DEPENDÊNCIA POSITIVA
ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

MARIA TERESINHA ALBANESE

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. FLÁVIO WAGNER RODRIGUES

- SÃO PAULO, AGOSTO DE 1981 -

Aos
meus pais
e ao
Flamarion

AGRADECIMENTOS

Quero expressar minha gratidão a todos quantos me auxiliaram através da ação ou por estímulos durante a realização do Curso de Pós-Graduação em Estatística e na elaboração deste trabalho. Em especial agradeço

ao Prof. Dr. Flávio Wagner Rodrigues, orientador;

aos meus professores do Pós-Graduação em Estatística, em especial ao Prof. Dr. Carlos Alberto Dantas;

aos meus pais;

ao José Flamarion Pelúcio Silva;

aos meus amigos, em especial ao José Edmilson Mazza Batista;

à Maria Regina Vitória de Sá, datilógrafa.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Qualquer problema estatístico envolve um determinado número de variáveis aleatórias que podem ser dependentes ou independentes. A literatura estatística trata geralmente de variáveis aleatórias independentes devido a maior facilidade de tratamento matemático nesse caso, o que nos permite obter um maior número de resultados.

Esse trabalho reúne e relaciona as várias formas de dependência positiva entre variáveis aleatórias.

Naturalmente a primeira idéia que nos vem em mente quando pensamos em variáveis aleatórias dependentes é a idéia de covariância.

A covariância é a forma mais simples e mais conhecida de medirmos o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias. No entanto, em função dessa mesma simplicidade ela é uma medida bastante restrita. Em primeiro lugar ela só se aplica ao caso de duas variáveis aleatórias. Além disso, o valor zero da covariância pode estar ao mesmo tempo associado a variáveis aleatórias independentes e ao caso extremo de dependência, quando uma variável aleatória é uma função da outra.

Mesmo sabendo que num grande número de situações as variáveis aleatórias são dependentes, seguramente foi a partir de Lehmann (1966) que a dependência entre variáveis aleatórias recebem uma maior atenção.

Algumas formas de dependência foram introduzidas por Lehmann, Esary, Proschan, Walkup e Harris, entre outros.

Conforme teremos a oportunidade de verificar no Capítulo II, todas as formas de dependência positiva entre duas variáveis aleatórias X e Y implicam em $Cov(X,Y) \geq 0$. Dessa maneira a $Cov(X,Y)$ será a forma mais fraca de dependência positiva bivariada que analisaremos.

A desigualdade de Hoeffding (ver Lehmann (1966)) sugere a primeira generalização que é a dependência quadrante positiva (definição 2.1.1).

A idéia de dependência quadrante positiva é efetivamente uma generalização da condição $Cov(X,Y) \geq 0$. Como teremos oportunidade de mostrar no teorema 2.1.3, se duas variáveis aleatórias X e Y forem positivamente quadrante dependentes então $Cov(f(X),g(Y))$ será não negativa para quaisquer funções f, g não decrescentes.

Essa nova medida de dependência resolve o problema da caracterização da independência. De fato, se $Cov(f(X),g(Y))$ for zero para quaisquer funções g,f não decrescentes, segue-se que X e Y são independentes e reciprocamente. O único inconveniente que ainda resta está no fato dessa medida só poder ser aplicada no caso bivariado. Veremos no Capítulo II como essa dificuldade pode ser superada através da idéia de associação entre variáveis aleatórias.

Depois de Lehmann (1966), surgiram inúmeros artigos de diversos autores sobre diferentes aspectos da dependência positiva. Nesses trabalhos, praticamente nada se falava sobre dependência negativa,quando muito mencionava-se apenas que para a negativa era suficiente inverter os sinais das desigualdades ou trocar a ordem da monotonicidade das funções. Somente nos últimos anos é que se constatou que nem todas as formas de dependência positiva têm uma forma análoga para a negativa. Verificou-se também que nem todas as relações válidas no caso positivo são válidas para as formas análogas na negativa. Esses aspectos fizeram com que se intensificassem os estudos sobre dependência negativa, que no momento é a que recebe maior atenção dos pesquisadores.

Esse trabalho encontra-se dividido da seguinte forma:

Capítulo I - introdução;

Capítulo II - formas de dependência positiva bivariada, principais propriedades e relações entre elas;

Capítulo III- extensão dos resultados do Capítulo II para o caso multivariado;

Capítulo IV - algumas aplicações da dependência positiva e comentários sobre os principais resultados recentemente obtidos sobre dependência negativa.

CAPÍTULO II

DEPENDÊNCIA POSITIVA BIVARIADA

Introdução

De um ponto de vista intuitivo a idéia de dependência positiva entre duas variáveis aleatórias X e Y significa que valores grandes de X tendem estar associados com valores grandes de Y, e valores pequenos de X com valores pequenos de Y.

2.1 - *Formas de dependência positiva*

O objetivo desta seção é definir vários tipos de dependência positiva entre duas variáveis aleatórias de tal maneira que a idéia de dependência se torne progressivamente mais forte.

Dependência Quadrante Positiva

Neste caso, nós comparamos a probabilidade de qualquer quadrante em que $X \leq x$ e $Y \leq y$ sob a distribuição F de (X,Y) com a correspondente probabilidade no caso de independência.

2.1.1 - *Definição* - Dizemos que o par de variáveis aleatórias (X,Y) ou sua função distribuição F é positivamente quadrante dependente, PQD, se

$$P(X \leq x,\ Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y) \qquad (2.1.1)$$

para todo (x,y).

A dependência é estrita se a desigualdade ocorre para pelo menos um par (x,y).

Exemplo - Sejam duas variáveis aleatórias $U = X$ e $V = \dfrac{Y - \rho X}{\sqrt{1 - \rho^2}}$, tal que X e Y tem distribuição N(0,1). Se $\rho > 0$ então X e Y são PQD.

Mostraremos que a desigualdade (2.1.1) se verifica para X e Y.

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P\left(U \leq x,\ V \leq \frac{y - \rho U}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = \int_{-\infty}^{x} F\left(\frac{y - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) g(u)du$$

Fixando y, seja

$$G(x) = P(X \leq x,\ Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y). \text{ Isto é,}$$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(F\left(\frac{y - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - F(y)\right) g(u)du$$

É fácil ver, calculando a derivada de $G(x)$, que se $\rho > 0$ então G é crescente para $x < y\dfrac{(1 - \sqrt{1 - \rho^2})}{\rho}$ e decrescente para $x > y\dfrac{(1 - \sqrt{1 - \rho^2})}{\rho}$.

Por outro lado, como $G(+\infty) = G(-\infty) = 0$, segue-se que $G(x) \geq 0$ para qualquer x.

Como y é qualquer, segue-se então que X e Y são positivamente quadrante dependentes.

Exemplo - Sejam as variáveis aleatórias X e Y assumindo respectivamente os valores $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ com distribuição de probabilidade dada pela tabela abaixo.

X \ Y	y_1	y_2
x_1	$\frac{1}{4}$	0
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

Facilmente verificamos que a desigualdade de (2.1.1) é verdadeira para qualquer combinação de x_1, x_2 com y_1, y_2.

2.1.2 - *Proposição* - A desigualdade (2.1.1) é equivalente a cada um dos seguintes itens:

(a) À desigualdade obtida, substituindo $X \leq x$ ou $Y \leq y$ por $X < x$ ou $Y < y$, respectivamente.

(b) À cada uma das seguintes desigualdades, onde os sinais de igualdade dentro das probabilidades são opcionais:

(i) $P(X \leq x, Y \geq y) \leq P(X \leq x)P(Y \geq y)$

(ii) $P(X \geq x, Y \leq y) \leq P(X \geq x)P(Y \leq y)$

(iii) $P(X \geq x, Y \geq y) \geq P(X \geq x)P(Y \geq y)$

Demonstração

(a) Consideremos as seqüências crescentes de conjuntos $A_n = (X \leq x - \frac{1}{n})$ e $B_n = (Y \leq y - \frac{1}{n})$. É claro que para todo n, $P(X < x, Y < y) \geq P(A_n \cap B_n)$.

Suponhamos que a desigualdade (2.1.1) é verdadeira. Então $P(A_n \cap B_n) \geq P(A_n)P(B_n)$.

É fácil ver que $\lim A_n = (X < x)$ e $\lim B_n = (Y < y)$

Como A_n e B_n são seqüências crescentes, temos:

$$P(X < x) = \lim P(A_n) \text{ e } P(Y < y) = \lim P(B_n).$$

Segue-se então que:

$$P(X < x, Y < y) \geq \lim P(A_n) \lim P(B_n) = P(X < x)P(Y < y)$$

De maneira análoga provamos (a) no sentido oposto, substituindo x e y por $x + \frac{1}{n}$ e $y + \frac{1}{n}$, respectivamente.
(b) A equivalência de (2.1.1) com (b.i) é obtida de (a) e do fato que $(X \leq x, Y \geq y) = (X \leq x) - (X \leq x, Y < y)$.

A equivalência de (2.1) com (b.ii) segue de maneira análoga, e com (b.iii) segue do fato que a união dos conjuntos envolvidos no lado esquerdo das quatro desigualdades (com alguns sinais de igualdade omitidos) é o espaço todo.

Em todo nosso trabalho convencionaremos chamar de funções crescentes às funções não decrescentes, e de funções decrescentes às funções não crescentes. Quando quizermos nos referir às funções crescentes, propriamente ditas, faremos notar este fato.

A seguir apresentaremos dois teoremas que dão as condições sob as quais variáveis aleatórias PQD geram novas variáveis aleatórias PQD.

2.1.3 - *Teorema* - Dizer que as variáveis aleatórias X e Y são PQD é equivalente a cada uma das seguintes afirmações:

(a) $f(X)$ e $g(Y)$ são PQD para quaisquer funções f e g crescentes.

(b) $\mathrm{cov}(f(X), g(Y)) \geq 0$ para quaisquer funções f e g crescentes, dado que $Ef(X)g(Y)$, $Ef(X)$ e $Eg(Y)$ existem.

Demonstração - Mostraremos que se X e Y são PQD $\Rightarrow a \Rightarrow b \Rightarrow$ X e Y são PQD.

Como f é crescente temos:

$\{f(x) > y\} = \{x \in U\}$ onde $U = \{x > a\}$ ou $\{x \geq a\}$. Segue-se então que:

$$P(f(X) > x,\ g(Y) > y) = P(\underset{(\geq)}{X > a},\ \underset{(\geq)}{Y > b})$$

Por outro lado, como X e Y são PQD temos:

$$P(f(X) > x,\ g(Y) > y) \geq P(\underset{(\geq)}{X > a})P(\underset{(\geq)}{Y > b}) = P(f(X) > x)P(g(Y) > y)$$

Logo f(X) e g(Y) são PQD.

Supondo agora que f(X) e g(Y) são PQD, da desigualdade de Hoeffding segue que:

$$\mathrm{Cov}(f(X),\ g(Y)) = Ef(X)g(Y) - Ef(X)Eg(Y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P(f(X)>x,\ g(Y)>y) - P(f(X)>x)P(g(Y)>y)\ dxdy \geq 0$$

A seguir mostraremos que se $\mathrm{Cov}(f(X), g(Y)) \geq 0$, para quaisquer funções crescentes f e g, então X e Y são PQD.

Sejam

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X > x \\ 0 & \text{se} \quad X \leq x \end{cases} \quad \text{e} \quad g(Y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad Y > y \\ 0 & \text{se} \quad Y \leq y \end{cases}$$

Então $\quad Ef(X)g(Y) - Ef(X)Eg(Y) =$

$$= P(X > x,\ Y > y) - P(X > x)P(Y > y) \geq 0$$

Segue-se que $P(X > x,\ Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$ e portanto X e Y são PQD.

2.1.4 - *Teorema* - Seja (X,Y) PQD e independente de (U,V). Se $f_1(u,x)$ e $g_1(v,y)$ são crescentes em cada variável então $f_1(U,X)$ e $g_1(V,Y)$ são PQD.

Demonstração - Usaremos a parte (b) do teorema 2.1.3 e provaremos que para quaisquer funções f e g crescentes teremos:

$$Ef(f_1(U,X))\,g(g_1(V,Y)) \geq Ef(f_1(U,X))\,Eg(g_1(V,Y))$$

Mas

$$Ef(f_1(U,X))\,g(g_1(V,Y)) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= E_{U,V}\left[E_{X,Y}\ f(f_1(U,X))g(g_1(V,Y))\right] \overset{(b)}{\geq}$$

$$\geq E_{U,V}\left[E_{X,Y}\ f(f_1(U,X))E_{X,Y}\cdot g(g_1(V,Y))\right] =$$

$$= E_{U,V}\left[E_{X,Y}\ f(f_1(U,X))\right]\ E_{U,V}\left[E_{X,Y}\ g(g_1(V,Y))\right] =$$

$$= Ef(f_1(U,X))Eg(g_1(V,Y))$$

Portanto $f_1(U,X)$ e $g_1(V,Y)$ são PQD.

Observação - O teorema 2.1.4 continua válido se $f_1(u,x)$ e $g_1(v,y)$ são crescentes em u e v, mas decrescentes em x e y. Para termos uma idéia porque isto ocorre, suponha que X e Y são PQD e f, g decrescentes. Então

$$P(f(X) > x,\ g(Y) > y) = P(X \underset{(\leq)}{<} a,\ Y \underset{(\leq)}{<} b) \geq$$

$$P(X \underset{(\leq)}{<} a)\ P\ ((Y) \underset{(\leq)}{<} b) = P(f(X) > x)\ P\ (g(Y) > y).$$

Outras combinações seguem da proposição 2.1.2.

Exemplo - A seguir apresentaremos alguns pares de variáveis aleatórias positivamente quadrante dependentes, cuja dependência segue da definição 2.1.1, do teorema 2.1.3 ou 2.1.4.

(a) $X, Y = f(X)$ para qualquer variável aleatória X e qualquer função crescente f.

(b) $X = U + aZ$, $Y = V + bZ$ para quaisquer variáveis aleatórias independentes U, V e Z, se a e b tem mesmo sinal.

(c) X, $Y = X + V$ para quaisquer variáveis aleatórias X e V independentes.

(d) X, Y binárias se e somente se

$P(X = 1, Y = 1) \geq P(X = 1)P(Y = 1)$

(e) $X = f(U,Z)$, $Y = g(V,Z)$ onde U, V e Z são variáveis aleatórias independentes e f, g são funções crescentes em z, mas arbitrárias.

Observação - A demonstração do exemplo que segue a definição 2.1.1 é direta através do exemplo anterior, uma vez que para $X = U$ e $Y = V\sqrt{1-\rho^2} + \rho U$ com U e V independentes e $\rho > 0$, f e g são funções crescentes em u.

Associação

É habitual dizer que duas variáveis aleatórias X e Y são associadas se $\mathrm{Cov}(X,Y)$ é não negativa. Entretanto, uma condição mais forte requer $\mathrm{Cov}(f(X), g(Y)) \geq 0$ para qualquer par de funções f e g crescentes.

A seguir definiremos associação entre X e Y por meio de um critério ainda mais forte que os dois anteriores.

2.1.5 - *Definição* - As variáveis aleatórias X e Y são associadas, $A(X,Y)$, se $\mathrm{Cov}(f(X,Y), g(X,Y)) \geq 0$ para qualquer par de funções f e g crescentes em cada argumento, tal que $Ef(X,Y)g(X,Y)$, $Ef(X,Y)$ e $Eg(X,Y)$ existem.

Observação - As variáveis aleatórias continuam associadas se substituirmos as funções f e g crescentes por funções decrescentes.

O estudo completo da associação entre variáveis aleatórias será feito no próximo capítulo, que trata do caso multivariado.

A associação é difícil de ser verificada diretamente através da definição. Como veremos mais tarde, é mais fácil constatarmos a existência de associação através das suas relações com outras formas de dependência positiva.

Por enquanto veremos somente dois teoremas, o primeiro que restringe os tipos de funções crescentes que devem ser testadas na definição, e o segundo que dá um critério simples para a associação quando as variáveis aleatórias são binárias.

