COMPARAÇÃO DE ALGUNS TESTES COM HIPÓTESES ALTERNATIVAS ORDENADAS EM MODELOS DE BLOCOS COMPLETOS CASUALIZADOS

Paulo Reinhardt Santana

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA

OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: PROF.DR. WILTON DE OLIVEIRA BUSSAB

- SÃO PAULO, NOVEMBRO DE 1981 -

Em memória do Elias

E pra Betinha

Amigo e orientador, Wilton nos acolheu, sempre solícito. Josemar passou um pente fino nas demonstrações. Caio, Carlinhos e Gê deram muita força. Severo é o culpado pela nossa conversão em estatístico. Andjel deu bons palpites. Marta fez o programa e enfrentou as duras batalhas com o computador. Verinha, com competência (e paciência) de anjo, datilografou.
A todos agradeço.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

TESTES COM HIPÓTESES ALTERNATIVAS ORDENADAS PARA BLOCOS COMPLETOS CASUALIZADOS.. 1

1.1 - Situação Experimental e Hipóteses.................. 1
1.2 - Descrição dos Testes.............................. 4
1.3 - Objetivos do Estudo............................... 11

CAPÍTULO II

DESCRIÇÃO DOS TESTES E COMPARAÇÃO COM BASE NA EFICIÊNCIA ASSINTÓTICA.. 14

2.1 - Eficiência Relativa Assintótica de Pitman............ 14
2.2 - Um Teste da Teoria Normal............................ 18
2.3 - O Teste de Page....................................... 27
2.4 - O Teste de Hollander.................................. 36
2.5 - O Teste de Sen.. 48
2.6 - Comparação com Base na ERA............................ 55

CAPÍTULO III

COMPARAÇÕES EM PEQUENAS AMOSTRAS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO...... 61

3.1 - Aproximação à Distribuição Normal..................... 61
3.2 - Comparação Quanto ao Poder em Pequenas Amostras...... 68

CAPÍTULO IV

Conclusões.. 81

APÊNDICES

Estatísticas "U".. 86
Simulação... 88A

BIBLIOGRAFIA.. 89

CAPÍTULO I

TESTES COM HIPÓTESES ALTERNATIVAS ORDENADAS PARA BLOCOS COMPLETOS CASUALIZADOS

1.1. Situação Experimental e Hipóteses

Suponha que desejamos verificar se três tipos diferentes de fornos produzem tijolos com resistências iguais, a partir de amostras de argila bem homogêneas, mas que vieram de quatro localidades diferentes. Uma forma possível de resolver o problema seria fabricar quatro tijolos em cada forno, cada um com uma qualidade de argila, e medir a resistência X de cada tijolo. Os resultados poderiam ser representados pelo modelo

$$X_{ij} = b_i+\mu_j+e_{ij}, \quad i=1,2,3,4; \quad j=1,2,3, \qquad (1)$$

onde

b_i é uma componente da resistência devida à qualidade da argila, um parâmetro que pode ser fixo ou aleatório, e que não nos interessa diretamente, sendo chamado às vezes "parâmetro de distúrbio" (nuisence parameter);

μ_j é a componente da resistência devida ao tipo de forno;

e_{ij} são erros independentes associados às mensurações, com função de distribuição contínua e comum F, com densidade f.

Estamos supondo, em nosso modelo, que não existe interação entre qualidade de argila e tipo de forno.

Nosso problema consiste então em testar a hipótese nula

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

contra a alternativa (2)

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j$$

para algum par (i,j).

A solução chamada clássica, bastante conhecida, exposta em, por exemplo, Cochran e Snedecor (1967), fixa a restrição

$$e_{ij} \sim N(0, \sigma^2),\ \forall (i,j),$$

e usa a estatística F. A solução não paramétrica não impõe qualquer condição à função distribuição de e_{ij}, além de continuidade, e a mais conhecida é a de Friedman (1937).

Imagine agora o leitor uma situação experimental semelhante à primeira descrita, em que o primeiro forno é aquecido à lenha, o segundo a carvão e o terceiro a óleo diesel, e somos informados que, se os efeitos dos fornos forem diferentes, isto é, se H_0 (2) não for verdadeira, só podemos esperar

$$H_1: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3,$$

onde ou $\mu_1 < \mu_2$, ou $\mu_2 < \mu_3$, ou ambas. Este é um exemplo de uma situação prática muito comum, em que o pesquisador tem informação de ordem em que os efeitos estão, se eles diferirem. Isto ocorre, por exemplo, quando os tratamentos são concentrações diferentes de uma droga, tempos de exposição, maior ou menor severidade de uma doença, etc.

No presente trabalho iremos apresentar e estudar as propriedades de algumas soluções para este tipo de problema. Em termos gerais, estudaremos procedimentos para testar

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

contra (3)

$$H_1: \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_k$$

onde pelo menos uma desigualdade é estrita, quando a variável de observação pode ser representada por um modelo do tipo (1), isto é, quando temos um planejamento por blocos completos casualizados.

É claro que a H_1 em (3) não perde generalidade, pois sempre podemos escrevê-la assim, através de uma recolocação de índices. Esta H_1 pode ser chamada "completamente ordenada", e todos os testes estudados neste nosso trabalho suporão a situação (3). Aliás, Hollander (1967) mostra que alguns destes testes são consistentes para hipóteses mais gerais, do tipo

$$H_0: F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

contra (4)

$$H_1: F_1(x) \geqslant F_2(x) \geqslant \ldots \geqslant F_k(x)$$

sendo pelo menos uma desigualdade estrita para algum valor de x. A H_1 em (4) pode ser expressa por "as variáveis estão estocasticamente ordenadas" isto é, não é necessário assumir, como nosso modelo (1) assume, que todos os e_{ij} tenham a mesma distribuição F. Em outras palavras, nesta H_1(4), apenas supomos que as funções de distribuição associadas às observações do j-ésimo tratamento são iguais a F_j, podendo variar entre tratamentos.

Às vezes o pesquisador pode ter uma informação parcial à respeito da ordem dos μ_j, se elas diferirem. Pode ter, por exemplo,

$$H_a: \mu_1 \leqslant [\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{k-1}] \leqslant \mu_k \qquad (5)$$

isto é, "o efeito do primeiro tratamento é menor do que todos os outros, e/ou o do k-ésimo é maior"; ou ainda mais gerais, do tipo

$$H_a: \mu_1 \text{ está entre os primeiros r efeitos } \quad (r<k). \qquad (6)$$

Testes com boas propriedades para as "parcialmente ordenadas" H_a (5) e (6), (e que portanto podem ser aplicados em (3)), serão apenas descritos na seção seguinte que apresenta rapidamente os testes desenvolvidos para testar (3). No Capítulo II os testes escolhidos para este estudo serão apresentados mais detalhadamente.

1.2. Descrição dos Testes

Há uma grande quantidade de testes para (3), e podemos dividí-los em duas categorias, segundo o contexto teórico em que foram originalmente desenvolvidos:

Categoria I - testes desenvolvidos sob a Teoria Clássica ou Normal.

Categoria II - testes desenvolvidos sob a Teoria Não-paramétrica.

Cada categoria pode por sua vez ser subdividida em três sub-categorias, segundo a forma de se derivar a estatística do teste. Note-se que esta classificação é quanto a origem do teste; quase todos eles podem ser, e têm sido, estendidos à situações diferentes das originais. As seis sub-categorias estão descritas rapidamente abaixo.

Categoria I - Teoria Normal

I-A) Adaptação de Testes Existentes

É possível uma simples adaptação do teste de igualdade de k proporções ou de k médias, descrita por Chassam (1960) e (1962). Suponha que desejamos testar igualdade de k médias contra a (mais específica que (3)) $H_a: \mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_k$, e ocorre de fato $\bar{x}_1<\bar{x}_2<\ldots<\bar{x}_k$. Seja F a estatística do teste e $\alpha(F)=P\ (F>F_0)$, onde F_0 é o valor da estatística calculada com base nas observações $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\ldots\bar{x}_k$. Então o nível descritivo do teste será

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha(F)}{k!}$$

Logo devemos rejeitar H_0 a um nível α escolhido a priori se $\alpha \geqslant \hat{\alpha}$.

Isto se segue da consideração de que, sob H_0, as k! possíveis permutações de colunas de observações são igualmente prováveis (se os n_i forem todos iguais, o que é assumido no nosso modelo do tipo (1)).

Bradley (1968) adapta esta técnica para o contexto não-paramétrico e nota que se k>3,

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha(F)}{k!} \leqslant \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} < 0,05$$

e, portanto, podemos testar igualdade contra $H_a: \mu_1<\mu_2\ldots<\mu_k$ para k=4,5,6... a um nível $\alpha \leqslant 0,05$ apenas com base em $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$, sem a informação dada pela estatística F. A maior utilidade da técnica, é, pois, para as H_a do tipo (6) e (5). A adaptação para estes casos também está descrita por Bradley.

I-B) Testes com Estatísticas Baseadas em Amostras Reunidas

Os testes desta sub-categoria foram desenvolvidos por Chacko (1963) e generalizados em vários sentidos por Shorack (1967). A estatística do teste é baseada em estimadores usados em regressão isotônica. Para uma exposição detalhada, veja por exemplo, Barlow et al. (1972).

Seja a situação (3). Ao ordenarmos as k médias amostrais, é possível que $\bar{x}_i > \bar{x}_{i+1}$, isto é, duas médias estão na ordem "errada". Reuna a i-ésima e a (i+1)-ésima amostra, e obtenha

$$\bar{x}_{[i,i+1]} = \frac{\bar{x}_i + \bar{x}_{i+1}}{2}$$

(sob o modelo do tipo (1)).

O valor desta média é comparado com $\bar{x}_{i-1}$ e $\bar{x}_{i+2}$. Então:

a) Se $\bar{x}_{[i,i+1]} > \bar{x}_{i+2}$, os três valores x_i, x_{i+1} e x_{i+2} são substituídos por $\bar{x}_{[i,i+2]}$, a média das três amostras reunidas.

b) Se $\bar{x}_{[i,i+1]} < \bar{x}_{i-1}$, os três valores $\bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i$ e $\bar{x}_{i+1}$ são substituídos por $x_{[i-1,i+1]}$, a média das três amostras combinadas.

c) Se $\bar{x}_{i+2} < \bar{x}_{[i,i+1]} < x_{i-1}$ então é feito o procedimento a ou b.

d) do contrário, os valores são deixados inalterados.

As novas quantidades são comparadas com as adjacentes e assim por diante. O processo termina quando um conjunto não decrescente de médias é obtido. Então para cada i o estimador da média populacional μ_i^* é o valor da média final na amostra combinada para a qual a média $\bar{x}_i$ contribuiu.

O valor da estatística do teste é obtido, após esta com binação de amostras, pelo processo usual. Para o contexto não-paramétrico, a extensão é simples: basta usar o procedimento de Friedman, e substituir, na exposição acima, as médias amostrais $\bar{x}_i$ pelas médias de postos $\bar{r}_i$.

Embora este procedimento seja bastante versátil, podendo ser também usado para postos alinhados (aligned ranks, veja Lehmann(1964)),e para hipóteses do tipo (5), (mas não do tipo (6)), Lehmann e D'Abrera (1975) pág.236,consideram ainda muito deficientes os estudos sob a distribuição de estatística para emprego prático. Veja uma solução, ainda que parcial, em Parsons (1979).

I-C) Contrastes

Incluem-se nesta categoria os testes baseados em estimadores de contrastes. Veja, por exemplo, Hogg (1965). As estatísticas deste tipo de testes são da forma

$$T = \sum_j c_j \hat{\mu}_j \tag{7}$$

e H_0 em (3) é rejeitada se $T \geq c$ e c é tal que $P(T \geq c) = \alpha$. Os c_j são escolhidos de forma a otimizar a sensibilidade do teste. São dados os c_j ótimos para o caso em que não são conhecidos os espaçamentos entre os efeitos μ_j, em Abelson e Tukey (1963).

No contexto clássico (7) toma a forma

$$T = \sum_j c_j \bar{x}_j$$

e sua extensão para o contexto não paramétrico é

$$T' = \sum_j c_j \bar{r}_j ,$$

sendo $\bar{\bar{x}}_j$ e $\bar{\bar{r}}_j$ definidos como anteriormente. (T' é equivalente à estatística de Page, dada em (8).

Categoria II - Teoria Não-paramétrica

II-A) Testes Baseados em Comparações Dentro dos Blocos

i) Page (1963) propôs para testar (3), que se ordenasse dentro de cada bloco as observações, de 1 a k. Sendo R_j a soma dos postos do j-ésimo tratamento, a estatística de Page é

$$L = \sum_{j=1}^{k} jR_j \qquad (8)$$

e H_0 é rejeitada para grandes valores de L.

Uma estatística equivalente a (8) é obtida da seguinte maneira: seja ρ_i o coeficiente de correlação de Spearman entre os postos das observações do i-ésimo bloco e os postos previstos por H_a. A estatística equivalente a (8) é

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \qquad (9)$$

ii) Jonckheere (1954a) propõe estatística semelhante a (9), baseada no coeficiente de correlação τ de Kendall. Sua estatística é

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \qquad (10)$$

onde τ_i é o análogo a ρ_i em (9).

iii) Pirie e Hollander (1972) propõe que se ordene as observações dentro do bloco, e se substitua a i-ésima observação pela esperança da i-ésima estatística de ordem de uma amostra casual de tamanho k de uma Normal padrão, D_j^k. Sua estatística é

$$W = \sum_{j=1}^{k} jD_j^k \qquad (11)$$

e H_0 é rejeitada para grandes valores de W.

iv) Tukey (1957) propõe uma estatística equivalente, segundo Pirie e Hollander (1975), a

$$K = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \tag{12}$$

onde

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{1i} \leqslant X_{2i} \leqslant \ldots \leqslant X_{ki} \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

e H_0 é rejeitada para grandes valores de K.

II-B) <u>Testes Baseados em Comparações Entre Blocos</u>

i) Hollander (1967) propôs que se comparassem dois a dois os tratamentos (h,j), com h<j, e que se obtivessem, assim, $\frac{k(k-1)}{2}$ estatísticas de postos com sinal de Wilcoxon:

$$\omega_{hj} = \sum_{i=1}^{n} \psi_{hj}^{(i)} R_{hj}^{(i)}, \quad h<j \tag{13}$$

onde $R_{hj}^{(i)}$ é o posto de $|X_{ih}-X_{ij}|$ entre os n blocos, e

$$\psi_{hj}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{ih} < X_{ij} \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Sua estatística é

$$Y = \sum_{h<j} \omega_{hj}, \tag{14}$$

e rejeitamos H_0 para altos valores de Y.

ii) Doksum (1967) soma os valores ω_{ij} em (13) de outra maneira, e obtém:

$$Y' = \sum_{h<j} (\omega_{h.} - \omega_{.j}), \tag{15}$$

e rejeita H_0 se observar valores altos de Y'.

II-C) Testes Baseados em Postos Alinhados (aligned ranks)

Hodges e Lehman (1962) observaram que os testes que apenas utilizam informação de dentro do bloco são pouco eficientes porque não utilizam as comparações entre blocos. Eles sugeriram o uso de postos para a amostra toda combinada, isto é, a reunião das N=nk observações, após alinhamento, ou seja, após se subtrair das observações uma estimativa do efeito do bloco.

Sen (1969) apresenta uma classe de testes em que, após as N observações terem sido alinhadas, são substituídas por constantes que refletem a ordem de observações, $E_{N\alpha}$, $\alpha=1,2,...,N$. Sua estatística é baseada nas k médias.

$$S_{Nj} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{N} E_{N\alpha} Z_N^{(j)}, \quad j=1,2,...k \tag{16}$$

$$\text{onde } Z_N^{(j)} = \begin{cases} 1 \text{ se a } \alpha\text{-ésima observação após alinhamento pertence ao} \\ \quad j\text{-ésimo tratamento} \\ 0 \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

Sen estuda as propriedades dos testes definidos por duas maneiras distintas de se escolher as constantes $E_{N\alpha}$:

1) Os $E_{N\alpha}$ são os postos das observações alinhadas (divididos por N+1)

2) Cada $E_{N\alpha}$ é a esperança da α-ésima estatística de ordem de N observações independentes da Normal padrão.

Além dos testes descritos acima, informamos ao leitor que Hettmansperger (1975) dá uma generalização para o caso em que há mais de uma observação por casela. Para o caso do modelo com um fator sem blocos de observações, isto é, para o modelo

$$X_{ij} = \mu_j + e_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots nj; \\ j=1,2,\dots k, \end{matrix}$$

o leitor encontrará soluções no contexto da Teoria Normal nos já citados Hogg e Chacko, e, no contexto não-paramétrico, em Jonckheere (1954b) e Conover (1967).

1.3. Objetivos do Estudo

Como se viu na seção anterior, é grande o número de testes para as hipóteses (3). Para o estatístico aplicado fica porém a questão: que teste escolher em vista de uma situação determinada? Existem alguns estudos comparativos dos testes propostos, como por exemplo, Pirie (1974), mas, além de incompletos em vários sentidos, estes estudos se limitam a pesquisar qualidades assintóticas dos testes. Segundo Bradley (1968), pag. 58, a eficiência assintótica de Pitman (veja, a definição na seção 1 do capítulo II), é uma medida razoável de eficiência, mas não devemos esquecer que esta medida é calculada quando o número de observações tende ao infinito e quando a hipótese alternativa é virtualmente igual à hipótese nula, duas condições totalmente artificiais do ponto de vista experimental. É necessário portanto um estudo do comportamento dos testes quanto ao poder a partir de pequenas amostras. Tais estudos, mas limitados aos testes expostos na seção anterior em IB e IC, encontram-se em Barlow et al. (1972).

Por outro lado, estes estudos mostram que o poder dos testes pode variar segundo a configuração dos espaçamentos entre os μ_i. Embora nem sempre o experimentador tenha uma idéia desses espaçamentos, é possível que em certas situações ele possa sugerir que, se os tratamentos diferiram, eles diferem por quantidades iguais ou diferentes. Essa informação pode ser relevante na escolha do teste.

Ainda Barlow et al. observam que os testes em IIB e IIC são apenas assintoticamente independentes da distribuição dos e_{ij}, e que faltam estudos em pequenas amostras sobre a adequação da aproximação da estatística à distribuição assintótica. Isto também, pode influenciar na determinação do teste apropriado, já que ou não existem ou são incompletas as tabelas da distribuição exata destes testes.

Em resumo, neste trabalho pretendemos realizar três estudos:

1) Como alguns testes se comparam em relação à eficiência assintótica de Pitman.

2) A adequação da aproximação assintótica dos testes cujas estatísticas são dependentes da distribuição dos e_{ij}.

3) Como os testes se comparam em relação ao poder, no caso de pequenas amostras, se os e_{ij} têm distribuição Normal, Exponencial ou Uniforme, de acordo com três tipos de configuração dos espaçamentos dos efeitos: igualmente espaçados, com espaços parcialmente desiguais e totalmente desiguais.

