{\sim}{x})\wedge\phi(\underset{\sim}{z}) \leq \phi(\underset{\sim}{z}).$$ □

A desigualdade b) da Proposição 5 estende o resultado que no caso binário traduz o princípio intuitivo de que redundância ao nível das componentes é melhor do que redundância ao nível do sistema, princípio este, bastante conhecido em engenharia.

TEOREMA 6 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Então:

a) $\phi(\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{z}) = \phi(\underset{\sim}{x}) \vee \phi(\underset{\sim}{z})$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{z} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$, sse

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0})$$

b) $\phi(\underset{\sim}{x} \wedge \underset{\sim}{z}) = \phi(\underset{\sim}{x}) \wedge \phi(\underset{\sim}{z})$, $\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{z} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$, sse

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \min_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{m}).$$

PROVA - Como $\underset{\sim}{x} = \max_{1 \le i \le n} \{((x_i)_i, \underset{\sim}{0})\}$, temos

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \phi(\max_{1 \le i \le n} \{((x_i)_i, \underset{\sim}{0})\} = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0}),$$

e a condição é necessária.

A condição é suficiente, pois, para cada i, $1 \le i \le n$, temos

$$\phi((x_i \vee z_i)_i, \underset{\sim}{0}) = \begin{cases} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0}) & \text{se } x_i \ge z_i \\ \phi((z_i)_i, 0) & \text{se } z_i > x_i \end{cases}$$

Assim,

$$\phi(x \vee z) = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i \vee z_i)_i, \underset{\sim}{0}) \le \max_{1 \le i \le n} \{\phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0}) \vee \phi((z_i)_i, \underset{\sim}{0})\} = \phi(\underset{\sim}{x}) \vee \phi(\underset{\sim}{z}).$$

Da Proposição 5, b) segue finalmente que

$$\phi(\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{z}) = \phi(\underset{\sim}{x})\phi\vee(\underset{\sim}{z}).$$

A demonstração de b) é inteiramente análoga e portanto omitiremos.

□

Duas estruturas de importância fundamental na teoria binária são a estrutura em série e a estrutura em paralelo, já que é possível representar qualquer outro tipo de estrutura através de uma combinação das duas primeiras (representação por caminhos ou cortes mínimos). Como no caso binário as estruturas em paralelo e série são caracterizadas pelo Teorema 6, podemos estender essas noções para o caso geral.

DEFINIÇÃO 7 - A estrutura monótona

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0})).$$

$(\phi(\underset{\sim}{x}) = \min_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{m}))$ é denominada estrutura em paralelo generalizada (estrutura em série generalizada).

O fato de que, na teoria binária, o dual de uma estrutura em série (paralelo) é uma estrutura em paralelo (série) fica preservado com a definição acima.

PROPOSIÇÃO 8 - O dual de uma estrutura em paralelo generalizada (série generalizada) é uma estrutura em série generalizada (paralelo generalizada).

PROVA - Se $\phi(\underset{\sim}{x}) = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i, \underset{\sim}{0})$, então,

$$\phi^D(\underset{\sim}{x}) = m - \phi(\underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{x}) = m - \max_{1 \le i \le n} \phi((m_i - x_i)_i, \underset{\sim}{0}) =$$

$$= \min_{1\le i\le n} (m-\phi((m_i-x_i)_i,\underset{\sim}{0})) = \min_{1\le i\le n} \phi^D((x_i)_i,\underset{\sim}{m}).$$

Analogamente, se $\phi(\underset{\sim}{x}) = \min_{1\le i\le n} \phi((x_i)_i,\underset{\sim}{m})$, então

$$\phi^D(\underset{\sim}{x}) = m - \phi(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}) = m - \min_{1\le i\le n} \phi((m_i-x_i)_i,\underset{\sim}{m}) =$$

$$= \max_{1\le i\le n} (m-\phi((m_i-x_i)_i,\underset{\sim}{m})) = \max_{1\le i\le n} \phi^D((x_i)_i,\underset{\sim}{0}). \square$$

1.2 - REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS MONÓTONOS POR CONJUNTOS CRÍTICOS SUPERIORES E INFERIORES

Nó que segue consideraremos apenas estruturas monótonas satisfazendo o seguinte axioma:

$$A: \phi(\underset{\sim}{0}) = 0 \quad e \quad \phi(\underset{\sim}{m}) = m.$$

DEFINIÇÃO 1. Dizemos que um vetor $\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ é superior (inferior) de nível k ($k = 0,1,\ldots,m$) para a estrutura ϕ se e somente se, $\phi(\underset{\sim}{x}) \ge k$ ($\phi(\underset{\sim}{x}) \le k$). Se além disso, a implicação:

$$\underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x} \Longrightarrow \phi(\underset{\sim}{z}) < k \quad (\underset{\sim}{z} > \underset{\sim}{x} \Longrightarrow \phi(\underset{\sim}{z}) > k)$$

for válida, diremos que $\underset{\sim}{x}$ é um vetor superior crítico (inferior crítico) de nível k.

Denotaremos por $U_{k,\phi}$ ($L_{k,\phi}$) o conjunto de todos os vetores superiores críticos (inferiores críticos) de nível k para a estrutura ϕ. Quando não houver possibilidade de confusão quanto à estrutura ϕ a que nos referirmos, escreveremos apenas U_k (L_k).

Usaremos ainda a seguinte notação:

$$U_k(\underset{\sim}{x}) = \{(i,x_i)|x_i>0\}, \qquad \underset{\sim}{x}\in U_k \text{ e } k=1,\ldots,m$$

$$L_k(\underset{\sim}{x}) = \{(i,x_i)|x_i<m_i\}, \qquad \underset{\sim}{x}\in L_k \text{ e } k=0,\ldots,m-1.$$

Note que $U_{k,\phi}$, $k=1,\ldots,m$, e $L_{k,\phi}$, $k=0,1,\ldots,m-1$ são não vazios em virtude do axioma A.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Então $\underset{\sim}{x}\in U_{k,\phi}$ se e somente se, $\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}\in L_{m-k,\phi^D}$.

Prova - Para mostrar que a condição é necessária, observe que se $\underset{\sim}{x}\in U_{k,\phi}$, então $\phi(\underset{\sim}{x}) \geq k$ e $\phi(\underset{\sim}{z}) < k$ se $\underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x}$.

Assim,

$$\phi^D(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}) = m - \phi(\underset{\sim}{m}-(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})) = m - \phi(\underset{\sim}{x}) \leq m-k \text{ e se } \underset{\sim}{z} > \underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x},$$

temos $\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x}$ e $\phi(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z}) < k$, isto é

$$\phi^D(\underset{\sim}{z}) = m - \phi(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{z}) > m-k.$$

Portanto, $\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}\in L_{m-k,\phi^D}$.

A suficiência se prova de maneira análoga. □

PROPOSIÇÃO 3 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Então,

$$\phi(\underset{\sim}{x}) \geq k \geq 1 \quad (\phi(\underset{\sim}{x}) \leq k \leq m-1) \text{ sse } \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{x}_0 \quad (\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{x}_0)$$

para algum $\underset{\sim}{x}_0$ em U_k (L_k).

PROVA - Para mostrar que a condição é necessária, observe que se, para todo $\underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x}$ tivermos $\phi(\underset{\sim}{z}) < k$, então $\underset{\sim}{x}\in U_k$ e podemos tomar $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}_0$. Caso contrário, se existe $\underset{\sim}{z}$, $\underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x}$, com $\phi(\underset{\sim}{z}) \geq k$, tomamos $\underset{\sim}{x}_0$ como sendo

$$\underset{\sim}{x}_0 = \min\{\underset{\sim}{z} \mid \underset{\sim}{z} < \underset{\sim}{x} \text{ e } \phi(\underset{\sim}{z}) \geq k\}.$$

A suficiência da condição é óbvia já que se $\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{x}_0$, com $\underset{\sim}{x}_0 \in U_k$, tem-se $\phi(\underset{\sim}{x}) \geq \phi(\underset{\sim}{x}_0) \geq k$.

No que segue, trataremos da extensão de um resultado fundamental devido a Block & Savits (1979), que é a decomposição de um estrutura monótona em uma soma de estruturas binárias. Essas estruturas binárias aparecem com uma representação semelhante às representações por caminhos e cortes mínimo conforme Barlow & Proschan (1975). Isto nos permitirá obter limites para a confiabilidade do sistema, análogos aos existentes no caso binário.

Inicialmente introduziremos algumas notações. Consideraremos as funções monótonas crescentes

$$\alpha: \prod_{i=1}^{n} S_i \longrightarrow \{0,1\}^{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

definida por

$$\alpha(\underset{\sim}{x}) = (\alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) : 1 \leq j \leq m_i,\ 1 \leq i \leq n)$$

onde

$$\alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 \text{ se } x_i \geq j \\ \\ 0 \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\beta : \prod_{i=1}^{n} S_i \longrightarrow \{0,1\}^{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

definida por

$$\beta(\underset{\sim}{x}) = (\beta_{ij}(\underset{\sim}{x}) : 0 \le j \le m_i - 1,\ 1 \le i \le n)$$

onde

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_i \le j \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, para cada estrutura monótona ϕ, consideramos as funções

$$\phi_U : \{1,\ldots,m\} \times \alpha\left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right) \longrightarrow \{0,1\}$$

definida por

$$\phi_U(k,\underset{\sim}{y}) = \max_{\underset{\sim}{z} \in U_k} \ \min_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})} y_{ij},$$

e

$$\phi_L : \{0,1,\ldots,m-1\} \times \beta\left(\prod_{i=1}^{n} S_i\right) \longrightarrow \{0,1\}$$

definida por

$$\phi_L(k,\underset{\sim}{y}) = \min_{\underset{\sim}{z} \in L_k} \ \max_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{z})} y_{ij}.$$

LEMA 4 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Então,

$\phi(\underset{\sim}{x}) \geq k \geq 1$ $(\phi(\underset{\sim}{x}) \leq k \leq m-1)$ sse $\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = 1$ $(\phi_L(k,\beta(\underset{\sim}{x}) = 0)$.

PROVA - A condição é necessária, pois se $\phi(\underset{\sim}{x}) \geq k \geq 1$, concluímos usando a Proposição 3 que $\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{x}_0$, para algum $\underset{\sim}{x}_0 \in U_k$. Assim, $\alpha(\underset{\sim}{x}) \geq \alpha(\underset{\sim}{x}_0)$ e $\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) \geq \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x}_0)) = 1$, pois ϕ_U é crescente e $\underset{\sim}{x}_0 \in U_k$.

Para mostrar que a condição é suficiente, notemos que se

$$\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \max_{\underset{\sim}{z} \in U_k} \; \min_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) = 1,$$

existe $\underset{\sim}{z} \in U_k$ tal que

$$\min_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) = 1.$$

Assim, $\alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) = 1$, para $(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})$, e como

$$U_k(\underset{\sim}{z}) = \{(i,z_i) \mid z_i > 0\},$$

temos

$$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{z} \quad \text{e} \quad \phi(\underset{\sim}{x}) \geq \phi(\underset{\sim}{z}) \geq k.$$

A parte em parênteses tem demonstração análoga. □

TEOREMA 5 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Então,

a) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x}))$

b) $\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \phi_L(k,\beta(\underset{\sim}{x}))$.

PROVA - a) - Se $\phi(\underset{\sim}{x}) = 0$, temos $\phi(\underset{\sim}{x}) < k$, $k = 1,2,\ldots,m$. Do Lema 4 segue que $\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$, e portanto

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = 0.$$

Reciprocamente, se

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = 0$$

tem-se: $\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$, e do Lema 4 segue que $\phi(\underset{\sim}{x}) = 0$.

Se $\phi(\underset{\sim}{x}) = k \geq 1$ segue do Lema 4 que

$$1 = \phi_U(1,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \ldots = \phi_U(k-1,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \phi_U(k.\alpha(\underset{\sim}{x})) =$$

$$= 1 - \phi_U(k+1,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \ldots = 1 - \phi_U(m,\alpha(\underset{\sim}{x}))$$

e portanto,

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = k.$$

Por outro lado, se

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = k$$

e observarmos que

$$\phi_U(1,\alpha(\underset{\sim}{x})) \geq \phi(2,\alpha(\underset{\sim}{x})) \geq \ldots \geq \phi_U(m,\alpha(\underset{\sim}{x})),$$

segue do Lema 4 que $\phi(\underset{\sim}{x}) = k$.

b) Para provarmos a parte b), usaremos o conceito de dualidade. Da parte a) demonstrada acima, segue que

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = m - \phi^D(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x}) = m - \sum_{k=1}^{m} \phi_U^D(k,\alpha(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (1 - \max_{\underset{\sim}{z}\in U_{k,\phi^D}} \min_{(i,j)\in U_{k,\phi^D}(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})).$$

e pela Proposição 2, temos

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{m} \min_{y\in L_{m-k}} \max_{(i,j)\in U_{k,\phi^D}(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{y})} (1-\alpha_{ij}(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{x})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \min_{\underset{\sim}{y}\in L_{m-k}} \max_{(i,m_i-j)\in L_{m-k}(\underset{\sim}{y})} \beta_{i,m_i-j}(\underset{\sim}{x}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \min_{\underset{\sim}{u}\in L_k} \max_{(i,\ell)\in L_k(\underset{\sim}{u})} \beta_{i,\ell}(\underset{\sim}{x}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \phi_L(k,\beta(\underset{\sim}{x})). \qquad \square$$

Podemos ainda estabelecer uma analogia entre os caminhos e cortes minimais das estruturas monótonas binárias e os conjuntos $U_k(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x}\in U_k$ e $L_k(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x}\in L_k$, definidos para uma dada estrutura monótona ϕ. Especificamente temos:

OBSERVAÇÃO 6 - Caminhos e cortes minimais de estruturas binárias coerentes de ordem n formam como já salientamos, recobrimentos de Sperner do "conjunto de componentes" C={1,2,...,n}. Em analogia com este fato, podemos mostrar que para estruturas monótonas

$$U_k(\underset{\sim}{x}) \not\subset U_k(\underset{\sim}{z}) \; (L_k(\underset{\sim}{x}) \not\subset L_k(\underset{\sim}{z})) \text{ se } \underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z} \in U_k(L_k),\ \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{z},$$

$k = 1,\ldots,m$ $(k = 0,1,\ldots,m-1)$.

Para demonstrar essa afirmação observe que se $U_k(\underset{\sim}{x}) \subset U_k(\underset{\sim}{z})$, então $(i,x_i) = (i,z_i) \in U_k(\underset{\sim}{z})$ para qualquer i, $1 \leq i \leq n$, tal que $x_i > 0$. Como $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{z}$, existe j, $1 \leq j \leq n$, $x_j = 0 < z_j$ e portanto $\underset{\sim}{x} < \underset{\sim}{z}$. Deste último fato segue que $\phi(\underset{\sim}{x}) < k$ pois $\underset{\sim}{z} \in U_k$, o que é uma contradição já que $\underset{\sim}{x} \in U_k$ também. A demonstração da afirmação dual em parênteses é inteiramente análoga.