2.1.6 - *Teorema* - Se Cov $(\gamma(X,Y), \delta(X,Y)) \geq 0$ para quaisquer funções binárias γ, δ crescentes então X e Y são associados.

A demonstração será feita no próximo capítulo para $n \geq 2$.

2.1.7 - *Teorema* - Se X e Y são variáveis aleatórias binárias então a associação entre X e Y é equivalente a $Cov(X,Y) \geq 0$.

Demonstração - Se X e Y são associadas então $Cov(X,Y) \geq 0$, por definição de associação.

Suponha agora que $Cov(X,Y) \geq 0$. Sejam todas as funções binárias crescentes possíveis $\delta(X,Y)$:

$$(\delta \equiv 0)\ (\delta = XY) \leq \begin{matrix} (\delta = X) \\ \\ (\delta = Y) \end{matrix} \leq (\delta = X + Y - XY) \leq (\delta \equiv 1)$$

A covariância entre quaisquer funções δ, γ binárias tal que $\delta \leq \gamma$ é automaticamente não negativa. O par $\delta = X$ e $\gamma = Y$ tem covariância não negativa, por hipótese.

Observação - Apesar do teorema 2.1.6 simplificar a associação entre duas variáveis aleatórias ele não é de fácil aplicação. Prova disto é que mesmo Esary, Proschan e Walkup (1967) dá um exemplo de duas variáveis aleatórias X e Y cuja associação seria verificada através deste teorema, mas que como mostraremos a seguir não está correto.

O exemplo em questão é de variáveis aleatórias X e Y que assumem os valores $a_1 < a_2 < a_3$ com distribuição de probabilidade dada pela tabela abaixo.

X \ Y	a_1	a_2	a_3
a_1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
a_2	0	$\frac{1}{4}$	0
a_3	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$

Considere as funções binárias crescentes:

$$\delta = \begin{cases} 1, & x \geq a_1 \text{ e } y \geq a_2 \\ \\ 0, & \text{no complementar} \end{cases} \qquad \gamma = \begin{cases} 1, & x \geq a_3 \text{ e qualquer } y \\ \\ 0, & \text{no complementar} \end{cases}$$

Segue-se então que:

$P(\delta(X,Y) = 1,\ \gamma(X,Y) = 1) = \frac{1}{8}$, $P(\delta(X,Y) = 1) = \frac{5}{8}$

e $P(\gamma(X,Y) = 1) = \frac{3}{8}$.

Logo, como $P(\delta(X,Y) = 1, \gamma(X,Y) = 1) <$

$< P(\delta(X,Y) = 1) P(\gamma(X,Y) = 1,$

X e Y não são associados.

Uma modificação simples no exemplo acima produz um par de variáveis aleatórias associadas. Observemos inicialmente que se $X = Y$ então (X,Y) é associado. Logo, se aumentarmos $P(X = Y)$, isto é, aumentarmos a probabilidade que se distribui sobre a diagonal principal deveremos obter um par de variáveis aleatórias associadas. De fato, pode-se mostrar que o exemplo a seguir, cuja distribuição de probabilidade é dada pela próxima tabela, satisfaz nossos objetivos.

X \ Y	a_1	a_2	a_3
a_1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
a_2	0	$\frac{1}{4}$	0
a_3	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$

A verificação direta, no entanto, envolve 36 pares de funções binárias crescentes e é razoavelmente trabalhosa.

Dependência Crescente à Direita

Uma das conseqüências deste tipo de dependência positiva é que a probabilidade de que Y esteja à direita de um dado valor y_o aumenta com a informação de que X está à direita de um determinado valor x_o.

2.1.8 - *Definição* - A variável aleatória Y é crescente à direita em X, CD(Y/X), se para qualquer y

$$P(Y \geq y / X \geq x) \text{ é crescente em } x.$$

Observação - A condição para que ocorra CD(Y/X) é equivalente a seguinte desigualdade:

$$P(Y > y / x < X \leq x') \leq P(Y > y / X > x')$$

para quaisquer y e $x < x'$.

Notamos que, ao contrário dos dois tipos anteriores de dependência positiva, a dependência crescente à direita não é simétrica.

Exemplo - Suponhamos que X assume os valores $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, cada qual com probabilidade $\frac{1}{4}$. Suponhamos também que Y assume os valores $y_1 < y_2$ com probabilidade $P(Y = y_2/X = x_i) = P_i$, $i = 1,2$.

Segue-se então que Y é CD em X se

(a) $P_1 = 0,4$; $P_2 = 0,6$; $P_3 = 0,5$ e $P_4 = 0,7$

ou

(b) $P_1 = 0,5$; $P_2 = 0,5$; $P_3 = 0,4$ e $P_4 = 0,6$

Dependência Decrescente à Esquerda

2.1.9 - *Definição* - A variável aleatória Y é decrescente à esquerda em X, DE(Y/X), se para qualquer y

$P(Y \leq y/X \leq x)$ é decrescente em x.

Neste caso, uma das conseqüências da ocorrência deste tipo de dependência é que a $P(Y \leq y)$ diminui quando é dada a informação de que X é menor ou igual a um dado valor x_o.

Observação - Podemos também escrever a condição em que Y é DE em X como

$$P(Y > y/X \leq x) \leq P(Y > y/x < X \leq x')$$

para quaisquer y e $x < x'$.

A mesma observação em relação à simetria dada em CD vale para DE.

Exemplo - Considere o mesmo enunciado do exemplo anterior. Então Y é decrescente à esquerda em X se

(a) $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}6$; $P_3 = 0{,}5$ e $P_4 = 0{,}7$

(b) $P_1 = 0{,}5$; $P_2 = 0{,}6$; $P_3 = 0{,}5$ e $P_4 = 0{,}5$

Observe que a parte (a) do exemplo de dependência crescente à direita e de dependência decrescente à esquerda coincidem, isto é, ocorre CD(Y/X) e DE(Y/X). Entretanto, não podemos afirmar o mesmo em relação a parte (b) destes exemplos. Isto nos leva a concluir que se Y é CD em X não podemos afirmar que Y é DE em X. Esta conclusão vale também para a recíproca.

Dependência EStocástica Crescente

Nos casos em que $P(X \leq x) > 0$ para qualquer x, podemos reescrever a definição de dependência quadrante positiva entre as variáveis aleatorias X e Y, dada pela desigualdade (2.1.1), como

$$P(Y \leq y/X \leq x) \geq P(Y \leq y) \qquad (2.1.2)$$

e desta forma expressarmos claramente que o fato de sabermos que X é pequeno, aumenta a probabilidade de Y ser pequeno.

Podemos ter ainda que

$$P(Y \leq y/X \leq x) \geq P(Y \leq y/X \leq x') \qquad (2.1.3)$$

para quaisquer y e $x < x'$.

Ou a condição ainda mais forte:

$$P(Y \leq y/X = x) \text{ é decrescente em } x \qquad (2.1.4)$$

para qualquer y.

Se verificarmos (2.1.4) então diremos que Y é estocasticamente crescente em X, que denotaremos por EC(Y/X).

Observação - Y estocasticamente crescente em X equivale a definição dada por Lehmann (1966) para dependência regressiva positiva de Y em X.

As definições (2.1.2) a (2.1.4) são conectadas pelas implicações (2.1.4) $\Rightarrow$ (2.1.3) $\Rightarrow$ (2.1.2). É trivial que (2.1.3) implica em (2.1.2), enquanto que a outra implicação corresponde a proposição 2.2.6 da próxima seção.

Exemplo - Seja $Y = \alpha + \beta X + U$, onde U e X são variáveis aleatórias independentes. Se $\beta \geq 0$ então Y é estocasticamente crescente em X.

Em particular, segue deste exemplo que se $\rho > 0$, as componentes de uma Normal Bivariada são estocasticamente crescentes.

Exemplo - Sejam as variáveis aleatórias U e V independentes. Então $X = U + V$ e $Y = U$ são positivamente quadrante dependentes, e portanto, satisfazem a desigualdade (2.1.2), o que não implica que necessariamente satisfazem (2.1.3) e (2.1.4).

Suponhamos que ambas as variáveis aleatórias assumem os valores 0,2 e 3 com probabilidades p, q e r, respectivamente. tal que $p + q + r = 1$.

Uma vez que $P(Y \leq 2/X \leq 3) < P(Y \leq 2/X \leq 4)$ a desigualdade (2.1.3) não ocorre, apesar de X e Y satisfazerem (2.1.2). No entanto, $P(X \leq x/Y = y) = P(V \leq x - y)$ decresce a medida que y cresce, satisfazendo a desigualdade (2.1.4).

Segue-se então que X é estocasticamente crescente em Y independente da distribuição de probabilidade de U e V, enquanto que Y não é estocasticamente crescente em X para a distribuição de probabilidade dada acima.

2.1.10 - *Proposição* - Sejam as variáveis aleatórias binárias X e Y.

Y é estocasticamente crescente em X se e somente se

$$P(X = 0, Y = 0)P(X = 1, Y = 1) \geq P(X = 0, Y = 1)P(X = 1, Y = 0).$$

Demonstração - Suponhamos que $EC(Y/X)$, isto é, $P(Y > y/X = x)$ é crescente em x para qualquer y. Segue-se que:

$$P(Y > 0/X = 1) \geq P(Y > 0/X = 0). \text{ Isto é,}$$

$$\frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0)} \geq \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y=0)},$$

que é equivalente a

$$P(X = 1, Y = 1)P(X = 0, Y = 0) \geq P(X = 0, Y = 1)P(X = 1, Y = 0).$$

A seguir serão definidos mais dois tipos de dependência positiva, que não se ajustam diretamente a hierarquia que estamos seguindo. Estas noções foram introduzidas Harris (1970) e utilizadas para definir distribuição de taxa de falha crescente.

Dependência Conjunta Crescente à Direita

2.1.11 - *Definição* - Dizemos que as variáveis aleatórias X e Y apresentam dependência conjunta crescente à direita, DCCD, se para cada x e y fixados,

$$P(X > x, Y > y/X > x', Y > y') \text{ é crescente em } x', y'. \qquad (2.1.5)$$

Observação - Da definição 2.1.11 segue-se que

$$P(X > x, Y > y / X > x', Y > y') = \frac{P(X > \text{máx}(x,x'), Y > \text{máx}(y,y'))}{P(X > x', Y > y')}$$

que pode também ser escrito como

$\dfrac{\overline{F}(\text{máx}(x,x'), \text{máx}(y,y'))}{\overline{F}(x',y')}$, onde F é a função de distribuição conjunta de X e Y.

Analisando detalhadamente $\overline{F}(\text{máx}(x,x'), \text{máx}(y,y'))/\overline{F}(x',y')$, segue-se que (2.1.5) é equivalente a cada uma das seguintes afirmações:

(a) $\dfrac{\overline{F}(x',y')}{\overline{F}(x',y')} = 1$, se $x' \geq x$, $y' \geq y$

(b) $\dfrac{\overline{F}(x,y')}{\overline{F}(x',y')}$ é crescente em x', se $x' < x$, $y' \geq y$

(c) $\dfrac{\overline{F}(x',y)}{\overline{F}(x',y')}$ é crescente em y', se $x' \geq x$, $y' < y$

(d) $\dfrac{\overline{F}(x,y)}{\overline{F}(x',y')}$ é crescente em x', y', se $x' < x$, $y' < y$

Exemplo - Sejam duas variáveis aleatórias X e Y, assumindo os valores $a_1 < a_2 < a_3$ com distribuição de probabilidade dada pela seguinte tabela:

X \ Y	a_1	a_2	a_3
a_1	0	0,1	0,1
a_2	0,1	0,1	0,1
a_3	0,1	0,1	0,3

Através da definição 2.1.11 obtemos que X e Y são crescentes à direita em conjunto.

Dependência Conjunta Decrescente à Esquerda

2.1.12 - *Definição* - Dizemos que as variáveis aleatórias X e Y apresentam dependência conjunta decrescente à esquerda, DCDE, se para cada x e y fixados,

$P(X \leq x,\ Y \leq y / X \leq x',\ Y \leq y')$ é decrescente em x', y'. (2.1.7).

Observação - Da definição 2.1.12 segue-se que

$$P(X \leq x,\ Y \leq y / X \leq x',\ Y \leq y') = \frac{F(\min(x,x'),\ \min(y,y'))}{F(x',y')}$$

é decrescente em x' e y', que é equivalente a cada uma das seguintes afirmações:

(a) $\dfrac{F(x',y')}{F(x',y')} = 1$, se $x' < x$, $y' < y$

(b) $\dfrac{F(x,y')}{F(x',y')}$ é decrescente em x', se $x' \geq x$, $y' < y$

(c) $\dfrac{F(x',y)}{F(x',y')}$ é decrescente em y', se $x' \leq x$, $y' \geq y$

(d) $\dfrac{F(x,y)}{F(x',y')}$ é decrescente em x', y' se $x' \geq x$, $y' \geq y$

Exemplo - Sejam as variáveis aleatórias X e Y, assumindo os valores $a_1 < a_2 < a_3$, com a distribuição de probabilidade dada pela seguinte tabela:

X \ Y	a_1	a_2	a_3
a_1	0,3	0	0,1
a_2	0	0,2	0,1
a_3	0,1	0,1	0,1

Facilmente verifica-se através da definição 2.1.12 que X e Y são variáveis aleatórias decrescentes à esquerda.

2.2 - *Relações entre as formas de dependência positiva*

Introdução

Como verificamos que duas variáveis aleatórias são positivamente quadrante dependentes? Diretamente a partir da de finição, no caso de variáveis aleatórias contínuas, exigiria a verificação de todas as desigualdades do tipo

$$\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} f(x,y)dydx \geq \int_x^{\infty} f_1(x)dx \int_y^{\infty} f_2(y)dy$$

para quaisquer x e y, tal que $f_1(x)$ e $f_2(y)$ são respectivamente as densidades marginais de X e Y. A não ser em casos especiais, como na Normal Bivariada com coeficiente de correlação positivo (veja o exemplo que segue a definição 2.1.1), a tarefa é praticamente impossível. Daí a necessidade de procurarmos uma condição que implique na dependência quadrante positiva e que possa ser facilmente verificada. Esta é a razão da origem do estudo de funções totalmente positivas de ordem 2, denominadas TP_2.

Nesta seção além de estudarmos funções TP_2, mostraremos as relações de TP_2 com as formas de dependência positivamente apresentadas na seção anterior.

Funções Totalmente Positivas de Ordem 2

2.2.1- *Definição* - Sejam as variáveis aleatórias X e Y com densidade de probabilidade conjunta (ou, no caso discreto, função de probabilidade conjunta) $f(x,y)$. Dizemos que $f(x,y)$ (ou

(X,Y)) é totalmente positiva de ordem 2, TP_2, se

$$\begin{vmatrix} f(x,y) & f(x,y') \\ f(x',y) & f(x',y') \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (2.2.1)$$

para quaisquer $x < x'$, $y < y'$.

Observação - Dizer que $f(x,y)$ é TP_2 equivale a afirmar que X e Y são positivamente dependentes segundo a razão de verossimilhança monótona definida por Lehmann (1966). Se $g(x)$ é a densidade marginal de X, a condição de Lehmann exige que

$$\frac{f(x',y)}{g(x')} \Big/ \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

seja crescente em y para todo $x < x'$.

Segue-se então que:

$$\frac{f(x',y)}{f(x,y)} \leq \frac{f(x',y')}{f(x,y')}$$

isto é, $f(x,y)\, f(x',y') \geq f(x',y)\, f(x,y')$ para todo $x < x'$, $y < y'$. Portanto $f(x,y)$ é TP_2.

2.2.2 - *Proposição* - A função de densidade conjunta de variáveis aleatórias independentes é TP_2.

A demonstração é imediata.

As duas proposições a seguir fornecem métodos para obtenção de novas funções TP_2 a partir de funções TP_2 já existentes.

2.2.3 - *Proposição* - Se $f(x,y)$ é TP_2 e ϕ, δ são funções crescentes (ou decrescentes) em x,y, respectivamente, então $f(\phi(x), \delta(y))$ é TP_2.

