SISTEMAS MARKOVIANOS DE PARTÍCULAS, ASSOCIAÇÃO E EMPARELHAMENTO

J. ANTONIO GALVES

Tese apresentada em março de 1978 ao Instituto de Matemática e Estatística da USP, para obtenção do grau de Doutor em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Dantas

A pesquisa que conduziu a esta tese foi realizada com a ajuda financeira da FAPESP e da CAPES, sucessivamente.

EM VEZ DE AGRADECIMENTOS.

Não creio que exista produção científica isolada de um trabalho coletivo. No meu caso é bem clara a história que conduziu a esta pesquisa.

Tudo começou em 1.967, quando Caio voltou de Berkeley e começou a dar cursos de Teoria das Probabilidades, trabalhando pacientemente na formação de uma nova geração de probabilistas e de estatísticos. Um seminário do Prof. Chain, em 1.972, mostrou-me que pesquisa em matemática é sinônimo de trabalho sistemático e perseverante. Vê-lo trabalhar, expondo-nos semanalmente seus acertos, avanços, enganos e hesitações, modelando seu teorema com a ajuda de exemplos e contra - exemplos, foi para mim uma revelação. Aquela prática desmentia cabalmente o mito do "matemático - gênio" que era extremamente difundido entre nós (e que talvez ainda seja, mas com menos peso).

Segundo esse mito, os teoremas nasciam por geração espontânea, brotavam, qual água da fonte, na cabeça de alguns iluminados, os quais eram reconhecidos pelo olhar vago e perdido com que perambulavam pelos corredores da Matemática.

Ver Chaim trabalhar, trouxe-me de volta à realidade: a inspiração existe, mas ela nasce do trabalho, as Musas nada tendo a ver com isso.

Em Paris, eu tive a sorte de fazer parte do Centro de Matemática da École Polytechnique. Lá a pesquisa é moeda corrente, é o pão

nosso de cada dia.

Pelo exemplo, fui pouco a pouco aprendendo o ofício. Tanto mais que o Prof. Laurent Schwartz, diretor do Centro, deu-me apoio e o tempo necessário para encontrar uma direção de trabalho e dar a partida.

Foi graças à ajuda financeira do Centro, que pudemos organizar o Seminário sobre os sistemas com uma infinidade de partículas.

Foi Claude Kipnis quem me interessou pelo assunto. Depois nós dois fomos ver Neveu que, com todo o seu vigor intelectual, pôs as mãos à massa, dirigindo o seminário e orientando-nos passo a passo.

Muito importante é dizer, que a pesquisa que conduziu a esta tese, foi desenvolvida com a colaboração de Françoise Bertein, do Laboratório de Probabilidades da Universidade de Paris VI.

Tive a possibilidade também, de trabalhar com Harris, Liggett e Holley. Foi o primeiro quem nos conduziu à problemática da associação. Foi ele também, quem me deu o gosto pelas construções probabilísticas, trajetória por trajetória. A Liggett devo a intuição conduzindo ao resultado da 2ª parte desta tese.

Já de volta a São Paulo, achei ótimo encontrar um grupo trabalhando nos Sistemas de Partículas (o grupo, no caso, é Caio, Creusa, Jorge, Galvão e Flávio). As discussões com eles, ajudaram-me não só nesta fase última da redação da tese, como também a planejar a pesquisa futura.

Como todos os estudantes de Matemática da minha geração, eu fui extremamente influenciado e estimulado pela pessoa do Prof. Carlos Lyra. Ele me parece o símbolo do esforço coletivo e da luta para a construção do Instituto de Matemática.

É a ele que eu dedico esta tese.

PRELIMINARES INFORMAIS

A expressão " Sistemas Markovianos de Partículas " tem sido utilizada na literatura para designar determinados Processos de Markov, tendo como espaço de estados o conjunto $P(S)$ das partes de S (sendo S um conjunto enumerável).

Neste contexto cada elemento ξ de $P(S)$ é identificado com uma configuração do sistema, ξ indicando os pontos de S nos quais há partículas. (Evidentemente uma tal convenção exclui a possibilidade de duas ou mais partículas virem a ocupar o mesmo sítio). A idéia é que a evolução do sistema seja o resultado de uma infinidade de Processos Markovianos sobre S, cada um representando a evolução de uma única partícula, e submetidos a alguma condição global expressando a interação das partículas entre si.

Alguns exemplos deixarão as coisas mais claras. Primeiramente, consideremos um sistema no qual cada partícula isoladamente tenta seguir um processo markoviano de saltos em S. Assim, cada uma delas espera um tempo exponencial com parâmetro constante, antes de decidir-se a saltar para uma nova posição em S, escolhida segundo uma certa probabilidade de

transição. A interação entre elas manifesta-se no fato de que um salto não se realiza se a nova posição escolhida já estiver ocupada por uma partícula. Este é o processo que Spitzer, em seu artigo fundamental [0], batizou com o nome de sistema com interação por exclusão.

Em outros modelos uma partícula já existente pode desaparecer, ou uma nova partícula aparecer num sítio vazio, sendo os tempos de espera de tais eventos funções da configuração global do sistema. Por exemplo, nos sistemas de interação por contacto, estudados por Harris em [1], o desaparecimento de uma partícula tem uma lei que é independente da configuração do sistema, mas o aparecimento de uma partícula num sítio vazio é uma função do número de partículas já existentes na vizinhança do sítio em questão. Em particular, "nascimentos espontâneos" estão excluidos: particulas novas só podem aparecer nas vizinhanças de partículas já existentes.

Note-se que tanto os sistemas com interação por exclusão, quanto os de contacto, reduzem-se a simples processos markovianos de saltos em $P_f(S)$, o conjunto das partes finitas de S, nos casos em que suas configurações iniciais forem subconjuntos finitos de S. Por exemplo, um conjunto de n partículas que interagem por exclusão, evolui aguardando em cada configuração um tempo exponencial com parâme-

tro n, até que uma das partículas, escolhida com probabilidade $\frac{1}{n}$, escolha uma nova posição aonde saltar.

Tais processos, por serem markovianos de saltos, num espaço enumerável $(P_f(S))$, existem e são definidos univocamente pelos seus geradores infinitesimais.

A situação será muito mais complicada quando a configuração inicial do sistema for um conjunto de cardinalidade infinita. Nesse caso, o processo não mais será de saltos: mudanças na configuração ocorrerão instantâneamente e o sistema estará em constante mutação, com trajetórias que, no melhor dos casos, serão contínuas por partes.

Mesmo assim, a existência do processo, está assegurada desde que as interações entre partículas distantes sejam suficientemente fracas. É o que ocorre, por exemplo, nos sistemas de contacto, no qual só há interação entre pontos vizinhos. A demonstração da existência de sistemas com um número infinito de partículas, feita por Liggett [17], é baseada no teorema de Hille-Yosida e no teorema de convergência de semi-grupos de Trotter-Kurtz.

A idéia é obter o sistema com um número infinito de partículas como limite de sistemas finitos. Esta passagem ao limite, próxima do "limite termodinâmico" da Mecânica Estatística, é a base de inúmeros resultados da teoria.

Nesta tese, ela será utilizada na demonstração do teorema 2

da 1.ª parte.

Resolvido o problema da existência do sistema, pode-se passar ao estudo do seu comportamento ergódico que é o verdadeiro centro de interesse da teoria. Quer-se determinar as medidas de probabilidade que são invariantes com respeito ao processo, ou, noutras palavras, quer-se determinar as situações de equilíbrio do sistema. Quer-se também determinar quando é que há convergência do sistema para uma dada situação de equilíbrio. É neste contexto que se chega à noção de <u>associação</u> entre sistemas.

Aqui também o trabalho pioneiro foi feito por Spitzer. Com efeito, este observou que, se ξ_t é a configuração no instante t de um sistema com interação por exclusão <u>simétrico</u>, então:

(a) $$\mathbb{P}_\eta(\xi_t \supset A) = \mathbb{P}_A(\xi_t \subset \eta),$$

quaisquer que sejam η, subconjunto de S de cardinalidade infinita, e A, subconjunto finito de S.
Ora, a probabilidade da esquerda refere-se a um sistema com um número infinito de partículas, pois a sua configuração inicial, η, é de cardinalidade infinita;

enquanto que a probabilidade da direita refere-se a um sistema finito, tendo como configuração inicial o conjunto finito A. (Na linguagem atual da teoria diríamos que o sistema com interação por exclusão simétrico é auto-associado)
Por outro lado, o conhecimento de $\mathbb{P}_\eta(\xi_t \supset A)$, para todo conjunto finito A, determina inteiramente a distribuição no instante t do sistema que tem η como configuração inicial.
A fórmula (a) permite, dessa maneira, conhecer a lei de um sistema com uma infinidade de partículas, pelo estudo da lei de um sistema finito. A noção de associação é formulada por Harris, a partir da fórmula (a) que ele generaliza (cf. fórmula (0.1) e (0.2) na 1.ª parte desta tese).