Pela extensão que tomariam as comparações acima para todos os testes, este estudo será limitado a um teste da Teoria Normal e três testes, um de cada sub-categoria de Teoria Não-Paramétrica, devido a menor quantidade de estudos (e a um maior interesse pessoal) nesta área. Da Teoria Normal escolhemos o teste T da sub-categoria IC, por seu bom desempenho quando H_a é completamente ordenada, e com pesos c_j igualmente espaçados, para termos o teste ótimo (Barlow, pág. 190) na configuração dos μ_j também igualmente espaçados. Da sub-categoria IIA escolhemos o teste L de Page por suas boas qualidades assintóticas (é mais eficiente que o de Jonckheere e o de Tukey), e apenas ligeiramente menos eficiente que o de Hollander em situações algo específicas e por ser o correlato não paramétrico do teste T escolhido. Da sub-categoria IIB escolhemos o teste Y de Hollander por ser equivalente assintóticamente ao de Doksum, mas de tratamento mais simples. Da sub-categoria IIC escolhemos a versão do teste S de Sen em que as constantes $E_{N\alpha}$, pelas quais são substituídas as observações alinhadas, são os postos dessas observações (divididos por N+1), isto é, a versão 1 da sub-categoria IIIC, que tem piores qualidades assintóticas do que a versão 2, mas que é mais factível do ponto de vista prático, uma vez que são muito deficientes as tabelas necessárias para se empregar a versão 2. (Veja Teichroew (1965)).

O primeiro estudo, sobre a eficiência assintótica dos testes, de cunho teórico, será desenvolvido no Capítulo II.

Os estudos sobre poder sob diferentes distribuições e espaçamentos dos efeitos, assim como da adequação da aproximação serão feitos com base em simulação, e serão apresentados no Capítulo III. No Capítulo IV pretendemos sintetizar os resultados gerais dos estudos.

- o -

CAPÍTULO II

DESCRIÇÃO DOS TESTES E COMPARAÇÃO COM BASE NA EFICIÊNCIA ASSINTÓTICA

O objetivo deste capítulo é apresentar detalhadamente e comparar os testes T da Teoria Normal, L de Page, Y de Hollander e S se Sen, em termos da Eficiência Relativa Assintótica de Pitman.

Na primeira seção é definida esta medida de eficiência e mencionamos um teorema que facilita seu cálculo. Os testes serão apresentados nas quatro seções seguintes, cada uma dividida em três sub-seções:

1 - *Procedimento*, onde se vê como realizar o teste;

2 - *Comentários*, onde algumas propriedades são discutidas, e

3 - *Propriedades Assintóticas*, onde são verificadas as condições para o emprego do teorema da primeira seção e avaliada a *eficácia* do teste.

Na sexta seção é desenvolvido o estudo comparativo dos testes com relação às suas eficiências assintóticas.

2.1. Eficiência Relativa Assintótica de Pitman

O conceito de eficiência é bem conhecido em estimação, onde eficiência de um estimador T_1, em relação à T_2, ambos não viesados, é definida como $Var(T_2)/Var(T_1)$. O significado prático des ta definição é que, ao menos para amostras grandes, sabemos quantas observações terão de ser acrescentadas, a um dado conjunto inicial de observações, para que uma estimativa feita com o estimador menos eficiente seja tão acurada quanto a feita com o estimador mais eficiente. Este aspecto é usualmente tomado como base para se definir a eficiência de um teste em relação a outros. Quando se diz que a eficiência de um teste T_1 em relação a T_2 é e, isto significa que T_1 baseado em n_1 observações é *equivalente* à T_2 baseado em $n_2=en_1$ observações. As diversas formas de se conceituar a *equivalência* acima dão origem às diferentes definições de eficiência relativa encontradas na literatura. Para uma comparação de várias definições de eficiência, e numerosas referências, o leitor deverá consultar Govindarajulu (1976).

O índice mais comum de eficiência é a Eficiência Relativa Assintótica de Pitman, para o qual equivalência significa que, para os dois testes, o valor limite das funções de poder é igual, sob uma mesma classe de hipóteses alternativas convenientemente escolhida. Assim, uniformizando-se para os dois testes outras condições relevantes, a Eficiência de Pitman é o limite da razão entre os tamanhos de amostra que tornam dois testes equivalentes,no sentido acima. Mais formalmente,

Definição 2.1.1 - Sejam $\{S_{n_i}\}$ e $\{T_{n_i'}\}$ duas sequências de testes, baseados respectivamente em n_i e n_i' observações, de tamanho α, para $H_0:\theta=\theta_0$, contra uma classe de alternativas $H_{1_i}:\theta=\theta_i$ tal que $\lim_{i\to\infty}\theta_i=\theta_0$. Sejam $\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)$ e $\beta_{T_{n_i'}}(\theta_i)$ os valores do poder de S_{n_i} e $T_{n_i'}$ no ponto θ_i. Sejam $\{n_i\}$ e $\{n_i'\}$ sequências de inteiros positivos tais que

$$\alpha < \lim_{i\to\infty} \beta_{S_{n_i}}(\theta_i) = \lim_{i\to\infty} \beta_{T_{n_i'}}(\theta_i) < 1. \tag{1}$$

Então a Eficiência Relativa Assintótica (ERA) de S em relação a T é

$$\text{ERA}(S,T) = \lim_{i\to\infty} \frac{n_i'}{n_i}, \tag{2}$$

se o limite é o mesmo para todas as sequências $\{n_i\}$ e $\{n_i'\}$ e independente da sequência $\{\theta_i\}$.

Nesta definição, o propósito de se aproximar o valor do parâmetro especificado em H_1, θ_i, do valor em H_0, θ_0, é evitar que o poder dos dois testes se aproxime de 1, já que a maioria dos testes de interesse prático são consistentes, e, para grandes amostras, o poder de um teste consistente para uma alternativa fixada é virtualmente 1. As comparações com base na ERA são portanto de natureza local, porque elas correspondem a avaliar o desempenho relativo dos testes quando $\theta_i \to \theta_0$.

A classe de alternativas mais comumente adotada, isto é, a maneira pela qual $\theta_i \to \theta_0$, é chamada "alternativas de translação de Pitman", dadas por

$$H_{1_i}: \theta = \theta_i = \theta_n = \theta_0 + c/n^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

onde c é uma constante. Adotaremos aqui esta sequência de alternativas.

Mencionamos a seguir um teorema de Pitman, generalizado por Noether (1955), que permite a avaliação da ERA mais facilmente do que se recorrêssemos à definição 2.1.1. O leitor encontrará provas deste teorema na maioria dos livros de Estatística não-paramétrica de nível médio, por exemplo, em Fraser (1957), pg. 273.

Teorema 2.1.2 - Sejam T_{1n} e T_{2n} duas estatísticas, baseadas em n observações, para testar $H_0:\theta=\theta_0$ contra $H_{1n}:\theta=\theta_n$, onde θ_n é dado em (3). Sejam as esperanças e variâncias de T_{in} dadas por

$$E_\theta(T_{in}) \quad e \quad V_\theta(T_{in}), \quad i=1,2.$$

Suponha que estão satisfeitas as condições:

A) $\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{in})\Big|_{\theta=\theta_0} > 0, \quad i=1,2.$

B) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{in})\Big|_{\theta=\theta_0}}{\left[nV_{\theta_0}(T_{in})\right]^{\frac{1}{2}}} = c>0 \qquad i=1,2.$$

C) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{in})\Big|_{\theta=\theta_n}}{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{in})\Big|_{\theta=\theta_0}} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{V_{\theta_n}(T_{in})}{V_{\theta_0}(T_{in})}\right]^{\frac{1}{2}} = 1, \qquad i=1,2.$$

D) a distribuição de T_{in}, correspondendo ao valor do parâmetro $\theta_n=\theta_0+c/n^{1/2}$, com $c\geq 0$, é assintoticamente normal com média $E_{\theta_n}(T_{in})$ e variância $V_{\theta_n}(T_{in})$, $i=1,2$.

Então a Eficiência Relativa Assintótitca de T_1 em relação à T_2 é dada por:

$$\mathrm{ERA}(T_1,T_2) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{1n})\Big|_{\theta=\theta_0}}{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{2n})\Big|_{\theta=\theta_0}}\right]^2 \frac{V_{\theta_0}(T_{2n})}{V_{\theta_0}(T_{1n})}. \tag{4}$$

Definição 2.1.3 - Com a notação do Teorema 2.1.2, chamaremos

$$R_{in}^2 = \left[\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T_{in})\Big|_{\theta=\theta_0}\right]^2 / V_{\theta_0}(T_{in}) \tag{5}$$

a *eficácia* do teste definido por T_{in} para $H_0:\theta=\theta_0$.

Observamos então que, satisfeitas as condições do Teorema 2.1.2 e segundo a definição 2.1.3, a eficiência de um teste T_1 em relação a T_2 é dada por

$$\mathrm{ERA}(T_1,T_2) = \lim_{n\to\infty} [R_{1n}/R_{2n}]^2. \tag{6}$$

2.2. Um Teste da Teoria Normal

Comecemos definindo nosso modelo e hipóteses.

Sejam X_{ij}, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,\ldots,k$, nk variáveis aleatórias independentes, com X_{ij} tendo função distribuição contínua $P(X_{ij}\leq x) = F_j(x-b_i)$ onde b_i é o efeito do i-ésimo bloco. Nesta e nas próximas três seções descreveremos testes para a hipótese nula

$$H_0: F_j(x) \equiv F(x) \text{ (desconhecida) } j=1,2,\ldots,k, \tag{7}$$

que são sensíveis à hipótese alternativa

$$H_1: F_1(x) \geq F_2(x) \geq \ldots \geq F_k(x) \tag{8}$$

onde para pelo menos um j, $j=1,2,...,k-1$, vale a desigualdade estrita $F_j(x)>F_{j+1}(x)$ para algum valor de x.

Para as sub-seções denominadas "Propriedades Assintóticas" serão consideradas as alternativas de Pitman (ver (3)):

$$H_{1n}:F_{ij}^{(n)} = F(x-b_i-(j-1)\theta), \quad \begin{array}{l} i=1,...,n, \\ j=1,...,k, \\ \theta>0. \end{array} \tag{9}$$

onde $\theta=\theta_n=c/n^{1/2}$.

Apenas para se construir o teste desta seção, suporemos que as nk observações sejam dadas por

$$X_{ij} = b_i+(j-1)\theta+e_{ij}, \quad \theta>0, \tag{10}$$

onde os e_{ij} são i.i.d. com distribuição $N(0,\sigma^2)$.

2.2.1 - Procedimento

Para se testar $H_0(7)$ contra $H_1(8)$ use a

a) *Estatística:* $$T = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} \tag{11}$$

onde $$\hat{\theta} = \frac{6\sum\sum_{ij}(2j-k-1)X_{ij}}{nk(k-1)(k+1)}. \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}} = \frac{12s^2}{nk(k-1)(k+1)}, \text{ e} \tag{13}$$

$$s^2 = \frac{\sum\sum_{ij}(X_{ij}-\hat{b}_i-(j-1)\hat{\theta})^2}{n(k-1)-1}, \tag{14}$$

$$\hat{b}_i = \frac{\sum_j X_{ij}}{k} - \left(\frac{k-1}{2}\right)\hat{\theta}. \qquad (15)$$

b) *Regra de decisão:* para um nível de significância α,

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } T \geqslant t(\alpha, n(k-1)-1);$$

$$\text{não rejeitar } H_0 \text{ se } T < t(\alpha, n(k-1)-1),$$

onde $t(\alpha, n(k-1)-1)$ é o $(1-\alpha)$ésimo quantil da distribuição de Student com $n(k-1)-1$ graus de liberdade.

c) *Aproximação para amostras grandes:* calcular T como em (11),

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } T \geqslant z_\alpha,$$

$$\text{não rejeitar } H_0 \text{ se } T < z_\alpha,$$

onde z_α é o $(1-\alpha)$-ésimo quantil da $N(0,1)$. A adequação desta aproximação para alguns valores pequenos de n, e/ou para ausência de normalidade dos e_{ij} será vista no Capítulo III.

2.2.2 - Comentários

a) Mostraremos que T é a estatística da razão de verossimilhança para testar (7), dado o modelo (10).

A função de verossimilhança é

$$L(x_{11},\ldots x_{1k}, x_{21}\ldots x_{2k},\ldots, x_{n1}\ldots x_{nk}; b_1,\ldots b_n; \theta, \sigma^2) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{nk} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_j \sum_i (x_{ij} - b_i - (j-1)\theta)^2\}.$$

Sob H_0, o espaço dos parâmetros é $\omega = \{-\infty < b_i < \infty, i=1,2,\ldots n, \theta=0, \sigma^2>0\}$.

Sob H_1, o espaço é $\Omega=\{-\infty<b_i<\infty, i=1,2,\ldots n, \theta>0, \sigma^2>0\}$. Tomando-se logaritmos de L, derivando-se em relação à b_i, $i=1,2,\ldots n$, θ e σ^2, e resolvendo-se os dois sistemas de equações, teremos os estimadores de máxima verossimilhança (e também de mínimos quadrados, dada a normalidade dos e_{ij}), sob H_0:

$$\hat{\theta}_\omega=0; \quad b_{i_\omega} = \frac{\sum_j X_{ij}}{k}; \quad \hat{\sigma}^2_\omega = \frac{1}{nk}\sum_{ij}\sum(x_{ij}-\hat{b}_{i_\omega})^2,$$

e sob H_1,

$$\hat{\theta}_\Omega = \frac{6\sum_{ij}\sum(2_j-k-1)x_{ij}}{nk(k-1)(k+1)}; \quad \hat{b}_{i_\Omega} = \frac{\sum_j X_{ij}}{k} - \frac{(k-1)}{2}\hat{\theta}_\Omega;$$

$$\hat{\sigma}^2_\Omega = \frac{1}{nk}\sum_{ij}\sum(x_{ij}-\hat{b}_{i_\Omega}-(j-1)\hat{\theta}_\Omega)^2.$$

Substituindo-se os valores em L pelas suas estimativas, teremos os máximos sob H_0 e H_1, e a razão de verossimilhança é

$$\lambda_1 = \frac{\max_\omega L}{\max_\Omega L} = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\omega}\right)^{nk}\exp\{-\frac{nk}{2}\}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_\Omega}\right)^{-nk}\left[\exp\{-\frac{nk}{2}\}\right]^{-1}$$

ou

$\lambda_1 = \left(\frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_\omega}\right)^{nk/2}$. Se fizermos $\lambda_1^{2/nk} = \frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_\omega}$, rejeitaremos H_0 para pequenos valores de $\lambda_2 = \frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_\omega}$, isto é, $\lambda_2<c_1$, onde c_1 é uma certa constante.

Mas

$$\sum_{ij}\sum (x_{ij}-\hat{b}_{i_\omega})^2 =$$

$$\sum_{ij}\sum \left[x_{ij}-\hat{b}_{i_\Omega}-(j-1)\hat{\theta}_\Omega+b_{i_\Omega}+(j-1)\hat{\theta}_\Omega-b_{i_\omega}\right]^2 =$$

$$\sum_{ij}\sum \left[(x_{ij}-\hat{b}_{i_\Omega}-(j-1)\hat{\theta}_\Omega) + \frac{1}{2}\,\theta_\Omega(2j-k-1)\right]^2 =$$

$$\sum_{ij}\sum (x_{ij}-\hat{b}_{i_\Omega}-(j-1)\hat{\theta}_\Omega)^2-\sum_{ij}\sum \frac{\hat{\theta}^2}{4}(2j-k-1)^2,$$

porque a soma dos produtos cruzados é nula.

Temos então:

$$\lambda_2 = \frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_\omega} = \frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_\Omega + \dfrac{n\hat{\theta}^2 k(k+1)(k-1)}{12}} < c_1$$

se e somente se

$$1 + \frac{nk(k+1)(k-1)\hat{\theta}^2}{12\hat{\sigma}^2_\Omega} > \frac{1}{c_1} = c_2. \qquad (16)$$

Da expressão de $\hat{\theta}_\Omega$ podemos obter sua variância

$$V(\hat{\theta}_\Omega) = \frac{12V(X_{ij})}{nk(k-1)(k+1)} = \frac{12\sigma^2}{nk(k-1)(k+1)},$$

e um estimador não viesado desta variância é

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\theta}} = \frac{12s^2}{nk(k-1)(k+1)},$$

onde s^2, definido em (14), é a variação dentro dos grupos dividida pelo número total de observações, nk, menos n+1 restrições.

Como s^2 pode ser escrito

$$s^2 = \frac{nk\sigma_\Omega^2}{n(k-1)-1},$$

podemos escrever

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2 = \frac{12\sigma_\Omega^2}{c_3 nk(k-1)(k+1)} \tag{17}$$

onde $c_3 = \frac{n(k-1)-1}{nk}$.

Escrevendo-se a desigualdade (16) com emprego de (17), temos

$$T^2 = \frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2} > (c_2-1)c_3 = c_4,$$

e, finalmente, lembramos que impusemos $0<\theta<\infty$ e normalidade de X_{ij}, rejeitamos H_0 se

$$T = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}} > t(\alpha, n(k-1)-1).$$

b) A distribuição da estatística T é mais facilmente verificada como sendo a de Student pelo argumento que se segue: considere as $\binom{k}{2}$ diferenças $\bar{X}_j - \bar{X}_i$ com $i<j$ e sua soma

$$T' = \sum_{i<j}(\bar{X}_j - \bar{X}_i) = \sum_j (2j-k-1)\bar{X}_j.$$

Tanto sob H_0 quanto sob H_a T' é normalmente distribuída, com média

$$E(T') = \sum_j (2j-k-1)\mu_j$$

onde $\mu_j = \frac{\Sigma b_i}{n} + (j-1)\theta$ é a média do i-ésimo tratamento. Note que, sob H_0, $E(T')=0$. A variância é dada por

$$V(T') = \sum_j (2j-k-1)^2 \frac{\sigma^2}{n},$$

e se σ^2 é desconhecida, a estatística apropriada é

$$T = \frac{n^{1/2}\sum_j (2j-k-1)\bar{X}_j}{\left[\sum_j (2j-k-1)^2\right]^{1/2} s}, \tag{18}$$

onde s é a estimativa de σ a partir da variação dentro dos grupos. T é então o quociente de uma Normal padrão por raiz de qui-quadrado independente dividida pelo número de graus de liberdade. É fácil mostrar que (18) é a mesma estatística dada em (11).

2.2.3 - Propriedades Assintóticas

No que se segue, mostraremos em a,b,c e d, que T satisfaz respectivamente às condições A,B,C e D do Teorema 2.1.2, sob a sequência de alternativas (9).

a) Do Teorema de Slutsky (veja Randles e Wolfe (1979) pg.72) e da bem conhecida convergência (forte) de s a σ, segue que a distribuição de T em (18) converge para a distribuição limite de

$$T'' = \frac{n^{1/2}\sum_j (2j-k-1)\bar{X}_j}{\left[\sum_j (2j-k-1)^2\right]^{1/2} \sigma}.$$

Do comentário b da sub-seção anterior, sabemos que, $\forall_n$, $T''\sim N(\mu,1)$, onde $\mu=\sum_j(2j-k-1)\mu_j$.