A demonstração é imediata.

2.2.4 - *Proposição* - Se f e g são funções TP_2 então fg é TP_2.

A demonstração é imediata.

Exemplo - A distribuição das variáveis aleatórias X e Y apresentada abaixo, é TP_2.

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemplo - Sejam U e V variáveis aleatórias independentes com função densidade g e h, respectivamente. Sejam $X = U$ e $Y = V + U$ com função densidade conjunta $f(x,y)$.

Se $-\log h$ é convexa, f é TP_2.

Demonstração - Queremos provar que

$f(x',y')\, f(x,y) \geq f(x',y)\, f(x,y')$, para todo $x \leq x'$, $y \leq y'$.

Substituindo $f(x,y)$ por $g(x)\, h(y-x)$, obtemos:

$h(y' - x')h(y - x) \geq h(y - x')h(y' - x)$,

que é equivalente a

$\log h(y' - x') + \log h(y - x) \geq \log h(y - x') + \log h(y' - x)$.

Sejam $y' - x' = t(y - x') + (1 - t)(y' - x)$ e

$y - x = (1 - t)(y - x') + t(y' - x)$,

tal que $t = \dfrac{x' - x}{x' - x + y' - y}$, isto é, $0 \leq t \leq 1$.

Da hipótese que $-\log h$ é convexa, segue-se que:

$\log h(y' - x') \geq (1 - t)\log h(y - x') + t\log h(y' - x)$, (2)

$\log h(y - x) \geq t\log h(y - x') + (1 - t)\log h(y' - x)$. (3)

Somando (2) e (3), obtemos:

$\log h(y' - x') + \log h(y - x) \geq \log h(y - x') + \log h(y' - x)$.

Segue-se então que

$h(y' - x')h(y - x) \geq h(y - x')h(y' - x)$, para todo $x \leq x'$, $y \leq y'$, que é equivalente a desigualdade (1). Portanto $f(x,y)$ é TP_2.

Observação - O resultado obtido no exemplo anterior continua válido se tivermos $Y = V + KU$, $K > 0$. Prova-se de maneira análoga, tomando-se $t = \dfrac{Kx' - Kx}{Kx' - Kx + y' - y}$

Exemplo - A função densidade da Normal Bivariada com coeficiente de correlação $\rho > 0$ é TP_2.

Este resultado é uma conseqüência imediata da observação anterior.

Relações entre as Noções de Dependência Positiva

Baseados nas noções de dependência positiva apresentadas na seção anterior, vamos agora relacioná-las.

2.2.5 - *Proposição* - Se as variáveis aleatórias X e Y são TP_2 então Y é estocasticamente crescente em X e X é estocasticamente crescente em Y.

Demonstração - Mostraremos que Y é estocasticamente crescente em X. A demonstração é análoga para X estocasticamente crescente em Y.

Suponhamos que X e Y são variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta $f(x,y)$.

Se $f(x,y)$ é TP_2 então $f(x_1,y_1)\, f(x_2,y_2) \geq$ $\geq f(x_1,y_2)\, f(x_2,y_1)$, para todo $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$.

Se $0 \leq y_1 < y < y_2 < \infty$, temos:

$$\int_0^y f(x_1,t)dt \int_y^\infty f(x_2,t)dt \geq \int_y^\infty f(x_1,t)dt \int_0^y f(x_2,t)dt$$

Somando a ambos os lados da desigualdade acima

$\int_y^\infty f(x_1,t)dt \int_y^\infty f(x_2,t)dt$, obtemos que

$$\int_0^y f(x_1,t)dt \int_y^\infty f(x_2,t)dt + \int_y^\infty f(x_1,t)dt \int_y^\infty f(x_2,t)dt \geq$$

$$\int_y^\infty f(x_1,t)dt \int_0^y f(x_2,t)dt + \int_y^\infty f(x_1,t)dt$$

Denotando por f_1 a densidade marginal de X, segue-se que

$$f_1(x_1) \int_y^\infty f(x_2,t)dt \geq f_1(x_2) \int_y^\infty f(x_1,t)dt$$

donde

$$\frac{\int_y^\infty f(x_2,t)dt}{f_1(x_2)} \geq \frac{\int_y^\infty f(x_1,t)dt}{f_1(x_1)},$$

que é equivalente a

$$P(Y > y/X = x_2) \geq P(Y > y/X = x_1), \text{ para todo } x_1 < x_2.$$

Segue-se então que $P(Y > y/X = x)$ é crescente em x para qualquer y e, portanto, Y é estocasticamente crescente em X.

2.2.6 - *Proposição* - Se Y é estocasticamente crescente em X então X e Y são associados.

Demonstração - Seja $F_x(y) = P(Y \leq y/X = x) = 1 - P(Y > y/X = x)$ que é decrescente em x, por hipótese.

$$\text{Seja } F_x^{-1}(u) = h(x,u) = \inf\{y : u \leq F_x(y)\}$$

Não é difícil mostrar que $h(x,u)$ cresce com u e como $F_x(y)$ é decrescente em x segue-se que $F_x^{-1}(x)$ é uma função crescente de x.

Seja uma variável aleatória U com distribuição Uniforme e independente de X. Então

$$P(X \geq x_o, h(X,U) > y) = \int_{x_o}^{\infty} P(h(x,U) > y/X = x)dP(X = x) \quad (1)$$

Da independência entre U e X segue-se:

$$P(h(x,U) > y/X = x) = P(h(x,U) > y) = P(U > F_x(y))$$

Uma vez que U tem distribuição Uniforme obtemos:

$$P(U > F_x(y)) = 1 - F_x(y) = P(Y > y/X = x)$$

Substituindo este resultado em (1), obtemos:

$$\int_{x_o}^{\infty} P(Y > y/X = x)dP(X \leq x) = P(X > x_o, Y > y).$$

Logo $P(X \geq x_o, h(x,u) \geq y) = P(X > x_o, Y > y)$, e portanto,

$(X,Y) \sim (X,h(X,U))$, onde o sinal $\sim$ indica que os dois vetores tem a mesma distribuição.

Além disto, $h(X,U)$ é uma função crescente de variáveis aleatórias independentes, e portanto, associadas, conforme provaremos no próximo capítulo. Segue-se então que X e Y são associadas.

2.2.7 - *Proposição* - Sejam X e Y variáveis aleatórias associadas. Então X e Y são positivamente quadrante dependentes.

Demonstração - Sejam as funções Z_1 e Z_2 tal que

$$Z_1 = \begin{cases} 1 \text{ se } X > x \\ 0 \text{ se } X \leq x \end{cases} \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{cases} 1 \text{ se } Y > y \\ 0 \text{ se } Y \leq y \end{cases}$$

Logo, Z_1 e Z_2 são funções binárias e crescentes em X e Y, respectivamente. Conforme provaremos no teorema 3.1.4, Z_1 e Z_2 são associadas.

Segue-se então que

$$0 \leq \mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) = \mathrm{Cov}(1 - Z_1, 1 - Z_2) =$$

$$= E(1 - Z)(1 - Z_2) - E(1 - Z_1)E(1 - Z_2) =$$

$$= P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Logo X e Y são PQD.

2.2.8 - *Proposição* - Se X e Y são PQD então $\mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0$.

Demonstração - No teorema 2.1.3.a da seção anterior substitua f(X) e g(Y) por X e Y, respectivamente. Segue-se então que $\mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0$.

Observação - Das proposições 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7 e 2.2.8, segue-se que

$$TP_2(X,Y) \Rightarrow \varepsilon C(Y/X) \Rightarrow A(X,Y) \Rightarrow PQD(X,Y) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) \geq 0.$$

2.2.9 - *Proposição* - Se Y é estocasticamente crescente em X então Y é crescente à direita em X.

Demonstração - Y é estocasticamente crescente em X, portanto, para quaisquer $x_1' \leq x_2'$ temos:

$$f_1(x_2') \int_y^{\infty} f(x_1',t)dt \leq f_1(x_1') \int_y^{\infty} f(x_2',t)dt$$

Se $0 \leq x_1 \leq x_1' \leq x_2 \leq x_2' < \infty$ então

$$\int_{x_2}^{\infty} f_1(x)dx \int_{x_1}^{x_2} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx \leq \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx \int_{x_2}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx$$

Somando $\int_{x_2}^{\infty} f_1(x)dx \int_{x_2}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx$ a ambos os lados da desigualdade acima, segue-se que

$$\int_{x_2}^{\infty} f_1(x)dx \int_{x_1}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx \leq \int_{x_1}^{\infty} f_1(x)dx \int_{x_2}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx$$

Donde

$$\frac{\int_{x_1}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx}{\int_{x_1}^{\infty} f_1(x)dx} \leq \frac{\int_{x_2}^{\infty} \int_y^{\infty} f(x,t)dtdx}{\int_{x_2}^{\infty} f_1(x)dx}$$

que é equivalente a

$$P(Y > y/X > x_1) \leq P(Y > y/X > x_2), \forall x_1, x_2.$$

Segue-se então que $P(Y > y/X > x)$ é crescente em x para qualquer y, e portanto, Y é crescente à direita em X.

2.2.10 - *Proposição* - Se Y é crescente à direita em X então X e Y são associados.

Deixamos de apresentar a demonstração dessa proposição dada a sua extensão e sua natureza excessivamente técnica. Essa demonstração pode ser encontrada em Esary e Proschan (1972).

Observação - Se X e Y são variáveis aleatórias binárias então

$$TP_2(X,Y) \Leftrightarrow EC(Y/X) \Leftrightarrow A(X,Y) \Leftrightarrow PQD(X,Y) \Leftrightarrow Cov(X,Y) \geq 0.$$

Demonstração - Para provarmos estas equivalências é suficiente mostrarmos que se $Cov(X,Y) \geq 0$ então $TP_2(X,Y)$, ou então que

$$D \equiv \begin{vmatrix} P(X = 0, Y = 0) & P(X = 0, Y = 1) \\ P(X = 1, Y = 0) & P(X = 1, Y = 1) \end{vmatrix} \geq 0$$

Somando aos elementos da 1a. linha, os da 2a. linha, obtemos:

$$D \equiv \begin{vmatrix} P(Y = 0) & P(Y = 1) \\ P(X = 1, Y = 0) & P(X = 1, Y = 1) \end{vmatrix}$$

Adicionando-se aos elementos da 1a. coluna, os da 2a. coluna, temos:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & P(Y = 1) \\ P(X = 1) & P(X = 1, Y = 1) \end{vmatrix}$$

que é não negativa quando $Cov(X,Y) \geq 0$.

Note que, exceto no caso em que as variáveis aleatórias são binárias, o fato de uma função não ser TP_2 não nos permite concluir nada sobre as outras formas de dependência positiva.

2.2.11 - *Proposição* - Sejam X e Y variáveis aleatórias TP_2. Então X e Y apresentam dependência conjunta crescente à direita.

Demonstração - Seja $P(x',y') = P(X > x, Y > y / X > x', Y > y')$.

Se $x' < x$ e $y' < y$ então $P(x',y')$ é crescente em x', y' para todo x,y.

Se $x' > x$ e $y' < y$ então $P(x',y')$ é crescente em y' para todo x,y.

Para provarmos que $P(x',y')$ é crescente em x', consideremos, para $x' < x''$ e $y' < y$,

$$D \equiv \begin{vmatrix} P(X > x', Y > y) & P(X > x'', Y > y) \\ P(X > x', Y > y') & P(X > x'', Y > y') \end{vmatrix}$$

Podemos ainda representar D por

$$D \equiv \begin{vmatrix} P(x' < X \leq x'', Y > y) & P(X > x'', Y > y) \\ P(x' < X \leq x, y' < Y < y) & P(X > x'', y' < Y \leq y) \end{vmatrix}$$

que é não negativo, pois X e Y são TP_2.

Aplicamos um argumento semelhante para provarmos que $P(x',y')$ é crescente em y', se $x' < x$ e $y' \geq y$.

Finalmente, se $x' \geq x$ e $y' \geq y$ então $P(x',y') = 1$, que é crescente em x',y', para quaisquer x e y.

2.2.12 - *Proposição* - Se X e Y apresentam dependência conjunta crescente à direita então Y é crescente à direita em X e X é crescente à direita em Y.

Demonstração - Sejam $x \to -\infty$ e $y' \to -\infty$. Então

$P(X > x, Y > y/X > x', Y > y') = P(Y > y/X > x')$ é crescente em x' para qualquer y, por hipótese.

Segue-se então que Y é crescente à direita em X.

Para mostrarmos que X é crescente à direita em Y, suponhamos que $y \to -\infty$ e $x' \to -\infty$.

Segue-se então que

$P(X > x, Y > y/X > x', Y > y') = P(X > x/Y > y')$ é crescente em y' para qualquer x, por hipótese. Decorre deste fato que X é crescente em Y.

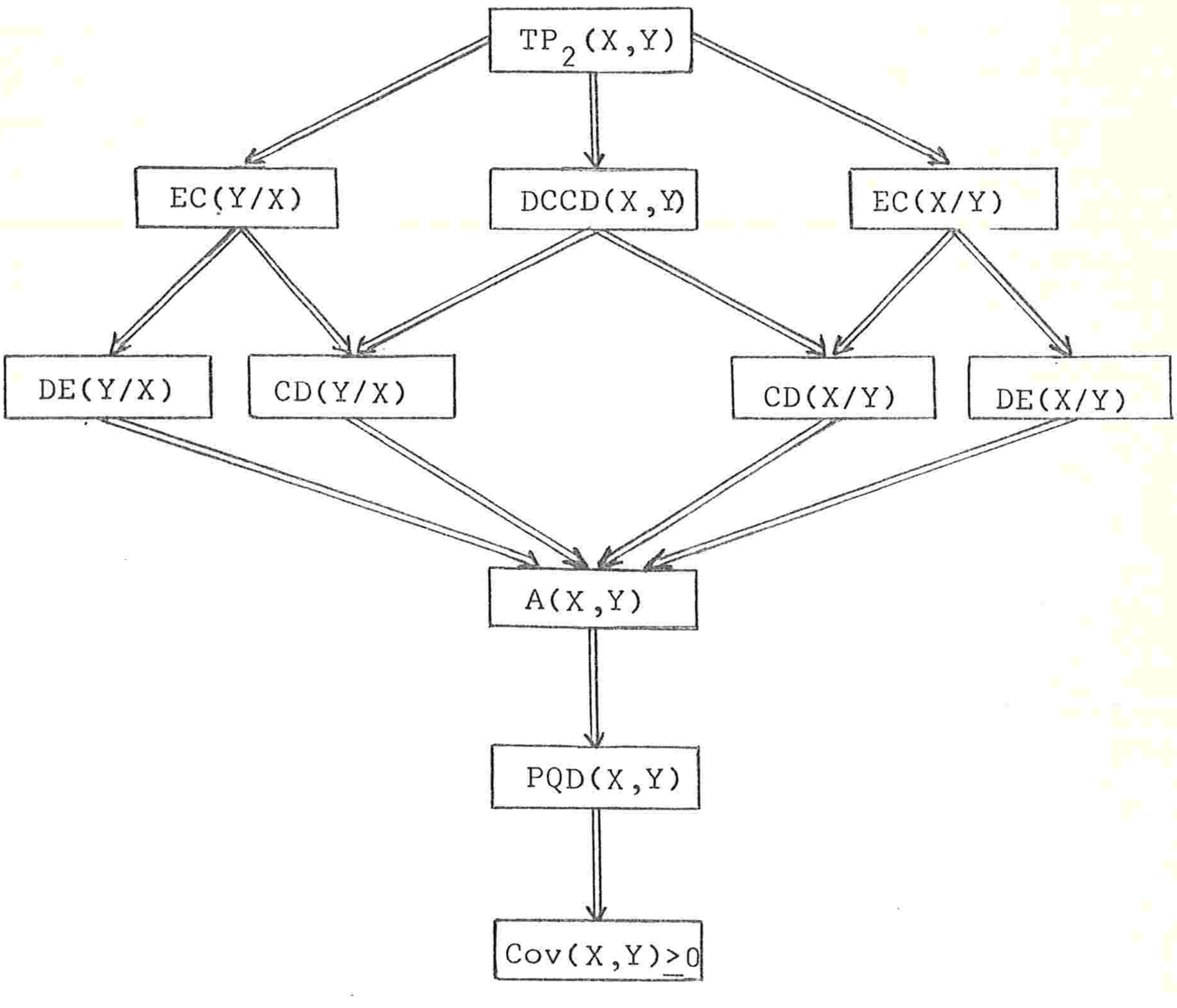
Observação - Das proposições 2.2.11 e 2.2.12 segue-se que

$$TP_2(X,Y) \Leftrightarrow DCCD(X,Y) \Leftrightarrow CD\,(Y/X) \text{ e } CD(X/Y).$$

Podemos provar de maneira análoga às proposições 2.2.11 e 2.2.12 que

$$TP_2(X,Y) \Leftrightarrow DCDE(X,Y) \Leftrightarrow DE(Y/X) \text{ e } DE(X/Y)$$

Apresentaremos a seguir um diagrama das relações entre as formas de dependência positiva bivariada apresentadas neste capítulo.