A 1.ª parte desta tese, é centrada na noção de associação. Seu ponto de partida é o reconhecimento de uma característica estrutural comum a todos os sistemas munidos de associados estudados até então (isto é, o sistema com interação por exclusão simétrico, os sistemas de contacto, os processos de ramificação com interferência e os processos de proximidade de Holley e Liggett (cf. exemplos no final da introdução da 1.ª parte desta tese)).
O fato é que todos esses sistemas podem ser obtidos pela ação de uma família de aplicações de $\mathcal{P}(S)$ em $\mathcal{P}(S)$, que atuam independentemente umas das outras, aplicações essas que comutam com a operação de união de conjuntos.

Essa propriedade de estrutura permanecia oculta pela descrição que era feita dos sistemas, a partir dos coeficientes infinitesimais de mudança em cada sítio (ou em cada par de sítios, no caso dos sistemas por exclusão). Note-se que era ao nível dessa descrição, ponto por ponto, que a interação era formulada. No entanto, a apresentação do sistema, em termos dos coeficientes infinitesimais correspondentes às transformações, bem mostra a ausência de interações entre os elementos constitutivos do sistema, no caso as aplicações de $P(S)$ em $P(S)$, já que estas atuam independentemente umas das outras. Consegue-se assim reformular um sistema complexo, com interação, em um processo conceitualmente muito mais simples, obtido pela justaposição de processos independentes.

Essa nova formulação, permite-nos construir uma família de versões do processo, todas definidas em um mesmo espaço de probabilidades, cada uma delas correspondendo a uma configuração inicial distinta, e todas elas relacionadas por uma propriedade de <u>emparelhamento forte</u> ("emparelhamento" é a tradução que encontrei para a palavra inglesa " coupling ").

Nesse quadro a associação tem uma formulação extremamente simples, e a relação entre os geradores de dois processos associados não apresenta nenhuma dificuldade.

Para facilitar a leitura da Parte 1 desta tese, vamos aqui formular o resultado supondo que o espaço S seja finito.

Neste caso, o sistema nada mais é do que um processo markoviano de saltos. Podemos, então, abandonar a descrição em tempo contínuo, e simplesmente considerar a cadeia de Markov formada pela sequência das configurações pelas quais passa o sistema.

Seja, então, Σ, o conjunto das aplicações π, de $\mathcal{P}(S)$ em $\mathcal{P}(S)$, que comutam com a operação de união de conjuntos, isto é:

(b) $$\pi(A \cup B) = \pi(A) \cup \pi(B),$$

quaisquer que sejam os conjuntos A e B, contidos em S. Seja $\{p(\pi) : \pi \in \Sigma\}$ uma distribuição de probabilidades em Σ, isto é,

$$0 \leq p(\pi) \leq 1, \quad \forall \pi \in \Sigma,$$

$$\sum_{\pi \in \Sigma} p(\pi) = 1.$$

Vamos agora apresentar o espaço de probabilidades

que servirá de base à nossa família de versões.

O espaço amostral será $\Omega = \Sigma^{\mathbb{N}}$, o conjunto das sequências infinitas de elementos de Σ, munido da tribo produto, tendo como medida de probabilidade o produto das distribuições, $\{p(\pi) : \pi \in \Sigma\}$, isto é:

$$\mathbb{P} = \left(\sum_{\pi \in \Sigma} p(\pi)\ \varepsilon_{\pi}\right)^{\otimes \mathbb{N}}, \quad \text{onde}$$

ε_{π} indica a medida unitária concentrada no ponto π. Notemos que, por definição, cada elemento ω de Ω é uma sequência infinita de aplicações pertencentes a Σ. Vamos indicar por ω_n a sua n-ésima coordenada

(ou seja $\omega = (\omega_o, \omega_1, \omega_2, \ldots)$).

Sejam, então, ω um elemento de Ω e A um elemento de de $P(S)$, quaisquer. Definimos, por recorrência:

$$\xi_0^A(\omega) = A$$

$$\xi_1^A(\omega) = \omega_o(A)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_{n+1}^A(\omega) = \omega_n(\xi_n^A(\omega))$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Definimos dessa maneira, para cada $A \subset S$, uma função aleatória $(\xi_n^A : n = 0,1,2...)$. É fácil ver que:

1) A função aleatória $(\xi_n^A : n = 0,1,2...)$ é uma versão da cadeia de Markov em $\mathcal{P}(S)$, cuja probabilidade de transição é

$$Q(M,N) = \sum_{\pi \in \Sigma : \pi(M) = N} p(\pi)$$

e tendo A como estado inicial.

2) <u>Propriedade de emparelhamento forte</u>: quaisquer que sejam A e B, subconjuntos de S, e qualquer que seja n:

$$\xi_n^{A \cup B} = \xi_n^A \cup \xi_n^B.$$

A propriedade de emparelhamento forte decorre imediatamente da propriedade (b) satisfeita pelos elementos de Σ.

Vamos agora para cada elemento π de Σ definir um elemento π^*, também de Σ, da seguinte maneira:

i) para cada elemento x de S, definimos:

$$\pi^*(\{x\}) = \{y \in S \mid x \in \pi(\{y\})\}$$

ii) para cada elemento A de $P(S)$, definimos:

$$\pi^*(A) = \bigcup_{x \in A} \pi^*(\{x\}).$$

Diremos que π^* é o associado de π. Definiremos também a noção de associação em Ω: o associado de um elemento $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ é obtido substituindo-se cada coordenada de ω pela sua associada: $\omega^* = (\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \ldots)$.

Podemos assim definir uma nova familia de funções aleatórias $\{(\xi_n^{*A})\ n : A \in P(S)\}$ da seguinte maneira:

$$\xi_n^{*A}(\omega) = \xi_n^A(\omega^*).$$

Evidentemente essa nova família de funções aleatórias também possui as propriedades 1 e 2, com a única diferença que a probabilidade de transição por ela seguida é

$$Q^*(M,N) = \sum_{\pi \in \Sigma : \pi^*(M) = N} p(\pi) \quad .$$

A relação entre as duas famílias é a seguinte:

$$\mathbb{P}(\xi_1^A \cap B = \emptyset) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \omega_o(A) \cap B = \emptyset\} =$$

$$= \sum_{\pi \in \Sigma : \pi(A) \cap B = \emptyset} p(\pi) = \sum_{\pi \in \Sigma : A \cap \pi^*(B) = \emptyset} p(\pi) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \omega_o^*(B) \cap A = \emptyset\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\xi_1^{*B} \cap A = \emptyset\}.$$

Esta nada mais é do que a versão para cadeias de Markov da noção de <u>associação</u> de Harris.

Na parte I deste trabalho, faz-se o análogo exato desta construção, num espaço S enumerável. A existência do processo será garantida, impondo-se restrições aos coeficientes infinitesimais que descrevem a ação dos elementos de Σ.

Neste caso, as famílias de funções aleatórias serão obtidas como modificações de um processo pontual de Poisson σ-finito.

A Parte 2 é dedicada à resolução parcial de uma conjectura de Liggett, segundo a qual dois passeios aleatórios, interagindo por exclusão, têm o mesmo comportamento assintótico que dois passeios independentes.

A idéia da demonstração foi fornecida pela propriedade de emparelhamento forte. Com efeito, ela diz que é possível obter um sistema interagindo por exclusão como reunião de passeios aleatórios. Isso parecia ser exatamente o que faltava para a demonstração da conjectura de Liggett. Na verdade, não era tão simples assim, pois os passeios aleatórios que aparecem no emparelhamento forte não são independentes entre si.

Foi preciso, então, fabricar um novo tipo de emparelhamento, no qual os sistemas com exclusão e independentes coincidiam em certos intervalos de tempo e eram diferentes noutros, alternadamente.

Isto feito, a dificuldade passou a ser a recorrência (ao menos em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^2$) dos intervalos nos quais os dois sistemas eram diferentes. Esta recorrência (isto é, o fato de que por mais longe que se vá no tempo, sempre haverá períodos nos quais os dois sistemas são diferentes) parecia contrariar a conjectura, segundo a qual os dois sistemas tenderiam a coincidir. Na verdade, a chave do mistério estava no comprimento muito maior dos intervalos de coincidência, comparativamente aos outros (a <u>idéia</u> é que o comprimento médio dos primeiros era da ordem de ∞^2, enquanto que o dos últimos era só da ordem de ∞).

Para formalizar esta idéia, foi necessário previamente fazer uma pequena generalização do Teorema da Renovação de Feller, para o caso de funções cuja integral diverge.

Note-se que a contradição aparente da convergência para o equilíbrio coexistindo com uma situação de recorrência evoca o paradoxo clássico da Mecânica Estatística (cf. modelo das urnas de Ehrenfest e a discussão sobre a compatibilidade entre a reversibilidade do modelo de Boltzmann e a irreversibilidade da convergência termodinâmica para o equilíbrio).

Esta evocação parece-me uma boa maneira de concluir estes preliminares.[1]

---

[1] A bibliografia desta tese não estaria completa sem uma referência ao curso de Liggett em St. Flour [18].
De fato, ali se encontra a melhor introdução ao assunto, existente neste momento.

