SÔBRE A TEORIA DOS PROCESSOS DE RENOVAÇÃO

MARIA ELIZA FINI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM ESTATÍSTICA TEÓRICA
ORIENTADOR: PROF. DR. FLÁVIO WAGNER RODRIGUES

JUNHO DE 1974
SÃO PAULO

Para Grácia, Eliza, Carlos, Maria Inês e Antonio Carlos pela participação constante em minhas "renovações" de todos os dias....

No caminho percorrido até esta primeira etapa, convivemos com pessoas, que pelas suas atuações em nossa formação científica, ligam-se a êste trabalho, de uma maneira que nos é muito grata e significativa.

Durante a fase das nossas primeiras inquietações, na escolha de um campo de estudo, encontramos no Prof. Abílio França Valente, a orientação segura de um grande educador.

Dêsde a época do nosso curso de graduação em Matemática, nos acompanha a figura amiga do Prof. Almerindo Marques Bastos, pelo seu constante incentivo e exemplo de Mestre.

Ingressamos na Universidade Estadual de Campinas, atravêz do então Diretor do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Prof. Dr. Rubens Murillo Marques, a quem devemos, profissionalmente, o tão importante primeiro crédito de confiança. Com o Dr. Murillo, iniciamos também os nossos estudos e cursos na área de Probabilidades.

Sob sua criteriosa indicação, conhecemos o Prof. Dr. Flávio Wagner Rodrigues, que extrapolou as funções de nosso orientador, transmitindo-nos amizade, incentivo e a sua atuação segura.

Nestas etapas, a colaboração indireta dos nossos amigos, tão importante porque desinteressada e afetuosa... .

A todos, sem distinção, agradecemos e apresentamos "Sôbre a Teoria dos Processos de Renovação" como resultado do nosso esforço conjunto

Junho 1974

I N D I C E

I N T R O D U Ç Ã O

Dentre as aplicações da Teoria das Probabilidades, os Processos de Renovação se destacam por sua grande utilidade nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas.

O início da teoria está ligado a alguns problemas particulares em Probabilidades, relativos à "falha e reposição de componentes".

O objetivo desta monografia é apresentar os resultados principais da Teoria da Renovação, com ênfase nas diversas formulações e demonstrações dos teoremas centrais, os quais, apezar de propostos sob hipóteses bastante gerais, podem responder a problemas específicos, ou, caso contrário, fornecer elementos para uma primeira análise.

Em têrmos intuitivos e simples, pode-se dizer que a Teoria da Renovação, estuda sequências de variáveis aleatórias não negativas, $\{X_k\}$, independentes e identicamente distribuídas.

O nome: Teoria da Renovação, originou-se da interpretação que se dá a cada elemento da sequência, como sendo o tempo de espera para a ocorrência de um evento.

Assim, por exemplo, êste evento poderia ser a substituição de uma peça de algum equipamento, o término do atendimento de um indivíduo no guichê de um banco, o fim de uma conversa telefônica, etc.

Podemos supôr que no instante inicial $t = 0$, é instalado um determinado ítem (isto é, começa o atendimento no guichê, do primeiro indivíduo em uma "fila de espera" ; inicia-se a primeira chamada telefônica, etc).

Este ítem, é substituído por outro do mesmo tipo, na época $t = X_1$, que por sua vez é "renovado" atravéz de outro ítem em $t = X_1 + X_2$, e assim por diante.

Desta forma, intuitivamente, estamos olhando para as variáveis aleatórias X_k , como o tempo de vida ou a duração do k-ésimo ítem instalado.

As somas parciais da sequência $\{X_k\}$, dadas por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, definem um processo de renovação e representam assim, a época em que ocorre a n-ésima substituição.

Do ponto de vista formal, estamos estudando tão sòmente, somas de variáveis aleatórias independentes, com uma distribuição F.

A forma desta função F, bàsicamente, determina os problemas da teoria, sob o ponto de vista matemático.

Todo problema em Teoria da Renovação deve ser expresso em têrmos de sequências de variáveis aleatórias do tipo mencionado. É claro que, todos os resultados gerais da Teoria das Probabilidades, que se referem a estas sequências, tem um significado especial na linguagem dos Processos de Renovação. Inversamente, quando surgem problemas análogos, ligados à outras

áreas de aplicação em Probabilidades, os resultados fundamentais da Teoria da Renovação, são usados, devido ao seu interêsse intrínsico.

De qualquer ângulo que se olhe a teoria, os estudam visam, em última análise, o conhecimento da "população" de ítens, pela determinação do comportamento do número de renovações em função do tempo.

Nesta monografia, atingimos êste objetivo, atravêz de várias fases, distribuídas em capítulos, como se segue:

O capítulo 1, contêm algumas definições e resultados sôbre funções distribuição, restritos às suas aplicações no restante do trabalho.

No capítulo 2, introduzimos os Processos de Renovação, várias definições e teoremas gerais, para que, possamos apresentar, no capítulo 3, o Teorema Fundamental da Renovação, nas suas diferentes formulações.

Finalmente, no capítulo 4, concluimos o trabalho com um estudo histórico do desenvolvimento da teoria.

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E TEOREMAS BÁSICOS

SEÇÃO 1: FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO

Como veremos, no capítulo 2, um processo de renovação, fica completamente caracterizado por uma função distribuição F que é a distribuição de probabilidade das variaveis aleatórias que compõem o processo.

Nêste sentido, necessitaremos conhecer algumas propriedades de funções distribuição que iremos recordar no que se segue.

Faremos, no presente trabalho, uma restrição, considerando apenas, distribuições concentradas em $[0, +\infty)$. As extensões dos resultados aqui discutidos, para a reta toda, estão indicados no capítulo 4, mas não serão estudados em detalhe, neste trabalho.

<u>Definição 1.1.1</u>: Uma função F definida em R é uma <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO</u>, se

i) F é não decrescente

ii) F é contínua à direita

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ e

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) \leq \infty$

<u>Definição 1.1.2</u>: F é uma <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE</u> se F é uma função distribuição e $F(+\infty) = 1$.

Diremos que F é uma <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DEFECTIVA</u> se $F(+\infty) < 1$

A toda variavel aleatória X, está associada uma função distribuição de probabilidades, dada por

$$(1) \quad F(x) = P\{X \leq x\} \ , \quad -\infty < x < +\infty$$

Se $I = (a,b]$, associamos ao intervalo I, atravéz da função F, a medida de probabilidade P, dada por:

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = P\{I\} = F\{I\}.$$

Sendo assim, quando usarmos a notação F{ }, o argumento da função F será um intervalo (ou, mais geralmente um conjunto de Borel da reta) e, F, uma medida. Caso contrário, usando F( ), estaremos nos referindo à função definida em (1).

As igualdades seguintes, dão a relação entre a função F( ) e a

função de conjuntos F{ }:

$$F(x) = F\{(-\infty,x]\}$$

$$F\{(a,b]\} = F(b) - F(a)$$

<u>Definição 1.1.3</u>: Dizemos que a distribuição F está <u>CONCENTRADA</u> no conjunto A, se A^c (complementar de A em relação a R) tem probabilidade zero, isto é, se $F\{A^c\} = 0$.

<u>Definição 1.1.4</u>: Um ponto x é um <u>ÁTOMO</u> da distribuição F, se $F\{x\} > 0$

<u>Definição 1.1.5</u>: F é dita uma <u>DISTRIBUIÇÃO ATÔMICA</u>, se está concentrada no conjunto dos seus átomos.

<u>Observação</u>: Da definição, decorre que, para todo x, existem os limites de F, à esquerda e à direita de x.
Segue-se que uma função distribuição só pode ter descontinuidades de primeira espécie. Se x é um átomo de F, a função F( ) é descontínua em x; isto implica que uma <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA</u> não tem átomos.

<u>Teorema 1.1.6</u> "O número de átomos de uma função distribuição é, no máximo, enumeravel"

A demonstração dêste teorema pode ser encontrada nos textos clássicos de Teoria das Probabilidades. (Por exemplo, Breiman [4], Chung [6]).

<u>Definição 1.1.7</u>: Um ponto x é chamado <u>PONTO DE CRESCIMENTO DE F,</u> se $F\{I\} > 0$, para todo intervalo aberto I, que contém x.

É interessante observar que todo átomo de uma distribuição F é um ponto de crescimento de F, mas, a recíproca não é verdadeira. De fato, é possivel demonstrar:

<u>Teorema 1.1.8</u> "Se A é o conjunto dos átomos de uma distribuição atômica F, então, $\bar{A}$ (fêcho de A na topologia de R) é o conjunto dos pontos de crescimento da F".

<u>Exemplo 1.1.9</u> Considere a função distribuição, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

F é contínua (portanto, não tem átomos) e, é fácil verificar que todos os pontos do semi-eixo positivo dos x, são pontos de crescimento de F.

O exemplo seguinte é o de uma distribuição atômica, cujo conjunto de pontos de crescimento é um intervalo da reta. Ele serve também para ilustrar quão "mal comportada" pode ser uma fun

ção distribuição.

<u>Exemplo 1.1.10</u> Consideremos o intervalo (0,1), e, nêste intervalo, ordenemos os racionais, numa sequência $\{r_1, r_2, \ldots\}$, com denominadores crescentes. Definimos F, como a função que atribue ao ponto r_k, a probabilidade 2^{-k}.
F é atômica e todo número real em (0,1) é um ponto de crescimento da F. Mais ainda, o conjunto de todos os pontos de crescimento da F é o intervalo fechado [0,1].

Vamos agora, introduzir o conceito de distribuição aritmética que irá desempenhar um papel bastante importante em nosso trabalho.
Diríamos até, que dentro da Teoria da Renovação, as distribuições aritméticas têm um papel, de certa forma, "desagradavel", no sentido de que, os resultados centrais da teoria, precisam ser apresentados em separado, no caso de tais distribuições.
Alguns exemplos e resultados elementares, que discutiremos a seguir, têm o objetivo de esclarecer a razão pela qual a teoria deve ser especial, se F é aritmética.

<u>Definição 1.1.11</u> Dizemos que uma distribuição F é <u>ARITMÉTICA</u> (ou, segundo alguns autores, distribuídas "on a lattice"), se F está concentrada no conjunto de

pontos da forma: $0, \pm\theta, \pm 2\theta, \ldots$. O maior θ com essa propriedade é chamado de <u>GERADOR DE F.</u>

No presente trabalho, sempre que nos referirmos a F como sendo uma distribuição aritmética, gerada por θ, estaremos considerando F, concentrada no conjunto $\{0,\theta,2\theta,3\theta,\ldots\}$.

É importante ressaltar que, <u>nem toda distribuição atômica é aritmética</u>. De fato, os lemas e as conclusões que se seguem , completam a idéia da definição anterior.

<u>Lema 1.1.12</u> "sejam a e b reais e F, uma distribuição atômica concentrada no conjunto $\{a,b\}$.
Uma condição necessária e suficiente para que F seja aritmética, é que exista um racional r, tal que $a = rb$"

demostração:

Se um dos valôres a ou b fôr nulo, nada há a demonstrar, pois, a condição necessária é trivial e, inversamente, se por exemplo, $a = 0$, basta tomar $\theta = b$ e teremos uma distribuição aritmética.

Sejam então $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

a) A condição é necessária:

Como F é aritmética, gerada por θ, concentrada em $\{a,b\}$, existem inteiros não nulos k_1 e k_2 tal que

$$a = \theta k_1 \quad e \quad b = \theta k_2 \quad , \quad \theta \neq 0.$$

Assim, $\frac{a}{b} = \frac{k_1}{k_2} \Longrightarrow a = \frac{k_1}{k_2} b$.

Basta, portanto, tomar $r = \frac{k_1}{k_2}$ e escrevermos $a = rb$, r racional, como queríamos.

b) A condição é suficiente:

De fato, suponha que existe um racional r, tal que $a = rb$.

Então, $\frac{a}{b}$ é um racional não nulo.

Seja agora, $r = \frac{k_1}{k_2}$, k_1 e k_2 inteiros.

Segue-se que

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{k_1}{k_2} \cdot b \\ \\ \theta = \frac{b}{k_2} = \frac{a}{k_1} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \theta k_1 \\ \\ b = \theta k_2 \end{array} \text{, donde}$$

F é aritmética, gerada por θ.

É possivel extender êsse lema para os seguintes resultados:

1: "Toda distribuição F concentrada em um número finito de racionais é aritmética".

2: "Seja F concentrada em $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, com x_i real, para todo i.

F é aritmética, se e só se, para todo i,j

$$x_i = x_i^j \, x_j \quad , \quad x_i^j \text{ racional}".$$

Como consequência do lema 1.1.12, temos:

<u>Exemplo 1.1.13</u> "uma distribuição F concentrada em $\{1, \sqrt{2}\}$ não é aritmética".

SEÇÃO 2. CONVOLUÇÃO DE FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO

Definição 1.2.1 Definimos a CONVOLUÇÃO de uma distribuição F com uma função h qualquer, como sendo a função g dada por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-y)F\{dy\} .$$

Notação: $g = F * h$

Se, em particular, h é uma distribuição, a convolução g também resulta numa função distribuição.

É fácil ver que:

Proposição 1.2.2: "A operação de convolução entre distribuições goza das propriedades comutativa e associativa".

O uso de convoluções entre distribuições é frequente na Teoria das Probabilidades. O teorema (clássico) que enunciamos a seguir dá uma idéia da importância dêste conceito (veja [4], [6], [16]).

Teorema 1.2.3: "Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variaveis aleatórias independentes, cujas funções distribuição correspondentes são $F_1 , F_2, \ldots, F_n$.

Nestas condições, a função distribuição da variavel aleatória $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é dada por $(F_1 * F_2 * --- * F_n$

Observação: Se, além de serem independentes, as variaveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forem idênticamente distribuídas, com distribuição comum F, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tem distribuição dada por $(F*F*\ldots*F)$ que denotaremos por F^{n*}.

O lema que se segue, relaciona os pontos de crescimento de duas distribuições, com os pontos de crescimento da distribuição resultante da convolução entre elas. Outro resultado importante, diz respeito ao comportamento assintótico do conjunto dos pontos de crescimento das distribuições, que resultam das sucessivas convoluções de uma distribuição F, consigo mesma.