O Lema abaixo, que é corolário de um Teorema provado em Chung (1974), pg. 95, será utilizado a seguir.

<u>Lema 2.2.1</u> - Se $\{X_n\}$ converge em distribuição para X, e se

$$\sup_n\{E(X_n^2)\} = M<\infty,$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)<\infty, \quad e$$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n^2) = E(X^2)<\infty.$$

Fazendo, no lema acima, $X_n=T_n=T$ (18), notando que T_n tem distribuição de Student com $\nu=n(k-1)-1$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade μ, temos

$$E(T_n^2) = E[F_{1,\nu}(u^2)] = \frac{\nu(1+u^2)}{\nu-2},$$

onde $F_{1,\nu}(u^2)$ representa uma variável com distribuição F com 1 e ν graus de liberdade e parâmetro de não centralidade μ^2.

Como

$$\sup \frac{\nu(1+\mu^2)}{\nu-2} = \sup \left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)(1+\mu^2)\leqslant 1+\mu^2 = M<\infty$$

para $\nu\geqslant 3$, os momentos de primeira e segunda ordem de T(18) convergem aos de T'' e justificam-se as aproximações abaixo.

$$E_\theta(T) \simeq E_\theta(T'') = \frac{n^{1/2} \sum_j (2j-k-1) E_\theta(\bar{X}_j)}{\left[\sum_j (2j-k-1)^2\right]^{1/2} \sigma}$$

Notando que $E_\theta(\bar{X}_j) = \frac{\Sigma b_i}{n} + (j-1)\theta$, tomando a derivada em relação a θ e após algumas simplificações, veremos que

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T) = \left(\frac{nk(k+1)(k-1)}{12\sigma^2}\right)^{1/2}, \tag{19}$$

um valor sempre positivo para $k>1$, e portanto A está satisfeita.

b) De (18), e do lema 2.2.1, segue-se

$$\lim_{n\to\infty} V_\theta(T) = 1. \tag{20}$$

Temos então, de (19) e (20),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(T)|\theta=\theta_0}{[nV_{\theta_0}(T)]^{1/2}} = \left(\frac{nk(k+1)(k-1)}{12\sigma^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{(n)^{1/2}} = c>0.$$

c) É trivial, já que $\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(T)$ independe de θ e por (20).

d) Do comentário b da sub-seção anterior podemos ver que $\frac{T-E_\theta(T)}{[V_\theta(T)]^{1/2}}$ tem distribuição assintótica $N(0,1)$ sob H_0 e H_{1n}. Notamos ainda que esta estatística, mesmo sob não normalidade dos e_{ij}, tem distribuição assintótica $N(0,1)$, resultado que se segue do Teorema do Limite Central (TLC), desde que $V(e_{ij})<\infty$.

e) *Eficácia.* A eficácia de T é dada por (veja (19), (20), e definição 2.1.3):

$$R^2_{T_n} = \frac{nk(k+1)(k-1)}{12\sigma^2} \tag{21}$$

2.3. O Teste de Page

Para se testar $H_0(7)$ contra $H_1(8)$, Page (1963) sugere o teste apresentado nesta seção.

2.3.1 - Procedimento

a) *Manipulação preliminar:* para cada um dos n blocos, temos k observações. Estas k observações são ordenadas de 1 a k, dentro de cada bloco. Seja R_{ij} o posto da observação X_{ij} e $R_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}$, $j=1,2,...,k$.

b) *Estatística:* $$L = \sum_{j=1}^{k} jR_j \tag{22}$$

c) *Regra de decisão:* para um nível de significância α,

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } L \geq \ell(\alpha,k,n);$$

$$\text{não rejeitar } H_0 \text{ se } L < \ell(\alpha,k,n),$$

onde $P_0(L \geq \ell(\alpha,k,n)) = \alpha$. Valores exatos de $\ell(\alpha,k,n)$ são dados por Page (1963), para $k=3$, $n=2(1)20$; $k=4(1)8$, $n=2(1)12$. Para valores maiores de k e/ou n, usar a aproximação abaixo.

d) *Aproximação para amostras grandes:* usar como estatística

$$L^* = \frac{L - E_0(L)}{\left[V_0(L)\right]^{1/2}}, \tag{23}$$

onde $E_0(L)$ e $V_0(L)$ são dados em (27) e (28), respectivamente, e

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } L^* \geq z_\alpha;$$
$$\text{não rejeitar } H_0 \text{ se } L^* < z_\alpha.$$

Esta aproximação é comentada na sub-seção 2.3.3 e é verificada sua adequação no Capítulo III.

2.3.2 - Comentários

a) O teste de Page é um caso particular de uma classe chamada por Pirie (1974) de testes baseados em postos dentro dos blocos (within-blocks rank tests), que rejeita $H_0(7)$ para valores grandes de $W = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$, onde ω_i é uma estatística de posto linear simples (simple linear rank statistics - para uma definição, veja, por exemplo, Hájek (1968)) computada a partir das observações do i-ésimo bloco, isto é:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} c_j a(R_{ij}), \tag{24}$$

onde R_{ij} é definido em 2.3.1, letra a; a(.) é uma função monótona das observações e $\{c_j,\ j=1,2,\ldots,k\}$ são as chamadas constantes de "regressão", escolhidas para refletir as hipóteses alternativas. Se não tivermos nenhuma idéia sobre as magnitudes dos efeitos dos tratamentos, ou se, por outro lado, pudermos supor que estas magnitudes estão equi-espaçadas, é natural escolher, em (24),

$$c_j = j, \quad j=1,2,\ldots,k,$$

$$a(R_{ij}) = R_{ij},$$

e teremos $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} jR_{ij} = L$, como (22).

b) Uma importante propriedade da estatística L será dada no Teorema 2.3.3, a ser provado como base no Teorema 2.3.1 e Corolário 2.3.2, cujas provas o leitor encontrará em Randles e Wolfe (1979), pgs. 37-39.

Teorema 2.3.1 - Seja $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ uma amostra casual de uma distribuição contínua, e seja $R^* = (R_1, R_2, \ldots, R_N)'$ o vetor de postos tal que R_i é o posto de Z_i entre $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$. Se $\mathcal{R} = \{r : r$ é uma permutação dos inteiros $1, 2, \ldots, N\}$, então R^* é uniformemente distribuído sobre $\mathcal{R}$.

Corolário 2.3.2 - Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ e R^* tais como no Teorema 2.3.1. Se $T(R^*)$ é uma estatística baseada em $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ apenas através de R^*, então a distribuição de $T(R^*)$ é independente da distribuição das variáveis Z_i, se a distribuição das Z_i pertencer à classe das distribuições conjuntas de N variáveis aleatórias contínuas univariadas i.i.d..

Teorema 2.3.3 - A distribuição de L, definida em (22), é independente da distribuição das variáveis de observação X_{ij}, quando H_0(7) é verdadeira.

Prova: Para cada i, $i = 1, 2, \ldots, n$, seja R_{ij} o posto de X_{ij}, entre $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$. Quando H_0 é verdadeira, as variáveis $X_{i1}, X_{i2}, \ldots X_{ik}$ são uma amostra casual de uma distribuição contínua $F(x - b_i)$. Então, se $R_i^* = (R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{ik})'$, vemos pelo Teorema 2.3.1 que R_i^* é uniformemente distribuída sobre $\mathcal{R} = \{r : r$ é uma permutação dos inteiros 1,2,...,k , quando H_0 é verdadeira. Como este argumento pode repetir-se para cada i, i=1,2,...,n, segue pelo Corolário 2.3.2, e pelo fato de que as observações em diferentes blocos são independentes, que qualquer estatística $T(R_1^*,R_2^*,\ldots,R_n^*)$ que é função das kn observações X_{ij} apenas através de $R_1^*,R_2^*,\ldots,R_n^*$ é independente da distribuição das observações, quando esta é contínua e H_0 é verdadeira. Como

$$L = \sum_{j=1}^{k} jR_j = \sum_{i=1}^{n} K'R_i^*, \quad \text{onde } K=(1,2,\ldots,k)',$$

fica provado o Teorema 2.3.3.

c) O significado prático do Teorema 2.3.3 é que a estatística L é "livre de distribuição" (distribution-free), isto é, tem distribuição nula conhecida para qualquer distribuição da variável de observação, desde que esta seja contínua. Esta distribuição é facilmente obtida (ver Hollander e Wolfe (1973), pg. 149) e, para pequenas amostras, permite a aplicação deste teste, com nível de significância exato, em uma situação na qual violações das suposições da Teoria Normal (veja (10)) mais se fazem sentir.

Para amostras grandes, a obtenção da distribuição nula, apesar de teoricamente simples, é de computação trabalhosa, e a normalidade assintótica de L, a ser justificada na próxima sub-seção, mais os resultados do comentário d, seguinte, permitem sua aproximação por L*(23).

d) Para o cálculo da esperança e variância de L, sob H_0, notemos que, em vista do Teorema 2.3.1, vale, para o i-ésimo bloco,

$i=1,2,\ldots,n,$

$$P_0(R_{ij}=r_{ij}) = \frac{1}{k}, \quad r_{ij}=1,2,\ldots,k. \tag{25}$$

Logo,

$$E_0(R_{ij}) = \sum_j r_{ij}P(R_{ij}=r_{ij}) = \frac{k+1}{2}, \tag{26}$$

$$E_0(R_j) = E_0(\sum_i R_{ij}) = \frac{n(k+1)}{2}, \text{ e,}$$

e lembrando que $L=\sum_j jR_j$,

$$E_0(L) = \frac{nk(k+1)^2}{4}. \tag{27}$$

Usando-se (25), (26) e novamente o Teorema 2.3.3, pode-se ver que sob H_0, $V_0(R_{ij})= \frac{(k-1)^2}{12}$ e $Cov_0(R_{ij},R_{ih})= -\frac{k+1}{12}$, $i=1,2,\ldots,n$. Substituindo-se estes resultados em

$$V_0(L) = V_0(\sum_j jR_j) = \sum_j V_0(jR_j)+\sum_{j\neq h} Cov_0(jR_j,hR_h),$$

chega-se, depois de algumas computacões simples, a

$$V_0(L) = \frac{n(k^3-k)^2}{144(k-1)} \tag{28}$$

e) A estatística L é relacionada com o coeficiente de correlação de Spearman: seja ρ_i o coeficiente de correlação entre os postos do i-ésimo bloco e a ordem prevista por H_1.

Seja $\rho=\sum_i \rho_i$. Pode ser mostrado que

$$\rho = \frac{12L}{k(k^2-1)} - \frac{3n(k+1)}{k-1}, \tag{29}$$

e que, portanto, testes para $H_0(7)$ baseados em L e ρ são equivalentes.

2.3.3 - Propriedades Assintóticas

Em a,b,c e d abaixo mostraremos que L satisfaz, respectivamente, as condições A,B,C e D do Teorema 2.1.2, sob a sequência de alternativas (9).

a) Uma representação possível de R_{ij} é dada por

$$R_{ij} = 1 + \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq j}}^{k} c(X_{ij}-X_{i\alpha}) \tag{30}$$

onde

$$c(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u>0 \\ 0 & \text{se } u\leqslant 0. \end{cases}$$

Com esta representação, podemos escrever

$$E(R_{ij}) = 1 + \sum_{\alpha\neq j} P(X_{ij}>X_{i\alpha}) = 1 + \sum_{\alpha\neq j} \int F_\alpha dF_j$$

e lembrando que $L=\sum_j j\sum_i R_{ij}$,

$$E(L) = \sum_j j\left[n\left(1 + \sum_{\alpha\neq j} \int F_\alpha dF_j\right)\right] \tag{31}$$

Considerando a sequência de alternativas (9), temos, no i-ésimo bloco, $F_j(x) = F(x-b_i-(j-1)\theta)$ e $F_\alpha(x) = F(x-b_i-(\alpha-1)\theta)$, e vemos que

$$\int F_\alpha(x)dF_j(x) = \int F(z-(\alpha-j)\theta)dF(z).$$

Substituindo-se esta última expressão em (31), podemos escrever a esperança de L como função de θ,

$$E_\theta(L) = n\sum_j j[1 + \sum_{\alpha\neq j} \int F\ (x-(\alpha-j)\theta)dF\ (x)]$$

e tomando-se a derivada de $E_\theta(L)$ em relação a θ, supondo certas condições de regularidade sobre F (veja Cramer (1970), pg. 78. Estas condições serão sempre supostas aqui.), teremos

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(L) = n\sum_j j[\sum_{\alpha\neq j}(j-\alpha) \int f(x-(\alpha-j)\theta)dF\ (x)], \tag{32}$$

onde f é a densidade correspondente a F .Esta derivada vale,no ponto $\theta=\theta_0=0$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(L)|_{\theta=\theta_0} = nk\sum_j j(j - \frac{k+1}{2}) \int f(x)dF(x), \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E(L)|_{\theta=\theta_0} = \frac{nk(k^3-k)}{12}\int f^2(x)dx, \tag{33}$$

e verifica-se facilmente que a condição A do Teorema 2.1.2 está satisfeita, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(L)|_{\theta=\theta_0} > 0.$$

b) De (28) e (33), e com a notação $\int f^2$ para $\int f^2(x)dx$, vê-se abaixo que L satisfaz B:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(L)|_{\theta=\theta_0}}{[nV_{\theta_0}(L)]^{1/2}} = k(k-1)^{1/2}\int f^2 = c>0 \quad \text{se } k>1.$$

c) Denotemos a densidade f em (32) por $f^{(n)}$. Nas situações práticas, em geral, a sequência de funções densidade $f^{(n)}$ são limitadas e contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da convergência limitada (Hönig (1977). pg.59), como $f^{(n)} \to f$, segue que (32) converge para (33), e a primeira parte de C está satisfeita.

Para provar a segunda parte, mostraremos abaixo que $V_{\theta_n}(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} V_{\theta_0}(L)$, ou, conforme se vê no cálculo de (26) e (28) que

$$E_{\theta_n}(R_{ij}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_{\theta_0}(R_{ij}) = \frac{k+1}{2}, \tag{34}$$

$$E_{\theta_n}(R_{ij}^{\ 2}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_{\theta_0}(R_{ij}^{\ 2}) = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}, \quad \text{e} \tag{35}$$

$$E_{\theta_n}(R_{ij}R_{ih}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E_{\theta_0}(R_{ij}R_{ih}) = \frac{3k^2+5k+2}{12}. \tag{36}$$

Em (9) vemos que $\lim\limits_{n\to\infty} F_{ij}^{(n)}(x-b_i-(j-1)\theta) = F(x-b_i)$, $j=1, 2,\ldots,k$, ou seja, em cada bloco, $\lim\limits_{n\to\infty} F_j^{(n)}=F$. Em Royden (1968), pg. 232, demonstra-se um teorema que, com a notação acima, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \int F_\alpha^{(n)} dF_j^{(n)} = \int F dF = 1/2. \tag{37}$$

Adotando-se a representação (30) para R_{ij}, temos tomando a esperança e aplicando (37),

$$\lim_{n\to\infty} E_{\theta_n}(R_{ij}) = 1 + \sum_{\alpha\neq j} \lim P(X_{ij}>X_{i\alpha}) = 1 + \sum_{\alpha\neq j} \lim \int F_\alpha^{(n)} dF_j^{(n)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(k-1) = \frac{k+1}{2}$$

e (34) está provada.

Para provarmos (35), escrevemos, com a representação (30),

$$R_{ij}^2 = 1 + 2 \sum_{\alpha \neq j} c(X_{ij}-X_{i\alpha}) + \sum_{\alpha \neq j} c^2(X_{ij}-X_{i\alpha}) +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \neq \ell \\ \alpha, \ell \neq j}} c(X_{ij}-X_{i\alpha})\ c(X_{ij}-X_{i\ell}). \tag{38}$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} E_{\theta_n}(R_{ij}^2) = 1 + 2 \sum_{\alpha \neq j} \lim P(X_{ij} > X_{i\alpha}) + \sum_{\alpha \neq j} \lim P(X_{ij} > X_{i\alpha}) +$$

$$\sum_{\substack{\alpha \neq \ell \\ \alpha, \ell \neq j}} \lim P(X_{ij} > X_{i\alpha} \text{ e } X_{ij} > X_{i\ell}).$$

Aplicando-se uma óbvia generalização de (37), isto é, considerando, no limite, X_{ij}, $X_{i\alpha}$ e $X_{i\ell}$ três observações (independentes) da mesma $F(x-b_i)$, vemos que $\lim P(X_{ij} > X_{i\alpha}$ e $X_{ij} > X_{i\ell}) = 1/3$, e, após algumas computações, obtemos (35).

A mesma técnica pode ser usada para provar (36), o que não faremos aqui.

d) Em (29) é fácil ver que ρ é soma das variáveis i.i.d. ρ_i, com variância finita, tanto sob H_0 quanto sob H_{1n}. Segue-se pelo T.L.C. a normalidade assintótica de ρ. Como L é função linear de ρ, vemos que D está satisfeita.

e) De (28) e (33) e da definição 2.1.3. conclui-se que a eficácia de L é

$$R_{Ln}^2 = nk^2(k-1)\left[\int f^2\right]^2. \tag{39}$$

2.4. O Teste de Hollander

Hollander (1967) descreve o teste abaixo para $H_0(7)$.

2.4.1 - Procedimento

a) *Manipulação preliminar*

Calcular, para os $k(k-1)/2$ pares de tratamentos (u,v), com $u<v$, as n diferenças em valor absoluto: $Y_{uv}^{i}=|X_{iu}-X_{iv}|$, $i=1,2,\ldots,n$. Seja R_{uv}^{i} o posto de Y_{uv}^{i} entre os n valores $Y_{uv}^{1},Y_{uv}^{2},\ldots,Y_{uv}^{n}$. Calcular $T_{uv} = \sum_{i=1}^{n} R_{uv}^{i}\psi_{uv}^{i}$, onde $\psi_{uv}^{i}=1$ se $X_{iu}<X_{iv}$ e $\psi_{uv}^{i}=0$ se $X_{iu}>X_{iv}$. Obter

$$Y = \sum_{u<v} T_{uv} \tag{40}$$

b) *Estatística*

$$Y' = \frac{Y-E_0(Y)}{[\hat{V}_0(Y)_1]^{1/2}} \tag{41}$$

onde

$$E_0(Y) = \frac{k(k-1)n(n+1)}{8}, \tag{42}$$

e

$$\hat{V}_0(Y)_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)k(k-1)\{3+2(k-2)\rho_n\}}{144} \tag{43}$$

onde, para cada n, ρ_n é uma constante dada na tabela 2.4.1.

c) *Regra de decisão:* Para um nível de significância α,

rejeitar H_0 se $Y'\geqslant z_\alpha$,

não rejeitar H_0 se $Y'<z_\alpha$.