A não ser no caso especial de variáveis aleatórias binárias, não ocorrem outras implicações. Mostraremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo - Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada pela seguinte tabela:

X \ Y	1	2	3
1	p	o	o
2	o	q	o
3	s	o	r

Verificamos que se $qs \leq pr$ então DE(Y/X), mas CD(Y/X) somente se $s = 0$.

Exemplo - Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo, tal que $x_1 < x_2 < x_3$ e $y_1 < y_2 < y_3$.

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	$\frac{1}{4}$	0	P_{13}
x_2	0	$\frac{1}{4}$	0
x_3	P_{31}	0	$\frac{1}{4}$

(a) Se $P_{13} = P_{31} = \frac{1}{8}$ então X e Y são associados, mas não ocorre dependência crescente à direita e decrescente à esquerda.

(b) $P_{13} = \frac{1}{4}$ e $P_{31} = 0$ então Y é crescente à direita em X, mas Y não é decrescente à esquerda em X.

(c) Se $P_{13} = 0$ e $P_{31} = \frac{1}{4}$ então Y é decrescente à esquerda em X, mas Y não é crescente à direita em X.

Exemplo - Considere o exemplo dado sobre variáveis aleatórias que apresentam dependência conjunta crescente à direita (definição 2.1.11). Naquele exemplo temos que $P(Y \leq a_1/X = a_1) < P(Y \leq a_1/X = a_2)$ para $a_1 < a_2$, segue-se então que Y não é estocasticamente crescente em X.

Exemplo - Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade dada pela tabela abaixo, tal que $a_1 < a_2 < a_3$.

X \ Y	a_1	a_2	a_3
a_1	$\frac{1}{4}$	0	0
a_2	0	$\frac{1}{4}$	0
a_3	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Observe que Y é DE em X, mas Y não é EC em X e também que X e Y não apresentam DCDE.

Exemplo - Seja X uma variável aleatória com distribuição de Cauchy, cuja função densidade é

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\pi(1 + (x-\theta)^2)}, \quad \text{onde} \quad -\infty < \theta < \infty .$$

Então X é estocasticamente crescente em θ, mas não tem razão de verossimilhança monótona.

Exemplo - Sejam as variáveis aleatórias X e Y com distribuição de probabilidade dada na tabela abaixo.

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Facilmente verifica-se que $Cov(X,Y) \geq 0$, mas (X,Y) não é PQD, pois

$$P(X \leq 0, Y \leq 0) = \frac{1}{6} \leq \frac{5}{24} = P(X \leq 0)P(Y \leq 0)$$

CAPÍTULO III

DEPENDÊNCIA POSITIVA MULTIVARIADA

3.1 - *Formas de Dependência Positiva*

A seguir apresentaremos as formas de dependência positiva entre mais de duas variáveis aleatórias, equivalentes as da primeira seção do capítulo anterior.

Mostramos na proposição 2.1.2 que se as variáveis aleatórias X e Y são positivamente quadrante dependentes então as desigualdades

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y) \quad e$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y), \qquad x, y$$

são equivalentes. Entretanto, esta equivalência geralmente não ocorrer quando temos mais de duas variáveis aleatórias. Daí a necessidade de defini-las como formas de dependência distintas, denominadas *dependência positiva superior* e *dependência positiva inferior*.

3.1.1 - *Definição* - Dizemos que a dependência positiva entre as variáveis aleatórias $X_1,..,X_n$ é superior, se quaisquer que sejam $x_1, x_2,.., x_n$ tivermos:

$$P(X_1 > x_1,..,X_n > x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)$$

Em símbolos dizemos que as variáveis aleatórias $X_1,...X_n$ são DPS.

3.1.2 - *Definição* - Dizemos que a dependência positiva entre as variáveis aleatórias $X_1,..,X_n$ é inferior, se quaisquer que sejam $x_1, x_2,..,x_n$ tivermos:

$$P(X_1 \leq x_1,..,X_n \leq x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

Em símbolos dizemos que as variáveis aleatórias $X_1,..,X_n$ são DPI.

Os próximos dois exemplos mostram que os conceitos de DPS e DPI não são equivalentes.

Exemplo - Suponha que o vetor aleatório $\underset{\sim}{X} = (X_1,X_2,X_3)$ assume os valores (1,1,1), (0,1,0) e (0,0,1), cada qual com probabilidade $\frac{1}{3}$. Segue-se então que

$$P(X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 0) = \frac{1}{3} > \frac{4}{27} = \prod_{i=1}^{3} P(X_i > 0),$$

mas

$$P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0, X_3 \leq 0) = 0 < \frac{2}{27} = \prod_{i=1}^{3} P(X_i \leq 0).$$

Portanto $\underset{\sim}{X}$ é DPS, mas não é DPI.

Exemplo - Seja $\underset{\sim}{X}$ um vetor aleatório com distribuição Normal Multivariada tal que $E(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{0}$.

Pode-se provar que $|\underset{\sim}{X}|$ é DPI, mas não é DPS, exceto no caso que impomos alguma restrição adicional na estrutura da covariância, tal como $Cov(X_i, X_j) = a_i\, a_j$.

A demonstração pode ser encontrada em Sidák (1967).

Associação

3.1.3 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são associadas se $Cov(f(\underset{\sim}{X}), g(\underset{\sim}{X})) \geq 0$ para quaisquer funções crescentes f e g, tais que $Ef(\underset{\sim}{X})$, $Eg(\underset{\sim}{X})$ e $Ef(\underset{\sim}{X})g(\underset{\sim}{X})$ existem.

A partir da definição 3.1.3 é praticamente impossível verificar se as variáveis aleatórias são associadas, pois isto exige a verificação de que a $Cov(f(\underset{\sim}{X}), g(\underset{\sim}{X}))$ é não negativa para quaisquer funções crescentes f e g. Em vista disto, mostraremos através do teorema 3.1.4 que a associação de variáveis aleatórias pode ser estabelecida considerando somente funções f e g, binárias e crescentes.

3.1.4 - Teorema - Se $Cov(\gamma(\underset{\sim}{X}), \delta(\underset{\sim}{X})) \geq 0$ para quaisquer funções γ e δ, binárias crescentes, então $\underset{\sim}{X}$ é associado.

Demonstração - Sejam f e g funções crescentes. Considere a seguinte identidade:

$$T_f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(\underset{\sim}{X}) > x \\ 0, & \text{se } f(\underset{\sim}{X}) \leq x \end{cases}$$

Então

$$Cov(f(\underset{\sim}{X}), g(\underset{\sim}{X})) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Cov(T_f(x), T_g(y))dxdy$$

A demonstração desta identidade pode ser encontrada em Lehmann (1966).

Como $T_f(x)$ e $T_g(y)$ são funções binárias crescentes em $\underset{\sim}{X}$, segue pela hipótese que $Cov(T_f(x), T_g(y)) \geq 0$.

Segue-se então da definição 3.1.3 que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são associadas.

Propriedades da Associação

P_1: Qualquer subconjunto de variáveis aleatórias associadas é associado.

Demonstração - P_1 segue imediatamente da definição de associação pela escolha de funções f e g crescentes que dependem somente das variáveis do subconjunto em questão.

P_2: Se dois conjuntos de variáveis aleatórias associadas são independentes então sua união é um conjunto de variáveis aleatórias associadas.

Demonstração - Sejam $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ formados por variáveis aleatórias associadas, $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ independentes. Sejam f e g funções crescentes.

Representando $f(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$ e $g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$ por f e g, respectivamente, temos que $Cov(f,g) = E_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}} fg - E_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}} f \, E_{X,Y} g$, onde $E_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}$ representa a esperança com relação à distribuição conjunta de $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$.

Da independência entre $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ segue-se que

$$Cov(f,g) = E_{\underset{\sim}{X}} E_{\underset{\sim}{Y}} fg - E_{\underset{\sim}{X}}(E_{\underset{\sim}{Y}} f \, E_{\underset{\sim}{Y}} g) +$$

$$+ E_{\underset{\sim}{X}}(E_{\underset{\sim}{Y}} f \, E_{\underset{\sim}{Y}} g) - E_{\underset{\sim}{X}} E_{\underset{\sim}{Y}} f \, E_{\underset{\sim}{X}} E_{\underset{\sim}{Y}} g.$$

Portanto

$$Cov(f,g) = E_{\underset{\sim}{X}} Cov_{\underset{\sim}{Y}}(f,g) + Cov_{\underset{\sim}{X}}(E_{\underset{\sim}{Y}} f,\ E_{\underset{\sim}{Y}} g).$$

Temos que $Cov_{\underset{\sim}{Y}}(f(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{Y}),\ g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{Y})) \geq 0$ para cada $\underset{\sim}{x}$ fixado, portanto $E_{\underset{\sim}{X}} Cov_{\underset{\sim}{Y}}(f,g) \geq 0$.

Além disto, $E_{\underset{\sim}{Y}} f(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$ e $E_{\underset{\sim}{Y}} g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$ são funções crescentes em $\underset{\sim}{x}$, logo $Cov(E_{\underset{\sim}{Y}} f,\ E_{\underset{\sim}{Y}} g) \geq 0$. Segue-se então que $Cov(f,g) \geq 0$, e portanto, o conjunto formado pela união de $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ é associado.

P_3: O conjunto formado por uma única variável aleatória é associado.

Demonstração - Para qualquer par de funções γ, δ binárias crescentes de uma única variável aleatória temos, para qualquer x, que $\gamma(x) \leq \delta(x)$ ou $\gamma(x) \geq \delta(x)$. Se, por exemplo, $\gamma \leq \delta$ então $Cov(\gamma(X),\delta(X)) = E(\gamma\delta) - E(\gamma)E(\delta) = E(\gamma) - E(\gamma)E(\delta) = E(\gamma)(1 - E(\delta)) \geq 0$. P_3 segue-se então do teorema 3.1.4.

P_4: Funções crescentes de variáveis aleatórias associadas são associadas.

Demonstração - Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias associadas e $\{f_i\}$, $i = 1,\ldots m$, funções crescentes. Vamos mostrar que as variáveis aleatórias $Y_i = f_i(\underset{\sim}{X})$, $i = 1,\ldots,m$, são associadas. Para isso consideremos um par f,g de funções crescentes e observemos que nessas condições as funções compostas $f(f_1,\dots, f_m)$ e $g(f_1,\dots,f_m)$ são também crescentes. Temos que:

$Cov_{\underset{\sim}{Y}}(f(\underset{\sim}{Y}),g(\underset{\sim}{Y})) = Cov_{\underset{\sim}{X}}[f(f(\underset{\sim}{X})),g(f(\underset{\sim}{X}))] \geq 0$, que mostra que as variáveis aleatórias $Y_1,\dots, Y_m$ são associadas.

P_5: Se $X_1^{(K)},\dots, X_n^{(K)}$ são associadas para cada K e $\underset{\sim}{X}^{(K)}$ converge em distribuição para $\underset{\sim}{X}$ então $X_1,\dots,X_n$ são associadas.

A demonstração de P_5 pode ser encontrada em Esary, Proschan, e Walkup (1967).

3.1.5 - *Lema* - Variáveis aleatórias independentes são associadas.

Demonstração - Segue imediatamente de P_2 e P_3.

3.1.6 - *Lema* - Sejam $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2,\dots,\underset{\sim}{X}_n$ vetores aleatórios independentes tal que $\underset{\sim}{X}_i$ é associado, $i = 1,2,\dots, n$. Seja $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X}_1 + \dots + \underset{\sim}{X}_n$. Então $\underset{\sim}{X}$ é um vetor aleatório associado.

Demonstração - A propriedade P_2 pode ser generalizada (por indução) para um nº finito qualquer de conjuntos de variáveis aleatórias. O lema acima segue-se facilmente dessa generalização e da propriedade P_4.

Exemplo - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_K)$ um vetor aleatório com com distribuição multinomial com parâmetros n e $p_1,\ldots,p_K$. Então $(X_1, -X_2)$ é um vetor aleatório associado.

Demonstração - Seja $Y_i = (Y_{i1},\ldots,Y_{iK})$, $i = 1,\ldots,n$, vetores aleatórios independentes, cada qual com distribuição multinomial com parâmetros 1 e $p_1,\ldots,p_K$. Facilmente podemos verificar que $(Y_{11}, -Y_{12}),\ldots,(Y_{n1}, -Y_{n2})$ são associados. Do lema 3.1.5, segue-se então que $(\underset{\sim}{X}_1, -\underset{\sim}{X}_2) = \prod_{i=1}^{n} (Z_{i1}, -Z_{i2})$ é associado.

A associação entre variáveis aleatórias binárias tem aplicações interessantes em confiabilidade que mostraremos no próximo capítulo.

Vamos apresentar agora dois teoremas de importância fundamental para estas aplicações.

3.1.7 - *Teorema* - Se $X_1, X_2,\ldots,X_n$ são variáveis aleatórias binárias associadas então $1 - X_1, 1 - X_2,\ldots, 1 - X_n$ são variáveis aleatórias binárias associadas.

Demonstração - Seja uma função binária crescente. Então

$\gamma^D(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{1} - \gamma(\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{x})$ é uma função binária crescente, onde $\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{x} = (1 - x_1, 1-x_2,\ldots, 1 - x_n)$

Seja $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{X}$. Então

$$\mathrm{Cov}_{\underset{\sim}{Y}}(\gamma(\underset{\sim}{Y}), \delta(\underset{\sim}{Y}) = \mathrm{Cov}_{\underset{\sim}{X}}(\gamma^D(\underset{\sim}{X}), \delta^D(\underset{\sim}{X})) \geq 0,$$

para quaisquer funções γ, δ binárias crescentes.

Do teorema 3.1.4, segue que $1 - X_1$, $1 - X_2, \ldots, 1 - X_n$ são associadas.

3.1.8 - *Teorema* - Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias binárias associadas então

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1) \qquad (3.1.1)$$

e

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 0) \qquad (3.1.2)$$

Demonstração - Consideremos as duas funções crescentes de $\underset{\sim}{X}$: $\gamma(\underset{\sim}{X}) = X_1$ e $\delta(\underset{\sim}{X}) = X_2 X_3 \ldots X_n$.

Como hipótese, $X_1, \ldots, X_n$ são associadas, segue-se que $E(X_1 X_2 \ldots X_n) \geq E(X_1)E(X_2 \ldots X_n)$. Repetindo-se este argumento obtemos:

$$E(X_1, X_2 \ldots X_n) \geq E(X_1)E(X_2) \ldots E(X_n). \qquad (1)$$

Como X_i é uma variável aleatória binária, $i = 1, 2, \ldots, n$, segue-se que

$$E(X_i) = P(X_i = 1) \text{ e } E(X_1 X_2 \ldots X_n) = P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1)$$

Substituindo este resultado em (1), obtemos a desigualdade (3.1.1).

Usando o teorema 3.1.7 e a desigualdade (3.1.1) obtemos a desigualdade (3.1.2).

