O TEOREMA DE LIGGET SOBRE A EXISTÊNCIA DE SISTEMA MARKOVIANO COM INFINITAS PARTÍCULAS SUJEITAS A INTERAÇÃO

JORGE NESTOR LUCIANO GASCUE LOPEZ

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. CARLOS ALBERTO BARBOSA DANTAS

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1977 -

AGRADECIMENTOS

Para a elaboração deste trabalho, houve a necessidade de colaboração de diversas pessoas, na tradução, orientação e consultas.

Mas, não podemos deixar de exprimir às seguintes pessoas que nos acompanharam desde o início até o término do mesmo:

ao Professor Doutor Carlos Alberto Barbosa Dantas pelo apoio matemático e humano que me deu.

ao Professor José Galvão Leite e Ana Rosa Scherer pelo incentivo e tradução, deixando muitas vezes seus afazeres para nos atender.

ao Professor Jorge Lewowicz pelo apoio e confiança que me deu.

finalmente, ao Sr. João Baptita Esteves de Oliveira pelo serviço de datilografia.

São Paulo, dezembro de 1977

Jorge Nestor Luciano Gascue Lopez

PRÓLOGO

Este trabalho pretende mostrar alguns resultados sobre a existência de processos markovianos, em sistemas com infinitas partículas, sistemas estes surgidos em sua maioria de modelos físicos.

Como suporte do sistema, consideraremos um conjunto enumerável sobre o qual tomam posição as partículas. Estas interacionam entre si. A velocidade de transição de uma partícula estará determinada por sua posição e a configuração do sistema todo. A transição de uma posição à outra se realizará de acordo com uma função de transição dependente das posições envolvidas, assim como da configuração do sistema.

O problema que nos interessa estudar é que restrições devemos impor sobre as funções de transição e de velocidade para que o sistema todo execute um movimento markoviano.

Spitzer [9] descreveu vários modelos de interesse, obtendo alguns resultados sobre medidas invariantes supondo a existência do processo de Markov. Já Holley [3] conseguiu condições de suficiência que garantiram a existência em alguns modelos, no caso do conjunto suporte ser o conjunto dos inteiros relativos. Holley demonstrou a existência de um pro cesso a partir da escolha intuitiva de seu gerador infinitesimal.

Liggett [6], na mesma linha de ataque ao problema que Holley estabelece uma abordagem bastante geral, estudando em que condições o limite de uma sequência de operadores infinitesimais limitados é também um operador infinitesimal. Nos modelos estudados, o gerador infinitesimal intuitivo é mostrado como o limite de operadores que expressam parcialmente o processo.

Para o modelo de exclusão com mudança de velocidade, Liggett consegue condições de suficiência substancialmente mais gerais que as de Holley; além disso trabalha sobre um conjunto enumerável qualquer e não simplesmente sobre o conjunto dos inteiros. Liggett aborda também o modelo "lattice spin" obtendo bons resultados.

Este trabalho está dividido em dois capítulos. No primeiro dos quais (baseado fundamentalmente em [2] e [8]) nos dedicamos a desenvolver a teoria de semigrupos, principlamente no que diz respeito à obtenção de condições sob as quais um operador gera um semigrupo fortemente contínuo. Isso nos proporciona os instrumentos necessários para no segundo capítulo (baseado no artigo de Liggett [6]) demonstrar que os modelos de exclusão com mudança de velocidade,"latice spin" e interação com amplitude nula existem e são processos de Markov.

Para este último modelo, de interação com amplitude nula, usando a técnica desenvolvida por Liggett, obtivemos sem maiores dificuldades condições suficientes bastante mais gerais que as obtidas por Holley.

É importante notar que, embora existam várias for-mas de abordar o problema de existência, neste trabalho nós fizemos restrição ao emprego da forma adotada por Liggett.

Por último é conveniente destacar que, nos últimos anos, tem sido realizado importantes avanços no estudo dos processos markovianos em sistemas com infinitas partículas, especialmente sobre existência de medidas invariantes e convergência para medidas invariantes. Este trabalho não aborda estes aspectos e pode encontrar-se em [7] uma excelente exposição sobre o estado atual do tema.

- o -

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DA TEORIA DE SEMIGRUPOS

Seja E um espaço de Banach e $\{T_t\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores lineares limitados de E em E; dizemos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo se $\forall\, s \geq 0$, $\forall t \geq 0$:

$$T_{s+t} = T_s \circ T_t .$$

Um semigrupo se diz de contrações se $\| T_t \| \leq 1, \forall t \geq 0$, ou seja, $\| T_t f\| \leq \| f\|$, $\forall f \in E$; dizemos que um semigrupo de contrações é fortemente contínuo se

$$\lim_{t \downarrow 0} T_t f = f, \qquad \forall f \in E, \tag{1.1}$$

na Topologia induzida pela norma sobre E.

<u>TEOREMA 1.1</u> - Para todo $f \in E$, a função $\alpha : [0,\infty) \longrightarrow E$ definida por $\alpha(t) = T_t f$ é contínua.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Usando (1.1) temos:

$\|\alpha(t+\varepsilon) - \alpha(t)\| = \|T_{t+\varepsilon} f - T_t f$

$= T_t T_\varepsilon f - T_t f\|$

$= T_t (T_\varepsilon f - I) f \quad \leq \|(T_\varepsilon f - I) f\|$

$$\lim_{h\downarrow 0} \|T_{t+h}f - T_t f\| = \lim_{h\downarrow 0} \|T_t(T_h f - f)\| \leq \lim_{h\downarrow 0} \|T_h f - f\| = 0$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \|T_{t-h}f - T_t f\| = \lim_{h\downarrow 0} \|T_{t-h}(f - T_h f)\| \leq \lim_{h\downarrow 0} \|f - T_h f\| = 0. \quad \blacksquare$$

Definimos o operador infinitesimal A do semigrupo T_t como

$$Af = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}, \tag{1.2}$$

$\forall f \in E$ tal que este limite exista e denotaremos por $\mathcal{D}(A)$ o domínio de A. É imediato que A é um operador linear (não necessariamente limitado).

<u>TEOREMA 1.2</u> - Seja $\{T_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de contrações e A seu operador infinitesimal. Verificam-se as seguintes propriedades:

i) $\forall t \geq 0$, $T_t(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$ e $T_t Af = AT_t f$, $\forall f \in \mathcal{D}(A)$;

ii) $\forall f \in \mathcal{D}(A)$, a função $t \longrightarrow T_t f$ é derivável e

$$\frac{\partial}{\partial t} T_t f = AT_t f; \tag{1.4}$$

$$T_t f - f = \int_0^t T_s Af ds; \tag{1.5}$$

iii) $\mathcal{D}(A)$ é denso em E;

iv) A é um operador fechado, isto é, dada uma sequência $\{f_n\}_{n\in N}$ contida em $\mathcal{D}(A)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ e $Af_n \longrightarrow g$, então $f \in \mathcal{D}(A)$ e $Af = g$. (*)

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>

i) T_t é um operador contínuo pelo fato de ser uma contração. Como E é um espaço de Banach, segue-se que:

(*) Isto é equivalente a dizer que o gráfico do operador é fechado em E×E.

$$AT_tf = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T_hT_tf-T_tf}{h} = \lim_{h\downarrow 0} T_t\frac{T_hf-f}{h} = T_t(\lim_{h\downarrow 0} \frac{T_hf-f}{h}) = T_tAf.$$

ii) Temos que:

$$\frac{\partial^+}{\partial t} T_tf = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T_{t+h}f-T_tf}{h} = AT_tf.$$

Mostremos agora que se verifica $\frac{\partial^-}{\partial t} T_tf = AT_tf$.

Por (1.2) e (1.1)

$$\lim_{h\downarrow 0} \|\frac{T_tf-T_{t-h}f}{h} - AT_tf\| = \lim_{h\downarrow 0} \|T_{t-h} \frac{T_hf-f}{h} - T_tAf\| =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \|T_{t-h}[\frac{T_hf-f}{h} - T_hAf]\| \leq \lim_{h\downarrow 0} \|\frac{T_hf-f}{h} - T_hAf\| \leq$$

$$\leq \lim_{h\downarrow 0} \|\frac{T_hf-f}{h} - Af\| + \lim_{h\downarrow 0} \|Af-T_hAf\| = 0.$$

Integrando a função $\frac{\partial}{\partial s} T_sf$ no intervalo $[0,t]$ (ver apêndice A, A-4) e usando (1.4) e (1.3) segue-se que

$$T_tf-f = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} T_sfds = \int_0^t T_sAfds.$$

iii) Devemos mostrar que $\forall f\in E$ existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in N}$, contida em $\mathcal{D}(A)$, tal que $f_n \longrightarrow f$. Pelo Teorema 1.1 temos que T_tf é contínua como função de t e dado que em norma está majorado por $\|f\|$, por A-1 (Apêndice A), conluímos que é integrável em um intervalo finito. Definimos

$$g_n = \int_0^{1/n} T_tfdt, \qquad f_n = g_n/\frac{1}{n}.$$

Usando novamente o fato que T_tf é contínua, e de A-3 segue-se que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} \int_0^{1/n} T_t f dt = T_0 f = f.$$

Resta demonstrar que $f_n \in \mathcal{D}(A)$, o que é equivalente, a $g_n \in \mathcal{D}(A)$. Para isto, aplicando A-2, escrevamos:

$$T_h g_n - g_n = T_h \int_0^{1/n} T_t f dt - \int_0^{1/n} T_t f dt = \int_0^{1/n} T_{h+t} f dt - \int_0^{1/n} T_t f dt =$$

$$= \int_h^{h+1/n} T_t f dt - \int_0^{1/n} T_t f dt = \int_{1/n}^{h+1/n} T_t f dt - \int_0^{h} T_t f.$$

Usando A-3

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T_h g_n - g_n}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1/n}^{h+1/n} T_t f dt - \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T_t f dt = T_{1/n} f - f$$

e concluímos que $g_n \in \mathcal{D}(A)$.

iv) Por (1.5) temos:

$$T_t f_n - f_n = \int_0^t T_s A f_n ds. \tag{1.6}$$

Como $\|T_s A f_n - T_s g\| \le \|A f_n - g\|$, $\forall s \in [0,t]$ e $A f_n \longrightarrow g$ segue-se que $T_s A f_n \longrightarrow T_s g$ para $n \to \infty$ uniformemente no intervalo $[0,t]$. Fazendo $n \to \infty$ em (1.6) temos:

$$T_t f - f = \int_0^t T_s g ds.$$

Dividindo por t e fazendo $t \downarrow 0$ concluímos:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s g ds = g. \qquad \blacksquare$$

Seja $L(E,E)$ o espaço vetorial normado dos operadores lineares limitados de E em E munido da norma usual. Por ser E um espaço de Banach, $L(E,E)$ também o é.

Seja $A \in L(E,E)$. Definimos o operador exponencial como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \tag{1.7}$$

Dado que $\|A^n/n!\| \leq \|A\|^n/n!$ e que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n/n! = e^{\|A\|}$$

converge, então a série das normas converge e e^A está bem definido.

Vamos estabelecer agora algumas propriedades do operador exponencial.

<u>TEOREMA 1.3</u> - Se $A,B \in L(E,E)$, então,

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|} \tag{1.8}$$

$$e^{cI} = e^c \cdot I \tag{1.9}$$

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \tag{1.10}$$

quando A e B comutam;

$$\left\|\frac{e^{tA}-I}{t} - A\right\| \longrightarrow 0, \tag{1.11}$$

para $t \downarrow 0$.

Se A e B comutam e $\|e^{tA}\| \leq 1$, $\|e^{tB}\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$,

$$\|e^{tA}f - e^{tB}f\| \leq t\|Af-Bf\|, \qquad \forall t \geq 0,\ f \in E. \tag{1.12}$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - (1.8) e (1.9) são de verificação imediata; (1.10) segue de

$$e^{A}\cdot e^{B} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^{n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^{j} \frac{1}{(i-j)!} B^{i-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A+B)^{i} = e^{A+B}.$$

Para demonstrar (1.11) consideremos

$$\|e^{tA}-I-tA\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^{n}}{n!} - I-tA\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n}\|A\|^{n}}{n!} = e^{t\|A\|} - 1-t\|A\|;$$

dividindo por t e fazendo $t\downarrow 0$ temos:

$$\lim_{t\downarrow 0}\|\frac{e^{tA}-I}{t} - A\| \le \lim_{t\downarrow 0} \frac{e^{t\|A\|}-1}{t} - \|A\| = 0.$$

Dado que A e B comutam temos:

$$e^{tA}f-e^{tB}f = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}tA}\circ e^{\frac{n-k}{n}tB}\left(e^{\frac{t}{n}A} f-e^{\frac{t}{n}B} f\right).$$

Logo,

$$\|e^{tA}f-e^{tB}f\| \le \sum_{k=1}^{n} \|e^{\frac{k-1}{n}tA}\| \; \|e^{\frac{n-k}{n}tB}\| \; \|e^{\frac{t}{n}A} f-e^{\frac{t}{n}B} f\| \le$$

$$\le n\|e^{\frac{t}{n}A} f-e^{\frac{t}{n}B} f\| = t\|\frac{e^{\frac{t}{n}A} f-f}{t/n} - \frac{e^{\frac{t}{n}B} f-f}{t/n}\|,$$

fazendo $n\to\infty$ e aplicando (1.11) concluímos:

$$\|e^{tA}f-e^{tB}f\| \leq \lim_{n\to\infty} t\|\frac{e^{\frac{t}{n}A}f-f}{t/n}-\frac{e^{\frac{t}{n}B}f-f}{t/n}\| = t\|Af-Bf\| \quad \blacksquare$$

COMENTÁRIO - Se $\|e^{tA}\| \leq 1$, $\forall t\geq 0$, então, por (1.10) e observando que

$$\lim_{t\downarrow 0} e^{tA}f = \lim_{t\downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!} f = f$$

temos que, e^{tA} define um semigrupo fortemente contínuo de contrações que têm, por (1.11), como operador infinitesimal o próprio operador A.

TEOREMA 1.4 - Seja $\{T_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de contrações e A seu operador infinitesimal. Para todo $g\in E$ e $\lambda>0$, a equação

$$\lambda f-Af = g \tag{1.13}$$

têm uma única solução $f\in \mathcal{D}(A)$ dada por:

$$f = R_\lambda g = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_t g dt. \tag{1.14}$$

O operador R_λ, que chamaremos resolvente do operador A, definido em (1.14) é linear e

$$\|R_\lambda g\| \leq \frac{1}{\lambda}\|g\|. \tag{1.15}$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 1.1, $T_t g$ é contínua como função de t e a norma do integrando é majorada por $e^{-\lambda t}\|g\|$ que é integrável em $[0,\infty)$. Por A.1 concluímos que $e^{-\lambda t}T_t g$ é integrável e R_λ está bem definido. É imediato que R_λ é linear dado que T_t o é e (1.15) segue de

$$\|R_\lambda g\| = \|\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_t g dt\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T_t g dt\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|g\| dt = \frac{1}{\lambda}\|g\|.$$

Temos agora, usando A.2

$$T_hf = T_h\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_t g dt\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{t+h} g dt = \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}\, T_t g dt =$$

$$= e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}\, T_t g dt = e^{\lambda h}[f - \int_0^h e^{-\lambda t}\, T_t g dt]$$

e segue-se então que

$$Af = \lim_{h\downarrow 0}\frac{T_hf-f}{h} = \lim_{h\downarrow 0}\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\, f - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}\, T_t g dt =$$

$$= \lambda f - \lim_{h\downarrow 0} e^{\lambda h}\,\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}\, T_t g dt = \lambda f - g.$$

Logo, $f \in \mathcal{D}(A)$ e f é solução na equação (1.13). Só resta demonstrar a unicidade da solução (1.13). Suponhamos que existam duas soluções diferentes f_1 e f_2 da equação (1.13). Logo, $\lambda f_1 - \lambda f_2 - Af_1 + Af_2 = 0$ e tomando $h = f_1 - f_2$, segue-se que $h \neq 0$ e $\lambda h - Ah = 0$, ou seja $Ah = \lambda h$. Se considerarmos a função $e^{-\lambda t}\, T_t h$, usando (1.4) e (1.3) temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-\lambda t}\, T_t h = -\lambda e^{-\lambda t}\, T_t h + e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial t} T_t h = -\lambda e^{-\lambda t}\, T_t h + e^{-\lambda t}\, AT_t h =$$

$$= -\lambda e^{-\lambda t}\, T_t h + e^{-\lambda t}\, T_t A h = -\lambda e^{-\lambda t}\, T_t h + e^{-\lambda t}\, T_t \lambda h = 0.$$

Integrando $\frac{\partial}{\partial t} e^{-\lambda t}\, T_t h$ em $[0,t]$, por A.4 temos:

$$e^{-\lambda t}\, T_t h - h = 0 \Longrightarrow h = e^{-\lambda t}\, T_t h;$$

e como T_t é uma contração

$$\|h\| = \|e^{-\lambda t}\, T_t h\| \leq e^{-\lambda t}\|h\|,\ \forall t>0 \Longrightarrow \|h\| = 0,$$

o que é absurdo. ∎

COMENTÁRIO - Este teorema implica que o operador $\lambda I - A$ de $\mathcal{D}(A)$ em E é biunívoco e o seu inverso é o operador R_λ, que chamaremos resolvente do operador A, ou indistintamente, do semigrupo T_t.

LEMA 1.5 - (Dynkin, Ref. [2], Lema 1.2, pág.27) - Seja u(t) uma função contínua de R_t em E tal que $\forall\lambda>0$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, u(t)dt = 0. \tag{1.16}$$

Então, $u(t) = 0$, $\forall t\geq 0$.

TEOREMA 1.6 - Se T_t e T_t' são semigrupos fortemente contínuos de contrações tais que seus operadores infinitesimais coincidem, então, os semigrupos também coincidem.