Lema 1.2.4 "Sejam x_1 e x_2, pontos de crescimento das distribuições F_1 e F_2. Então, $x_1 + x_2$ é um ponto de crescimento de $F_1 * F_2$".

A demonstração dêste lema é trivial e pode ser encontrada em Feller [16].

Lema 1.2.5 "Seja F uma distribuição não aritmética, concentrada em $[0,+\infty)$, mas, não na origem (isto é, $F(0) < 1$).

Chamemos de A, o conjunto dos pontos de crescimento de F, F^{2*}, F^{3*}, ...

Então: A é assintoticamente denso no infinito, no sentido que, para um dado $\varepsilon > 0$ e x suficientemente grande, o intervalo $(x, x + \varepsilon)$ contém pon

tos de A" .

demonstração:

Sejam a e b, dois pontos em A, tais que $0 < a < b$ e $\theta = b-a$.
Consideremos o intervalo $I_n = (a_n, b_n]$, construído de modo que se $a < n\,\theta$, I_n contém o intervalo $(an, a(n+1))$, como subconjunto próprio.
Seja x um ponto tal que $x \geqslant \frac{a^2}{\theta} = x_o$.
Então, x está em pelo menos um dos intervalos $I_1, I_2, \ldots$.
Seja I_k o intervalo que contém x.
Consideremos agora, os (k+1) pontos da forma:
$ka + j\theta$, $j = 0,1,\ldots,k$.
Pelo lema 1.3.4, êstes pontos estão em A.
Mais ainda, êles particionam o intervalo I_k em subintervalos de comprimento θ. Então, x está em algum intervalo do tipo $(ka + j\theta, ka + (i+1)\theta]$ e, a distância de x a um ponto de A é menor que θ.
Vamos agora, separar a demonstração do lema em duas partes , sob as hipóteses das duas únicas alternativas possíveis:

1: ou, para todo $\varepsilon > 0$, fixado, podemos escolher a e b de tal forma que $\theta = b-a < \varepsilon$,

2: ou, existe um $\delta > 0$ tal que $\theta \geq \delta$, para todas as possíveis escolhas de θ.

Temos, então:
Sob a hipótese 1, $\theta < \varepsilon$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ e $x > \frac{a^2}{\theta}$, o in

tervalo $(x, x + \varepsilon)$ contém pontos de A, isto é, A é assintoticamente denso no infinito. Na situação 2, tomemos a e b de modo que $\theta < 2\delta$. Os $(k+1)$ pontos da forma $(ka + j\theta)$ constituem a totalidade dos pontos de A que estão em I_k. O ponto $(k+1)a$ é desta forma; donde, todos os pontos de A, dentro de I_k, são múltiplos de θ.

Seja agora, α_0, um ponto qualquer, de crescimento, da distribuição F. Para n suficientemente grande, o intervalo I_n, contém um ponto da forma $j\theta + \alpha_0$. Este ponto está em A. Então, α_0 é um múltiplo de θ.

Concluímos assim, que para n suficientemente grande, A contém todos os pontos da forma $n\theta$.

Este último resultado pode ser reestabelecido, na forma óbvia e natural, do seguinte:

<u>Corolário 1.2.6</u> "Sob a hipótese 2. da demonstração do lema anterior, F é uma distribuição aritmetica, gerada por θ.

<u>Exemplo 1.2.7</u> Como ilustração do lema 1.2.5, voltemos ao exemplo 1.1.13, de uma função distribuição F, concentrada em $\{1, \sqrt{2}\}$. O conjunto dos pontos de crescimento de $F, F^{2*}, F^{3*}, \ldots$ é assintoticamente denso no infinito. Tomamos, em particular, êste exemplo, para a interessante observação de que o lema 1.2.5 fornece, de certo modo, uma no

va demonstração de um resultado conhecido em Teoria dos Números Reais, a saber: "o conjunto cujos elementos são da forma $n + n\sqrt{2}$, com m e n inteiros, é denso no infinito".

Para finalizar esta seção, enunciamos um teorema que caracteriza, sob certas condições o comportamento de funções " construídas" via convolução e que, será provado aqui, por ser básico e essencial, à demonstração do Teorema Fundamental da Renovação, objeto do capítulo 3.

<u>Teorema 1.2.8</u> "Sejam F, uma distribuição concentrada em $(0,+\infty)$ e f, uma função limitada, uniformemente contínua, que satisfazem:

i) $f(x) \leq f(0)$, $-\infty < x < \infty$

ii) $f(x) = \int_0^{+\infty} f(x-y)\, F\{dy\}$

Então: $f(x) \equiv f(0)$"

demonstração:

Observemos primeiramente que a convolução de f com F reproduz a própria função f, isto é,

$$(f*F)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-y)\, F\{dy\} = f(x)$$

Então:

$(f*F) * F = f*F = f$. Por indução, obtemos

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(x-y)F^{k*}\{dy\},\ k = 1,2,\ldots\ldots$$

Para $x = 0$, temos, por hipótese, $f(-y) \leq f(0)$ e, a igualdade:

$$f(0) = \int_0^{+\infty} f(-y)F^{k*}\{dy\},$$ só se verifica, se

$f(-y) \equiv f(0)$, pelo menos, para todo ponto do conjunto, onde F está concentrada (suporte de F), isto é, se êste ponto é um ponto de crescimento de F, F^{2*}, F^{3*}, ...

Seja A, o conjunto dêstes pontos.

Como f, por hipótese, é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo par x_1, x_2 com $|x_1 - x_2| < \delta$, temos $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Mas, como A é assintòticamente denso no infinito (lema 1.2.5), dado $\delta > 0$, existe y_0 tal que para $y \geq y_0$, o intervalo $(y_0, y_0+\delta)$ contém pontos de A.

Ou seja, para $y \geq y_0$, existem pontos x de A em $(y, y+\delta)$, isto é, pontos que estão a uma distância de y que é menor que δ. Donde

(1) $|f(-y) - f(x)| < \varepsilon/2$. Para $x = 0$,

$|f(-y) - f(0)| < \varepsilon/2$, ou,

$f(-y) \to f(0)$, quando $y \to \infty$.

Depois, como f é suposta limitada, tomamos M, tal que

(2) $|f(x)| \leq M$, para todo x.

Por outro lado, $F^{k*} \to \infty$, quando $k \to \infty$, isto é, dados

$\varepsilon > 0$ e $y > 0$, existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$,

$$(3) \quad \int_0^y F^{k*}\{dt\} < \varepsilon/4M$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos y_0 que verifique (1). Em correspondência a êsse y_0 e ε, escolhemos k_0 que verifique (3).

Sendo assim:

$$|f(x) - f(0)| = \int_0^{y_0} |f(x-y) - f(0)| \, F^{k*}\{dy\} +$$

$$+ \int_{y_0}^{+\infty} |f(x-y) - f(0)| \, F^{k*}\{dy\} \leq$$

$$\leq 2.M.\varepsilon/4M + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

O que obtivemos é válido para todo x e para ε arbitrário. Fazendo $\varepsilon \to o$, concluimos que $f(x) \equiv f(0)$, o que completa a demonstração.

SEÇÃO 3. UMA INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE INTEGRABILIDADE DIRETA

Como veremos no capítulo 3, o Teorema Fundamental da Renovação, admite uma chamada "forma alternativa", que envolve funções z, pertencentes a uma classe de funções que se caracterizam, por serem "integraveis diretamente".

A noção de integrabilidade direta foi introduzida por Wiener, em seus trabalhos sôbre teoremas Tauberianos. Essa noção não foi usada por Wiener, com êsse nome, que é devido a Feller. (veja [16]).

Sabemos, pelo conceito clássico, que admitimos, na classe das funções integraveis, aquelas que oscilam no infinito.

A "nova" definição, visa, básicamente, restringir esta classe, eliminando dela, as funções que oscilam "demasiadamente" no infinito.

Para tanto:

> Seja $f \geq 0$ uma função limitada que assume valores reais, definida em $[0,a]$. Consideremos $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$, uma partição do intervalo $[0,a]$ em subintervalos de comprimento δ.
>
> Sejam S e s, respectivamente, as somas superior e inferior de Riemann, para êste dado δ.

Definição 1.3.1: A função $f \geq 0$ é DIRETAMENTE INTEGRAVEL SEGUNDO RIEMANN, se S e s são finitas e tendem ao mesmo limite, quando $\delta \to 0$.

Esta definição não faz distinções entre intervalos finitos ou infinitos.

Podemos, então, considerar

$$S = \delta \sum_{k=1}^{\infty} M_k \text{ e } s = \delta \sum_{k=1}^{\infty} m_k \text{ , onde } M_k \text{ e } m_k \text{ são}$$

respectivamente o sup e o inf da função f, no intervalo $[(k-1)\delta , k\delta)$.

É fácil ver que:

<u>Teorema 1.3.2</u>: "A função $f \geq 0$ é diretamente integravel em $(0,+\infty)$, se fôr integravel segundo Riemann, em todo intervalo finito $[0,a]$ e, se $S < \infty$, para algum δ. Além disso, se, para algum δ, S é finita, então, isso ocorre para todo δ" .

É, exatamente, a última afirmação dêste teorema que garante o comportamento da função f, sem "grandes" oscilações no infinito.

A definição e o resultado que se seguem, são clássicos em Análise Real e colocados aqui, tão sòmente para facilitar referências posteriores. (veja por exemplo, [22]).

<u>Definição 1.3.3</u>: Dizemos que uma sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funções é <u>EQUICONTÍNUA</u>, se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta>0$, tal que $|x_1-x_2|< \delta \Rightarrow |f_n(x_1)-f_n(x_2)|< \varepsilon$, para todo n.

<u>Teorema 1.3.4 (Ascoli)</u> "Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$, uma sequência equicontínua de funções que verificam $|f_n| \leq 1$, para todo n. Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$, que converge uniformemente, em cada intervalo finito, para uma função limite f, contínua".

CAPÍTULO 2

PROCESSOS DE RENOVAÇÃO

SEÇÃO 1: CONSIDERAÇÕES GERAIS

Definição 2.1.1: Uma sequência de variaveis aleatórias $\{S_n\}_{n\geq 1}$, define um PROCESSO DE RENOVAÇÃO, se S_n puder ser escrita na forma,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \text{ , onde}$$

as variaveis aleatórias X_k são mútuamente independentes, com distribuição comum F, concentrada em $(0, +\infty)$, isto é, $F(0) = 0$.

De acôrdo com a interpretação mencionada na introdução dêste trabalho, se olharmos para as variaveis aleatórias X_k como "o tempo de vida de algum item", podemos dizer que S_n é a variavel aleatória que representa a época em que ocorre a n-ésima renovação ou substituição.

Para evitar trivialidades, vamos definir $S_0 \equiv 0$.

Se, além das condições da definição 2.1.1, $S_0 = X_0$ é uma variavel aleatória independente das X_i, mas não necessàriamente distribuída pela F (comum às X_i), dizemos que a sequência $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ define um PROCESSO GERAL DE RENOVAÇÃO.

A variavel X_0 pode ser interpretada como se conhecessemos a situação inicial do processo, em algum ponto no semi-eixo positi

vo dos x, de acôrdo com alguma distribuição. É o processo que Feller, chama de "processo de renovação com retardamento"

Como as variaveis aleatórias X_k, são supostas não negativas, usando integração por partes, podemos ver que:

<u>Teorema 2.1.2</u>: "Para todo $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} F\{dx\} = \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}[1-F(x)]dx ,$$

no sentido que, se um lado converge o mesmo acontece com o outro".

Então, para $\alpha = 1$, obtemos:

$$(1) \qquad E\{X_k\} = \mu = \int_0^{+\infty} x\, F\{dx\} = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)]dx .$$

Se a integral diverge, colocamos $\mu = \infty$ e interpretamos $\mu^{-1} \equiv 0$.

Consideremos agora, para cada x, real e positivo, o intervalo $[0,x]$ e a variavel aleatória:

(2) N_x = número de épocas de renovação S_n, que são menores que x.

Em outras palavras:

N_x = número de vêzes que as somas parciais S_n assumem valôres no intervalo $[0,x]$.

Mostremos, que:

<u>Proposição 2.1.3</u>: "N_x , para cada valor de x, é uma variavel aleatória bem definida, isto é, N_x é finita com probabilidade 1".

demonstração:

Provemos, primeiramente, que para todo x real e positivo,

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) < \infty .$$

Existem dois casos a serem considerados:

<u>1º caso</u>: F é concentrada em $[0, +\infty)$.

$F^{n*}(x) = P[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \leq x]$

Como as variaveis aleatórias X_k são independentes e identicamente distribuídas ,

$P[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)] = F^n(x)$.

mas,

$\{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \leq x\} \subset \{(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)\}$

Então:

$F^{n*}(x) \leq F^n(x)$, para todo n .

Segue-se assim, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) = \frac{1}{1-F(x)} \text{ , se } F(x) < 1 .$$

Por outro lado, como F é concentrada em $[0,+\infty)$, $F(x) < 1$ para todo x neste intervalo, o que completa a demonstração.

<u>2º caso</u>: F é concentrada em intervalos finitos.

Nesta situação, como a distribuição F não é concentrada na origem, existe $y_0 > 0$, tal que

$$1 - F(y_0) > 0.$$

Para cada x fixado, podemos determinar um inteiro r , que verifique

$$r\, y_0 > x \ .$$

Usando o fato:

$$\{(X_1 > y_0) \cap (X_2 > y_0) \cap \ldots \cap (X_r > y_0)\} \subset \{(X_1 + X_2 + \ldots + X_r) \geq r\, y_0\}$$

segue-se que:

$$0 < [1-F(y_0)]^r \leq P\{(X_1 + \ldots + X_r) \geq r y_0\} \leq P\{(X_1 + \ldots + X_r) \geq x\}$$

Então

$$F^{r*}(x) = P\{(X_1 + X_2 + \ldots + X_r) < x\} < 1$$

Assim, para cada x, existe r tal que

$$F^{r*}(x) < 1 \ .$$

Tomemos agora, a série $\sum_{k=0}^{\infty} F^{kr*}(x)$.

Usando o mesmo argumento da demonstração do 1º caso, essa série converge, pois $F^{r*}(x) < 1$.