PARTE 1. UMA CLASSE DE SISTEMAS QUE É ESTÁVEL EM RELAÇÃO À ASSOCIAÇÃO

INTRODUÇÃO

Vamos estudar a evolução de certos sistemas com uma infinidade de partículas num espaço enumerável S. Trata-se de uma classe de processos markovianos, tendo como espaço de estados o conjunto $\mathcal{P}(S)$ das partes de S, e cujo gerador L aplicado a uma função cilíndrica f [1] qualquer se escreve:

$$(0.0) \qquad Lf = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)(f \circ \pi - f)$$

onde Σ é uma classe conveniente de aplicações de $\mathcal{P}(S)$ em $\mathcal{P}(S)$, e λ uma aplicação de Σ em $\mathbb{R}_+$ verificando certas condições.

O conjunto Σ será definido de maneira a que a classe de processos obtidos, quando λ varia, seja estável em relação a <u>associação</u> [2].

---

[1] Diremos que uma função $f:\mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$ é cilíndrica se existe um conjunto finito $A \subset S$, tal que $f(\eta) = f(\eta \cap A)$, para todo $\eta \in \mathcal{P}(S)$.

[2] A noção de <u>associação</u> foi estudada recentemente em varios artigos entre os quais [7], [8] e [9].

Seguindo Harris [3], diremos que dois processos (ξ_t) e (ξ_t^*), tomando seus valores em $P(S)$, são <u>associados</u> se, para todo $t \geq 0$,

$$(0.1) \qquad \mathbb{P}_\xi(\xi_t \cap \eta \neq \emptyset) = \mathbb{P}_\eta^*(\xi_t^* \cap \xi \neq \emptyset),$$

onde ξ e η são dois elementos de $P(S)$, um dos dois pelo menos sendo finito. A relação (0.1) acarreta para os geradores L e L^* dos dois processos a propriedade seguinte:

$$(0.2) \qquad L\,\theta_\eta(\xi) = L^*\,\theta_\xi(\eta)$$

onde $\theta_\eta(\xi) = 1$, se $\eta \cap \xi \neq \emptyset$, e $\theta_\eta(\xi) = 0$, em caso contrário.

Agora, se π e σ são duas aplicações de $P(S)$ em $P(S)$, os geradores elementares $L_\pi f = f \circ \pi - f$ e $L_\sigma = f \circ \sigma - f$ satisfazem a condição (0.2) se e somente se $\theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\sigma(\eta))$. Ora, é muito fácil demonstrar a

(0.3) <u>Proposição</u> (cf. Harris [2]) : Se π é uma aplicação de $P(S)$ em $P(S)$, uma condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação de $P(S)$ em $P(S)$, tal que

$$(0.4) \qquad \theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\sigma(\eta)),$$

para todo par ξ e η de partes de S, é que $\pi(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi(\{x\})$,

para todo ξ. Para um tal π, as fórmulas

$$\pi^*(\{x\}) = \{y \in S \mid x \in \pi(\{y\})\} \tag{0.5}$$

e

$$\pi^*(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi^*(\{x\})$$

definem a única transformação σ, tal que (0.4) esteja verificada.

(Em seguida, notaremos algumas vezes (e abusivamente) x em lugar de $\{x\}$. Designaremos por $P_f(S)$ o conjunto das partes finitas de S.)

A proposta (0.3) nos leva a definir Σ como o conjunto de todas as aplicações $\pi : P(S) \longrightarrow P(S)$ que verificam as condições:

$$\pi(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} \pi(x), \quad \text{para todo} \quad \xi \in P(S), \tag{0.6}$$

$$\pi(x) \in P_f(S), \qquad \text{para todo} \quad x \in S, \tag{0.7}$$

$$Z_\pi = \{x \in S \mid \pi(x) \neq \{x\}\} \in P_f(S). \tag{0.8}$$

Observamos que uma aplicação π pertence a Σ se e somente se $\pi^* \in \Sigma$.

No caso em que S é finito, Harris mostrou em [2]

que a classe dos processos markovianos tendo um gerador da forma (0.0) (qualquer que seja λ) é estável em relação à associação e que o processo cujo gerador é $Lf = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)(f \circ \pi - \pi)$ tem como associado o processo cujo gerador é $L^* f = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)(f \circ \pi^* - f)$. (É uma consequência imediata do fato que $\theta_\eta(\pi(\xi)) = \theta_\xi(\pi^*(\eta))$, para todo $\pi \in \Sigma$).

Neste texto, consideraremos o caso geral em que S é enumerável [3]. Vamos impor a λ condições tais que existirá um processo de Feller construido explicitamente e admitindo L como gerador sobre as funções cilíndricas. Vamos primeiro construir uma família de versões do processo em $P_f(S)$. Em seguida, usando a associação e graças à propriedade de emparelhamento forte, passaremos ao espaço $P(S)$.

Mais exatamente, demonstraremos os teoremas seguintes:

---

[3] Num artigo recente [12], não ainda publicado, e que recebemos em forma de pre-print, quando este texto já estava terminado, Harris considera, ele também, processos definidos pela classe Σ num espaço enumerável.

TEOREMA 1:

1) Seja uma aplicação $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ verificando a condição

$$(0.9) \qquad \sum_{\pi \in I_x} \lambda(\pi) = \alpha_x < \infty,$$

para todo $x \in S$, onde $I_x = \{\pi \in \Sigma \mid \pi(x) \neq \{x\}\}$. Existe então um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ sobre o qual se pode construir, para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$, uma versão $(\xi_t^A,\ 0 \leq t < T_\infty^A)$ do processo markoviano de saltos sobre $\mathcal{P}_f(S)$, com o estado inicial A, com a duração de vida T_∞^A, e com o gerador definido para todo par C e D de elementos de $\mathcal{P}_f(S)$ por:

$$L(C,D) = \sum_{\pi : \pi(C) = D} \lambda(\pi), \quad \text{se } C \neq D$$

$$L(C,C) = -\sum_{F \neq C} L(C,F), \quad \text{no caso contrário,}$$

e tal que:

$$T_\infty^A = \inf_{x \in A} T_\infty^x \qquad \text{e}$$

$$(0.10) \qquad \xi_t^A = \bigcup_{x \in A} \xi_t^x, \quad \text{para todo } t \in [0, T_\infty^A[.$$

2) Se supusermos também que:

$$(G) \qquad \sup_{x \in S} \alpha_x = \beta < \infty,$$

$$(H) \qquad \sup_{x \in S} \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)(|\pi(x)| - 1) = c < \infty,$$

então, para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$, o processo não explode (quer dizer: $T_\infty^A = \infty$ q.c. e $|\xi_t^A| \leq |A| e^{ct}$, qualquer que seja $t \geq 0$).

(No enunciado da segunda parte do teorema, $|A|$ designa o cardinal do conjunto A.)

Observação: A propriedade (0.10) acarreta a propriedade de emparelhamento forte [4] seguinte para a versão considerada no teorema 1: para todo par (A,B) de elementos de $\mathcal{P}_f(S)$, e para todo $t \in [0, T_\infty^{A \cup B}[$, temos:

$$\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \bigcup \xi_t^B.$$

TEOREMA 2: Se além das condições (G) e (H) do Teorema 1, a aplicação λ satisfaz também as condições:

(G') $$\sup_{x \in S} \sum_{\pi : \pi^* \in I_x} \lambda(\pi) = \beta^* < \infty, \quad \text{e}$$

(H') $$\sup_{x \in S} \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)(|\pi^*(x)| - 1) = c^* < \infty$$

---

[4] Num texto escrito ao mesmo tempo que este ([7]), Gray e Griffeath mencionam também a propriedade de emparelhamento forte, que eles usam para construir exemplos de não-unicidade.

então, para todo $\eta \in \mathcal{P}(S)$, as funções aleatórias, $(\xi_t^\eta, t\geq 0)$ e $(\xi_t^{*\eta}, t\geq 0)$, com valores em $\mathcal{P}(S)$, definidas no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ do teorema 1 por:

$$\xi_t^\eta = \bigcup_{x\in\eta} \xi_t^x \quad \text{e} \quad \xi_t^{*\eta} = \bigcup_{x\in\eta} \xi_t^{*x}$$

são versões contínuas à direita admitindo limites à esquerda dos processos de Markov, com o estado inicial η, com os geradores respectivos $Lf = \sum_\pi \lambda(\pi)(f\circ\pi - f)$ e $L^* f = \sum_\pi \lambda(\pi)(f\circ\pi^* - f)$, onde f é uma função cilíndrica qualquer. Verificam a propriedade de associação e definem semi-grupos de Feller.

<u>Observação 1</u>: O conjunto $\mathcal{P}(S)$ está munido de sua topologia habitual, isomorfa à topologia produto de $\{0,1\}^S$.

<u>Observação 2</u>: É fácil ver que sob as condições (G) e (H) e a condição suplementar:

$$\sup_{x\in S} \sum_{\pi : x\in\pi(Z_\pi)} \lambda(\pi)|Z_\pi| < \infty \tag{0.11}$$

as hipóteses do teorema 2 são verificadas.