DEMONSTRAÇÃO - Dado que o operador infinitesimal é o mesmo para os dois semigrupos, pelo Teorema 1.4, o resolvente também o é, ou seja $\forall\lambda>0$, $\forall g\in E$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_t g dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_t' g dt \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, [T_t g - T_t' g]dt = 0.$$

Como $T_t g - T_t' g$ é uma função contínua de R_t em E, pelo Lema 1.5, temos que $T_t g - T_t' g = 0$, $\forall t\geq 0$, $\forall g\in E$ ∎

TEOREMA 1.7 (Hille-Yoshida) - Sejam E um espaço de Banach e A um operador linear de domínio $\mathcal{D}(A)$. O operador A será o operador infinitesimal de algum semigrupo fortemente contínuo de contrações T_t definido em E, se, e somente se, as seguintes condições se verificarem:

i) $\mathcal{D}(A)$ é denso em E;

ii) $\forall g\in E$, $\forall\lambda>0$ a equação $\lambda f - Af = g$ têm solução $f\in\mathcal{D}(A)$;

iii) $\|\lambda f - Af\| \geq \|\lambda f\|$, $\forall f\in\mathcal{D}(A)$, $\forall\lambda>0$.

O semigrupo T_t é único.

DEMONSTRAÇÃO - Suponhamos que A seja o operador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$. A condição i) segue da afirmação iii) do Teorema 1.2. O Teorema 1.4 nos assegura a condição ii) assim como da afirmação (1.15) do mesmo teorema segue-se iii).

Suponhamos agora que se verificam as condições i), ii) e iii). Para demonstrar a existência de T_t construiremos uma família de operadores lineares limitados $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ que aproxima A. Mostraremos que $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ geram semigrupos $\{T_t^\lambda\}_{t\geq 0}$ que, para $\lambda\to\infty$, convergem para um semigrupo T_t. Finalmente demonstraremos que este semigrupo tem como operador infinitesimal o próprio operador A. Se $\lambda f - Af = 0$ a condição iii) implica que $f = 0$ e a equação $\lambda f - Af = g$ tem uma única solução, uma vez que, se f_1 e f_2 forem soluções então

$$\lambda f_1 - \lambda f_2 - Af_1 + Af_2 = \lambda(f_1 - f_2) - A(f_1 - f_2) = 0 \Longrightarrow f_1 - f_2 = 0.$$

Denotaremos por $R_\lambda g$ a solução da equação em ii). É imediato que o operador R_λ é linear e de iii) segue-se que:

$$\|g\| = \|\lambda f - Af\| \geq \|\lambda f\| = \lambda \|R_\lambda g\|,$$

ou seja,

$$\|R_\lambda g\| \leq \frac{1}{\lambda} \|g\| \tag{2.1}$$

e R_λ é um operador limitado, satisfazendo

$$\lambda R_\lambda g - AR_\lambda g = g, \qquad \forall g \in E. \tag{2.2}$$

Aplicando R_λ na igualdade (2.2) e fazendo $R_\lambda g = f$ obtemos:

$$\lambda R_\lambda f - R_\lambda Af = f, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A). \qquad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3) segue-se que

$$R_\lambda Af = AR_\lambda f, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A) \qquad (2.4)$$

e por (2.2) e (2.4) temos

$$\lambda R_\lambda R_\mu g = AR_\lambda R_\mu g + R_\mu g = R_\lambda AR_\mu g + R_\mu g = R_\lambda[\mu R_\mu g - g] + R_\mu g =$$

$$= \mu R_\lambda R_\mu g - R_\lambda g + R_\mu g \Longrightarrow (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu g = R_\mu - R_\lambda.$$

Portanto, os operadores R_λ e R_μ comutam, pois,

$$R_\lambda R_\mu g = \frac{R_\mu g - R_\lambda g}{\lambda-\mu} = \frac{R_\lambda g - R_\mu g}{\mu-\lambda} = R_\mu R_\lambda g.$$

Usando agora (2.3) e (2.1) segue-se que:

$$\|\lambda R_\lambda f - f\| = \|R_\lambda Af\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Af\|, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

Considerando $g \in E$ é possível escolher $f \in \mathcal{D}(A)$ tal que $\|g-f\| < \varepsilon/3$. Tomando $\lambda > 3\|Af\|/\varepsilon$ na desigualdade acima, temos:

$$\|\lambda R_\lambda g - g\| \leq \|\lambda R_\lambda g - \lambda R_\lambda f\| + \|\lambda R_\lambda f - f\| + \|f-g\| \leq$$

$$\leq \lambda\|R_\lambda\| \, \|g-f\| + \frac{1}{\lambda}\|Af\| + \|g-f\| \leq 2\|g-f\| + \varepsilon/3 < \varepsilon$$

e podemos estabelecer

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda g = g, \qquad \forall g \in E. \qquad (2.5)$$

Seja $A_\lambda = \lambda AR_\lambda$; por (2.2) $\lambda AR_\lambda = [\lambda R_\lambda - I]$ do que segue

$$\|A_\lambda f\| = \|\lambda[\lambda R_\lambda - I]f\| \leq \lambda[\|\lambda R_\lambda f\| + \|f\|] \leq 2\lambda\|f\|, \qquad \forall f \in E,$$

ou seja, A_λ é um operador limitado. Usando de que $R_\lambda g \in \mathcal{D}(A)$, $\forall g \in E$, de (2.4) e da comutatividade de R_λ e R_μ segue-se que:

$$A_\lambda A_\mu = \lambda AR_\lambda \mu AR_\mu = \lambda\mu A^2 R_\lambda R_\mu = \lambda\mu A^2 R_\mu R_\lambda = \lambda\mu R_\mu AR_\mu = A_\mu A_\lambda$$

e concluímos que A_λ e A_μ também comutam.

Como A e R_λ comutam sobre $\mathcal{D}(A)$, por (2.5) temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda f = Af, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A). \tag{2.6}$$

Seja o semigrupo $T_t^\lambda = e^{tA_\lambda}$. De (1.10) e (1.9) segue-se que:

$$T_t^\lambda = e^{t\lambda^2 R_\lambda - t\lambda I} = e^{-t\lambda I} \; e^{t\lambda^2 R_\lambda} = e^{-t\lambda} \; e^{t\lambda^2 R_\lambda} \tag{2.7}$$

e temos:

$$\|T_t^\lambda\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R_\lambda}\| \leq e^{-t\lambda} e^{\lambda t\|\lambda R_\lambda\|} \leq e^{-t\lambda} \; e^{t\lambda} = 1. \tag{2.8}$$

De (2.8), (2.1) e do comentário que segue o Teorema 1.3 concluímos que $\{T_t^\lambda\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Dado que $\|T_t^\lambda\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$ e A_λ e A_μ comutam podemos aplicar (1.12) e temos:

$$\|T_t^\lambda f - T_t^\mu f\| \leq t\|A_\lambda f - A_\mu f\|.$$

Como $\forall f \in \mathcal{D}(A)$, $A_\lambda f$ tem limite para $\lambda \to \infty$ deduz-se que $\forall t \in \mathcal{D}(A)$ o $\lim\limits_{\lambda\to\infty} T_t^\lambda$ existe e, além disso, a convergência é uniforme em relação a t sobre todo intervalo finito. Seja T_t este limite.

Da passagem ao limite em (2.8) segue-se que:

$$\|T_t f\| \leq \|f\|, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(A) \qquad (2.9)$$

Como T_t é um operador limitado definido em um subconjunto denso de E, ele pode ser prolongado de modo único a todo E. É claro que (2.9) ainda continua sendo válida para a extensão e verifica-se:

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_t^\lambda f = T_t f, \qquad \forall f \in E,$$

uma vez que, tomando uma sequência $\{f_n\}_{n\in N}$ contida em $\mathcal{D}(A)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ temos:

$$\|T_t^\lambda f - T_t f\| \leq \|T_t^\lambda f - T_t^\lambda f_n\| + \|T_t^\lambda f_n - T_t f_n\| + \|T_t f_n - T_t f\| \leq$$

$$\leq 2\|f-f_n\| + \|T_t^\lambda f_n - T_t f_n\|$$

onde, é possível fazer a última expressão tão pequena quanto queiramos, pois como $f_n \in \mathcal{D}(A)$, $T_t^\lambda f_n \longrightarrow T_t f_n$ para $\lambda \to \infty$.

Como $T_s^\lambda \circ T_t^\lambda f = T_{s+t}^\lambda f$ segue-se, passando ao limite, que $T_s \circ T_t f = T_{s+t} f$ e então $\{T_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Temos que mostrar agora que T_t é fortemente contínuo e para isso escrevamos

$$\|T_t f - f\| \leq \|T_t f - T_t^\lambda f\| + \|T_t^\lambda f - f\|.$$

Dado que $T_t^\lambda f$ converge para $T_t f$ uniformemente em todo intervalo finito podemos escolher λ suficientemente grande tal que $\|T_t f - T_t^\lambda f\| < \varepsilon/2$, $\forall t \in [0,1]$ e como T_t^λ é um semigrupo fortemente contínuo existe $\delta > 0$, tal que $\forall t < \delta$, $\|T_t^\lambda f - f\| < \varepsilon/2$. Portanto, $\forall t < \delta$, $\|T_t f - f\| < \varepsilon$.

Seja A_1 o operador infinitesimal do semigrupo T_t; temos que provar que $A_1 = A$. Como A_λ é o operador infinitesimal de T_t^λ, por (1.5)

$$T_t^\lambda f - f = \int_0^t T_s^\lambda A_\lambda f \, ds. \qquad (2.10)$$

Para toda $f \in \mathcal{D}(A)$ temos:

$$\|T_s Af - T_s^{\lambda} A_{\lambda} f\| \leq \|T_s Af - T_s^{\lambda} Af\| + \|T_s^{\lambda} Af - T_s^{\lambda} A_{\lambda} f\| \leq \|T_s Af - T_s^{\lambda} Af\| + \|Af - A_{\lambda} f\| .$$

e como para $\lambda \to \infty$ T_s^{λ} converge uniformemente em relação a s sobre todo intervalo finito e de (2.6) $A_{\lambda} f \longrightarrow Af$, temos que $T_s^{\lambda} A_{\lambda} f$ converge a $T_s Af$ uniformemente em $[0,t]$. Fazendo $\lambda \to \infty$ em (2.10), podemos tomar o limite dentro da integral e portanto,

$$T_t f - f = \int_0^t T_s Afds.$$

Da continuidade de T_s e de A.3 (Apêndice 3) segue-se que:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T_s Afds = Af$$

e $A_1 = A$ sobre $\mathcal{D}(A)$. Resta demonstrar que $\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(A)$ e para isto seja $f \in \mathcal{D}(A_1)$ e $g = \lambda f - A_1 f$. Pela condição ii) existe $\bar{f} \in \mathcal{D}(A)$ tal que $\lambda\bar{f} - A\bar{f} = g$; mas, como $A_1 = A$ sobre $\mathcal{D}(A)$ então também verifica-se $\lambda\bar{f} - A_1\bar{f} = g$ e como pelo Teorema 1.4 a equação em ii) tem uma única solução segue-se que $f = \bar{f}$ e $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A)$.

É imediato, a partir do Teorema 1.6, a unicidade de $\{T_t\}_{t \geq 0}$. ∎

Dizemos que um subconjunto E^+ de um espaço E é um cone se para qualquer dois elementos $f_1, f_2 \in E^+$ e constantes $c_1, c_2 \geq 0$, verifica-se que $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in E^+$.

<u>COROLÁRIO 1.8</u> - Seja E^+ um cone fechado de E. Se $\lambda f - Af \in E^+$ implica que $f \in E^+$, então o semigrupo T_t é invariante em E^+, ou seja, se $f \in E^+$, $T_t f \in E^+$, $\forall t \geq 0$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Dado que o operador R_{λ} é o inverso de $\lambda I - A$,

dizer que $(\lambda I-A)f\in E^+$ implica $f\in E^+$ equivale a dizer que

$$R_\lambda(E^+) \subseteq E^+.$$

Como $T_t^\lambda = e^{-\lambda t}\, e^{t\lambda^2 R_\lambda}$ por (2.7), segue-se que T_t^λ é invariante em E^+, pois,

$$e^{t\lambda^2 R_\lambda} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(t\lambda^2)^i}{i!} (R_\lambda)^i f$$

onde, a reduzida da série está em E^+ por ser E^+ um cone e, como é fechado, então o limite também está em E^+.

A afirmação do colorário segue dos fatos E^+ é fechado e $T_t f$ é o limite de $T_t^\lambda f$. ∎

COMENTÁRIO - Se E é o espaço das funções contínuas o valores reais sobre um espaço K, com a norma do supremo, e E^+ é o conjunto das funções não negativas (é imediato que é um cone fechado), o corolário afirma que se λf-Af não negativa implica que f também o é, então, o semigrupo T_t leva funções não negativas em funções não negativas, ou seja, T_t é um operador positivo.

Seja E um espaço de Banach e $<\cdot,\cdot>$ uma aplicação de E×E em R. Dizemos que $<\cdot,\cdot>$ é um semiproduto interno se

$$\forall y\in E \text{ a função } x \longrightarrow <x,y> \text{ é linear;} \tag{3.1}$$

$$<x,x> = \|x\|^2; \tag{3.2}$$

$$|<x,y>| \le \|x\|\,\|y\|. \tag{3.3}$$

LEMA 1.9 - A aplicação $\phi_y(x) = <x,y>$ é limitada e de norma igual a $\|y\|$.

DEMONSTRAÇÃO - Por (3.3) segue-se que:

$$\frac{|\phi_y(x)|}{\|x\|} = \frac{|<x,y>|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|\ \|y\|}{\|x\|} = \|y\|, \qquad \forall x \in E,$$

logo, ϕ_y é limitado e $\|\phi_y\| \leq \|y\|$. Além disso, de (3.2) temos:

$$\frac{|\phi_y(y)|}{\|y\|} = \frac{|<y,y>|}{\|y\|} = \|y\|$$

e, portanto, $\|\phi_y\| = \|y\|$. ∎

COMENTÁRIO - Um semiproduto interno associa para cada $y \in E$ uma aplicação linear limitada de norma $\|y\|$ e tal que $\phi_y(y) = \|y\|^2$. Por outro lado, se para cada $y \in E$ tivermos associada uma aplicação ϕ_y nessas condições, então a família $\{\phi_y\}_{y \in E}$ define um semiproduto interno através de:

$$<x,y> = \phi_y(x) \tag{3.4}$$

uma vez que (3.1) segue da linearidade de ϕ_y, $<x,x> = \phi_x(x) = \|x\|^2$ e (3.3) segue de

$$|<x,y>| = |\phi_y(x)| \leq \|\phi_y\|\ \|x\| = \|y\|\ \|x\|.$$

Denotaremos por $W(y)$ o conjunto das aplicações lineares limitadas tal que a norma é igual a $\|y\|$ e o valor que tomam em y é $\|y\|^2$.

LEMA 1.10 - Dado um espaço de Banach existe nele pelo menos um semiproduto interno compatível com sua norma.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo comentário acima basta demonstrar que $\forall y \in E$ é possível definir uma aplicação ϕ_y tal que $\phi_y \in W(y)$.

Seja E_y o subespaço gerado por y ($E_y = \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$); E_y é um subespaço fechado de E e definamos

$$\phi_y^0(y) = \|y\|^2, \ \phi_y^0(\lambda y) = \lambda\phi_y^0(y) = \lambda\|y\|^2.$$

É imediato que ϕ_y^0 é uma aplicação linear limitada sobre E_y e $\|\phi_y^0\| = \|y\|$. Pelo Teorema de Hahm-Banach segue-se que existe uma aplicação ϕ_y linear limitada que prolonga ϕ_y^0 a E e que $\|\phi_y\| = \|y\|$. ∎

LEMA 1.11 - Dada uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in N}$ de aplicações lineares limitadas de E em R tal que

$$\sup_n \|\phi_n\| \le M < \infty,$$

existe uma subsequência ϕ_{n_k} que converge fracamente para uma aplicação linear ϕ (ou seja, $\phi_{n_k}(x) \longrightarrow \phi(x)$, $\forall x\in E$) e

$$\|\phi\| \le \lim\sup \|\phi_{n_k}\|.$$

DEMONSTRAÇÃO - $|\phi_n(x)| \le M\|x\|$, $\forall n\in N$. Consideremos para cada $x\in E$ o espaço $Z_x = [-M\|x\|, M\|x\|]$ com a topologia usual e seja Z o produto cartesiano de $\{Z_x\}_{x\in E}$ com a topologia produto; Z_x é compacto e pelo Teorema de Tijonov Z também o é.

Para cada ϕ_n fica associado um único ponto $z^n \in Z$, cuja coordenada z_x^n em Z_x é dado por $z_x^n = \phi_n(x)$. Como Z é um espaço compacto, a sequência $\{z^n\}_{n\in N}$ tem alguma subsequência convergente. Seja z o seu limite. Como $z^{n_k} \longrightarrow z$ na topologia produto, então converge coordenada a coordenada, ou seja, $z_x^{n_k} \longrightarrow z_x$, $\forall x\in E$. Definindo $\phi(x) = z_x$, verifica-se que

$$\phi_{n_k}(x) \longrightarrow \phi(x), \ \forall x\in E.$$

Do Teorema de Banach-Steinhans segue a afirmação do Lema. ∎

Dizemos que um operador linear A de $\mathcal{D}(A)\subset E$ em E é um operador dissipativo se existe um semiproduto interno em E tal que $\forall x\in\mathcal{D}(A)$, $\langle Ax,x\rangle \le 0$.

TEOREMA 1.12 - Um operador A é dissipativo se e somente se:

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A),\ \lambda > 0. \tag{3.5}$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja A dissipativo e $<\cdot,\cdot>$ o semiproduto interno tal que $<Ax,x> \leq 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$. Por (3.2), (3.1) e (3.3):

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda <x,x> = <\lambda x,x> \leq <\lambda x,x> - <Ax,x> =$$

$$= <\lambda x - Ax, x> \leq \|\lambda x - Ax\| \ \|x\| \Longrightarrow \lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|.$$

Suponhamos agora que (3.5) se verifica. Para demonstrar que A é dissipativo basta demonstrar que podemos achar uma aplicação $\psi_x \in W(x)$ tal que $\psi_x(Ax) \leq 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Fixemos $x \in \mathcal{D}(A)$. Seja $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ uma sequência tal que $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \longrightarrow \infty$ e $\lambda_n x - Ax \neq 0$, $\forall n \in N$. Para cada λ_n podemos escolher uma aplicação $\phi_n \in W(\lambda_n x - Ax)$ (ver demonstração do Lema 1.10). Fazendo $\psi_n = \phi_n / \|\phi_n\|$ temos $\|\psi_n\| = 1$ e do Lema 1.11 segue-se que existe uma subsequência $\{\psi_{n_k}\}_{k\in N}$ que converge fracamente para uma aplicação linear limitada ψ tal que

$$\|\psi\| \leq \liminf \|\psi_{n_k}\| = 1.$$

Temos, por outro lado,

$$\psi(x) = \|x\| \tag{3.6}$$

pois

$$\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_{n_k}\left(x - \frac{1}{\lambda_{n_k}} Ax\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n_k}} \frac{\phi_{n_k}(\lambda_{n_k} x - Ax)}{\|\phi_{n_k}\|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n_k}} \frac{\|\lambda_{n_k} x - Ax\|^2}{\|\lambda_{n_k} x - Ax\|} = \lim_{k\to\infty} \left\|x - \frac{1}{\lambda_{n_k}} Ax\right\| = \|x\|.$$

Portanto, concluímos que $\|\psi\| = 1$.