Pelo mesmo motivo, são convergentes, as (r-1) séries do tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} F^{(kr+i)*}(x) \quad , \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,r-1 \ .$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=r}^{\infty} F^{n*}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{kr*}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} F^{(kr+1)*}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} F^{(kr+2)*}(x) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} F^{[(k+1)r-1]*}(x) \quad ,$$

pois, qualquer elemento $F^{n*}(x)$, com $n \geq r$, da série, no primeiro membro dessa igualdade, pode ser escrito na forma $F^{(kr+s)*}$, para algum s, $0 \leq s \leq r-1$.

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)$ converge, para todo x, como havíamos afirmado.

Voltando agora a proposição, observemos que F^{n*} é a distribuição da variavel aleatória S_n (veja o Teorema 1.2.3).

Definindo os eventos $A_n = \{a < S_n \leq b\}$, temos:

$$P(A_n) = P\{a < S_n \leq b\} = F^{n*}(b) - F^{n*}(a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{a < S_n \leq b\} = \sum_{n=0}^{\infty} [F^{n*}(b) - F^{n*}(a)]$$

Como, para todo x, $\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)$ converge, segue-se que $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

Pelo lima de Borel-Cantelli, (c.f [6]),

$P\{\lim\sup A_n\} = P\{A_n$ ocorrer infinitas vêzes$\} = 0$

Este resultado demonstra a proposição, pois, com probabilidade 1, $S_n \in (a,b]$, no máximo para um número finito de índices n.

Então $P\{N_x$ finita$\} = 1$.

Com esta proposição, tem sentido agora, a seguinte:

<u>Definição 2.1.4</u>: Chamamos <u>FUNÇÃO DE RENOVAÇÃO</u> à função que associa ao intervalo $[0,x]$, o valor

$$U(x) = E\{N_x\} \quad (4)$$

Um dos objetivos da Teoria da Renovação, é exatamente, o estudo do comportamento assintótico de $U(x)$, quando $x \to \infty$.

A função $U(x)$ é também chamada <u>MEDIDA DE RENOVAÇÃO</u>, porque ela pode ser considerada como uma medida concentrada em $[0,+\infty]$, colocando, para qualquer intervalo $I = (a,b]$

$$U\{I\} = U(b) - U(a)$$

No caso discreto, como veremos no capítulo 3, a medida U é concentrada nos inteiros:

U_n é a probabilidade que para algum k, tenhamos $S_n = k$, isto é, que ocorra uma renovação no n-ésimo ensaio.

Em seguida, podemos obter de maneira explícita a distribuição de probabilidade para a variavel aleatória N_x .

Para tanto é mais simples, usar a conexão entre N_x = número de renovações em $[0,x]$ e a variavel aleatória S_n = época em que ocorre a n-ésima renovação.

Das definições de N_x e S_n , é fácil ver que:

$$N_x < k \iff S_k > x \ .$$

Portanto:

$$P\{N_x < k\} = P\{S_k > x\} = 1 - F^{k*}(x) .$$

Então

$$(5) \qquad P\{N_x = k\} = F^{k*}(x) - F^{(k+1)*}(x)$$

Desta forma, a distribuição de probabilidade de N_x , pode ser obtida explicitamente, para todo k.

Em particular, a equação (5) é mais conviniente, para os cálculos numéricos das probabilidades, com valôres pequenos de k.

É fácil, agora, obter, a função distribuição para a medida U. Senão, vejamos:

$$U(x) = E\{N_x\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\{N_x = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\Big[P\{N_x < (n+1)\} - P\{N_x < n\}\Big] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\Big[P\{S_{n+1} > x\} - P\{S_n > x\}\Big] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\Big[1 - P\{S_{n+1} \leq x\} - 1 + P\{S_n \leq x\}\Big] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\Big[F^{n*}(x) - F^{(n+1)*}(x)\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)$$

Subtendemos que $U(x) = 0$, para $x < 0$ e que U tem um átomo de peso unitário na origem. Como, para todo x, $F^{0*}(x) = 0$, podemos reescrever o resultado anterior, na forma

$$(6) \qquad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) .$$

Da demonstração da proposição 2.1.3, em (3), podemos estabelecer o seguinte:

<u>Lema 2.1.5:</u> "$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)$ é finita, para todo x" .

Concluíndo, vale a pena observar, que embora U seja uma medida com as características que mencionamos, do ponto de vista probabilístico, U(x) é o número esperado de épocas de renovação , no intervalo [0,x] (a origem é incluída como uma época de renovação).

Vamos finalizar esta seção, com exemplos onde obtemos as distribuições para N_x e, consequentemente, as Funções de Renovação U(x), associadas a estas variaveis.

<u>Exemplo 2.1.6</u>: • Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, onde as variaveis aleatórias X_i são independentes e identicamente distribuidas. Consideremos, para todo i, X_i uma variavel com distribuição exponencial a um parâmetro $\theta>0$, isto é, com densidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \theta e^{-\theta t} & , \ t > 0 \\ 0 & , \ t \leq 0 \end{cases}$$

A variavel aleatória $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição gama com parâmetros θ e n, ou seja, sua densidade é da forma

$$g(t) = \frac{\theta^n \; e^{-\theta t} t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad , \; t > 0$$

$$0 \quad , \; t \leq 0$$

Tomemos agora a variavel aleatória N_x , associada e êste processo de renovação.

Como vimos, N_x é o número de vêzes que as somas parciais S_n assumem valôres no intervalo $[0,x]$.

Calculemos a sua distribuição de probabilidade:

$$N_x < k \equiv S_k > x$$

Então, para todo $x > 0$ e todo k inteiro, não negativo, temos:

$$(7) \qquad P\{N_x < k\} = P\{S_k > x\} = \int_x^{+\infty} \frac{\theta^k \; e^{-\theta t} \; t^{k-1}}{\Gamma(k)} \, dt$$

Para $k = 1$, obtemos:

$$P\{N_x < 1\} = P\{N_x = 0\} = \int_x^{+\infty} \theta e^{-\theta t} dt = e^{-\theta x} \quad .$$

Para todo $k \geq 1$, usando novamente o resultado (7), temos:

$$P\{N_x = k\} = P\{N_x < k+1\} - P\{N_x < k\} = P\{S_{k+1} > x\} -$$

$$- P\{S_k > x\}$$

$$(8) \qquad = \int_x^{+\infty} \frac{\theta^{k+1} \; e^{-\theta t} \; t^k}{\Gamma(k+1)} \, dt - \int_x^{+\infty} \frac{\theta^k \; e^{-\theta t} \; t^{k-1}}{\Gamma(k)} \, dt \; .$$

Se desenvolvermos a primeira destas integrais, por partes, teremos:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\theta^{k+1}\, e^{-\theta t}\, t^k}{\Gamma(k+1)}\, dt = \frac{\theta}{\Gamma(k+1)} \int_x^{+\infty} (\theta t)^k\, e^{-\theta t}\, dt =$$

$$= \frac{\theta}{k\Gamma(k)} \{-(\theta t)^k\, e^{-\theta t} + k\, \theta^{k-1} \int_x^{+\infty} e^{-\theta t}\, t^{k-1}\, dt\} =$$

$$= \frac{-\theta^{k+1} \cdot t^k\, e^{-\theta t}}{k\Gamma(k)} \Bigg|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{\theta^k\, e^{-\theta t}\, t^{k-1}}{\Gamma(k)}\, dt \; .$$

Levando esse resultado à (8), obtemos,

$$P\{N_x = k\} = \frac{e^{-\theta x}(\theta x)^k}{\Gamma(k+1)}$$

Como, k+1 é um número inteiro, $\Gamma(k+1) = k!$

Finalmente,

$$P\{N_x = k\} = \frac{e^{-\theta x}(\theta x)^k}{k!} \text{ , isto é,}$$

a variavel aleatória N_x tem uma distribuição de Poisson, com parâmetro (θx).

É simples, neste caso, determinar a função de renovação, associada à variável N_x , pois,

$$U(x) = E\{N_x\} = \theta x$$

<u>Exemplo 2.1.7</u>: Seja, agora, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, onde as variaveis aleatórias X_i são independentes e têm distribuição de Poisson com parâmetro $\theta > 0$, isto é, $P[X_i = j] = e^{-\theta}\, \frac{\theta^j}{j!}$, para todo i e para $j = 0,1,2,\ldots.$.

Então,

$$P\{N_x = k\} = P\{N_x < k+1\} - P\{N_x < k\} =$$
$$= P\{S_{k+1} > x\} - P\{S_k > x\} =$$
$$= 1 - P\{S_{k+1} \leq x\} - 1 + P\{S_k \leq x\} =$$
$$= P\{S_k \leq x\} - P\{S_{k+1} \leq x\}$$

Observemos, agora, que a variavel aleatória $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem também uma distribuição de Poisson, nêste caso, com parâmetro (θn). Denotemos, como é usual, por $[x]$, o maior inteiro contido em x. Temos, assim:

$$(9) \qquad P\{N_x = k\} = \sum_{j=0}^{[x]} e^{-\theta k} \frac{(\theta k)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{[x]} e^{-\theta(k+1)} \frac{\theta^j (k+1)^j}{j!}$$

Usando, o fato que

$$\sum_{j=0}^{r-1} e^{-\beta} \frac{\beta^j}{j!} = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-t} dt$$, podemos escrever o resultado (9), na forma:

$$P\{N_x = k\} = \int_{\theta k}^{+\infty} \frac{t^{[x]} e^{-t}}{\Gamma([x+1])} dt - \int_{\theta(k+1)}^{+\infty} \frac{t^{[x]} e^{-t}}{\Gamma([x+1])} dt =$$
$$= \int_{\theta k}^{\theta(k+1)} \frac{t^{[x]} e^{-t}}{\Gamma([x+1])} dt .$$

Ou seja,

$P\{N_x = k\} = P\{\theta k \leq Y \leq \theta(k+1)\}$, onde Y é uma variavel aleatória com distribuição gama, de parâmetros 1 e $[x+1]$.

SEÇÃO 2: EQUAÇÕES DE RENOVAÇÃO

Para estudar assintòticamente, a medida U(x), e portanto, o comportamento, no infinito, do número médio de renovações veremos, nesta seção, a Equação de Renovação e o comportamento assintótico das suas soluções.
Posteriormente, será estabelecida a conexão entre êstes dois fatos.

Podemos obter uma equação integral para U(x), condicionando essa função à época da primeira renovação em um processo. Procedendo desta forma, obtemos:

$$U(x) = \int_0^{+\infty} E\{N_x \mid X_1 = y\}\, F\{dy\}$$

Mas, se a primeira renovação ocorre na época y, $(y \leq x)$, a partir dêste ponto o processo recomeça, e, portanto, o número esperado de renovações no intervalo $[0,x]$ é dado por 1 mais o número esperado de renovações até a época x-y, a partir do início de um processo equivalente, isto é,

$$E\{N_x \mid X_1 = y\} = \begin{cases} 1 + U(x-y), & \text{se } y \leq x \\ 0 & \text{se } y > x \end{cases}$$

Assim,

$$U(x) = \int_0^x [1 + U(x-y)]\, F\{dy\} = F(x) + \int_0^x U(x-y)\, F\{dy\}$$

Essa equação é conhecida como uma equação de renovação, e pode, muitas vêzes ser resolvida para U(x).

Uma generalização da equação de renovação é a seguinte:

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\, F\{dy\},\ x > 0$$

onde z e F são conhecidas e Z é uma função a ser determinada como solução da equação.

De maneira formal, podemos estabelecer a seguinte:

<u>Definição 2.2.1</u>: Tomando o intervalo de integração fechado, e, as funções z e Z tais que $z(x) = Z(x) = o$, para $x < 0$, definimos a <u>EQUAÇÃO DE RENOVAÇÃO</u> de um processo, através da relação

$$(1) \qquad Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\, F\{dy\},\ x > 0$$

Se observarmos a forma de Z(x), poderemos escreve-la como uma equação de convolução:

$$(2) \qquad Z = z + (F * Z)\ ,$$

bastando substituir em (1), os extremos de integração por $-\infty$ e $+\infty$.

A seguir, vejamos um resultado básico e essencial para que se estabeleça a ligação entre U(x) e a solução da equação (1), a que nos referimos no início desta seção.

<u>Proposição 2.2.2</u>: "Seja z, uma função limitada e $z(x) = 0$, para $x < 0$. A função Z definida por

$$(3) \qquad Z(x) = \int_0^x z(x-y)U\{dy\} \ , \ x > 0$$

é uma solução da equação de renovação (1). Além disso, esta é a única solução que se anula em $(-\infty,0)$ e é limitada em intervalos finitos"

Com a mesma observação feita em (2), podemos escrever a solução Z na forma

$$(4) \qquad Z = U * z \ .$$

demonstração:

Vamos provar, inicialmente, que a função $Z(x)=\int_0^x z(x-y)U\{dy\}$, $x>0$, é limitada em intervalos finitos.

Com êste objetivo, mostremos antes, que:

$$(5) \qquad \int_0^x [1 - F(x-y)]U_n\{dy\} = 1 - F^{(n+1)*}(x), \text{ onde}$$

$$(6) \qquad U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F^{k*}(x)$$

De fato:

$$\int_0^x [1 - F(x-y)]\ F^{k*}\{dy\} = \int_0^x F^{k*}\{dy\} - \int_0^x F(x-y)\ F^{k*}\{dy\} =$$

$$= F^{k*}(x) - F^{(k+1)*}(x) \ . \quad \text{Daí} \ ,$$

$$\int_0^x [1-F(x-y)]U_n\{dy\} = \int_0^x [1-F(x-y)] \sum_{k=0}^{n} F^{k*}\{dy\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \{ \int_0^x [1 - F(x-y)] F^{k*}\{dy\} \} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \{ F^{k*}(x) - F^{(k+1)*}(x) \} =$$

$= F^{0*}(x) - F^{(n+1)*}(x) = 1 - F^{(n+1)*}(x)$, como havíamos proposto em (5).