Observemos enfim a propriedade seguinte:

Teorema ergódico: Se além das condições do teorema 2 tivermos $c^* < 0$, então o processo de gerador L é ergódico.

Antes de passarmos às demonstrações dos teoremas, queremos sublinhar o fato que a classe de processos estudada aqui contém um grande número de sistemas considerados na literatura, como o mostram os exemplos seguintes:

Exemplo 1: Processo de ramificação com interferência e processo de proximidade.

Estes processos foram introduzidos por Holley e Liggett em [4].

Sejam as aplicações $\pi_{x,F} \in \Sigma$, onde $x \in S$ e $F \in \mathcal{P}_f(S)$, definidas por:

$$\pi_{x,F}(x) = F,$$

$$\pi_{x,F}(y) = \{y\}, \quad y \in S, \; y \neq x.$$

O processo de ramificação com interferência é definido em $\mathcal{P}_f(S)$. Seu gerador é dado por:

$$Lf = \sum_{\substack{x \in S \\ F \in \mathcal{P}_f(S)}} k(x)\; p(x,F)[f \circ \pi_{x,F} - f],$$

onde k é uma aplicação limitada de S em R_+ e $p(x,.)$ uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}_f(S)$. A condição (G) é verificada e a condição (H) o será se:

$$(0.12) \qquad \sup_{x \in S} \sum_F k(x)\ p(x,F)(|F| - 1) < \infty.$$

O processo de proximidade é obtido por associação. Ele é definido pelas transformações $\pi^*_{x,F}$ dadas pela fórmula (0.5):

$$\pi^*_{x,F}(y) = \begin{cases} \{y,x\} & , \text{ se } y \in F \\ \{y\} & , \text{ se } y \notin F \text{ e } y \neq x \end{cases}$$

$$\pi^*_{x,F}(x) = \begin{cases} \{x\} & , \text{ se } x \in F \\ \emptyset & , \text{ se } x \notin F \end{cases}.$$

Seu gerador se escreve portanto sob a forma:

$$L^* f = \sum_{\substack{x \in S \\ F \in \mathcal{P}_f(S)}} k(x)\ p(x,F)(f \circ \pi^*_{x,F} - f).$$

Levando em conta a observação 2, é fácil ver que as condições do teorema 2 serão verificadas se, além de (0.12), tivermos também

$$\sup_{x\in S} \sum_{F:x\in F} \sum_{x\in F} k(y)\ p(y,F) < \infty.$$

(Esta última condição é a reescritura para este processo da condição (0.11).)

Exemplo 2: Modelo do Votante de Holley e Liggett (cf. [4]).

É um caso particular importante do exemplo 1. Toma-se $S=\mathbb{Z}^d$, $k(.) \equiv 1$ e $p(x,F) = 0$, se $|F| \neq 1$, ou se $F = \{x\}$.

Exemplo 3: Processo de Contato (cf. Harris [1]).

É mais um caso particular muito importante dos processos considerados no exemplo 1. Dado um sub-conjunto finito fixado N de S, definimos:

$$\lambda(\pi_{x,F}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } F = \emptyset \\ \varepsilon & , \text{ se } F = \{x, x+y\},\ y\in N \\ 0 & , \text{ no caso contrário.} \end{cases}$$

(Usamos as mesmas notações que no exemplo 1.)

É fácil ver que este processo é auto-associado, já que

$$\pi^*_{x,\emptyset} = \pi_{x,\emptyset} \quad , \quad \pi^*_{x,\{x,x+y\}} = \pi_{x+y,\{x,x+y\}}$$

e

$$\lambda(\pi^*_{x,\{x,x+y\}}) = \lambda(\pi_{x+y,\{x,x+y\}}) = \varepsilon .$$

Observamos que para este processo, as condições do teorema 2 são preenchidas e as do teorema ergódico o serão se $\varepsilon < \frac{1}{|N|}$, pois $c^* = c = |N|\varepsilon - 1$.

<u>Exemplo 4</u>: Processo de exclusão simples simétrico (cf. Spitzer [10]).

Seja q uma probabilidade de transição simétrica em S. Para todo par $\{x,y\}$ não ordenado de elementos distintos de S, se define o elemento σ_{xy} de Σ por:

$$\sigma_{xy}(x) = \{y\}$$

$$\sigma_{xy}(y) = \{x\}$$

$$\sigma_{xy}(z) = \{z\}, \text{para todo } z \in S, \quad z \neq x, \quad z \neq y.$$

Seja λ a aplicação de Σ em R_+ definida por:

$$\lambda(\sigma_{xy}) = q(x,y) \ ,$$

e

$$\lambda(\pi) = 0 \quad , \text{ se } \pi \notin \{\sigma_{xy}\}.$$

O gerador L é o do processo de exclusão simples simétrico. As condições do teorema 2 são ainda verificadas e o processo é auto-associado.

Exemplo 5: Um processo de saltos em $P_f(S)$ pode não explodir e ter um associado que explode.
Considera-se uma sequência $\{\theta_x : x \in S\}$ de elementos de Σ definidos da maneira seguinte: $\theta_x(z) = \{z\}$, para todo $z \in S$, $z \neq x$, e $\theta_x(x) = \{x,a\}$, onde a é um elemento fixado de S, e uma aplicação $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que é nula fora da sequência $\{\theta_x\}$. As condições (G) e (H) são verificadas.

Para o associado, temos

$$\overset{*}{\theta}_x(a) = \{a,x\} \quad \text{e} \quad \overset{*}{\theta}_x(y) = \{y\}, \quad \text{se } y \neq a.$$

No caso em que $\sum_x \lambda(\theta_x) = \infty$, o processo (ξ_t^{*a}) explode imediatamente.

* * *

I - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.

1 - Seja $A \in \mathcal{P}_f(S)$. Vamos definir o processo de salto ξ_t^A por seus instantes de saltos sucessivos T_1^A, $T_2^A, \ldots$ eventualmente infinitos e suas posições sucessivas A_o, A_1, A_2 nos instantes $0, T_1^A, T_2^A, \ldots$ definindo

$$\xi_t^A = A_n, \quad \text{se} \quad T_n^A \leq t < T_{n+1}^A$$

para todo t: $0 \leq t < T^A$, onde $T_\infty^A = \lim_{n \to +\infty} T_n^A$ designa a duração da vida do processo com a convenção $T_o^A = 0$, $A_o = A$. Notaremos $(\mathcal{F}_t^A)_{t \in R_+}$ as tribos associadas ao processo. As sequências (T_n^A) e (A_n) vão ser construidas de tal maneira que:

1) Condicionalmente em $\mathcal{F}_{T_n^A}^A$, as variáveis aleatórias $T_{n+1}^A - T_n^A$ que são finitas, têm leis exponenciais com parâmetro $\sum_{\pi : \pi(A_n) \neq A_n} \lambda(\pi)$ respectivamente e são independentes entre elas.

2) A sequência (A_n) é uma cadeia de Markov

com estado inicial A e com matriz de transição:

$$Q(C,D) = \frac{\sum_{\pi:\pi(C)=D} \lambda(\pi)}{\sum_{\pi:\pi(C)\neq C} \lambda(\pi)} \quad , \text{ se } \sum_{\pi:\pi(C)\neq C} \lambda(\pi) > 0 \quad \text{e} \quad C \neq D,$$

$$Q(C,D) = 1 \quad , \text{ se } \sum_{\pi:\pi(C)\neq C} \lambda(\pi) = 0 \quad \text{e} \quad C = D,$$

$$\text{e } Q(C,D) = 0 \quad , \text{ no caso contrário.}$$

Seja $(N^{\pi}, \pi \in \Sigma)$ uma família de processos pontuais de Poisson em R_+, independentes, com parâmetros respectivos $\lambda(\pi)$, definidos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Reduzindo convenientemente o espaço Ω, pode-se supôr que os tempos de salto do conjunto destes processos são distintos dois a dois, pois Σ é enumerável.

Introduz-se o processo de Poisson N, σ-finito, no sentido de Ito [5], definido em $]0,\infty[\times \Sigma$, provido da tribo produto da tribo boreliana de $]0,\infty[$ e da tribo das partes de Σ, da maneira seguinte:

$$N(B \times I, .) = \sum_{\pi \in I} N^{\pi}(B, .) \quad \forall B \in \mathcal{B}(]0,\infty[), \quad \forall I \subset \Sigma.$$

Seja $\mathcal{A}_t$ a tribo gerada pelas variáveis aleatórias

$$\{N(]0,s] \times I,.); \quad 0 < s \leq t, \quad I \subset \Sigma\}.$$

Seja para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$, $I_A = \{\pi \in \Sigma : \pi(A) \neq A\}$.

Seja, por definição

$$T_1^A = \inf\{t > 0 : N(]0,t] \times I_A) > 0\}, \text{ se } \sum_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) > 0,$$

$$T_1^A = +\infty \qquad , \text{ se } \sum_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) = 0.$$

A hipótese 1 acarreta $\sum_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) \leq \sum_{x \in A} \alpha_x < \infty$. Em consequência, se excluirmos o segundo caso - no qual o processo ξ_t^A será constante e igual a A - resulta de uma propriedade bem conhecida que T_1^A é uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\sum_{\pi \in I} \lambda(\pi)$ e que o infimo é atingido por um único elemento de Σ, seja π_1^A. Diz-se que π_1^A opera no instante T_1^A.