Entretanto, não é necessariamente verdade que para estruturas monótonas de uma forma geral tenhamos

$$C = \{1,\ldots,n\} = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ e } x_i > 0 \text{ para algum } \underset{\sim}{x} \in U_k(L_k)\}$$

para cada k, $k = 1,\ldots,m$ $(k = 0,1,\ldots,m-1)$ fixado. Uma condição necessária e suficiente para que isto ocorra é dada pelo teorema abaixo:

TEOREMA 7 - Para $k = 1,\ldots,m$ fixado, $\cup\{U_k(\underset{\sim}{x}) : \underset{\sim}{x} \in U_k\} = C$ se e somente se para cada $i \in C$ existir

$$\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$$

tal que $\phi(m_i,\underset{\sim}{x}) \geq k > \phi(0_i,\underset{\sim}{x})$.

PROVA - A condição é necessária pois, por hipótese, para todo $i \in C$ e $k \geq 1$, existe $\underset{\sim}{x} \in U_k$, com $x_i > 0$ e $\phi((x_i)_i,\underset{\sim}{x}) \geq k$. Assim,

$$\phi((m_i)_i;\underset{\sim}{x}) \geq \phi((x_i)_i;\underset{\sim}{x}) \geq k$$

e como $((0)_i,\underset{\sim}{x}) < ((x_i)_i,\underset{\sim}{x})$, temos $\phi((0)_i,\underset{\sim}{x}) < k$.

Para provar que a condição é suficiente, note inicialmente que

$$\cup\{U_k(x):\underset{\sim}{x}\in U_k\}\subset C.$$

Por outro lado, para todo $i\in C$ existe

$$\underset{\sim}{x}\in \prod_{i=1}^{n} S_i \quad \phi(m_i;\underset{\sim}{x}) \geq k > \phi(0_i;\underset{\sim}{x}).$$

Se $(m_i,\underset{\sim}{x})$ for um vetor superior crítico de nível k, teríamos concluído o resultado. Caso contrário, poderíamos ainda decrescer sucessivamente os valores de cada componente de $(m_i,\underset{\sim}{x})$, sujeito a restrição de que os valores de ϕ não decresçam abaixo do nível k. Como $\phi(\underset{\sim}{0}) = 0$, este procedimento termina e obtemos um vetor $\underset{\sim}{z}\in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que $\underset{\sim}{z} < (m_i,\underset{\sim}{x})$ e $\underset{\sim}{z}\in U_k$. Evidentemente $z_i > 0$ pois caso contrário $\underset{\sim}{z} \leq (0_i,\underset{\sim}{x})$ e teríamos $\phi(\underset{\sim}{z}) < k$. Assim a inclusão contrária também segue. □

O Teorema 7 tem ainda a seguinte versão em termos de vetores inferiores críticos:

"Para cada $k \leq m-1$ fixado, $\cup\{L_k(\underset{\sim}{x}),\underset{\sim}{x}\in L_k\} = C$ se e somente se para cada $i\in C$ existir $\underset{\sim}{x}\in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que

$$\phi((m_i)_i,\underset{\sim}{x}) > k \geq \phi((0)_i,\underset{\sim}{x})".$$

OBSERVAÇÃO 8 - Sabemos que os caminhos minimais de uma estrutura binária em paralelo assim como os cortes minimais de uma estrutura binária em série são conjuntos unitários. Esta característica é preservada nas estruturas em paralelo generalizada e nas estruturas em série generalizada, respectivamente, ou seja, valem as seguintes afirmações:

"Se ϕ é uma estrutura em paralelo generalizada e $\underset{\sim}{x}$ é um vetor superior crítico de nível k, então existe $j = j(\underset{\sim}{x})$ tal que $U_k(\underset{\sim}{x}) = \{(j,x_j)\}$, $k = 1,\dots,m$. Analogamente, se ϕ é uma estrutura em série generalizada e $\underset{\sim}{x}$ é um vetor inferior crítico de nível k, então existe $j = j(\underset{\sim}{x})$ tal que

$$L_k(\underset{\sim}{x}) = \{(j,x_j)\},\ k = 0,\dots,m-1".$$

Para verificar a primeira afirmação,basta observar, que se

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \max_{1 \le i \le n} \phi((x_i)_i,\underset{\sim}{0}) \ge k,$$

existe j, $1 \le j \le n$, tal que $\phi((x_j)_j,\underset{\sim}{0}) \ge k$. Mas como $((x_j)_j,\underset{\sim}{0}) \le \underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{x}$ é superior crítico, tem-se $((x_j)_j,\underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{x}$, e portanto

$$U_k(\underset{\sim}{x}) = \{(j,x_j)\}.$$

A verificação da segunda afirmação se faz de maneira idêntica.

Assim, para uma estrutura em paralelo generalizada ϕ temos

$$\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \max_{((x_j)_j,\underset{\sim}{0}) \in U_k} \alpha_{j,x_j}(\underset{\sim}{x}),$$

e concluímos pelo Teorema 5 que

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{m} \max_{((x_j)_j,\underset{\sim}{0}) \in U_k} \alpha_{j,x_j}(\underset{\sim}{x}).$$

Da mesma maneira concluímos que se ϕ é uma estrutura em série generalizada, temos

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \min_{((x_j)_j,\underset{\sim}{m})\in L_k} \beta_{j,x_j}(\underset{\sim}{x}).$$

Para concluirmos esta seção vale a pena salientar que as estruturas binárias $\phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x}))$ e $\phi_L(k,\beta(\underset{\sim}{x}))$ não são necessariamente coerentes como em Barlow-Proschan (1975). Como exemplo disso tome $n = m_1 = m_2 = m = 2$ e defina

$$\phi(2,2) = 2$$

$$\phi(2,1) = 2 \qquad \phi(1,2) = 1$$

$$\phi(2,0) = 2 \qquad \phi(1,1) = 1 \qquad \phi(0,2) = 1$$

$$\phi(1,0) = 0 \qquad \phi(0,1) = 1$$

$$\phi(0,0) = 0$$

Não é difícil verificar que

$$U_1 = \{(2,0),(0,1)\},\ U_1((2,0)) = \{(1,2)\}$$

e $U_1((0,1)) = \{(2,1)\}$. Portanto,

$$\phi_U(1,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \max\{\alpha_{12}(x),\alpha_{21}(\underset{\sim}{x})\},$$

que obviamente não é coerente, já que representa um sistema a quatro componentes cujo estado é determinado pelos estados de apenas duas delas. Entretanto, podemos representar ϕ através de estruturas binárias coerentes, desde que se restrinjam os domínios das funções $\phi_U(k,\alpha(\cdot))$ e $\phi_L(k,\beta(\cdot))$. Para exemplificar, observe que se colocamos

$$C_k = \bigcup_{\underset{\sim}{x} \in U_k} U_k(\underset{\sim}{x}),$$

a restrição $\phi_U(k,\alpha(\cdot))$ a C_k é uma estrutura binária coerente e

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{x})) = \sum_{k=1}^{m} \phi_U\Big|_{C_k}(k,\alpha(\underset{\sim}{x}))$$

1.3 - A NOÇÃO DE COERÊNCIA PARA AS ESTRUTURAS MONÓTONAS

Como vimos no capítulo anterior no contexto das estruturas monótonas binárias, Barlow & Proscham (1975) definem como relevante para um sistema binário ϕ de ordem n, qualquer componente i, $i = 1,\dots,n$, para a qual existe $\underset{\sim}{x} \in \{0,1\}^n$ tal que $\phi(1_i,\underset{\sim}{x}) > \phi(0_i,\underset{\sim}{x})$.

Neste mesmo contexto uma estrutura ou sistema ϕ é denominado coerente se todas as suas componentes forem relevantes.

A formulação axiomática de uma noção de relevância no contexto das estruturas monótonas foi feita pela primeira vez por El Neweihi, Proschan e Sethuraman (1978) (referidos no que segue por EPS) no caso particular em que $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S$, e que estende a noção introduzida para sistemas binários. Essa noção de revelância, para uma componente i fixada, é traduzida pelo seguinte axioma:

EPS: Para todo estado j, existe $\underset{\sim}{x} \in S^n$ tal que

$$\phi(j_i, \underset{\sim}{x}) = j \quad e \quad \phi(\ell_i, \underset{\sim}{x}) \neq j \text{ para } \ell \neq j.$$

Uma classe particular de estruturas monótonas para as quais vale o axioma acima, é formada pelas estruturas monótonas sugerida por Barlow (1978), conforme exemplo 1.3 c).

Outros axiomas de relevância para componentes de estruturas monótonas, foram introduzidas por Griffith (1980) ainda no caso particular em que $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S$.

Especificamente, para uma componente i fixada, os axiomas introduzidos por Griffith são os seguintes:

G1 - Para todo estado j, existe $\underset{\sim}{x} \in S^n$ tal que

$$\phi((j-1)_i, \underset{\sim}{x}) < \phi(j_i, \underset{\sim}{x});$$

G2 - existe $\underset{\sim}{x} \in S^n$ tal que $\phi(0_i, \underset{\sim}{x}) < \phi(m_i, \underset{\sim}{x})$.

É importante notar que todas as noções axiomáticas de relevância para componentes de sistemas monótonos introduzidas acima, satisfazem a propriedade de que as componentes do sistema dual satisfazem o mesmo axioma de relevância. Além disso, valem as seguintes implicações:

$$\text{EPS} \Longrightarrow \text{G1} \Longrightarrow \text{G2}.$$

Como no modelo por nós introduzido, os espaços de estados do sistema e de cada uma de suas componentes são distintos a extensão do axioma de relevância introduzido por EPS (1978) perde o sentido. Contudo, é possível estender no contexto do nosso modelo as noções de relevância sugeridas por Griffith.

DEFINIÇÃO 1 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Dizemos que a componente i, $i = 1,\ldots,n$, é:

a) G1-relevante se e somente se para todo estado j, $0 \le j \le m_i$, existe $\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que

$$\phi((j-1)_i, \underset{\sim}{x}) < \phi(j_i, \underset{\sim}{x});$$

b) G2-relevante se e somente se existir $\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que

$$\phi(0_i, \underset{\sim}{x}) < \phi((m_i)_i, \underset{\sim}{x}).$$

A estrutura monótona ϕ será dita G1 (G2)-coerente se todas as suas componentes forem G1 (G2)-relevantes.

Nos modelos tratados por EPS (1978) e Griffith (1980), onde $S = S_1 = \ldots = S_n$ exige-se ainda que $\phi(\underset{\sim}{j}) = j$, o que no modelo binário decorria da própria noção de relevância. No nosso caso não faz sentido tal exigência já que os espaços de estado $S, S_1, S_2, \ldots, S_n$ podem ser totalmente distintos. Não obstante nosso modelo traduz, de maneira mais natural, certas situações práticas de interesse.

No exemplo 1.3 d) a estrutura ϕ é G1-coerente mas nenhuma componente é relevante segundo EPS. A contrapartida por nós sugerida, para essa estrutura (conforme exemplo 1.3 e)) mostra que a simplificação não alterou a coerência G1.

Uma outra noção de relevância para componentes de sistemas monótonos pode ser formulada com base no resultado do Teorema 7.

DEFINIÇÃO 2 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Dizemos que a componente i, $i=1,\ldots,n$ é J-relevante se e somente se para todo $k>0$ existir $\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que $\phi((m_i)_i, \underset{\sim}{x}) \geq k > \phi(0_i, \underset{\sim}{x})$. Diremos que a estrutura ϕ é J-coerente se todas as suas componentes forem J-relevantes.

A relevância J, aqui sugerida, não implica a relevância G1 e vice-versa, embora essas duas noções de relevância impliquem a relevância G2. A relevância G2 não implica J ou G1. Estes fatos podem ser elucidados com o exemplo abaixo, no qual $n = m_1 = m_2 = m = 2$.

EXEMPLO 3 - Considere as estruturas monótonas definidas por

(a)	e (b)
$\phi(2,2)=2$	$\phi(2,2)=2$
$\phi(2,1)=2$ $\quad \phi(1,2)=1$	$\phi(2,1)=2$ $\quad \phi(1,2)=2$
$\phi(2,0)=1$ $\quad \phi(1,1)=1$ $\quad \phi(0,2)=1$	$\phi(2,0)=0$ $\quad \phi(1,1)=1$ $\quad \phi(0,2)=1$
$\phi(1,0)=0$ $\quad \phi(0,1)=1$	$\phi(1,0)=0$ $\quad \phi(0,1)=1$
$\phi(0,0)=0$	$\phi(0,0)=0$

Não é difícil ver que, no exemplo 3 a), ϕ é J-coerente mas não é G1-coerente e que no exemplo 3 b), ϕ é G1-coerente mas não é J-coerente. Entretanto, tanto em 3 a) como em

3 b), ϕ é G2-coerente.

PROPOSIÇÃO 4 - Se ϕ é uma estrutura monótona, então ϕ é G1-coerente, G2-coerente ou J-coerente, se e somente se ϕ^D o for.

PROVA - Se ϕ é G1-coerente, para qualquer componente i, $1 \le i \le n$ e qualquer estado j, $1 \le j \le m_i$, existe $\underset{\sim}{z} \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ tal que

$$\phi((m_i - j)_i, \underset{\sim}{z}) < \phi((m_i - j + 1)_i, \underset{\sim}{z}).$$

Colocando $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{z}$, temos:

$$\phi^D((j)_i, \underset{\sim}{x}) = m - \phi((m_i - j)_i, \underset{\sim}{z}) > m - \phi((m_i - j + 1)_i, \underset{\sim}{z}) = \phi^D((j-1)_i, \underset{\sim}{x}).$$

Para a G2-coerência a prova é análoga.

Se ϕ é J-coerente, para qualquer componente i, $1 \le i \le n$, e para qualquer estado $k > 0$, existe $\underset{\sim}{z}$ tal que

$$\phi((m_i)_i, \underset{\sim}{z}) \ge k > \phi(0_i, \underset{\sim}{z}).$$

Dessa forma $\phi^D(0_i, \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{z}) \le m - k < \phi^D((m_i)_i, \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{z})$, isto é,

$$\phi^D(0_i, \underset{\sim}{w}) < \ell \le \phi^D(m_i, \underset{\sim}{w})$$

onde $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{z}$ e $\ell = m - k + 1 > 0$. □

1.4 - CONFIABILIDADE E UTILIDADE

A partir desta seção vamos supor que os vetores de estados das componentes de uma estrutura monótona ϕ são vetores aleatórios $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, onde X_i, $i=1,\ldots,n$, assume valores em S_i.