De (3.5) e $\|\psi_n\| = 1$, $\forall n \in N$ segue-se que:

$$\lambda_n \|x\| \leq \|\lambda_n x - Ax\| = \psi_n(\lambda_n x - Ax) = \lambda_n \psi_n(x) - \psi_n(Ax) \leq$$

$$\leq \lambda_n \|x\| - \psi_n(Ax) \Longrightarrow \psi_n(Ax) \leq 0, \ \forall n \in N$$

e, portanto,

$$\psi(Ax) = \lim_{k \to \infty} \psi_{n_k}(Ax) \leq 0. \qquad (3.7)$$

Definindo $\psi_x = \|x\|\psi$ temos que ψ_x é uma aplicação linear limitada de norma $\|\psi_x\| = \|x\| \ \|\psi\| = \|x\|$ e por (3.6) $\psi_x(x) = \|x\|^2$, ou seja, $\psi_x \in W(x)$ e por (3.7) verifica-se que

$$\psi_x(Ax) \leq 0. \qquad \blacksquare$$

COROLÁRIO 1.13 - Se A é dissipativo, para todo $\lambda > 0$, o operador $\lambda I - A$ é injetivo em $\mathcal{D}(A)$ e o seu inverso é um operador limitado cuja norma é menor ou igual a λ^{-1}.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $x, y \in \mathcal{D}(A)$, $x \neq y$. Pelo teorema anterior

$$\|(\lambda I - A)x - (\lambda I - A)y\| = \|(\lambda I - A)(x-y)\| \geq \lambda\|x-y\| > 0.$$

Seja $w \in \mathcal{D}((\lambda I - A)^{-1})$, ou seja $\exists x \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(\lambda I - A)x = w$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1} w\| = \|x\| = \frac{1}{\lambda}\|\lambda x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|\lambda x - Ax\| = \frac{1}{\lambda}\|w\| \qquad \blacksquare$$

LEMA 1.14 - Dado um operador B, linear e limitado, de E em E tal que $\|B\| < 1$, o operador I-B tem inverso e este é dado por

$$(I-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Notemos que tanto I-B como $(I-B)^{-1}$ são operadores biunívocos de E em E.

DEMONSTRAÇÃO - Como $\|B\| < 1$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n$$

converge absolutamente, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = 1/1 - \|B\|.$$

Concluímos então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n$$

converge e $(I-B)^{-1}$ está bem definido.

Como $\|B^N\| \longrightarrow 0$, para $N \longrightarrow \infty$

$$(I-B)\circ \sum_{n=0}^{\infty} B^n f = \lim_{N\to\infty} (I-B)\circ \sum_{n=0}^{N-1} B^n f = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} B^n f - \sum_{n=1}^{N} B^n f\right) = \lim_{N\to\infty} f - B^N f = f.$$

De maneira análoga demonstra-se que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)(I-B) f = f. \qquad \square$$

TEOREMA 1.15 (Lumer-Phillips) - Seja A um operador linear de E em E de domínio $\mathcal{D}(A)$. O operador A é o operador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações se, e somente se,

i) $\mathcal{D}(A)$ é denso em E;

ii) $\exists \lambda_0 > 0$ tal que $(\lambda_0 I - A)(\mathcal{D}(A)) = E$;

iii) A é dissipativo.

O semigrupo é único.

DEMONSTRAÇÃO - É claro que se A é o operador infinitesimal de algum semigrupo as condições i) ii) e iii) se verificam, pois estas são mais fracas que as condições do Teorema de Hille-Yoshida.

O Teorema 1.12 nos diz que a propriedade de ser dissipativo é equivalente a condição iii) do Teorema de Hille-Yoshida. A condição ii), em outras palavras, nos diz que a equação $\lambda_0 f - Af = g$ tem solução para todo $g \in E$. Logo, para demonstrar que as condições i), ii) e iii) implicam na existência do semigrupo é suficiente mostrar que:

$$(\lambda I - A)(\mathcal{D}(A)) = E, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Pelo Corolário 1.13 existe $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ e fazendo $R_{\lambda_0} = (\lambda_0 I - A)^{-1}$ temos que R_{λ_0} está definido em todo E e $\|R_{\lambda_0}\| \leq 1/\lambda_0$. Portanto,

$$\|(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\| \leq |\lambda-\lambda_0|/\lambda_0 < 1, \qquad \forall \lambda \in (0, 2\lambda_0).$$

Pelo Lema 1.14 segue-se que $I - (\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0} = I + (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}$ vai de E sobre E e tem inverso. Definamos:

$$R_\lambda = R_{\lambda_0}[I + (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}, \qquad \forall \lambda \in (0, 2\lambda_0). \qquad (4.1)$$

Mostremos que $(\lambda I - A) \circ R_\lambda = I$ e portanto,

$$(\lambda I - A)(\mathcal{D}(A)) = E.$$

Como, por hipótese, R_{λ_0} vai de E em $\mathcal{D}(A)$, então

$$(\lambda I - A)R_\lambda$$

está definido, $\forall f \in E$ e:

$$(\lambda I-A)R_\lambda f = \lambda R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f-AR_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f =$$

$$= (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f+\lambda_0 R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f-AR_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f=$$

$$= (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f + (\lambda_0 I-A)R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f =$$

$$= (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}[I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f + [I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f =$$

$$= [(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}+I][I+(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]^{-1}f = f.$$

Na realidade, R_λ é o resolvente em λ do operador A.

Extendendo por indução a definição de R_λ concluímos que $\forall\lambda > 0$, $(\lambda I-A)(\mathcal{D}(A)) = E$. ∎

COROLÁRIO 1.16 - Um operador linear A limitado e dissipativo, definido em todo E é o operador infinitesimal de um único semigrupo fortemente contínuo de contrações.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese A é dissipativo e definido em todo E, então, pelo Teorema anterior resta demonstrar que, para algum $\lambda_0 > 0$, $(\lambda_0 I-A)(E) = E$ o que é equivalente a $(I-A/\lambda_0)(E) = E$.

Seja $\|A\| = M$. Tomando $\lambda_0 = 2M$ a norma de A/λ_0 é $1/2$ e pelo Lema 1.14 segue a afirmação. ∎

Dizemos que um operador linear é prefechado se o fecho do seu gráfico é o gráfico de um operador linear fechado.

LEMA 1.17 - Um operador linear A é prefechado se, e somente, se

$$x_n \longrightarrow 0 \quad e \quad Ax_n \longrightarrow y \quad \text{implicam } y = 0. \qquad (5.1)$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja A prefechado e $\bar{A}$ seu fecho. Como $\bar{A}$ é fechado segue-se que:

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \bar{A}n_x = \bar{A}(\lim_{n\to\infty} x_n) = \bar{A}0 = 0.$$

Suponhamos agora, que se verifica (5.1). Seja $G(A)\subset E\times E$ o gráfico de A; $(x,y)\in\overline{G(A)}$ implica que existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que $x_n \longrightarrow x$ e $Ax_n \longrightarrow y$.

Mostremos que $\overline{G(A)}$ é o gráfico de um operador. Sejam (x,y'), $(x,y'')\in\overline{G(A)}$, então existem sequências $\{x'_n\}_{n\in N}$ e $\{x''_n\}_{n\in N}$ tais que

$$\begin{aligned} x'_n &\longrightarrow x, \quad Ax'_n \longrightarrow y' \\ x''_n &\longrightarrow x, \quad Ax''_n \longrightarrow y'' \end{aligned} \qquad (5.2)$$

e, portanto,

$$x'_n - x''_n \longrightarrow 0, \quad A(x'_n - x''_n) = Ax'_n - Ax''_n \longrightarrow y' - y'' \qquad (5.3)$$

e de (5.1) concluímos que $y' = y''$.

Seja $\bar{A}$ o operador cujo gráfico é $\overline{G(A)}$; da linearidade de A segue, imediatamente, que $\bar{A}$ também é linear e é fechado desde que seu gráfico é fechado por definição. □

TEOREMA 1.18 - Se A é um operador dissipativo de domínio denso em E, então A é prefechado e seu fecho $\bar{A}$ também é dissipativo.

DEMONSTRAÇÃO - Raciocinando por absurdo, suponhamos que A não é préfechado, pelo Lema 1.17 existe então uma sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ tal que $x_n \longrightarrow 0$ e $Ax_n \longrightarrow y \neq 0$ para $n\to\infty$. Podemos supor que $\|y\| = 1$ e como $\mathcal{D}(A)$ é denso em E (e é um subespaço), é possível escolher $u\in\mathcal{D}(A)$ tal que $\|u-y\| < 1/2$ e $\|u\| = 1$.

Seja $<\cdot,\cdot>$ um semiproduto interno tal que $<Ax,x> = \phi_x(Ax) \leq 0$, $\forall x\in\mathcal{D}(A)$. Tomemos $c > 0$, $u+cx_n \longrightarrow u$ para $n\to\infty$ e portanto

$$\sup_n \|\phi_{u+cx_n}\| < \infty \; (\phi_{u+cx_n} \in W(u+cx_n) \text{ e } \|\phi_{u+cx_n}\| = \|u+cx_n\|).$$

Pelo Lema 1.11 podemos extrair uma subsequência da sequência $\{\phi_{u+cx_n}\}_{n\in N}$, que converge fracamente para um operador linear ϕ tal que:

$$\|\phi\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_{u+cx_{n_k}}\| = \liminf_{n\to\infty} \|u+cx_{n_k}\| = \|u\|$$

Como por outro lado

$$\phi(u) = \lim_{k\to\infty} \phi_{u+cx_{n_k}}(u+cx_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \|u+cx_{n_k}\|^2 = \|u\|^2$$

temos $\|\phi\| = \|u\| = 1$.

$$\phi(y) = \phi(u) + \phi(y-u) = \|u\|^2 - \phi(u-y) \geq 1 - \|\phi\| \, \|u-y\| = 1 - \|u-y\|$$

e pela escolha de u, podemos estabelecer

$$\phi(y) \geq 1/2 \qquad (5.4)$$

Além disto, $A(u+cx_n) = Au + cAx_n \longrightarrow Au+cy$ do que se segue:

$$\phi(Au+cy) = \lim_{k\to\infty} \phi_{u+cx_{n_k}}(A(u+cx_{n_k})) \leq 0$$

ou seja, $\phi(Au) \leq -c\phi(y)$. De (5.4) concluímos então que $\phi(Au) \leq -c/2$ o que é um absurdo se escolhermos $c > 2\|Au\|$ uma vez que ficaria

$$\phi(Au) < -\|Au\| \Longrightarrow |\phi(Au)| > \|Au\| = \|\phi\| \, \|Au\|.$$

Temos então que A é préfechado, seja $\bar{A}$ seu fecho. Para mostrar que $\bar{A}$ é dissipativo bastará determinar $\forall x \in \mathcal{D}(\bar{A})$ uma aplicação $\phi_x \in W(x)$ tal que $\phi_x(Ax) \leq 0$. Como $\bar{A}$ é uma extensão de A e este é dissipativo, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ podemos escolher uma aplicação ϕ_x nessas condições.

Seja $x \in \mathcal{D}(\bar{A})$, $x \notin \mathcal{D}(A)$. Escolhemos uma sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ contida em $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ e $Ax_n \longrightarrow \bar{A}x$. Com um raciocínio análogo ao empregado na primeira parte da demonstração, temos que existe uma subsequência

$$\{\phi_{x_{n_k}}\}_{k\in N} \text{ de } \{\phi_{x_n}\}_{n\in N}$$

que converge fracamente para uma aplicação ϕ_x que verifica:

$$\|\phi_x\| = \|x\|, \ \phi_x(x) = \|x\|^2 \quad \text{e} \quad \phi_x(\bar{A}x) = \lim_{k\to\infty} \phi_{x_{n_k}}(Ax_{n_k}) \leq 0.$$

Para $x \notin \mathcal{D}(\bar{A})$ escolhemos uma aplicação $\phi_x \in W(x)$ qualquer.

Pelo comentário que segue ao Lema 1.9 concluímos que esta família de aplicações define um semiproduto interno; sobre o qual $\bar{A}$ é dissipativo. ∎

<u>LEMA 1.19</u> - Seja A um operador fechado e dissipativo de domínio $\mathcal{D}(A)$. Então, para todo $\lambda > 0$ $(\lambda I-A)(\mathcal{D}(A))$ é fechado em E.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $y \in \overline{(\lambda I-A)(\mathcal{D}(A))}$, podemos escolher uma sequência $\{x_n\}_{n\in N}$ em $\mathcal{D}(A)$ tal que $\lambda x_n - Ax_n \to y$. Como A é dissipativo temos:

$$\|\lambda x_n - \lambda x_m\| = \|\lambda(x_n-x_m)\| \le \|\lambda(x_n-x_m)-A(x_m-x_m)\| = \|(\lambda x_n - Ax_n)-(\lambda x_m - Ax_m)\|$$

e dado que $\{\lambda x_n - Ax_n\}_{n\in N}$ é uma sequência de Cauchy, $\{x_n\}_{n\in N}$ também o é; seja x seu limite. Usando agora de que A é fechado e portanto também $\lambda I-A$ concluímos que $x\in\mathcal{D}(A)$ e $\lambda x-Ax=y$. ∎

Vejamos agora o teorema central desta secção.

TEOREMA 1.20 - Seja um operador linear A definido em E, de domínio $\mathcal{D}(A)$ que verifica

i) $\mathcal{D}(A)$ é denso em E

ii) $\exists\lambda_0 > 0$ tal que $\overline{(\lambda_0 I-A)(\mathcal{D}(A))} = E$

iii) A é dissipativo.

Então A é préfechado e seu fecho é o operador infinitesimal de um único semigrupo fortemente contínuo de contrações.

DEMONSTRAÇÃO - Pelo Teorema 1.18 temos que A é préfechado e se $\bar{A}$ é seu fecho, $\bar{A}$ também é dissipativo. Obviamente $\bar{A}$ tem domínio denso, pelo Lema 1.19 $(\lambda_0 I-\bar{A})(\mathcal{D}(\bar{A}))$ é fechado e

$$(\lambda_0 I-\bar{A})(\mathcal{D}(\bar{A})) \supset \overline{(\lambda_0 I-A)(\mathcal{D}(A))} = E.$$

Concluímos que $(\lambda_0 I-\bar{A})(\mathcal{D}(\bar{A})) = E$ e para o operador $\bar{A}$ as condições do Teorema Lumer-Phillips (Teorema 1.15) são verificadas de onde segue-se a afirmação do Teorema. ∎

LEMA 1.21 - Seja $\{F_n(s)\}_{n\in N}$ uma sequência de funções de R_+

em E que é limitada e equicontínua no seguinte sentido:

$\exists K>0$ tal que $\|F_n(s)\| \le K$, $\forall n \in N$, $\forall s \ge 0$ e

$\forall \varepsilon>0$, $\forall s \ge 0$, $\exists \delta>0$ tal que $\forall s' \ge 0$ $|s'-s|<\delta$ implica

$$\|F_n(s)-F_n(s')\| < \varepsilon, \qquad \forall n \in N \tag{6.1}$$

Se $\{F_n\}_{n \in N}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s} F_n(s)ds \right\| = 0, \qquad \forall \lambda>0 \tag{6.2}$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le s\le t} \|F_n(s)\| = 0, \qquad \forall t \ge 0 \tag{6.3}$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le s\le t} \|F_n(s)\| = \gamma.$$

Podemos escolher uma subsequência de $\{F_n\}_{n\in N}$ tal que seu limite seja γ. Para simplificar a notação suponhamos que $\{F_n\}_{n\in N}$ já é subsequência.

Dado que F_n é contínua sobre o compacto $[0,t]$, para algum $s_n \in [0,t]$, F_n toma o seu máximo. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe uma aplicação linear V_n tal que $\|V_n\| = 1$ e $V_n(F_n(s_n)) = \|F_n(s_n)\|$. Como $V_n(F_n(s)) \le \|F_n(s)\|$ é imediato que

$$\sup_{0\le s\le t} \|F_n(s)\| = \sup_{0\le s\le t} V_n(F_n(s))$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le s\le t} V_n(F_n(s)) = \gamma.$$

Se definirmos $\phi_n(s) = V_n(F_n(s))$, $s\in[0,\infty)$, temos que $\{\phi_n\}_{n\in N}$ é uma sequência de funções equilimitadas e equicontínuas já que:

$$|\phi_n(s)| = |V_n(F_n(s))| \leq \|V_n\| \; \|F_n(s)\| \leq K, \qquad \forall s\geq 0,\ \forall n\in N$$

e se $\delta > 0$ é tal que se $s'\geq 0$, $\|s'-s\| < \delta$ verifica-se (6.1),

$$|\phi_n(s')-\phi_n(s)| = |V_n(F_n(s')-F_n(s))| \leq \|V_n\| \; \|F_n(s')-F_n(s)\| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema de Ascoli podemos escolher uma subsequência $\{\phi_{n_k}\}_{k\in N}$ que converge para uma função ϕ que obviamente também está limitada por K, e é contínua.

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e A.2 (Apêndice A) segue-se que $\forall\lambda > 0$.

$$\left|\int_0^\infty e^{-\lambda s}\phi(s)ds\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\phi_{n_k}(s)ds\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda s}V_{n_k}(F_{n_k}(s))ds\right| =$$

$$= \left|\lim_{k\to\infty} V_{n_k}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}F_{n_k}(s)ds\right)\right| \leq \lim_{k\to\infty}\left|V_{n_k}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}F_{n_k}(s)ds\right)\right| \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\|V_{n_k}\| \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}F_{n_k}(s)ds\right\| = \lim_{k\to\infty}\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}F_{n_k}(s)ds\right\| = 0$$

por (6.2). Do Lema 1.5 concluímos que $\phi(s) = 0$, $\forall s\geq 0$ e temos que em $[0,t]$ $\phi_{n_k}(s)$ converge uniformemente para zero dado que é uma sequência equicontínua de funções. Podemos afirmar então que

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{0\leq s\leq t}\phi_{n_k}(s) = 0,$$

ou seja, $\gamma = 0$ e fica demonstrada a afirmação (6.3). ∎

TEOREMA 1.22 (Trotter) - Sejam $\{T_t^n\}_{n\in N}$, T_t semigrupos fortemente contínuos de contrações definidos em E com operadores infinitesimais $\{A_n\}_{n\in N}$ e A respectivamente.