Em seguida, escolhemos dois números positivos α e β que verifiquem

$$(7) \qquad 1 - F(\alpha) > \beta$$

Levando em consideração o resultado (5) e o fato que sempre podemos tomar α, de modo que $0 < \alpha < x$, temos

$$\int_{x-\alpha}^{x} [1 - F(x-y)]U_n\{dy\} < \int_0^x [1 - F(x-y)]U_n\{dy\} =$$

$$= 1 - F^{(n+1)*}(x) < 1$$

Por outro lado, $x-y \leq \alpha$, no intervalo $(x - \alpha, x)$. Então:

$1 - F(\alpha) \leq 1 - F(x-y)$. Segue-se que

$$\int_{x-\alpha}^{x} [1 - F(\alpha)]U_n\{dy\} < 1.$$

Agora, como $1 - F(\alpha) > \beta$, temos:

$$\int_{x-\alpha}^{x} \beta U_n\{dy\} < \int_{x-\alpha}^{x} [1 - F(\alpha)]U_n\{dy\} < 1.$$

Mas,

$$\beta\int_{x-\alpha}^{x} U_n\{dy\} = \beta[U_n(x) - U_n(x-\alpha)] \ . \quad \text{Donde,}$$

$$\beta[U_n(x) - U_n(x-\alpha)] < 1 \ .$$

Fazendo $n \to \infty$, vem:

$\beta[U(x) - U(x-\alpha)] < 1$, isto é,

$\beta U\{L\} < 1$, onde L é um intervalo qualquer de comprimento α.

Concluímos, então, que para todo intervalo J de comprimento menor ou igual à α, temos:

$$U\{J\} \leq \beta^{-1}$$

Tomemos agora, um intervalo arbitrário I, de comprimento θ . O intervalo I pode ser escrito como a união de no máximo $(1+\frac{\theta}{\alpha})$ intervalos de comprimento α.

Daí,

$$(8) \qquad U\{I\} = U(x) - U(x-\theta) \leq \frac{\theta + \alpha}{\alpha\ \beta} = k_\theta \ .$$

Com êstes resultados, fica claro, que U é uniformemente limitada na classe de todos os intervalos de um dado comprimento. Anexando a êste fato, a hipótese inicial que a função z é limitada, concluímos que $Z(x) = \int_0^x z(x-y)U\{dy\}$ é limitada em intervalos finitos.

Mostremos, agora que esta função é uma solução da equação de renovação.

Consideremos, para tanto, a sequência $\{U_n\}$ de medidas, definida por

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F^{k*}(x) .$$

Em correspondência, tomemos a sequência de funções $\{Z_n\}$ definidas por

$$Z_n = U_n * z$$

Observemos primeiramente, que $Z_n = U_n * z$, satisfaz

$$Z_{n+1} = z + (F * Z_n) \text{ , pois:}$$

$$U_{n+1} * z = z + [F * (U_n * z)] = z + (F * U_n) * z$$

Mas, $F * U_n = F * (F^{0*} + \ldots + F^{n*}) =$

$$= (F * F^{0*}) + \ldots + (F * F^{n*}) =$$

$$= F^{1*} + F^{2*} + \ldots + F^{(n+1)*} =$$

$$= U_{n+1} - 1 \text{ . Então:}$$

$$U_{n+1} * z = z + (U_{n+1} - 1) * z = z + (U_{n+1} * z) - z = U_{n+1} * z .$$

Agora, como provamos na primeira parte desta demonstração, U é limitada em intervalos finitos e, por hipótese, z é limitada. Então $U * z$ é limitada. Por outro lado, a sequência $\{Z_n\}$ é monótona, crescente e limitada. Podemos finalmente, usar o teorema da convergência monotônica para concluir que $Z_n \to Z = U * z$.

Resta mostrar agora, a unicidade desta solução.

Para tanto, sejam $Z_1 \neq Z_2$, duas soluções da equação de renovação (1), limitadas em $(0,x)$.

Como $Z_1 = z + (F * Z_1)$ e ,

$Z_2 = z + (F * Z_2)$, vem que

$Z_1 - Z_2 = F * (Z_1 - Z_2)$

Seja $Z = Z_1 - Z_2$.

A função Z é também uma solução que verifica

— $Z = F * Z$

— Z é limitada em $(0,x)$

— $Z(x) = \int_0^x Z(x-y)\, F^{k*}\{dy\}$, para $x > 0$ e $k = 1,2,\ldots$.

No entanto, quando $k \to \infty$, $F^{k*}(x) \to 0$, e, como Z é limitada em $(0,x)$ só pode ocorrer que $Z(x) \equiv 0$, para todo $x > 0$, isto é , $Z_1 \equiv Z_2$. Absurdo, pois supuzemos $Z_1 \neq Z_2$.

Enunciaremos e demonstraremos, a seguir, um teorema, que caracteriza, sob certas condições, o comportamento das soluções das equações de renovação. Este resultado é destacado, aqui, por ser essencial à demonstração do Teorema Fundamental da Renovação (capítulo 3).

<u>Teorema 2.2.3</u>: "Seja z uma função contínua que se anula fóra de (0,h). Então:

a) A correspondente solução Z da equação de renovação é uniformemente contínua.

b) Para todo a, $Z(x+a) - Z(x) \to 0$, quando $x \to \infty$".

demonstração:

a) Como z, por hipótese, é uma função definida e contínua em $[0,h]$, z é uniformemente contínua, isto é, dado $\varepsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z(x+\delta) - z(x)| < \varepsilon'$$

Tomemos a correspondente solução Z da equação de renovação, e,

$$|Z(x+\delta) - Z(x)| = \left| \int_0^{x+\delta} z(x+\delta-y)\, U\{dy\} - \int_0^x z(x-y) U\{dy\} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^h z(x+\delta-y)\, U\{dy\} - \int_0^h z(x-y)\, U\{dy\} \right| =$$

$$= \left| \int_0^h \{z(x+\delta-y) - z(x-y)\}\, U\{dy\} \right. \leq$$

$$\leq \int_0^h |z(x+\delta-y) - z(x-y)|\, U\{dy\} \leq$$

$$\leq \varepsilon' \int_0^h U\{dy\} .$$

Como U é uniformemente limitada em intervalos de um dado com-

primento [ítem (8) da proposição 2.2.2], temos

$$\int_0^h U\{dy\} \leq C_h \quad .$$

Então, $|Z(x+\delta) - Z(x)| \leq \varepsilon'.C_h$.

Tomando $\varepsilon' = \varepsilon/C_h$, concluímos que Z é uniformemente contínua , pois, mostramos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x_1, $x_2 = x_1 + \delta$

$$|Z(x_1) - Z(x_2)| < \varepsilon \ .$$

b) Para demonstrar a segunda parte do teorema proposto, - vamos provar, primeiramente, que ela se verifica para funções z, continuamente diferenciaveis.

O objetivo, naturalmente, é depois, aproximar qualquer função por uma dêsse tipo.

Seja então, z uma função contínua, que se anula fóra de (0,h), com derivada contínua z' .

As correspondentes equações de renovação para z e z' são res - pectivamente Z e Z' dadas por:

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\ F\{dy\}$$

$$Z'(x) = z'(x) + \frac{d}{dx}\int_0^x Z(x-y)\ F\{dy\} =$$

$$= z'(x) + \int_0^x Z'(x-y)\ F\{dy\} \ .$$

A função z' satisfaz a hipótese deste teorema.

Portanto, a parte a), já demonstrada, se verifica para z', isto é, a correspondente solução Z' da equação de renovação é uniformemente contínua.

Além disso, essa solução é limitada em intervalos finitos (veja a proposição 2.2.2) .

Tomemos, então $\alpha = \limsup Z'(x)$.

Existe uma sequência $\{\theta_n\}$ tal que

$$Z'(\theta_n) \to \alpha .$$

Definimos as funções

$f_n(x) = Z'(\theta_n + x)$, e, tomamos a sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de tais funções.

Observemos agora, que, da continuidade uniforme de Z', dado $\varepsilon>0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo x,y que verifique

$|x-y| < \delta$, $|Z'(x) - Z'(y)| < \varepsilon$.

Assim:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |Z'(\theta_n + x) - Z'(\theta_n + y)| < \varepsilon$$

A desigualdade acima se verifica para todo n pois δ é independente de n, donde a sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é equicontínua (veja a definição 1.3.3).

Assim, usando o teorema de Ascoli (teorema 1.3.4), existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que

$f_{n_k} \to f$, quando $n \to \infty$ e

f é uma função contínua e limitada,

isto é,

$$f_{n_k}(x) = Z'(\theta_{n_k} + x) \to f(x) .$$

Mas,

$$f_{n_k}(x) = Z'(\theta_{n_k} + x) = z'(\theta_{n_k} + x) + \int_0^{x+\theta_{n_k}} f_{n_k}(x-y)\ F\{dy\} .$$

Quando $\theta_{n_k} \to \infty$, $z'(\theta_{n_k} + x) \to 0$, donde

(a) $f(x) = \int_0^\infty f(x-y)\ F\{dy\}$.

(b) Como f é limitada e contínua, f é uniformemente contínua.

Por outro lado,

$$f(x) = \lim_{x\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{x\to\infty} Z'(\theta_{n_k} + x) \ , \quad e \ ,$$

$$f(x) = \int_0^\infty f(x-y)\ F\{dy\} = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} Z'(\theta_{n_k} + x-y)\ F\{dy\} \leq$$

$$\leq \alpha \int_0^\infty F\{dy\} = \alpha$$

Para x = 0, temos:

$$f(0) = \int_0^\infty f(-y)\ F\{dy\} = \lim_{x\to\infty} f_{n_k}(0) = \lim_{x\to\infty} Z'(\theta_{n_k}) \leq \alpha$$

Então

$$f(x) \leq \limsup Z'(\theta_{n_k}) = \limsup f_{n_k}(0) = f(0)$$

(c) Portanto, $f(x) \leq f(0)$

Com os resultados (a), (b) e (c), estão verificadas, para a função f, as hipóteses do teorema 1.2.8 . Aplicando-o, vem:

$$f(x) \equiv f(0) \text{ , para todo } x \text{ .}$$

Temos então, que $\alpha \geq f(0) \equiv f(x)$ para todo x.

Agora, $f(0) = \lim f_{n_k}(0) = \lim Z'(\theta_{n_k}) =$

$$= \limsup Z'(\theta_{n_k}) = \alpha \text{ . Donde,}$$

$$f(x) \equiv \alpha \text{ , para todo } x \text{ .}$$

Seja, finalmente, um número a qualquer

$$Z(\theta_{n_k} + a) - Z(\theta_{n_k}) = \int_0^a Z'(\theta_{n_k} + x)\, dx =$$

$$= \int_0^a f_{n_k}(x)dx \xrightarrow[u_k \to \infty]{} \int_0^a f(x)dx = \alpha \int_0^a dx = \alpha\, x$$

O resultado obtido: $Z(\theta_{n_k} + a) - Z(\theta_{n_k}) \to \alpha\, a$, vale para todo a.

Além disso, Z é limitada. Então, isto só ocorre se $\alpha = 0$. Pelo teorema do valor médio, $\limsup [Z(x+a) - Z(x)] = 0$.

De maneira análoga, podemos mostrar que $\liminf [Z(x+a)-Z(x)] = 0$ e concluir que $Z(x+a) - Z(x) \to 0$, quando $x \to \infty$, se a função z é continuamente diferenciavel.

Seja agora z, uma função contínua que se anula fóra de (0,h) e Z a sua correspondente solução da equação de renovação.

Podemos aproximar z por uma função z_0 , continuamente diferenciavel, que se anula fóra de (0,h) com a solução correspondente Z_0 .

$$|Z(x) - Z_0(x)| = \left|\int_0^x [z(x-y)U\{dy\} - z_0(x-y)U\{dy\}]\right| \leq$$

$$\leq \int_0^x |z(x-y) - z_0(x-y)|\ U\{dy\}\ .$$

Levando em conta que:

— $|z-z_0| < \varepsilon$, para um dado ε qualquer.

— $(0,x) \subset (0,h)$

— U é uniformemente limitada em intervalos de um dado comprimento [(8) da proposição 2.2.2], vem:

$$|Z(x) - z_0(x)| \leq \varepsilon \int_0^h U\{dy\} \leq \varepsilon\ C_h'\ .$$

Finalmente:

$$|Z(x+a) - Z(x)| = |Z(x+a) - Z_0(x+a) + Z_0(x+a) - Z(x) +$$

$$+ Z_0(x) - Z_0(x)| \leq$$

$$\leq |Z(x+a) - Z_0(x+a)| + |Z(x) - Z_0(x)| + |Z_0(x+a) - Z_0(x)| \leq$$

$$\leq \varepsilon\ C_h' + \varepsilon\ C_h' + \varepsilon = \varepsilon\ C_h\ .$$

Como ε é arbitrário, basta fazer $\varepsilon \to 0$ que obtemos

$$Z(x+a) - Z(x) \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty\ .$$

CAPÍTULO 3

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA RENOVAÇÃO

Introdução:

Como foi mencionado anteriormente, a Teoria da Renovação, estuda o comportamento assintótico da medida U, introduzida no capítulo 2, seção 1.

O objeto deste capítulo é exatamente o resultado dêste estudo, conhecido como "Teorema Fundamental da Renovação", o qual, em linhas gerais, estabelece, para todo $h > 0$, o número esperado de renovações no intervalo $[x-h,x]$, quando $x \to \infty$.

Separaremos a demonstração do teorema, nas duas situações seguintes: F aritmética e F não aritmética.

Antes, porém, discutiremos um primeiro resultado, que também diz respeito ao comportamento assintótico de $U(x)$.

Seção 1: Resultados Preliminares

No capítulo anterior, foi definida a variável aleatória N_x = número de renovações no intervalo $[0,x]$ e, introduzida a medida $U(x) = E\{N_x\}$.

Vimos também, que N_x é uma variavel aleatória bem definida e que, se $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ representa a época em que ocorre a n-ésima renovação no processo, o conjunto $\{w: N_x(w) < n\}$ coincide com o conjunto $\{w: S_n(w) > x\}$, para todo $n \geq 0$, supondo $S_0 \equiv 0$.

Veremos agora o

Teorema 3.1.1: "$\lim_{x\to\infty} N_x = +\infty$ q.t.p." , isto é, o número total de renovações torna-se infinito com o tempo.