Usaremos ainda a seguinte notação:

$$P(X_i=1) = p_{ij}, \qquad j=0,\dots,m_i;\ i=1,\dots,n;$$

$$P(X_i<j) = \sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} = P_i(j), \qquad j=0,\dots,m_i;\ i=1,\dots,n;$$

$$P(\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1) = P(X_i\geq j) = \sum_{k=j}^{m_i} p_{ik} = \bar{P}_i(j), \qquad j=0,\dots,m_i;\ i=1,\dots,n;$$

$$P(\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1) = P(X_i\geq j+1) = \sum_{k=j+1}^{m_i} p_{ik} = \bar{P}_i(j+1), \qquad j=0,\dots,m_i;\quad i=1,\dots,n.$$

DEFINIÇÃO 1 - Se ϕ é uma estrutura monótona, definimos a confiabilidade de ϕ como a esperança matemática da variável aleatória $\phi(\underset{\sim}{X})$, isto é, como $E[\phi(\underset{\sim}{X})]$.

PROPOSIÇÃO 2 - Seja ϕ uma estrutura monótona. Se $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ são vetores de estados tais que $\underset{\sim}{X} \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{Y}$, então $\phi(\underset{\sim}{X}) \overset{st}{\leq} \phi(\underset{\sim}{Y})$ e consequentemente $E\phi(\underset{\sim}{X}) \leq E\phi(\underset{\sim}{Y})$.

PROVA - (Veja o Apêndice A para a definição e propriedade da desigualdade estocástica $\overset{st}{\leq}$).

Seja $U_s = \{\underset{\sim}{x} \mid \phi(\underset{\sim}{x})\geq s\}$, $s\in\mathbb{R}$. U_s é um conjunto superior, pois se $\underset{\sim}{x}\in U_s$ e $\underset{\sim}{y} > \underset{\sim}{x}$, então $\phi(\underset{\sim}{y}) \geq \phi(\underset{\sim}{x}) \geq s$, e $\underset{\sim}{y}\in U_s$.

Como por hipótese, $\underset{\sim}{X} \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{Y}$, temos $P(\underset{\sim}{X}\in U_s)\leq P(\underset{\sim}{Y}\in U_s)$, ou seja, $P[\phi(\underset{\sim}{X})>s] \leq P[\phi(\underset{\sim}{Y})>s]$. Assim, $\phi(\underset{\sim}{X}) \overset{st}{\leq} \phi(\underset{\sim}{Y})$ e portanto

$$E\phi(\underset{\sim}{X}) = \sum_{j=1}^{m} P[\phi(\underset{\sim}{X})\geq j] \leq \sum_{j=1}^{m} P[\phi(\underset{\sim}{Y})\geq j] = E\phi(\underset{\sim}{Y}). \qquad \square$$

Várias propriedades importantes são obtidas quando supomos a independência entre as componentes dos vetores aleatórios de estados considerados. Neste sentido falaremos de um sistema monótono ϕ com componentes independentes sempre que estivermos supondo válida esta hipótese.

Se ϕ for um sistema monótono com componentes independêntes, sua confiabilidade pode ser encarada de duas maneiras em virtude da Proposição 1.1:

i) com função dos p_{ij}, isto é,

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = h_\phi(\underset{\sim}{p}),$$

onde $\underset{\sim}{p} = (p_{ij}: 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m_i)$, ou

ii) como função dos $\bar{P}_i(j)$, isto é,

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}),\ \text{onde}\ \underset{\sim}{\bar{P}} = (\bar{P}_i(j): 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m_i).$$

Inicialmente vamos estabelecer algumas propriedades de h_ϕ.

PROPOSIÇÃO 3 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes independentes, então

$$h_\phi(\underset{\sim}{p}) = \sum_{j=0}^{m_i} p_{ij} h_\phi(1_{ij}, \underset{\sim}{p}), \qquad i=1,\dots,n,$$

onde

$$h_\phi(1_{ij}, \underset{\sim}{p}) = E[\phi(j_i, \underset{\sim}{X})].$$

PROVA -

$$h_\phi(\underset{\sim}{p}) = E[\phi(\underset{\sim}{X})] = E\left[\sum_{j=0}^{m_i} I_{[X_i=j]}(\underset{\sim}{X})\ \phi(j_i,\underset{\sim}{X})\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m_i} E[I_{[X_i=j]}(\underset{\sim}{X})]E[\phi(j_i,\underset{\sim}{X})] = \sum_{j=0}^{m_i} p_{ij}h_\phi(1_{ij},\underset{\sim}{p}) \qquad \square$$

TEOREMA 4 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes independentes, então $h_\phi(\underset{\sim}{p})$ é monótona crescente em cada p_{ij}, $j=1,\ldots,m_i$; $i=1,\ldots,n$. Além disso, se o sistema é G1-coerente a monotonicidade é estrita no retângulo aberto

$$\{0<p_{ij}<1:\ j=1,\ldots,m_i;\ i=1,\ldots,n\}.$$

PROVA - Pelo lema anterior

$$h_\phi(\underset{\sim}{p}) = \sum_{j=0}^{m_i} p_{ij}E[\phi(j_i,\underset{\sim}{X})] = p_{i0}E[\phi(0_i,\underset{\sim}{X})]$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}E[\phi(j_i,\underset{\sim}{X})] = \left[1 - \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\right]E[\phi(0_i,\underset{\sim}{X})] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}E[\phi(j_i,\underset{\sim}{X})] = E[\phi(0_i,\underset{\sim}{X})] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}\{E[\phi(j_i,\underset{\sim}{X})] - E[\phi(0_i,\underset{\sim}{X})]\},$$

$i = 1,\ldots,n.$

Assim,

$$\frac{\partial h_\phi}{\partial p_{ij}} = E[\phi((j)_i,\underset{\sim}{X}) - \phi((0)_i,\underset{\sim}{X}], \qquad j=1,\ldots,m_i;\ i=1,\ldots,n,$$

e como ϕ é não decrescente $\frac{\partial h_\phi}{\partial p_{ij}} \geq 0$. Portanto, h_ϕ, é crescente em cada p_{ij}, $j=1,\ldots,m_i$; $i=1,\ldots,n$. Se além disso o sistema é G1-coerente, existe $\underset{\sim}{z}$ com $\phi(j_i,\underset{\sim}{z}) > \phi((j-1)_i,\underset{\sim}{z}) \geq \phi(0_i,\underset{\sim}{z})$, e como por hipótese $0 < p_{ij} < 1$, temos:

$$\frac{\partial h_\phi}{\partial p_{ij}} = E[\phi((j)_i,\underset{\sim}{X}) - \phi((0)_i,\underset{\sim}{X})] > 0$$

e h_ϕ é estritamente crescente em cada p_{ij}, no retângulo aberto $\{0 < p_{ij} < 1,\ j=1,\ldots,m_i;\ i=1,\ldots,n\}$. □

Para sistemas monótonos binários, coerentes a Proposição 1.4 e o Teorema 1.6 tem uma versão correspondente em termos de função de confiabilidade $h_\phi(\underset{\sim}{p})$ (conf. Barlow & Proschan 1975, pg. 23). Especificamente vale o seguinte resultado:

"se h_ϕ for a confiabilidade de um sistema monótono binário, coerente, então:

a) $h_\phi(\underset{\sim}{p} \amalg \underset{\sim}{p}') \geq h_\phi(\underset{\sim}{p}) \amalg h_\phi(\underset{\sim}{p}')$

b) $h(\underset{\sim}{p} \Pi \underset{\sim}{p}') \leq h(\underset{\sim}{p}) \Pi h(\underset{\sim}{p}')$

para todo $\underset{\sim}{p} = (p_1,\ldots,p_n)$; $\underset{\sim}{p}' = (p_1',\ldots,p_n')$ com $0 \leq p_i \leq 1$, $0 \leq p_i' \leq 1$, $i = 1,\ldots,n$. A igualdade vale em a) (em b)) para quaisquer $\underset{\sim}{p}$ e $\underset{\sim}{p}'$ se e somente se o sistema for paralelo (série)".

Para sistemas monótonos não é necessariamente verdade que se o sistema for paralelo generalizado (série generalizado) vale

$$H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \amalg \bar{\underset{\sim}{P}}') = H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \amalg H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}');\ (H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \Pi \bar{\underset{\sim}{P}}') = H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \Pi H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}')).$$

Este fato é facilmente verificado pelo seguinte exemplo:

EXEMPLO 5 - Suponha que $n = m_1 = m_2 = m = 2$ e considere o sistema monótono $\phi(\underset{\sim}{x}) = \max x_i$. É fácil ver que $\phi(\underset{\sim}{x}) = \max\limits_i \, ((x_i)_i, \underset{\sim}{0})$, de sorte que ϕ é um sistema paralelo generalizado.

Sejam (X_1, X_2) e (X_1', X_2') vetores aleatórios independentes de componentes independentes e idênticamente distribuídos tais que

$$P(X_1=0) = P(X_1=1) = P(X_1=2) = \frac{1}{3},\ P(X_1'=0) = P(X_1'=1) = \frac{1}{4} \text{ e } P(X_1'=2) = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, as variáveis aleatórias $X_1 \vee X_1'$ e $X_2 \vee X_2'$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição

$$P(X_1 \vee X_1')=0) = \frac{1}{12},\ P(X_1 \vee X_1'=1) = \frac{1}{4} \text{ e } P(X_1 \vee X_1'=2) = \frac{2}{3}.$$

	(2,2)	(2,1)	(1,2)	(2,0)	(1,1)	(0,2)	(1,0)	(0,1)	(0,0)	H_ϕ
(X_1, X_2)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{9}$
(X_1', X_2')	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{27}{16}$
$(X_1 \vee X_1', X_2 \vee X_2')$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{813}{432}$

As distribuições conjuntas dessas variáveis aleatórias estão contidas no quadro acima e

$$H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) \amalg H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}') = E[\phi(\underset{\sim}{X})] \amalg E[\phi(\underset{\sim}{X}') = \frac{13}{9} \amalg \frac{27}{16} = 1 -$$

$$- \left(1 - \frac{13}{9}\right)\left(1 - \frac{27}{16}\right) = \frac{25}{36} < \frac{813}{432} =$$

$$= E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') = H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}} \amalg \underset{\sim}{\bar{P}}').$$

Se considerarmos os mesmos valores de variáveis $(X_1,X_2),(X_1',X_2')$ nas mesmas condições anteriores com $\phi(\underset{\sim}{X}) = \min_i \phi((X_i)_i,\underset{\sim}{2}) = \min_i X_i$ teremos

$$H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \frac{5}{9}; \quad H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}') = \frac{13}{16}; \quad H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}\,\Pi\,\underset{\sim}{\bar{P}}) = \frac{185}{144}$$

$$H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}})\,\Pi\,H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}') = E[\phi(\underset{\sim}{X})]\,\Pi\,E[\phi(\underset{\sim}{X}')] = \frac{5}{9}\times\frac{13}{16} = \frac{65}{144} > \frac{5}{18} =$$

$$= E[\phi(\underset{\sim}{X}\wedge\underset{\sim}{X}')] = H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}\,\Pi\,\underset{\sim}{\bar{P}}')$$

No entanto, vale a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 6 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes independentes, então:

a) $H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}\amalg\underset{\sim}{\bar{P}}') \geq H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}})\amalg H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}')$

b) $H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}\,\Pi\,\underset{\sim}{\bar{P}}') \leq H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}})\,\Pi\,H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}')$

para quaisquer $\underset{\sim}{\bar{P}}$ e $\underset{\sim}{\bar{P}}'$, $0 \leq \bar{P}_i(j) \leq 1$, $0 \leq \bar{P}_i'(j) \leq 1$, $\bar{P}_i(j) \geq \bar{P}_i(j+1)$, $\bar{P}_i'(j) \geq \bar{P}_i'(j+1)$; $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m_i$.

Além disso se a igualdade valer em a) (b)), então o sistema é paralelo generalizado (série generalizado).

PROVA - Para a parte a) observe que se $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$, $\underset{\sim}{X}' = (X_1',\ldots,X_n')$ são vetores aleatórios independentes, de componentes independentes com $\bar{P}_i(j) = P[X_i \geq j]$; $\bar{P}_i'(j) = P[X_i' \geq j]$, então

$$P[(X_i \vee X_i') \geq j] = 1 - P[(X_i \vee X_i') < j] = 1 - (1-P[X_i \geq j])(1-P[X_i' \geq j]) =$$

$$= \bar{P}_i(j) \amalg \bar{P}_i'(j).$$

Assim, $H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \amalg \bar{\underset{\sim}{P}}') = E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}')]$ e temos

$$H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \amalg \bar{\underset{\sim}{P}}') - H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \amalg H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}') = E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}')] - E[\phi(\underset{\sim}{X})] \amalg E[\phi(\underset{\sim}{X}')] \geq$$

$$\geq E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}')] - E[\phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')] = E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') -$$

$$- \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')] \geq 0.$$

Concluimos então que $H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \amalg \bar{\underset{\sim}{P}}') \geq H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \amalg H_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}')$.

Suponha agora válida a igualdade em a). Então

$$E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') - \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')] = 0$$

quaisquer que sejam as probabilidades $\bar{P}_i(j)$ e $\bar{P}_i'(j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$. Portanto, fixados dois vetores $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{x}'$ em $\prod_{i=1}^{n} S_i$ podemos tomar

$$\bar{P}_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq x_i \\ 0 & \text{se } j > x_i \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{P}_i'(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq x_i' \\ 0 & \text{se } j > x_i' \end{cases}$$

$1 = 1,2,\ldots,n$, e consequentemente

$$\phi(\underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{x}') - \phi(\underset{\sim}{x}) \vee \phi(\underset{\sim}{x}') = E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') - \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')] = 0,$$

isto é,

$$\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') = \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}').$$

Como $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{x}'$ podem ser escolhidos arbitrariamente, segue da Proposição 1.4 que ϕ é paralelo generalizado.

A demonstração da parte b) é análoga. □

Não obstante as considerações acima podemos estender o resultado formulado no caso binário, quando medimos a confiabilidade de um sistema monótono ϕ, com componentes independentes, através de sua função de sobrevivência. Denotaremos por $\bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}})$ a função de sobrevivência de $\phi(\underset{\sim}{X})$ quando $\underset{\sim}{X}$ tem função de sobrevivência $\bar{\underset{\sim}{P}}$. Obviamente a notação funcional $\bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}})$ faz sentido já que $P[\phi(\underset{\sim}{X}) \geq j]$ é determinada unicamente por $\bar{\underset{\sim}{P}}$, para cada j, $1 \leq j \leq m$.