Se

$$D = \{f\in\mathcal{D}(A): \lim_{n\to\infty} A_n f = Af\}\subset\mathcal{D}(A)$$

é denso em E e tal que o fecho da restrição de A a D é o próprio operador A, então

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le s\le t} \|T_s^n f - T_s f\| = 0, \qquad \forall f\in E,\ \forall t\in[0,\infty). \quad (6.4)$$

DEMONSTRAÇÃO - É imediato que a restrição de A a D continua sendo dissipativa (A o é pois é um operador infinitesimal). Como por hipótese D é denso em E, pelo Teorema 1.18 esta restrição é préfechada e portanto tem sentido falar de seu fecho.

Se (6.4) vale em D então para qualquer $g\in E$, fixado t e dado $\varepsilon > 0$ existe $g_0\in D$ tal que $\|g-g_0\| < \varepsilon/3$; tomando

$$n_0:\ \forall n\ge n_0 \qquad \sup_{0\le s\le t} \|T_s^n g_0 - T_s g_0\| < \varepsilon/3$$

temos que

$$\|T_s^n g - T_s g\| \le \|T_s^n g - T_s^n g_0\| + \|T_s^n g_0 - T_s g_0\| + \|T_s g_0 - T_s g\| \le$$

$$\le 2\|g-g_0\| + \|T_s^n g_0 - T_s g_0\| < \varepsilon, \qquad \forall n\ge n_0,\ \forall s\in[0,t]$$

e (6.4) vale para g. Resta demonstrar que (6.4) verifica-se em D.

Seja $f\in D$ e

$$\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le s\le t} \|T_s^n f - T_s f\|,$$

podemos extrair de $\{T_t^n\}_{n\in N}$ uma subsequência que tenha γ como limite. Para simplificar a notação, denotaremos esta subsequência por $\{T_t^n\}_{n\in N}$. Temos que demonstrar que $\gamma = 0$. Para isto mostremos em primeiro lugar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}[T_s^n f - T_s f] ds \right\| = 0, \qquad \forall \lambda > 0 \tag{6.5}$$

Fixemos $\lambda > 0$ e definamos:

$$g^\lambda = (\lambda I - A)^{-1} f = R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T_s f ds$$

$g^\lambda \in \mathcal{D}(A)$ logo existe $\{g_m^\lambda\}$ contida em D tal que:

$$g_m^\lambda \longrightarrow g^\lambda \text{ e, } Ag_m^\lambda \longrightarrow Ag^\lambda. \tag{6.6}$$

Dada uma subsequência $\{T_s^{n_k}\}_{n\in N}$ qualquer de $\{T_s^n\}_{n\in N}$ como

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k} g_m^\lambda = Ag_m^\lambda, \qquad \forall m \in N,$$

podemos extrair de $\{A_{n_k}\}_{k\in N}$ uma outra subsequência, (denotemos por simplicidade $\{A_{n_m}\}_{m\in N}$) tal que:

$$A_{n_m} g_m^\lambda \longrightarrow Ag^\lambda \tag{6.7}$$

Seja $f_m^\lambda = \lambda g_m^\lambda - A_{n_m} g_m^\lambda$,

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}[T_s^{n_m} f - T_s f] ds \right\| \le \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}[T_s^{n_m} f - T_s^{n_m} f_m^\lambda] ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}[T_s^{n_m} f_m^\lambda - T_s f] ds \right\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda s} \| T_s^{n_m}(f - f_m^\lambda) \| ds +$$

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
(vii)	10	$f:M \to Z$	$f:M \to \mathbb{Z}$
(viii)	-13	$\alpha \in Hom(Z[X],R)$	$\alpha \in Hom(\mathbb{Z}[X],R)$
4	1	$1 \leq \ell < m$	$1 \leq \ell < k$
4	9	$d \leq \ell$	$d \geq \ell$
15	-2	$f(f_1,f_2,\dots,f_m) \in T$	$g(f_1,f_2,\dots,f_m) \in T$
15	-1	$U(T) \leq T$	$U(F) \subseteq T$
22	16	$U(F)=U(F)$	$U(F)=W(F)$.
23	4	2.24	2.25
23	6	2.27	2.28
23	16	X	$\bar{X}$
24	11	$X \subseteq qsc\ X$	$\bar{X} \subseteq qsc\ X$
31	3	R *um anel*	R *um anel artiniano*
40	-8	$qsc X$	$qsd X$
41	-12	corpo finito	corpo finito de ordem prima
41	-2	$k_2 \neq 0$ ou $k_3 \neq 0$.	$k_2 \neq 0$. Se $k_1=k_2=0$, então, $k_3 \neq 0$; logo, k_3 é um gerador do grupo aditivo de K e, portanto, $K \subseteq I$.
46	5	$1 \leq \ell \leq m$	$0 \leq \ell \leq m$
47	2	segundos índices j	segundos índices $j \neq 0$
50	13	$k<n$	$k<m$
56	-12	$J(R)$	*o anel* $J(R)$
56	-1	$\dfrac{R/(T+pR)}{J(R)/(T+pR)}$	$\dfrac{R/(T+pR)}{J(R/(T+pR))}$
58	3	nu	du
58	4	n	d
59	3	$m<e$	$\ell<e$
59	9	$(4m+1)(e-1)+r$	$(4m+1)(e-1)+m$

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
60	6	2.23	2.33
66	-4	$\forall \phi \in \pi A_\lambda$	$\forall \phi \in \pi A_\lambda$
69	-4	razões	raízes
75	-10	$\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$	$\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$
75	-8	$1 \leq i_1,i_2,\dots,i_e \leq n$	$1 \leq i_1,i_2,\dots,i_e \leq m$
77	-3	$\tilde{W}$	W
79	-5	$\phi_r(u)=u+I(r)$	$\phi_r(u)=r+I(u)$
80	8	$S/Ker(\pi_\lambda)$	$S/(S \cap Ker(\pi_\lambda))$
80	9	$S/Ker(\pi_\lambda)$	$S/(S \cap Ker(\pi_\lambda))$
80	-8	$1 \leq i \leq t$	$1 \leq i \leq k$
84	6	$\lvert R \rvert$ é limitada	o número de geradores de R é limitado
84	16	B_e que	B_e tal que
84	-1	$F/W_1(F)=L/W_1(L)$	$F/W_1(F) \cong L/W_1(L)$
89	-4	$x_i s$	$u_i s$
89	-1	pelo teorema da densidade	como I é denso em L
90	5	Aplicando mais uma vez o teorema da densidade	Novamente, desde que I é denso em L
90	9	4.26	4.27
90	-11	$r \in R$	$r \in R^{e-1}$
90	-10	$r^{e-1} \neq 0$	$r \neq 0$
90	-8	$Mr^{e-1}=0$	$Mr=\{0\}$
90	-7	$r^{e-1} \neq 0$	$r \neq 0$
90	-6	4.27	4.28
91	13	4.25	4.26
92	-9	4.28	4.29
93	6	4.29	4.30

$$+\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s^{n_m}f_m^\lambda ds-\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s f ds\right\|\le\|f-f_m^\lambda\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}ds+\|g_m^\lambda-g^\lambda\|=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\|\lambda g^\lambda-Ag^\lambda-(\lambda g_m^\lambda-A_{n_m}g_m^\lambda)\|+\|g_m^\lambda-g^\lambda\|\le$$

$$\le\frac{1}{\lambda}\|\lambda g^\lambda-\lambda g_m^\lambda\|+\frac{1}{\lambda}\|A_{n_m}g_m^\lambda-Ag^\lambda\|+\|g_m^\lambda-g^\lambda\|=2\|g_m^\lambda-g^\lambda\|+\frac{1}{\lambda}\|A_{n_m}g_m^\lambda-Ag^\lambda\|$$

do que segue-se por (6.6) e (6.7), que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}[T_s^{n_m}f-T_s f]ds\right\|=0$$

e concluímos que (6.5) vale.

Pondo $F_n(s)=T_s^n f-T_s f$, temos então demonstrado que se verifica para $\{F_n\}_{n\in N}$ a condição (6.2) do Lema 1.21.

Como T_s e T_s^n são contrações temos que

$$\|F_n(s)\|=\|T_s^n f-T_s f\|\le 2\|f\|,\qquad \forall n\in N,\ \forall s\ge 0.$$

Supondo $s'<s$

$$\|F_n(s')-F_n(s)\|=\|T_{s'}^n f-T_{s'}f-T_s^n f+T_s f\|\le$$

$$\le\|T_s^n f-T_{s'}^n f\|+\|T_s f-T_{s'}f\|\le\|T_{s-s'}^n f-f\|+\|T_{s-s'}f-f\|$$

e portanto, para demonstrar que a sequência F_n é equicontínua basta mostrar que é equicontínua na origem.

Como $f\in D$ temos que $A_n f\longrightarrow Af$ e portanto existe $K>0$ tal que $\|A_n f\|\le K$, $\forall n\in N$ e $\|Af\|\le K$. Por (1.5) segue-se

$$\|T_s^n f-f\|=\left\|\int_0^s T_u^n A_n f du\right\|\le\left|\int_0^s\|T_u^n A_n f\|du\right.\le Ks$$

e o mesmo vale para $\|T_s f-f\|$. Concluímos então que F_n é equicontínua na origem.

São satisfeitas as condições do Lema 1.21 e substituindo F_n por $T_s^n f-T_s f$ em (6.3) segue-se que $\gamma=0$. ∎

- □ -

CAPÍTULO II

Seja E um espaço de Banach e consideremos duas sequências de operadores limitados $\{M_m\}_{m\in N}$ e $\{U_n\}_{n\in N}$ definidas em E. Suponhamos ainda que,

$$\forall n \in N, \qquad \Omega_n = \sum_{k=1}^{n} M_k U_k$$

é um operador dissipativo.

É claro que Ω_n gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações (Corolário 1.16), o que nos interessa é encontrar condições nas quais, o "limite" da sequência Ω_n também gera um semigrupo.

Seja Ω_n o operador limite de $\{\Omega_n\}$ definido da seguinte maneira

$$\Omega_0 f = \lim_{n\to\infty} \Omega_n f \tag{1.1}$$

para todo $f \in E$ onde este limite existe.

É fácil verificar que Ω_0 é um operador linear.

$$\Omega_0(f+g) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n(f+g) = \lim_{n\to\infty} \Omega_n f + \lim_{n\to\infty} \Omega_n g = \Omega_0 f + \Omega_0 g$$

$$\Omega_0(\lambda g) = \lim_n \Omega_n(\lambda g) = \lambda \lim_{n\to\infty} \Omega_n(g) = \lambda\Omega_0 g$$

e dado que Ω_n é dissipativo $\forall n \in N$, Ω_0 também o é, seja $f \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ $g = f - \lambda\Omega_0 f$ (*).

$$\|g\| = \|f-\lambda\Omega_0 f\| = \lim_{n\to\infty} \|f-\lambda\Omega_n f\| \geq \|f\|.$$

Em geral Ω_0 não está definido $\forall f \in E$, nem sequer podemos afirmar que $\mathcal{D}(\Omega_0)$ seja denso em E, por isso teremos que colocar isto como hipótese. Seja $\{\mu_k\}_{k\in N}$ uma sequência de números reais positivos tal que $\|M_k\| \leq \mu_k$, definimos:

$$\mathcal{C} = \{f \in E: \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \|U_k f\| < \infty\} \qquad (1.2)$$

Usando o fato de que $\|U_k(f+g)\| \leq \|U_k f\| + \|U_k g\|$ é imediato que $\mathcal{C}$ é um subespaço de E. Por outra parte, por ser E um espaço de Banach, para demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n f = \sum_{k=1}^{\infty} M_k U_k f$$

existe, basta mostrar que a série das normas tem soma finita. Se $f \in \mathcal{C}$ temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|M_k U_k f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|M_k\| \; \|U_k f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \|U_k f\| < \infty$$

(*) - No decorrer do Capítulo I consideramos o operador $\lambda I-A$ e não o operador $I-\lambda A$ como faremos neste Capítulo por comodidade. Assim, os operadores dissipativos ficaram caracterizados por verificar

$$\|\lambda f\| \leq \|\lambda f - Af\|.$$

Dividindo por λ ambos os membros da desigualdade obtemos então a forma que utilizaremos daqui em diante. Algo análogo ocorre com as condições que se manifestaram no Capítulo anterior no Teorema de Hille-Yosida e suas extensões.

e concluímos então que $f \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, ou seja $C \subset \mathcal{D}(\Omega_0)$.

Supondo que C é denso em E, $\mathcal{D}(\Omega_0)$ também o será, e como além do mais Ω_0 é dissipativo, terá uma extensão mínima fechada e dissipativa Ω em E.

Para que Ω seja o operador infinitesimal de um semigrupo nos restaria verificar que para algum

$$\lambda > 0, \qquad (I - \lambda\Omega)(\mathcal{D}(\Omega)) = E$$

para o qual devemos impor restrições sobre sequências M_n e U_n, que envolvem o grau de comutatividade destes operadores. Para formalizar isto, vamos introduzir a medida usual de comutatividade dos operadores limitados.

Sejam A e B operadores limitados definidos em E, escrevemos $[A,B] = AB - BA$ e definamos:

$$\gamma(A,B) = \sup_f \frac{\|[A,B]f\|}{\|Af\| + \|Bf\|} \qquad (1.3)$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto de todos os $f \in E$ tais que o denominador não se anule.

Notemos que se A e B comutam, $\gamma(A,B) = 0$ e que para qualquer A e B

$$\gamma(A,B) \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} \qquad (1.4)$$

uma vez que

$$\sup_f \frac{\|ABf - BAf\|}{\|Af\| + \|Bf\|} \leq \sup_f \frac{\|A\| \ \|Bf\| + \|B\| \ \|Af\|}{\|Af\| + \|Bf\|} \leq \max\{\|A\|, \|B\|\} \sup_f \frac{\|Bf\| + \|Af\|}{\|Af\| + \|Bf\|}$$

Estamos agora em condições de enunciar o Lema que nos permitirá estabelecer o Teorema Central desta secção.

<u>LEMA 2.1</u> - Seja $\{M_k\}_{k\in N}$ e $\{U_k\}_{k\in N}$ sequências de operadores limitados em E,

$$\Omega_n = \sum_{k=1}^{n} M_k U_k$$

e Ω_0 o limite de Ω_n definido como em (1.1). Seja $\{\mu_k\}$ uma sequência de números reais positivos que verificam $\|M_k\| \leq \mu_k$ e uma constante L tal que: $\mathcal{C}$ definido como em (1.2) seja denso em E e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \gamma(U_k, U_n) \leq L \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \| [U_k, M_n] \| \leq \mu_n L \tag{1.6}$$

Então $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega) = E$ para $0 < \lambda < 1/3L$ onde Ω é a mínima extensão fechada de Ω_0.

O roteiro da demonstração nós podemos resumir nos seguintes ternos: mostraremos que todo elemento de $\mathcal{C}$ é aproximável por uma sequência contida em $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega)$. Como $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega)$ é um conjunto fechado de E por ser Ω um operador fechado e dissipativo chegamos a que $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}(I-\lambda\Omega)$ e usando novamente do fato que $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega)$ é fechado e de que $\mathcal{C}$ é denso em E concluímos que $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega) = E$.

A dificuldade da demonstração reside em determinar a sequência aproximante. Para isto, se $g \in \mathcal{C}$ consideraremos a sequência $\{f_n\}_{n\in N}$ obtida em aplicar a g a resolvente em λ do operador Ω_n ou seja $f_n = (I-\lambda\Omega_n)^{-1} g$. Demonstraremos que

$$\{f_n\}_{n\in N} \subset \mathcal{C}$$

e como $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, está definida $\{(I-\lambda\Omega) f_n\}$ e terminaremos por mostrar que esta sequência aproxima a g.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $g \in C$. Como Ω_n é um operador limitado e dissipativo, $R(I-\lambda\Omega_n) = E$, $\forall\lambda > 0$ pelo Corolário 1.16 e o Teorema 1.4. Fixemos λ tal que $0 < \lambda < 1/3L$ e definamos f_n através de:

$$f_n - \lambda\Omega_n f_n = g \quad \text{ou seja} \quad f_n = (I-\lambda\Omega_n)^{-1} g \tag{1.7}$$

Aplicando U_m a ambos os membros da igualdade (1.7) obteremos:

$$U_m f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} U_m M_k U_k f_n = U_m g. \tag{1.8}$$

Então

$$U_m f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} U_m M_k U_k f_n = U_m f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} U_m M_k U_k f_n + \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k U_m U_k f_n$$

$$- \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k U_m U_k f_n + \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k U_k U_m f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k U_k U_m f_n =$$

$$= U_m f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} [U_m, M_k] U_k f_n - \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k [U_m, U_k] f_n - \lambda\Omega_n U_m f_n.$$

Podemos então escrever (1.8) como

$$U_m f_n - \lambda\Omega_n U_m f_n = U_m g + \lambda \sum_{k=1}^{n} [U_m, M_k] U_k f_n + \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k [U_m, U_k] f_n.$$

Dado que Ω_n é dissipativo temos que

$$\|U_m f_n\| \leq \|U_m f_n - \lambda\Omega_n U_m f_n\|$$

usando (1.3) se segue que:

$$\|U_m f_n\| \leq \|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \|[U_m, M_k]\| \; \|U_k f_n\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \|M_k\| \; \|[U_m, U_k] f_n\| \leq$$

$$\leq \|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \|[U_m, M_k]\| \; \|U_k f_n\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \mu_k \gamma(U_m, U_k) [\|U_m f_n\| + \|U_k f_n\|] =$$

$$= \|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} [\|[U_m,M_k]\| + \mu_k\gamma(U_m,U_k)]\|U_k f_n\| + \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\gamma(U_m,U_k)\right)\|U_m f_n\| .$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k\gamma(U_k,U_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\gamma(U_k,U_m)$$

por ser uma série de termos não negativos, aplicando (1.5) resulta:

$$\|U_m f_n\| \leq \|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} [\|[U_m,M_k]\| + \mu_k\gamma(U_m,U_k)]\|U_k f_n\| + \lambda L\|U_m f_n\|$$

que podemos escrever como:

$$(1-\lambda L)\|U_m f_n\| \leq \|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \beta_{m,k}\|U_k f_n\| \qquad (1.9)$$

onde $\beta_{m,k} = \|[U_m,M_k]\| + \mu_k\gamma(U_m,U_k)$.