Apesar de ser um resultado óbvio, passamos à sua demonstração:

A variavel aleatória N_x é crescente, em função de x. Então, para todo w, existe o limite de N_x , quando $x \to \infty$.

Suponhamos, por absurdo que, êste limite é finito, em um conjunto com probabilidade estritamente positiva.

Existe assim, um número inteiro M, tal que

$$P\{\sup_{0\leq x<\infty} N_x < M\} > 0 .$$

Isto, por sua vez, implica, pela relação entre N_x e S_n , que

$$P\{S_M = +\infty\} > 0 ,$$

o que é impossivel, pois a variavel aleatória S_n , tem distri-

buição dada por F^{n*} e estamos supondo que F é uma distribuição própria.

Mostraremos agora, que, com probabilidade 1, o número de renovações por unidade de tempo, converge para $\mu^{-1}(\mu \leq \infty)$, onde μ é a esperança de F, distribuição comum às variaveis de que se compõe o processo, isto é,

<u>Teorema 3.1.2:</u> " $\frac{N_x}{x} \to \mu^{-1}$, quando $x \to \infty$" .

demonstração:

Vimos que

$$\{w: N_x(w) < n\} \equiv \{w: S_n(w) > x\} \text{ para } n \geq 0 \text{ e } S_0 = 0.$$

Então:

$$S_{N_x} \leq x \leq S_{N_x+1} \text{ , e,}$$

$$(1) \qquad \frac{S_{N_x}}{N_x} \leq \frac{x}{N_x} \leq \frac{S_{N_x+1}}{N_x} \quad ,$$

para x suficientemente grande de tal forma que $N_x > 0$.

Vamos supôr primeiramente que $\mu < \infty$.

Mostramos, no teorema 3.1.1 que $N_x \to \infty$, quando $x \to \infty$. A Lei dos Grandes Números estabelece que, com probabilidade 1 ,

$$\frac{S_k}{k} \to \mu \text{ quando } k \to \infty .$$

Em nosso caso, temos:

$$(2) \qquad \frac{S_{N_x}}{N_x} \to \mu \text{ quando } x \to \infty \text{ (com probabilidade 1).}$$

Com um argumento análogo, vemos também que quando $x \to \infty$,

$$(3) \qquad \frac{S_{N_x+1}}{N_x} = \frac{S_{N_x+1}}{N_x+1} \cdot \frac{N_x+1}{N_x} \to \mu . 1 = \mu .$$

Fazendo $x \to \infty$ em (1) e, usando (2) e (3) obtemos finalmente

$$\frac{N_x}{x} \to \mu^{-1} , \quad x \to \infty \quad e \quad \mu < \infty .$$

Resta mostrar que o resultado vale, no caso $\mu = \infty$.

Para tanto, definimos

$$\bar{X}_k = \begin{cases} X_k & , \quad se \quad X_k \leq M \\ 0 & , \quad se \quad X_k > M \end{cases}$$

e

$\bar{N}_x$ = número de vêzes que as somas das variaveis aleatórias truncadas $\bar{X}_k$ assumem valôres menores que x.

Então:

$$N_x \leq \bar{N}_x$$

Demonstramos , na primeira parte, que o teorema vale para as variáveis truncadas.

Assim:

$$(4) \qquad \limsup_{x\to\infty} \frac{N_x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{N}_x}{x} = \frac{1}{E\{\bar{X}_k\}}$$

Fazendo agora, $M \to \infty$, temos $E\{\bar{X}_k\} \to \infty$ e, portanto

$$\frac{N_x}{x} \to 0 , \text{ quando } x \to \infty, \quad se \quad \mu = \infty .$$

O teorema que vamos enunciar e demonstrar a seguir, teve sua primeira prova feita por Feller, usando métodos de transformadas de Laplace. (Feller, [12]).

É hoje conhecido, como o "TEOREMA ELEMENTAR DA RENOVAÇÃO" e estabelece que o número médio de renovações por unidade de tempo, converge para μ^{-1}, ou seja:

Teorema 3.1.3: "$\frac{U(x)}{x} = \frac{E\{N_x\}}{x} \to \mu^{-1}$, quando $x \to \infty$"

demonstração:

Vamos supôr, inicialmente que $\mu = \infty$ e que o resultado tenha sido provado para $\mu < \infty$.

Com o argumento das variaveis aleatórias truncadas, usado na demonstração do teorema 3.1.2, ítem (4), temos

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{U(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{E\{\bar{N}_x\}}{x} = \frac{1}{E\{\bar{X}_k\}} .$$

Novamente, fazendo $M \to \infty$, $E\{\bar{X}_k\} \to \infty$, o que implica em

$$\frac{U(x)}{x} \to 0 \quad \text{quando } x \to \infty \text{ e } \mu = \infty .$$

É suficiente portanto demonstrar o teorema para $\mu < \infty$:

Ao definirmos um processo de renovação, supuzemos que para todo k, $P\{X_k = 0\} < 1$, isto é, que as variaveis aleatórias que definem o processo não são identicamente nulas.

Então, existe $\delta > 0$, tal que, para todo k, $P\{X_k \geq \delta\} = p > 0$.

Se substituímos X_k por X_k/δ, o significado do teorema não se

altera e podemos supôr que

$P\{X_k \geq 1\} = p > 0$, e, definir

$$(5) \qquad \bar{X}_k = 1 \text{ , se } X_k \geq 1$$
$$0 \text{ , se } X_k < 1 \text{ .}$$

A correspondente variável aleatória $\bar{N}_x$, para as $\bar{X}_k$ é o número de vêzes que as somas $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{X}_k$ assumem valôres no intervalo $[0,x]$.

É claro que:

$$\bar{S}_n \leq S_n \quad e \quad N_x \leq \bar{N}_x$$

Assim:

$$(6) \qquad \limsup_{x\to\infty} E\{\left[\frac{N_x}{x}\right]^2\} \leq \limsup_{x\to\infty} E\{\left[\frac{\bar{N}_x}{x}\right]^2\} \text{ .}$$

Calculemos $E\{\left[\frac{\bar{N}_x}{x}\right]^2\}$, para as variaveis $\bar{X}_k$, com distribuição de Bernoulli, como foi definido em (5).

Se x é um número inteiro, $\bar{N}_{x+1} - \bar{N}_x$ é o número de vêzes que as somas $\bar{S}_n$ assumem o valor x, de tal forma que as renovações só podem ocorrer nas etapas $0,1,2,\ldots,x$.

Seja $[x]$, o maior inteiro contido em x.

Então:

$$E\{\bar{N}_x\} = \sum_{k<[x]} E\{\bar{N}_{k+1} - \bar{N}_k\} = E\{Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_{[x]}\} \text{ ,}$$

onde Y_i representa o número de renovações que ocorrem no ponto i, (ou seja, o tempo de espera para a primeira ocorrência do

resultado "1").

Estas variaveis aleatorias são independentes, com distribuição geométrica, média igual a $\frac{1}{p}$ e variância dada por $\frac{(1-p)}{p^2}$.

Portanto:

$$E\{\bar{N}_x\} = \sum_{i=0}^{[x]} E\{Y_i\} = \frac{[x] + 1}{p} .$$

Anàlogamente, determinamos

$$Var\{\bar{N}_x\} = ([x] + 1) \frac{(1-p)}{p^2}$$

Finalmente,

$$E\{\left[\frac{\bar{N}_x}{x}\right]^2\} = \frac{1}{x^2} \{Var\{\bar{N}_x\} + E^2\{\bar{N}_x\} =$$

$$= \frac{([x]+1)(1-p)}{x^2\ p^2} + \frac{([x]+1)^2}{x^2\ p^2} \quad e,$$

$$\limsup_{x\to\infty} E\{\left[\frac{\bar{N}_x}{x}\right]^2\} = \frac{1}{p^2} .$$

Voltando à (6), obtemos

$$(7) \qquad \limsup_{x\to\infty} E\{\left[\frac{N_x}{x}\right]^2\} \leq \frac{1}{p^2} .$$

O argumento que usamos agora, para completar a demonstração, baseia-se em um resultado que pode ser encontrado nos textos clássicos de Teoria das Probabilidades (Por exemplo, [4] e [5]).

Trata-se da aplicação direta do teorema:

"Se uma sequência $\{W_n\}$ de variaveis aleatórias converge em dis

tribuição para W, e se, para algum $p > 0$, $\sup_n E\{|W_n|^p\} < \infty$, então, para cada $r < p$,

$$\lim_{n\to\infty} E(|W_n|^r) = E(|W|^r) < \infty \text{ "}$$

Em nosso caso, as hipóteses dêste teorema estão satisfeitas para a sequência $\{\frac{N_n}{n}\}$ que converge para uma distribuição concentrada no ponto μ^{-1} (basta usar o teorema 3.1.2).

Usando o resultado (7), $p = 2$ e $r = 1$, obtemos,

$$\lim_{x\to\infty} E\{\frac{N_x}{x}\} = \lim_{x\to\infty} E\{\frac{N_n}{n}\} = \mu^{-1} \quad ,$$

como havíamos proposto.

O teorema que acabamos de demonstrar é um primeiro passo na investigação da característica estacionária (assintótica) de um processo de renovação.

Intuitivamente, êle nos dá o comportamento global do processo, com respeito ao número médio de renovações.

No entanto, do ponto de vista prático, estamos, em geral, interessados no número esperado de renovações (quebra de ítens, substituições, etc.), dentro de um período determinado (um intervalo de tempo qualquer, de comprimento h).

O resultado principal da teoria, a ser apresentado nêste capítulo, evidencia o carater estacionário de um processo de renovação, nos moldes que mencionamos, pois, estabelece que, para x

suficientemente grande, o número médio de renovações no intervalo $[x-h,x]$, $h>0$, é praticamente independente de x, isto é, que para todo $h > 0$,

$$U(x) - U(x-h) \to h\mu^{-1} \text{ , quando } x \to \infty .$$

O primeiro resultado (teorema elementar da renovação) embora tenha importância teórica não implica necessàriamente que o comportamento da medida U seja estacionário, como mostramos no seguinte:

<u>Exemplo 3.1.4</u>:

Como já vimos, U é uma medida definida nos conjuntos de Borel da reta com $U\{(\infty,0)\} = 0$.

A medida que definiremos a seguir, satisfaz a condição de convergência para $\frac{U(x)}{x}$ mas não, para $U(x+h) - U(x)$, no caso $h = 1$.

Seja $[x]$ o maior inteiro contido em x e, vamos definir, para $x > 0$

$$U(x) = \begin{cases} \frac{[x]+1}{2} & , \text{ se } [x] \text{ é ímpar.} \\ 1 - \frac{[x]}{2} & , \text{ se } [x] \text{ é par.} \end{cases}$$

$$\frac{U(x)}{x} = \begin{cases} \frac{[x]}{2x} + \frac{1}{2x} & , \text{ se } [x] \text{ é ímpar.} \\ 1 - \frac{[x]}{2x} & , \text{ se } [x] \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{x} = \frac{1}{2} .$$

Façamos agora $h = 1$.

É fácil ver que

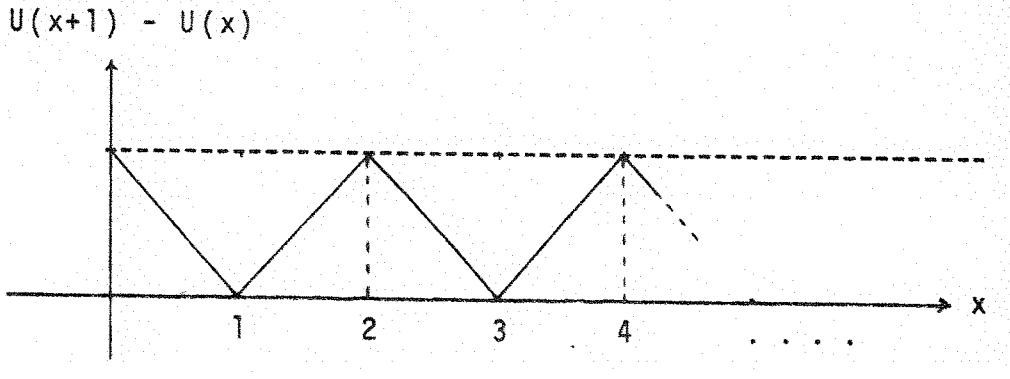
$$U(x+1) = \begin{cases} \dfrac{[x+1] + 1}{2} = \dfrac{[x]}{2} + 1 \quad , \text{ se } [x] \text{ é par} \\[2ex] x + 1 - \dfrac{[x+1]}{2} = x - \dfrac{[x]}{2} + \dfrac{1}{2} \quad , \text{ se } [x] \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$U(x+1)-U(x) = \begin{cases} 1 - (x - [x]) \ , \quad \text{se } [x] \text{ é par} \\[2ex] x - [x] \qquad \text{se } [x] \text{ é ímpar} \end{cases}$$

isto é,

$U(x+h) - U(x)$ não converge, no caso particular de $h = 1$.

Gráficamente, temos:



Seção 2: O Teorema Fundamental da Renovação

Caso da Distribuição F aritmética

"Seja F uma distribuição aritmética em $[0, +\infty]$, gerada por θ, isto é, concentrada no conjunto $\{0,\theta,2\theta,3\theta,\ldots\}$.

Denotemos por $U_{n\theta}$, a probabilidade que ocorra alguma renovação na época $n\theta$, isto é, a probabilidade que, para algum k, tenhamos $S_k = n\theta$.

Chamemos de μ, a média de F ($\mu \leq \infty$).

Nestas condições:

$$U_{n\theta} \longrightarrow \theta\mu^{-1} \quad \text{quando} \quad n \to \infty .$$

Se $\mu = \infty$, interpretamos $\mu^{-1} \equiv 0$".

Veremos agora, que a demonstração dêste teorema pode ser, obtida, como aplicação direta de um resultado essencialmente numérico, sem ligações aparentes com variaveis aleatórias ou Teoria das Probabilidades. Referimo-nos ao seguinte:

<u>Teorema 3.2.1</u>: "Seja $\{a_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência numérica, tal que $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ e, o máximo divisor comum dos n para os quais $a_n > 0$ é 1.