Esta regra é aproximada (ver comentário b, sub-seção 2.4.2)

2.4.2 - Comentários

a) Na classificação de Pirie (1974), o teste desta seção pertence à classe dos "testes de postos entre os blocos" (among-blocks rank tests), que rejeitam H_0 para grandes valores de $A=\sum_{u<v} T_{uv}$, onde T_{uv} é uma estatística de posto linear simples para amostras pareadas, isto é

$$T_{uv} = \sum_{i=1}^{n} a^*(R_{uv}^{(i)})\eta(X_{uv}^{(i)}), \qquad (44)$$

com $X_{uv}^{(i)}=X_{iv}-X_{iu}$, $R_{uv}^{(i)}$ o posto de $|X_{uv}^{(i)}|$ entre $\{|X_{uv}^{(t)}|,\ t=1,2,\ldots,n\}$, $a^*(.)$ uma função (de postos) monótona e $\eta(x)=1$ se $x>0$ e $\eta(x)=0$ se $x<0$. Se fizermos, em (44), $a^*(j)=j$, teremos o teste descrito em 2.4.1.

Puri e Sen (1968) estudam a classe de testes que usam (44) com $a^*(R_{uv}^{(i)}) = \frac{1}{n} E_{n,i}$, sendo $E_{n,i}$ o valor esperado da i-ésima estatística de ordem de uma amostra de tamanho n de uma distribuição que satisfaz certas propriedades, dadas por Chernoff e Savage (1958). Puri e Sen mostram que o teste de Hollander pertence a esta classe.

b) A estatística Y(40) não é, como L(22), "livre de distribuição" (veja letra c da sub-seção 2.3.2). Ela é a soma $\sum_{u<v} T_{uv}$, onde T_{uv} é a estatística de postos com sinal de Wilcoxon para amostras pareadas. Cada T_{uv} tem a propriedade de ser "livre de distribuição", mas o coeficiente de correlação sob H_0, $\rho_0^n(F)$, entre T_{uv} e T_{uw} ($u\neq v$, $u\neq w$, $v\neq w$) depende da distribuição F das observações (exceto

para n=1), e portanto $Var_0(Y)$ também.

Hollander (1966) mostra que

$$\rho_0^n(F) = [(24\lambda(F)-6)n^2+(48\mu(F)-72\lambda(F)+7)n+ + (48\lambda(F)-48\mu(F)+1][(n+1)(2n+1)]^{-1}, \tag{45}$$

e

$$\rho^*(F) = \lim_{n\to\infty} \rho_0^n(F) = 12\lambda(F)-3, \tag{46}$$

onde

$$\mu(F) = P(X_1<X_2 \text{ e } X_1<X_5+X_6-X_7) \quad \text{e}$$

$$\lambda(F) = P(X_1<X_2+X_3-X_4 \text{ e } X_1<X_5+X_6-X_7), \tag{47}$$

e $X_1,X_2,\ldots,X_7$ são i.i.d. com distribuição F.

Lehmann (1964) sugere o estimador $\hat{\lambda}(F)$ para $\lambda(F)$, sendo $\hat{\lambda}(F)$ a proporção de sêxtuplas $(\alpha,\beta,\gamma;u,v,w)$ para as quais as desigualdades

$$(X_{\alpha u}<X_{\beta u}+X_{\alpha v}-X_{\beta v} \text{ e } X_{\alpha u}<X_{\gamma u}+X_{\alpha w}-X_{\gamma w})$$

são satisfeitas simultaneamente. Se usarmos este estimador, que é consistente, em (46), teremos o estimador de $\rho^*(F)$,

$$\hat{\rho} = 12\hat{\lambda}(F)-3, \tag{48}$$

e um estimador consistente da variância de Y é

$$\hat{V}_0(Y)_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)k(k-1)\{3+2(k-2)\hat{\rho}\}}{144} \tag{49}$$

Em vista disto, o teste definido por

$$Y'' = \frac{Y-E_0(Y)}{[\hat{V}_0(Y)_2]^{1/2}} \tag{50}$$

onde $E_0(Y)$ é dada em (42), $\hat{V}_0(Y)_2$ em (49), é assintóticamente "livre de distribuição".

Na prática, porém, estimar $\lambda(F)$ de acordo com a sugestão de Lehmann, vista acima, requer um trabalho proibitivo, como se vê, por exemplo, em Hollander e Wolfe (1973), pg. 176. Como Lehmann (1964) mostrou que $\frac{1}{4} \leqslant \lambda(F) \leqslant \frac{7}{24}$, e Hollander (1967) que $\mu(F) \leqslant 0,3089$, um procedimento alternativo é substituir, em (45), os valores $\lambda(F)$ e $\mu(F)$ pelos seus limites superiores, obtendo $\rho_n = \max \rho_0^n(F)$. Isto nos leva ao teste proposto em 2.4.1, definido por Y'(41), que é diferente de Y''(50) por usarmos o limite superior da Var(Y), a saber, $\hat{V}_0(Y)_1$ (43), em lugar de sua estimativa consistente, $\hat{V}_0(Y)_2$ (49); logo, o teste definido por Y' é conservador. Comparemos $\hat{V}_0(Y)$ e $\hat{V}_0(Y)_2$, para termos uma idéia de em que medida o teste baseado em Y' é conservador. Das considerações acima, vemos que $\hat{\rho}$ (48) é uma estimativa admissível, se

$$12\min \lambda(F) - 3 \leqslant \hat{\rho} \leqslant \rho_n, \quad \text{ou}$$

$$0 \leqslant \hat{\rho} \leqslant \rho_n. \tag{51}$$

Chamemos de $C_{n,k,F}$ o quociente:

$$C_{n,k,F} = \frac{\hat{V}_0(Y)_1}{\hat{V}_0(Y)_2} \tag{52}$$

e $C_{n,k,F}$ pode ser encarada como uma medida de quanto Y' é conservador em relação à Y'', isto é, de quanto deve ser multiplicada a estatística Y', baseada em n observações, em um modelo de k tratamentos, com $e_{ij} \sim F$, para anular seu caráter conservador em relação à estatística Y'', baseada no estimador consistente. É claro que, na condução de um teste, não sabemos quanto vale $C_{n,k,F}$ que é uma variável aleatória.

Da definição de Y" e Y' e de (52), temos

$$C_{n,k,F} = \left[\frac{3+2(k-2)\rho_n}{3+2(k-2)\hat{\rho}}\right]^{1/2}, \tag{53}$$

logo, em vista de (51),

$$1 \leqslant C_{n,k,F} \leqslant \left[1 + \frac{2}{3}(k-2)\rho_n\right]^{1/2} \tag{54}$$

Vemos em (54) que, se k=2, Y' e Y" são equivalentes. Para um valor fixo k_0 maior do que 2, vemos pela Tabela 2.4.1 que o limite superior de $C_{n,k,F}$ aumenta lentamente até seu maior valor $[1 + \frac{1}{3}(k_0-2)]^{1/2}$. Da expressão (54) conclui-se portanto que Y' pode ser mais conservador, dependendo de F, na medida em que aumentam os valores de n e k.

TABELA 2.4.1

Valores de $\rho_n = \max \rho_0^n(F)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_n	.333	.389	.416	.433	.444	.452	.458	.463	.467	.470
ρ_n	11	12	13	14	15	20	25	40	50	∞
ρ_n	.472	.474	.476	.478	.479	.484	.487	.492	.493	.500

Hollander (1966) mostra que, pelo menos para F uniforme, os limites superiores ρ_n são muito próximos de $\rho_0^n(F)$, logo, como

$\hat{\rho}$ (48) é consistente, $\hat{\rho} \simeq \rho_n$ e, por (53), $C_{n,k,F} \simeq 1$, isto é, neste caso, o teste Y' é muito pouco conservador em relação a Y''.

No capítulo III veremos, do ponto de vista prático, como se manifesta o caráter conservador de Y'.

c) Para o cálculo de esperança e variância de Y (40), notemos que, sob H_0,

$$P(\psi^i_{uv}=1) = P(\psi^i_{uv}=0) = 1/2,$$

logo

$$P_0(R^i_{uv}\psi^i_{uv}=r^i_{uv}) = P_0(R^i_{uv}\psi^i_{uv}=0) = 1/2,$$

$i=1,\ldots,n$, $u<v=2,3,\ldots,k$. Então

$$E_0(T_{uv}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^i_{uv},$$

ou

$$E_0(T_{uv}) = \frac{n(n+1)}{4}, \tag{55}$$

e lembrando que $Y = \sum_{u<v} T_{uv}$,

$$E_0(Y) = \frac{k(k-1)n(n+1)}{8}. \tag{56}$$

Notemos também que $E_0[(R^i_{uv}\psi^i_{uv})^2] = \frac{1}{2}(r^i_{uv})^2$ e daí obtemos

$$V_0(T_{uv}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}. \tag{57}$$

A expressão de variância de Y é

$$V_0(Y) = \sum_{u<v} V_0(T_{uv}) + 2 \sum_{u<v<w} Cov_0(T_{uv},T_{uw}) +$$

$$+ 2 \sum_{u<v<w} Cov_0(T_{uv},T_{uw}) + 2 \sum_{u<v<w} Cov_0(T_{uw},T_{vw}),$$

onde os termos com os quatro índices diferentes não aparecem porque são nulos. Usando $\rho_0^n(F)$ (45) e o fato de que $Cov_0(T_{uv},T_{uw}) = -Cov_0(T_{uv},T_{uw})$, e $Cov_0(T_{uv},T_{uw}) = Cov_0(T_{uw},T_{vw})$, temos

$$V_0(Y) = \frac{n(n+1)(2n+1)k(k-1)\{3+2(k-2)\rho_0^n(F)\}}{144}. \qquad (58)$$

d) Daremos agora uma representação de T_{uv} em (40) que facilitará o estudo das propriedades assintóticas de Y. Façamos $Z_i = X_{iu}-X_{iv}$, $i=1,2,\ldots,n$. Observe que sob H_0 e H_1, as variáveis Z_i são i.i.d. Seja $\phi(.)$ a função definida por $\phi(u)=1$ se $u<0$ e $\phi(u)=0$ em caso contrário. Se $Z^{(i)}$ é a i-ésima estatística de ordem da maior observação para a menor, e $i<j$,

$\phi(Z^{(i)}+Z^{(j)})=1$ se e somente se $Z^{(j)}<0$ e $|Z^{(i)}|<|Z^{(j)}|$, e

$\phi(Z^{(j)}+Z^{(j)})=1$ se e somente se $Z^{(j)}<0$.

Então $\sum_{i=1}^{j} \phi(Z^{(i)}+Z^{(j)})$ é o posto com sinal de $Z^{(j)}$, isto é, em T_{uv} de (40), $T_{uv} = \sum_{i=1}^{n} R_{uv}^i \psi_{uv}^i$, é o valor $R_{uv}^j \psi_{uv}^j$. Logo

$$T_{uv} = \sum_{i\leq j} \phi(Z^{(i)}+Z^{(j)}) = \sum_{i\leq j} \phi(Z_i+Z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(2Z_i) + \sum_{i<j} \phi(Z_i+Z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(Z_i) + \sum_{i<j} \phi(Z_i+Z_j),$$

e, da definição de Z_i, podemos escrever

$$T_{uv} = \sum_{i=1}^{n} \phi(X_{iu}-X_{iv}) + \sum_{i<j} \phi(X_{iu}-X_{iv}+X_{ju}-X_{jv}) \tag{59}$$

Por esta representação fica fácil ver que T_{uv}, e portanto Y, são somas de ampla classe de estatísticas, chamadas de "estatísticas U", definidas no apêndice, cujas propriedades, notadamente normalidade assintótica, foram estabelecidas por Hoeffding (1948).

2.4.3 - Propriedades Assintóticas

Mostraremos que Y satisfaz as condições A,B,C e D do Teorema 2.1.2.

a) De (59) vemos que a esperança de T_{uv} fica

$$E(T_{uv}) = nP(X_{1u}<X_{1v}) + \frac{n(n-1)}{2} P(X_{1u}+X_{2u}<X_{1v}+X_{2v}), \tag{60}$$

e portanto a esperança de Y pode ser escrita

$$E_\theta(Y) = \sum_{u<v} \{nP_\theta(X_{1u}<X_{1v}) + \frac{n(n-1)}{2} P_\theta(X_{1u}+X_{2u}<X_{1v}+X_{2v})\}. \tag{61}$$

Pela definição da eficácia, em (5), é imediato observar que a eficácia de um teste baseado na estatística T é igual a eficácia de um teste baseado em kT, $k\neq 0$. Para simplificarmos alguns cálculos que se seguem, iremos trabalhar com a estatística $\binom{n}{2}^{-1}Y$, cuja esperança fica

$$E_\theta[\binom{n}{2}^{-1}Y)] = \sum_{u<v} \{\binom{n}{2}^{-1} nP_\theta(X_{1u}<X_{1v}) + P_\theta(X_{1u}+X_{2u}<X_{1v}+X_{2v})\}. \quad (62)$$

Com a notação $H_u=F_u*F_u$, onde * significa convolução, podemos escrever um dos termos à direita em (62):

$$P_\theta(X_{1u}+X_{2u}<X_{1v}+X_{2v}) = \int[1-H_v(y)]dH_u(y). \quad (63)$$

(A razão de tratarmos mais detalhadamente (63) ficará clara adiante).

Lembrando que, de acordo com (9), $F_v(x)=F_u(x-(v-u)\theta)$, notamos que a convolução $H_v(y) = \int F_v(y-t)dF_v(t)$ pode ser escrita

$$H_v(y) = \int F_u(y-t-(v-u)\theta)f_u(t-(v-u)dt$$

e fazendo a variável $z=t-(v-u)\theta$, esta última integral fica

$$H_v(y) = \int F_u(y-z-2(v-u)\theta)f_u(z)dz = H_u(y-2(v-u)\theta) \quad (64)$$

Colocando (63) de forma conveniente, podemos ver que, por (64),

$$P_\theta(X_{1u}+X_{2u}<X_{1v}+X_{2v}) = \int[1-H_v(y-2(v-u)\theta)]dH_u(y-2(v-u)\theta)$$

$$= \int[1-H_v(y-2(v-u)\theta)]dH_v(y),$$

e derivando-se P_θ em relação a θ, temos

$$P'_\theta = \int -H'_v(y-2(v-u)\theta)dH_v(y), \quad (65)$$

e como $H'_v(y-2(v-u)\theta) = \int F'_v(y-2(v-u)\theta-t)dF_v(t)$, a derivada (65) no ponto $\theta=\theta_0=0$ vale

$$P'_\theta(0) = \int 2(v-u)\left[\int f(y-t)f(t)dt\right]dH(y).$$

Notando que a integral entre colchetes é a densidade, digamos h, da convolução das variáveis i.i.d. X_1 e X_2, e portanto com função distribuição H, chegamos a

$$P'_\theta(0) = 2(v-u)\int h^2(y)dy. \tag{66}$$

A derivada da expressão (62) em relação a θ, em vista de (66) e se colocarmos $M(\theta)=P(X_{1u}<X_{1v})$, ficará, no ponto $\theta=\theta_0=0$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E\left[\binom{n}{2}^{-1} Y\right]\Big|_{\theta=\theta_0} = \sum_{u<v} \left\{ \binom{n}{2}_n^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta} M'(0) + 2(v-u)\int h^2 \right\}$$

$$= C_n + 2\int h^2 \sum_{u<v} (v-u)$$

$$= C_n + \frac{k(k+1)(k-1)}{3}\int h^2 \tag{67}$$

onde C_n é uma constante positiva tal que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n=0$. Como (67) é sempre positiva, está satisfeita a condição A.

b) De (58) e (67),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} E\left[\binom{n}{2}^{-1} Y\right]\Big|_{\theta=\theta_0}}{\left[nV_{\theta_0}\left|\binom{n}{2}^{-1} Y\right|\right]^{1/2}} = \frac{[2k(k-1)]^{1/2}(k+1)}{[3+2(k-2)\rho^*(F)]^{1/2}}\int h^2 = c>0,$$

estando então satisfeita a condição B.

c) Verifica-se que a expressão de $\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(Y)|_{\theta=\theta_n}$, por (61), envolverá P'_θ em (65) e $M'(\theta)=P'_\theta(X_{1u}<X_{1v})$. Aplicando-se o Teorema da Convergência Limitada, da mesma maneira que em 2.3.3 e, segue a primeira parte de C.

A segunda parte de C requer, para ser verificada, uma demonstração simples, porém tediosa, e daremos aqui apenas uma rápida indicação. Na expressão de $V_0(Y)$, usada para chegarmos a (58) vemos que é envolvida, por exemplo, $Cov(T_{uv},T_{uw})$. Pela forma de T_{uv} em (59), temos

$$
\begin{aligned}
Cov(T_{uv},T_{uw}) = E\Big[&\sum_i \phi(X_{iu}-X_{iv})\sum_k \phi(X_{ku}-X_{kw})+\sum_i \phi(X_{iu}-X_{iv}) .\\
&\sum_{h<m} \phi(X_{hu}-X_{hw}+X_{mu}-X_{mw})+\sum_k \phi(X_{ku}-X_{kw}) .\\
&\sum_{i<j} \phi(X_{iu}-X_{iv}+X_{ju}-X_{jv}) +\\
&\sum_{i<j} \phi(X_{iu}-X_{iv}+X_{ju}-X_{jv}) \sum_{h<m} \phi(X_{hu}-X_{hv}+X_{mu}-X_{mw})\Big] -\\
&-E[T_{uv})E(T_{uw}] .
\end{aligned}
$$

Considerando apenas o primeiro termo entre colchetes, temos

$$E[\sum_i \phi(X_{iu}-X_{iv})\Sigma\phi(X_{ku}-X_{kw})] = P(X_{iu}<X_{iv} \text{ e } X_{ku}<X_{kw}),$$

que envolve integrais do mesmo tipo que temos tratado acima. Novamente pelo Teorema da Convergência Limitada, chegaremos ao resultado, aplicando o mesmo raciocínio para todos os termos de $Cov(T_{uv}, T_{uw})$, e, novamente, a todos os termos de $V(Y)$.

d) A expressão de T_{uv} em (59) pode ser escrita em termos de estatísticas "U", apresentadas no apêndice, como

$$T_{uv} = nU_1+\binom{n}{2}U_2,$$

onde $U_1=\phi(Z_i)$ e $U_2=\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}\phi(Z_i+Z_j)$. Multiplicando-se ambos os termos por $n^{1/2}\binom{n}{2}^{-1}$, e subtraindo-se a esperança, teremos:

$$\frac{n^{1/2}}{\binom{n}{2}}[T_{uv}-E(T_{uv})] = \frac{n^{3/2}}{\binom{n}{2}}[U_1-E(U_1)]+n^{1/2}[U_2-E(U_2)]. \tag{68}$$

Notemos que em (68), $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}/\binom{n}{2}=0$ e que $[U_1-E(U_1)]$ converge em probabilidade para zero. Segue-se do teorema de Slutsky que

$$\frac{n^{1/2}}{\binom{n}{2}}\left[T_{uv}-E(T_{uv})\right] \quad \text{e} \quad n^{1/2}\left[U_2-E(U_2)\right]$$

têm a mesma distribuição, que, de acordo com o Teorema de Hoeffding (1948), dado no apêndice, é normal, tanto sob H_0 como sob H_1. A distribuição de $\underset{\sim}{T}=(T_{12},T_{13},\ldots,T_{k-1,k})$ é portanto multinormal, daí a normalidade de $Y=\sum_{u<v} T_{uv}$, satisfazendo D.

e) A eficácia de Y vem de (58) e (67), e é dada por

$$R^2_{Yn} = \frac{18n\left[c_{1n} + \frac{k(k+1)(k-1)}{3}\int h^2\right]^2}{c_{2n}k(k-1)\{3+2(k-2)\rho_0^n(F)\}} \tag{69}$$

onde c_{1n} e c_{2n} são constantes tais que $\lim_{n\to\infty} c_{1n}=0$ e $\lim_{n\to\infty} c_{2n}=1$, $\rho_0^n(F)$ é uma constante definida em (45) tal que, por (46), $\lim_{n\to\infty}\rho_0^n(F)=\rho^*(F)$, e h é a densidade de X_1+X_2, X_1 e X_2 i.i.d. com distribuição F.