As condições (1.5) e (1.6) do Lema implicam que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\beta_{m,k} \leq 2L\mu_k \qquad (1.10)$$

uma vez que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\beta_{m,k} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\|[U_m,M_k]\| + \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\mu_k\gamma(U_m,U_k) \leq$$

$$\leq L\mu_k + \mu_k \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\gamma(U_m,U_k) \leq 2L\mu_k$$

pelo qual se considerarmos a $\{\mu_m\}$ como uma medida μ sobre os inteiros positivos, $\{\beta_{m,k}\}$ define um operador limitado B em $L_1(\mu)$:

$$(Bu)^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m,k} u^{(k)} \qquad u \in L_1(\mu) \qquad (1.11)$$

e $\|B\| \le 2L$.

Para demonstrar isto escrevemos:

$$\|Bu\|_1 = \int |Bu| d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} |(Bu)^{(m)}| \mu_m \le \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m,k} |u^{(k)}| \mu_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,k} |u^{(k)}| \mu_m = \sum_{k=1}^{\infty} |u^{(k)}| \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,k} \mu_m \le \sum_{k=1}^{\infty} |u^{(k)}| 2L\mu_k = 2L\|u\|_1$$

onde foi possível inverter a ordem das somatórias por ser os termos não negativos e aplicando (1.10) na penúltima passagem.

É imediato verificar que o operador B é positivo, ou seja, se $u^{(m)} \ge 0$, $\forall m \in N$, então $(Bu)^{(m)} \ge 0$, $\forall m \in N$.

Se fixamos n e definimos

$$v^{(m)} = \|U_m f_n\|, \qquad w^{(m)} = \|U_m g\| \qquad (1.12)$$

teremos que como $g \in C$, pela própria definição de C, $w \in L_1(\mu)$.

Para demonstrar que também $v \in L_1(\mu)$, dado que λ foi escolhido tal que $\lambda L \le 1/3$ e portanto $(1-\lambda L)\|U_m f_n\| \ge 0$, basta mostrar por (1.9) que

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \beta_{m,k} \|U_k f_n\|) \mu_m < \infty .$$

Usando (1.10)

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\|U_m g\| + \lambda \sum_{k=1}^{n} \beta_{m,k} \|U_k f_n\|) \mu_m = \sum_{m=1}^{\infty} \|U_m g\| \mu_m + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta_{m,k} \|U_k f_n\| \mu_m =$$

$$= \|w\|_1 + \lambda \sum_{k=1}^{n} \|U_k f_n\| \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,k} \mu_m \right) \le \|w\|_1 + \lambda \sum_{k=1}^{n} \|U_k f_n\| 2L\mu_k < \infty .$$

já que é uma soma finita. Concluímos que Bv está bem definido e tendo em conta que

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{m,k} \| U_k f_n \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{m,k} \| U_k f_n \| ,$$

podemos escrever (1.9) da seguinte maneira:

$$(1-\lambda L)v \leq w + \lambda Bv \tag{1.13}$$

aonde a desigualdade é coordenada a coordenada.

Elaborando esta desigualdade chegamos à:

$$(I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B)v \leq \frac{1}{1-\lambda L} w \tag{1.14}$$

Estudemos agora ao operador $I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B$. Como $\lambda < 1/3L$, $\lambda/(1-\lambda L) < (1/3L)/(1-1/3) = 1/2L$ e portanto

$$\| \frac{\lambda}{1-\lambda L} B \| < \frac{1}{2L} \| B \| \leq 1.$$

Chamando de $D = (\lambda/1-\lambda L)B$, D tem norma menor que 1 e é positivo já que B o é. Pelo Lema 1.14 I-D tem inverso e está dado por

$$(I-D)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n;$$

segue-se que $(I-D)^{-1}$ também é um operador positivo.

Por (1.4)

$$\frac{1}{1-\lambda L} w - (I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B)v \geq 0,$$

coordenada a coordenada de onde se segue:

$$(I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B)^{-1}[\frac{1}{1-\lambda L} w - (I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B) v] = (I - \frac{\lambda}{1-\lambda L})^{-1} \frac{1}{1-\lambda L} w - v \geq 0$$

ou seja:

$$v \leq \frac{1}{1-\lambda L}(I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B)^{-1} w.$$

Notemos que, embora v fosse definido em função de n, a majoração que obtivemos não depende de n e, portanto, definindo

$$u_m = (\frac{1}{1-\lambda L}(I - \frac{\lambda}{1-\lambda L} B^{-1}) w)^{(m)}$$

teremos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \mu_m < \infty \quad (w \in L_1(\mu) \quad \text{e} \quad (I-(\lambda/(1-\lambda L))B)^{-1}$$

é um operador limitado em $L_1(\mu)$), e $\|U_m f_n\| < u_m$, $\forall n \in N$.

Esta majoração uniforme é necessária para demonstrar que a sequência $\{g_n\}_{n \in N}$ definida como

$$g_n = f_n - \lambda \Omega_0 f_n \tag{1.16}$$

($f_n \in C$ e portanto está definido $\Omega_0 f_n$) tem como limite o g.

Para mostrar isto, usando 1.16 e (1.7) teremos:

$$\|g_n - g_0\| = \|f_n - \lambda\Omega_0 f_n - (f_n - \lambda\Omega_n f_n)\| = \lambda\|\Omega_0 f_n - \Omega_n f_n\| \leq$$

$$\leq \lambda\|\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k U_k f_n\| \leq \lambda \sum_{k=n+1}^{\infty} \|M_k\| \, \|U_k f_n\| \leq \lambda \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k u_k \longrightarrow 0$$

pois a série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k$ é convergente. Concluímos que $R(I-\lambda\Omega_0)$ é denso em

$\mathcal{C}$ pelo qual

$$\overline{\mathcal{R}(I-\lambda\Omega_0)} = \bar{\mathcal{C}} = E.$$

Dado que Ω_0 é um operador dissipativo de domínio denso em E, pelo Teorema 1.18 admite uma mínima extensão fechada e dissipativa Ω. Pelo Lema 1.19 $\mathcal{R}(I-\lambda\Omega)$ é fechado em E do que se segue:

$$\mathcal{R}(I-\lambda\Omega) \supset \overline{\mathcal{R}(I-\lambda\Omega_0)} = E. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2 - De acordo com as condições do Lema 2.1, o operador linear Ω é o operador infinitesimal de um único semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T_t\}_{t\geq 0}$ em E. Além do que, se $\{T_t^n\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por Ω_n, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq t_0} \| T_t^n f - T_t f\| = 0, \qquad \forall t_0>0,\ \forall f\in E.$$

DEMONSTRAÇÃO - A primeira afirmação é uma consequência imediata do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 1.15) e do Lema anterior. Por definição Ω é o fecho de Ω_0, onde Ω_0 é o limite da sequência $\{\Omega_n\}$ e de domínio denso.

Do Teorema de Trotter se segue a segunda afirmação.

$\blacksquare$

2.2 - MODELO DE EXCLUSÃO COM MUDANÇA DE VELOCIDADE

Nesta secção procuraremos aplicar o Teorema de Existência da secção anterior ao caso do sistema de infinitas partículas com exclusão e mudança de velocidade.

Este sistema nós podemos descrever numa forma resumida da seguinte maneira:

Consideraremos um conjunto numerável S (por exemplo Z, Z^d) e definimos $K = \{0,1\}^S$; em $\{0,1\}$ a topologia discreta e K com a topologia produto. É imediato que $\{0,1\}$ é compacto e portanto K também é compacto pelo Teorema de Tijonov, por outro lado $\{0,1\}$ é metrizável, do que se segue que K também o é.

K será o espaço de estados e lhe daremos a seguinte interpretação: para $\eta \in K$, diremos que $u \in S$ está ocupado se $\eta(u) = 1$ e que u está vazio se $\eta(u) = 0$.

Para descrever a interação das partículas consideraremos as funções a valores reais, não negativas.

$$c(x,\eta) \tag{2.1}$$

definida em $S \times K$ que representará a velocidade de transição da partícula em x quando o estado do sistema é η.

$$p(x,y,\eta) \tag{2.2}$$

definida em $S \times S \times K$ que nos dará a probabilidade de transição de x para y.

Em termos intuitivos, a descrição do processo é: se em um dado instante de tempo t o sistema se encontra no estado $\eta \in K$, uma partícula em $x \in S (\eta(x) = 1)$, tentará uma transição durante o intervalo de tempo Δt, com probabilidade

$$c(x,\eta)\Delta t + o(\Delta t);$$

e se efetivamente tenta a transição, irá a $y \in S$ com probabilidade $p(x,y,\eta)$ desde que $\eta(y) = 0$; no caso de que $\eta(y) = 1$ a partícula permanecerá em x.

Se definirmos para $\eta \in K$, $u,v \in S$

$$\eta_{u,v}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{se } x \neq u,v \\ \eta(u) & \text{se } x = v \\ \eta(v) & \text{se } x = u \end{cases} \tag{2.3}$$

e consideramos o espaço de Banach E das funções contínuas a valores reais definidos em K com a norma do supremo, assumindo que $c(x,\eta)=0$ quando $\eta(x)=0$ a eleição razoável do gerador infinitesimal para o processo descrito é:

$$\Omega_0 f(\eta) = \sum_{x,y\in S} c(x,\eta)\, p(x,y,\eta)[f(\eta_{x,y})-f(\eta)] \qquad (2.4)$$

Notemos que nesta expressão os termos da somatória não nulos estão para os pares x,y tal que $\eta(x)=1$ e $\eta(y)=0$ pois se $\eta(x)=0$, $c(x,\eta)=0$ e se $\eta(x)=\eta(y)=1$, então $\eta_{x,y} = \eta$

É claro que deveremos impor restrições sobre as funções $c(x,y)$ e $p(x,y,\eta)$ para que o sistema descreva um movimento Markoviano e (2.4) defina efetivamente um gerador infinitesimal.

EXEMPLO - Suponhamos que $c(x,\eta)=1$, quando x está ocupado, $p(x,y,\eta)=p(x,y)$ não depende de η e se verifica $\sum_x p(x,u)=\infty$ para algum $u\in S$.

Consideremos a função $f(\eta)=\eta(u)$ ou seja, $f(\eta)=1$ se $\eta(u)=1$ e $f(\eta)=0$ se $\eta(u)=0$.

$$f(\eta_{x,y}) \neq f(\eta) \iff \eta_{x,y}(u) \neq \eta(u) \iff x=u \text{ ou } y=u, \text{ e } \eta(x)\neq\eta(y)$$

teremos então que para η tal que $\eta(u)=0$ e $\eta(x)=1$ $\forall x\in S$ exceto num subconjunto finito,

$$\Omega_0 f(\eta) = \sum_{x,y\in S} c(x,\eta)p(x,y,\eta)[f(\eta_{x,y}) - f(\eta)] =$$

$$= \sum_{\{x:\eta(x)=1\}} c(x,\eta)p(x,u)[f(\eta_{x,u})-f(\eta)] = \sum_{\{x:\eta(x)=1\}} p(x,u) = \infty$$

e concluímos que $\Omega_0 f$ não está definido.

Apesar de não esperarmos que Ω_0 esteja definido para toda função, é grave que não esteja para uma função tão simples como a utilizada. Tecnicamente não seria um grande problema mas isto está refletindo na realidade no fato de que não existe um processo de Markov que corresponda à descrição intuitiva que temos realizado. Neste caso teríamos estados instantâneos. Para ver isto suponhamos que o processo começa no estado η, $\eta(x)=1$ para $x\neq u$, $\eta(u)=0$ e consideremos o evento $A_{\Delta t}$ de que no intervalo de tempo Δt não se produza nenhuma transição.

É claro que as únicas transições possíveis são de qualquer posição $x\in S$ para u e a probabilidade de que a partícula que está em x não mude para u no intervalo de tempo Δt é $1-\Delta t p(x,u)$. Designemos este evento por B_x.

Se $\{x_n\}$ é uma numeração qualquer de $S-\{u\}$ teremos que a probabilidade de $A_{\Delta t}$ está dada por:

$$P(A_{\Delta t}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_{x_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} P(B_{x_k})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1-\Delta t p(x_k,u)) \le \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{-\Delta t p(x_k,u)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\Delta t \sum_{k=1}^{n} p(x_k,u)} = 0.$$

Onde esta última igualdade segue da hipótese que fizemos de que $\sum_x p(x,u)=\infty$. Concluímos que $\forall \Delta t$ $P(A_{\Delta t})=0$.

Exigiremos que $c(x,\eta)$ e $p(x,y,\eta)$ sejam contínuas como funções de η e tal que $c(x,\eta)=0$ para $\eta(x)=0$. Para colocar o problema nos termos da secção anterior vamos definir para os pares $(x,y)\in S\times S$ os operadores limitados $M_{(x,y)}$ e

$U_{(x,y)}$ em E como:

$$U_{(x,y)}f(\eta) = f(\eta_{x,y})-f(\eta) \tag{2.5}$$

$$M_{(x,y)}f(\eta) = c(x,y)p(x,y,\eta)f(\eta) \tag{2.6}$$

É imediato ver que estes operadores vão de E em E uma vez que $(\eta_{x,y})^{-1}$ leva abertos da base em abertos da base e portanto $\eta_{x,y}$ é contínua; e por hipótese $c(x,\eta)$ e $p(x,y,\eta)$ são contínuas como função de η.

Por outro lado, é claro que $\|U_{(x,y)}\| \leq 2$ e

$$\|M_{(x,y)}f\| = \sup_{\eta}|M_{(x,y)}f(\eta)| \leq \sup_{\eta}|c(x,\eta)|\sup_{\eta}|p(x,y,\eta)|\sup_{\eta} f(\eta)|.$$

Como K é compacto $|c(x,\eta)|$ e $|p(x,y,\eta)|$ são limitados e concluimos que

$$\|M_{(x,y)}\| \leq \sup_{\eta}|c(x,\eta)|\sup_{\eta}|p(x,y,\eta)| \tag{2.7}$$

Considerando uma numeração qualquer $(x,y)_n$ de $S\times S$, seja

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n}\{(x,y)_i\};$$

teremos que $S_n\uparrow S\times S$ e definamos:

$$\Omega_{S_n} = \sum_{(x,y)\in S_n} M_{(x,y)}U_{(x,y)} \tag{2.8}$$

Podemos então considerar agora ao nosso candidato a operador infinitesimal Ω_0 definido em (2.4) como o limite de sequência $\{\Omega_{S_n}\}_{n\in N}$ no sentido dado em (1.1).

LEMA 2.3 - O operador Ω_{S_n} definido em (2.8) é dissipativo $\forall n \in N$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $f \in E$ e $g = f - \lambda \Omega_{S_n} f$, $\lambda > 0$. Dado que K é compacto, a função f alcança seu valor máximo para algum ponto de K. Seja η este ponto. Teremos que

$$f(\eta_{x,y}) \leq f(\eta), \qquad \forall (x,y) \in S_n$$

e portanto:

$$M_{(x,y)} U_{(x,y)} f(\eta) = c(x,\eta) p(x,y,\eta) [f(\eta_{x,y}) - f(\eta)] \leq 0$$

$\forall (x,y) \in S_n$. Se segue então que $g(\eta) = f(\eta) - \lambda \Omega_{S_n} f(\eta) \geq f(\eta)$ e portanto:

$$\sup_{\zeta \in K} g(\zeta) \geq g(\eta) \geq f(\eta) = \sup_{\zeta} f(\zeta).$$

Escolhamos agora η, tal que f tome seu valor mínimo em η, com um raciocínio análogo chegamos a que $\Omega_{S_n} f(\eta) \geq 0$ e concluimos que:

$$\min_{\zeta \in K} g(\zeta) \leq \min_{\zeta \in K} f(\zeta)$$

e teremos então que $\|g\| = \|f - \lambda \Omega_{S_n} f\| \geq \|f\|$. ∎

Consideremos o subconjunto $F \subset E$ das funções que dependem ao mais de um número finito de coordenadas, ou seja, se $f \in F$, existe $A \subset S$ finito tal que $\forall \eta, \zeta \in K$: $\eta(x) = \zeta(x)$, $\forall x \in A$, se verifica $f(\eta) = f(\zeta)$.

LEMA 2.4 - O conjunto F definido anteriormente é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO - É fácil verificar que F forma uma álgebra que separa pontos. Se $f, g \in F$ dependem das coordenadas dos subconjuntos finitos A e B respectivamente, então é imediato que $f+g$ e $f\cdot g$ dependem das coordenadas em $A\cup B$.

Seja $\eta,\zeta\in K$, $\eta\neq\zeta$. Para algum $x\in S$, $\eta(x)\neq\zeta(x)$, suponhamos $\eta(x)=1$ e $\zeta(x)=0$. Consideremos os abertos

$$U=\{\rho\in K:\rho(x)=1\}$$

e

$$V=\{\rho\in K:\rho(x)=0\};\ U\cup V=K \quad \text{e} \quad U\cap V=\emptyset.$$

Definamos $f(\rho)=1$ se $\rho\in U$, 0 em caso contrário, f é contínua, em η vale 1 e em ζ é igual a zero.

Além disso F contêm as constantes e temos então que verifica as condições exigidas pelo Teorema de Stone-Weierstrass, do qual se segue a afirmação do Lema. ∎

Assumiremos de agora em diante que existem funções $c(x)$ em S e $p(x,y)$ em $S\times S$ tal que:

$$\begin{aligned} c(x,\eta) &\leq c(x), && \forall\eta\in K,\ \forall x\in S \\ p(x,y,\eta) &\leq p(x,y), && \forall\eta\in K,\ \forall x,y\in S \end{aligned} \tag{2.9}$$

É claro que sob a hipótese de continuidade de $c(x,\eta)$ e $p(x,y,\eta)$ sempre existem funções que verificam estas desigualdades. Será sobre estas funções que imporemos restrições para cair nas condições do Teorema 2.2.