Sabemos que π_1^A e T_1^A são variáveis aleatórias independen

tes e que

$$\begin{cases} P\ (\pi_1^A = \sigma) = \dfrac{\lambda(\sigma)}{\sum\limits_{\pi \in I_A} \lambda(\pi)} & , \text{ se } \sigma(A) \neq A \\[2ex] P\ (\pi_1^A = \sigma) = 0 & , \text{ no caso contrário} \end{cases}$$

Definimos $\quad A_1 = \pi_1^A(A) \quad , \text{ se } \sum\limits_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) > 0.$

A_1 é um sub-conjunto aleatório de S que representa o estado do processo ξ_t^A depois do seu primeiro salto, e sua lei é dada por

$$P(A_1=B) = \frac{\sum\limits_{\pi : \pi(A)=B} \lambda(\pi)}{\sum\limits_{\pi \in I_A} \lambda(\pi)} \quad , \text{ se } \sum_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) > 0 \text{ e } A \neq B,$$

$$P(A_1=B) = 1 \quad , \text{ se } \sum_{\pi \in I_A} \lambda(\pi) = 0 \text{ e } A = B,$$

e $\quad P(A_1=B) = 0 \quad , \text{ no caso contrário.}$

Notemos que T_1^A é um tempo de parada para o processo N e

que A_1 é $\mathcal{A}_{T_1^A}$ mensurável; vamos utilizar a observação geral seguinte:

Seja T um tempo de parada para o processo N e I um sub-conjunto aleatório de Σ, $\mathcal{A}_T$ - mensurável tal que $\sum_{\pi \in I} \lambda(\pi) < \infty$. Define-se a variável $S(T,I)$ como:

$$\begin{cases} S(T,I) = \inf\{t : t > T \text{ e } N(]T,t] \times I) > 0\}, & \text{se } T < \infty \text{ e } \sum_{\pi \in I} \lambda(\pi) > 0, \\ S(T,I) = +\infty & , \quad \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Um teorema de Ito [5] permite afirmar que os processos $\tau_T N$ e $\alpha_T N$, respectivamente transladados de T e parados no tempo T, são independentes e que $\tau_T N$ tem a mesma lei N. Em consequência, condicionalmente a $\mathcal{A}_T$, $S(T,I)$ comporta-se como T_1^A, quer dizer:

1) Se for finita, a variável aleatória $S(T,I)$ - é exponencial com parâmetro $\sum_{\pi \in I} \lambda(\pi)$,

2) Se $S(T,I)$ for finita, o ínfimo é atingido por um único π, que chamaremos de $\pi(T,I)$.

3) A lei de $\pi(T,I)$ é dada por:

$$\begin{cases} P(\pi(T,I) = \sigma) = \dfrac{\lambda(\sigma)}{\sum\limits_{\pi \in I} \lambda(\pi)}, & \text{se } \sigma \in I, \\ \\ P(\pi(T,I) = \sigma) = 0 \qquad , & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

Observamos também que $S(T,I)$ é um tempo de parada para o processo N pois $\{S(T,I) \leq t\} = \{T < t\} \cap \{\tau_T N(]0,t-T] \times I > 0\}$ e no conjunto $\{T < t\}$ o segundo termo é A_t- mensurável.

Definindo então por recorrência $T^A_{n+1} = S(T^A_n, I_{A_n})$ e

$$A_{n+1} = \pi(T^A_n, I_{A_n})(A_n)$$

as propriedades (I.1.1) são verificadas e o processo de salto está construido.

2 - Segundo a construção precedente, podemos escrever:

$$\xi^A_t = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \ldots \circ \pi_1(A), \quad \text{se } T^A_n \leq t < T^A_{n+1}.$$

Esta relação e a propriedade característica das aplica

ções π permitem provar facilmente a fórmula de emparelhamento forte.

Consideramos os tempos de salto $\{(T_n^x)_{n\in N},\ x \in A\}$ situados entre 0 e $\inf_{x\in A} T_\infty^x$ e os ordenamos numa sequência estritamente crescente. Chamaremos de σ_n o elemento de Σ que opera no instante V_n. Um instante V_n pode representar um ou vários instantes do tipo T_j^x, mas neste caso, o mesmo σ_n opera nos processos ξ_t^x no instante V_n. Vamos demonstrar por recorrência em n a propriedade S_n seguinte, que acarreta o resultado de emparelhamento . Propriedade S_n: para $V_n \le t < V_{n+1}$ temos:

a) $t < T_\infty^A$,

b) $t \neq V_n$ não é um tempo de salto para ξ_t^A ,

c) $\forall x \in A,\ \xi_t^x = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_1(x)$

e $\xi_t^A = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_1(A)$.

Suponhamos, então, que S_p seja verificada para $1 \le p \le n$. Conforme V_{n+1} seja ou não um tempo de salto para (ξ_t^x), temos:

$$\xi^x_{V_{n+1}} = \sigma_{n+1}(\xi^x_{V_n}) \neq \xi^x_{V_n} ,$$

ou

$$\xi^x_{V_{n+1}} = \xi^x_{V_n} = \sigma_{n+1}(\xi^x_{V_n}) .$$

Mesma coisa para (ξ^A_t), pois, se V_{n+1} é um de seus tempos de salto, é σ_{n+1} que opera nele nesse instante.

A propriedade c é portanto demonstrada pela hipótese de recorrência.

Por outro lado, não pode haver tempo de salto de (ξ^A_t) estritamente situado entre V_{n+1} e V_{n+2} pois então, notando π a aplicação que operaria nele nesse instante, teríamos:

$$\pi(\xi^A_t) \neq \xi^A_{t-}$$

com $\xi^A_{t-} = \xi^A_{V_{n+1}} = \bigcup_{x \in A} \xi^x_{V_{n+1}}$, portanto $\pi(\xi^x_{V_{n+1}})$ seria diferente de $\xi^x_{V_{n+1}}$ para pelo menos um x em A, e t seria um tempo de salto de (ξ^x_s).

Resta mostrar: $T^A_\infty \leq \inf_{x \in A} T^x_\infty$. Provemos para isso, por recorrência que, para todo n, $T^A_n < \inf_{x \in A} T^x_\infty$ no conjunto onde

$\inf_{x\in A} T_\infty^x$ é finito.

Neste conjunto, T_{n+1}^A é finito, e o processo de Poisson $\tau_{T_n^A} N$ tem um número finito de saltos no produto de compactos $[T_n^A, T_{n+1}^A] \times \{\bigcup_{z\in A} I_z\}$. Ora todo salto de (ξ_t^x), $x \in A$, no intervalo $[T_n^A, T_{n+1}^A[$, é deste tipo pois uma aplicação π que muda $\xi_{V_j}^x$, para $x \in A$, sem mudar a reunião $\xi_{V_j}^A = \bigcup_{x\in A} \xi_{V_j}^x$, muda pelo menos um ponto de ξ_V^A. Há portanto, um número finito de saltos de cada (ξ_t^x), $x \in A$, no intervalo $[T_n^A, T_{n+1}^A[$ e $T_{n+1}^A < \inf_{x\in A} T_\infty^x$, onde este inf for finito.

3 - Vamos mostrar que, sob a hipótese 2) suplementar do teorema 1, o processo não explode.

Para todo n, para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$, temos a igualdade:

$$|\xi_{t\wedge T_n^A}^A| = |A| + \sum_n \int_0^{t\wedge T_n^A} dN^\pi(s)\,(|\pi(\xi_{s-}^A)| - |\xi_{s-}^A|)$$

e também portanto:

(I.3.1)

$$E(|\xi^A_{t\wedge T^A_n}|) = |A| + \sum_\pi \lambda(\pi)\ E(\int_o^{t\wedge T^A_n} ds(|\pi(\xi^A_s)| - |\xi^A_s|).$$

Da hipótese (H) do teorema 1, deduzimos:

(I.3.2)

$$\sum_\pi \lambda(\pi)(|\pi(\xi^A_s)| - |\xi^A_s|) \le \sum_{x\in\xi^A_s} [\sum_\pi \lambda(\pi)(|\pi(x)| - 1)] \le c|\xi^A_s|.$$

De (I.3.1) e (I.3.2), obtém-se

$$E(|\xi^A_{t\wedge T^A}|) \le |A| + c\ E(\int_o^{t\wedge T^A_n} |\xi^A_s| ds) \le |A| + c\ E(\int_o^t |\ {}^A_{s\wedge T^A_n}|\ ds)$$

de maneira que usando a desigualdade de Gronwall, temos:

(I.3.3)

$$E(|\xi^A_{t\wedge T^A_n}|) \le e^{ct}|A|, \quad \forall n \in N.$$

Da mesma maneira, podemos escrever:

$$E(\sum_m 1_{(T^A_m \le t)}) = \sum_\pi \lambda(\pi)\ E(\int_o^{t\wedge T^A_n} 1_{(\pi(\xi^A_s) \ne \xi^A_s)} ds).$$

A hipótese (1) do teorema 1 permite portanto escrever, definindo

$$\nu_t^A = \sum_{m \in N} (T_m^A \leq t) \quad ,$$

$$E(\nu^A_{t \wedge T_n^A}) \leq \beta \; E(\int_o^{t \wedge T_n^A} |\xi_s^A| ds) \leq \beta \; E(\int_o^t |\xi^A_{s \wedge T_n^A}| ds)$$

e de (I.3.3) deduzimos

(I.3.4)

$$E(\nu^A_{t \wedge T_n^A}) \leq \beta \; |A| \; e^{ct}, \; \forall n \in N.$$

(I.3.4) se escreve ainda: $E(\nu_t^A \wedge n) \leq \beta |A| \; e^{ct}, \; \forall n$ donde

$$E(\; {}^A_t) \leq \beta \; |A| \; e^{ct}$$

e $$\nu_t^A < \infty \text{ p.s.} \quad .$$

Portanto $$T_\infty^A = +\infty \text{ p.s.} \quad .$$

Além disso, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (I.3.3) obtem-se:

$$E(|\xi_t^A|) \leq |A| e^{ct}, \quad t \in R_+.$$

Isto encerra a demonstração.

II - DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.

LEMA: Sob as condições do teorema 2, existem dois processos markovianos de salto $(\xi_t, t \geq 0)$ e $(\xi_t^*, t \geq 0)$ com valores em $P_f(S)$ que têm respectivamente L e L^* como gerador infinitesimal, são associados e possuem a propriedade de emparelhamento forte.

DEMONSTRAÇÃO: A existência dos dois processos resulta imediatamente do teorema 1.

Para mostrar a propriedade de associação, suponhamos primeiro que $c = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)$ é finito. Podemos então escrever, para A e B em $P_f(S)$,

$$P(\xi_t^A \cap B = \emptyset) = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ \pi_1 \ldots \pi_n}} e^{-tc_t} \frac{n}{n!} \lambda(\pi_1)\ldots\lambda(\pi_n)1_{(\pi_n \circ \ldots \circ \pi_1(A) \cap B = \emptyset)}$$

$$= \sum_{\substack{n\in 0 \\ \pi_1 \ldots \pi_n}} e^{-tc_t} \frac{n}{n!} \lambda(\pi_1)\ldots\lambda(\pi_n)1_{(A \cap \pi_1^* \circ \ldots \circ \pi_n^*(B) = \emptyset)}$$

$$= P(\xi_t^{*,B} \cap A = \emptyset).$$

No caso geral, consideramos uma sequência monótona crescente de conjuntos finitos Σ_n convergindo para Σ e os geradores $L_n f(.) = \sum_{\pi\in\Sigma_n} \lambda(\pi)[f(\pi(.)) - f(.)]$ e $L^*_n f(.) = \sum_{\pi\in\Sigma_n} \lambda(\pi)\,[f(\pi^*(.)) - f(.)]$ em $P_f(S)$. Os processos $(\xi_t^n, t \geq 0)$ e $(\xi_t^{*,n}; t \geq 0)$, com geradores L_n e L_n^* em $P_f(S)$, construidos como no teorema 1, são associados.

Ora, é fácil ver que $L_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} L(f)$ e $L_n^*(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} L^*(f)$

para toda função f cilíndrica; em consequência, para todo $A \in \mathcal{P}_f(S)$, para todo $t \geq 0, \xi_t^{n,A}$ converge q.c. para ξ_t^A e $\xi_t^{*,n,A}$ converge q.c. para $\xi_t^{*,A}$ quando $n \to \infty$, o que implica a associação de $(\xi_t^{\cdot}, t \geq 0)$ e $(\xi_t^{*\cdot}, t \geq 0)$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.

1) Graças à associação dos processos em $\mathcal{P}_f(S)$, pode-se escrever:

$$(II.1) \qquad P(\xi_t^A \cap B = \emptyset) = P(\xi_t^{*,B} \cap A = \emptyset), \quad A,B \in \mathcal{P}_f(S).$$

Sejam η e τ dois elementos de $\mathcal{P}(S)$; aproximemo-los por duas sequências crescentes $(A_n)_{n\in N}$ e $(B_n)_{n\in N}$ de conjuntos finitos.

Como $\xi_t^{A_n}$ converge para ξ_t^η e $\xi_t^{B_n}$ converge para ξ_t^τ quando n tende para o infinito, obtemos, passando ao limite em (II.1),

$$(II.2) \qquad P(\xi_t^\eta \cap \tau = \emptyset) = P(\xi_t^{*,\tau} \cap \eta = \emptyset), \quad \eta,\tau \in \mathcal{P}(S).$$

A igualdade precedente é essencial para a continuação da de-

monstração e assegura a priori que $(\xi_t^{\cdot})$ e $(\xi_t^{*\cdot})$ são associados.

2) Definimos: $Q_t(\eta,.) = P(\xi_t^{\eta} \in .)$ para todo $\eta \in \mathcal{P}(S)$, e vamos mostrar que $(\xi_t^{\cdot}, t \geq 0)$ é um processo de Markov de semi-grupo Q_t e que Q_t é um semi-grupo de Feller.

Para isso, observamos que Q_t possui as duas propriedades seguintes:

a) sua restrição a $\mathcal{P}_f(S)$ é também um semi-grupo,

b) a aplicação $\eta \longrightarrow Q_t(\eta,.)$ é, para todo t, uma aplicação vagamente contínua de $\mathcal{P}(S)$ no conjunto das medidas de probabilidade em $\mathcal{P}(S)$.

a) resulta imediatamente da propriedade de Markov aplicada a (ξ_t^A) pois:

$$Q_{t+s}(A,B) = P(\xi_{t+s}^A = B)$$

$$= Q_s Q_t(A,B), \quad \forall t, \ \forall s \in R_+.$$

Para demonstrar b), é preciso provar que $\lim_{\eta \to \eta_o} Q_t f(\eta) = Q_t f(\eta_o)$,

para todo t em R_+ e toda função f contínua em $\mathcal{P}(S)$. De fato, basta mostrar isso para as funções f do tipo $\theta_B, B \in \mathcal{P}_f(S)$, definidas por $\theta_B(\eta) = 1$ se $B \cap \eta \neq \emptyset$, $\theta_B(\eta) = 0$ no caso contrário. Ora por (II.2)

$$Q_t\ \theta_B(\eta) = P(\xi_t^\eta \cap B = \emptyset) = P(\xi_t^{*B} \cap \eta = \emptyset) \quad \text{e}$$

quando η tende para η_o, a partir de um certo índice, η e η_o são iguais no conjunto finito ξ_t^{*B}, logo

$$\lim_{\eta \to \eta_o} Q_t\ \theta_B(\eta) = P(\xi_t^{*B} \cap \eta_o = \emptyset) = Q_t\ \theta_B(\eta_o).$$

<u>(ξ_t) é um processo de Markov de semi-grupo (Q_t).</u>

Temos que mostrar que

(II.3)

$$E[f(\xi_s^\eta)\ g(\xi_{s+t}^\eta)] = \int Q_s(\eta, d\xi)\ f(\xi) \int Q_t(\xi, d\eta)\ g(\eta),$$

$$f \in C(\mathcal{P}(S)),\ g \in C(\mathcal{P}(S)).$$

Já sabemos que esta igualdade ocorre quando η é finito. No caso geral, consideramos uma sequência crescente de conjuntos finitos A_n convergindo para η.

Então, $\xi_s^{A_n}$ e $\xi_{s+t}^{A_n}$ convergem respectivamente para ξ_s^{η} e ξ_{s+t}^{η}, logo o teorema de convergência dominada permite-nos passar ao limite no termo da esquerda de (II.3) e a continuidade da aplicação $\eta \longrightarrow Q_t(\eta,.)$ permite a passagem ao limite no termo da direita.

3) <u>O gerador de ξ_t é dado por L sobre as funções cilíndricas.</u>

a) Mostraremos primeiro que para toda função cilíndrica f, a série Lf é uniformemente convergente em $P(S)$.

Os valores de $f(\eta)$ só dependem das coordenadas de η que pertencem ao conjunto finito U.

Temos portanto:

$$\sum_{\pi} \lambda(\pi)[f(\pi(\eta)) - f(\eta)] \leq \sum_{\pi : \pi(\eta) \cap U \neq \eta \cap U} \lambda(\pi)\ 2\|f\|.$$

Ora: $$\sum_{\pi : \pi(\eta) \cup U \neq \eta \cap U} \lambda(\pi) \leq \sum_{x \in U} \sum_{\pi(\eta) \cap \{x\} \neq \eta \cap \{x\}} \lambda(\pi)$$

e o segundo membro da expressão precedente é majorado por:

$$\sum_{x\in U} \sum_{\pi:\pi(x)=\emptyset} \lambda(\pi) + \sum_{x\in U} \sum_{\pi:\exists y\neq x \text{ tq } \pi(y)\ni x} \lambda(\pi),$$

logo:

$$\sum_{\pi:\pi(\eta)\cap U\neq\eta\cap U} \lambda(\pi) \leq |U| [\sup_x \sum_{\pi:\pi(x)=\emptyset} \lambda(\pi) + \sup_x \sum_{\pi:\pi^*(x)\ni y\neq x} \lambda(\pi)] .$$

b) Vamos provar que para toda função cilíndrica do tipo θ_B, com $|B| < \infty$, a função $t \longrightarrow \mathbb{E}(\theta_B(\xi_t^\eta))$ tem uma derivada igual a $L\theta_B(\eta)$, para todo sub-conjunto η de S.