2.5. O Teste de Sen

Sen (1968) descreve uma classe de testes para $H_0(7)$, baseada em observações "alinhadas" para uma situação e uma sequência de alternativas mais gerais do que as adotadas até aqui. Para dar uniformidade a nosso trabalho, escolhemos o representante desta classe que será mostrado a seguir, e o estudaremos sob as mesmas condições dos outros testes.

2.5.1 - Procedimento

a) *Manipulação preliminar*

Sejam $(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik})$ as k observações dentro do i-ésimo bloco. Em cada bloco, vamos "alinhar" as observações, isto é, extrair de cada observação uma estimativa do efeito de bloco. Aqui iremos estimar o efeito do i-ésimo bloco pela média aritmética das observações, $\bar{X}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij}$. Após o alinhamento, os N=nk valores são reunidos e são substituídos por postos de 1 a N segundo sua ordem. Sejam R_{ij} o posto atribuído à (i-j)-ésima observação,

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij} \quad \text{e} \quad S_{Nj} = R_j/n(N+1). \tag{70}$$

b) *Estatística*

$$S = \frac{(12n)^{1/2}\sum_j (j - \frac{1}{2}(k+1))S_{Nj}}{[\sigma^2 k(k^2-1)]^{1/2}} \tag{71}$$

onde

$$\sigma^2 = \{1/n(k-1)\}\sum_{i}\sum_{j}\{(R_{ij}-\bar{R}_i)/N+1\}^2, \qquad (72)$$

e

$$\bar{R}_i = \frac{1}{k}\sum_{j} R_{ij}.$$

c) *Regra de decisão:* Para um nível de significância α,

rejeitar H_0 se $S \geq z_\alpha$;

não rejeitar H_0 se $S < z_\alpha$.

A adequação desta regra para pequenas amostras será verificada no Capítulo III.

2.5.2 - Comentários

a) Iremos indicar a classe de testes apresentada por Sen (1968), da qual é exemplo o teste exposto acima.

A técnica de "alinhar" observações é sugerida por Hodges e Lehman (1962), que comentaram que os testes de postos dentro dos blocos não utilizam a informação contida em comparações entre os blocos, e são, portanto, comparativamente menos eficientes. Eles consideraram os testes de Wilcoxon e Kruskal-Wallis baseados em observações alinhadas; Mehra e Sarangi (1967) estudaram a eficiência assintótica de um teste pertencente à classe de Sen, porém para o caso de hipóteses alternativas não-ordenadas.

Seja o modelo $X_{ij}=\tau+b_i+\mu_j+\varepsilon_{ij}$. Define-se observações e erros alinhados por:

$$Y_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} c_{j\ell}X_{i\ell}, \quad e_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} c_{j\ell}\varepsilon_{i\ell}, \quad c_{j\ell} = \delta_{j\ell}-1/k,$$

para $i=1,2,\ldots,n$; $j,\ell=1,2,\ldots,k$, onde $\delta_{j\ell}$ é o delta de Kronecker.

Por definição, $(e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{ik})$ são n vetores i.i.d. com f.d. contínua $G(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ simétrica em seus k argumentos. Assim, se H_0 (7) é verdadeira, $Y_{ij}=e_{ij}$, $j=1,2,\ldots,k$, são variáveis aleatórias simétricas (interchangeable) para cada $i=1,2,\ldots,n$. Se H_0 não é verdadeira, $Y_{ij}=\mu_j+e_{ij}$, $j=1,2,\ldots,k$, são simétricas apenas após deslocamento em parâmetro de posição. Portanto, testar H_0 equivale a testar simetria entre as k variáveis de cada bloco. A classe de testes descrita por Sen é válida portanto para modelos mais gerais do que os vistos até aqui, que assumiam independência para as k variáveis de cada bloco.

Para as N=nk observações, define-se uma sequência $E_N = (E_{N1},E_{N2},\ldots,E_{NN})$ de funções de postos, onde $E_{N\alpha}=J_N(\frac{\alpha}{N})$, $1\leq\alpha\leq N$, e a função J_N é definida de acordo com as convenções de Chernoff e Savage (1958).

Define-se ainda:

$Z_{N\alpha}^{(j)} = 1$ se a -ésima observação entre os N valores de Y_{ij} é do j-ésimo tratamento, e

$Z_{N\alpha}^{(j)} = 0$ em caso contrário

Sen descreve as propriedades da classe de estatística $S_N=(S_{N1},\ldots,S_{Nk})$ onde

$$S_{Nj} = (1/n)\sum_{\alpha=1}^{N} E_{N\alpha}Z_{N\alpha}^{(j)} \qquad j=1,2,\ldots,k. \qquad (73)$$

b) Para a estatística S, em (70), que estudaremos aqui, adotou-se

$$E_{N\alpha} = J_N\left[\left(\frac{N}{N+1}\right)\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right] = J_N\left[\frac{\alpha}{N+1}\right] = \frac{\alpha}{N+1}, \qquad (74)$$

ou seja, $E_{N\alpha}$ é a esperança da α-ésima estatística de ordem de uma amostra de N variáveis com distribuição uniforme no intervalo (0,1). Com esta escolha,

$$\begin{aligned} J_N(u) &= u, \quad 0<u<1, \\ &= 0 \quad \text{em caso contrário.} \end{aligned} \tag{75}$$

e $E_{N\alpha}$ pode ser escrita com a notação $E_{NR_{ij}} = \frac{R_{ij}}{N+1}$. Observe-se que S_{Nj} em (73) fica como (70).

Outra possibilidade para a escolha de $E_{N\alpha}$, estudada por Sen (1968) é $E_{N\alpha}=A_{N\alpha}$, sendo $A_{N\ \alpha}$ a esperança da α-ésima estatística de ordem de N Normais-padrão independentes.

Com a escolha (74), e de acordo com o comentário a anterior, a atribuição aleatória de postos aos tratamentos dentro de cada bloco (dado o conjunto de postos atribuídos ao bloco) é justificável, sob H_0, se o vetor de observações alinhadas tem uma distribuição conjunta simétrica. Assim,

$$\begin{aligned} &P_0(R_{11}=r_{11},\ldots,R_{1k}=r_{1k};R_{21}=r_{21},\ldots,R_{2k} = \\ &=r_{2k};\ldots;R_{n1}=r_{n1},\ldots,R_{nk}=r_{nk}) = \frac{1}{(K!)^n} \end{aligned} \tag{76}$$

Com o conhecimento da distribuição nula (condicional) (76), calculamos

$$\tilde{E}_0(S_{Nj}) = \frac{1}{n(N+1)}\ \tilde{E}_0(R_j) = \frac{1}{n(N+1)}\cdot\frac{n(N+1)}{2} = \frac{1}{2} \tag{77}$$

$$\tilde{V}_0(S_{Nj}) = \frac{1}{n^2(N+1)^2}\ \tilde{V}_0(R_j) = \frac{k-1}{N}\ \sigma^2, \tag{78}$$

onde σ^2 é dado em (72), e os símbolos $\tilde{E}$ e $\tilde{V}$ significam esperança e variância condicionais. Mehra e Sarangi (1967) mostra que $S_N = (S_{N1},\ldots,S_{Nk})$ converge, sob H_0, a uma distribuição multinormal.

c) Daremos agora um teorema a ser utilizado na sub-seção 2.5.3 sob a forma em que está enunciado por Sen (1968), a forma mais geral. Na sub-seção seguinte seus resultados são particularizados para a estatística S escolhida, e para nosso modelo, mais restrito do que o de Sen.

<u>Teorema</u> <u>2.5.1</u> - Para a sequência de alternativas $\{K_N:\mu_j=\mu_{jN} = N^{-1/2}\theta_j,\ j=1,2,\ldots,k\}$, o vetor $(n^{1/2}(S_{Nj}-\bar{E}_N),\ j=1,2,\ldots,k)$ tem assintóticamente uma distribuição conjunta normal, com média $(k^{-1/2}\theta_j B(F),\ j=1,2,\ldots,k)$ e matriz de covariância $(1/k)(\delta_{j\ell}k-1)A^2(1-\rho_J)$, $j,\ell=1,2,\ldots,k$, onde:

a) $\bar{E}_N = (1/N)\sum_{\alpha} E_{N\alpha}$,

b) F é a f.d. comum das observações alinhadas, a menos da locação, isto é,

$$F_j(x) = F(x-N^{-1/2}\theta_j),\quad j=1,2,\ldots,k \tag{79}$$

são definidas ainda as f.d. conjuntas

$$F_{j\ell}(x,y) = F^*(x-N^{-1/2}\theta_j, y-N^{-1/2}\theta_\ell),\quad j\neq\ell=1,2,\ldots,k. \tag{80}$$

(As funções F e F* são contínuas).

c) $$B(F) = \int_{-\infty}^{\infty}(d/dx)J[F(x)]\,dF(x) \tag{81}$$

d) $$A^2 = \int_0^1 J^2(u)\,du-\left[\int_0^1 J(u)\,du\right]^2 \tag{82}$$

e) $$\rho_J = A^{-2}[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} J[F(x)]J[F(y)]dF^*(x,y) - \{\int_0^1 J(u)du\}^2]. \qquad (83)$$

Outro resultado que será usado na sub-seção seguinte, cuja prova encontra-se em Sen (1968) é o seguinte:

Lema 2.5.2 - Seja $\sigma^2 = \{1/n(k-1)\}\sum_i\sum_j\{E_{NR_{ij}} - E_{NR_{i.}}\}^2$.

Então $\sigma^2 \xrightarrow{P} A^2(1-\rho_J)$ sob $\{K_N\}$, onde $\{K_N\}$, A^2 e ρ_J são definidos no teorema 2.5.1 e $E_{NR_{i.}} = (1/k)\sum_j E_{NR_{ij}}$.

2.5.3 - Propriedades Assintóticas

As propriedades assintóticas de S decorrem do Teorema 2.5.1 e do Lema 2.5.2. Como adotamos $E_{N\alpha} = \frac{\alpha}{N+1}$, e,consequentemente, $J(u)=u$, $0<u<1$ (veja (74) e (75)), vemos que $B(F)$ em (81) será dado por

$$B(F) = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)dF(x) = \int f^2; \qquad (84)$$

A^2 em (82) por

$$A^2 = \int_0^1 u^2du - [\int_0^1 udu] = \frac{1}{12}; \qquad (85)$$

e ρ_J em (83) por

$$\rho_J = 0, \qquad (86)$$

já que, sob nosso modelo, as observações são independentes.

Por outro lado, o valor de θ_j do Teorema 2.5.1 é dado, sob a sequência de alternativas (9), por

$$\theta_j = (nk)^{1/2}(j-1)\theta. \qquad (87)$$

Mostraremos a seguir que S satisfaz às condições A,B,C e

D do Teorema 2.1.2.

a) Do Teorema 2.5.1,

$$E(S_{Nj}) = (nk)^{-1/2}\theta_j B(F)+\bar{E}_N, \quad j=1,2,\dots,k,$$

e da definição de S em (71),

$$E_\theta(S) = \frac{(12n)^{1/2}\sum_j (j - \frac{1}{2}(k+1))E(S_{Nj})}{[\sigma^2 k(k^2-1)]^{1/2}} \tag{88}$$

Substituindo, em (88), os termos pelos seus correspondentes em (84) e (87) e lembrando o argumento utilizado em 2.2.3, letra a, isto é, de que o comportamento de S (88) é equivalente assintóticamente ao de uma estatística em que substituímos σ^2 em (88) por $A^2(1-\rho_J)=1/12$ por (85) e (86), em vista do Lema 2.5.2, temos

$$E\ (S) = \frac{12(n)^{1/2}\int f^2 \sum_j (j - \frac{1}{2}(k+1))(j-1)\theta}{[k(k^2-1)]^{1/2}},$$

e daí

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(S) = (n)^{1/2}\int f^2 [k(k+1)(k-1)]^{1/2}, \tag{89}$$

positiva $\forall\theta$, e a condição A está satisfeita.

b) $\frac{\partial}{\partial\theta} E_\theta(S)$ não depende de θ e $V_{\theta_0}(S)=1$, logo B está satisfeita.

c) Pelos mesmos motivos apontados em b, C está satisfeita.

d) Segue-se do Teorema 2.5.1 e do comentário b da sub-seção 2.5.2 a normalidade assintótica de S, sob H_{1n} e sob H_0, respectivamente.

e) A eficácia de S vem de (89) e do fato de que $V(S)=1$, e, pela definição 2.1.3, é igual a

$$R^2_{Sn} = n[\int f^2]^2(k(k+1)(k-1)). \tag{90}$$

2.6. Comparações com base na ERA

Como vimos em (6), a eficiência de Pitman de um teste T_1 em relação à T_2 é o limite (em n) da razão das respectivas eficácias. Em (21), (39), (69) e (90) obtivemos as eficácias de T,L,Y e S, a saber

$$R^2_{Tn} = \frac{nk(k+1)(k-1)}{12\sigma^2},$$

$$R^2_{Ln} = nk^2(k-1)[\int f^2]^2,$$

$$R^2_{Yn} = \frac{18n[c_{1n} + \frac{k(k+1)(k-1)}{3} \int h^2]^2}{c_{2n}k(k-1)\{3+2(k-2)\rho_0^n(F)\}}, \text{ e}$$

$$R^2_{Sn} = n[\int f^2]^2[k(k+1)(k-1)].$$

Na tabela 2.6.1 estão as respectivas eficiências assintóticas de Pitman. A (i-j)-ésima entrada é a ERA do teste da j-ésima coluna em relação ao da i-ésima linha. Notar que

$$ERA(T_j,T_i) = [ERA(T_i,T_j)]^{-1}.$$

Como se vê na Tabela 2.6.1, a ERA depende do número de tratamentos, k, e da distribuição das observações, através das constantes σ^2, $[\int f^2]$, $[\int h^2]$ e $\rho^*(F)$. Daremos os valores das ERAS, nas três tabelas seguintes, para as distribuições Normal, Exponencial e Uniforme, para vários valores de k.

TABELA 2.6.1

ERAs de T,L,Y e S

	L	Y	S
T	$\frac{k}{k+1} 12\sigma^2 [\int f^2]^2$	$\frac{24\sigma^2 (k+1) [\int h^2]^2}{3+2(k-2)\rho^*(F)}$	$12\sigma^2 [\int f^2]^2$
L		$\frac{2(k+1)^2 [\int h^2]^2}{k\{3+2(k-2)\rho^*(F)\} [\int f^2]^2}$	$\frac{k+1}{k}$
Y			$\frac{\{3+2(k-2)\rho^*(F)\} [\int f^2]^2}{2(k+1) [\int h^2]^2}$

TABELA 2.6.2

ERAs de T,L,Y e S sob distribuição Normal para vários valores de k

	L		Y		S	
	k	ERA(L,T)	k	ERA(Y,T)		
T	2	0,637	2	0,955	ERA(S,T) ≡ 0,955	
	3	0,716	3	0,963		
	5	0,795	5	0,972		
	10	0,868	10	0,980		
	∞	0,955	∞	0,990		
			k	ERA(Y,L)	k	ERA(S,L)
L			2	1,500	2	1,500
			3	1,345	3	1,333
			5	1,221	5	1,200
			10	1,129	10	1,100
			∞	1,036	∞	1,000
					k	ERA(S,Y)
Y					2	1,000
					3	0,991
					5	0,982
					10	0,974
					∞	0,965

TABELA 2.6.3

ERAs de T,L,Y e S sob distribuição Exponencial para vários valores de k

<table>
<tr><th></th><th>L</th><th>Y</th><th>S</th></tr>
<tr><td>T</td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(L,T)</th></tr><tr><td>2</td><td>2,000</td></tr><tr><td>3</td><td>2,250</td></tr><tr><td>5</td><td>2,500</td></tr><tr><td>10</td><td>2,727</td></tr><tr><td>∞</td><td>3,000</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(Y,T)</th></tr><tr><td>2</td><td>1,500</td></tr><tr><td>3</td><td>1,521</td></tr><tr><td>5</td><td>1,542</td></tr><tr><td>10</td><td>1,562</td></tr><tr><td>∞</td><td>1,586</td></tr></table></td>
<td>ERA(S,T) 3,000</td></tr>
<tr><td>L</td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(Y,L)</th></tr><tr><td>2</td><td>0,750</td></tr><tr><td>3</td><td>0,676</td></tr><tr><td>5</td><td>0,617</td></tr><tr><td>10</td><td>0,615</td></tr><tr><td>∞</td><td>0,530</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(S,L)</th></tr><tr><td>2</td><td>1,500</td></tr><tr><td>3</td><td>1,333</td></tr><tr><td>5</td><td>1,200</td></tr><tr><td>10</td><td>1,100</td></tr><tr><td>∞</td><td>1,000</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Y</td>
<td></td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(S,Y)</th></tr><tr><td>2</td><td>2,000</td></tr><tr><td>3</td><td>1,973</td></tr><tr><td>5</td><td>1,946</td></tr><tr><td>10</td><td>1,921</td></tr><tr><td></td><td>1,891</td></tr></table></td></tr>
</table>

TABELA 2.6.4

ERAs de T,L,Y e S sob distribuição Uniforme para vários valores de k

<table>
<tr><th></th><th>L</th><th>Y</th><th>S</th></tr>
<tr><td>T</td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(L,T)</th></tr><tr><td>2</td><td>0,667</td></tr><tr><td>3</td><td>0,750</td></tr><tr><td>5</td><td>0,833</td></tr><tr><td>10</td><td>0,909</td></tr><tr><td>∞</td><td>1,000</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(Y,T)</th></tr><tr><td>2</td><td>0,889</td></tr><tr><td>3</td><td>0,893</td></tr><tr><td>5</td><td>0,897</td></tr><tr><td>10</td><td>0,901</td></tr><tr><td>∞</td><td>0,906</td></tr></table></td>
<td>ERA(ST)=1</td></tr>
<tr><td>L</td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(Y,L)</th></tr><tr><td>2</td><td>1,333</td></tr><tr><td>3</td><td>1,191</td></tr><tr><td>5</td><td>1,077</td></tr><tr><td>10</td><td>0,991</td></tr><tr><td>∞</td><td>0,907</td></tr></table></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(S,L)</th></tr><tr><td>2</td><td>1,500</td></tr><tr><td>3</td><td>1,333</td></tr><tr><td>5</td><td>1,200</td></tr><tr><td>10</td><td>1,100</td></tr><tr><td>∞</td><td>1,000</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Y</td>
<td></td>
<td></td>
<td><table><tr><th>k</th><th>ERA(S,Y)</th></tr><tr><td>2</td><td>1,125</td></tr><tr><td>3</td><td>1,120</td></tr><tr><td>5</td><td>1,115</td></tr><tr><td>10</td><td>1,110</td></tr><tr><td>∞</td><td>1,104</td></tr></table></td></tr>
</table>

Conforme pode-se ver nas tabelas 2.6.2, 2.6.3 e 2.6.4,de acordo com a ERA e para as três distribuições a que a pesquisa se limitou, não existe um teste que seja uniformemente mais eficiente para todos os valores de k, número de tratamentos. O teste com melhor desempenho geral parece ser o teste S, se considerarmos a Tabela 2.6.5 abaixo, onde para k=5, colocarmos os valores das ERA, para as três distribuições.