Definamos $\mu_{(x,y)}=c(x)p(x,y)$. Por (2.7) e (2.9) se segue:

$$\|M_{(x,y)}\| \leq \mu_{(x,y)}$$

Como em (1.2) consideramos o conjunto $C\subset E$ que na notação desta secção fica:

$$C=\{f\in E:\ \sum_{x,y\in S}\mu_{(x,y)}\|U_{(x,y)}f\|<\infty\}.$$

LEMA 2.5 - Se $c(x)$ e $p(x,y)$ verificam:

$$\sup_x c(x) \sum_{y\in S} p(x,y) < \infty \text{ e } \sup_y \sum_{x\in S} c(x)p(x,y) < \infty \qquad (2.10)$$

Então $F\subset C$ e C é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $f\in F$ e $T\subset S$ o subconjunto finito de coordenadas das quais depende f.

Teremos que para $x,y\notin T$

$$\|U_{(x,y)}f\| = \|f(\eta_{x,y})-f(\eta)\| = \|f(\eta)-f(\eta)\| = 0$$

e em qualquer outro caso $\|U_{(x,y)}f\| \le 2\|f\|$ de onde se segue que:

$$\sum_{x,y\in S} \mu(x,y)\|U_{(x,y)}f\| = \sum_{x\in T \text{ ou } y\in T} \mu(x,y)\|U_{(x,y)}f\| \le$$

$$\le \sum_{x\in T}\sum_{y\in S} \mu(x,y)\|U_{(x,y)}f\| + \sum_{y\in T}\sum_{x\in S} \mu(x,y)\|U_{(x,y)}f\| \le$$

$$\le 2\|f\| \sum_{x\in T} c(x) \sum_{y\in S} p(x,y) + 2\|f\| \sum_{y\in T}\sum_{x\in S} c(x)p(x,y) \le$$

$$\le 2\|f\|\ |T|\left(\sup_x c(x) \sum_{y\in S} p(x,y) + \sup_y \sum_{x\in S} c(x)p(x,y)\right) < \infty$$

por (2.10). Facilmente concluimos que C é denso por F também ser. ∎

Este Lema nos assegura que Ω_0 tem domínio denso e portanto tem uma extensão fechada e dissipativa Ω já que como vimos na primeira secção, Ω_0 está definido sobre C.

Antes de começarmos com o Teorema principal desta secção vejamos o seguinte resultado que nos garantirá que o semigrupo que vamos construir é positivo.

LEMA 2.6 - $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $g = f - \lambda \Omega f$ é uma função não negativa teremos que f também é uma função não negativa.

DEMONSTRAÇÃO - Caso $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ onde Ω é a extensão fechada de Ω_0, existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in N}$ contida em $\mathcal{D}(\Omega_0)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ e $\Omega_0 f_n \longrightarrow \Omega f$.

Definamos $g_n = f_n - \lambda \Omega_0 f_n$. É imediato que $g_n \longrightarrow g$.

Dado que $f_n \in \mathcal{D}(\Omega_0)$, $\Omega_0 f_n$ se expressa como:

$$\sum_{x,y\in S} c(x,\eta) p(x,y,\eta)[f_n(\eta_{x,y}) - f_n(\eta)]$$

e usando um raciocínio análogo ao empregado no Lema 2.3 teremos que $\min_\eta f_n(\eta) \geq \min_\eta g_n(\eta)$.

$f_n \longrightarrow f$ na norma e portanto $\min_\eta f_n(\eta) \longrightarrow \min_\eta f(\eta)$ e o mesmo vale para g_n.

A afirmação do Lema se segue então de:

$$\min_\eta f(\eta) = \lim_{n\to\infty} \min_\eta f_n(\eta) \geq \lim_{n\to\infty} \min_\eta g_n(\eta) = \min_\eta g(\eta) \geq 0. \qquad \square$$

TEOREMA 2.7 - Se sobre c(x) e p(x,y), além de verificar (2.9) impomos as seguintes condições:

$$\sum_{x\in S} \sup_\eta |c(u,\eta_x) - c(u,\eta)| \leq c(u), \tag{2.11}$$

$$\sum_{x\in S} \sup_\eta |p(u,v,\eta_x) - p(u,v,\eta)| \leq p(u,v) \tag{2.12}$$

então o operador Ω, fecho do operador Ω_0 definido em (2.4) gera um único semigrupo positivo fortemente contínuo de contrações $\{T_t\}_{t\geq 0}$ em E. Além do mais, se $\{T_t^{S_n}\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador Ω_{S_n} definido em (2.8), teremos:

$$\lim_{S_n \uparrow S\times S} \sup_{0\le t\le t_0} \| T_t^{S_n} f - T_t f\| = 0, \qquad \forall t_0 \ge 0,\ \forall f \in E$$

COMENTÁRIO - As condições (2.11) e (2.12) nós podemos interpretar como o requisito de que tanto a velocidade de uma partícula situada em um ponto de S, como a probabilidade de transição de um ponto para outro não sejam muito afetados pelo estado do sistema em pontos distantes.

DEMONSTRAÇÃO - Dado que no Lema 2.5 já verificamos que C é denso em E, somente resta fazê-lo com as condições (1.5) e (1.6) para aplicar o Teorema 2.2.

Se $\{x,y\}\cap\{u,v\} = \emptyset$, $(\eta_{u,v})_{x,y} = (\eta_{x,y})_{u,v}$ e

$$U_{(x,y)}U_{(u,v)}f(\eta) = U_{(x,y)}[f(\eta_{u,v})-f(\eta)] = f((\eta_{u,v})_{x,y})-f(\eta_{x,y}) -$$

$$- [f(\eta_{u,v})-f(\eta)] = f((\eta_{x,y})_{u,v})-f(\eta_{u,v})-[f(\eta_{x,y})-f(\eta)] =$$

$$= U_{(u,v)}[f(\eta_{x,y})-f(\eta)] = U_{(u,v)}U_{(x,y)}f(\eta).$$

e $U_{(x,y)}$ comuta com $U_{(u,v)}$ pelo qual $\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)})=0$. Se $\{x,y\}\cap\{u,v\}\neq\emptyset$, como $\|U_{(x,y)}\| \le 2$, $\forall (x,y)\in S\times S$, por (1.4) segue-se $\gamma(U_{(x,y)};U_{(u,v)}) \le 2$.

Tomemos:

$$L = 4(\sup_x c(x) \sum_{y\in S} p(x,y) + \sup_y \sum_{x\in S} c(x)p(x,y)); \quad \sum_{x,y\in S} \mu_{(x,y)}\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)}) \le$$

$$\le \sum_{x\in\{u,v\}} \sum_{y\in S} \mu_{(x,y)}\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)}) + \sum_{y\in\{u,v\}} \sum_{x\in S} \mu_{(x,y)}\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)}) \le$$

$$\le 2 \sum_{x\in\{u,v\}} \sum_{y\in S} c(x)p(x,y) + 2 \sum_{y\in\{u,v\}} \sum_{x\in S} c(x)p(x,y) \le L$$

e concluimos que (1.5) se çumpre.

Para verificar a condição (1.6) escrevemos:

$$[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]f(\eta) = U_{(x,y)}M_{(u,v)}f(\eta) - M_{(u,v)}U_{(x,y)}f(\eta) =$$

$$= c(u,\eta_{x,y})p(u,v,\eta_{x,y})f(\eta_{x,y}) - c(u,\eta)p(u,v,\eta)f(\eta) -$$

$$- c(u,\eta)p(u,v,\eta)[f(\eta_{x,y})-f(\eta)] = [c(u,\eta_{x,y})p(u,v,\eta_{x,y}) -$$

$$- c(u,\eta)-p(u,v,\eta)]f(\eta_{x,y})$$

do que se deduz que:

$$\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| \leq \sup_{\eta}|c(u,\eta_{x,y})\ p(u,v,\eta_{x,y})-c(u,\eta)p(u,v,\eta)|.$$

Seja $D = \{\eta \in K:\ \eta(x) \neq \eta(y)\}$. Para qualquer função contínua sobre K teremos:

$$\sup_{\eta}|h(\eta_{x,y})-h(\eta)| = \sup_{\eta\in D}|h(\eta_{x,y})-h(\eta)| \leq \sup_{\eta\in D}|h(\eta_{x,y})-h(\eta_x)| + \sup_{\eta\in D}|h(\eta_x)-h(\eta)|$$

$$= \sup_{\eta\in D}|h(\eta_y)-h(\eta)| + \sup_{\eta\in D}|h(\eta_x)-h(\eta)| \leq \sup|h(\eta_y)-h(\eta)| + \sup|h(\eta_x)-h(\eta)|.$$

Por outra parte, obtemos:

$$\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| \leq \sup_{\eta}|c(u,\eta_{x,y})p(u,v,\eta_{x,y})-c(u,\eta)p(u,v,\eta)| \leq$$

$$\leq \sup_{\eta}|c(u,\eta_{x,y})p(u,v,\eta_{x,y}) - c(u,\eta)p(u,v,\eta_{x,y})| +$$

$$+ \sup_{\eta}|c(u,\eta)p(u,v,\eta_{x,y}) - c(u,\eta)p(u,v,\eta)| =$$

$$= \sup_{\eta}|c(u,\eta_{x,y}) - c(u,\eta)|p(u,v,\eta_{x,y}) + \sup_{\eta} c(u,\eta)|p(u,v,\eta_{x,y})-p(u,v,\eta).$$

Agora teremos por (2.10), (2.11) e (2.12), que

$$\sum_{x,y\in S}\mu(x,y)\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| = \sum_{x,y\in S}c(x)p(x,y)\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| \leq$$

$$\leq \sum_{x,y\in S} c(x)p(x,y)\{p(u,v)[\sup_{\eta}|c(u,\eta_x)-c(u,\eta)|+\sup_{\eta}|c(u,\eta_y)-c(u,y)|] +$$

$$+ c(u)[\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_x)-p(u,v,\eta)|+\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_y)-p(u,v,\eta)|]\} =$$

$$= p(u,v)\sum_{x}(\sup_{\eta}|c(u,\eta_x)-c(u,\eta)|\sum_{y}c(x)p(x,y)) +$$

$$+ p(u,v)\sum_{y}(\sup_{\eta}|c(u,\eta_y)-c(u,\eta)|\sum_{x}c(x)p(x,y)) +$$

$$+ c(u)\sum_{x}(\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_x)-p(u,v,\eta)|\sum_{y}c(x)p(x,y)) +$$

$$+ c(u)\sum_{y}(\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_y)-p(u,v,\eta)|\sum_{x}c(x)p(x,y)) \leq$$

$$\leq p(u,v)(\sup_{x}\sum_{y}c(x)p(x,y))\sum_{x}\sup_{\eta}|c(u,\eta_x)-c(u,\eta)| +$$

$$+ p(u,v)(\sup_{y}\sum_{x}c(x)p(x,y))\sum_{y}\sup_{\eta}|c(u,\eta_y)-c(u,\eta)| +$$

$$+ c(u)(\sup_{x}\sum_{y}c(x)p(x,y))\sum_{x}\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_x)-p(u,v,\eta)| +$$

$$+ c(u)(\sup_{y}\sum_{x}c(x)p(x,y))\sum_{y}\sup_{\eta}|p(u,v,\eta_y)-p(u,v,\eta)| \leq$$

$$\leq c(u)p(u,v)\sup_{x}\sum_{y}c(x)p(x,y) + p(u,v)c(u)\sup_{y}\sum_{x}c(x)p(x,y) +$$

$$+ p(u,v)c(u)\sup_{x}\sum_{y}c(x)p(x,y) + p(u,v)c(u)\sup_{y}\sum_{x}c(x)p(x,y) =$$

$$= 2c(u)p(u,v)\{\sup_{x}\sum_{y}c(x)p(x,y) + \sup_{y}\sum_{x}c(x)p(x,y)\} < \mu_{(u,v)}L.$$

Estamos então em condições de aplicar o Teorema 2.2. A afirmação de que o semigrupo é positivo é resultado do Lema 2.6 e do Corolário 1.8. ∎

Este teorema afirma na realidade a existência de um processo de Markov standard em K, cujo gerador infinitesimal é Ω através do seguinte teorema:

TEOREMA 2.8 - (Blumental, Rel.[1] - Seja K um espaço métrico compacto e E a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos da topologia. Seja $\{T_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo positivo fortemente contínuo de contrações definido no espaço de Banach formado pelas funções contínuas de K em R. Então, existe um processo de Markov standard com espaço de estados (K,E) e semigrupo T_t.

A parte de convergência do Teorema 2.7 é sumamente utilizada no estudo de propriedades do processo de Markov obtido. Por exemplo, Holley Ref. [3] demonstra a existência de medidas invariantes para alguns sistemas através de aproximações da medida desejada por medidas que são invariantes para os processos que correspondem a $T_t^{S_n}$.

Vejamos uma versão simplificada do Teorema 2.7 que mantém uma suficiente generalidade e é de aplicação mais fácil.

COROLÁRIO 2.9 - Suponhamos que $c(x,\eta)$ e $p(x,y)$ não-negativas, satisfazem:

$$\sum_y \rho(x,y) \leq 1, \qquad \forall x \in S \tag{2.13}$$

$$\sup_y \sum_x \rho(x,y) < \infty \tag{2.14}$$

$$\sup_{x,\eta} c(x,\eta) < \infty \tag{2.15}$$

$$\sup_u \sum_x \sup_\eta |c(u,\eta_x) - c(u,\eta)| < \infty \tag{2.16}$$

Então valem as afirmações do Teorema 2.7.

DEMONSTRAÇÃO - Definamos $p(x,y,\eta) = \rho(x,y)$ se $\eta(y) = 0$ e zero no caso contrário. Tomemos $p(x,y) = 2\rho(x,y)$ e

$$c(x) = c = \max\{\sup_{x,\eta} c(x,\eta),\ \sup_u \sum_x \sup_\eta |c(u,\eta_x) - c(u,\eta)|\}, \qquad \forall x \in S.$$

Para verificar (2.10) escrevemos:

$$\sup_x c(x) \sum_{y \in S} p(x,y) = \sup_x c \sum_{y \in S} 2\rho(x,y) \le 2c$$

por (2.13) e

$$\sup_y \sum_x c(x) p(x,y) = c \sup_y 2 \sum_x \rho(x,y) < \infty$$

por (2.14).

(2.11) segue de forma imediata de (2.16) e da eleição de c.

Para (2.12), como $\eta_x(v) = \eta(v)$, $\forall \eta \in K$, $x \ne v$, teremos que $p(u,v,\eta_x) = p(u,v,\eta)$, $\forall \eta \in K$, $x \ne u$ pelo qual

$$\sum_{x \in S} \sup_\eta |p(u,v,\eta_x) - p(u,v,\eta)| = \sup_\eta |p(u,v,\eta_v) - p(u,v,\eta)| \le 2\rho(u,v). \blacksquare$$

<u>EXEMPLOS</u> -

a) Podemos ver facilmente que se a matriz de transição $\rho(x,y)$ é simétrica, onde as filas verificam (2.13), então também verifica-se (2.14). Algo análogo ocorre se S é um grupo abeliano discreto (tem definido uma operação +, comutativa que possui inversa e unidade) e além disso $\rho(x,y) = \rho(0,y-x)$ uma vez que:

$$\sum_x \rho(x,y) = \sum_x \rho(0,y-x) = \sum_u \rho(0,u) \le 1, \qquad \forall y \in S.$$

b) Em relação às condições que impusemos sobre $c(x,\eta)$ no corolário, suponhamos que $c(x,\eta)$ depende de η através de não mais que K coordenadas $\forall x \in S$, $c(x,\eta) \in F$, $\forall x \in S$, (por exemplo, $S = \mathbb{Z}^d$ e a velocidade de transição da partícula depende do estado de ocupação dos vértices adjacentes) e que vale (2.15).

Seja

$$M = \sup_{x,\eta} c(x,\eta) \quad \text{e} \quad A_x \subset S$$

o conjunto de coordenadas das quais depende $c(x,\eta)$. $|A_x| \leq k$, $\forall x \in S$. Teremos:

$$\sup_x \sum_{u \in S} \sup_\eta |c(x,\eta_u)-c(x,\eta)| = \sup_x \sum_{u \in A_x} \sup_\eta |c(x,\eta_u)-c(x,\eta)| \leq$$

$$\leq \sup_x \sum_{u \in A_x} 2M \leq \sup_x |A_x| 2M \leq 2kM$$

e concluímos que se verifica (2.16).

c) (Este exemplo é de interesse em Mecânica Estatística). Seja $V(x,y)$ um potencial definido em $S \times S$

$$(V(x,x) = cte, \quad \forall x \in S \text{ e } V(x,y) = V(y,x))$$

que verifica:

$$\sup_x \sum_{y \in S} |V(x,y)| = L < \infty \tag{2.17}$$

Se definimos:

$$c(x,\eta) = \exp\left\{ \sum_{y:\eta(y)=1} V(x,y) \right\}, \qquad \forall \eta : \eta(x)=1$$

$c(x,\eta)$ é contínua como função de η, $\forall x \in S$ e se satisfaz (2.15) e (2.16).

Como $\{\eta : \eta(x)=0\}$ é aberto em K e $c(x,y)$ é nula sobre este conjunto, se segue que é contínua $\forall \eta : \eta(x)=0$. Seja η_0: $\eta_0(x)=1$. Dado $\varepsilon > 0$, por (2.17)

$$\sum_y |V(x,y)| < \infty$$

e podemos tomar um subconjunto finito $A \subset S$ (no qual incluímos x) tal que:

$$\sum_{y\notin A} |V(x,y)| < 1.$$

Analogamente tomemos B finito tal que $A \subset B \subset S$ e

$$\sum_{y\notin B} |V(x,y)| < \varepsilon/2e^2 \exp\left\{\sum_{y\in A} |V(x,y)|\right\}.$$

Consideremos $U = \{\eta\colon \eta(u) = \eta_0(u),\ \forall u\in B\}$. U é aberto, $\eta_0 \in U$, $\forall \eta \in U$

$$|c(x,\eta)-c(x,\eta_0)| = \left|\exp\left\{\sum_{y:\eta(y)=1} V(x,y)\right\} - \exp\left\{\sum_{y:\eta_0(y)=1} V(x,y)\right\}\right| =$$

$$= \exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\in A}} V(x,y)\right\}\exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\in B-A}} V(x,y)\right\}\left|\exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y)\right\} -\right.$$

$$\left.- \exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y)\right\}\right| = \exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\in A}} V(x,y)\right\}\exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\in B-A}} V(x,y)\right\}\cdot$$

$$\cdot e^{\xi}\left|\sum_{\substack{y:\eta(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y) - \sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y)\right|.$$

onde

$$\xi \in \left[\sum_{\substack{y:\eta(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y),\ \sum_{\substack{y:\eta_0(y)=1\\ y\notin B}} V(x,y)\right] \subset [-1,1]$$

$$\le \exp\left\{\sum_{y\in A} |V(x,y)|\right\}\exp\left\{\sum_{y\in B-A} |V(x,y)|\right\}2e \sum_{y\notin B} |V(x,y)| < \varepsilon'$$

e portanto $c(x,\eta)$ é contínua em η_0.