TEOREMA 7 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes independentes, então:

a) $\bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \amalg \bar{\underset{\sim}{P}}') \geq \bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \amalg \bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}')$

b) $\bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}} \Pi \bar{\underset{\sim}{P}}') \leq \bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}) \Pi \bar{F}_\phi(\bar{\underset{\sim}{P}}')$ para quaisquer $\bar{\underset{\sim}{P}}$ e $\bar{\underset{\sim}{P}}'$.

Além disso, a igualdade vale em a) (em b)) se e somente se o sistema é paralelo generalizado (série generalizado).

Mostra de a)

A validade de a) segue imediatamente pois, para cada j fixado,

$$P[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') \geq j] - P[\phi(\underset{\sim}{X}) \geq j] \amalg P[\phi(\underset{\sim}{X}') \geq j] = P[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') \geq j] -$$

$$- P[\phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}') \geq j] \geq 0$$

quaisquer que sejam as funções de sobrevivência $\bar{\underset{\sim}{P}}$ e $\bar{\underset{\sim}{P}}'$ dos vetores de estados independentes com componentes independentes $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{X}'$. Se a igualdade valer em a), então

$$P[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') \geq j] = P[\phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}') \geq j]$$

e concluímos que $E[\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') - \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')] = 0$ e como na demonstração da Proposição 6, ϕ é um sistema paralelo generalizado.

Se ϕ é paralelo generalizado, então

$$\phi(\underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{X}') = \phi(\underset{\sim}{X}) \vee \phi(\underset{\sim}{X}')$$

e portanto os dois lados da igualdade tem mesma distribuição. □

Uma outra forma alternativa para se medir a confiabilidade de um sistema monótono ϕ é através de uma função de utilidade. Especificamente, associamos a cada estado $j \in S$ um número real $a_j \geq 0$ que representa a recompensa quando o sistema está no estado j, sujeito apenas à restrição de que $0 = a_0 \leq \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m$. A utilidade do sistema é definida como a recompensa média:

$$U_\phi = E\left[\sum_{j=1}^{m} a_j I_{[\phi(\underset{\sim}{X})=j]}\right].$$

Não é difícil ver que se $\underset{\sim}{X} \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{X}'$, então

$$U_{\phi(\underset{\sim}{X})} \leq U_{\phi(X')}.$$

Da mesma maneira que para a confiabilidade, podemos tratar U_ϕ tanto como função dos p_{ij} quanto dos $\bar{P}_i(j)$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,m_i$. Neste último caso escrevemos

$$U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \sum_{j=1}^{m} a_j P[\phi(\underset{\sim}{X})=j],$$

e se $a_j = j$, $j=1,\ldots,m$, $U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) = H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}})$.

5 - A NOÇÃO DE IMPORTÂNCIA

Para sistemas monótonos em geral, algumas componentes são mais importantes que outras para determinar se o sistema funciona ou não. Intuitivamente seria razoável medir a importância de uma componente, através da taxa de crescimento da confiabilidade do sistema à medida que cresce a confiabilidade da componente.

Para uma extrutura monótona binária coerente ϕ Barlow & Proschan (1975, p.27), definem a importância da componente i, $i = 1,\dots,n$, como

$$I(i) = \frac{\partial}{\partial p_i} h_\phi(\underset{\sim}{p})$$

onde $\underset{\sim}{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $0 \le p_i \le 1$. Nesta mesma linha, Griffith (1980) introduz como medida de importância da componente i, $i = 1,\dots,n$, de um sistema monótono ϕ, o vetor

$$I(\underset{\sim}{i}) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{P}_i(1)} U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}),\dots,\frac{\partial}{\partial \bar{P}_i(m_i)} U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}})\right)$$

isto é,

$$I(\underset{\sim}{i}) = \text{grad} U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}_i)$$

onde $U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}_i)$ representa a utilidade do sistema ϕ olhada como função apenas de $\underset{\sim}{\bar{P}}_i = (\bar{P}_i(1),\dots,\bar{P}_i(m_i))$, com os demais $\bar{P}_j(\cdot)$ considerados constantes.

É interessante notar ainda as relações entre as definições de importância acima e as noções de relevância discutidas na seção 3. Enquanto no caso binário

(1) $$I(i) = P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) < \phi(1_i,\underset{\sim}{X})],$$

no caso da definição introduzida por Griffith temos a seguinte relação com a relevância G1.

PROPOSIÇÃO 1 - Seja ϕ uma estrutura monótona com componentes independentes. Então, para cada $i = 1,\ldots,n$ fixado,

$$U_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \sum_{j=1}^{m}(a_j - a_{j-1})P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) \geq j] + \sum_{j=1}^{m_i} I_j(i)\bar{P}_i(j),$$

onde

$$I_j(i) = \sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k-1})P[\phi((j-1)_i,\underset{\sim}{X}) < k \leq \phi(j_i,\underset{\sim}{X})]$$

PROVA - Observe que

$$P[\phi(\underset{\sim}{X}) \geq j] = \sum_{\ell=0}^{m_i} P[\phi(\ell_i,\underset{\sim}{X}) \geq j]P[X_i = \ell] = P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) \geq j][1 - \bar{P}_i(1)] +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{m_i-1} P[\phi(\ell_i,\underset{\sim}{X}) \geq j][\bar{P}_i(\ell) - \bar{P}_i(\ell-1)] + P[\phi((m_i)_i,\underset{\sim}{X}) \geq j]\bar{P}_i(m_i) =$$

$$= P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) \geq j] + \sum_{\ell=1}^{m_i}\{P[\phi(\ell_i,\underset{\sim}{X}) \geq j] - P[\phi((\ell-1)_i,\underset{\sim}{X}) \geq j]\}\bar{P}_i(\ell)$$

Então,

$$U(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \sum_{j=1}^{m}(a_j - a_{j-1})P[\phi(\underset{\sim}{X}) \geq j] = \sum_{j=1}^{m}(a_j - a_{j-1})P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) \geq j] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m_i}(a_j - a_{j-1})P[\phi((\ell-1)_i,\underset{\sim}{X}) < j \leq \phi(\ell_i,\underset{\sim}{X})]\bar{P}_i(\ell) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(a_j - a_{j-1})P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) \geq j] + \sum_{\ell=1}^{m_i} I_\ell(i)\bar{P}_i(\ell). \qquad \square$$

Note neste caso,

(2) $$\underset{\sim}{I}(i) = (I_1(i),\ldots,I_{m_i}(i)).$$

mas $I_j(i)$ não coincide com $P[\phi((j-1)_i,\underset{\sim}{X}) < \phi(j_i,\underset{\sim}{X})]$ mesmo no caso em que $a_j = j$. A igualdade (1) sugere como medida de importância da componente i o vetor

$$(3) \qquad \underset{\sim}{I}^{G1}(i) = (I_1^{G1}(i),\ldots,I_{m_i}^{G1}(i))$$

onde $I_j^{G1}(i) = P[\phi((j-1)_i,\underset{\sim}{X}) < \phi(j_i,\underset{\sim}{X})]$.

Observe que para $a_j = j$, $j=1,\ldots,m$, $I_j(i) \geq I_j^{G1}(i)$ mas a Proposição 1 não é válida se substituirmos $I_j(i)$ por $I_j^{G1}(i)$.

Esta abordagem para definir uma medida de importância para sistemas monótonos foi utilizada por Barlow & Wu (1978) em conexão com a noção de relevância EPS descrita na seção 3, para o caso particular em que $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S$.

Nesta mesma linha podemos sugerir medidas de importância ainda em conexão com as noções de relevância G2 e relevância J. Especificamente definiríamos

$$I^{G2}(i) = P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) < \phi((m_i)_i,\underset{\sim}{X})]$$

$$I_k^J(i) = P[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) < k \leq \phi((m_i)_i,\underset{\sim}{X})].$$

e neste último caso olharíamos como medida de importância da componente i o vetor

$$(4) \qquad \underset{\sim}{I}^J(i) = (I_1^J(i),\ldots,I_m^J(i)).$$

As relações entre essas diversas medidas de importância, são as seguintes:

$$\overset{G2}{I}(i) \geq \overset{G1}{I_j}(i), \qquad j = 1,\dots,m_i$$

$$\overset{G2}{I}(i) \geq \overset{J}{I_k}(i), \qquad k = 1,\dots,m$$

e se $a_j = j$, $j = 1,\dots,m$, temos ainda

$$I_j(i) \leq \sum_{k=1}^{m} \overset{J}{I_k}(i).$$

Nas definições (2), (3) e (4) a importância de uma componente i de um sistema monótono ϕ é dada por um vetor, o que torna mais difícil a comparação das três definições entre si. Uma forma alternativa para eliminar esse problema seria definir em cada um dos casos a importância da componente i como a soma das coordenadas desses vetores. Teríamos assim,

$$I(i) = \sum_{j=1}^{m_i} I_j(i), \quad \overset{G1}{I}(i) = \sum_{j=1}^{m_i} \overset{G1}{I_j}(i) \text{ e } \overset{J}{I}(i) = \sum_{k=1}^{m} \overset{J}{I_k}(i).$$

E, podemos observar que

$$\overset{G2}{I}(i) \leq \overset{G1}{I}(i) \leq I(i) = \overset{J}{I}(i) = E[\phi(0_i,\underset{\sim}{X}) - \phi((m_i)_i,\underset{\sim}{X})].$$

6 - LIMITES SUPERIORES E INFERIORES PARA A CONFIABILIDADE DE SISTEMAS MONÓTONOS

Nesta seção estenderemos alguns resultados de Barlow & Proschan (1975, cap.2,sec.3) sobre limites para a confiabilidade de sistemas monótonos binários coerentes. Nos referiremos a seguir a sistemas monótonos com componentes associadas, o que significa supor que as componentes dos vetores aleatórios de estados $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, são variáveis aleatórias associadas (veja Apêndice A).

Seja ϕ um sistema monótono e sejam $\underset{\sim}{Z}_1^k, \underset{\sim}{Z}_2^k, \ldots, \underset{\sim}{Z}_{n_k}^k$, $k=1,\ldots,m$ os vetores críticos de nível k e considere os eventos $A_r^k = \{\underset{\sim}{X} \geq \underset{\sim}{Z}_r^k\}$, $r=1,\ldots,n_k$, $k=1,\ldots,m$. Pela Proposição 2.3, $\phi(\underset{\sim}{X}) \geq k \geq 1$ se e somente se $\underset{\sim}{X} \geq \underset{\sim}{Z}$ para algum $\underset{\sim}{Z}_r^k$ para algum r, $r=1,\ldots,n_k$. Assim,

$$\{\phi(\underset{\sim}{X})\geq j\} = \bigcup_{k=j}^{m} \bigcup_{r=1}^{n_k} A_r^k \quad \text{e} \quad P[\phi(\underset{\sim}{X})\geq j] = P\left[\bigcup_{k=j}^{m} \bigcup_{r=1}^{n_k} A_r^k\right] = \sum_{t=1}^{N} (-1)^{t-1} S_t$$

onde

$$N = \sum_{k=j}^{m} n_k \quad \text{e} \quad S_t = \sum_{1\leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_t \leq N} P(A_{i_1}' \cap A_{i_2}' \cap \ldots \cap A_{i_t}'),$$

onde $A_1', \ldots, A_N'$ são os eventos A_r^k ordenados segundo algum critério.

Temos então

$$P[\phi(\underset{\sim}{X})\geq j] \leq S_1 = \sum_{r=1}^{N} P(A_r')$$

$$P[\phi(\underset{\sim}{X})\geq j] \geq S_1 - S_2$$

e conseguimos desta maneira obter limites superiores e inferiores para confiabilidade

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = \sum_{j=1}^{m} P[\phi(\underset{\sim}{X})\geq j]$$

do sistema através do princípio da inclusão-exclusão.

LEMA 1 - Se $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ é associado e, $P(X_i \in S_i) = 1$, $i=1,\ldots,n$, então $\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})$, $j=1,\ldots,m_i$, $i=1,\ldots,n$ ($\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})$, $j=0,\ldots,m_{i-1}$; $i=1,\ldots,n$) são variáveis aleatórias associadas.

PROVA - Como

$$\alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \geq j \\ 0 & \text{se } x_i < j \end{cases},$$

se $\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{y}$, teremos $x_i \leq y_i$ e conseqüentemente $\alpha_{ij}(\underset{\sim}{x}) \leq \alpha_{ij}(\underset{\sim}{y})$, isto é, $\alpha_{ij}(\cdot)$ é uma função crescente.

Portanto segue de A6 que as variáveis aleatórias $\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})$ são associadas.

A demonstração em termos dos $\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})$ é análoga. □

No que segue usaremos a decomposição do Teorema 2.5, com as seguintes notações:

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \sum_{k=1}^{m} \phi_U(k,\alpha(\underset{\sim}{X})) = \max_{\underset{\sim}{y} \in U_k} \min_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) = \coprod_{\underset{\sim}{y} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})$$

$$\phi(\underset{\sim}{X}) = \sum_{k=0}^{m-1} \phi_L(k,\beta(\underset{\sim}{X})) = \min_{\underset{\sim}{y} \in L_k} \max_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X}) = \prod_{\underset{\sim}{y} \in L_k} \coprod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})$$

TEOREMA 2 - Se ϕ é uma estrutura monótona com componentes associadas, então:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{y} \in L_k} P[\coprod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] \leq E[\phi(\underset{\sim}{X})] \leq \sum_{k=1}^{m} \coprod_{\underset{\sim}{y} \in U_k} P[\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1]$$

PROVA -

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = E\left[\sum_{k=0}^{m-1} \coprod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \coprod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} P[\coprod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \coprod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{m-1} \coprod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} P[\coprod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1]$$

A última desigualdade é válida devido à associação dos

$$\coprod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X}),$$

que são funções crescentes das variáveis aleatórias $\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})$, conforme a propriedade A6 e o Teorema A8.

Da mesma forma

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = E\left[\sum_{k=1}^{m} \coprod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P[\coprod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \coprod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} P[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] \qquad \square$$

COROLÁRIO 3 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes independentes, então:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \coprod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j+1) \leq E[\phi(\underset{\sim}{X})] \leq \sum_{k=1}^{m} \coprod_{\underset{\sim}{y}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j).$$

PROVA - O resultado segue imediatamente do teorema anterior pois, para $\underset{\sim}{y}\in U_k$, fixado,

$$P[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] = P[\bigcap_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} (\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1)] =$$

$$= \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} P[\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] = \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j).$$

A penúltima igualdade segue da hipótese de independência observando-se que em $U_k(\underset{\sim}{y}) = \{(i,y_i) | y_i>0\}$ figura no máximo um par com primeira coordenada j.