Seja uma sequência crescente A_n de conjuntos finitos convergindo para η. Sabemos que, para todo $n \in N$, temos:

$$\mathbb{E}(\theta_B(\xi_t^{A_n})) = \theta_B(A_n) + \sum_\pi \lambda(\pi)\, \mathbb{E}(\int_0^t [\theta_B(\pi(\xi_s^{A_n})) - \theta_B(\xi_s^{A_n})]ds.$$

Pela definição de (ξ_t^η), o termo da esquerda converge para $E(\theta_B(\xi_t^\eta))$ e o termo da direita tende para $\int_o^t L\theta_B(\xi_s^\eta)ds$ pelo teorema de convergência dominada.

4) Para todo η incluido em S, a função aleatória (ξ_t^η) é q.c. contínua à direita e admite limites à esquerda.

Com efeito, a propriedade é verdadeira para $\eta \in P_f(S)$ pela própria construção.

Se $\eta \in P(S)$, seja A_n uma sequência crescente de conjuntos finitos convergindo para η.

Para todo $x \in S$, $M_t^{A_n} = \theta_x(\xi_t^{A_n}) - \theta_x(A_n) - \int_0^t L\theta_x(\xi_s^{A_n})ds$, $t \geq 0$

é um martingal cad lae [5].

Para todo $t \geq 0$, $M_t^{A_n}$ converge quase certamente para

$M_t^\eta = \theta_x(\xi_t^\eta) - \theta_x(\eta) - \int_0^t L\theta_x(\xi_s^\eta)ds$, pois θ_x e $L\theta_x$ são

contínuas limitadas.

A desigualdade de Doob permite escrever:

(II 4)

$$\mathbb{E}(\sup_{u \leq t} |M_u^{A_n} - M_u^{A_p}|^2) \leq 4\,\mathbb{E}(|M_t^{A_n} - M_t^{A_p}|^2)$$

---

[5] Nós utilizamos a sigla <u>cad lae</u> para indicar que as trajetórias do martingal são contínuas à direita (cad) e convergem para um limite à esquerda (lae) em cada instante t.

e a expressão da direita tende para 0 quando n e p tendem para o infinito, pelo teorema de convergência dominada.

Logo uma sub-sequência de $(M_u^{A_n}(\omega))_n$ converge, q.c. em ω, uniformemente em u em $[0,t]$, para $M_u^{\eta}(\omega)$.

Em consequência, o martingal $(M_t^{\eta}, t \geq 0)$ é q.c. cad lae e como a expressão $\int_0^t L\theta_x(\xi_s^{\eta})$ é contínua em t,

as funções $t \to \theta_x(\xi_t^{\eta})$ são cad lae para todo x, e logo também a função ξ_t^{η}.

*

* *

*

PARTE 2. COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE DOIS PASSEIOS ALEATÓRIOS SIMPLES, EM $\mathbb{Z}$, INTERAGINDO POR EXCLUSÃO.

INTRODUÇÃO

Vai-se aqui dar uma resposta parcial a uma conjectura de Liggett, segundo a qual dois passeios aleatórios interagindo por exclusão têm o mesmo comportamento assintótico que dois passeios independentes (cf. Liggett [14]).

O sistema constituido por dois passeios aleatórios simples independentes, em $\mathbb{Z}$, é um processo markoviano de saltos, tendo como espaço de estados, o conjunto $P_{1,2}$ dos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que têm 1 ou 2 elementos, e cujo gerador infinitesimal L^1, aplicado a uma função $f: P_{1,2} \to \mathbb{R}$, se escreve como:

$$L^1 f(A) = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in \mathbb{Z}: |y-x|=1} \left[f(A \setminus \{x\} \cup \{y\}) - f(A) \right], \quad \text{se} \quad |A| = 2,$$

e

$$L^1 f(\{x\}) = \sum_{y \in \mathbb{Z}: |y-x|=1} [f(\{x,y\}) - f(\{x\})], \quad x \in \mathbb{Z}.$$

(Isto significa que cada partícula espera um tempo exponencial de parâmetro 1, antes de saltar sobre um dos seus dois vizinhos, escolhidos com probabilidade $\frac{1}{2}$. Feita a escolha o salto se realiza sem que se tome conhecimento da posição da outra partícula).

Já o sistema constituido por dois passeios interagindo por exclusão é um processo markoviano de saltos, tendo como espaço de estados, o conjunto P_2 dos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que têm dois elementos, e cuja gerador infinitesimal L^2, aplicado a uma função $f: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se escreve como:

$$L^2 f(A) = \frac{1}{2} \sum_{x \in A} \sum_{y \in \mathbb{Z}\ A:|x-y|=1} \left[f(A \setminus \{x\} \cup \{y\}) - f(A) \right], \quad A \in P_2.$$

(A diferença entre os dois sistemas é que no segundo os saltos sobre pontos já ocupados, são proibidos.)

Daqui por diante, o sistema com independência será designado por $(X_t^1,\ t \geq 0)$ e o sistema com exclusão, por $(X_t^2,\ t \geq 0)$.

O resultado conjecturado por Liggett, pode ser, então, formulado da seguinte maneira:

<u>TEOREMA</u>: Os dois sistemas definidos acima, satisfazem a propriedade:

$$\sum_{B \in \mathcal{P}_2} |\mathbb{P}_A(X_t^1 = B) - \mathbb{P}_A(X_t^2 = B)| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0,$$

para todo elemento A de $\mathcal{P}_2$.

A demonstração deste teorema será feita em tres partes. Na primeira apresenta-se o emparelhamento dos dois sistemas, no qual está baseada toda a demonstração. Os dois sistemas são emparelhados da maneira a coincidir ou a ter, ao menos, um ponto em comum, durante todo o desenrolar do tempo.

Na segunda parte, vai-se calcular a probabilidade de ocupação de certos intervalos estocásticos, no limite, quando $t \to \infty$.

Este cálculo é feito com a ajuda de uma adaptação do Teorema da Renovação de Feller.

Finalmente, na terceira parte, o limite que nos interessa será obtido como uma consequência do resultado da segunda parte.

*
* *
*

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

1) LEMA: Existe um processo markoviano de saltos $((X_t^1, X_t^2),\ t \geq 0)$, tendo como espaço de estados $\mathcal{P}_{1,2} \times \mathcal{P}_2$, tal que, suas projeções X_t^1 e X_t^2 são processos markovianos de saltos, tendo L^1 e L^2, respectivamente, como geradores infinitesimais. Além disso, este processo é estável com relação ao conjunto des elementos (A,B) de $\mathcal{P}_{1,2} \times \mathcal{P}_2$, tais que $A \cap B \neq \emptyset$.

Para demonstrar este lema, é suficiente apresentar o gerador L do processo em questão. Este gerador aplicado a uma função $f: \mathcal{P}_{1,2} \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se escreve como:

$$Lf(A,B) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ |x-y| = 1}} [f(\theta^1_{xy}(A), \theta^2_{xy}(B)) - f(A,B)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ |x-y| = 1}} [f(\pi_{xy}(A), B) - f(A,B)].$$

$$(A,B) \in \mathcal{P}_{1,2} \times \mathcal{P}_2,$$

sendo $\theta^1_{xy}(A) = A\backslash\{x\} \cup \{y\}$, se $|A| = 2$ e $x \in A$,

$\theta^1_{xy}(A) = \{x,y\}$, se $A = \{x\}$,

$\theta^1_{xy}(A) = A$, em caso contrário,

$\theta^2_{xy}(A) = A\backslash\{x\} \cup \{y\}$, se $x \in A$ e $y \notin A$,

$\theta^2_{xy}(A) = A$, em caso contrário,

e $\pi_{xy}(A) = \{x,y\}$, se $A = \{x\}$,

$\pi_{xy}(A) = A$, em caso contrário.

Uma vez o gerador apresentado, a verificação das propriedades do processo representando o emparelhamento é imediata.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: O fundamento teórico deste tipo de emparelhamento é a proposição elementar seguinte:

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Seja $(\gamma_t,\ t \geq 0)$ um processo markoviano de saltos de gerador L, num espaço enumerável E, e seja $u : E \longrightarrow E'$ uma aplicação sobrejetora, tal que, para todo $y' \in E'$, $\sum_{y:u(y)=y'} L(x,y)$ só depende de $u(x)$ $(x \in E)$.

Então $(u(\gamma_t),\ t \geq 0)$ é um processo markoviano de saltos em E', de gerador infinitesimal L' definido da seguinte maneira:

$$L'(x',y') = \sum_{y:u(y)=y'} L'(x,y),$$

sendo x um elemento qualquer de E, tal que, $u(x) = x'$.