TABELA 2.6.5

Eras de T,Y,L e S com k=5 para as distribuições Normal (N), Exponencial (E) e Uniforme (U)

	T	L	Y	S
T		N 0,795 E 2,500 U 0,833	N 0,972 E 1,542 U 0,897	N 0,955 E 3,000 U 1,000
L	N 1,258 E 0,400 U 1,200		N 1,221 E 0,617 U 1,077	N 1,200 E 1,200 U 1,200
Y	N 1,029 E 0,648 U 1,115	N 0,819 E 1,621 U 0,928		N 0,892 E 1,946 U 1,115
S	N 1,047 E 0,333 U 1,000	N 0,833 E 0,833 U 0,833	N 1,121 E 0,514 U 0,897	

Talvez uma maneira de visualizarmos mais facilmente a Tabela 2.6.5 seja através da Tabela 2.6.6, em que separamos as distribuições e onde cada entrada é igual a 1, se o teste da coluna é mais eficiente do que o da linha; 0,5 se são igualmente eficientes e o 0 caso contrário.

TABELA 2.6.6

Comparação de T,L,Y e S, em cada distribuição

Normal

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	-
S	1	0	1	-
Total	3	0	2	1

Exponencial

	T	L	Y	S
T	-	1	1	1
L	0	-	0	1
Y	0	1	-	1
S	0	0	0	-
Total	0	2	1	3

Uniforme

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0,5
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	1
S	0,5	0	0	-
Total	2,5	0	1	2,5

Tanto da comparação do par T,S na Tabela 2.6.5, como da comparação conjunta de todos os testes, a partir dos totais da Tabela 2.6.6, concluímos que T é mais eficiente sob Normalidade; S é mais eficiente sob a Exponencial e ambos são igualmente eficientes sob a Uniforme. Sob Normalidade, ERA(S,T)=0,955 e sob a Exponennencial, ERA(S,T)=3,000. Deve-se notar também que para distribuições com variância σ^2 muito grande em relação a $[\int f^2]^2$ ou $[\int h^2]^2$, como o caso das distribuições Normais "contaminadas", onde aparecem um número maior de "outliers" do que o esperado sob Normalidade, ou mais drasticamente, quando $\sigma^2=\infty$, como na distribuição de Cauchy, podemos ver pela Tabela 2.6.1 que a estatística T perde muita eficiência em relação a L,Y e S, podendo ser 0. Isto pode ser devido ao fato de que as estatísticas não-paramétricas que utilizam postos são muito pouco afetadas por outliers, o que não ocorre com T.

Com base na ERA, os testes L e S se comparam desfavoravelmente a T e S, com vantagem de L para a distribuição Exponencial, vantagem de Y para a Normal, e quase igualdade para a Uniforme.

- o -

CAPÍTULO III

COMPARAÇÕES EM PEQUENAS AMOSTRAS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO

Neste capítulo serão feitas comparações entre os testes T,L,Y e S, descritos no capítulo anterior, com base em pequenas amostras, obtidas por simulação.

Na primeira seção é avaliada a aproximação à distribuição Normal das quatro estatísticas, sob a hipótese nula de igualdade de efeitos de tratamentos, quando a distribuição da variável de observação é Normal, Exponencial ou Uniforme.

Na segunda seção veremos como os testes se comparam em relação ao poder, sob duas distintas hipóteses alternativas: efeitos equi-espaçados e efeitos desigualmente espaçados.

3.1. Aproximação à distribuição Normal

Como vimos no capítulo anterior, as estatísticas T,L,Y e S têm distribuição assintótica Normal sob H_0. Para o estatístico aplicado, interessa, porém, ter uma idéia da velocidade da convergência, já que são muito frequentes experimentos com pequenas amostras, e, neste caso, a aproximação Normal poderia ser inadequada, o que levaria a serem indicados, ou o teste L, por ser "livre de distribuição", como vimos na seção 2.3.2, ou o teste T, da teoria Normal, se houvesse evidência de normalidade da variável de observação. Barlow et. al. (1972), por exemplo, como vimos no Capítulo I, não recomendam o uso de Y, em vista da ausência de estudos sobre sua distribuição em pequenas amostras; e podemos dizer que, pelo menos na revisão bibliográfica que fizemos, também não existem estes estudos a respeito de S.

Para apresentar nossas comparações por simulação, feita no Centro de Computação Eletrônica da USP, devemos recordar que as observações são representadas pelo modelo

$$X_{ij} = b_i + \mu_j + e_{ij} \tag{1}$$

$i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,k$, onde as nk variáveis X_{ij} são independentes, b_i é o efeito do i-ésimo bloco, μ_j é o efeito do j-ésimo tratamento e e_{ij} são os erros.

Como neste primeiro estudo nos interessa a distribuição nula das estatísticas, fixamos $\mu_j=0$, $j=1,2,\ldots,k$. As constantes b_i não influenciam os valores das estatísticas, e foram fixados arbitrariamente em $b_i=i$, $i=1,2,\ldots,n$. Os erros e_{ij} foram gerados como amostras casuais de três distribuições: Normal, com média 0 e variância 1, Exponencial com média e variância 1 e Uniforme com média $\sqrt{12}/2$ e variância 1. (As variâncias foram uniformizadas por uma razão que aparecerá na seção seguinte.)

Sob cada uma das distribuições dos erros, foram geradas 1.000 amostras para cada uma das nove combinações possíveis de k, número de tratamentos, e n, número de blocos, com k=3,5 e 10 e n=5,10 e 15. (As sub-rotinas utilizadas são dadas em Apêndice).

Os valores de L e Y foram padronizados da maneira recomendada em 2.3.1 e 2.4.1, a saber:

$$\frac{L-E_0(L)}{[V_0(L)]^{1/2}}, \quad \frac{Y-E_0(Y)}{[\hat{V}_0(Y)_1]^{1/2}},$$

As estatísticas T e S, como as definimos em 2.2.1a e 2.5.1b, já são padronizadas.

Em cada grupo de 1.000 amostras, foram ordenados os valores padronizados de T,L,Y e S, e construída a função de distribuição empírica.

$$Q(x) = \hat{P}_r(X \leqslant x) = \frac{\text{números de observações X tais que } X \leqslant x}{1.000} \qquad (2)$$

O que nos propusemos, então, a varificar, é a proximidade de Q(x) em (2) em relação à $\Phi(x)$, onde $\Phi(.)$ é a função distribuição da Normal (0,1). A medida de proximidade utilizada para este fim foi a estatística K, de Kolmogorov,

$$K = \sup_x |Q(x) - \Phi(x)| . \qquad (3)$$

Como esta estatística mede aderência em todo o campo de variação de x, julgamos oportuno dar ao leitor, além do valor de K, alguns quantis superiores de Q(.), para ser ter uma idéia da proximidade de Q(x) e $\Phi(x)$ nas caudas, já que, no contexto de testes de hipóteses, esses quantis superiores são usados como critério de rejeição.

Os resultados, para a distribuição Normal, encontram-se na Tabela 3.1.1. Na primeira coluna colocamos os quantis da Normal, para facilitar a comparação.

TABELA 3.1.1

Aderência de T,L,Y e S à distribuição Normal quando a variável de observação tem distribuição Normal

	Quantis	N(0,1)	k=3 T	k=3 L	k=3 Y	k=3 S	k=5 T	k=5 L	k=5 Y	k=5 S	k=10 T	k=10 L	k=10 Y	k=10 S
n=5	Q(0,80)	0,842	0,916	0,949	0,889	0,907	0,900	0,894	0,869	0,863	0,861	0,789	0,821	0,798
	Q(0,90)	1,282	1,408	1,265	1,299	1,396	1,345	1,342	1,303	1,277	1,293	1,195	1,260	1,148
	Q(0,95)	1,645	1,947	1,581	1,710	1,647	1,788	1,610	1,676	1,573	1,641	1,569	1,610	1,551
	Q(0,99)	2,326	2,833	2,214	2,257	2,290	2,483	2,236	2,172	2,223	2,348	2,366	2,180	2,240
	K	-	0,027	0,086**	0,054**	0,024	0,029	0,038	0,034	0,025	0,021	0,029	0,025	0,021
n=10	Q(0,80)	0,842	0,939	0,894	0,905	0,811	0,744	0,822	0,774	0,826	0,896	0,897	0,907	0,835
	Q(0,90)	1,282	1,363	1,342	1,370	1,237	1,195	1,265	1,149	1,241	1,340	1,311	1,337	1,257
	Q(0,95)	1,645	1,789	1,789	1,628	1,598	1,649	1,581	1,525	1,684	1,641	1,598	1,677	1,566
	Q(0,99)	2,326	2,377	2,236	2,249	2,350	2,319	2,277	2,322	2,226	2,472	2,392	2,298	2,361
	K	-	0,039	0,054**	0,034	0,022	0,031	0,036	0,027	0,013	0,034	0,028	0,034	0,018
n=15	Q(0,80)	0,842	0,828	0,730	0,835	0,865	0,830	0,826	0,823	0,826	0,848	0,887	0,890	0,793
	Q(0,90)	1,282	1,332	1,278	1,325	1,301	1,297	1,239	1,255	1,264	1,321	1,329	1,338	1,281
	Q(0,95)	1,645	1,756	1,643	1,699	1,655	1,596	1,549	1,673	1,613	1,643	1,601	1,638	1,675
	Q(0,99)	2,326	2,345	2,373	2,247	2,336	2,214	2,014	2,104	2,074	2,400	2,343	2,376	2,338
	K	-	0,013	0,038	0,016	0,016	0,028	0,023	0,023	0,019	0,018	0,024	0,020	0,029

Observação: Os valores críticos de K aos níveis de significância de 0,05 e 0,01 são, respectivamente, 0,043 e 0,052. Assim, os símbolos * e ** acima indicam significância aos níveis de 0,05 e 0,01, respectivamente. Idem para as tabelas 3.1.2 e 3.1.3.

Como podemos ver pela Tabela 3.1.1, a convergência das distribuições T,L,Y e S à Normal é bastante rápida, sob a distribuição Normal dos erros e_{ij}, quando o critério de aproximação é a estatística K. Apenas as estatísticas L e Y apresentaram resultados altamente significantes, assim mesmo para k=3 e n=5 e 10. O pior ajustamento é sem dúvida o da estatística L, devido provavelmente ao seu caráter mais discreto do que Y e S, isto é, embora as três sejam discretas, L assume um conjunto de valores bem menor do que Y e S.

As estatísticas T e S não apresentam resultados de K altamente significantes.

Os resultados parecem indicar uma convergência mais rápida em k do que em n.

Os resultados da Tabela 3.1.2, na página seguinte, são semelhantes aos da Tabela 3.1.1., mas a convergência à Normal não é tão rápida, aliás como seria de se esperar.

As estatísticas S e T continuam com bom ajustamento, mas note o leitor, na coluna onde k=3, que os valores de K para S são consistentemente menores do que os de T, o que se dá provavelmente pelo fato de que T é calculada com base nos valores das observações, e S é calculada com base nos postos das observações; deste modo, o caráter fortemente assimétrico da Exponencial praticamente não influencia S.

TABELA 3.1.2

Aderência de T,L,Y e S à distribuição Normal
quando a variável de observação tem distribuição Exponencial

	Quantis	N(0,1)	k=3 T	k=3 L	k=3 Y	k=3 S	k=5 T	k=5 L	k=5 Y	k=5 S	k=10 T	k=10 L	k=10 Y	k=10 S
n=5	Q(0,80)	0,842	0,944	0,949	0,889	0,864	0,818	0,894	0,869	0,897	0,778	0,870	0,778	0,800
	Q(0,90)	1,282	1,492	1,265	1,299	1,270	1,262	1,252	1,303	1,378	1,240	1,277	1,238	1,198
	Q(0,95)	1,645	1,878	1,581	1,710	1,604	1,655	1,521	1,552	1,798	1,670	1,537	1,544	1,499
	Q(0,99)	2,326	2,589	2,214	2,120	2,135	2,248	2,057	2,110	2,293	2,369	2,122	2,202	2,374
	K	-	0,033	0,081*	0,050*	0,020	0,019	0,043*	0,029	0,020	0,024	0,018	0,016	0,023
n=10	Q(0,80)	0,842	0,775	0,894	0,801	0,865	0,828	0,822	0,821	0,901	0,869	0,874	0,873	0,814
	Q(0,90)	1,282	1,203	1,118	1,163	1,381	1,274	1,265	1,220	1,328	1,300	1,299	1,329	1,285
	Q(0,95)	1,645	1,545	1,565	1,473	1,792	1,594	1,581	1,525	1,607	1,669	1,598	1,668	1,612
	Q(0,99)	2,326	2,182	2,012	2,042	2,300	2,275	2,277	2,205	2,193	2,298	2,242	2,182	2,066
	K	-	0,036	0,065*	0,039	0,024	0,010	0,020	0,019	0,027	0,017	0,016	0,018	0,027
n=15	Q(0,80)	0,842	0,823	0,913	0,807	0,868	0,884	0,878	0,850	0,802	0,863	0,897	0,863	0,788
	Q(0,90)	1,282	1,328	1,278	1,239	1,214	1,307	1,291	1,320	1,234	1,276	1,300	1,310	1,251
	Q(0,95)	1,645	1,736	1,643	1,757	1,700	1,618	1,652	1,660	1,650	1,640	1,638	1,601	1,598
	Q(0,99)	2,326	2,499	2,373	2,276	2,215	2,383	2,324	2,274	2,187	2,282	2,211	2,136	2,406
	K	-	0,036	0,044*	0,027	0,017	0,023	0,033	0,022	0,018	0,015	0,039	0,025	0,018

Observação: (vide rodapé da Tabela 3.1.1)

TABELA 3.1.3

Aderência de T,L,Y e S à distribuição Normal quando a variável de observação tem distribuição Uniforme

			k=3				k=5				k=10			
	Quantis	N(0,1)	T	L	Y	S	T	L	Y	S	T	L	Y	S
n=5	Q(0,80)	0,842	0,871	0,949	0,889	0,899	0,954	0,894	0,931	0,847	0,841	0,870	0,865	0,815
	Q(0,90)	1,282	1,376	1,265	1,299	1,399	1,409	1,342	1,365	1,316	1,243	1,260	1,238	1,310
	Q(0,95)	1,645	1,809	1,581	1,573	1,623	1,827	1,699	1,738	1,617	1,578	1,537	1,522	1,687
	Q(0,99)	2,326	2,633	1,897	2,120	2,219	2,691	2,326	2,296	2,215	2,349	2,122	2,311	2,278
	K	-	0,019	0,096**	0,038	0,028	0,025	0,024	0,031	0,028	0,024	0,012	0,018	0,017
n=10	Q(0,80)	0,842	0,799	0,894	0,801	0,888	0,848	0,885	0,868	0,887	0,844	0,793	0,816	0,808
	Q(0,90)	1,282	1,245	1,342	1,215	1,302	1,361	1,265	1,361	1,273	1,256	1,219	1,246	1,205
	Q(0,95)	1,645	1,667	1,565	1,680	1,564	1,803	1,644	1,712	1,697	1,606	1,564	1,619	1,653
	Q(0,99)	2,326	2,633	2,236	2,300	2,177	2,668	2,466	2,463	2,270	2,172	2,288	2,173	2,340
	K	-	0,037	0,070**	0,043*	0,049*	0,017	0,019	0,018	0,023	0,018	0,015	0,017	0,014
n=15	Q(0,80)	0,842	0,845	0,913	0,835	0,797	0,783	0,775	0,797	0,814	0,886	0,878	0,895	0,874
	Q(0,90)	1,282	1,368	1,278	1,325	1,238	1,240	1,291	1,255	1,240	1,321	1,319	1,333	1,261
	Q(0,95)	1,645	1,705	1,643	1,642	1,599	1,605	1,652	1,660	1,620	1,684	1,695	1,730	1,644
	Q(0,99)	2,326	2,489	2,191	2,189	2,192	2,522	2,582	2,444	2,322	2,347	2,390	2,385	2,566
	K	-	0,024	0,031	0,022	0,016	0,024	0,035	0,030	0,027	0,035	0,022	0,027	0,018

Observação: (vide rodapé da Tabela 3.1.1)

Nossos comentários em relação a Tabela 3.1.3, da página anterior, são semelhantes aqueles para as duas tabelas anteriores. O fato de S apresentar um valor significante de k para a combinação k=3 e n=10, deverá ser imputado a uma flutuação amostral, já que, para esta combinação, todas as estatísticas tem valores de K anormalmente altos.

A estatística Y, conforme havíamos comentado no Capítulo anterior, sub-seção 2.4.2, apresenta quantis superiores constantemente menores do que os quantis da Normal, especialmente para k=3, indicando seu caráter conservador, mas esta qualidade quase desaparece para k=5, e não é notada para k=10.

Concluindo a seção, e, em vista dos resultados obtidos para as três distribuições, justifica-se basearmos os estudos sobre poder, da próxima seção, na regra de decisão aproximada, dada pela distribuição Normal. No caso da estatística L, para k=3 e n=5, usaremos os valores críticos dados por Page (1963), embora estes valores não correspondam a níveis exatos, dada a distribuição discreta de L. Os valores de Page implicam em regras de decisão conservadoras.