(2.15) se segue de:

$$\sup_{x,\eta} c(x,\eta) = \sup_{x,\eta} \exp\left\{\sum_{y:\eta(y)=1} V(x,y)\right\} \le \sup_{x,\eta} \exp\left\{\sum_{y:\eta(y)=1} |V(x,y)|\right\} =$$

$$= \sup_{x} \exp\left\{\sum_{y\in S} |V(x,y)|\right\} < \infty \quad \text{por } (2.17).$$

Por último

$$\sup_{x} \sum_{u} \sup_{\eta} |c(x,\eta_u) - c(x,\eta)| =$$

$$= \sup_{x} \sum_{u} \sup_{\eta} \left|\exp\left\{\sum_{y:\eta_u(y)=1} V(x,y)\right\} - \exp\left\{\sum_{y:\eta(y)=1} V(x,y)\right\}\right| =$$

$$= \sup_{x} \sum_{u} \sup_{\eta} \exp\left\{\sum_{\substack{y:\eta(y)=1\\ y\neq u}} V(x,y)\right\} |e^{V(x,u)} - 1| \le$$

$$\le \sup_{x} \exp\left\{\sum_{y\in S} |V(x,y)|\right\} \sum_{u} |e^{V(x,u)} - e^{0}| \le$$

$$\le e^{L} \sup_{x} \sum_{u} e^{\xi_{x,u}} |V(x,u)| \le e^{2L} \sup_{x} \sum_{u} |V(x,u)| \le Le^{2L}$$

onde $\xi_{x,u} \in [0, V(x,u)]$ ou $\xi_{x,u} \in [V(x,u), 0]$ e portanto $|\xi_{x,u}| \le L$.

Concluimos então que se verifica (2.16).

2.3 - SISTEMA "LATTICE SPIN"(*)

Como na secção anterior, tentaremos aplicar o resultado sobre a existência do parágrafo 1. Começaremos por

(*) Dada a semelhança do desenvolvimento desta secção com a secção 2, para não sobrecarregar desnecessariamente a exposição abreviamos algumas definições e comentários que são análogas aos da secção anterior.

descrever este modelo.

Consideremos novamente um conjunto enumerável S, aonde cada ponto de S será ocupado por uma partícula. Seja F o conjunto de estados possíveis de qualquer partícula. Em qualquer instante de tempo cada partícula estará em algum estado $\phi \in F$. Nesse sistema, as partículas não mudam de lugar, mas apenas mudam de estado.

Temos então, que a configuração de todo sistema pode ser dado por um ponto $\eta \in K = F^S$. Suponhamos F métrico compacto, K com a topologia produto e por conseguinte, também métrico compacto.

Como no sistema anterior, a velocidade de transição de uma partícula em $x \in S$ será dada por uma função $c(x,\eta)$ não negativa, definida em $S \times K$. No intervalo de tempo Δt, sendo η a configuração inicial, tentará uma transição com probabilidade $c(x,\eta)\Delta t + o(\Delta t)$, e se a realiza, mudará do estado $\eta(x)$ para outro estado $\phi \in F$ de acordo com uma função de transição $p(\eta(x), d\phi)$ definida em F que será uma medida de probabilidade.

Se definirmos para $x \in S$, $\phi \in F$

$$\eta_x^\phi(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } y \neq x \\ \phi & \text{se } y = x \end{cases}$$

ou seja, η_x^ϕ muda η na coordenada x; a escolha intuitiva do gerador infinitesimal do processo é:

$$\Omega_0 f(\eta) = \sum_{x \in S} c(x,\eta) \int_F [f(\eta_x^\phi) - f(\eta)] p(\eta(x), d\phi) \tag{3.1}$$

Para colocarmos o problema em termos do parágrafo 1, observamos em primeiro lugar que para $x \in S$ e $\eta \in K$, se

$\phi_n \longrightarrow \phi$ em F, então $\eta_x^{\phi_n} \longrightarrow \eta_x^{\phi}$ dado que converge coordenada a coordenada

$$(\eta_x^{\phi_n}(y) = \eta_x^{\phi}(y), \forall y \neq x \quad \text{e} \quad \eta_x^{\phi_n}(x) = \phi_n \longrightarrow \eta_x^{\phi}(x) = \phi);$$

segue-se que a função $\phi \longrightarrow \eta_x^{\phi}$ de F em K é contínua.

Para $f \in E = C(K)$, $f(\eta_x^{\phi})$ é então contínua como função de ϕ e tem sentido falar do integral

$$\int_F f(\eta_x^{\phi}) p(\eta(x), d\phi). \tag{3.2}$$

Suporemos que a função de transição $p(\psi, d\phi)$ satisfaz a seguinte condição de regularidade: a aplicação

$$\psi \longrightarrow p(\psi, d\phi)$$

é contínua como função de ψ no espaço das medidas de probabilidade definidas em F, munido da topologia fraca.(*)

<u>LEMA 2.10</u> - Da condição de regularidade imposta, segue que a expressão (3.2) como função de η é contínua, $\forall f \in E$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Queremos demonstrar que se $\eta_n \longrightarrow \eta$ em K, então

$$\int_F f(\eta_{n,x}^{\phi}) p(\eta_n(x), d\phi) \longrightarrow \int_F f(\eta_x^{\phi}) p(\eta(x), d\phi).$$

(*) Dizemos que uma sequência $\{\mu_n\}$ de medidas sobre X converge fracamente para uma medida μ se $\forall$ função h contínua sobre X se verifica:

$$\int_X h(x) \mu_n(dx) \longrightarrow \int_X h(x) \mu(dx).$$

Em nosso caso, que a aplicação $\psi \longrightarrow p(\psi, d\phi)$ seja contínua equivale a dizer que se ψ_n converge para ψ

$$\int_F h(\phi) p(\psi_n, d\phi) \longrightarrow \int_F h(\phi) p(\psi, d\phi).$$

onde $\eta^{\phi}_{n,x}$ denota a mudança para ϕ na coordenada x em η_n.

Escrevemos:

$$\left|\int_F f(\eta^{\phi}_{n,x})p(\eta_n(x),d\phi) - \int_F f(\eta^{\phi}_x)p(\eta(x),d\phi)\right| \leq$$

$$\left|\int_F f(\eta^{\phi}_{n,x})p(\eta_n(x),d\phi) - \int_F f(\eta^{\phi}_x)p(\eta_n(x),d\phi)\right| \qquad (1)$$

$$\left|\int_F f(\eta^{\phi}_x)p(\eta_n(x),d\phi) - \int_F f(\eta^{\phi}_x)p(\eta(x),d\phi)\right| \qquad (2)$$

Como $\eta_n \longrightarrow \eta$ então $\eta^{\phi}_{n,x} \longrightarrow \eta^{\phi}_x$, $\forall\phi\in F$ do que se segue que

$$f(\eta^{\phi}_{n,x}) \longrightarrow (\eta^{\phi}_n), \ \forall\phi\in F.$$

Agora bem, a convergência pontual implica a convergência uniforme pois F é métrico compacto (lembremos que tanto $f(\eta^{\phi}_{n,x})$ como $f(\eta^{\phi}_x)$ são contínuas com funções de ϕ), teremos:

$$\left|\int_F [f(\eta^{\phi}_{n,x})-f(\eta^{\phi}_x)]p(\eta_n(x),d\phi)\right| \leq \left|\sup_{\phi} f(\eta^{\phi}_{n,x})-f(\eta^{\phi}_x)\right|$$

pelo qual esse termo tende a zero para $n \to \infty$.

Da condição de regularidade segue que (2) $\to 0$ para $n \to \infty$. ∎

Usando esse lema, a expressão:

$$U_x f(\eta) = \int_F [f(\eta^{\phi}_x)-f(\eta)]p(\eta(x),d\phi) = \int_F f(\eta^{\phi}_x)p(\eta(x),d\phi)-f(\eta) \qquad (3.3)$$

define $\forall x\in S$ um operador de E em E, que ademais é limitado ($\|U_x f\| \leq 2\|f\|$).

Exigiremos que $c(x,\eta)$ seja contínua como função de η, $\forall x\in S$. Temos então que $\sup_{\eta} c(x,\eta) < \infty$ por ser K compacto, e

$$M_x f(\eta) = c(x,\eta)f(\eta) \qquad (3.4)$$

também define $\forall x \in S$ um operador de E em E limitado, com

$$\|M_x\| \leq \sup_{\eta} c(x,\eta).$$

De forma análoga à secção anterior, podemos tomar uma sequência $\{S_n\}$ crescente de subconjuntos de S tal que $|S_n| = n$ e $S_n \uparrow S$, definindo

$$\Omega_{S_n} = \sum_{x \in S_n} M_x U_x \tag{3.5}$$

e considerar ao operador Ω_0 definido em (3.1) como o limite (no sentido de (1.1)) da sequência de operadores $\{\Omega_{S_n}\}_{n \in N}$.

LEMA 2.11 - O operador Ω_{S_n} definido em (3.5) é dissipativo, $\forall n \in N$.

A demonstração é muito semelhante a do Lema 2.3. Seja $F \subset E$, como no parágrafo 2, o conjunto das funções contínuas que dependem no máximo de um número finito de coordenadas. Teremos:

LEMA 2.12 - F é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO - A forma para demonstrar é idêntica à demonstração do Lema 2.4. Com os mesmos argumentos temos que F é uma álgebra que contém as constantes. Para demonstrar que F separa pontos seja $\eta, \zeta \in K$, $\eta \neq \zeta$. Para algum $x \in S$, $\eta(x) \neq \zeta(x)$ e como F é métrico, pelo Lema de Urysohn existe uma função contínua h_0 em F, tal que $h_0(\eta(x))=1$ e $h_0(\zeta(x))=0$. Extendemos essa função h_0 a todo K como

$$h(\xi) = h_0(\xi(x)).$$

É imediato que h é contínua e está em F. Aplicando o Teorema de Stone-Weiezstrass segue a afirmação. ∎

Impomos sobre $c(x,\eta)$ a seguinte restrição razoável:

$$\sup_{x,\eta} c(x,\eta) = \mu < \infty \tag{3.6}$$

$\|M_x\| \leq \mu$, $\forall x \in S$ e definimos $\mu_x = \mu$, $\forall x \in S$.

Podemos considerar agora, seguindo o desenvolvimento do parágrafo 1 (ver 1.2) o conjunto:

$$C = \left\{ f \in E : \sum_{x \in S} \mu_x \| U_x f \| < \infty \right\}$$

sobre o qual temos garantido que está definido o operador Ω_0 e demonstramos a seguir.

LEMA 2.13 - C é denso em E.

DEMONSTRAÇÃO - Basta demonstrar que $F \subset C$, e para isto, seja $f \in F$ e $A \subset S$ o conjunto finito de coordenadas das quais depende f. Como $\forall x \notin A$, $f(\eta_x^\phi) = f(\eta)$, $\forall \eta \in K$ e temos:

$$U_x f(\eta) = \int_F [f(\eta_x^\phi) - f(\eta)] p(\eta(x), d\phi) = 0, \qquad \forall \eta \in K$$

do que se segue que $\|U_x f\| = 0$, $\forall x \notin A$. Teremos então

$$\sum_{x \in S} \mu_x \|U_x f\| = \sum_{x \in A} \mu \|U_x f\| \leq 2\|f\| \mu |A| < \infty. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.14 - Suponhamos que $c(x,\eta)$ verifica (3.6) e

$$\sup_y \sum_x \sup_{\eta,\phi} |c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)| < \infty \tag{3.7}$$

Então o operador Ω, fecho do operador Ω_0 definido em (3.1) gera um único semigrupo positivo fortemente contínuo de contrações $\{T_t\}_{t \geq 0}$ em E, que corresponde a um único processo de Markov standard em K com gerador Ω. Ademais, se $\{T_t^{S_n}\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador Ω_{S_n} definido em (3.5) teremos:

$$\lim_{S_n \uparrow S} \sup_{0 \le t \le t_0} \| T_t^{S_t} - T_t f \| = 0, \qquad \forall t_0 \ge 0, \ \forall f \in E.$$

DEMONSTRAÇÃO - Em primeiro lugar, verificaremos que estamos nas condições do Teorema 2.2. Já vimos no Lema 2.13 que C é denso em E. Só resta fazê-lo com (1.5) e (1.6). Para $x \neq y$, escrevemos:

$$(U_x U_y f)(\eta) = \int_F [U_y f(\eta_x^\phi) - U_y f(\eta)] p(\eta(x), d\phi) =$$

$$= \int_F \left\{ \int_F [f((\eta_x^\phi)_y^\psi) - f(\eta_x^\phi)] p(\eta_x^\phi(y), d\psi) - \right.$$

$$\left. - \int_F [f(\eta_y^\psi) - f(\eta)] p(\eta(y), d\psi) \right\} p(\eta(x), d\phi)$$

$\eta_x^\phi(y) = \eta(y)$ e portanto $p(\eta_x^\phi(y), d\psi) \equiv p(\eta(y), d\psi)$

$$= \int_F \left\{ \int_F [f((\eta_x^\phi)_y^\psi) - f(\eta_x^\phi) - f(\eta_y^\psi) + f(\eta)] p(\eta(y), d\psi) \right\} p(\eta(x), d\phi) =$$

como f é limitado, podemos aplicar Fubini,

$$= \int_F \left\{ \int_F [f((\eta_y^\psi)_x^\phi) - f(\eta_y^\psi) - (f(\eta_x^\phi) - f(\eta))] p(\eta(x), d\phi) \right\} p(\eta(y), d\psi) =$$

$$= \int_F \left\{ \int_F [f((\eta_y^\psi)_x^\phi) - f(\eta_y^\psi)] p(\eta_y^\psi(x), d\phi) - \int_F [f(\eta_x^\phi) - f(\eta)] p(\eta(x), d\phi) \right\} p(\eta(y), d\psi) =$$

$$= \int_F [(U_x f)(\eta_y^\psi) - (U_x f)(\eta)] p(\eta(y), d\psi) = (U_y U_x f)(\eta).$$

Concluimos que U_x e U_y comutam do que segue-se que $\gamma(U_x, U_y) = 0$, $\forall x, y \in S$ e a condição (1.5) se verifica automaticamente.

Tomemos:

$$L = \sup_y \sum_x \sup_{\eta,\phi} |c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)|$$

Dado que $\mu_x = \mu$ constante $\forall x \in S$, a condição (1.6) fica simplesmente como:

$$\sum_{x \in S} \| [U_x, M_y] \| \leq L, \qquad \forall y \in S.$$

Calculemos:

$$[U_x, M_y] f(\eta) = U_x M_y f(\eta) - M_y U_x f(\eta) =$$

$$= \int_F (M_y f)(\eta_x^\phi) p(\eta(x), d\phi) - M_y f(\eta) - c(y,\eta) U_x f(\eta) =$$

$$= \int_F c(y,\eta_x^\phi) f(\eta_x^\phi) p(\eta(x), d\phi) - c(y,\eta) f(\eta)$$

$$- c(y,\eta) \int_F f(\eta_x^\phi) p(\eta(x), d\phi) + c(y,\eta) f(\eta) =$$

$$= \int_F [c(y,\eta_x^\phi) f(\eta_x^\phi) - c(y,\eta) f(\eta_x^\phi)] p(\eta(x), d\phi) =$$

$$= \int_F [c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)] f(\eta_x^\phi) p(\eta(x), d\phi),$$

do que segue-se que:

$$|[U_x, M_y] f(\eta)| = \left| \int_F [c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)] f(\eta_x^\phi) p(\eta(x), d\phi) \right| \leq$$

$$\leq \int_F \left| c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta) \right| |f(\eta_x^\phi)| p(\eta(x), d\phi) \leq \sup_\phi |c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)| \; |f(\eta_x^\phi)|$$

pelo qual

$$\| [U_x, M_y] f \| \leq \sup_{\phi,\eta} |c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)| \; |f(\eta_x^\phi)| \leq \sup_{\phi,\eta} |c(y,\eta_x^\phi) - c(y,\eta)| \; \|f\|$$

e temos:

$$\sum_{x\in S} \| [U_x, M_y] \| \le \sum_{x} \sup_{\phi,\eta} | c(y,\eta_x^{\phi}) - c(y,\eta) | \le L.$$

Do teorema 2.2 se segue então, que Ω gera um único semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T_t\}_{t\ge 0}$, assim como a afirmação sobre a convergência de semigrupos $\{T_t^{S_n}\}_{t\ge 0}$.

Que T_t seja positivo se segue de demonstrar que $(I-\lambda\Omega)$ é positivo (de forma análoga ao Lema 2.6) e o corolário 1.8. Por último, o Teorema 2.8 nos garante a existência do processo de Markov standart. ∎

<u>EXEMPLO</u> - Tomemos $F = \{-1,+1\}$ com a topologia discreta. É claro que se uma partícula em $x\in S$ se encontra no estado $\eta(x)$, ao realizar uma transição irá ao estado $-\eta(x)$ e portanto $p(\eta(x),d\phi)$ é uma função de probabilidade discreta definida como:

$$p(\eta(x),d\phi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi = -\eta(x) \\ 0 & \text{se } \phi = \eta(x) \end{cases}$$

e facilmente verifica-se a condição de regularidade exigida uma vez que toda sequência convergente em F é quase constante.

Suponhamos que para cada subconjunto finito $T\subset S$ tenhamos associado um valor J_T.

Definimos:

$$\sigma_T(\eta) = \prod_{x\in T} \eta(x), \qquad \eta\in K$$

Ou seja, $\sigma_T(\eta) = -1$, se a quantidade de coordenadas de η em T cujo valor é -1, é um número impar e $\sigma_T(\eta) = 1$ em caso contrário.

Tomemos:

$$c(x,\eta) = \exp\left\{\sum_{T:x\in T} J_T\sigma_T(\eta)\right\}$$

onde T é sempre finito.