Analogamente, para $\underset{\sim}{y}\in L_k$, fixado,

$$P[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] = P[1-\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} (1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=1] =$$

$$= P[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} (1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=1] =$$

$$= 1 - P[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} (1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=1)] =$$

$$= 1 - P[\bigcap_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} ((1-\beta_{ij}(\underset{\sim}{X}))=1)] =$$

$$= 1 - \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} P[\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=0] =$$

$$= \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} P[\beta_{ij}(\underset{\sim}{X})=1] =$$

$$= \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j+1) \qquad \square$$

As cotas inferiores e superiores

$$\ell(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{y}\in L_k} \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j+1)$$

$$\mu(\underset{\sim}{\bar{P}}) = \sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{y} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j).$$

respectivamente, obtidas no Corolário 3 para a confiabilidade $E[\phi(\underset{\sim}{X})]$ de um sistema monótono com componentes independentes satisfaz ainda a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 4 - a) Se $\underset{\sim}{\bar{P}}$ e $\underset{\sim}{\bar{P}}'$ são funções de sobrevivência tais que $\bar{P}_i(j) \leq \bar{P}_i'(j)$ para $i = 1,\dots,n$ e $j = 1,\dots,m_i$, então

$$\ell(\underset{\sim}{\bar{P}}) \leq \ell(\underset{\sim}{\bar{P}}')$$

$$\mu(\underset{\sim}{\bar{P}}) \leq \mu(\underset{\sim}{\bar{P}}')$$

b) Se $0 < \bar{P}_i(j+1) < \bar{P}_i(j) < 1$, $j = 1,\dots,m_i -1$, $i = 1,\dots,n$ e pelo menos dois conjuntos críticos superiores (inferiores) de mesmo nível k se sobrepõem, então $\ell(\underset{\sim}{\bar{P}}) < H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) < \mu(\underset{\sim}{\bar{P}})$.

PROVA - a) Como, para quaisquer i e j, $j=1,\dots,m_i -1$, $i=1,\dots,n$; $\bar{P}_i(j+1) \leq \bar{P}_i'(j+1)$, temos para cada $\underset{\sim}{x}$ de L_k, fixado,

$$\prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} (1-\bar{P}_i(j+1)) \geq \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{X})} (1-\bar{P}_i'(j+1))$$

e conseqüentemente

$$\prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j+1) \leq \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i'(j+1).$$

Portanto,

$$\prod_{\underset{\sim}{x} \in L_k} \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j+1) \leq \prod_{\underset{\sim}{x} \in L_k} \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i'(j+1),$$

e

$$\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{x} \in L_k} \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j+1) \le \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{x} \in L_k} \prod_{(i,j) \in L_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}'_i(j+1),$$

isto é, $\ell(\underset{\sim}{\bar{P}}) \le \ell(\underset{\sim}{\bar{P}}')$.

Analogamente, para quaisquer i,j, $j=1,\dots,m_i$, $i=1,\dots,n$ temos $\bar{P}_i(j) \le \bar{P}'_i(j)$. Assim, para cada $\underset{\sim}{x}$ fixado,

$$\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j) \le \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}'_i(j)$$

e conseqüentemente

$$\prod_{\underset{\sim}{x} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j) \le \prod_{\underset{\sim}{x} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}'_i(j).$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{x} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}_i(j) \le \sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{x} \in U_k} \prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{x})} \bar{P}'_i(j),$$

isto é, $\mu(\underset{\sim}{\bar{P}}) \le \mu(\underset{\sim}{\bar{P}}')$.

b) Suponha que os conjuntos que se sobrepõe sejam $U_k(\underset{\sim}{y})$ e $U_k(\underset{\sim}{z})$, isto é, $U_k(\underset{\sim}{y}) \cap U_k(\underset{\sim}{z}) \ne \phi$, $\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{z} \in U_k$.

Note que:

$$E[(\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))\amalg(\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))] -$$

$$-\{E[\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]\amalg E[\prod_{(i,j) \in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]\} =$$

$$= -\{E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))(\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))] -$$

$$- E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]\} =$$

$$= -\{E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})\cup U_k(\underset{\sim}{y})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}^2(\underset{\sim}{X})] -$$

$$- E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]\times E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \times$$

$$\times \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} (E[\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})])^2\} \leq -\{E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \times$$

$$\times E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})][\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} (E[\alpha_{ij}^2(\underset{\sim}{X})]-E[\alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]^2)]\}=$$

$$= -\{\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j) \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})-U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j) \times$$

$$\times [\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})\cap U_k(\underset{\sim}{y})} \bar{P}_i(j)(1-\bar{P}_i(j))]\} < 0$$

devendo-se a desigualdade a propriedade A6 e ao Teorema A8.

Assim,

(1)

$$E[(\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))\amalg(\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}))] <$$

$$< E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})]\amalg E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})].$$

Por outro lado,

$$E[\phi(\underset{\sim}{X})] = \sum_{k=1}^{m} E[\coprod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k-\{\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{y}\}} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k-\{\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{y}\}} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] <$$

$$< \sum_{k=1}^{m} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{y})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k-\{\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{y}\}} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] = \sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \bar{P}_i(j) = u(\underset{\sim}{\bar{P}}),$$

com última desigualdade seguindo de (1).

Portanto $H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) < u(\underset{\sim}{\bar{P}})$, e provamos de maneira análoga que $H_\phi(\underset{\sim}{\bar{P}}) < \ell(\underset{\sim}{\bar{P}})$.

A extensão das cotas minimax discutidas em Barlow & Proschan (1975,pg.37) também é possível para o nosso modelo. Especificamente, temos:

TEOREMA 5 - Se ϕ for uma estrutura monótona, então:

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \leq E[\phi(\underset{\sim}{X})] \leq \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{v}\in L_k} E[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})]$$

PROVA - Para cada $\underset{\sim}{u}\in U_k$,

$$\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}) \geq \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X}),$$

e portanto

$$E[\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k} \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})] \geq E[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})],$$

conseqüentemente,

(2) $$E\Big[\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k}\ \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] \geq \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} E\Big[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big]$$

Analogamente, para cada $\underset{\sim}{v}\in L_k$,

$$\prod_{\underset{\sim}{z}\in L_k}\ \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{z})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X}) \leq \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X}),$$

e então

$$E\Big[\prod_{\underset{\sim}{z}\in L_k}\ \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{z})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] \leq E\Big[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big],$$

conseqüentemente,

$$E\Big[\prod_{\underset{\sim}{z}\in L_k}\ \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{z})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] \leq \prod_{\underset{\sim}{v}\in L_k} E\Big[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big]$$

De (2) e (3) segue finalmente que:

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k} E\Big[\prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] \leq \sum_{k=1}^{m} E\Big[\prod_{\underset{\sim}{z}\in U_k}\ \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{z})} \alpha_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] =$$

$$= E[\phi(\underset{\sim}{X})] = \sum_{k=0}^{m-1} E\Big[\prod_{\underset{\sim}{z}\in L_k}\ \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{z})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big] \leq \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{v}\in L_k} E\Big[\prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \beta_{ij}(\underset{\sim}{X})\Big]$$

COROLÁRIO 6 - Se ϕ for uma estrutura monótona com componentes associados, então:

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{\underset{\sim}{u}\in U_k}\ \prod_{(i,j)\in U_k(\underset{\sim}{u})} \bar{P}_i(j) \leq E[\phi(\underset{\sim}{X})] \leq \sum_{k=0}^{m-1} \prod_{\underset{\sim}{v}\in L_k}\ \prod_{(i,j)\in L_k(\underset{\sim}{v})} \bar{P}_i(j+1).$$

CAPÍTULO 2

ASPECTOS DINÂMICOS DA TEORIA DA CONFIABILIDADE

2.1 - PROCESSOS IFRA E NBU

Neste capítulo discutiremos alguns aspectos dinâmicos da teoria da confiabilidade. Especificamente estaremos interessados na evolução temporal do estado de sistemas complexos.

As primeiras noções de processos estocásticos IFRA e NBU foram introduzidas por Ross (1979) e por El-Neweihi et al (1978), que utilizaram as versões de seus resultados para obter demonstrações mais simples dos teoremas de fechamento IFRA e NBU, dadas por Barlow & Proschan (1975). Nesta seção estudaremos a extensão da noção de processo IFRA para o caso multidimensional proposta por Block & Savits (1979) e estenderemos na mesma linha, e também para o caso multidimensional, a noção de processo NBU introduzida por EL-Neweihi et al (1978).

Seja $\{X(t),t\geq 0\}$ um processo estocástico com trajetórias não negativas, não crescentes e contínuas à direita, e para cada real $a>0$ seja

$$T_a = \inf\{t\geq 0 \mid X(t)\leq a\}.$$

DEFINIÇÃO 1 - Dizemos que o processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é IFRA (NBU) se e somente se T_a tiver distribuição IFRA (NBU) para qualquer real $a > 0$.

As seguintes caracterizações alternativas para processos IFRA e NBU foram obtidas por Block & Savits e El-Naweihi et al, respectivamente.

PROPOSIÇÃO 2 - Um processo estocástico não-negativo, não crescente e contínuo à direita $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo IFRA se e somente se para toda constante α, $0 < \alpha \leq 1$, e para toda função Borel mensurável, não decrescente e não negativa h tivermos:

$$E[h(X(t))] = \int h(x)\,dF(x) \leq \left\{\int h^{\alpha}(\alpha x)\,dF(x)\right\}^{1/\alpha} = E^{1/\alpha}[h(X(\alpha t))].$$

PROPOSIÇÃO 3 - Um processo estocástico não-negativo, não crescente e contínuo à direita $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo NBU se e somente se para todo $s \geq 0$ e $t \geq 0$

$$X(s+t) \overset{st}{\leq} X'(s) \wedge X'(t).$$

onde $X'(s)$ e $X'(t)$ são duas variáveis aleatórias independentes com as mesmas distribuições de $X(s)$ e $X(t)$ respectivamente.

As caracterizações contidas nas Proposições 2 e 3 facilitam sobremaneira a investigação das propriedades desses processos. Omitimos as demonstrações, já que estão contidas nas extensões para o caso multivariado que discutimos a seguir:

Seja $\{\underset{\sim}{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t)), t \geq 0\}$ um processo estocástico multidimensional, não negativo, não crescente e contínuo à direita e, para cada domínio superior, isto é, para cada conjunto superior aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, seja

$$T_U = \inf\{t \geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t) \notin U\}.$$

Então:

DEFINIÇÃO 4 - Dizemos que o processo $\{\underset{\sim}{X}(t), t \geq 0\}$ é IFRA(NBU) multidimensional se e somente se T_U tem distribuição IFRA (NBU) para qualquer domínio superior U.

É óbvio que todo processo IFRA multidimensional é um processo NBU multidimensional. Resultados análogos as caracterizações contidas nas Proposições 2 e 3 valem ainda para os processos multidimensionais como veremos a seguir.Para estendermos a Proposição 2 usaremos o seguinte lema:

LEMA 6 - Seja Ω um conjunto e A uma classe de subconjuntos de Ω fechada por interseções finitas. Seja H um espaço de funções reais definidas em Ω tal que:

i) $I_A \in H$ para todo $A \in A$

ii) Se $f \in H$, então $\alpha f \in H$ para $\alpha \geq 0$ fixado

iii) Se $f \in H$ e $g \in H$ então $f+g \in H$

iv) Se f_n é uma seqüência crescente de funções não negativas em H tais que $\sup_n f_n = f$ e finito então $f \in H$.

Sob essas hipóteses H contém todas as funções monótonas crescentes não negativas, $\sigma(A)$-mensuráveis. $\square$

O lema acima é uma conseqüência do Teorema de Dynkin, que corresponde ao "argumento da classe monótona". Para demonstrar esse lema basta imitar a demonstração do Teorema 2.3 do Capítulo zero de Blumenthal & Getoar, 1968, pg. 6.

TEOREMA 7 - Se $\{\underset{\sim}{X}(t), t \geq 0\}$ é um processo estocástico, não negativo, não crescente e contínuo à direita, então $\underset{\sim}{X}(t)$ é um processo IFRA multidimensional se e somente se para toda constante α, $0 < \alpha \leq 1$ e para toda função h mensurável, não negativa e não decrescente, tivermos:

$$E[h(\underset{\sim}{X}(t))] = \int h(\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x}) \leq \left\{\int h^{\alpha}(\alpha\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} = E^{1/\alpha}[h^{\alpha}(\underset{\sim}{X}(\alpha t))].$$

PROVA - A condição é obviamente suficiente pois basta tomar $h = I_U$ onde U é um domínio superior. Assim, teremos

$$P[T_U > t] = P[\underset{\sim}{X}(t) \in U] = E[h(\underset{\sim}{X}(t))] \leq E^{1/\alpha}[h^{\alpha}(\underset{\sim}{X}(\alpha t))] =$$

$$= P^{1/\alpha}[\underset{\sim}{X}(\alpha t) \in U] = P^{1/\alpha}[T_U > \alpha t].$$

Para mostrar que a condição é necessária usamos o lema 6 com $\Omega = \mathbb{R}^n$, A é a classe dos domínios superiores de $\mathbb{R}^n$ e H o conjunto das funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição do teorema. É fácil mostral que as condições i),ii), (iii) e iv) do Lema 6 se verificam. Em particular iii) é conseqüência da desigualdade de Minkowisk e iv) segue do teorema da convergência monótona. Como $\sigma(A)$, neste caso, coincide com a σ-álgebra de Borel, H contém todas as funções não negativas, não decrescentes e Borel-mensuráveis, o que prova o teorema.

Observe ainda que para toda função h Borel mensurável, não decrescente, não negativa, existe uma seqüência $(h_n)_{n \geq 1}$

de funções simples da forma

$$h_n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \, 1_{D_{k,n}}(x)$$

onde

$$D_{k,n} = \left\{\underset{\sim}{x} \,|\, h(\underset{\sim}{x}) > \frac{k}{2^n}\right\}, \qquad k = 1,\ldots,n2^n$$

são conjuntos superiores mensuráveis, com $h_n(\underset{\sim}{x}) \uparrow h(\underset{\sim}{x})$.

Para verificarmos se um processo $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ é IFRA multidimensional basta entretanto verificarmos a validade da condiçao do Teorema 7 para funções não negativas, monótonas crescentes e contínuas.

Especificamente temos:

TEOREMA 8 - Se $\{\underset{\sim}{X}(t),t\geq 0\}$ for um processo estocástico não negativo não crescente e contínuo à direita, então $\underset{\sim}{X}(t)$ é um processo IFRA multidimensional se e somente se para toda constante α, $0 < \alpha \leq 1$ e para toda função h contínua, não negativa e não decrescente tivermos:

$$E[h(\underset{\sim}{X}(t))] = \int h(\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x}) \leq \left\{\int h^{\alpha}(\alpha\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} =$$

$$= E^{1/\alpha}[h^{\alpha}(\underset{\sim}{X}(\alpha t))].$$

PROVA - A condição necessária é óbvia em virtude do Teorema 7.