Definimos uma sequência $\{b_n\}$ da seguinte maneira:

$b_0 = 1$ e, para $n \neq 0$

$b_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0$

Seja $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n$. Então:

$b_n \to \lambda^{-1}$, quando $n \to \infty$ "

Precisamos, agora, identificar os elementos de um Processo de Renovação, com as hipóteses do teorema anterior, para que possamos aplicá-lo.

Com êste objetivo, relembremos a definição de Evento Recorrente, numa sequência de ensaios repetidos:

"Dizemos que um evento E, definido em relação a uma sequência de ensaios repetidos, é um <u>evento recorrente</u>, se os tempos de espera entre as sucessivas ocorrências de E, formam uma sequência de variaveis aleatórias independentes e identicamente dis-

tribuídas".

É possivel, associarmos a cada evento recorrente E, duas sequências de probabilidades $\{f_n\}$ e $\{u_n\}$, definidas por:

f_n: probabilidade que o evento E ocorra pela primeira vez no n-ésimo ensaio.

u_n: probabilidade que o evento E ocorra no n-ésimo ensaio.

Pela própria definição de f_n , temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \leq 1 .$$

Suponhamos agora que S_n é a variável aleatória definida como sendo o tempo de espera para a n-ésima ocorrência de E.

A distribuição de probabilidade F de X_i: tempo de espera para a ocorrência de E, é dada pela sequência $\{f_n\}_{n\geq 0}$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$, isto é, se F é uma distribuição própria, as variaveis aleatórias $\{S_n\}$, formam um processo de renovação. Assim, dizemos que ocorre uma renovação na época n, se, para algum k , tivermos $S_k = n$.

Reciprocamente, dado um processo de renovação definido por uma função distribuição F, concentrada nos inteiros, o evento E: "ocorrência de uma renovação" é um evento recorrente. Mais ainda, na linguagem de eventos recorrentes, E é persistente. (Feller, [15]).

Resumindo, podemos dizer que os Processos de Renovação podem ser olhados atravéz da Teoria dos Eventos Recorrentes, dêsde que

a distribuição F que define o processo seja própria, esteja concentrada nos inteiros, e, vice-versa.

É claro, agora, que a associação que fizemos engloba também as distribuições aritméticas. Basta definirmos que, uma renovação ocorre na época n, se, para algum k, tivermos $S_k = n\theta$, onde θ é o gerador da distribuição aritmética F, que rege o processo. Após esta discussão é fácil ver, porque, no teorema fundamental para F aritmética, as condições do teorema 3.2.1 estão satisfeitas.

Senão, vejamos:

— $\{f_{n\theta}\}$ é a distribuição do tempo de espera para a ocorrência da primeira renovação, isto é, é a distribuição F.

— $\sum_{n=0}^{\infty} f_{n\theta} = 1$, pois F é suposta uma distribuição própria.

— O máximo divisor comum dos n para os quais $f_{n\theta} > 0$ é 1. De fato, se o m.d.c. fosse algum inteiro $k > 1$, a distribuição F estaria concentrada nos múltiplos de $(k\theta)$ e, θ não seria o gerador da F, como estamos supondo.

— Finalmente, levando em consideração que:

$f_{n\theta} = P\{S_1 = X_1 = n\theta\}$ e

$u_{n\theta} = P\{$exista algum k tal que $S_k = n\theta\}$, podemos escrever:

$$u_{n\theta} = f_\theta \, u_{\theta(n-1)} + f_{2\theta} \, u_{\theta(n-2)} + \ldots + f_{n\theta} \, u_o \quad .$$

Sendo assim, a simples aplicação do teorema 3.2.1 resulta em:

$$u_{n\theta} \longrightarrow \lambda^{-1} \text{ , quando } n \to \infty \text{ , com,}$$

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{n\theta} \quad .$$

Mas, a média μ da distribuição F é dada por

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n\theta \, f_{n\theta} = \theta \sum_{n=1}^{\infty} n f_{\theta n} = \theta\lambda$$

Então:

$$\lambda^{-1} = \frac{\theta}{\theta\lambda} = \theta\mu^{-1} \quad .$$

Se $\mu = \infty$, interpretamos $\mu^{-1} \equiv 0$.

Deste modo, obtemos

$$U_{n\theta} \longrightarrow \theta\mu^{-1} \text{ , quando } n \to \infty \text{ e } \mu < \infty$$

$$U_{n\theta} \longrightarrow 0 \text{ , quando } n \to \infty \text{ e } \mu = \infty \quad .$$

Resta portanto, demonstrar o teorema 3.2.1.

Com êste objetivo, vamos usar dois resultados essenciais ao desenvolvimento da demonstração, que podem ser encontrados em Feller [15].

<u>Lema 3.2.2:</u> <u>Princípio da Seleção (método de diagonalização de Cantor)</u>

"Suponha que, para cada inteiro $k > 0$, existe uma sequência de números $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$,... tal que $0 \leq a_j^{(k)} \leq 1$, para todo j.

Existe uma sequência $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots \to \infty$, tal que, quando k percorre $\{k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots\}$, $a_n^{(k)} \to a_n$, para cada n fixado".

<u>Lema 3.2.3</u>: Seja $\{r_k\}_{k \geq 0}$, uma sequência numérica, onde $r_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1$ e, o m.d.c. dos k que verifica $r_k > 0$ é 1.

Chamemos de

A: o conjunto de todos os inteiros k, para os quais $r_k > 0$.

A^+: o conjunto de todas as combinações lineares positivas, da forma $\sum_{i=1}^{m} p_i \, a_i$, com os números $a_i \in A$ e os p_i inteiros positivos.

Seja agora, $\{w_n\}$ uma sequência duplamente infinita $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ onde

$0 \leq w_n < \infty$, $w_n = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \, w_{n-k}$, para cada n e $w_0 = \alpha$.

Nestas condições:

a) Existe um número inteiro N, tal que o conjunto A^+ contém todos os inteiros $n > N$.

b) $w_n = \alpha$, para todo n".

Podemos agora, passa à

<u>Demonstração do teorema 3.2.1.</u>

Seja $\beta = \limsup_{n\to\infty} b_n$

$0 \leq \beta \leq 1$ e existe uma sequência $\{r_k\}$ tal que

$$b_{r_k} \longrightarrow \beta \text{ , quando } k \to \infty \text{ .}$$

Vamos definir, para cada k inteiro uma sequência $\{b_n^{(k)}\}$, onde

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} b_{r_k} + n & \text{, se } n \geq -r_k \\ 0 & \text{, se } n < -r_k \end{cases}$$

Pelo princípio da seleção (lema 3.2.2), é possível determinar uma sequência crescente de inteiros $k_1, k_2, \ldots,$ tal que, quando k percorre $\{k_1, k_2, \ldots.\}$

(1) $\qquad b_n^{(k)} \longrightarrow w_n$, para cada n fixado.

Como $b_0^{(k)} = b_{r_k} \longrightarrow \beta$, temos

(2) $\qquad w_0 = \beta$

Além disso,

(3) $\qquad 0 \leq w_n \leq \beta$

Agora, para cada valor de k e $n \geq k$, temos, por hipótese

$$b_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \, b_{n-j}^{(k)}$$

Quando k percorre $\{k_1, k_2, \ldots\}$,

$$(4) \qquad b_n^{(k)} \longrightarrow w_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, w_{n-j} \text{ , para cada } n.$$

Os resutados (2), (3) e (4) satisfazem as hipóteses do lema (3.2.3). Aplicando-o, vem:

$$(5) \qquad w_n = \beta \quad \text{para todo } n \text{ .}$$

Seja agora, a sequência $\{\delta_k\}_{k \geq 0}$, definida por:

$$\delta_0 = 1$$

$$\delta_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots, \text{ para } k \geq 1 \text{ .}$$

Temos:

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \lambda \text{ , pois:}$$

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j} \right\} =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_2 + a_3 + \ldots + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

Por outro lado,

$$(8) \qquad \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right) =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_2 + a_3 + \ldots + a_3 + a_4 + \ldots\ldots \text{ ,}$$

que coincide com o resultado em (7).

Tomamos a seguir, o têrmo geral da sequência $\{b_j\}$:

$b_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_o$, e somamos para $n = 1,2,\ldots,N$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} \{ \sum_{n=1}^{n} a_j b_{n-j} \} .$$

Desenvolvendo, temos:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_N = a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + \ldots$$

$$\ldots + a_1 b_{N-1} + a_2 b_{N-2} + \ldots + a_N b_0 =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_N) b_0 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}) b_1 +$$

$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-2}) b_2 + \ldots + a_1 b_{N-1} + a_0 b_N .$$

(9) $$(1-a_1-a_2-\ldots-a_{N-1})b_1 + (1-a_1-a_2-\ldots-a_{N-2})b_2 + \ldots + (1-a_1)b_{N-1} =$$

$$= -b_N + a_1 + a_2 + \ldots + a_N .$$

Agora, como $\delta_k = 1-a_1-a_2-\ldots-a_k$ e $\delta_0 = 1$, vem:

$\sum_{j=1}^{N} a_j = 1 - \delta_N$ e portanto, a relação (9) fica:

$\delta_{(N-1)} b_1 + \delta_{(N-2)} b_2 + \ldots + \delta_1 b_{N-1} + \delta_0 b_N + \delta_N b_0 \equiv 1$, isto é ,

(10) $$\delta_0 b_N + \delta_1 b_{n-1} + \ldots + \delta_{N-1} b_1 + \delta_n b_0 \equiv 1 .$$

Usamos agora, sucessivamente o resultado obtido em (10) para $N = k_1, k_2, \ldots$.

De (1) e (5) vem:

$b_{N-j} \longrightarrow w_{-j} = \beta$, para cada j fixado, quando N percorre $\{k_1, k_2, \ldots\}$

Temos então

$$\beta \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \equiv 1$$

$$\beta \lambda \equiv 1 \Longrightarrow \beta = \lambda^{-1} \text{ , isto é,}$$

(11) $\quad b_n \longrightarrow \lambda^{-1}$, para a aproximação de $n \to \infty$, através da sequência $\{k_1, k_2, \ldots\}$

Finalmente, para que esta demonstração se complete, resta agora provar, que o resultado (11) se verifica qualquer que seja a aproximação $n \to \infty$.

Suponhamos então que $n \to \infty$ de tal modo que $b_n \longrightarrow \beta_0$, $b_n \leq 1$ para todo n e $\beta_0 \leq \beta$

Pela definição de limite superior, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$

$b_{n-j} < \beta + \varepsilon$, para caja j fixado.

Da relação (10), vem:

$$\delta_0\beta_0 + (\delta_1 + \ldots + \delta_r)(\beta+\varepsilon) + (\delta_{r+1} + \delta_{r+2} + \ldots)\beta_0 \geq 1$$

$$\delta_0\beta_0 + \delta_1\beta + \delta_2\beta + \ldots + \delta_r\beta + (\delta_1 + \ldots + \delta_r)\,\varepsilon +$$

$$+ (\delta_{r+1} + \ldots)\,\beta \geq 1$$

Mas, $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \lambda$.

Então, $\delta_{r+1} + \delta_{r+2} + \ldots = \lambda - \delta_0 - \delta_1 - \ldots - \delta_r$, e,

$$\delta_1 + \ldots + \delta_r < \lambda .$$

Temos assim

$$\delta_0\beta_0 + \delta_1\beta + \delta_2\beta + \ldots + \delta_r\beta + (\delta_1 + \ldots + \delta_r)\ \varepsilon +$$

$$+ \lambda\beta - \delta_0\beta - \delta_1\beta - \ldots - \delta_r\beta \geq 1 \text{ , isto é:}$$

$$\delta_0(\beta_0 - \beta) + \lambda(\beta + \varepsilon) \geq 1 .$$

Como ε é arbitrário, fazendo $\varepsilon \to 0$ e considerando que $\lambda\beta = 1$ e $\delta_0 = 1$, vem

$$\beta_0 - \beta \geq 0 .$$

Mas, por hipótese $\beta_0 \leq \beta$. Assim, só resta $\beta_0 = \beta$ o que completa a demonstração.

Seção 3: O Teorema Fundamental da Renovação

Caso da Distribuição F não-aritmética

(1) "Seja F uma distribuição concentrada em $[0, +\infty)$, não aritmética com média $\mu \leq \infty$.

Consideremos a medida U, como foi definida no capítulo 2, seção 1.

Nestas condições, paratodo $h > 0$, $U(x) - U(x-h)$ converge para $h\mu^{-1}$, quando x tende ao infinito.

Se $\mu = \infty$, interpretamos $\mu^{-1} \equiv 0$" .

Antes de passarmos à demonstração, apresentaremos um lema que nos permitirá considerar uma forma alternativa do teorema, através da solução da equação de renovação do processo.

<u>Lema 3.3.1</u>: "Seja z uma função diretamente integravel segundo Riemann.

Suponhamos que

$U(x) - U(x-h) \to \alpha.h$,

quando $x \to \infty$, paratodo $h > 0$.

Nestas condições, a solução Z da equação de renovação do processo satisfaz:

$$(2) \qquad Z(t) \to \alpha \int_0^\infty z(y)dy, \text{ quando } t \to \infty \text{ "}$$

demonstração:

Mostremos, primeiramente que o resultado proposto, vale para uma função "indicador", isto é, para uma função do tipo:

$$z(t) = 1 \ , \ 0 \leq a \leq t < b < \infty$$
$$0 \ , \text{ caso contrário.}$$

Então:

$$Z(t) = \int_0^t z(t-y)U\{dy\} = \int_a^t z(t-y)U\{dy\} =$$

$$= \int_{t-b}^{t-a} U\{dy\} = U(t-a) - U(t-b) \quad .$$

Mas, para t tendendo ao infinito, a hipótese do lema afirma que

$$U(t-a) - U(t-b) \to (b-a)\,\alpha .$$

Assim, temos

$$Z(t) \to (b-a)\alpha = \alpha \int_0^\infty z(y)dy, \quad t \to \infty .$$

Consideremos agora, z uma função diretamente integrável, não negativa.