3.2. Comparações Quanto ao Poder em Pequenas Amostras

Nesta seção será descrito o estudo sobre o comportamento do poder dos testes, sob a distribuição Normal, Exponencial e Uniforme, e sob duas diferentes configurações dos efeitos dos tratamentos quanto ao espaçamento.

3.2.1 - Poder no Caso de Espaçamentos Iguais

Lembramos novamente nosso modelo (1) em que as observações são dadas por

$$X_{ij} = b_i + \mu_j + e_{ij}.$$

Na seção anterior fizemos $\mu_j=0$, $j=1,2,\ldots,k$, para estudarmos a distribuição nula de T,L,Y e S. Aqui iremos verificar o comportamento destas estatísticas sob a hipótese alternativa, isto é, quando $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k$, e, nesta sub-seção, quando $\mu_j - \mu_{j-1} = c$, uma constante positiva, $j=2,3,\ldots,k$.

Por impossibilidade de realizarmos o estudo com todas as combinações possíveis de k e n, usadas na seção anterior, devido ao alto custo de computação, fizemos o estudo apenas sobre a combinação <u>a</u> onde k=3 e n=5; combinação <u>b</u>, com k=10 e n=5, e combinação <u>c</u>, com k=10 e n=15. (Ainda uma outra combinação, com k=5 e n=10, poderá ser encontrada na sub-seção seguinte.) Esses valores de (k,n) foram escolhidos de modo a termos informação sobre uma grande amplitude de variação de k e n (que cobre a grande maioria das aplicações práticas que temos visto) e de modo a, quando passamos da combinação <u>a</u> à <u>b</u>, observarmos as mudanças no poder quando k aumenta e n é constante, e quando passamos de <u>b</u> a <u>c</u>, observarmos o que ocorre quando fixamos k e aumentamos n.

Foram estimados os valores do poder dos testes em três pontos, escolhidos de forma a refletir um distanciamento progressivo da H_0. Estes pontos serão denotados por $\underset{\sim}{\mu}_h=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$, h=1, 2,3, e são para k=3,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mu}_1 &= (0,00;\ 0,10;\ 0,20) \\ \underset{\sim}{\mu}_2 &= (0,00;\ 0,30;\ 0,60) \qquad (4) \\ \underset{\sim}{\mu}_3 &= (0,00;\ 0,50;\ 1,00) \end{aligned}$$

e para k=10 são

$$\underset{\sim}{\mu}_1 = (0{,}00;\ 0{,}02;\ 0{,}04;\ 0{,}07;\ldots\ldots\ldots 0{,}18;\ 0{,}20),$$
$$\underset{\sim}{\mu}_2 = (0{,}00;\ 0{,}07;\ 0{,}13;\ 0{,}20;\ldots\ldots\ldots 0{,}53;\ 0{,}60),\ \text{e} \qquad (5)$$
$$\underset{\sim}{\mu}_3 = (0{,}00;\ 0{,}11;\ 0{,}22;\ 0{,}33;\ldots\ldots\ldots 0{,}89;\ 1{,}00).$$

Temos algumas observações a fazer a respeito da escolha dos $\underset{\sim}{\mu}_h$. Primeiro, eles são os mesmos para as três distribuições dos e_{ij}, Normal, Exponencial e Uniforme, porque elas têm o mesmo desvio padrão, 1, como vimos na seção 3.1, de modo que ficam justificadas comparações entre diferentes distribuições.

Em segundo lugar, notemos que a última componente dos vetores $\underset{\sim}{\mu}_h$ é a mesma em (4) e (5), isto é, $\mu_3=\mu_{10}$ em $\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\mu}_2$ e $\underset{\sim}{\mu}_3$. Escolhemos desta maneira para compensar o aumento de poder, quando se aumenta k, com um menor espaçamento entre os efeitos, Este procedimento, assim como o valor absoluto das constantes, são, a rigor, arbitrários, mas foram sugeridos por estudos semelhantes, como por exemplo Barlow et. al. (1972) e Migon (1974).

Para cada distribuição dos e_{ij}, e para cada uma das três combinações k e n, a,b e c dadas acima, e para cada um dos vetores $\underset{\sim}{\mu}_h$ em (4) e (5), foram geradas 500 amostras, calculadas as estatísticas T,L,Y e S, e anotadas as proporções de rejeição de H_0, ou seja, foram feitas estimativas do poder nos pontos $\underset{\sim}{\mu}_h$, h=1,2,3. Foi adotado, em todas as situações, o nível de significância 0,05, isto é, a regra de decisão que rejeita H_0 para valores da estatística maiores que 1,645. Usamos então, a aproximação Normal para a distribuição das estatísticas, exceto para k=3 e n=5 e estatística L, que, como vimos na seção anterior, tem distribuição muito diferente da Normal. Assim, usamos o valor crítico dado por Page (1963), isto é, rejeitamos H_0 para L (padronizada) maior que 1,897. Os resultados encontram-se na Tabela 3.2.1. Para a Tabela ficar mais completa, incluimos o poder também em H_0 (a partir das saídas do computador usadas na seção 3.1), isto é, estimamos o poder também no ponto $\underset{\sim}{\mu}_0=(0,00;\ 0,00;\ \ldots;\ 0,00)$.

Devemos primeiramente observar quanto aos valores da Tabela 3.2.1, na página seguinte, que as regras de decisão aplicadas aos testes T e L, na situação a, são inadequadas: o teste T rejeita H_0 em uma proporção muito alta quando H_0 é verdadeira, e o teste L em uma proporção muito baixa. Como para a estatística T foi usada a regra de decisão aproximada, rejeitar H_0 se $T \geq z_\alpha$, isto seria de se esperar, uma vez que a estatística T, sob a Normal, por exemplo, tem distribuição nula de Student, com cauda mais "pesada" que a Normal. Por outro lado, a estatística L, como dissemos anteriormente, é discreta, e como não se consegue o nível exato de 0,05, os valores críticos indicados por Page (1963) induzem a testes conservadores.

Estas distorções quanto ao tamanho dos testes levam a curvas de poder que contrariam a expectativa do ponto de vista teórico: sob a Exponencial, por exemplo, na situação a, seria de se esperar que os valores da curva de poder de L fossem superiores aos de T, já que ERA(L,T)=2,250. Se utilizarmos, no entanto, como valores críticos os quantis das distribuições nulas de T e L estimados no estudo da seção anterior (veja Tabela 3.1.2), a saber, 1,878 e 1,581, respectivamente, teremos, no caso da Exponencial, ao invés dos valores que constam na Tabela 3.2.1, situação a, as seguintes estimativas de poder "corrigidas":

TABELA 3.2.1

Poder (X 1000) estimado para diferentes combinações de (k,n) com espaçamentos iguais entre os efeitos

		Normal				Exponencial				Uniforme			
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
(a) k=3 n=5	T	74	102	270	476	72	92	266	510	66	136	250	444
	L	45	54	188	292	41	90	150	480	31	60	150	270
	Y	62	78	222	382	55	100	300	532	44	82	192	368
	S	50	100	246	386	44	112	322	554	47	74	208	368
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
(b) k=10 n=5	T	50	114	394	710	55	132	396	706	42	134	402	736
	L	39	124	338	642	39	186	588	888	40	126	358	650
	Y	46	114	352	674	41	146	512	828	37	122	368	686
	S	43	124	374	684	43	164	544	858	54	126	370	686
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
(c) k=10 n=15	T	50	148	786	984	50	206	732	984	56	192	740	984
	L	45	144	730	974	50	358	940	1000	58	170	696	966
	Y	49	168	770	980	44	288	878	1000	56	186	718	978
	S	52	158	760	982	45	282	910	1000	50	172	690	974

<u>Observação</u>: Os vetores $\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\mu}_2, \underset{\sim}{\mu}_3$ para k=3 são dados em (4), e para k=10 são dados em (5). Os vetores $\underset{\sim}{\mu}_0$ têm todas as componentes iguais a zero.

	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
T	50	76	254	498
L	50	116	490	636

O procedimento que nos levou às estimativas de poder "corrigidas" acima, ou seja, basear a regra de decisão em quantis da distribuição nula obtida por simulação, é sugerido por Hope (1968) e Birnbaum (1974), que mostram suas ótimas propriedades. Vê-se pelos valores acima que adotando-se regras de decisão mais adequadas, voltamos a ficar em paz com a teoria, neste caso. No capítulo IV, verificaremos o ajustamento dos valores teóricos obtidos pelas ERAs com os valores da curva de poder obtidos por simulação

Verifiquemos agora o que ocorre quando passamos da situação a, onde k=3, à situação b, onde k=10, sendo em ambas n=5. Talvez uma maneira mais fácil de se perceber o desempenho dos testes seja observar a Figura 3.2.2, feita a partir da Tabela 3.2.1, onde estão colocados os testes em ordem quanto ao poder. O critério de composição da Figura 3.2.2 é o seguinte: a) quando há inversão, para dois testes de valores das estimativas do poder em $\underset{\sim}{\mu}_1$, $\underset{\sim}{\mu}_2$ ou $\underset{\sim}{\mu}_3$, ou b) quando as estimativas nos pontos $\underset{\sim}{\mu}_2$ ou $\underset{\sim}{\mu}_3$ não se diferenciarem por mais de 0,02 (na Tabela 3.2.1, 20 equivale a 0,02), os dois testes são considerados como tendo poder igual, e são ligados pelo sinal "="; caso contrário, o teste de maior poder é escrito à esquerda do outro, e ligados pelo sinal ">". Os testes T e L não aparecem na combinação a porque, como vimos, para esta combinação os valores (estimados) do poder estão muito comprometidos pelo tamanho real dos testes.

FIGURA 3.2.2

Posição dos testes quanto ao poder com n fixo

Combinação a (k=3)		Combinação b (k=10)
	Normal	
S>Y		T>S>Y>L
	Exponencial	
S>Y		L>S>Y>T
	Uniforme	
S=Y		T>S=Y>L

Os resultados indicam que devemos preferir o teste T para grandes valores de k (e pequenos de n) se a distribuição é Normal ou Uniforme, e L se a distribuição é Exponencial. Parece-nos, tentando uma generalização, que T se manifesta superior, quanto ao poder, para distribuições aproximadamente simétricas, e L é superior para distribuições marcadamente assimétricas. O bom desempenho de L, que melhora em termos relativos quando k aumenta, mesmo para distribuições simétricas, ajusta-se aos resultados de Pirie (1974), que mostra que os testes "whithin blocks" tem eficiência assintótica (em k) superior aos testes "among blocks", como Y.

Os dois testes T e L, porém, são contra-indicados para pequenos valores de k e n, pelas considerações iniciais que fizemos quanto à inadequação de suas regras de decisão. Sob normalidade, no entanto, deverá ser utilizado T, mas com regra de decisão baseada na distribuição de Student. Sob não normalidade, recomenda-se S, apenas ligeiramente superior a Y quanto ao poder, mas que parece controlar melhor o erro de primeira espécie e é menos trabalhoso do ponto de vista de cálculo. Se lembrarmos as considerações sobre a ERA que fizemos ao final do Capítulo anterior, S é especialmente indicado, em substituição a T, se a distribuição tiver um grande número de "outliers".

Como nas combinações a e b passamos de k=3 a k=10, dois valores extremos de k do ponto de vista prático, o leitor poderá verificar a consistência destas considerações consultando a Tabela 3.2.2, na situação a, "efeitos equi-espaçados", onde temos um valor intermediário de k, ou seja k=5 (embora, na Tabela 3.2.2, temos n=10).

Quando passamos da situação b à situação c, isto é, quando n passa de 5 a 15, mantendo-se fixo k=10, os resultados podem ser resumidos na Figura 3.2.3, com as mesmas convenções da Figura 3.2.2.

FIGURA 3.2.3

Posição dos testes quanto ao poder com k fixo

Situação b (n=5)		Situação c (n=15)
	Normal	
T>S=Y>L		T=S=Y>L
	Exponencial	
L>S>Y>T		L>S=Y>T
	Uniforme	
T>S=Y>L		T>Y>S=L

Um exame da Tabela 3.2.1 e da Figura 3.2.3 nos indica que, quando n aumenta, os testes conservam sua posição relativa, quanto ao poder, mas cada vez se diferenciam menos. Este comportamento seria de se esperar, já que todos os testes são consistentes, sob condições frequentemente satisfeitas nas aplicações práticas (Hollander (1967)).

As observações que fizemos com respeito à Figura 3.2.2 se simplificam para a figura 3.2.3: para grandes valores de n, devemos usar T para distribuições simétricas e L para assimétricas. Para estes valores altos de k e n a distribuição das quatro estatísticas é muito próxima da normal, e a regra de decisão aproximada é muito boa, como se vê pelas estimativas de poder no ponto $\underset{\sim}{\mu}_0$.

3.2.2 - Efeitos Desigualmente Espaçados

Para este estudo foram fixados k=5 e n=10. As curvas de poder foram estimadas em três situações: na situação a, voltamos a ter efeitos equi-espaçados, para obtermos um padrão de comparação, e o poder foi estimado nos pontos:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mu}_0 &= (0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00;\ 0,00) \\ \underset{\sim}{\mu}_1 &= (0,00;\ 0,05;\ 0,10;\ 0,15;\ 0,20) \\ \underset{\sim}{\mu}_2 &= (0,00;\ 0,15;\ 0,30;\ 0,45;\ 0,60) \\ \underset{\sim}{\mu}_3 &= (0,00;\ 0,25;\ 0,50;\ 0,75;\ 1,00) \end{aligned} \tag{6}$$

Na situação b as diferenças entre os efeitos são "parcialmente desiguais". Nesta situação os pontos $\underset{\sim}{\mu}_h$, h=1,2,3, foram

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mu}_1 &= (0,00;\ 0,00;\ 0,10;\ 0,20;\ 0,20) \\ \underset{\sim}{\mu}_2 &= (0,00;\ 0,00;\ 0,30;\ 0,60;\ 0,60) \\ \underset{\sim}{\mu}_3 &= (0,00;\ 0,00;\ 0,50;\ 1,00;\ 1,00) \end{aligned} \tag{7}$$

e na situação c, as diferenças entre os efeitos são "extremamente desiguais". Nesta situação,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mu}_1 &= (0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}50) \\ \underset{\sim}{\mu}_2 &= (0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 1{,}50) \\ \underset{\sim}{\mu}_3 &= (0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 0{,}00;\ 2{,}50) \end{aligned} \tag{8}$$

As escolhas dos vetores (6), (7) e (8) é arbitrária, mas note o leitor que a soma dos efeitos é constante para os vetores $\underset{\sim}{\mu}_h$ correspondentes, h=1,2,3.

Os resultados podem ser vistos na Tabela 3.2.4 na página seguinte. O que primeiro se nota nesta tabela é que todos os testes, em todos os pontos e para as três distribuições, aumentam seu poder quando se passa de a a b e de b a c.

Vejamos o que ocorre com a posição relativa dos testes. Hollander (1967) calcula a ERA(S,T) e ERA(Y,T) sob a mesma sequência de alternativas que adotamos em (9) do Capítulo II, com os efeitos dos tratamentos equi-espaçados, e afirma que essas ERAs não se alteram se os efeitos, na sequência de alternativas, forem quaisquer. Baseados nesta afirmação, poderíamos esperar que não houvessem alterações nas posições relativas dos testes. A Figura 3.2.5, baseada na Tabela 3.2.4, com as convenções da Figura 3.2.2, ilustra o ocorrido.

Os resultados não confirmam, do ponto de vista prático, o que seria de se esperar da afirmação de Hollander comentada acima. Há muitas inversões nas posições relativas dos testes, e em um grande número de situações as posições são iguais ou indefinidas. Duas tendências no entanto parecem consistentes: Y perde posição

TABELA 3.2.4

Poder (X 1000) estimado para diferentes configurações de espaçamentos para k=5 e n=10

		Normal				Exponencial				Uniforme			
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
Situação (a) efeitos equi-espaçados	T	51	120	436	812	43	132	486	788	67	130	424	806
	L	33	100	358	696	37	148	610	904	40	106	348	670
	Y	40	120	434	780	48	136	554	888	54	116	374	742
	S	53	116	412	768	44	142	564	896	55	126	392	756
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
Situação (b) diferenças entre efeitos "parcialmente desiguais"	T	51	200	574	906	43	156	594	910	67	166	598	910
	L	33	144	442	828	37	172	706	950	40	140	474	786
	Y	40	192	520	884	48	168	678	950	54	160	542	874
	S	53	196	540	898	44	166	712	962	55	168	550	872
		$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$	$\underset{\sim}{\mu}_0$	$\underset{\sim}{\mu}_1$	$\underset{\sim}{\mu}_2$	$\underset{\sim}{\mu}_3$
Situação (c) diferenças entre efeitos "extremamente desiguais"	T	51	276	908	998	43	314	888	994	67	250	908	996
	L	33	224	782	988	37	348	854	966	40	204	754	952
	Y	40	252	778	906	48	290	778	854	54	196	748	862
	S	53	252	864	988	44	324	884	980	55	192	822	984

Observação: Os vetores $\underset{\sim}{\mu}_0, \underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\mu}_2$ e $\underset{\sim}{\mu}_3$ para as situações a,b,c são dados, respectivamente, em (6), (7) e (8).

FIGURA 3.2.5

Posição dos testes quanto ao poder com k=5 e n=10 com a efeitos equi-espaçados, b efeitos com diferenças "parcialmente desiguais" e c diferenças "extremamente desiguais"

a	b	c
	Normal	
T>Y>S>L	T>S>Y>L	L>S>L=Y
	Exponencial	
L>S=Y>T	S=L>Y>T	T=S=L>Y
	Uniforme	
T>S=Y>L	T=S=Y>L	T>S=L>Y

relativa sob as três distribuições, e T melhora sua posição, conforme aumenta a assimetria entre os efeitos e o distanciamento de H_0. Cabe discutir esse comportamento de T, já que T passa a superar L,Y e S sob a Exponencial na situação c, no ponto $\underset{\sim}{\mu}_3$, um resultado totalmente inesperado, tanto do ponto de vista teórico (ERA (L,T) = 2,500; ERA(Y,T)=1,542, ERA(S,T)=3,00)), como pelos resultados de simulação vistos até aqui. Parece-nos que o resultado se explica se lembrarmos novamente que T se baseia nas observações, e L,Y e S nos postos de observações. Esta característica, que implica em desvantagem de T quando há grande número de "outliers", mascarando os efeitos dos tratamentos, torna-se vantagem quando um dos efeitos se distancia muito dos outros, já que L,Y e S são pouco sensíveis a efeitos marcadamente assimétricos, quando os outros efeitos permanecem aproximadamente iguais, porque se baseiam em postos.

Em resumo, podemos dizer que, pelo menos nas configurações (arbitrárias) escolhidas aqui, os testes melhoram substancialmente quanto ao poder, mas suas posições relativas ficam indefinidas, com tendência de Y piorar sua posição. Os resultados indicam, ainda, que T pode compensar suas deficiências em distribuições assimétricas com um ganho elevado de poder no caso de diferenças de efeitos "extremamente desiguais".