Para mostrar que a condição é suficiente, observe que podemos aproximar a função $I_U(\underset{\sim}{x})$ onde U é superior fechado pela seqüência de funções $(\phi_k)_{k\geq 1}$.

$$\phi_k(\underset{\sim}{t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } d(\underset{\sim}{t},U) \geq 1/k \\ 1-kd(\underset{\sim}{t},U) & \text{se } d(\underset{\sim}{t},U) < 1/k \end{cases}$$

que são contínuas em $\underset{\sim}{t}$, pois para qualquer $\varepsilon > 0$, se $d(\underset{\sim}{t},U) < \frac{1}{k}$ tomamos $\delta = \min\{\varepsilon/k, \frac{1}{k} - d(\underset{\sim}{t},U)\}$, e para todo $\underset{\sim}{x}$ com

$$d(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) < \delta,\ d(\underset{\sim}{x},U) \leq d(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) + d(\underset{\sim}{t},U) < \delta + d(\underset{\sim}{t},U) \leq \frac{1}{k} - d(\underset{\sim}{t},U) + d(\underset{\sim}{t},U) = \frac{1}{k},$$

conseqüentemente $\phi_k(\underset{\sim}{x}) = 1 - d(\underset{\sim}{x},U)$ e

$$|\phi_k(\underset{\sim}{t})-\phi_k(\underset{\sim}{x})| = |1-kd(\underset{\sim}{t},U)-1+kd(\underset{\sim}{x},U)| =$$

$$= k|d(\underset{\sim}{t},U)-d(\underset{\sim}{x},U)| \leq kd(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) \leq k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

se $d(\underset{\sim}{t},U) = \frac{1}{k}$, tomamos $\delta \leq \frac{\varepsilon}{k}$, e para todo $\underset{\sim}{x}$ com $d(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) < \delta$,

$$|\phi_k(t)-\phi_k(\underset{\sim}{x})| = |\phi_k(\underset{\sim}{x})| \leq |1-kd(\underset{\sim}{x},U)| = |\frac{k}{k} - kd(\underset{\sim}{x},U)| =$$

$$= k|d(\underset{\sim}{t},U) - d(\underset{\sim}{x},U)| \leq kd(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) \leq k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Se $d(\underset{\sim}{t},U) > \frac{1}{k}$ tomamos $\delta \leq d(\underset{\sim}{t},U) - \frac{1}{k} > 0$, e para todo $\underset{\sim}{x}$ com

$$d(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{t}) < \delta,\ d(\underset{\sim}{x},U) \geq d(\underset{\sim}{t},U) - d(\underset{\sim}{t},\underset{\sim}{x}) \geq d(\underset{\sim}{t},U) - \delta \geq d(\underset{\sim}{t},U) - d(\underset{\sim}{t},U) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

e

$$|\phi_k(t)-\phi_k(x)| = 0 < \varepsilon .$$

Dessa maneira, para cada k, vale a desigualdade,

$$\int \phi_k(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \leq \left\{ \int \phi_k^{\alpha}(\alpha \underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \right\}^{1/\alpha} .$$

Além disso $(\phi_k)_k$ é decrescente em k e

se $\underset{\sim}{t} \in U$; $\phi_k(\underset{\sim}{t}) = 1 = I_U(\underset{\sim}{t})$, $\forall k \in \mathbb{N}$

se $\underset{\sim}{t} \notin U$ e U é fechado, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ com $d(\underset{\sim}{t},U) \geq \frac{1}{k_0}$ e para todo $k \geq k_0$, $\phi_k(\underset{\sim}{t}) = 0 = I_U(\underset{\sim}{t})$. Assim $\phi_k \downarrow I_U$ e como

$$\int \phi_1(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) = \int_{\{\underset{\sim}{x} | d(\underset{\sim}{x},U)<1\}} (1-d(\underset{\sim}{x},U))\,dF(\underset{\sim}{x}) \leq \int_{\{\underset{\sim}{x} | d(\underset{\sim}{x},U)<1\}} dF(\underset{\sim}{x}) =$$

$$= P[\{\underset{\sim}{x} | d(\underset{\sim}{x},U)<1\}] \leq 1.$$

concluímos, pelo teorema de convergência dominada que

$$E[I_U(\underset{\sim}{X}(\alpha t))] = \int_U I(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) = \lim_k \int \phi_k(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \leq \lim_k \left\{ \int \phi_k^{\alpha}(\alpha \underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \right\}^{1/\alpha} =$$

$$= \left\{ \int_U I^{\alpha}(\alpha \underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \right\}^{1/\alpha} = E^{1/\alpha}[I_U^{\alpha}(\underset{\sim}{X}(\alpha t))].$$

Agora, se U é um conjunto superior aberto consideramos para cada $k \in \mathbb{N}$ o conjunto $U_k = \{\underset{\sim}{t} | d(\underset{\sim}{t},\bar{U}) \geq \frac{1}{k}\}$. Aqui $\bar{U}$ representa o conjunto complementar de U. U_k é um conjunto superior fechado pois é a imagem inversa do conjunto fechado $[\frac{1}{k}, +\infty)$ pela aplicação uniformemente contínua

$$d: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underset{\sim}{t} \longmapsto d(\underset{\sim}{t},\bar{U})$$

e se $\underset{\sim}{t} > \underset{\sim}{s}$ com $\underset{\sim}{s} \in U_k$, $\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{s}+\underset{\sim}{r}$ com $\underset{\sim}{r} > \underset{\sim}{0}$ e

$$d(\underset{\sim}{t},\bar{U}) = d(\underset{\sim}{s}+r,\bar{U}) = \inf_{\underset{\sim}{u}\in\bar{U}} d(\underset{\sim}{s}+\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{u}) = \inf_{\underset{\sim}{u}\in\bar{U}} d(\underset{\sim}{s},\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{r}) \geq$$

$$\geq \inf_{\underset{\sim}{u}\in\bar{U}} d(\underset{\sim}{s},\underset{\sim}{u}) = d(\underset{\sim}{s},\bar{U}) \geq \frac{1}{k}$$

é evidente que $U_k \subset U$ para todo k e $I_{U_k} \uparrow I_U$ e concluímos pelo teorema da convergência monotônica que

$$P[T_U > t] = P[\underset{\sim}{X}(t) \in U] = \int I_U(\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x}) = \lim_k \int I_{U_k}(\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x}) \leq$$

$$\leq \lim_k \left\{\int I^{\alpha}_{U_k}(\alpha\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} = \left\{\int I^{\alpha}_{U}(\alpha\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} =$$

$$= P^{1/\alpha}[\underset{\sim}{X}(\alpha t) \in U] = P^{1/}[T_U > \alpha t]. \qquad \square$$

O teorema seguinte estende a Proposição 3.

TEOREMA 9 - Um processo estocástico não negativo, não crescente e contínuo à direita $\{\underset{\sim}{X}(t), t \geq 0\}$ é NBU multidimensional se e somente se para $s \geq 0$ e $t \geq 0$

$$\underset{\sim}{X}(s+t) \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{X}'(s) \wedge \underset{\sim}{X}'(t)$$

onde $\underset{\sim}{X}'(s)$ e $\underset{\sim}{X}'(t)$ são vetores aleatórios independentes com as mesmas distribuições de $\underset{\sim}{X}(s)$ e $\underset{\sim}{X}(t)$, respectivamente.

PROVA - A condição necessária e suficiente segue de que

$$P[\underset{\sim}{X}(s+t)\in U] = p[T_U>s+t] \leq P[T_U>s]P[T_U>t] = P[\underset{\sim}{X}(s)\in U]P[\underset{\sim}{X}(t)\in U] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}'(s)\in U]P[\underset{\sim}{X}'(t)\in U] = P[\underset{\sim}{X}'(s)\in U \text{ e } \underset{\sim}{X}'(t)\in U] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}'(s)\wedge\underset{\sim}{X}'(t)\in U] \qquad \square$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades de processos IFRA e NBU multidimensionais. Para seqüências de processos estocásticos, indicaremos por $\xrightarrow{\mathcal{D}_1}$ o modo de convergência caracterizado pela convergência fraca das leis de dimensão 1 da seqüência.

PROPOSIÇÃO 10 - A classe dos processos estocásticos IFRA (NBU) multidimensionais é fechada por convergência $\xrightarrow{\mathcal{D}_1}$.

PROVA - Se $\{\underset{\sim}{X}_k(t);t\geq 0\}$, $k\in\mathbb{N}$, são processos IFRA multidimensionais convergindo no sentido de $\mathcal{D}_1$ para $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$, então para qualquer função contínua não negativa, não decrescente e limitada h, temos

$$E[h(\underset{\sim}{X}(t))] = \lim_k E[h(\underset{\sim}{X}_k(t)] \leq \lim_k E^{1/\alpha}[h^\alpha(\underset{\sim}{X}_k(\alpha t))] =$$

$$= E^{1/\alpha}[h^\alpha(\underset{\sim}{X}(\alpha t))],$$

de sorte que $\{\underset{\sim}{X}(t),t\geq 0\}$ é IFRA multidimensional.

Se $\{\underset{\sim}{X}_k(t),t\geq 0\}$, $k\in\mathbb{N}$, são processos NBU multidimensionais convergindo no sentido de $\xrightarrow{\mathcal{D}_1}$ para $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ então

$$\underset{\sim}{X}_k(t+s) \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{X}_k'(t)\wedge\underset{\sim}{X}'(s), \qquad t,s\geq 0$$

onde $\underset{\sim}{X}_k'(t)$ e $\underset{\sim}{X}_k'(s)$ são vetores aleatórios independentes e com as mesmas distribuições de $\underset{\sim}{X}_k(t)$ e $\underset{\sim}{X}_k(s)$, respectivamente.

Na demonstração do teorema 8 vimos que dado um conjunto superior fechado V, existe uma seqüência de funções monótonas crescentes e contínuas $\{\phi_m;m\geq 1\}$ tal que

$$\phi_m \downarrow I_V \quad \text{e} \quad \int \phi_1(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) < 1.$$

Pelo Teorema da Convergência dominada concluímos que

$$E[I_V(\underset{\sim}{X}(t+s))] = \lim_m E[\phi_m(\underset{\sim}{X}(t+s))] = \lim_m \lim_k E[\phi_m(\underset{\sim}{X}_k(t+s))] \leq$$

$$\leq \lim_m \lim_k E[\phi_m(\underset{\sim}{X}_k'(t)\wedge \underset{\sim}{X}_k'(s))] =$$

$$= \lim_m E[\phi_m(\underset{\sim}{X}'(t)\ \underset{\sim}{X}'(s)] = E[I_V(\underset{\sim}{X}'(t)\wedge \underset{\sim}{X}'(s))],$$

onde $\underset{\sim}{X}'(t)$ e $\underset{\sim}{X}'(s)$ são vetores aleatórios independentes com as mesmas distribuições de $\underset{\sim}{X}(t)$ e $\underset{\sim}{X}(s)$. Vimos ainda na demonstração do Teorema 8, que dado um conjunto superior aberto U, os conjuntos superiores fechados $V_k = \{\underset{\sim}{t}\,|\,d(\underset{\sim}{t},\bar{U})\geq \frac{1}{k}\}$ são tais que $I_{V_k} \uparrow I_U$. Portanto, segue do teorema da convergência monotônica e da desigualdade acima que,

$$P[\underset{\sim}{X}(t+s)\in U] = E[I_U(\underset{\sim}{X}(t+s)] = \lim_k E[I_{V_k}(\underset{\sim}{X}(t+s))] \leq$$

$$\leq \lim_k E[I_{V_k}(\underset{\sim}{X}'(t)\wedge \underset{\sim}{X}'(s))] =$$

$$= E[I_U(\underset{\sim}{X}'(t)\wedge \underset{\sim}{X}'(s))] = P[\underset{\sim}{X}'(t)\wedge \underset{\sim}{X}'(s)\in U],$$

isto é, $X(\underset{\sim}{t+s}) \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{X}'(t)\wedge \underset{\sim}{X}'(s)$ com $\underset{\sim}{X}'(t)$ e $\underset{\sim}{X}'(s)$ independentes e com as mesmas distribuições de $\underset{\sim}{X}(t)$ e $\underset{\sim}{X}(s)$. O resultado então segue do Teorema 7. □

PROPOSIÇÃO 11 - Se ϕ: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa monótona crescente e contínua à direita e $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ é um processo IFRA (NBU) multidimensional então $\{\phi(\underset{\sim}{X}(t));t\geq 0\}$ é um processo IFRA (NBU).

PROVA - Obviamente o processo $\{\phi(\underset{\sim}{X}(t));t\geq 0\}$ é não negativo, não crescente e contínuo à direita. Portanto se considerarmos para cada real positivo a, a variável aleatória

$$T_a = \inf\{t\geq 0 | \phi(\underset{\sim}{X}(t))\leq a\}$$

teremos, para $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ IFRA multidimensional:

$$P[T_a>t] = P[\phi(\underset{\sim}{X}(t))>a] = E[I_{\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}}(\underset{\sim}{X}(t))] \leq$$

$$\leq E^{1/\alpha}[I^{\alpha}_{\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}}(\underset{\sim}{X}(\alpha t))] =$$

$$= P[^{1/\alpha}\phi(X(\alpha t))>a] = P^{1/\alpha}[T_a>\alpha t],$$

o que prova que T_a tem distribuição IFRA. Logo $\{\phi(\underset{\sim}{X}(t)\geq 0\}$ é IFRA. Se $\{X(t);t\geq 0\}$ e NBU multidimensional,

$$P[T_a>t+s] = P[\phi(\underset{\sim}{X}(t+s))>a] = P[\underset{\sim}{X}(t+s)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}] \leq$$

$$\leq P[\underset{\sim}{X}'(t)\wedge\underset{\sim}{X}'(s)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}'(t)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}]P[\underset{\sim}{X}'(s)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}(t)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}]P[\underset{\sim}{X}(s)\in\{\underset{\sim}{x}|\phi(\underset{\sim}{x})>a\}] =$$

$$= P[\phi(\underset{\sim}{X}(t))>a]P[\phi(\underset{\sim}{X}(s))>a] =$$

$$= P[T_a>t]P[T_a>s]$$

e T_a tem distribuição NBU. □

PROPOSIÇÃO 12 - Se $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ e $\{\underset{\sim}{Y}(t);t\geq 0\}$ são processos IFRA (NBU) multidimensionais tais que para cada $t \geq 0$, $\underset{\sim}{X}(t)$ e $\underset{\sim}{Y}(t)$ são independentes, então $\{\underset{\sim}{Z}(t);t\geq 0\}$ definido por

$$\underset{\sim}{Z}(t) = (\underset{\sim}{X}(t),\underset{\sim}{Y}(t)) = (X_1(t),\ldots,X_n(t),Y_1(t),\ldots,Y_m(t)),$$

é um processo IFRA (NBU) multidimensional.