Seja Z a solução da equação de renovação correspondente à z . Fixemos $h > 0$ e vamos difinir:

$$z_i(t) = \begin{cases} 1 , & (i-1)h \leq t < ih \\ 0 , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Chamemos, para cada i ,

$$Z_i(t) = \int_0^t z_i(t-y)U\{dy\} = U(t-a_i) - U(t-b_i) ,$$

a solução da equação de renovação correspondente à z_i, que, pela primeira parte da demonstração verifica:

$$Z_i(t) \to \alpha.h \text{ , para cada i, quando } t \to \infty .$$

Definimos agora, duas funções, como se segue:

$$\underline{z} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \; z_i$$

$$\overline{z} = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \; z_i \quad \text{, onde,}$$

m_i e M_i representam respectivamente, o inf e o sup de z em $(i-1)h \leq t < ih$.

É claro que $\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$ e que, a integral de z é o valor comum dos limites das integrais de $\underline{z}$ e $\bar{z}$, quando h tende a zero. As correspondentes soluções da equação de renovação para $\underline{z}$ e $\bar{z}$ são, respectivamente $\underline{Z}$ e $\bar{Z}$, dadas por:

$$\underline{Z}(t) = \int_0^t \underline{z}(t-y)U\{dy\} =$$

$$= \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} m_i \; z_i(t-y)U\{dy\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} m_i \int_0^t z_i(t-y)U\{dy\} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \; Z_i$$

De modo análogo, obtemos

$$\bar{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \; Z_i \quad .$$

Sabemos, da demonstração da proposição 2.2.2 [Ítem (8)] que a medida U é uniformemente limitada para a classe dos intervalos finitos de um dado comprimento.

Então:

$$Z_i(t) = U(t-a_i) - U(t-b_i) \leq C_h \text{ , para todo i e para todo t.}$$

Assim, a série

$$\underline{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \; Z_i \leq C_h \sum_{i=1}^{\infty} m_i \quad \text{é uniformemente limitada, ocorrendo}$$

o mesmo, por motivos análogos, com a série $\bar{Z}(x)$.

Dêste modo, os restos das séries $\underline{Z}$ e $\bar{Z}$, convergem uniformemente para zero, e obtemos:

$$\lim_{t\to\infty} \underline{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \lim_{t\to\infty} Z_i(t) = \alpha h \sum_{i=1}^{\infty} m_i$$

$$\lim_{t\to\infty} \bar{Z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \lim_{t\to\infty} Z_i(t) = \alpha h \sum_{i=1}^{\infty} M_i$$

Mas,

$$h \sum_{i=1}^{\infty} m_i = s$$

$$h \sum_{i=1}^{\infty} M_i = S$$, onde s e S representam respectivamente as somas inferior e superior de Riemann. (integração direta).

Então, quando $t \to \infty$

$$\underline{Z}(t) \to \alpha\, s$$

$$\bar{Z}(t) \to \alpha\, S$$

Agora, como $\underline{Z} \leq Z \leq \bar{Z}$ e z é diretamente integrável segundo Riemann, os valôres de s e S são finitos, coincidem e dão o valor da integral de z, isto é,

$$Z(t) \to \alpha \int_0^{\infty} z(y)dy \ , \ t \to \infty \ ,$$

como havíamos proposto.

Chamaremos o enunciado em (1), de <u>PRIMEIRA FORMA DO TEOREMA DA RENOVAÇÃO</u> .

No caso em que $\alpha = \mu^{-1}$, o lema 3.3.1, que acabamos de demonstrar, estabelece a chamada <u>FORMA ALTERNATIVA DO TEOREMA DA RENOVAÇÃO</u> , isto é,

$$(3) \qquad Z(t) \to \mu^{-1} \int_0^\infty z(y)dy \ , \ t \to \infty \ .$$

Podemos agora, passar à

<u>Demonstração do Teorema Fundamental da Renovação</u>

Considerando que qualquer função z pode ser decomposta em suas partes positiva e negativa, mostraremos que o resultado proposto em (1) vale para funções z não negativas e contínuas:

Sejam os intervalos

$I = [\alpha, \beta]$

$I + x = [\alpha + x \ , \ \beta + x]$

Pela proposição 2.2.2, ítem (8), sabemos que a medida U é uniformemente limitada para todo intervalo finito I.

Podemos também, usar o teorema:

"Para uma sequência $\{v_n\}$ de medidas, onde a sequência numérica $v_n\{-x,x\}$ é limitada para todo x, existe uma medida v e uma sequência $\{n_i\}_{i\geq 1}$, tal que $v_{n_i} \to v$" , para concluir que, em nosso caso, existe $\{x_k\}$, $x_k \to \infty$ e uma medida V tal que

$$(4) \qquad U\{x_k + dy\} \to V\{dy\}$$

A medida V é finita em intervalos finitos, mas, não necessariamente concentrada em $[0, +\infty)$ ~

Consideremos agora, uma função não negativa e contínua z, que se anula fóra de um intervalo finito (0,a) e Z, a correspondên

te solução da equação de renovação, isto é,

$$Z(x_k+t) = \int_0^{x_k+t} z(x_k+t-y)U\{dy\}$$

Como $x_k \to \infty$, tomamos x_k tal que $x_k + t > a$.

A função z se anula fóra de (0,a). Com isto, temos

$$Z(x_k+t) = \int_0^a z(x_k+t-y)U\{dy\} .$$

A seguir, subtraímos (x_k+t), do argumento da função z, e obtemos

$$Z(x_k+t) = \int_0^a z(-y)U\{x_k+t+dy\}$$

Então

$$U\{x_k+t+dy\} \to V\{t+dy\} \text{ , quando } x_k \to \infty$$

Pelo teorema da convergência monótoma, vem:

$$(5) \qquad Z(x_k+t) \to \int_0^a z(-y)V\{t+dy\}, \text{ quando } x_k \to \infty .$$

Repetindo o mesmo raciocínio para $Z(x_k)$ temos

$$(6) \qquad Z(x_k) \to \int_0^a z(-y)V\{dy\}, \text{ quando } x_k \to \infty .$$

Usando agora, a parte b) do lema 2.2.3 , concluímos que:

$$Z(x_k+t) - Z(x_k) \to 0 \text{ , quando } x_k \to \infty, \text{ isto é,}$$

$$(7) \qquad Z(x_k+t) \to Z(x_k)$$

De (5), (6) e (7), vem:

$$(8) \qquad \int_0^a z(-y)V\{t+dy\} = \int_0^a z(-y)V\{dy\} \ .$$

Este último resultado é válido, como vimos, para toda função z. da classe das funções contínuas que se anulam fóra do intervalo (0,a).

Como, esta classe é uma "classe separante", (veja Breiman [4]). segue-se que

$V\{t+dy\} \equiv V\{dy\}$, ou seja,

(9) V é uma medida invariante por translação.

Sabe-se que, toda medida definida nos conjuntos de Borel da reta, que é invariante por translação, é um múltiplo da medida de Lebesgue na reta. (Royden [22]).

Concluímos assim, que para todo intervalo I, de comprimento h,

$V\{I\} = \theta.h$

Como $U\{x_k+dy\} \to V\{dy\}$, quando $x_k \to \infty$, segue-se que

$U\{x_k\} - U\{x_k-h\} \to V\{x_k\} - V\{x_k-h\} = \theta.h$, quando $x_k \to \infty$.

Com isto, demonstramos que para a sequência $\{x_k\}$, quando $x_k \to \infty$, existe θ (uma constante a ser determinada), tal que:

$$(10) \qquad U\{x_k\} - U\{x_k-h\} \to \theta.h \ .$$

Para conhecer o valor de θ, tomemos o lema 3.3.1 para $\{x_k\}$, θ e $z = 1-F$.

Então:

$$Z(x_k) \to \theta \int_0^\infty z(y)dy \ ,$$

onde, resta verificar se $z = 1-F$ é uma função diretamente integrável segundo Riemann.

Mas, a função $z = 1-F$ é monótona pois F é não decrescente e, pelo resultado citado no Teorema 2.1.2,

$$\int_0^\infty z(y)dy = \int_0^\infty [1-F(y)]dy = \int_0^\infty yF\{dy\} = \mu \ .$$

Consideremos o caso $\mu < \infty$. Então, a função $z = 1-F$ é diretamente integrável em $(0,+\infty)$, pois, para qualquer a finito,

$$\int_0^a z(y)dy < \int_0^\infty z(y)dy = \mu < \infty \ , \text{ isto é,}$$

z é integrável em todo intervalo finito $(0,a)$ (veja o Teorema 1.3.2).

Vale, então, o lema 3.3.1 e, para a particular função $z = 1-F$, a solução Z da equação de renovação é 1.

Temos assim,

$1 = \theta\,\mu$, ou seja,

$$(11) \qquad \theta = \mu^{-1}$$

Se agora, $\mu = \infty$, podemos truncar a função z:

$$\int_0^\infty z(y)dy = \int_0^b z(y)dy + \int_b^\infty z(y)dy \ ,$$

e, concluir que:

$$\theta\int_0^{\infty} z(y)dy > \theta\int_0^{b} z(y)dy \quad .$$

Para $z = 1-F$, $Z(x_k) \equiv 1$ e, então

$$\theta\int_0^{b} z(y)dy \leq 1 \ .$$

Segue-se assim que

$$\int_0^{b} z(y)dy \leq \theta^{-1} \text{ e, portanto}$$

$$\infty = \mu = \int_0^{\infty} z(y)dy > \theta^{-1} \text{ , o que implica em:}$$

$$(12) \qquad \theta = 0$$

Finalmente, determinado o valor da constante θ, resta mostrar que o resultado obtido, vale para todo x.

Para tanto, suponhamos, por absurdo, que existe outra sequência $\{x_k'\}$, $x_k' \to \infty$ e, uma medida $V' \neq V$ tais que:

$$U\{x_k' + dy\} \to V'\{dy\}, \text{ quando } x_k' \to \infty \ .$$

De forma análoga ao raciocínio feito para $\{x_k\}$ e V, concluímos que

$$V'\{t+dy\} = V'\{dy\} \text{ , isto é,}$$

V' é também, invariante por translação, e, portanto,

$$V'\{I\} = \gamma.h \quad .$$

Ainda, de forma idêntica ao que foi feito para determinar o valor de θ, obtemos

$$\gamma = \mu^{-1} \quad , \mu < \infty$$

$$\gamma = 0 \quad , \mu = \infty$$

Então, $\theta \equiv \gamma$, o que é absurdo pois supuzemos $V' \neq V$.

Assim,

$$U(x) - U(x-h) \to h\mu^{-1} \quad , \mu < \infty$$

$$U(x) - U(x-h) \to 0 \quad , \mu = \infty$$

quando $x \to \infty$ e para todo $h > 0$, como havíamos proposto.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES GERAIS SÔBRE O DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DA RENOVAÇÃO

Nêste último capítulo, faremos um breve histórico da Teoria da Renovação, finalizando com a apresentação de resultados mais recentes, que extendem o teorema central da Renovação para alguns casos especiais, eliminando as restrições sôbre as funções distribuição envolvidas no processo.

Vamos nos referir, em particular, aos aspectos puramente teóricos e computacionais do tema.

É claro que, com o desenvolvimento de modêlos teóricos, surge, simultâneamente, uma linha de aplicações bastante ampla, que por si só, poderia se constituir em objeto de pesquisa.

Acreditamos, ter evidenciado nêste primeiro contacto com a Teoria da Renovação, a nossa opção pelo aspecto teórico, visando com isto, adquirir elementos que servissem de apôio para uma melhor abordagem da área de aplicações.

Entretanto, é interessante, e cabe aqui destacar, que as aplicações, foram durante certo tempo, prejudicadas em seu desenvolvimento, pela existência de paradoxos (aparentes) que podiam, às vêzes, conduzir à conclusões errôneas.

Exemplificaremos com o chamado "Paradoxo da Inspeção", utilizando a distribuição exponencial, mas o problema ocorre no ca-

so geral, como o leitor poderá verificar consultando Feller - [16].

Antes porém, observemos que, em geral, para qualquer processo, no qual a ocorrência de um determinado evento, depende de "impulsos momentâneos" e não, do que aconteceu no passado, os - "tempos de espera" entre sucessivas ocorrências dêste evento (isto é, as renovações), têm distribuição geométrica ou exponencial, dependendo do parâmetro - tempo, ser discreto ou contínuo respectivamente.

Isto porque, as distribuições citadas gozam da chamada propriedade da falta de memória:

$P\{X = k \ / \ X > k-1\} = \rho_0$, no caso discreto

$P\{X > t+s \ / \ X > s\} = P\{X > t\}$, no caso contínuo.

Intuitivamente, todo processo cuja distribuição gosa desta propriedade, não "envelhece" e, a cada etapa, a distribuição do seu tempo restante de vida independe da sua idade.

É fácil verificar que as distribuições geométrica e exponencial satisfazem a falta de memória e, mais ainda, que são as únicas (cada uma na classe das distribuições discretas e contínuas) com tal propriedade. Isto justifica o fato destas funções aparecerem com tanta frequência em problemas de "tempos de espera".

Voltando ao citado "Paradoxo da Inspeção", podemos resumí-lo como se segue:

"Uma peça de um equipamento (por exemplo, uma bateria elétrica)

é instalada e utilizada até que se quebre. Após a falha, ela é imediatamente substituída por uma peça do mesmo tipo, e o processo continua sem interrupção. As épocas de "substituição" definem um processo de renovação no qual a variável aleatória X_k é a duração de vida da k-ésima peça instalada e tem distribuição F, exponencial, com parâmetro $\lambda > 0$. Então $E\{X_k\} = \lambda^{-1}$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ define a época em que a n-ésima peça é substituída.

Suponhamos agora, que, o tempo real de vida destas peças deve ser testado por inspeção, ou seja, que se toma uma amostra de peças em operação na época $t_o > 0$, fixada e se observam as suas durações.

Se definirmos a variavel aleatória W_{t_o} como sendo o tempo restante de vida de cada peça da amostra, concluiríamos que W_{t_o} tem a mesma distribuição exponencial das variaveis aleatórias do processo, devido à falta de memória da exponencial. Realmente, de $W_{t_o} = S_k - t_o$ pode-se demostrar que

$$P\{W_{t_o} \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x} \quad .$$

No entanto, o tempo total de vida de cada peça incluída na amostra tem uma distribuição diferente, o que contraria completamente a intuição".