Podemos obter outras aplicações da associação (2a. seção do capítulo IV) através do teorema a seguir.

3.1.9 - *Teorema* - Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias associadas e $Y_i = f_i(\underset{\sim}{X})$, f_i crescente, $i = 1,2,\ldots, K$. Então

$$P(Y_1 \leq y_1, \ldots, Y_K \leq y_K) \geq \prod_{i=1}^{K} P(Y_i \leq y_i) \qquad (3.1.3)$$

e

$$P(Y_1 > Y_1, \ldots, Y_K > y_K) \geq \prod_{i=1}^{K} P(Y_i > y_i) \qquad (3.1.4)$$

para quaisquer $y_1, \ldots, y_K$.

Demonstração - Pela propriedade P_4, $Y_1, \ldots, Y_K$ são associadas.

Seja

$$T_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_i > y \\ 0 & \text{se } Y_i \leq y \end{cases}$$

Então $T_i(y)$ é crescente em Y_i, e por P_4, $T_1(y_1)$, $T_2(y_2), \ldots, T_K(y_K)$ são associadas.

Do teorema 3.1.8 segue-se então as desigualdades (3.1.3) e (3.1.4).

Dependência Seqüencialmente Crescente à Direita

Esta forma de dependência positiva corresponde a dependência crescente à direita, no caso bivariado.

3.1.10 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são seqüencialmente crescentes à direita, SCD, se

$$P(X_i > x_i / X_1 > x_1, \ldots, X_{i-1} > x_{i-1})$$

for crescente em $x_1, \ldots, x_{i-1}$ para todo $i = 2, 3, \ldots, n$.

Uma aplicação da dependência seqüencialmente crescente à direita é em problemas que envolvem a relação entre uma variável aleatória X_i, num momento não observável, e um conjunto de variáveis aleatórias "testes" $X_1, \ldots, X_{i-1}$ observáveis.

Suponha, por exemplo, que um item é aceito se cada uma de suas variáveis "testes" excede especificadamente os limites inferiores $x_1, \ldots, x_{i-1}$. Se aumentarmos as exigências das variáveis "testes", isto é, aumentarmos os x's, isso aumenta necessariamente a probabilidade de um valor alto para X_i? A resposta é afirmativa se estas variáveis aleatórias forem seqüencialmente crescentes à direita.

Dependência Seqüencialmente Decrescente à Esquerda

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, introduziremos a seguir a forma de dependência que corresponde, no caso bivariado, a dependência decrescente à esquerda.

Convém ressaltar que esses dois tipos de dependência não são equivalentes nem no caso bivariado.

3.1.11 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são seqüencialmente decrescentes à esquerda, SDE, se

$$P(X_i \leq x_i / X_1 \leq x_1, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1})$$

for decrescente em $x_1, \ldots, x_{i-1}$, para todo $i = 2, 3, \ldots, n$.

Dependência Estocástica Crescente em Seqüência

3.1.12 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são estocasticamente crescentes em seqüência se

$$P(X_i > x_i / X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1})$$

for crescente em $x_1, \ldots, x_{i-1}$ para $i = 2, \ldots, n$.

Denotamos esta forma de dependência por ECS.

Dependência Conjunta Crescente à Direita

3.1.13 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ apresentam dependência conjunta crescente à direita se, para quaisquer $x_1, \dots, x_n$,

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n / X_1 > x_1', \dots, X_n > x_n')$$

é crescente em $x_1', \dots, x_n'$.

Observação - Se um conjunto de variáveis aleatórias apresenta esse tipo de dependência dizemos que ele é um conjunto DCCD. Intuitivamente vejamos o que isto significa através do exemplo a seguir.

Sejam as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ que representam o tempo de vida de n objetos a partir de origens diferentes. Então a informação de que eles ainda estão funcionando nos instantes $x_1', \dots, x_n'$, aumenta a probabilidade para o conjunto.

Propriedades

P_1: Qualquer subconjunto de um conjunto DCCD é também DCCD.

Demonstração - Seja $X_1,\ldots, X_n$ um conjunto DCCD. Então pela definição 3.1.13 segue que

$P(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n/X_1 > x_1',\ldots, X_n > x_n')$ é crescente em $x_1',\ldots, x_n'$ para quaisquer $x_1,\ldots, x_n$.

Se substituirmos x_i e x_i', para $i = 1,\ldots, n$, por quaisquer constantes, a condição anterior não se altera. Consideremos que $x_1' \to -\infty$ e $x_1 \to -\infty$. Obtemos então que

$P(X_2 > x_2,\ldots, X_n > x_n/X_2 > x_2',\ldots, X_n > x_n')$ é crescente em $x_2',\ldots, x_n'$ para quaisquer $x_2,\ldots, x_n$.

De maneira análoga provamos P_1 para qualquer subconjunto de $X_1,\ldots,X_n$.

P_2: A união de dois conjuntos independentes DCCD é um conjunto DCCD.

A demonstração é imediata.

P_3: Um conjunto formado por uma única variável aleatória é DCCD.

Demonstração - Seja X uma variável aleatória tal que

$$P(x') = P(X > x/X > x') = \frac{\overline{F}(\text{máx}(x,x'))}{\overline{F}(x')}$$

Se $x \leq x'$ então $P(x') = 1$

Se $x > x'$ então $P(x') = \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x')}$ é crescente em x' para todo $x > x'$.

Segue-se então que, para qualquer x, $P(X > x/X > x')$ é crescente em x', e pela definição 3.1.13, X apresenta dependência conjunta crescente à direita.

P_4: Mínimos de conjuntos de variáveis aleatórias DCCD são DCCD.

Demonstração - Suponha que as variáveis aleatórias $Y_1,\ldots,Y_m$ apresentam DCCD.

Sejam $X_i = \min\limits_{j \varepsilon J_i} Y_j$ para $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, onde $J_i C \{1,\ldots,m\}$ e

$$y_j = \max_{i \varepsilon I_j} x_i,\ y_j' = \max_{i \varepsilon I_j} x_i \quad \text{tal que} \quad I_j = \{i/j \varepsilon J_i\}$$

Então

$$P(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n/X_1 > x_1',\ldots,X_n > x_n') =$$

$$= P(Y_1 > y_1,\ldots, Y_n > y_m/Y_1 > y_1',\ldots,Y_m > y_m')$$ e é crescente em $x_1',\ldots,x_n'$, pois $Y_1,\ldots,Y_m$ é DCCD e $y_1',\ldots,y_m'$ é crescente em $x_1',\ldots, x_n'$. Portanto $X_1,\ldots,X_n$, os mínimos dos conjuntos $J_1,\ldots,J_n$, respectivamente, são DCCD.

3.1.14 - *Lema* - Um conjunto de variáveis aleatórias independentes é DCCD.

Demonstração - Segue imediatamente das propriedades P_2 e P_3 da dependência conjunta crescente à direita.

Exemplo - Sejam Y_1, Y_2, Y_3 variáveis aleatórias independentes, $X_1 = \min(Y_1, Y_3)$ e $X_2 = \min(Y_2, Y_3)$. Então X_1 e X_2 apresentam DCCD.

Este resultado é uma conseqüência imediata do lema 3.1.14 e da propriedade P_4.

3.1.15 - *Teorema* - Seja $X_1, \ldots, X_n$ um conjunto DCCD. Considere dois subconjuntos quaisquer de $X_1, \ldots, X_n$. Então um destes subconjuntos é crescente à direita em relação ao outro.

Demonstração - Sejam K e M subconjuntos de $\{1, 2, \ldots n\}$, não necessariamente disjuntos.

Como por hipótese, $P(\underset{\sim}{X}_K > \underset{\sim}{x}'_K / \underset{\sim}{X} > \underset{\sim}{x})$ é crescente em $\underset{\sim}{x}$ para qualquer $\underset{\sim}{x}'_K$, temos que

$$\frac{P(\underset{\sim}{X}_K > \underset{\sim}{x}'_K,\ \underset{\sim}{X}_M > \underset{\sim}{x}_M,\ \underset{\sim}{X}_{\overline{M}} > \underset{\sim}{x}_{\overline{M}})}{P(X_M > x_M,\ X_{\overline{M}} > x_{\overline{M}})}$$

é crescente em $\underset{\sim}{x}_M$ para quaisquer $\underset{\sim}{x}'_K$ e $\underset{\sim}{x}_{\overline{M}}$.

Agora fazendo $\underset{\sim}{x}_{\overline{M}} \to -\infty$, segue-se que $P(\underset{\sim}{X}_K > \underset{\sim}{x}_K' / \underset{\sim}{X}_M > \underset{\sim}{x}_M)$ é crescente em $\underset{\sim}{x}_M$ para qualquer x_K', e portanto, $\underset{\sim}{X}_K$ é crescente à direita em $\underset{\sim}{X}_M$.

Exemplo - Seja o conjunto de variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ com distribuição exponencial multivariada determinada por Marshall e Olkin (1967) tal que

$$\overline{F}(x_1,\ldots,x_n) = \exp\Big[-\sum_{i=1} \lambda_i x_i - \sum_{i<j} \lambda_{ij} \text{máx}(x_i,x_j)$$

$$- \sum_{i<j<k} \lambda_{ijk} \text{máx}(x_i,x_j,x_k) \ldots\ldots - \lambda_{1\ldots n} \text{máx}(x_1,\ldots,x_n)\Big],$$

onde $x_i > 0$, $\lambda_i \geq 0$ e pelo menos um λ_i é maior que zero, $i=1,\ldots,n$.

Então o conjunto de variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_n$ é DCCD.

Dependência Conjunta Decrescente à Esquerda

3.1.16 - *Definição* - As variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_n$ apresentam dependência conjunta decrescente à esquerda se, para quaisquer $x_1,\ldots,x_n$,

$$P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n / X_1 \leq x_1',\ldots,X_n \leq x_n')$$

é decrescente em $x_1',\ldots,x_n'$.

Usamos a notação DCDE quando um conjunto de variáveis aleatórias apresenta essa forma de dependência.

De maneira análoga a DCCD podemos provar que:

a) máximos de conjuntos de variáveis aleatórias DCDE são DCDE.

b) se consideramos dois subconjuntos quaisquer de um conjunto DCDE então um dos subconjuntos é decrescente à esquerda em relação ao outro.

c) as propriedades P_1, P_2 e P_3 relativas a DCCD continuam válidas quando substituimos DCCD por DCDE.

Exemplo - Sejam Y_1, Y_2, Y_3 variáveis aleatórias independentes, $X_1 = \text{máx}(Y_1,Y_3)$ e $X_2 = \text{máx}(Y_2,Y_3)$. Então X_1 e X_2 apresentam DCDE.

Uma das maneiras de provar este resultado consiste em observar que o conjunto formado por $-Y_1$, $-Y_2$, $-Y_3$ é DCCD. Segue que $-X_1 = \min(-Y_1,Y_3)$ e $-X_2 = \min(-Y_2,-Y_3)$ também é DCCD e, portanto, X_1 e X_2 apresentam DCDE.

3.2 - *Relações entre as Formas de Dependência Positiva*

Introdução

A verificação de que um conjunto com mais de duas variáveis aleatórias satisfaz alguma forma de dependência positiva é ainda mais impraticável do que no caso bivariado. Surge então, com mais razão ainda, a necessidade de estabelecer uma condição mais forte, que implique nas formas de dependência positiva, e seja de fácil verificação. Na procura desta condição surgiram várias propostas, tais como: funções TP_2 em pares e TP_2 multivariadas Karlin (1968), dependência m^* - positiva Alam e Wallenius (1976) e dependência totalmente positiva por eliminação Ahmed, Langberg, Leon e Proschan (1978).

Block e Ting (1979) provaram que, a não ser em casos patológicos, os conceitos citados acima são equivalentes. Por este motivo, consideraremos somente o caso de funções TP_2 em pares, que é uma generalização do caso bivariado.

Nesta seção desenvolveremos amplamente a análise destas funções e mostraremos a sua relação com as formas de dependência apresentadas na seção anterior.

Funções TP_2 em Pares

3.2.1 - *Definição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ um vetor aleatório com função densidade $f(\underset{\sim}{x})$, discreta ou contínua. Diremos que $f(\underset{\sim}{x})$(ou $\underset{\sim}{X}$) é TP_2 em pares se:

(a) Existem subconjuntos mensuráveis da reta, $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$, tais que $f(\underset{\sim}{x}) > 0$ somente para $\underset{\sim}{x} \in \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$.

(b) $f(\underset{\sim}{x})$ é TP_2 em cada par de argumentos, para valores fixos dos argumentos restantes.

Exemplo - O vetor aleatório (X_1, X_2, X_3) é TP_2 em pares se (X_1,X_2,X_3) tem densidade $f(x_1,x_2,x_3) > 0$ em $\Omega_1 X \Omega_2 X \Omega_3$ e $f(x_1,x_2,x_3)$ é TP_2 em $(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_3)$ em $\Omega_1 X\Omega_2, \Omega_1 X\Omega_3, \Omega_2 X\Omega_3$, respectivamente.

Observação - Como veremos, através do próximo exemplo, a condição (a) da definição 3.2.1 é que irá garantir que as marginais de $f(\underset{\sim}{x})$ serão também TP_2 em pares.

Exemplo - Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias com função densidade

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ 1 < x_3 < 2 \\ 1/2 & \text{se } 1 < x_1 < 2,\ 1 < x_2 < 2,\ 0 < x_3 < 1 \end{cases}$$

Facilmente verificamos que $f(x_1, x_2, x_3)$ é TP_2 em $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)$. Entretanto $f(x_1, x_2, x_3)$ é positiva em $[(0,1)X(0,1)X(1,2)] \cup [(1,2)X(1,2)X(0,1)]$, que não é da forma $\Omega_1 X\ \Omega_2 X\ \Omega_3$. Segue-se então que $f(x_1, x_2, x_3)$ não é TP_2 em pares.

A densidade marginal de (X_1, X_3) é dada por

$$f_{13}(x_1 x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x_1 < 1,\ 1 < x_3 < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 < x_1 < 2,\ 0 < x_3 < 1 \end{cases}$$

Segue-se que

$$f_{13}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) f_{13}(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) = 0 < \tfrac{1}{4} = f_{13}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) f_{13}(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Portanto (X_1, X_3) não é TP_2.

3.2.2 - *Teorema* - Sejam Ω_1, Ω_2, Ω_3 conjuntos de Borel da reta. Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x,z)$ funções à valores reais definidas respectivamente em $\Omega_1 X\ \Omega_2 X\ \Omega_3$ e em $\Omega_1 X\ \Omega_2$. Suponha ainda que g é TP_2 e f é TP_2 em pares. Nessas condições, se μ é uma medida σ-finita, a função

$$h(x, y) = \int_{\Omega_3} f(x, y, z) g(x, z) d\mu(z)$$

é TP_2.

Observação - Este teorema é um dos resultados básicos sobre funções totalmente positivas e a sua demonstração pode ser encontrada em Karlin (1968), página 123.

3.2.3 - *Corolário* - Se o vetor aleatório $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ é TP_2 em pares então qualquer densidade marginal de $\underset{\sim}{X}$ é TP_2 em pares.

Demonstração - É fácil ver que é suficiente mostrarmos que a densidade marginal de $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ é TP_2 em pares.

Consideremos então:

$$f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{\Omega_n} f_n(x_1, \ldots, x_n) dx_n$$

Como Ω_n é um conjunto não degenerado e por hipótese $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ é positiva, segue-se que $f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ é positiva em $\Omega_1 X \ldots X \Omega_{n-1}$.

Sejam i,j, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$, $i \neq j$. Vamos mostrar que $f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ é TP_2 no par (x_i, x_j) quando as demais variáveis são mantidas fixas. Para isso usaremos o teorema anterior considerando:

$$f(x_i,x_j,x_n) = f_n(x_1,x_2,\ldots,x_i, \ldots,x_j,\ldots,x_n),$$

$$g(x_1,x_n) \equiv 1 \quad \text{e} \quad d\mu(x_n) = dx_n.$$

De acordo com o teorema, segue-se que

$$h(x_i,x_j) = f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

é TP_2 e, portanto, $f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ é TP_2 em pares.