Este exemplo é de interesse na física e a pergunta que nos aparece é que restrições devemos estabelecer para cair nas condições do Teorema anterior. Uma condição suficiente será:

$$\sup_{y\in S} \sum_{T:y\in T} |J_T|\,|T| < \infty \tag{3.9}$$

onde $|T|$ denota o cardinal de T.

É claro que a partir desta restrição, $c(x,\eta)$ definida em (3.8) está bem definida, e verifica (3.6), pois:

$$c(x,\eta) = \exp\left\{\sum_{T:x\in T} J_T\sigma_T(\eta)\right\} \le \exp\left\{\sum_{T:x\in T} |J_T|\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\sum_{T:x\in T} |J_T|\,|T|\right\} \le \exp\left\{\sup_{y} \sum_{T:y\in T} |J_T|\,|T|\right\} < \infty, \qquad \forall x\in S,\ \eta\in K.$$

Mostremos que $c(x,\eta)$ é contínua como função de η. Seja $\eta_0\in K$ e $\mathcal{D} = \{T\subset S: x\in T \text{ e } |T| < \infty\}$. Como $\sum_{T\in\mathcal{D}} |J_T| < \infty$ podemos tomar $A\subset\mathcal{D}$, A finito tal que:

$$\sum_{T\in\mathcal{D}-A} |J_T| < 1 \tag{3.10}$$

De forma análoga tomemos $B\subset\mathcal{D}-A$, finito tal que

$$\sum_{T\in F} |J_T| < \varepsilon/2e^2 \exp\left\{\sum_{T\in A} |J_T|\right\}$$

onde $F = \mathcal{D}-A-B$.

Seja

$$I = \bigcup_{T\in A\cup B} T,$$

I é finito e definimos $U = \{\eta : \eta(y) = \eta_0(y),\ \forall y\in I\}$. Temos que U é aberto, $\eta_0 \in U$ e $\forall \eta\in U$, $\sigma_T(\eta) = \sigma_T(\eta_0)$, $\forall T\in A\cup B$.

$$|c(x,\eta) - c(x,\eta_0)| = \left|\exp\left\{\sum_{T\in D} J_T\sigma_T(\eta)\right\} - \exp\left\{\sum_{T\in D} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\right| =$$

$$= \exp\left\{\sum_{T\in A} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\exp\left\{\sum_{T\in B} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\left|\exp\left\{\sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta)\right\} - \exp\left\{\sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\right| =$$

$$= \exp\left\{\sum_{T\in A} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\exp\left.\sum_{T\in B} J_T\sigma_T(\eta_0)\right\}\cdot e^{\xi}\left|\sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta) - \sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta_0)\right|$$

$$\text{onde } \xi\in\left[\sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta),\ \sum_{T\in F} J_T\sigma_T(\eta_0)\right]\subset[-1,1]$$

$\le \exp\left\{\sum_{T\in A} |J_T|\right\}\exp\left\{\sum_{T\in B} |J_T|\right\}e\cdot 2\sum_{T\in F} |J_T| < \varepsilon$ por (3.10) e (3.11) dado que $B\subset D-A$. Concluimos que $c(x,\eta)$ é contínua em η_0.

Só nos resta agora ver que (3.7) está satisfeita, definimos

$$\eta_x(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } y \neq x \\ -\eta(y) & \text{se } y = x \end{cases}$$

Então:

$$\sup_y \sum_x \sup_{\eta,\phi} |c(y,\eta_x^{\phi}) - c(y,\eta)| = \sup_y \sum_x \sup_{\eta} |c(y,\eta_x) - c(y,\eta)| =$$

$$= \sup_y \sum_x \sup_{\eta} \left|\exp\left\{\sum_{T:y\in T} J_T\sigma_T(\eta_x)\right\} - \exp\left\{\sum_{T:y\in T} J_T\sigma_T(\eta)\right\}\right| =$$

$$= \sup_y \sum_x \sup_{\eta} \exp\left\{\sum_{\substack{T:y\in T\\ x\notin T}} J_T\sigma_T(\eta)\right\}\cdot\left|\exp\{\sum_{T:x,y\in T} J_T\sigma_T(\eta_x)\}-\exp\{\sum_{T:x,y\in T} J_T\sigma_T(\eta)\}\right| \le$$

$$\leq \sup_{y} \sum_{x} \exp\left\{ \sum_{\substack{T:y\in T \\ x\notin T}} |J_T| \right\} \cdot 2 \exp\left\{ \sum_{T:x,y\in T} |J_T| \right\} \leq$$

$$\leq 2 \sup_{y} \exp\left\{ \sum_{T:y\in T} |J_T| \right\} \sum_{x} \exp\left\{ \sum_{T:x,y\in T} |J_T| \right\} \leq$$

por ser a exponencial uma função côncava

$$\leq 2 \sup_{y} \exp\left\{ \sum_{T:y\in T} |J_T| \right\} \exp\left\{ \sum_{x} \sum_{T:x,y\in T} |J_T| \right\} =$$

$$= 2 \sup_{y} \exp\left\{ \sum_{T:y\in T} |J_T| \right\} \exp\left\{ \sum_{\substack{T:y\in T \\ |T|\geq 2}} |J_T|(|T|-1) \right\} =$$

$$= 2 \sup_{y} \exp\left\{ \sum_{T:y\in T} |J_T||T| \right\} = 2 \exp\left\{ \sup_{y} \sum_{T:y\in T} |J_T||T| \right\} < \infty$$

por (3.9).

2.4 - MODELO DE INTERAÇÃO DE ALCANCE NULO(*)

Este modelo nós podemos descrever da seguinte maneira: consideremos novamente um conjunto numerável S como suporte do sistema e admitiremos a possibilidade de mais de uma partícula em qualquer ponto de S pelo qual nenhum salto será suprimido. As partículas serão indistinguíveis e para descrever sua velocidade de transição teremos uma função $\phi: N \longrightarrow R_+$, $N = \{0,1,2,3,...\} \cdot \phi(m)$ representará a velocidade de uma partícula em um ponto de S onde haja m partículas. Ou seja, a velocidade de transição de uma partícula depende

(*) Esta secção tem o mesmo desenvolvimento que as secções anteriores e e omitiremos repetições desnecessárias, colocando as referências adequadas.

rá unicamente do número de partículas que estão em sua mesma posição.

Exigiremos que

$$\lim_{m\to\infty} m\phi(m)$$

exista e seja finito. Isto implica as partículas tendem a permanecer no mesmo lugar na medida em que o número delas cresce numa mesma posição.

As partículas mudam de um ponto a outro de S de acordo com uma função de transição $p(x,y)$ definida em $S\times S$.

Em N consideraremos a topologia discreta. Seria natural tomar N^S como espaço de estados, mas por razões técnicas tomaremos $K = \bar{N}^S$ onde $\bar{N} = N\cup\{\infty\}$ com a topologia de compactificação por um ponto (*).

Além de ser compacto, é fácil ver que $\bar{N}$ é metrizável e portanto K também será métrico compacto.

Seja $\Gamma: \bar{N} \longrightarrow R_+$ definida como:

$$\Gamma(m) = m\phi(m), \quad \forall m\in N$$

$$\Gamma(\infty) = \lim_{m\to\infty} m\phi(m)$$

Γ é uma função contínua sobre $\bar{N}$, pois qualquer sequência convergente em $\bar{N}$, ou é quase constante ou converge a ∞ e Γ é contínua em ∞ da forma como foi definido $\Gamma(\infty)$.

Definindo:

$$c(x,\eta) = \Gamma(\eta(x)), \qquad \forall x\in S, \ \forall\eta\in K \tag{4.1}$$

(*) É possível provar que se o estado inicial do processo está em N^S, então com probabilidade igual a 1, o processo nunca deixa N^Z e portanto a inclusão do ponto ∞ não traz inconvenientes.

e

$$\eta_{x,y}(u) = \begin{cases} \eta(u) & \text{se } u \neq x,y \text{ ou } \eta(x) = 0 \\ \eta(u)+1 & \text{se } u = y \text{ e } \eta(x) \neq 0 \\ \eta(u)-1 & \text{se } u = x \text{ e } \eta(x) \neq 0 \end{cases}$$

onde usamos a convenção de que $\infty \pm 1 = \infty$.

A escolha do gerador infinitesimal para o processo descrito será:

$$\Omega_0 f(\eta) = \sum_{x,y \in S} c(x,\eta) p(x,y) [f(\eta_{x,y}) - f(\eta)] \tag{4.2}$$

onde $f \in E = C(K)$.

Observemos que para $\eta(x) = 0$, $c(x,\eta) = 0$ e os termos correspondentes da série se anulam.

Sejam:

$$U_{(x,y)} f(\eta) = f(\eta_{x,y}) - f(\eta), \tag{4.3}$$

$$M_{(x,y)} f(\eta) = c(x,\eta) p(x,y) f(\eta). \tag{4.4}$$

Se $\eta^{(n)} \longrightarrow \eta$, então converge coordenada a coordenada do que segue que $\eta^{(n)}_{x,y}$ converge para $\eta_{x,y}$ coordenada a coordenada, ou seja

$$\eta^{(n)}_{x,y} \longrightarrow \eta_{x,y}.$$

Temos que, $\eta_{x,y}$ é contínua como função de η e portanto, (4.3) define um operador de E em E. Conclui-se facilmente que $\|U_{(x,y)}\| \leq 2$, $\forall x,y \in S$.

A projeção $\eta(x)$ é contínua como função de η e já vimos que Γ é contínua, por composição, $c(x,\eta) = \Gamma(\eta(x))$ tam bém o é. $M_{(x,y)}$ é então um operador de E em E. Como

$$\lim_{m\to\infty} m\phi(m) < \infty,$$

podemos escolher c: $\Gamma(m) \le c$, $\forall m \in \bar{N}$ e temos:

$$\sup_{x,\eta} c(x,\eta) \le c, \quad \|M_{(x,y)}\| \le cp(x,y), \qquad \forall x,y \in S.$$

Consideremos, como já fizemos no parágrafo 2, uma sequência crescente $\{S_n\}_{n\in N}$ de subconjuntos finitos $S\times S$ tal que $|S_n| = n$, $S_n \uparrow S\times S$; e definimos:

$$\Omega_{S_n} = \sum_{(x,y)\in S_n} M_{(x,y)} U_{(x,y)} \qquad (4.5)$$

Ω_0 definido em (4.2) é o limite da sequência Ω_{S_n} no sentido de (1.1) e como no Lema 2.3, demonstramos que os operadores Ω_{S_n} são dissipativos.

Consideramos novamente o conjunto $F \subset E$ das funções que dependem de um número finito de coordenadas; pelo Lema 2.12, F é denso em E.

Tomemos $\mu_{(x,y)} = cp(x,y)$ e seja $C \subset E$ o conjunto como em (1.2).

<u>LEMA 2.15</u> - Suponhamos que

$$\sup_x \sum_y p(x,y) < \infty, \quad \sup_y \sum_x p(x,y) < \infty \qquad (4.6)$$

Então C é denso em E.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u> - Seja $f \in F$ e $A \subset S$ o conjunto de coordenadas das quais depende f, $|A| < \infty$.

Para $x,y \notin A$, $f(\eta_{x,y}) = f(\eta)$, $\forall \eta \in K$, do qual se segue que $\|U_{(x,y)}f\| = 0$.

Temos:

$$\sum_{x,y\in S} \mu_{(x,y)} \|U_{(x,y)}f\| = \sum_{\substack{x,y\in S \\ x\in A \text{ ou } y\in A}} \mu_{(x,y)} \|U_{(x,y)}f\| \leq$$

$$\leq \sum_{x\in A} \sum_{y\in S} cp(x,y)\ 2\|f\| + \sum_{y\in A} \sum_{x\in S} cp(x,y)\ 2\|f\| \leq$$

$$\leq 2c\|f\|\,|A|\left\{\sup_{x} \sum_{y\in S} p(x,y) + \sup_{y} \sum_{x\in S} p(x,y)\right\} < \infty.$$

Teremos então que $F\subset C$ e portanto C é denso em E. ∎

TEOREMA 2.16 - Se $p(x,y)$ satisfaz (4.6) então o operador Ω, fecho do operador Ω_0 definido em (4.2), gera um único semigrupo positivo, fortemente contínuo de contrações $\{T_t\}_{t\geq 0}$ em E, que corresponde a um único processo de Markov standart em K com gerador Ω. Além disso, se $\{T_t^{S_n}\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado pelo operador Ω_{S_n} definido em (4.5) teremos:

$$\lim_{S_n\uparrow S\times S}\ \sup_{0\leq t\leq t_0} \|T_t^{S_n} - T_t f\| = 0, \qquad \forall t_0\geq 0,\ \forall f\in E.$$

DEMONSTRAÇÃO - Devemos verificar as condições (1.5) e (1.6), o resto da demonstração é igual a do Teorema 2.14.

Tomemos:

$$L = 4c\left\{\sup_{x} \sum_{y} p(x,y) + \sup_{y} \sum_{x} p(x,y)\right\}.$$

Observemos que para $\{x,y\}\cap\{u,v\}=\emptyset$, $U_{(x,y)}$ e $U_{(u,v)}$ comutam e portanto $\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)})=0$. Caso contrário, como $\|U_{(x,y)}\| \le 2$, $\forall(x,y)\in S\times S$, $\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)}) \le 2$ para $\{x,y\}\cap\{u,v\}\neq\emptyset$ e teremos:

$$\sum_{x,y\in S}\mu_{(x,y)}\gamma(U_{(x,y)},U_{(u,v)}) \le \sum_{x\in\{u,v\}}\sum_{y\in S}2\mu_{(x,y)} + \sum_{y\in\{u,v\}}\sum_{x\in S}2\mu_{(x,y)} \le$$

$$\le |\{u,v\}| \sup_x \sum_y 2cp(x,y) + |\{u,v\}| \sup_y \sum_x 2cp(x,y) =$$

$$= 4c\left\{\sup_x \sum_y p(x,y) + \sup_y \sum_x p(x,y)\right\} = L, \qquad \forall(u,v)\in S\times S.$$

Concluimos que (1.5) se satisfaz.

$$|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]f(\eta)| = |U_{(x,y)},M_{(u,v)}f(\eta) - M_{(u,v)},U_{(x,y)}f(\eta)| =$$

$$= |M_{(u,v)}f(\eta_{x,y}) - M_{(u,v)}f(\eta) - c(u,\eta)p(u,v)U_{(x,y)}f(\eta)| =$$

$$= |c(u,\eta_{x,y})p(u,v)f(\eta_{x,y}) - c(u,\eta)p(u,v)f(\eta) - c(u,\eta)p(u,v)[f(\eta_{x,y})-f(\eta)]| =$$

$$= |c(u,\eta_{x,y})p(u,v)f(\eta_{x,y}) - c(u,\eta)p(u,v)f(\eta_{x,y})| =$$

$$= |c(u,\eta_{x,y}) - c(u,\eta)|p(u,v)|f(\eta_{x,y})|.$$

do que se segue que:

$$\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| \le p(u,v) \sup_\eta |c(u,\eta_{x,y}) - c(u,\eta)|.$$

Se $x,y\neq u$, $\eta_{x,y}(u)=\eta(u)$, $\forall\eta\in K$ e portanto para $x,y\neq u$, $\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\|=0$. Para qualquer outro caso

$$\|[U_{(x,y)},M_{(u,v)}]\| \le 2cp(u,v),$$

e teremos:

$$\sum_{x,y\in S} \mu_{(x,y)} \| [U_{(x,y)}, M_{(u,v)}] \| = \sum_{\substack{x,y\in S \\ x=u \text{ ou } y=u}} \mu_{(x,y)} \| [U_{(x,y)}, M_{(u,v)}] \| \leq$$

$$\leq \sum_{y\in S} \mu_{(u,y)} \, 2cp(u,v) + \sum_{x\in S} \mu_{(x,u)} 2cp(u,v) =$$

$$= 2c \left\{ \sum_{y\in S} p(u,y) + \sum_{x\in S} p(x,u) \right\} cp(u,v) \leq L\mu_{(u,v)}$$

e (1.6) se verifica. ∎

- ◊ -

APÊNDICE A

Seja E um espaço de Banach e seja $u(t)$ uma função de $[a,b]$ em E. Podemos definir a integral da função $u(t)$ de forma análoga à integral de Riemann(*). As seguintes propriedades se verificam:

A.1) Seja u uma função contínua. Se o intervalo Δ de integração é fechado e finito, teremos que u é integrável em Δ. Em geral, se $u(t)$ é majorada em norma, por uma função numérica integrável, então também u é integrável e

$$\left\| \int_\Delta u(t)dt \right\| \quad \int_\Delta \|u(t)\| dt.$$

A.2) Seja T um operador limitado e $u(t)$ uma função integrável no intervalo Δ, se verifica

$$\int_\Delta Tu(t)dt = T\left(\int_\Delta u(t)dt\right).$$

A.3) Se $u(t)$ é integrável no intervalo $[a,a+h]$ e contínua a direita de a, então

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(t)dt = u(a).$$

A.4) Se $\frac{\partial u(t)}{\partial t}$ é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b \frac{\partial u(t)}{\partial t}\, dt = u(b) - u(a).$$

(*) A integral, se existir, será um ponto de E e a convergência das somatórias sobre as partições será em relação a norma definida em E.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Blumenthal,R.M. and Getoor,R.K. (1968) - *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press.

[2] - Dynkin,E.B. (1965) - *Markov Processes*, Springer-Verlag.

[3] - Holley,R. (1970) - "A class of interactions in an infinite particle system", *Advances in Mathematics*, 5, pp.291-309.

[4] - Hönig,C.S. (1976) - *Aplicações da Topologia à Análise*, CNPq.

[5] - Kurtz,T. (1969) - "Extentions of Trotter's operator semigroup aproximation Theorems", *Journal of Functional Analysis*,3, 354-375.

[6] - Liggett,T.M. (1972) - "Existence theorems for infinite particle systems", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165, 471-481.

[7] - Liggett,T.M. (1976) -"The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles", *Ecole d'Ete de Saint-Flour*, Lecture Notes Springer-Verlag.

[8] - Revuz, *Exposição no Seminário de Sistemas do Laboratório de Probabilidade*, Universidade de Paris.

[9] - Spitzer,F. (1970) - "Interaction of Markov Processes", *Advances in Mathematics*, 5, 246-290.

- □ -