De fato, é fácil ver que essa distribuição coincide com a de um elemento X_k para o qual

$$S_{k-1} < t_o \leq S_k \quad ,$$

e, que êste elemento tem densidade dada por

$$f_{t_o}(x) = \begin{cases} \lambda^2 \, x \, e^{-\lambda x} & , \quad \text{para} \quad 0<x\leq t_o \\ \lambda(1+\lambda x)e^{-\lambda x} & , \quad \text{para} \quad x > t_o \end{cases}$$

Então, a duração total esperada de uma peça incluída na amostra é portanto, $2\lambda^{-1}$.

Esta densidade, óbviamente, não coincide com a das variaveis aleatórias do processo, visto como um todo.

Resumindo, o fato de inspecionar uma peça na época t_o fixada, muda a distribuição do seu tempo de vida e dobra a sua duração esperada (Intuitivamente podemos pensar que um intervalo maior tem mais chance de conter o instante t_o fixado).

Do ponto de vista prático, a maneira de se evitar êste problema consiste num plano de inspeção em que se examina a primeira peça nova, instalada após o instante t_o.

Feito êste parênteses, podemos iniciar um breve relato do desenvolvimento da Teoria da Renovação, com ênfase no seu aspecto teórico.

Um estudo descritivo das origens e das várias fases de evolução da teoria até 1958, pode ser encontrado no artigo de W. Smith: "Renewal Theory and its ramifications" [26]. Êste trabalho, a nosso ver, constitue a referência básica e a primeira leitura para quem deseja conhecer, em linhas gerais, a história da Teoria da Renovação.

A respeito dêste artigo, Cox comentou: ".....this paper is a demonstration if one were needed, that elegance of a general theory and power in answering particular problems can well together".

As origens da teoria estão ligadas à questões de crescimento populacional e à análise de sistemas de ítens auto-renovaveis. A primeira referência a êste respeito é feita por Lotka [20], em 1939, com um trabalho de especial aplicação às "renovações em processos industriais".

Em 1943, C.Palm, introduziu o conceito de "pontos de reprodução" dentro da teoria do tráfego telefônico. Em particular, êsse autor fez uso de um resultado que mais tarde seria denominado "Teorema Elementar da Renovação".

A partir desta época, o assunto começa a despertar interêsse entre os matemáticos, e, consequentemente surge uma grande variedade de resultados teóricos, o que poderia parecer surpreendente, dadas as origens simples da teoria.

Os primeiros esbôços de uma "construção teórica", aparecem com Doob [11], em 1948 e, com Feller, [13], [14] em 1948 e 1949, onde o primeiro aborda o tema sob o ponto de vista da Teoria das Probabilidades e, o segundo, com base na Teoria dos Eventos Recorrentes. (Aliás, o que Feller, nestes artigos, chama de um processo-evento recorrente, é o que essencialmente conhecemos como um processo de renovação discreto).

Os teoremas que chamaríamos de fundamentais para a teoria sur-

gem no período 1949 - 1960 e se caracterizam pela presença de condições que restringem extremamente as suas validades.

Quase todos os resultados descrevem o "comportamento assintótico" dos processos, e, essa grande ênfase nos teoremas limites, é naturalmente explicada pelo desejo de se obter conclusões, válidas em situações bastante gerais.

Em 1957, Skellam e Shenton [24], conseguem uma série de "resultados finitos" para casos especiais.

Outro fato, que chama a atenção é que os autôres em sua grande maioria, pesquisam o comportamento de um processo, atraves da sua Função de Renovação $U(x) = E\{N_x\}$, definida no capítulo 2, como o número médio de renovações no intervalo $[0,x]$. Conhecer esta função, ou mesmo, o seu comportamento assintótico para grandes valôres de x, é suficiente para responder à maior parte das questões que surgem ao se estudar um processo de renovação.

O mais simples e antigo resultado sôbre $U(x)$ é o chamado "Teorema Elementar da Renovação" : $\frac{U(x)}{x} \longrightarrow \mu^{-1}$, quando $x \to \infty$ (onde $\mu = E(X_i) \leq \infty$ e $\mu^{-1} \equiv 0$ se $\mu = \infty$)(cap. 3 - sec 1).

A primeira demonstração rigorosa dêste fato é devida a Feller, em 1941 [12], que fez uso de um teorema Tauberiano para integrais de Laplace.

Nesta monografia, para demonstrá-lo, seguimos a orientação dada por Doob [11], por serem, os seus argumentos, de certa forma, mais simples e diretamente ligados à Teoria das Probabili-

dades.

Este resultado elementar, foi gradualmente extendido, chegando a outro teorema, de grande importância teórica, devido a Blac-Kwell [2].

Constitue o que chamamos de "Teorema Fundamental da Renovação":

$U(x) - U(x-h) \to h\,\mu^{-1}$, quando $x \to \infty$, para todo $h > 0$, fixado.

A demonstração feita por Blackwell, depende também da Teoria das Probabilidades, mas, é um tanto difícil e complicada. Surgiram posteriormente, outras demonstrações do mesmo fato, sem que se conseguisse uma real simplificação dos argumentos.

No entanto, em 1954, Smith [25], consegue uma "versão" do teorema de Blackwell, usando um teorema Tauberiano de Wiener, e, estabelece o resultado, que no capítulo 3, denominamos de "Forma Alternativa do Teorema da Renovação":

$$Z(x) = \int_0^x z(x-y)U\{dy\} \to \mu^{-1} \int_0^\infty z(y)dy, \text{ quando } x \to \infty .$$

Se, nesta forma alternativa, fazemos

$$z(t) = \begin{cases} h^{-1} & , \quad 0 < t < h \\ 0 & , \quad \text{no complementar} \end{cases}$$

isto é,

$$\int_0^x z(x-y)U\{dy\} = h^{-1}\int_{x-h}^x U\{dy\} = h^{-1}\{U(x) - U(x-h)\}$$

obtemos o teorema de Blackwell. A situação inversa, foi provada, neste trabalho, pelo lema 3.3.1.

Para a demonstração do Teorema Fundamental, usamos, no capítulo 3, as duas formas citadas, seguindo Smith [26] e a mais recente prova dada por Feller [16].

A partir dêste resultado, foram deduzidas entre outras, aplicações em Teoria das Filas, por Benes [1] e em Teoria dos Contadores, por Pyke [21].

É importante salientar também, que Cox [9], em 1955, obtêm as linhas básicas das relações entre Teoria da Renovação e problemas de Inferência.

As primeiras extensões do Teorema central (nas formas que denominamos de "elementar" e "fundamental"), aparecem quando num processo usual de renovação, retiramos a hipótese que as variaveis aleatórias X_k são não negativas. Pelo menos, do ponto de vista matemático esta generalização faz sentido e define o chamado "Processo Extendido".

Os autôres Chung e Pollard (1952)[7], Chung e Wolfowitz (1952) [8], Blackwell (1953) [3], Karlin (1955) [18], Smith (1954)[25], mostraram, sob condições diferentes, que o Teorema Fundamental da Renovação é válido para tais processos extendidos.

Em 1954, Smith [25], supondo adicionalmente que $\mu_2 = E(X_i^2) < \infty$, provou que:

$$U(x) - x\mu^{-1} \to \mu_2(2\mu^2)^{-1} - 1 \text{ , quando } x \to \infty \text{ .}$$

A partir daí, a maioria das extensões é feita para casos particulares com restrições às funções distribuição.

Existem artigos mais recentes que estudam o resultado elementar, sob as mesmas hipóteses, procurando obter maiores informações sôbre a convergência de $\frac{U(x)}{x}$, quando $x \to \infty$, no caso $\mu = \infty$.

Nestas condições um estudo mais detalhado, requer métodos matemáticos poderosos, e, em geral, os autôres utilizam os chamados argumentos Tauberianos, por serem mais adequados, em função das restrições impostas às caudas da distribuição F.

Assim, em 1960, Smith [27], obtém resultados para os casos especiais em que:

(a) $$1 - F(x) \sim \frac{1}{x}$$

(b) $$1 - F(x) \sim \frac{1}{\log x}$$

É fácil ver que para estas situações temos $\mu = \infty$. O autôr, nêste artigo, utiliza e extende um resultado devido a Feller [16] e demonstra que, quando $x \to \infty$,

$U(x) \sim \frac{x}{\log x}$, no caso (a)

$U(x) \sim \log x$, no caso (b).

Mais recentemente, em 1968, Teugels [30], reformulou os resultados de Feller e Smith em um único teorema e obteve também uma estimativa assintótica para $E\{N_x^2\}$.

As extensões feitas, com o objetivo de eliminar as hipóteses de independência e de igualdade das distribuições envolvidas em

um processo, ocorrem em relação à forma elementar do Teorema da Renovação. (Não seria de se esperar, naturalmente, que, eliminando estas restrições, o número médio de renovações num intervalo de comprimento h, dependesse apenas de h).

Nêste sentido, em 1963, Chow e Robbins [5] consideram uma sequência de variaveis aleatórias não identicamente distribuídas (e, não necessàriamente independentes) e estabelecem condições sôbre a distribuição conjunta, que garantem a validade do teorema elementar.

Em artigos publicados em 1964 e 1967, Smith [28] , [29], estudou o comportamento de somas do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\{S_n \leq x\}$. (Observemos que, bàsicamente, o Teorema da Renovação fornece uma estimativa assintótica para somas dêste tipo, com $a_n = 1$, para todo n).

Com a hipótese de não-igualdade das distribuições, o autor obteve os mesmos resultados de Kawata, [19], em 1956, sob condições bem mais fracas do que as impostas por êste último. Além disso, Smith estabeleceu relações de implicação entre as suas conclusões e a lei fraca dos grandes números.

Com um estudo mais detalhado das hipóteses feitas por Smith , nêstes artigos, Heyde [17], em 1968 conseguiu certas variações importantes dêsses resultados.

Evidentemente, destacamos aqui, sòmente alguns dos trabalhos que tiveram por objetivo uma generalização dos pontos bàsicos da teoria.

Os problemas, ainda em aberto, (como por exemplo: estimativas de U(x), "velocidade" de convergência de $\frac{U(x)}{x}$, para $\mu \leq \infty$ etc) apresentam um carater essencialmente técnico, e, as soluções só têm sido possiveis para famílias particulares de funções distribuição F.

A grande atividade atual, dentro da Teoria da Renovação está ligada à área de aplicações de seus resultados, essencialmente, na procura de condições que permitam a adaptação de um modêlo de renovação à situações reais.

B I B L I O G R A F I A

[1] Benes, V.E (1957), "On queues with Poisson arrivals" Ann. Math. Statist., 28, 670-677.

[2] Blackwell, D. (1948), "A renewal theorem", Duke Math.J., 15, 145-150.

[3] _____ (1953), "Extension of a renewal theorem", Pacific I.Math, 3, 315-320.

[4] Breiman L. (1968) "Probability", California, Addison - Wesley.

[5] Chow, Y.S and Robbins, H (1963). "A renewal theorem for random variables which are dependent or non - identically distributed. Ann. Math. Statist. 34, 390-395.

[6] Chung, K.L (1968) "A course in Probability Theory" , New York: Harcourt, Brace & World, Inc.

[7] _____ & Pollard, H (1952) "An extension of renewal theory". Proc Amer. Math. Soc., 3, 303-309.

[8] _____ & Wolfowitz, J. (1952). "On a limit theorem in renewal theory", Ann. Math, 55, 1-6.

[9] Cox, J.R (1955) "Some statistical methods connected with series of events". G.R. Statist. Soc. B, 17, 129-164.

[10] _____ (1967) "Renewal Theory", London, Science Paper back edition 1967. Butler and Tanner.

[11] Doob, J.L (1948), "Renewal theory from the point of view of the theory of probability", Trans. Amer.Math.

Soc., 63, 422-438.

[12] Feller, W. (1941) "On the integral equation of renewal theory", Ann. Math. Statist, 12, 243-267.

[13] _____ (1948) "On probability problems in the theory of counters", Courant Anniversary Volume, 105-115.

[14] _____ (1949), "Fluctuation theory of recurrent events", Trans Amer. Math. Soc., 67, 98-119.

[15] _____ (1967) "An introduction to Probability Theory and Its applications, 1., 3nd. ed, New York , Wiley.

[16] _____ (1971) "An introduction to Probability Theory and Its applications, 2, 2nd. ed. New York , Wiley.

[17] Heyde C.C. (1968) "Variations on a Renewal Theorem of Smith", Ann. Math. Statist; 39, 155-158.

[18] Karlin, S (1955), "On the renewal equation" Pacific J. Math, 5, 229-257.

[19] Kawata, T (1956) "A renewal theorem" J. Math. Soc. Japan; 8, 118-126.

[20] Lotka, A (1939), "A contribution to the theory of self-renewing aggregates, with special reference to industrial replacement", Ann. Math. Statist; 10, 1-25.

[21] Pyke, R (1957), "On renewal processes related to type I and type II counter models; the general counter problems", Applied mathematics and statistics laboratory technical report, nº37, Stanford University.

[22] Royden, H.L(1970) "Real Analysis" 2nd ed. London, Macmillan Co.

[23] Sheldom M. Ross (1970) "Applied Probability Models", California, Holden-Day.

[24] Skellam, J.G & Shenton, L.R (1957) "Distributions associated with random walks and recurrent events" , J.R. Statist. Soc. B, 19; 64-111.

[25] Smith, W.L (1954) "Asymptotic renewal theorems", Proc. Roy. Soc. Edinb. A, 64; 9-48.

[26] _____ (1958) "Renewal theory and its ramifications". J.R. Statist. Soc. B, 20; 243-302.

[27] _____ (1960) "A note on the Renewal Function when the Mean Renewal Lifetime is Infinite" J Roy. Statist Soc. B, 23; 230-237.

[28] _____ (1964) "On the elementary renewal theorem for non-identically distributed variables". Pacific J. Math, 14, 673-699.

[29] _____ (1967) "On the weak law of large numbers and the generalized elementary renewal theorem". Pacific J. Math. 22; 171-188.

[30] Teugels, J.L. (1968) "Renewal Theorems when the first or the second moment is infinite" Ann. Math. Statist., 39; 1210-1219.