Observação: As proposições 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 continuam válidas para funções TP_2 em pares.

Exemplo - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ vetor aleatório com distribuição Normal Multivariada com média μ e matriz de covariância Σ, positiva e definida.

Nessas condições se $R = \Sigma^{-1}$, $\underset{\sim}{X}$ é TP_2 em pares se e somente se $r_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.

Demonstração - Como $\underset{\sim}{X} \sim N(\mu,\Sigma)$, sua densidade é dada por

$$f(\underset{\sim}{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-1/2 \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right],$$

$$-\infty < x_i < \infty, \quad i = 1,\ldots,n, \quad R = \Sigma^{-1}$$

Para qualquer por (x_i, x_j), podemos escrever

$$f(\underset{\sim}{x}) = c_1(\underset{\sim}{x}^{(i)})\ c_2(\underset{\sim}{x}^{(j)})\ e^{-r_{ij}x_i x_j}$$

onde $c_1 \geq 0$ não depende de x_i, $c_2 \geq 0$ não depende de x_j. Portanto para provarmos que $f(\underset{\sim}{x})$ é TP_2 em x_i, x_j basta provarmos que $e^{-r_{ij}x_i x_j}$ é TP_2 em x_i, x_j, $\forall\, i \neq j$. É fácil ver que isto ocorre se e somente se $r_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.

Exemplo - (Valores absolutos de variáveis aleatórias multinormais).

Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório com distribuição $N(\mu, \Sigma)$. A densidade conjunta de $(|X_1|, \ldots, |X_n|)$ é TP_2 em pares se e somente se existir uma matriz diagonal D com elementos iguais a ± 1, tal que na matriz $-D\Sigma^{-1}D$ qualquer elemento fora da diagonal seja não negativo.

Suponha, por exemplo, que $\underset{\sim}{X}$ $N(0, \Sigma)$ e $\Sigma = \Gamma + \alpha\alpha'$, onde $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ e é uma matriz diagonal. Então $(|X_1|, \ldots, |X_n|)$ é TP_2 em pares.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Karlin e Rinott (1979).

3.2.4 - *Definição* - Dizemos que $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, é uma função frequência de Polya de ordem 2 (FP_2) se existirem dois subconjuntos mensuráveis na reta, Ω_1 e Ω_2, tais que para todo par $(x,y) \varepsilon \Omega_1 X \Omega_2$, $f(x-y)$ for TP_2 em x e y.

As proposições a seguir fornecem métodos que nos permitem gerar densidades TP_2 em pares.

3.2.5 - *Proposição* - Sejam $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ e $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ dois vetores aleatórios independentes que satisfazem as condições abaixo:

(a) as componentes do vetor $\underset{\sim}{X}$ são independentes e para cada $i = 1, \ldots, n$, a densidade f_{X_i} da componente X_i é PF_2.

(b) a densidade conjunta do vetor $\underset{\sim}{Y}$, $f_{\underset{\sim}{Y}}$ é TP_2 em pares.

Nessas condições a densidade do vetor $\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{Y}$ é TP_2 em pares.

Demonstração - Das hipóteses feitas, segue-se que a densidade conjunta do vetor $\underset{\sim}{Z}$ será dada por:

$$f_{\underset{\sim}{Z}}(z_1, \ldots, z_n) = \int \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(z_i - y_i)\, f_{\underset{\sim}{Y}}(y_1, \ldots, y_n) d_{\underset{\sim}{y}} \quad (3.2.1$$

Como f_{X_i} é PF_2 segue-se que, para todo i, $f_{X_i}(z_i - y_i)$ é TP_2 em (z_i, y_i). Portanto, o integrando em (3.2.1) é TP_2 em pares e o resultado segue do corolário 3.2.3.

Um argumento análogo ao utilizado na proposição acima nos permite obter dois outros resultados, que serão em seguida utilizados para mostrar que diversas distribuições multivariadas importantes são TP_2 em pares.

3.2.6 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ um vetor aleatório que satisfaz a condição (a) da proposição 3.2.5 e seja X_o uma variável aleatória independente de $\underset{\sim}{X}$. Nessas condições se definirmos para $i = 1,\ldots,n$, $Z_i = X_i + X_o$, o vetor $\underset{\sim}{Z} = (Z_1,\ldots,Z_n)$ será TP_2 em pares.

3.2.7 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ um vetor aleatório com componentes independentes e para $i = 1,\ldots,n$, vamos indicar por f_{X_i} a densidade da componente X_i. Seja X_o uma variável aleatória positiva, independente de $\underset{\sim}{X}$. Nessas condições temos:

(a) Se para $i = 1,\ldots,n, v > 0, -\infty < u < \infty$, $f_{X_i}(u/v)$ for TP_2 em u e v, o vetor $\underset{\sim}{Y} = (X_1X_o,\ldots,X_nX_o)$ será TP_2 em pares.

(b) Se para $i = 1,\dots,n$, $v > 0$, $-\infty < u < \infty$, $f_{X_i}(uv)$ for TP_2 em u e v, o vetor $\underset{\sim}{Z} = (X_1/X_o,\dots,X_n/X_o)$ será TP_2 em pares.

Exemplo (Distribuição Gama Multivariada) - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ vetor aleatório de componentes independentes, tal que $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ com $\alpha_i \geq 1$, $\beta_i > 0$ e para $i = 1,\dots,n$. Então $f_{X_i}(x) = c_i x^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i x}$, $x > 0$ é PF_2.

Se $X_o \sim \Gamma(\alpha_o, \beta_o)$ é independente de $\underset{\sim}{X}$ então o vetor $\underset{\sim}{Z} = (X_1 + X_o,\dots,X_n + X_o)$ tem distribuição Gama Multivariada. Da proposição 3.2.6, segue-se então que $\underset{\sim}{Z}$ é TP_2 em pares.

Exemplo (Distribuição F Multivariada) - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\dots,X_n)$ vetor aleatório de componentes independentes tal que $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ com $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ e para $i = 1,\dots,n$. Então $f_{X_i}(\mu/v) = c_i(\mu/v)^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i \mu/v}$ é TP_2 em μ e v positivos.

Considere por exemplo, o caso particular em que $X_i \sim \chi^2 v_i$ (Qui-quadrado com v_i graus de liberdade). Seja uma variável aleatória $X_o \sim \chi^2_{v_o}$ e independente de $\underset{\sim}{X}$. Segue-se então da proposição 3.2.7 que

$\underset{\sim}{Z} = (X_1/v_1)(X_o/v_o)^{-1},\ldots,(X_n/v_n)(X_o/v_o)^{-1}$ é TP_2 em pares.

A distribuição de $\underset{\sim}{Z}$ é denominada $\underset{\sim}{F}$ Multivariada.

Exemplo (Valor absoluto de variáveis aleatórias com distribuição de Cauchy Multivariada) - Sejam o vetor aleatório $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n) \sim N(\underset{\sim}{0}, I)$ e a variável aleatória $S \sim \chi^2_v$, $\underset{\sim}{X}$ e S independentes.

Seja $\underset{\sim}{Z} = (Z_1,\ldots,Z_n) = (X_1(S/\ v)^{-1},\ldots,X_n(S/\ v)^{-1})$, cuja distribuição é denominada Cauchy Multivariada. Então $(\ Z_1\ ,\ldots,\ Z_n\ )$ é TP_2 em pares. Este resultado é obtido pelo mesmo argumento usado no exemplo anterior, pois e^{-u^2/v^2} é TP_2 em u e v positivo.

3.2.8 - *Proposição* - Sejam $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Seja f a função densidade de X_i, $i = 1,\ldots,n$. Então a densidade conjunta das estatísticas de ordem $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ é TP_2 em pares.

Demonstração - A densidade conjunta de $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ é dada por $n!g(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$, onde

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{para } x_1 \leq \ldots \leq x_n \\ 0 & \text{no complementar} \end{cases}$$

Uma verificação direta mostra que g é TP_2 em pares. A densidade conjunta de $\underset{\sim}{X}$ é TP_2 em pares, pois $X_1,\ldots,X_n$ são independentes. O resultado segue agora da observação em relação à proposição 2.2.4 que vem logo após o corolário 3.2.3.

Observação - Seja $D_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $i = 1,\ldots,n$, e $X_{(o)} = 0$. Nessas condições, se $f(x+y)$ é TP_2 então

$f(d_1,\ldots,d_n) = n!\, f(d_1)f(d_1+d_2)\ldots f(d_1+\ldots+d_n)$ é TP_2 em pares.

Relações entre as formas de dependência positiva

Vamos agora estabelecer as relações existentes entre as formas de dependência introduzidas na 1ª seção desta capítulo.

3.2.9 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,..,X_n)$ vetor aleatório cuja função densidade $f_n(\underset{\sim}{x})$ é TP_2 em pares. Então $\underset{\sim}{X}$ é estocasticamente crescente em seqüência.

Demonstração - Seja $f_i(x_1,...,x_i)$ a densidade marginal de $X_1,...,X_i$ para $i = 1,...,n$. Então pelo corolário 3.2.3, f_i é TP_2 em pares para $i = 2,...,n$.

Como $f_2(x_1,x_2)$ é TP_2 segue-se que $P(X_2 > x_2/X_1=x_1)$ é crescente em x_1 para qualquer x_2 (ver a proposição 2.2.5).

De maneira análoga, para x_2 fixado, $f(x_1, x_2, x_3)$ é TP_2 em (x_1, x_3), e portanto, $P(X_3 > x_3/X_1= x_1, X_2 = x_2)$ é crescente em x_1 para qualquer x_3.

Por simetria, para x_1 fixado, temos que

$P(X_3 > x_3/X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ é crescente em x_2 para qualquer x_3.

Segue-se então que

$P(X_3 > x_3/X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ é crescente em x_1 e x_2 para qualquer x_3.

Repetições deste argumento provam que X_i é estocasticamente crescente em $X_1,...,X_{i-1}$ para $i = 2,...,n$.

3.2.10 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ vetor aleatório estocasticamente crescente em seqüência. Então $\underset{\sim}{X}$ é associado.

Para demonstrar esta proposição necessitaremos do lema que apresentamos a seguir.

Lema - Seja Y estocasticamente crescente em $\underset{\sim}{X}$. Então existe uma função crescente $h(u,\underset{\sim}{x})$ e uma variável aleatória U independente de $\underset{\sim}{X}$ tal que $(Y, \underset{\sim}{X}) \sim (h(U,\underset{\sim}{X}), \underset{\sim}{X})$, onde o sinal $\sim$ indica que os dois vetores tem a mesma distribuição.

Demonstração - Seja $F_{\underset{\sim}{x}}$ a função de distribuição de $Y_{\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x}}$, isto é, $F_{\underset{\sim}{x}}(y) = P(Y \leq y/\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x})$

Defina:

$$h(u,\underset{\sim}{x}) = \{\inf y/u \leq F_{\underset{\sim}{x}}(y)\}$$

Logo $h(u,\underset{\sim}{x})$ é crescente em u por definição.

Como Y é estocasticamente crescente em $\underset{\sim}{X}$ então

$h(u, \underset{\sim}{x}^{(1)}) \leq h(u,x^{(2)})$ para $x^{(1)} \leq x^{(2)}$.

Portanto $h(u, \underset{\sim}{x})$ é crescente em $\underset{\sim}{x}$.

$F_{\underset{\sim}{x}}(y)$ é contínua à direita em y, logo

$$h(u, \underset{\sim}{x}) \leq y \Leftrightarrow u \leq F_{\underset{\sim}{x}}(y)$$

Suponha agora que U tem distribuição Uniforme em $[0,1]$. Então

$$P(h(U,\underset{\sim}{x}) \leq y) = P(U \leq F_{\underset{\sim}{x}}(y)) = F_{\underset{\sim}{x}}(y),$$

isto é, $h(U,\underset{\sim}{x}) \sim Y_{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}}$.

Como por hipótese U é independente de $\underset{\sim}{X}$, temos:

$$h(U,\underset{\sim}{x})_{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}} \sim h(U,\underset{\sim}{x})$$

Assim

$$Y_{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}} \sim h(U,\underset{\sim}{x}) \sim h(U,\underset{\sim}{x})_{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}} \sim h(U,\underset{\sim}{X})_{\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}}.$$

Segue-se então que

$$(Y, \underset{\sim}{X}) \sim (h(U,\underset{\sim}{X}), \underset{\sim}{X})$$

Demonstração da proposição 3.2.10 - Por hipótese, X_2 é estocasticamente crescente em X_1. Segue-se então que X_1 e X_2 são associados (ver proposição 2.2.6).

Suponha que $X_1,\ldots,X_K$ são associados e que X_{K+1} é estocasticamente crescente em $X_1,\ldots,X_K$. Então, pelo lema anterior,

$$(X_1,\ldots,X_K, X_{K+1}) \sim (X_1,\ldots,X_K, h(U,X_1,\ldots,X_K))$$

onde h é uma função crescente e U uma variável aleatória Uniforme em $[0,1]$ e independente de $X_1,\ldots,X_K$.

Como U, $X_1,\ldots,X_K$ são associados e h é crescente, segue-se que

$$X_1,\ldots,X_K,\ h(U,X_1,\ldots,X_K) \text{ são associados.}$$

Portanto $X_1,\ldots,X_K$, X_{K+1} também serão associado, já que sua distribuição conjunta é a mesma de um vetor associado.

A conclusão segue-se agora por indução.

3.2.11 - *Proposição* - Seja $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias associadas. Então, para quaisquer $x_1,\ldots,x_n$, temos que

$$P(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)$$

e

$$P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

Demonstração - Seja

$$T_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i > x_i \\ 0 & \text{se } X_i \leq x_i,\ i = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Então $T_i(x_i)$ é crescente em X_i, $i = 1,\ldots,n$, e assim, pela propriedade P_4 da associação, $T_1(x_1),\ldots, T_n(x_n)$ são associadas. O resultado segue-se agora da proposição 3.1.8.

Observação - As proposições 3.2.9. 3.2.10 e 3.2.11 nos permitem estabelecer a seguinte seqüência de implicações:

$$TP_2 \text{ em pares} \Rightarrow ECS \Rightarrow A \Rightarrow DPS \text{ e } DPI.$$

3.2.12 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ vetor aleatório cuja função densidade $f_n(\underset{\sim}{x})$ é TP_2 em pares. Então $\underset{\sim}{X}$ apresenta dependência conjunta crescente à direita.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em Alam e Wallenius (1976).

3.2.13 - *Proposição* - Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ um vetor aleatório que apresenta dependência conjunta crescente à direita. Então $\underset{\sim}{X}$ é seqüencialmente crescente à direita.

Demonstração - Por hipótese temos que, para $i = 1,\ldots,n$.

$$P(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n / X_1 > x_1',\ldots,X_n > x_n')$$

é uma função crescente de $x_1',\ldots,x_n'$. Essa hipótese vale para quaisquer valores de $x_1,\ldots,x_n$, $x_1',\ldots,x_n'$. Em particular, se fizermos $x_j' \to -\infty$ para $j = i,i+1,\ldots,n$ e $x_j \to -\infty$ para todo $j \neq i$ teremos que:

$$P(X_i > x_i / X_1 > x_1',\ldots,X_{i-1} > x_{i-1}')$$

é uma função crescente de $x_1',\ldots,x_{i-1}'$. Esse resultado vale para $i = 2,\ldots,n$ o que é equivalente a dizermos que $\underset{\sim}{X}$ é seqüencialmente crescente à direita.

3.2.14 - *Proposição* - Sejam $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias seqüencialmente crescentes à direita. Então

$$P(X_1 > x_1,\ldots,X_n > x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)$$

para quaisquer valores de $x_1,\ldots,x_n$.