PROVA - Se denotamos por $F_t(\underset{\sim}{x})$ e $G_t(\underset{\sim}{x})$ as distribuições de $\underset{\sim}{X}(t)$ e $\underset{\sim}{Y}(t)$ respectivamente, para toda função h não negativa, não decrescente e Borel mensurável, teremos, no caso IFRA,

$$E[h(\underset{\sim}{X}(t),\underset{\sim}{Y}(t))] = \iint h(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})dF_t(\underset{\sim}{x})dG_t(\underset{\sim}{y}) \leq$$

$$\leq \int\left\{\int h^{\alpha}(\alpha\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})dF_t(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} dG_t(\underset{\sim}{y}) =$$

$$= \left\{\iint h^{\alpha}(\alpha\underset{\sim}{x},\alpha\underset{\sim}{y})dF_t(\underset{\sim}{x})dG_t(\underset{\sim}{y})\right\}^{1/\alpha} =$$

$$= E^{1/\alpha}[h^{\alpha}(\underset{\sim}{X}(\alpha t),\underset{\sim}{Y}(\alpha t))].$$

Conseqüentemente $\{\underset{\sim}{Z}(t);t\geq 0\}$ é IFRA multidimensional.

No caso NBU, dado um conjunto superior U de $\mathbb{R}^{n+m}$ denote por U_1 e U_2 as projeções de U nas n primeiras e m últimas coordenadas, respectivamente. Assim,

$$P[(\underset{\sim}{X}(t+s),\underset{\sim}{Y}(t+s))\in U] = P[(\underset{\sim}{X}(t+s),\underset{\sim}{Y}(t+s)\in U_1\times U_2] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}(t+s)\in U_1]P[\underset{\sim}{Y}(t+s)\in U_2] \leq$$

$$\leq P[\underset{\sim}{X}'(t)\wedge\underset{\sim}{X}'(s)\in U_1] \times$$

$$\times P[\underset{\sim}{Y}'(t)\wedge\underset{\sim}{Y}'(s)\in U_2] =$$

$$= P[(\underset{\sim}{X}'(t)\wedge\underset{\sim}{X}'(s),\underset{\sim}{Y}'(t)\wedge\underset{\sim}{Y}'(s))\in U_1\times U_2] =$$

$$= P[(\underset{\sim}{X}'(t),\underset{\sim}{Y}'(t))\wedge(\underset{\sim}{X}'(s),\underset{\sim}{Y}'(s))\in U]$$

e $(\underset{\sim}{X}'(t),\underset{\sim}{Y}'(t))$ e $(\underset{\sim}{X}'(s),\underset{\sim}{Y}'(s))$ são independentes e com as mesmas distribuições de $(\underset{\sim}{X}(t),\underset{\sim}{Y}(t))$ e $(\underset{\sim}{X}(s),\underset{\sim}{Y}(s))$, respectivamente. A desigualdade acima prova o resultado desejado em virtude do Teorema 7.

$\square$

PROPOSIÇÃO 13 - Se $\psi_1,\ldots,\psi_m$ forem funções mensuráveis, não negativas e não decrescentes e $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ é um processo IFRA (NBU) multidimensional então $\{\psi(\underset{\sim}{X}(t));t\geq 0\}$ definido por

$$\psi(\underset{\sim}{X}(t)) = (\psi_1(\underset{\sim}{X}(t),\ldots,\psi_m(\underset{\sim}{X}(t))), \qquad t\geq 0$$

é um processo IFRA (NBU) multidimensional.

PROVA - Como para toda função h mensurável não negativa e não decrescente, $h\circ\psi$ é também mensurável não negativa e não decrescente, temos:

$$E[h(\psi(\underset{\sim}{X}(t)))] = \int h(\psi(\underset{\sim}{x}))dF(\underset{\sim}{x}) \leq \left\{\int h^\alpha(\psi(\alpha\underset{\sim}{x})dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} =$$

$$= E^{1/\alpha}[h^\alpha(\psi(\underset{\sim}{X}(\alpha t)))]$$

e o resultado segue, no caso IFRA, do Teorema 5.

No caso NBU, para todo domínio superior U, tem-se:

$$P[\psi(\underset{\sim}{X}(s+t))\in U] = P[\underset{\sim}{X}(s+t)\in\psi^{-1}(U)] \le$$

$$\le P[\underset{\sim}{X}'(t)\wedge\underset{\sim}{X}(s)\in\psi^{-1}(U)] =$$

$$= P[\underset{\sim}{X}'(t)\in\psi^{-1}(U)]P[\underset{\sim}{X}'(s)\in\psi^{-1}(U)] =$$

$$= P[\psi(\underset{\sim}{X}'(t))\in U]P[\psi(\underset{\sim}{X}'(s))\in U] =$$

$$= P[\psi(\underset{\sim}{X}'(t))\wedge\psi(\underset{\sim}{X}'(s))\in U].$$

se $\underset{\sim}{X}'(t)$ e $\underset{\sim}{X}(s)$ são independentes e com mesmas distribuições de $\underset{\sim}{X}(t)$ e $\underset{\sim}{X}(s)$, respectivamente. Assim, o resultado segue do Teorema 7.

□

Algumas conseqüências imediatas da Proposição 11 são:

i) Se $\{\underset{\sim}{X}(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t));t\ge 0\}$ for um processo IFRA (NBU) multidimensional então, $\{X_i(t);t\ge 0\}$, $1\le i\le n$, são processos IFRA (NBU);

ii) Se $\{\underset{\sim}{X}(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t));t\ge 0\}$ for um processo IFRA (NBU) multidimensional e $C_1,\ldots,C_m$, subconjuntos não vazios de $C=\{1,\ldots,n\}$, então

$$\left\{\underset{\sim}{Z}(t) = \left(\sum_{i\in C_1} X_i(t),\ldots, \sum_{i\in C_m} X_i(t)\right), \qquad t\ge 0\right\}$$

e

$$\underset{\sim}{W}(t) = \left\{\left(\min_{i\in C_1} X_1(t),\ldots, \min_{i\in C_m} X_i(t)\right), \qquad t\ge 0\right\}$$

são processos IFRA (NBU) multidimensionais.

2.2 - CONSTRUÇÃO DE PROCESSOS IFRA MULTIDIMENSIONAIS

Nesta seção analizaremos o relacionamento dos processos IFRA multidimensionais com a noção de distribuição IFRA multivariada (MIFRA). Para isso introduziremos as noções de MIFRA(1), sugerida por Block & Savits (1980), MIFRA(2) sugerida por Esary & Marshall (1975), que estendem a noção univariada de distribuições IFRA.

A noção de distribuição MIFRA(1) originou-se de uma caracterização para tais distribuições IFRA no caso univariado obtida por Block & Savits (1976).

DEFINIÇÃO 1 - Seja $\underset{\sim}{T} = (T_1,\dots,T_n)$ um vetor aleatório não negativo com distribuição conjunta $F(\cdot)$. Dizemos que $\underset{\sim}{T} = (T_1,\dots,T_n)$ tem uma distribuição MIFRA(1) se e somente se:

$$E[h(\underset{\sim}{T})] = \int h(\underset{\sim}{x})\,dF(\underset{\sim}{x}) \le \left\{\int h^{\alpha}(\underset{\sim}{x}/\alpha)\,dF(\underset{\sim}{x})\right\}^{1/\alpha} =$$

$$= E^{1/\alpha}[h^{\alpha}(\underset{\sim}{T}/\alpha)]$$

para toda constante α, $0 < \alpha \le 1$, e toda função h mensurável não decrescente e não negativa.

Da mesma maneira que na seção anterior basta verificar a desigualdade da Definição 1 para funções contínuas, ao invés das mensuráveis.

Listamos a seguir algumas propriedades das distribuições MIFRA(1) cujas demonstrações são inteiramente semelhantes àquelas feitas para os processos IFRA multidimensionais.

PROPRIEDADE 1 - Se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ possui distribuição MIFRA(1) e $\psi_1, \ldots, \psi_m$ são funções mensuráveis, não decrescentes, tais que

$$\psi_i\left(\frac{x_1}{\alpha}, \ldots, \frac{x_n}{\alpha}\right) \le \frac{1}{\alpha}\psi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \qquad 0 < \alpha \le 1$$

entao $(\psi_1(\underset{\sim}{T}), \ldots, \psi_m(\underset{\sim}{T}))$ tem distribuição MIFRA(1).

PROPRIEDADE 2 - A classe das distribuições MIFRA(1) é fechada por convergência fraca.

PROPRIEDADE 3 - Se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ e $\underset{\sim}{S} = (S_1, \ldots, S_m)$ tem distribuição MIFRA(1) e são independentes, então $(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{S}) = (T_1, \ldots, T_n, S_1, \ldots, S_m)$ tem distribuição MIFRA(1).

Como conseqüência imediata desses resultados, tem-se:

COROLÁRIO 4 - a) Se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ tiver distribuição MIFRA(1) então, quaisquer de suas marginais tem distribuição MIFRA(1);

b) Se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ tiver distribuição MIFRA(1) e $C_1, \ldots, C_m$ são subconjuntos não vazios de $C = \{1, \ldots, n\}$, então

$$\left(\sum_{i \in C_1} T_i, \ldots, \sum_{i \in C_m} T_i\right) \quad \text{e} \quad \left(\min_{i \in C_1} T_i, \ldots, \min_{i \in C_m} T_i\right)$$

têm distribuição MIFRA(1).

c) Se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ tiver distribuição MIFRA(1) e $\tau_1, \ldots, \tau_m$ são tempos de vida de sistemas monótonos binários coerentes de ordem n, então $(\tau_1(\underset{\sim}{T}), \ldots, \tau_m(\underset{\sim}{T}))$ tem distribuição MIFRA(1).

É importante notar que o resultado do Corolário 4c) nos dá uma versão mais forte do Teorema do fecho IFRA desenvolvido em Barlow & Proschan (1975).

Outro conceito de distribuição IFRA multivariada foi sugerido por Esary & Marshall (1975).

DEFINIÇÃO 5 - Um vetor aleatório $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ tem distribuição MIFRA(2) se e somente se qualquer estrutura monótona binária coerente de ordem n cujas componentes tenham tempos de vida $T_1, \ldots, T_n$, tenha tempo de vida $\tau(\underset{\sim}{T})$ com distribuição IFRA.

Observe que pelo Corolário 4c), se $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ tem distribuição MIFRA(1), então, $\underset{\sim}{T}$ tem distribuição MIFRA(2).

Não é difícil verificar que dado uma variável aleatória não negativa T o processo estocástico

$$\{X(t) = I_{(t,+\infty)}(T); t \geq 0\}$$

é tal que

$$T_a = \inf\{t \geq 0 \mid X(t) \leq a\} = \begin{cases} 0 & \text{se } a \geq 1 \\ T & \text{se } 0 \leq a < 1, \end{cases}$$

e concluímos que $\{X(t); t \geq 0\}$ é um processo IFRA se e somente se a variável aleatória T tem distribuição IFRA.

No caso multivariado, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 6 - Seja $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ um valor aleatório não negativo e para cada $t \geq 0$ seja $\underset{\sim}{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t)$, onde $X_i(t) = I_{(t,+\infty)}(T_i)$, $i=1, \ldots, n$. Então $\{\underset{\sim}{X}(t); t \geq 0\}$ um processo IFRA multidimensional se e somente se $\underset{\sim}{T}$ tem distribuição MIFRA(2).

PROVA - Note que se ϕ for uma estrutura monótona binária coerente com tempo de vida $\tau(\underset{\sim}{T})$, então

$$P[\tau(\underset{\sim}{T})>t] = E[\phi(X_1(t),\ldots,X_n(t))] \leq$$

$$\leq E^{1/\alpha}[\phi^{\alpha}(X_1(\alpha t),\ldots,X_n(\alpha t))] =$$

$$= P^{1/\alpha}[\tau(\underset{\sim}{T})>\alpha t],$$

isto é, $\tau(\underset{\sim}{T})$ tem distribuição IFRA, e temos provado que a condição é necessária.

Para mostrar que a condição é suficiente observe que para qualquer domínio superior U em $\mathbb{R}^n$ a estrutura monótona binária coerente

$$\phi_U(\underset{\sim}{x}) = 1_U(\underset{\sim}{x}), \qquad \underset{\sim}{x}\in\{0,1\}^n,$$

tem tempo de vida $\tau_U(\underset{\sim}{T})$ com distribuição IFRA, por hipótese. Mas como

$$\tau_U = \inf\{t\geq 0|\phi(\underset{\sim}{X}(t))=0\} = \inf\{t\geq 0|\underset{\sim}{X}(t)\notin U\}$$

o resultado segue em vista da Definiçao 2.4. $\square$

EXEMPLO 7 - Considere o vetor aleatório (S,T) cuja distribuição conjunta tem densidade

$$f(s,t) = \begin{cases} 30 & \text{se } \frac{3}{8} < s < \frac{1}{2};\ \frac{3}{4} < t < 1 \\ 1 & \text{se } \frac{1}{8} < s < \frac{3}{8};\ \frac{1}{2} < t < \frac{2}{3} \\ 2 & \text{se } 0 < s < \frac{1}{8};\ \frac{2}{3} < t < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bar{F}_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ se } t \le \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} - \frac{1}{4}t \text{ se } \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} - \frac{15}{4}t \text{ se } \frac{3}{4} < t \le 1 \\ 0 \text{ se } t \ge 1 \end{cases}$$

e

$$r(t) = \frac{f_T(t)}{\bar{F}_T(t)} = \begin{cases} \frac{2}{9-2t} \text{ se } \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ \frac{1}{1-t} \text{ se } \frac{3}{4} < t \le 1 \end{cases}$$

Como neste caso $P(S \le T) = 1$, o processo $\{\underset{\sim}{X}(t); t \ge 0\}$ definido por

$$\underset{\sim}{X}(t) = (1_{(t,+\infty)}(S),\ 1_{(t,+\infty)}(T), \qquad t \ge 0,$$

é IFRA. Pelo Teorema 6 (S,T) tem distribuição MIFRA(2) mas é interessante notar que (S,T) não tem distribuição MIFRA(1), já que $S \wedge \frac{T}{4}$ não tem distribuição IFRA. Este exemplo mostra que a condição MIFRA(2) no Teorema 6 não pode ser substituida por MIFRA(1) sem que se perca a necessidade.

A noção de MIFRA(2) pode ser utilizada ainda para obter uma caracterização alternativa de processos IFRA multidimensionais. Para isso vamos introduzir o conceito de domínio superior fundamental.