2) Doravante X_t^1 e X_t^2 designarão sempre as coordenadas do processo introduzido na 1.ª parte desta demonstração.

Supondo $X_0^1 = X_0^2$, vai-se definir, por recorrência, os tempos de parada:

$$S_1 = \inf\ \{t > 0 / X_t^1 \neq X_t^2\} = \inf\ \{t > 0 / \left|X_t^1\right| = 1\}$$

$$T_1 = \inf \{t > S_1 / X_t^1 = X_t^2\}$$

.....

$$S_n = \inf \{t > T_{n-1} / X_t^1 \neq X_t^2\} = \inf \{t > T_n / |X_t^1| = 1\}$$

$$T_n = \inf \{t > S_n / X_t^1 = X_t^2\}$$

.....

Note-se que estes tempos de parada são quase certamente finitos, pois a diferença simétrica $X_t^1 \Delta X_t^2$ (com a convenção $\{a\} \Delta \{a,b\} = \{a,b\}$) se comporta como um processo de gerador L^1, até o momento em que ela se torna vazia, e é bem sabido que, em $\mathbb{Z}$, um passeio simples volta a origem quase certamente num tempo finito.

<u>LEMA</u>: Essa sequência de tempos de parada do processo emparelhado satisfaz a propriedade:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \text{Prob}\ (t \in [S_i, T_i[) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

onde Prob refere-se ao processo emparelhado de estado inicial (A,A) $(A \in P_2)$.

DEMONSTRAÇÃO: Note-se inicialmente que, nos instantes S_i, a distância entre os dois elementos do sistema $X_t^1 \Delta X_t^2$ é igual a 1. Em consequência, as variáveis aleatórias $S_{i+1}-S_i$, $i=1,2,\ldots$ são independentes e de mesma lei. Seja ν esta lei. Pela mesma razão, as variáveis aleatórias $T_i - S_i$ são independentes de S_i, independentes entre si e de mesma lei. Seja μ esta lei. A medida μ é também a lei do tempo de volta à origem de um passeio simples, em $\mathbb{Z}$, que parte de 1. Se designamos por D_i a distância (aleatória) entre os elementos de $X^1_{T_i}$, a lei de $S_{i+1} - T_i$, condicionalmente em D_i, é igual a μ^{*D_i}. Pode-se, então, escrever:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \text{Prob}(t \in [S_i, T_i[) = \int_0^t U_\nu(ds) f(t-s)$$

sendo $U_\nu = \sum_{i=1}^{+\infty} \nu^{*i}$ e $f(s) = \mu([s,+\infty[)$.

Como $\mathbb{E}(T_i - S_i) = \infty$, a integral da função f diverge e o Teorema da Renovação não pode ser aplicado diretamente no cálculo de

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t U_\nu(ds)\, f(t-s).$$

No entanto:

$$\int_{\infty}^{t} U_{\nu}(ds)\ f(t-s) = \int_{o}^{t} U_{\nu}(ds)\ f(t-s)\,1_{[0,h]}(t-s) + \int_{\infty}^{t} U_{\nu}(ds)\ f(t-s)\,1_{]h,+\infty[}(t-s)$$

sendo $1_{[0,h]}$ e $1_{]h,+\infty[}$ as funções indicadoras dos intervalos $[0,h]$ e $]h,+\infty[$, respectivamente.

Como a função $f(t-s)\,1_{[0,h]}(t-s)$ tem suporte compacto (no caso, o intervalo $[0,h]$), tem-se que:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{o}^{t} U_{\nu}(ds)\ f(t-s)\,1_{[0,h]}(t-s) = 0,$$

pelo Teorema de Renovação, posto que $\int_{\infty}^{\infty} t\nu(dt) = +\infty$.

Por outro lado:

$$\int_{o}^{t} U_{\nu}(ds)\ f(t-s)\,1_{]h,+\infty[}(t-s) \le \left(\sup_{s>h} \frac{f(s)}{g(s)}\right) \int_{o}^{t} U_{\nu}(ds)\ g(t-s)\,1_{]h,+\infty[}(t-s) \le$$

$$\le \left(\sup_{s>h} \frac{f(s)}{g(s)}\right) \int_{o}^{t} U_{\nu}(ds)\ g(t-s) \le \sup_{s>h} \frac{f(s)}{g(s)}, \text{onde } g(s) = \nu([s,+\infty[).$$

Logo, é suficiente observar que $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0$, para

encerrar a demonstração. Este último limite é uma consequên do fato que $\mathbb{E}(D_i) = \infty$ (cf. Spitzer [16], exemplo 8.6).

3) A asserção do teorema pode agora ser provada imediatamente. Com efeito, sendo (X_t^1, S_t^2) os dois sistemas emparelhados, tem-se:

$$\sum_{B\in\mathcal{P}_2} |\mathbb{P}_A(X_t^1=B) - \mathbb{P}_A(X_t^2=B)| = \sum_{B\in\mathcal{P}_2} |\mathrm{Prob}(X_t^1=B, t\in I) - \mathrm{Prob}(X_t^2=B, t\in I)|,$$

onde Prob refere-se ao processo emparelhado de estado inicial (A,A) e I designa o conjunto aleatório

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} [S_i, T_i[.$$

A razão desta igualdade é que $X_t^1 = X_t^2$, se $t \notin I$.

Reescrevendo-se, agora, cada um dos termos desta soma em forma de integral, obtém-se:

$$\sum_{B\in\mathcal{P}_2} |\int d\mathrm{Prob}\ 1_I(t) 1_B(X_t^1) - \int d\mathrm{Prob}\ 1_I(t) 1_B(X_t^2)| \leq$$

$$\leq \int d\mathrm{Prob}\ 1_I(t) \sum_{B\in\mathcal{P}_2} |1_B(X_t^1) - 1_B(X_t^2)| \leq 2\,\mathrm{Prob}(t\in I) \longrightarrow 0, \text{ quando}$$

$t \longrightarrow \infty$.

Fica, assim, demonstrado o teorema.

BIBLIOGRAFIA

[0] Spitzer, F. : Interaction of Markov processes, Advances in Math. 5, 246-290 (1970).

[1] Harris, T.E. : Contact interactions on a lattice, Ann. Probability 2, 969-988 (1974).

[2] Harris, T.E. : Graphical representations of associate processes, Séminaire sur les systèmes à une infinité de particules, Ecole Polytechnique, Paris (1975).

[3] Harris, T.E. : On a class of set-valued Markov processes, Ann. Probability 4, 175-194 (1976).

[4] Holley, R., Liggett, T. : Ergodic theorems for weakly interacting systems and the voter model, Ann. Probability 3, 43-663 (1975).

[5] Ito, K. : Poisson point processes attached to Markov processes, Proc. of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., vol. 3, 225-241 (1972), University of California Press (Berkeley).

[6] Neveu, J. : Processus ponctuels, Ecole d'Eté de Probabilités de St. Flour 1976, Lect. Notes in Math., Berlin Heildeberg New York, Springer 1977.

[7] Gray, L., Griffeath, D. : On the uniqueness and nonuniqueness of proximity processes. Preprint 1976.

[8] Holley, R., Strook, D. : Dual processes and their application to infinite interacting systems, Adv. Math., em fase de publicação.

[9] Schwartz, D. : Application of duality to a class of Markov processes, Ann. Probability, em fase de publicação.

[10] Spitzer, F. : Recurrent random walk of an infinite particle system, Trans. of the Amer. Math. Soc. 198, 191-199 (1974).

[11] Sullivan, W.G. : Markov processes for random fields, Comm. Dublin Inst. Adv. St. ser. A, No 23, 1-75 (1975).

[12] Harris, T.E. : Additive set-valued Markov processes and percolation methods. Preprint 1976.

[13] Feller, W. : An introduction to probability theory and its applications, vol. II, (1966), John Wiley, New York.

[14] Liggett, T.M. : A characterization of the invariant measures for an infinite particle system with interactions II, Trans. Amer. Math. Soc. 198, 201-213 (1974).

[15] Spitzer, F. : Recurrent random walk of an infinite particle systems, Trans. Amer. Math. Soc. 198, 191-199 (1974).

[16] Spitzer, F. : Principles of random walk (1964), Van Nostrand, Princeton.

[17] Liggett, T.M. : The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles, Ecole D'Eté de Probabilités de St. Flour 1976, Lect. Notes in Math., Berlin Heidelberg New York, Springer 1977.

Esta tese foi datilografada por Inês Fonseca.

ABSTRACT

The main subject of this work is the study of random time evolutions of infinite particle systems with interactions in a countable set S.

In the first part we consider a class of systems which is stable with respect to the notion of association. A version of these systems is constructed, having a property of strong coupling.

In the second part, we give a partial solution to a conjecture of Liggett. We prove that two simple random walks interacting by simple exclusion have the same asymptotical behavior as two independent random walks. The key of the proof is a coupling of the two systems in such a way that they either coincide or have one common point.

*
* *
*