Demonstração - Observe inicialmente que

$$P(X_n > x_n) = P(X_n > x_n/X_1 > -\infty,\ldots,X_{n-1} > -\infty).$$

Como por hipótese $X_1,\ldots,X_n$ são SCD temos:

$$P(X_n > x_n/X_1 > x_1,\ldots,X_{n-1} > x_{n-1}) \geq P(X_n > x_n).$$

Segue-se então que

$$P(X_n > x_n, X_{n-1} > x_{n-1},\ldots,X_1 > x_1) \geq P(X_n > x_n)P(X_1 > x_1,\ldots,X_{n-1} > x_{n-1})$$

Repetindo-se sucessivamente o mesmo argumento, concluímos a demonstração.

Observação - As proposições 3.2.12, 3.2.13 e 3.2.14 nos permitem estabelecer a seguinte seqüência de implicações:

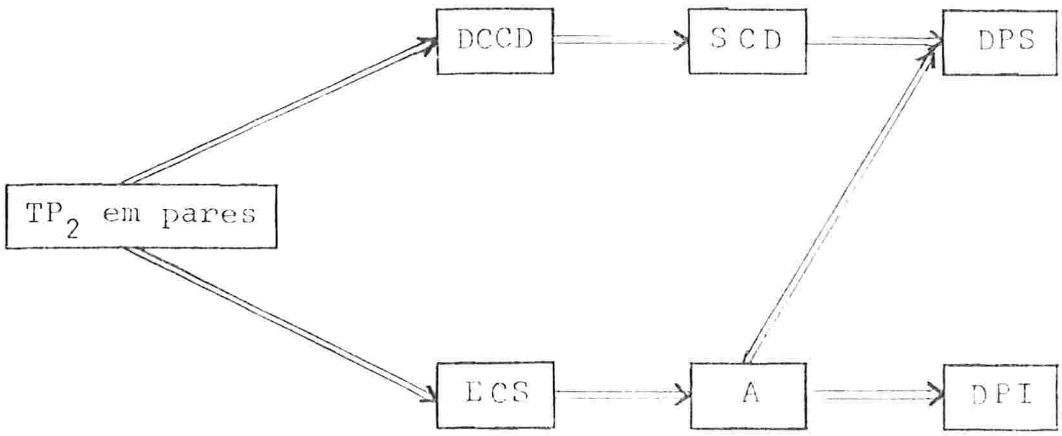
TP_2 em pares $\Rightarrow$ DCCD $\Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ DPS

Podemos provar por indução que DCCD implica diretamente em DPS, usando a propriedade P_1, que vem logo após a definição 3.1.13, e o teorema 3.1.15. Com demonstrações totalmente análogas, pode-se mostrar que

$$TP_2 \text{ em pares} \Rightarrow DCDE \Rightarrow SDE \Rightarrow DPI$$

Além disto podemos mostrar também que DCDE implica diretamente em DPI.

Apresentaremos a seguir um diagrama das relações entre as formas de dependência positiva apresentadas neste capítulo.



Mostraremos através de exemplos que não ocorre nenhuma outra implicação entre DCCD, ECS, A e SCD. Convém relembrar que no caso bivariado ocorriam as seguintes implicações: DCCD $\Rightarrow$ A, SCD $\Rightarrow$ A e ECS $\Rightarrow$ SCD.

Exemplo (DCCD $\not\Rightarrow$ A) - Seja (X_1, X_2, X_3) vetor aleatório assumindo os valores (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2) e (2,2,2) cada qual com probabilidade 0,25. Então

$$P(X_1 > 1 / X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 0) = 0{,}5$$

$$P(X_1 > 1 / X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 1) = 0{,}5$$

$$P(X_1 > 1 / X_1 > 0,\ X_2 > 1,\ X_3 > 1) = 1{,}0$$

e

$$P(X_1 > 1,\ X_2 > 1 / X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 0) = 0{,}25$$

$$P(X_1 > 1,\ X_2 > 1 / X_1 > 0,\ X_2 > 0,\ X_3 > 1) = 0{,}5$$

Da simetria entre X_1, X_2 e X_3 segue-se que elas formam um conjunto DCCD.

Cálculos simples mostram que

$$P(X_1 > x_1,\ X_2 > x_2,\ X_3 > x_3) \geq \prod_{i=1}^{3} P(X_i > x_i)$$

para quaisquer valores de x_1, x_2, x_3, e que

$$P(X_1 \leq 1,\ X_2 \leq 1,\ X_3 \leq 1) < \prod_{i=1}^{3} P(X_i \leq 1).$$

Segue-se portanto da proposição 3.2.11 que X_1, X_2, X_3 não são associadas.

Exemplo (SCD $\neq$ A) - Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias binárias com a seguinte distribuição de probabilidade.

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = 0{,}1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = 0{,}1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = 0{,}1$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = 0{,}2$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0{,}5$$

Facilmente verifica-se que X_1, X_2, X_3 são SCD.

Sejam I_{U_1}, I_{U_2} funções indicadoras dos conjuntos U_1, U_2 tais que

$$U_1 = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\} \text{ e}$$

$$U_2 = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Então I_{U_1}, I_{U_2} são funções binárias crescentes e

$$Cov(I_{U_1}(X_1,X_2,X_3), I_{U_2}(X_1,X_2,X_3)) =$$

$$= P((X_1,X_2,X_3) \in U_1 \cap U_2) - P((X_1,X_2,X_3) \in U_1)P(X_1,X_2,X_3) \in U_2) =$$

$$= 0{,}60 - 0{,}72 < 0.$$

Segue-se portanto do teorema 3.1.4 que X_1, X_2, X_3 não são associadas.

Exemplo (SCD $\not\Rightarrow$ ECS) - Suponha que a distribuição de X_3 dado $(X_1,X_2) = (x_1,x_2)$ é Normal com média $x_1 + x_2$ e variância 1. Suponha ainda que a distribuição de probabilidade de (X_1,X_2) é dada por:

$P(X_1 = -1, X_2 = -1) = 0{,}05$ $\quad$ $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0{,}20$

$P(X_1 = -1, X_2 = 0) = 0{,}25$ $\quad$ $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0{,}10$

$P(X_1 = 0, X_2 = -1) = 0{,}10$ $\quad$ $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0{,}30$

Facilmente verificar-se que X_1, X_2, X_3 são SCD. No entanto, como $P(X_2 > -1/X_1 = -1) = 0{,}83 > 0{,}67 = P(X_2 > -1/X_1 = 0)$, X_1, X_2, X_3 não são ECS.

Exemplo (ECS $\not\Rightarrow$ SCD) - Suponha que a distribuição de X_3 dado $(X_1, X_2)=(x_1, x_2)$ é Normal com média $x_1 + x_2$ e variância 1. Seja a distribuição de probabilidades de (X_1, X_2) dada por:

$P(X_1 = -1, X_2 = -1) = 0{,}3$ $\quad$ $P(X_1 = 1, X_2 = -1) = 0{,}1$

$P(X_1 = -1, X_2 = 2) = 0{,}1$ $\quad$ $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0{,}1$

$P(X_1 = 0, X_2 = -1) = 0{,}2$ $\quad$ $P(X_1 = 1, X_2 = 2) = 0{,}1$

$P(X_1 = 0, X_2 = 2) = 0{,}1$

Segue-se então que X_1, X_2, X_3 são ECS, mas não são SCD, pois

$$P(X_3 > 2/X_1 > -1, X_2 > -1) = 0{,}439 > 0{,}409 = P(X_3 > 2/X_1 > 0, X_2 > -1$$

Observação - Sejam $\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ e $\underset{\sim}{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$ vetores aleatórios independentes entre si e cujas densidades são TP_2 em pares. Então $\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}$ é associado, mas não é necessariamente TP_2 em pares.

$\underset{\sim}{Z}$ é associado pelo lema 3.1.6.

Para mostrarmos que a convolução de funções TP_2 pares não é necessariamente TP_2 em pares, vamos considerar o seguinte exemplo: sejam duas distribuições Normais Trivariadas com vetores de médias nulos e matrizes de covariâncias

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Então as inversas das matrizes de covariâncias A e B, respectivamente, são dadas por

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos fora das diagonais de A^{-1} e B^{-1} não são positivos. Segue-se então do exemplo que vem após o corolário 3.2.3 que essas densidades são TP_2 em pares.

A inversa da matriz de covariância de A + B é dada por

$$(A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} 23/43 & -7/43 & 1/43 \\ -7/43 & 47/43 & -19/43 \\ 1/43 & -4/43 & 15/43 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a matriz $(A + B)^{-1}$ possui elementos positivos fora da diagonal, a densidade correspondente a convolução das funções consideradas não é TP_2 em pares.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

Confiabilidade de um sistema

Vamos considerar o caso de sistemas e equipamentos, tais como circuitos elétricos, redes de potência, sistemas de comunicação, etc., que consistem de várias componentes interligadas de tal forma que o funcionamento dessas componentes determinam o funcionamento do sistema que compõe. Nestas situações, desejamos determinar a confiabilidade de um equipamento ou sistema, isto é, determinar a probabilidade de um equipamento ou sistema cumprir ininterruptamente uma tarefa de duração fixada.

Seja n o número de componentes do sistema e vamos indicar a condição de funcionamento e não funcionamento tanto do sistema quanto de suas componentes, pelos estados 1 e 0, respectivamente. Assim, o estado do sistema em função dos estados de cada uma de suas componentes é representado por uma função

$$\phi:\{0,1\}^n \to \{0,1\},$$

que denominamos função de estrutura do sistema. Suponha então que este sistema é posto em funcionamento no instante $t = 0$, e seja a variável aleatória T_i, $i = 1,\ldots,n$, o tempo de vida da i-ésima componente a partir daquele instante. O estado de funcionamento da i-ésima componente, ao longo do tempo, é então representado pelo processo estocástico $\{X_i(t)/t \geq 0\}$, onde

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t < T_i \\ 0 & \text{se} \quad t \geq T_i, \end{cases}$$

e para cada $t \geq 0$, $\phi(X_1(t),\ldots,X_n(t))$, representa o estado de funcionamento do sistema no instante t.

Segue-se então que a confiabilidade do sistema é dada pela

$$P[\phi(X_1(t),\ldots,X_n(t)) = 1]$$

Sob a suposição de que as componentes são estatisticamente independentes, podemos representar a confiabilidade do sistema como uma função da confiabilidade de suas componentes. Entretanto, num grande número de situações, esta suposição deve ser reformulada para componentes associadas, e neste caso a confiabilidade do sistema não será representada como uma função da confiabilidade de suas componentes. Vamos considerar como exemplos desta situação:

(a) componentes sujeitas ao mesmo conjunto de forças;

(b) estruturas nas quais as componentes dividem a carga de modo que quando uma delas deixa de funcionar, cada uma das restantes recebe um acréscimo de carga.

Note que em cada caso as componentes tendem agir de maneira semelhante. Assim no primeiro caso uma força maior afetará todas as componentes desfavoravelmente, enquanto que no caso (b) o funcionamento ou não de uma componente contribui, respectivamente, para o funcionamento ou não das componentes restantes.

A determinação da confiabilidade de um sistema pode ser de difícil obtenção tendo em vista a determinação da distribuição de probabilidade conjunta de suas componentes. Entretanto, se o sistema é formado por componente associadas, podemos obter limites para essa confiabilidade. Suponhamos, por exemplo, que um sistema em série é formado pelas componentes aleatórias $X_1,..,X_n$ associadas. Neste caso, o sistema funciona somente se todas as componentes funcionam, e portanto, $\phi(X_1,..,X_n) = \min(X_1,...,X_n)$. Segue-se então do teorema 3.1.8 que a confiabilidade do sistema que é igual a $P(\min(X_1,..,X_n) = 1)$ será limitada inferiormente por $\prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$.

Vamos considerar também o caso de um sistema em paralelo com componentes aleatórias $X_1,...,X_n$ associadas. Nestas condições, o sistema funciona enquanto houverem componentes em funcionamento, ou seja, $\phi(X_1,...,X_n) = \text{máx}(X_1,...,X_n)$. Portanto a confiabilidade desse sistema é dada por

$$\begin{aligned} P(\text{máx}(X_1,...,X_n) = 1) &= 1 - P(\text{máx}(X_1,...,X_n) = 0) \\ &= 1 - P(X_1 = 0,...,X_n = 0) \end{aligned}$$

Do teorema 3.1.8, segue-se então que

$$P(\text{máx}(X_1,\ldots,X_n) = 1) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 0)$$

Assim se determinarmos a confiabilidade de um sistema em paralelo, considerando que as componentes são independentes quando na realidade elas são associadas, nós estaremos superestimando a confiabilidade desse sistema. Nas mesmas condições e para um sistema em série, a confiabilidade desse sistema estará sendo subestimada.

As quatro aplicações a seguir são conseqüências do teorema 3.1.9.

Somas parciais

Sejam $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias independentes, e $Y_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ para $i = 1,\ldots, n$. Então

$$P(Y_1 \leq y_1,\ldots,Y_n \leq y_n) \geq \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq y_i)$$

para quaisquer $y_1,\ldots,y_n$.

Esta desigualdade segue imediatamente do teorema 3.1.9, lembrando que variáveis aleatórias independentes são associadas, e que cada Y_i é uma função crescente em $X_1,\ldots,X_n$.

Estatísticas de Ordem

Sejam $Y_1 \leq \ldots \leq Y_n$ estatísticas de ordem da amostra a-leatória $X_1,\ldots,X_n$. Então

$$P(Y_{i_1} \leq y_{i_1},\ldots, Y_{i_k} \leq y_{i_k}) \geq \prod_{j=1}^{k} P(Y_{i_j} \leq y_{i_j}) \quad e$$

$$P(Y_{i_1} > y_{i_1},\ldots, Y_{i_k} > y_{i_k}) \geq \prod_{j=1}^{k} P(Y_{i_j} > y_{i_j})$$

para qualquer escolha de $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ e $y_{i_1},\ldots, y_{i_k}$.

O resultado segue do fato que cada Y_i é uma função crescente das variáveis aleatórias independentes $X_1,\ldots,X_n$.

Exponencial Multivariada

As distribuições exponenciais desempenham um papel central em testes de vida, em confiabilidade e em outras áreas.

Vamos considerar a distribuição Exponencial Multivariada de Marshall-Olkin, onde

$$\overline{F}(y_1,\ldots,y_n) = P(Y_1 > y_1,\ldots, Y_n > y_n) =$$

$$= 1 - \exp\left[- \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i - \sum_{i<j} \lambda_{ij} \text{ máx}(y_i,y_j) - \ldots - \lambda_{12\ldots n} \text{ máx}(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right].$$

A distribuição Exponencial Multivariada de Marshall-Olkin possui propriedades importantes, tais como: possibilidade de ser representada em termos de exponenciais independentes, marginais de dimensão k, k = 1,...,n-1, também exponenciais. Segue-se da primeira propriedade que existem variáveis aleatórias exponenciais independentes $X_1,\ldots,X_m$ tal que $Y_i = \min(X_j ; j \varepsilon A_i)$, onde $A_i C \{1,2\ldots,m\}$ Temos então que cada Y_i é uma função crescente das variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_m$ independentes, e portanto, associadas. Do teorema 3.1.9 segue-se então que

$$F(y_1,\ldots,y_n) \geq \prod_{i=1}^{n} F_i(y_i)$$

e

$$\overline{F}(y_1,\ldots,y_n) \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(y_i))$$

onde F_i é a função de distribuição marginal de Y_i para i = 1,...,n.

Análise de Variância

Vamos considerar o caso da análise de variância em que duas hipóteses são testadas, usando variâncias residuais iguais. Neste caso, cada experimento é tratado como uma unidade sem considerar o número de hipóteses testadas por experimento. Assim, se todas as hipóteses nulas são verdadeiras, um erro é cometido se pelo menos uma das hipóteses é rejeitada.

Neste caso, podemos citar como exemplo na análise de variância o teste para verificar o efeito das linhas e colunas. Geralmente a formulação como uma hipótese linear geral implica na determinação de três formas quadráticas q_1, q_2 e q_3, distribuídas independentemente e segundo uma χ^2 com n_1, n_2 e n_3 graus de liberdade, respectivamente. As estatísticas das razões de verossimilhança para testar as duas hipóteses são dadas por

$$F_1 = (q_1/n_1)(q_3/n_3)^{-1} \quad \text{e} \quad F_2 = (q_2/n_2)(q_3/n_3)^{-1}$$

Se a região crítica para a rejeição de cada hipótese nula é de tamanho α então a probabilidade de não cometer erro de primeira espécie (ou erro tipo I) é dada por $P(F_1 \leq F_{1\alpha}, F_2 \leq F_{2\alpha})$, onde $F_{1\alpha}$ e $F_{2\alpha}$ são os α percentis das distribuições F_1 e F_2, respectivamente.