- o -

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

Neste estudo estivemos envolvidos essencialmente com a questão: quando se está diante de um teste com hipótese alternativa (completamente) ordenada, em um planejamento com blocos completos casualizados, qual solução escolher, entre as disponíveis na literatura, em face de uma dada situação experimental.

Uma seleção inicial eliminou os testes ainda pouco desenvolvidos, ou não factíveis do ponto de vista prático, e indicou que quatro testes reuniam boas propriedades, os testes T,L,Y e S, que julgamos ser bem representativos do conjunto de soluções que encontramos. Estes testes foram descritos no Capítulo II.

Os quatro testes são definidos por estatísticas assintóticamente normais, porém não havia idéia da qualidade da aproximação em termos concretos, isto é, com amostras de tamanho finito, e, em geral, pequenas. Fizemos um estudo à respeito no Capítulo III, por simulação, e concluímos que, com base na estatística de Kolmogorov, a aproximação é boa, principalmente para a estatística S. Para valores pequenos do número de tratamentos e blocos, para os quais o número total de observações é menor do que 30, a estatísti L não se ajusta bem à Normal, e a regra de decisão baseada nos valores críticos dados por seu autor revelou-se muito conservadora. Verificou-se ainda que a estatística T deve ser utilizada com cautela, já que ela não controla bem o erro de primeira espécie, no caso de poucas observações. Neste caso, recomenda-se seu uso, com a regra de decisão exata, apenas quando há certeza de que a distribuição das observações é Normal.

Os quatro testes foram comparados quanto ao poder, do ponto de vista teórico, no Capítulo II, através da Eficiência Relativa Assintótica (ERA) de Pitman. Do ponto de vista de aplicações práticas, fizemos um estudo no Capítulo III, por simulação de pequenas amostras. Para compararmos as conclusões dos Capítulos II e III, vamos reproduzir a Tabela 2.6.6, do Capítulo II, juntamente com uma análoga, feita a partir da Figura 3.2.5 do Capítulo III (com base na situação a). Veja a Tabela 4.1, na página seguinte. Nesta figura, a (i-j)-ésima entrada é 1 se o teste da j-ésima coluna é superior ao teste da i-ésima linha, zero em caso contrário e 0,5 se há empate. (No estudo por simulação, as entradas dependem do critério adotado).

Como vemos pelos totais no rodapé de cada sub-tabela da Tabela 4.1, os testes têm igual comportamento sob a distribuição Normal, tanto do ponto de vista teórico quanto prático. No caso da distribuição Exponencial, há uma inversão importante: o teste L têm um poder consistentemente maior em amostras simuladas do que o teste S, mas seria de se esperar o contrário do ponto de vista teórico, uma vez que ERA(S,L)=1,2. Não nos ocorre nenhuma explicação para este fato.

Ainda sob a distribuição Exponencial, esperaríamos um melhor desempenho de S em relação a Y, mas há "empate" em amostras simuladas.

TABELA 4.1

Comparação entre os resultados teóricos e práticos

(k=5, n=10; efeitos igualmente espaçados)

Normal

ERA

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	0
S	1	0	1	-
Total	3	0	2	1

SIMULAÇÃO

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	0
S	1	0	1	-
Total	3	0	2	1

Exponencial

	T	L	Y	S
T	-	1	1	1
L	0	-	0	1
Y	0	1	-	1
S	0	0	0	-
Total	0	2	1	3

	T	L	Y	S
T	-	1	1	1
L	0	-	0	0
Y	0	1	-	0,5
S	0	1	0,5	-
Total	0	3	1,5	1,5

Uniforme

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0,5
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	1
S	0,5	0	0	-
Total	2,5	0	1	2,5

	T	L	Y	S
T	-	0	0	0
L	1	-	1	1
Y	1	0	-	0,5
S	1	0	0,5	-
Total	3	0	1,5	1,5

Para a distribuição Uniforme, esperávamos "empate" de S e T, mas na prática T se mostra mais poderoso que S. Novamente há um "empate" não esperado de S e Y.

De maneira geral, sentimos que essas quatro estatísticas se comportam, na prática, mais igualmente do que se espera se observarmos os valores das ERAs. Isto é, embora o comportamento em pequenas amostras seja razoavelmente bem previsto pelas ERAs, as diferenças reais de poder parecem ser, em muitos casos, insignificantes. E as diferenças ainda diminuem conforme aumenta o tamanho da amostra. Nessa perspectiva, o teste L melhora muito sua posição, já que, dos testes estudados, era dos mais fracos quanto à ERA, em distribuições simétricas. Deve-se ainda lembrar que L é o único entre os quatro que opera a níveis exatos (embora as tabelas disponíveis sejam precaríssimas), e é o mais fácil de ser aplicado.

Uma limitação de nosso trabalho foi obtermos amostras apenas das distribuições Normal, Exponencial e Uniforme. Se tivéssemos acesso a mais tempo de computação, teríamos observado os testes sob a distribuição de Cauchy, e avaliado o efeito das caudas "pesadas".

No estudo feito por simulação, as curvas de poder foram avaliadas em duas situações: efeitos equi-espaçados e efeitos desigualmente espaçados. Constatou-se que o poder dos testes aumenta conforme a configuração dos efeitos e se afasta do equi-espaçamento. Em configurações de efeitos assimétricos, os valores das ERAs parecem explicar muito mal o desempenho relativo dos testes quanto ao poder. Em configurações muito assimétricas, o teste T melhora seu desempenho relativo.

Em resumo, respondendo à questão que nos propusemos, recomendamos o teste S, com regra de decisão aproximada Normal, para amostras pequenas. (Nossa sugestão é considerar amostras pequenas aquelas que tenham até trinta observações, no total. Um número maior de simulações precisaria ser feito, para recomendações mais precisas). Se há certeza de que as observações têm distribuição Normal, deve-se usar o teste T, com regra de decisão exata, baseada na distribuição de Student.

Para amostras grandes devemos usar o teste T, com regra de decisão aproximada, se pudermos supor que a distribuição das observações é simétrica. Se, ao contrário, há evidência de assimetria, devemos usar L, com regra aproximada.

Nos casos em que há suspeita de numerosos "outliers", T deve ser evitado, devido a considerações teóricas. Como não fizemos simulação deste tipo de distribuição, recomendamos L, para ficarmos do lado seguro.

Um estudo interessante, não abordado aqui, mas realizado em algumas situações por Barlow et al. (1972), seria estudar o comportamento dos testes quanto ao poder, mas no caso em que nem H_0 nem H_1 são verdadeiras, ou seja, os efeitos não são iguais, nem estão ordenados segundo a ordem prevista pela hipótese alternativa.

- o -

APENDICE

ESTATÍSTICAS U

A estatística Y vista na seção 2.4 é relacionada com uma ampla classe de estatísticas conhecida como "estatísticas U". Daremos abaixo algumas definições e a representação de Y que nos permitirá identificar sua relação com as "estatísticas U"; em seguida apresentaremos o importante teorema de Hoeffding (1948) usado na sub-seção 2.4.3 para derivar facilmente suas propriedades assintóticas.

Definição A.1 - Um parâmetro γ de uma família F de distribuições é *estimável em grau r* se r é o menor tamanho de amostra para o qual existe uma função $h^*(x_1,...,x_r)$ tal que

$$E_F[h^*(X_1,...,X_r)] = \gamma$$

para toda distribuição $F \in \mathcal{F}$, onde $X_1,...,X_r$ é uma amostra casual simples de F e $h^*(.)$ é uma estatística.

A função $h^*(.)$ da Definição A.1 é chamada *kernel* do parâmetro γ. Note-se que sempre se pode criar um kernel que seja simétrico em seus argumentos, fazendo

$$h(x_1,...,x_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\alpha \in A} h^*(x_{\alpha_1},...,x_{\alpha_r}), \tag{1}$$

onde $A=\{\alpha | \alpha$ é uma permutação dos inteiros $1,...,r\}$. Representaremos por $h(.)$ um kernel simétrico. Observe-se em (1), e pela definição 2.4.2, que $h(.)$ é um estimador não viesado de γ, para cada $F \in \mathcal{F}$.

É natural que, se tivermos $n>r$ observações de F, queiramos utilizar todas elas para construir um estimador não viesado de γ. Daí a definição abaixo.

<u>Definição</u> <u>A.2</u> - Uma *estatística U* para o parâmetro γ estimável em grau r formada a partir de um kernel simétrico $h(.)$ tomando-se

$$U(X_1,\ldots,X_n) = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{\beta \in B} h(X_{\beta_1},\ldots,X_{\beta_r}), \qquad (2)$$

onde $B=\{\beta \mid \beta$ é uma das $\binom{n}{r}$ combinações de r inteiros tomados de 1 a $n\}$.

É imediato ver que, uma estatística U é um estimador não viesado de γ e é simétrica em seus n argumentos

Consideremos agora os parâmetros populacionais:

$$\gamma_1 = P(Z_1<0)$$

e

$$\gamma_2 = P(Z_1+Z_2<0),$$

onde Z_1 e Z_2 são observações independentes de uma determinada distribuição F. Façamos

$$h_1(z_1) = \phi(z_1)$$

e

$$h_2(z_1+z_2) = \phi(z_1+z_2)$$

onde ϕ é, tal como na sub-seção 2.4.2, letra d, a função indicador de $\mathbb{R}^-$. Segue-se que $h_1(.)$ é um kernel simétrico de γ_1, de grau 1, e $h_2(.)$ é um kernel simétrico de γ_2. As estatísticas U correspondentes são, de acordo com (2):

$$U_1 = \binom{n}{1}^{-1} \sum_{\beta \in B_1} \phi(Z\ )$$

$$U_2 = \binom{n}{2}^{-2} \sum_{\beta \in B_2} \phi(Z_{\beta_1} + Z_{\beta_2}) \tag{3}$$

onde $B_1=\{1,2,...,n\}$ e $B_2=\{\beta|\beta$ é uma das $\binom{n}{2}$ continuações de 2 inteiros de 1 a n$\}$.

Fazendo, como em (59) do Capítulo II, $Z_i=X_{iu}-X_{iv}$, podemos ver, através de (3), que T_{uv} pode ser escrito como uma soma de duas estatísticas U, como na sub-seção 2.4.3, letra d.

O Teorema dado a seguir é estabelecido por Hoeffding (1948).

<u>Teorema A.3</u> - Seja $V_1,...,V_n$ uma amostra casual simples de uma distribuição. Seja γ um parâmetro estimável em grau r com um kernel simétrico $h(v_1,...,v_r)$. Se $E[h^2(V_1,...,V_r)]<\infty$ e se $U_V=U(V_1,...,V_n)$ é a correspondente estatística U definida em (59), então

$$\sqrt{n}(U_V-\gamma)$$

tem distribuição limite normal com média 0 e variância $r^2\zeta_1$, desde que

$$\zeta_1 = E[h(V_1,V_2,...,V_r)h(V_1,V_{r+1},...,V_{2r-1})]-\gamma>0.$$

- o -

SIMULAÇÃO

As amostras foram geradas no Centro de Computação Eletrônica (CCE) da USP, pelo aparelho Burroughs 6.600.

Para geração de observações da distribuição Uniforme, foi utilizada a sub-rotina RANDOM, à disposição dos interessados no CCE.

Para a Exponencial, usou-se a sub-rotina GGEXN, do programa IMSL. Essa sub-rotina, para simular uma observação x de uma Exponencial com média m, gera um número u da Uniforme no intervalo (0,1) e toma $x=-m(\ln(u))$. Fizemos, para nosso estudo, m=1.

Para a Normal, usamos a sub-rotina GGNML, também do IMSL. Esta sub-rotina também gera primeiramente observações da Uniforme no intervalo (0,1), e depois as transforma em observações da Normal (0,1) através da sub-rotina MDNRIS.

O leitor encontrará mais detalhes em:

- IMSL LIBRARY - Reference Manual
  Edition 7, 1979
  IMSL, Inc. Houston, Texas 77036
  U.S.A.

- o -

BIBLIOGRAFIA

[1] - ABELSON, R.P. & TUKEY, J.W., (1963), "Efficient utilization of non-numerical information in quantitative analysis: general theory and the case of simple order" *Ann. Math. Statist.*, *34*, 1347-1369.

[2] - BARLOW, R.E., et al, (1972), *Statistical Inference Under Order Restrictions*, John Wiley & Sons, London.

[3] - BIRNBAUM, Z.W., (1974), "Computers and unconventional test Statistics", *Reliability and Biometry*, (F. Proschan and R.J. Serfling eds.), Philadelphia: SIAM

[4] - BRADLEY, J.V., (1968), *Distribution-Free Statistical Tests*, Prentice Hall, Inc., N.J..

[5] - CHACKO, V.J., (1963), "Testing homogeneity against ordered alternatives", *Ann. Math. Statist.*, *34*, 945-956.

[6] - CHASSAN, J.B., (1960), "On a test for order", *Biometrics*, *16*, 119-121.

[7] - CHASSAN, J.B., (1962), "An extension of a test for order", *Biometrics*, *18*, 245-247.

[8] - CHERNOFF, H. & SAVAGE, I.R., (1958), "Asymptotically normality and efficiency of certain nonparametric tests", *Ann. Math. Statist.*, *29*, 972-994.

[9] - CHUNG, K.L., (1974), *A Course in Probability Theory*, Academic Press, Inc., London.

[10] - COCHRAN, W.G. & SNEDECOR, G.W., (1967), *Statistical Methods*, (sixth edition), Iowa State University Press.

[11] - CONOVER, W.J., (1967), "A k-sample extension of the one-sided two-sample Smirnov test statistics", *Ann. Math. Statist.*, *38*, 1726-1730 (6.3).

[12] - DOKSUM, K., (1967), "Robust procedures for some linear mo-

dels with one observation per cell". *Ann. Math. Statist.*, *38*, 878-883.

[13] - FRASER, D.A.S., (1957), *Nonparametric Methods in Statistics*, John Wiley & Sons, N.Y..

[14] - FRIEDMAN, M., (1937), "The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance", *J. Amer. Statist. Ass.*, *32*, 675-701.

[15] - GORINDARAJULU, Z., (1976), "A brief survey of nonparametric statistics", *Commun. Statist. Theor. Meth.*, A5(5), 429-453.

[16] - HÁJEK, J., (1968),"Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives", *Annals Math. Statist.*, *39*, 325-346.

[17] - HETTMANSPERGER, T.P., (1975), "Non-parametric inference for ordered alternatives in a randomized block design", *Psychometrika*, *40*, 53-62.

[18] - HODGES, J.L.,Jr. & LEHMANN, E.L., (1962), "Rank methods for combination of independent experiments in the analysis of variance", *Ann. Math. Statist.*, *33*, 482-497.

[19] - HOEFFDING, W., (1948), "On a class of statistics with asymptotically normal distribution", *Ann. Math. Statist.*, *19*, 293-325.

[20] - HOGG, R.V., (1965), "On models and hypotheses with restricted alternatives", *J. Amer. Statist. Ass.*, *60*, 1153-1162.

[21] - HOLLANDER, M., (1966), "An asymptotically distribution free multiple comparison procedure-treatments vs. control", *Ann. Math. Statist.*, *37*, 735-738.

[22] - HOLLANDER, M., (1967), "Rank tests for randomized blocks when the alternatives have an a priori ordering", *Ann. Math. Statist.*, *38*, 867-877.

[23] - HOLLANDER, M. & WOLFE, D.A., (1973), *Nonparametric Statistical Methods*, Ed. John Wiley & Sons, N.Y..

[24] - HÖNIG, C.S., (1977), *A Integral de Lebesgue e suas Aplicações*, IMPA, R.J..

[25] - HOPE, A.C.A, (1968), "A simplified Monte Carlo significance test procedure", *J.R. Statist. Soc.*, *30*, 582-598.

[26] - JONCKHEERE, A.R.,(1954a), "A test of significance for the relation between m rankings and k ranked categories", *Brit. J. Statist. Psychol.*, *7*, 93-100.

[27] - JONCKHEERE, A.R.,(1954b), "A distribution free k - sample test against ordered alternatives", *Biometrika*,*41*, 133-145.

[28] - LEHMANN, E.L., (1964), "Asymptotically nonparametric inference in some linear models with one observation per cell", *Ann. Math. Statist.*, *35*, 726-734.

[29] - LEHMANN, E.L. & D'ABRERA, H.J.M., (1975), *Nonparametrics - Statistical Methods Based on Ranks*", Mc Graw-Hill, N.Y..

[30] - MEHRA, K.L. & SARANGI, J., (1967), "Asymptotic efficiency of certain rank tests for comparative experiments", *Ann. Math. Statist.*, *38*, 90-107.

[31] - MIGON, H.S., (1974), "Sobre a comparação de alguns testes em modelo de dois fatores de classificação", *Dissertação de Mestrado*, IME-USP, S.P..

[32] - NOETHER, G.E., (1955), "On a theorem of Pitman", *Ann.Math. Statist.*, *26*, 64-68.

[33] - PAGE, E.B., (1963), "Ordered hypotheses for multiple treatments: a significance test for linear ranks", *J. Amer. Statist. Ass.*, *58*, 216-230.

[34] - PARSONS, Van L., (1979), "A note on the exact distribution of a nonparametric test statistics for ordered alternatives", *Ann. Math. Statist.*, *7*, *nº2*, 454-458.

[35] - PIRIE, W.R.,(1974), "Comparing rank tests for ordered alternatives in randomized blocks", *Ann. Math. Statist.*, *2*, 374-382.

[36] - PIRIE, W.R. & HOLLANDER, M., (1972), "A distribution free normal scores test for ordered alternatives in the randomized block design", *J. Amer. Statist. Ass.*, *67*, 855-857.

[37] - PIRIE, W.R. & HOLLANDER, M., (1975), "Note on a Tukey test for ordered alternatives", *Ann. Inst. Statist. Math.*, *27*, (3), 521-523.

[38] - PURI, M.L. & SEN, P.K., (1968), "On Chernoff-Savage tests for ordered alternatives in randomized blocks", *Ann.Math., Statist.*, *39*, 967-972.

[39] - RANDLES, R.H. & WOLFE, D.A., (1979), *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y..

[40] - ROYDEN, H.L., (1968), *Real Analysis*, Mc Millan Publishing Co, N.Y..

[41] - SEN, P.K., (1968), "On a class of aligned rank order tests in two-way lay outs", *Ann. Math. Statist.*, *39*, 1115-1124.

[42] - SHORACK, G.R., (1967), "Testing against ordered alternatives in model I analysis of variance; normal theory and nonparametric", *Ann. Math. Statist.*, *38*, 1740-1753.

[43] - TEICHROEW, D., (1956), "Tables of expected values of order statistics and products of order statistics for samples of size twenty and Less from the normal distribution", *Ann. Math. Statist.*, *27*, 410-426.

[44] - TUKEY, J.W., (1957), "Sums of random partitions of ranks", *Ann. Math. Statist.*, *28*, 987-992.

- o -