DEFINIÇÃO 8 - A um conjunto superior aberto de $\mathbb{R}^n$ da forma $\{\underset{\sim}{y}\ \underset{\sim}{y} > \underset{\sim}{x}\}$ com $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$, fixado, denominamos domínio quadrante superior. À uma união finita de domínios quadrantes superiores de-

A variável aleatória S tem densidade, função de sobrevivência dadas respectivamente por

$$f_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 0 < s \le \frac{3}{8} \\ \frac{15}{2} & \frac{3}{8} < s \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\bar{F}_S(s) = \begin{cases} 1 \text{ se } s \le 0 \\ 1 - \frac{1}{6}s \text{ se } 0 < s \le \frac{3}{8} \\ \frac{15}{4} - \frac{15}{2}s \text{ se } \frac{3}{8} < s \le \frac{1}{2} \\ 0 \text{ se } s > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, sua taxa de falha

$$r(s) = \frac{f_S(s)}{\bar{F}_S(s)} = \begin{cases} \frac{1}{6-s} \text{ se } 0 < s \le \frac{3}{8} \\ \frac{30}{15-30s} \text{ se } \frac{3}{8} < s \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

é crescente, e conseqüentemente S tem distribuição IFRA. A variável aleatória T tem também distribuição IFRA, pois sua taxa de falha é também crescente. Sua densidade e função de sobrevivência e a taxa de falha são dadas respectivamente por:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ se } \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ \frac{15}{4} \text{ se } \frac{3}{4} < t \le 1 \end{cases}$$

nominaresmos domínio superior fundamental. Note que dado um domínio superior qualquer U em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar para cada $k \in \mathbb{N}$ domínio quadrante superiores da forma:

$$U_k(s_1,\ldots,s_{k-1}) = \{\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{x} > (2^{-k}s_1,\ldots,2^{-k}s_{k-1},a_k(s_1,\ldots,s_{k-1}))\}$$

$$\text{onde } a_k(s_1,\ldots,s_{k-1}) = \inf|t|(2^{-k}s_1,\ldots,2^{-k}s_{k-1},t) \in U\}$$

e portanto as uniões

$$U_k = \bigcup_{1 \le s_1,\ldots,s_{k-1} \le k2^k} U_k(s_1,\ldots,s_{k-1}),$$

que são domínios superiores fundamentais.

Não é difícil provar que $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$.

TEOREMA 9 - Seja $\{\underset{\sim}{X}(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t));t\geq 0\}$ um processo não negativo, não crescente e contínuo à direita. Então $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$ é um processo IFRA multidimensional se e somente se toda subcoleção finita ordenada de $\{T_{ij},\ 1\le i\le n,\ j \in \mathbb{R}\}$, onde

$$T_{ij} = \inf\{t\geq 0 \mid X_i(t) \le j\}$$

tiver distribuição MIFRA(2).

PROVA - Observe que para qualquer domínio superior U podemos conseguir domínios superiores fundamentais U_k, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Como a classe das distribuições IFRA é fechada por convergência fraca e $T_{U_k} \longrightarrow T_U$ fracamente, concluímos que $\{\underset{\sim}{X}(t);t\geq 0\}$

é um processo IFRA multidimensional se e somente se T_U tem distribuição IFRA, para todo domínio superior fundamental. Mas, neste caso

$$U = \bigcup_{s=1}^{p} U_s$$

onde para cada s,

$$U_s = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underset{\sim}{x} > \underset{\sim}{j}_s\}$$

para algum $\underset{\sim}{j}_s = (j_{1s}, \ldots, j_{ns}) \in \mathbb{R}^n$ fixado.

Assim,

$$T_U = \inf\{t \geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t) \notin U\} = \inf\{t \geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t) \notin \bigcup_{s=1}^{p} U_s\} =$$

$$= \inf\{t \geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t) \notin U_1, \ldots, \underset{\sim}{X}(t) \notin U_p\} = \max_{1 \leq s \leq p} T_{U_s},$$

e se $T_{ij_{is}} = \inf\{t \geq 0 \mid X_i(t) \leq j_{is}\}$, temos ainda

$$T_{U_s} = \inf\{t \geq 0 \mid \underset{\sim}{X}(t) \notin U_k(s)\} =$$

$$= \inf\{t \geq 0 \mid X_1(t) \leq j_{1s} \text{ ou}, \ldots, \text{ou } X_n(t) \leq j_{ns}\}$$

$$= \min_{1 \leq i \leq n} T_{ij_{is}}$$

e portanto

$$T_U = \max_{1 \leq s \leq p} \min_{1 \leq i \leq n} T_{ij_{is}}.$$

Como esta última igualdade representa o tempo de vida de uma estrutura monótona binária coerente, o teorema segue. □

No que segue apresentaremos uma construção de processos IFRA a partir das distribuições MIFRA(1).

TEOREMA 10 - Seja $\phi(t,x_1,\ldots,x_n), t \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$, uma função Borel mensurável, não negativa, não decrescente em $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ para cada t fixado, não crescente em t para cada $\underset{\sim}{x}$ fixado, contínua à direita e satisfazendo a desigualdade:

$$\phi\left(t;\frac{x_1}{\alpha},\ldots,\frac{x_n}{\alpha}\right) \leq \phi(\alpha t, x_1,\ldots,x_n),$$

para toda constante α, $0 \leq \alpha < 1$.

Se $\underset{\sim}{T} = (T_1,\ldots,T_n)$ tiver distribuição MIFRA(1), então

$$\{X(t) = \phi(t,T_1,\ldots,T_n); t \geq 0\}$$

é um processo IFRA.

PROVA - Como para toda função h, não negativa, não decrescente e mensurável $h \circ \phi$ é mensurável, temos:

$$E[h(X(t))] = E[h(\phi(t;T_1,\ldots,T_n))] \leq E^{1/\alpha}[h^\alpha(\phi(t;\frac{T_1}{\alpha},\ldots,\frac{T_n}{\alpha}))] \leq$$

$$\leq E^{1/\alpha}[h^\alpha(\phi(\alpha t;T_1,\ldots,T_n)] = E^{1/\alpha}[h^\alpha(X(\phi t))]$$ □

EXEMPLO 11 - Uma função que satisfaz as hipótese do teorema dada por

$$\phi(t;x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq t < x_{(1)} \\ n-k & \text{se } x_{(k)} \leq t < x_{(k+1)} \qquad k=1,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{se } t \geq x_{(n)} \end{cases}$$

onde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ é uma nova reordenação de $x_1,\ldots,x_n$. Assim, se (S,T) for um vetor aleatório bidimensional com distribuição MIFRA(1).

O processo $\{X(t);t\geq 0\}$ definido por

$$X(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < \min(S,T) \\ 1 & \text{se } \min(S,T) \leq t < \text{máx}(S,T) \\ 0 & \text{se } t \geq \text{máx}(S,T) \end{cases}$$

é um processo IFRA.

No exemplo abaixo mostramos que a construção feita não caracteriza distribuições MIFRA(1).

EXEMPLO 12 - Considere o vetor aleatório bidimensional (S,T) do Exemplo 2.7. Vimos que S e T tem distribuição IFRA e que $P(S\leq T) = 1$. Assim com a mesma função ϕ do exemplo anterior, teremos

$$X(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < S \\ 1 & \text{se } S < t \leq T \\ 0 & \text{se } T \leq t \end{cases}$$

e

$$T_a = \begin{cases} 0 & \text{se } a \geq 2 \\ S & \text{se } 1 \leq a < 2 \\ T & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Concluímos então que $\{X(t);t\geq 0\}$ é um processo IFRA, sem que (S,T) seja MIFRA(1) como vimos no Exemplo 2.7.

2.3 - OBSERVAÇÕES FINAIS

Uma questão de interesse, em vista dos aspectos desenvolvidos na secção anterior, diz respeito à construção de processos NBU multidimensionais e sua relação com as classes de distribuições NBU multivariadas. Neste contexto a bibliografia ainda é escassa ou mesmo inexistente. Ghosh & Ebrahimi (1980) e El-Neweihi et al (1980) introduziram algumas classes de distribuições NBU multivariada que em nosso trabalho futuro passaremos a examinar à luz da definição de processo NBU multidimensional que introduzimos neste trabalho.

Uma outra linha de processos associados a noções de envelhecimento comuns em teoria da confiabilidade é apresentada por Arjas (1979) que trabalha com processos adaptados. A extensao das idéias de Arjas para definir processos IFRA e NBU continuam também inexploradas.

APÊNDICE A

DEFINIÇÃO A1 - Seja $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Δ é um conjunto superior sempre que $\underset{\sim}{y} > \underset{\sim}{z} \in \Delta$ implicar $\underset{\sim}{y} \in \Delta$.

DEFINIÇÃO A2 - Se $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ são vetores aleatórios de dimensão n, dizemos que $\underset{\sim}{X}$ é estocasticamente menor que $\underset{\sim}{Y}$, e escrevemos $\underset{\sim}{X} \overset{st}{\leq} \underset{\sim}{Y}$ se $P(\underset{\sim}{X} \in \Delta) \leq P(\underset{\sim}{Y} \in \Delta)$ para qualquer conjunto superior $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.

TEOREMA A3 - Seja $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ um vetor aleatório. As seguintes expressões são equivalentes:

a) $\text{cov}(f(\underset{\sim}{T}), g(\underset{\sim}{T})) \geq 0$ para quaisquer funções reais crescentes, f e g;

b) $\text{cov}(\Gamma(\underset{\sim}{T}), \Theta(\underset{\sim}{T})) \geq 0$ para quaisquer funções binárias crescentes, Γ e Θ;

c) $P[\underset{\sim}{T} \in \Delta_1 \cap \Delta_2] \geq P[\underset{\sim}{T} \in \Delta_1] P[\underset{\sim}{T} \in \Delta_2]$ para quaisquer conjuntos superiores Δ_1 e Δ_2 em $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO A4 - Dizemos que as variáveis aleatórias $T_1, \ldots, T_n$ são associadas se o vetor aleatório $\underset{\sim}{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ satisfizer a) ou b) ou c) do Teorema A3.

Algumas propriedades importantes da noção de associação introduzida acima são as seguintes:

A5 - Qualquer subconjunto de um conjunto de variáveis aleatórias associadas são variáveis aleatórias associadas.

A6 - Funções mensuráveis crescentes de variáveis aleatórias associadas são variáveis aleatórias associadas.

A7 - A reunião de dois conjuntos independentes de variáveis aleatórias associadas foram um conjunto de variáveis aleatórias associadas.

TEOREMA A8 - Se $X_1,\ldots,X_n$ são variáveis aleatórias binárias associadas, então

$$P\left[\prod_{i=1}^{n} X_i=1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P[X_1=1]$$

$$P\left[\coprod_{i=1}^{n} X_i=1\right] \leq \coprod_{i=1}^{n} P[X_1=1].$$

Maiores detalhes sobre o conceito de associação pode ser encontrado em Barlow & Proschan (1975) e nas referencias ali contidas.

APÊNDICE B (NOTAÇÕES)

B1 - Se x e y são dois números reais, denotamos

$$x \wedge y = \min(x,y), \quad x \vee y = \text{máx}(x,y) \quad \text{e}$$

$$x \amalg y = x \cdot y, \quad x \coprod y = 1-(1-x)(1-y).$$

Se $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ são dois vetores de $\mathbb{R}^n$,

$$\underset{\sim}{x} \wedge \underset{\sim}{y} = (x_1 \wedge y_1,\ldots,x_n \wedge y_n), \quad \underset{\sim}{x} \vee \underset{\sim}{y} = (x_1 \vee y_1,\ldots,x_n \vee y_n) \quad \text{e}$$

$$\underset{\sim}{x} \amalg \underset{\sim}{y} = (x_1 \amalg y_1,\ldots,x_n \amalg y_n), \quad \underset{\sim}{x} \coprod \underset{\sim}{y} = (x_1 \coprod y_1,\ldots,x_n \coprod y_n)$$

B2 - Se X e Y são duas variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade denotamos

$$X \wedge Y = \min(X,Y), \quad X \vee Y = \text{máx}(X,Y)$$

Se $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ e $\underset{\sim}{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ são dois vetores aleatórios definidos em um mesmo espaço de probabilidade

$$\underset{\sim}{X} \wedge \underset{\sim}{Y} = (X_1 \wedge Y_1,\ldots,X_n \wedge Y_n) \text{ e } \underset{\sim}{X} \vee \underset{\sim}{Y} = (X_1 \vee Y_1,\ldots,X_n \vee Y_n).$$

B3 - Se $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ escrevemos

$$(j_i \underset{\sim}{x}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},j,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

B4 - Se $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, são vetores de $\mathbb{R}^n$, então:

$\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{y}$ se $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \ldots, n$

$\underset{\sim}{x} < \underset{\sim}{y}$ se $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \ldots, n$, e existe j, $1 \leq j \leq n$, tal que $x_j < y_j$

$\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{y}$ se existe j, $1 \leq j \leq n$ tal que $x_j \neq y_j$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - BARLOW,R.E. & PROSCHAN,F., *Statistical Theory of Reliability and Lif Testing*, Holt,Rinehart & Wiston, New York, 1975.

[2] - BARLOW,R.E. & WU,A., Coherent Systems with Multistate Components, *Mathematics of Operations Research, Vol.3, nº4*, Nov. 1978.

[3] - BLOCK,H.W & SAVITS,T.H., The IFRA Closure Problem, *The Annals of Probability, Vol.4, nº6*, (1976), 1.030-1.032.

[4] - BLOCK,H.W. & SAVITS,T.H., Multidimensional IFRA Processes,Research Report, 1979, (preprint).

[5] - BLOCK,H.W. & SAVITS,T.H., Multivariate Increasing Failure Rate Average Distributions, *The Annals of Probability, Vol. 8, nº 4*, 1980, 793-801.

[6] - BLOCK,H.W. & SAVITS,T.H., A Decomposition for Multistate Monotone Systems, Research Report, 1981, (preprint).

[7] - BLUMENTAL & GETOAR, *Markov Processes and Potential Theory*,Academic Press, 1968.

[8] - EL NEWEIHI,E.,PROSCHAN,F. & SETHURAMAN, Multistate Coherent Systems, *J.Appl.Prob. 15*, (1978), 675-688.

[9] - EL NEWEIHI,E.,PROSCHAN,F. & SETHURAMAN, A Multivariate New Better than used Class derived from a Shoch Model, Research Report, 1980, (preprint).

[10] - GHOSH,M. & EBRAHIMI,N., Multivariate NBU and NBUE Distributions, Research Report, 1980, (preprint).

[11] - GRIFFITH,W.S., Multistate Reliability Models, *J.Appl. Prob. Vol.17, nº 3*, (1980), 735-745

[12] - ROSS,S.M., Multivalued State Component Systems, *Ann. Prob., Vol.7, nº 2*, (1979), 379-383.