Vamos agora testar o efeito da dependência entre os testes de significância.

Como q_1, q_2 e q_3^{-1} são independentes, segue-se que elas são associadas. Além disto, F_1 e F_2 são funções crescentes de q_1, q_2 e q_3^{-1}.

Do teorema 3.1.9 segue-se então que

$$P(F_1 \leq F_{1\alpha}, F_2 \leq F_{2\alpha}) \geq P(F_1 \leq F_{1\alpha})P(F_2 \leq F_{2\alpha}).$$

Kimball (1951) prova que

$$P(F_1 \leq F_{1\alpha}, F_2 \leq F_{2\alpha}) > P(F_1 \leq F_{1\alpha})P(F_2 \leq F_{2\alpha}).$$

Portanto a probabilidade de não cometer erro de primeira espécie num experimento de testes dependentes é maior do que no caso de testes independentes.

Intervalos de Confiança Simultâneos

Sejam μ_1, μ_2 parâmetros desconhecidos e $(\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1), (\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2)$ intervalos aleatórios com coeficientes de confiança, respectivamente, α_1 e α_2. Seja E_i o evento que corresponde ao intervalo $(\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i)$ conter o parâmetro μ_i, para $i = 1,2$.

Dizemos que o evento E_i ocorre se o intervalo aleatório $(\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i)$ contém o parâmetro μ_i, para $i = 1,2$.

Nestas condições, se E_1 e E_2 são positivamente quadrante dependentes então a probabilidade de E_1 e E_2 ocorrerem simultaneamente, $P(E_1 \cap E_2)$, é maior ou igual a $P(E_1)P(E_2) = \alpha_1 \alpha_2$.

COMENTÁRIOS FINAIS

Não tratamos neste trabalho da dependência negativa, mas pretendemos dar uma idéia do que tem sido feito com relação a este e os principais problemas que surgem quando a comparamos com a positiva.

Comparada à dependência positiva, já razoavelmente desenvolvida, pouco foi feito com relação a dependência negativa. Uma explicação para isto poderia ser o fato de que a dependência positiva é freqüentemente obtida em muitas distribuições importantes, utilizadas na descrição de várias situações físicas. Entre essas distribuições queremos ressaltar a Exponencial Multivariada de Marshall-Olkin (1967).

Apesar da importância da dependência positiva em estatística e probabilidade, ela não esgota as situações na estatística teórica e prática. Por exemplo, se um vetor aleatório apresenta distribuição Normal Multivariada com todos os coeficientes de correlação negativos, não pode-se esperar dependência positiva entre suas componentes.

Algumas formas de dependência negativa, análogas à positiva foram mencionadas em Lehmann (1966), Brindley e Thompson (1972), Dykstra, Hewett e Thompson (1973), entre outros. Mas foi somente nos últimos anos que a dependência negativa multivariada recebeu uma maior atenção tal como através dos trabalhos realizados em 1980 por Ebrahimi e Ghosh; Karlin e Rinott; Block, Savits e Shaked.

Todas as formas de dependência positiva têm na dependência negativa formas análogas que podem ser obtidas mudando-se a ordem da monotonicidade das funções ou invertendo os sinais das desigualdades. Excessão é feita a associação que ainda não foi definida na dependência negativa.

As relações válidas entre as formas de dependência positiva bivariada continuam válidas para as formas análogas na negativa. Além disso, pode-se dizer que se o vetor aleatório (X,Y) satisfaz alguma condição de dependência positiva então $(X, -Y)$ satisfaz a condição de dependência negativa análoga. Entretanto, esta relação não pode ser feita para vetores de maiores dimensões assim como também algumas implicações válidas entre as formas de dependência positiva multivariada não valem para as formas análogas na negativa.

Queremos ressaltar que ocorrem vários inconvenientes com as funções análogas às TP_2 em pares, denominadas reservas regulares de ordem 2 em pares (RR_2 em pares).

A primeira situação diferente vem do fato que se uma função densidade conjunta f é RR_2 em pares, as marginais não são necessariamente RR_2 em pares, o que faz com que o teorema 3.2.2 seja falso quando TP_2 é substituído por RR_2. Uma alternativa pos sível, então é supor que não somente f, mas também todas as suas marginais são RR_2 em pares. Entretanto, mesmo sob esta suposição não foi possível mostrar que as formas de dependência negativa mais fracas (dependência negativa superior e dependência negativa inferior) estão conseqüentemente satisfeitas. Ebrahimi e Ghosh (1980) tentaram provar este resultado, entretanto, sua prova é baseada numa implicação que Block, Savits e Shaked (1980) provaram não ser verdadeira. Surge então a necessidade de uma nova definição que resolva também este problema. Neste mesmo artigo, Block, Savits e Shaked encontraram a solução e que é dada através da seguinte definição: o vetor aleatório $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ é RR_2 em pares se a função densidade de $\underset{\sim}{X}$ é tal que quando quaisquer n - 2 variáveis são integráveis sobre os n - 2 subconjuntos mensuráveis da reta, a função resultante é RR_2 no restante das variáveis.

Ocorre um outro inconveniente: a condição dada na definição acima é praticamente impossível de ser verificada. Um caso particular que é verificado por várias distribuições importantes é dada no teorema abaixo.

Teorema - Sejam $Y_o, Y_1,\ldots,Y_n$ variáveis aleatórias independentes, cada qual com função densidade (ou probabilidade) PF_2. Fixe y e seja $(X_1,\ldots,X_n)$ um vetor aleatório com função densidade conjunta igual a função densidade condicional de $(Y_1,\ldots,Y_n)$ dado que $Y_o + Y_1 + \ldots + Y_n = y$, isto é,

$$(X_1,\ldots,X_n) \sim [(Y_1,\ldots,Y_n)/Y_o + Y_1 + \ldots + Y_n = y].$$

Então $(X_1,...,X_n)$ é RR_2 em pares e conseqüentemente satisfaz as demais formas de dependência negativa.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Block, Savits e Shaked (1980).

Algumas das distribuições que satisfazem o teorema anterior são as seguintes: Multinomial, Dirichlet, Hipergeométrica Multivariada, Normal Multivariada com correlações iguais e não positivas.

BIBLIOGRAFIA

ABDEL-HAMEED, M. & SAMPSON, A. R. Positive dependence of the bivariate and trivariate absolute normal, t, x^2, and F distributions. Ann. Statist., 6(6):1360-1368, 1978.

ALAM, K. & WALLENIUS, K.T. Positive dependence and monotonicity in conditional distributions. Comm.Statist.Theor.Math., A5(6):525-534, 1976.

BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. Statistical theory of reliability and life testing: probability models. New York, Holt, c1975. 290p. (International Series in Decision Processes)

BLOCK, H. W. & TING, Mei-Ling. Some concepts of multivariate dependence. Pittsburgh, University Press, 1980. (Technical Report. Department of Mathematics and Statistics)

BLOCK, H. K.; SAVITS, T. H.; SHAKED, M. Some concepts of negative dependence. S.l., s.c.p., 1980. (Technical Report)

BRINDLEY JR., E. C. & THOMPSON JR., W. A. Dependence and aging aspects of multivariate survival. J.Amer.Statist.Assoc., 67(340):822-830, 1972.

DYKSTRA, R. L.; HEWETT, J. E.; THOMPSON JR., W. A. Events which are almost independent. Ann.Statist., 1(3):674-681, 1973.

EBRAHIMI, N. & GHOSH, M. Multivariate negative dependence. Ames, Iowa State University, 1980. (Technical Report. Department of Statistics)

ESARY, J. D. & PROSCHAN, F. Relationships among some concepts of bivariate dependence. Ann.Math.Statist., 43(2):651-655, 1972.

ESARY, J. D.; PROSCHAN, F.; WALKUP, D. W. Association of random variables, with applications. Ann.Math.Statist., 38(5):1466-1474, 1967.

HARRIS, R. A multivariate definition for increasing hazard rate distribution functions. Ann.Math.Statist., 41(2): 713-717, 1970.

JENSEN, D. R. A note on positive dependence and the structure of bivariate distributions. SIAM J.App.Math., 20(4):749-753, 1971.

JOGDEO, K. Association and probability inequalities. Ann. Statist., 5(3):495-504, 1977.

JOGDEO, K. Characterizations of independence in certain families of bivariate and multivariate distributions. Ann.Math.Statist., 39(2):433-441, 1968.

JOGDEO, K. Dependence concepts and probability inequalities. In: PATIL, G. P.; KOTZ, S.; ORD, J. K., eds. A modern course on statistical distributions in scientific work: models and structures. Dordrecht, D. Reidel, c1975. v.1, p. 271-279. (NATO Advanced Study Institutes Series, Series C, 17)

JOHNSON, N. L. & KOTZ, S. Distributions in statistics: continuous multivariate distributions. New York, John Wiley, 1972. v.3 (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)

KARLIN, S. Total positivity. Stanford, University Press, 1968. v.1.

KARLIN, S. & RINOTT, Y. Classes of orderings of measures and related correlation inequalities: multivariate totally positive distributions. Stanford, University Press, 1980. v.1 (Technical Report.Department of Mathematics)

KARLIN, S. & RINOTT, Y. Classes of orderings of measures and related correlation inequalities: multivariate reverse rule distributions. Stanford, University Press, 1980. v.2 (Technical Report.Department of Mathematics)

KIMBALL, A. W. On dependent tests of significance in the analysis of variance. Ann.Math.Statist., 22:600-602, 1951.

KOWALCZYK, T. & PLESZCZYŃSKA, E. Monotonic dependence functions of bivariate distributions. Ann.Statist., 5(6):1221-1227, 1977.

LEHMANN, E. L. Some concepts of dependence. Ann.Math.Statist., 37(5):1137-1153, 1966.

LEHMANN, E. L. Testing statistical hypotheses. New York, John Wiley, c1959. 369p.

MALLOWS, C. L. An inequality involving multinomial probabilities. Biometrika, 55(2):422-424, 1968.

MARSHALL, A. W. & OLKIN, I. A multivariate exponencial distribution. J.Amer.Statist.Assoc., 62(317):30-44, 1967.

PROSCHAN, F. & SETHURAMAN, J. Simple multivariate inequalities using association. Theor.Probability Appl., 20(1):193-195, 1975.

SHAKED, M. A family of concepts of dependence for bivariate distributions. J.Amer.Statist.Assoc., 72(359):642-650, 1977.

SIDÁK, Z. Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions. J.Amer.Statist.Assoc., 62(318):626-633, 1967.

WALKUP, D. W. Minimal conditions for association of binary variables. SIAM J.Appl.Math., 16(6):1394-1403, 1968.

WILKS, S. S. Linear statistical estimation. In: ____ Mathematical statistics. New York, John Wiley, c1962. 694p., cap.10, item 10.5, p.290-291.

YANAGIMOTO, T. Families of positively dependent random variables. Ann.Inst.Statist.Math., 24:559-573, 1972.

DEPENDÊNCIA POSITIVA

ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

ERRATA

Página	Linha	No lugar de	deve ser
6	-1	$F\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} - F(y)\right)$	$\left(F\left(\frac{y-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - F(y)\right)$
15	5	$(\delta \equiv 0)\ (\delta = XY)$	$(\delta \equiv 0) \leq (\delta = XY)$
18	4	$i = 1,2.$	$i = 1,2,3,4.$
22	4	$\frac{P(\ldots)}{P(\ldots)+P(\ldots)}\ \frac{P(\ldots)}{P(\ldots)+P(\ldots)}$	$\frac{P(\ldots)}{P(\ldots)+P(\ldots)} \geq \frac{P(\ldots)}{P(\ldots)+P(\ldots)}$
29	-8	$\log h(y'-x')$	$\log h(y-x)$
29	-7	$\log h(y-x)$	$\log h(y'-x')$
31	8	$\int_y^\infty f(x_1,t)dt$	$\int_y^\infty f(x_1,t)dt\ \int_y^\infty f(x_2,t)dt$
32	-7	$F_X^{-1}(x)$	$F_X^{-1}(y)$
33	5	$h(x,u)$	$h(X,U)$
34	6	$E(1-Z)$	$E(1-Z_1)$
34	-3	$\varepsilon C(Y/X)$	$EC(Y/X)$
38	-3	y'	x'
39	-4	$TP_2(X,Y) \Leftrightarrow DCCD(X,Y) \Leftrightarrow CD(Y/X)$ e $CD(X/Y)$	$TP_2(X,Y) \Rightarrow DCCD(X,Y) \Rightarrow CD(Y/X)$ e $CD(X/Y)$
39	-1	$\bar{TP}_2(X,Y) \Leftrightarrow DCDE(X,Y) \Leftrightarrow DE(Y/X)$ e $DE(X/Y)$	$TP_2(X,Y) \Rightarrow DCDE(X,Y) \Rightarrow DE(Y/X)$ e $DE(X/Y)$

Página	Linha	No lugar de	deve ser
44	-6	x,y	$\forall x,y$
49	6	$Cov(E_{\underset{\sim}{Y}}f,\ E_{\underset{\sim}{Y}}g)$	$Cov_{\underset{\sim}{X}}(E_{\underset{\sim}{Y}}f,\ E_{\underset{\sim}{Y}}g)$
51	7	lema 3.1.5	lema 3.1.6
51	8	$(\underset{\sim}{X}_1,\ -\underset{\sim}{X}_2)=\prod_{l=1}^{n}(Z_{il},\ -Z_{i2})$	$(X_1,\ -X_2)=\sum_{i=1}^{n}(Y_{i1},\ -Y_{i2})$
51	-5	Seja uma	Seja γ uma
52	-5	$E(X_1,X_2\ldots X_n)$	$E(X_1X_2\ldots X_n)$
53	10	$P(Y_1 \leq Y_1,\ldots,Y_K \leq y_K)$	$P(Y_1 \leq y_1,\ldots,Y_K \leq y_K)$
58	11	$y_j' = \max_{i\varepsilon I_j} x_i$	$y_j' = \text{máx}_{i\varepsilon I_j} x_i'$
59	-2	$P(X_M > x_M,\ X_{\overline{M}} > x_{\overline{M}})$	$P(\underset{\sim}{X}_M > \underset{\sim}{x}_M,\ \underset{\sim}{X}_{\overline{M}} > \underset{\sim}{x}_{\overline{M}})$
60	2	x_K'	$\underset{\sim}{x}_K'$
61	-2	$-X_1 = \min(-Y_1,\ Y_3)$	$-X_1= \min(-Y_1,\ -Y_3)$
64	-2	$\Omega_1 X \Omega_2$	$\Omega_1 X\ \Omega_3$
66	6	$g(x_1,\ x_n)$	$g(x_i,\ x_n)$
67	-5	$\underset{\sim}{X}\ N(0,\Sigma)$	$\underset{\sim}{X}\sim \underset{\sim}{N}(0,\Sigma)$
67	-4	e é uma matriz	e Γ é uma matriz
68	2	FP_2	PF_2
71	-7	$(Z_1,\ldots,\ Z_n)$	$(\lvert Z_1\rvert,\ldots,\lvert Z_n\rvert)$
72	-1	desta	deste
84	4	-4/43	-19/43

COMPLEMENTAÇÃO DA BIBLIOGRAFIA

AHMED, A.N., LANGBERG, N.A.; LEON, R.; PROSCHAN, F. Two concepts of positive dependence with applications in multivariate analysis. Flórida State University, 1978. (Technical Report. Department of Statistic)

KARLIN, S. & RINOTT, Y. Total positivity properties of absolute value multinormal variables with appications of confidence interval estimates and related probabilistic inequalities. Standford, University Press, 1979. (Technical Report. Departament of Mathematics)