REGRAS DE PARADA ÓTIMAS PARA PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COM PARÂMETRO DISCRETO

wagner de souza borges

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ESTATÍSTICA TEÓRICA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. FLÁVIO WAGNER RODRIGUES*

MARÇO DE 1974

SÃO PAULO

Quero dedicar este trabalho à Sonia, minha esposa, pelo apoio e estímulo de todas as horas, e a meus pais pela formação que me propiciaram.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao terminarmos este trabalho, não podemos esquecer toda a ajuda que muitos, direta ou indiretamente, nos prestaram. De algumas até mesmo não conseguimos lembrar. Todavia, não poderíamos deixar de mencionar particularmente:

o professor Dr. Carlos Alberto Barbosa Dantas, que sugeriu o tema desta dissertação e nos orientou durante uma boa parte do trabalho;

o professor Dr. Flávio Wagner Rdorigues que, quando da viagem do Dr. Dantas ao exterior, aceitou de bom grado substituí-lo,nos auxiliando na parte final e na redação;

o apoio e estímulo dos membros do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, e o cuidado dispensado por nosso colega João Baptista Esteves de Oliveira, na datilografia dos manuscritos.

INTRODUÇÃO

A introdução da Teoria das Funções de Decisão Sequenciais por Wald em *Foundations of a General Theory of Sequencial Decision Functions* (1947), estendendo os primeiros resultados que deram origem a *Teoria da Decisão Estatística*, motivou a abertura de um novo campo de estudos que culminou com a formulação da *Teoria Geral da Parada Ótima*.

Arrow, Blackwell & Girshick (1949) tratando o problema da determinação de soluções de Bayes para problemas de decisão sequencial, introduziram a primeira técnica para a obtenção de procedimentos sequenciais (regras de parada) ótimos e que é conhecida pelo nome de *Backward Induction*. Wald & Wolfowitz (1950) mostraram que o problema da existência de soluções de Bayes para problemas de decisão sequencial podiam ser considerados como problemas de existência de regras de parada ótimas para processos estocásticos, com parâmetro discreto, convenientemente escolhidos. Snell (1952), Chow & Robbins (1961, 1963 e 1967), Haggstron (1966) e Siegmund (1967) estudaram o problema da parada ótima e desenvolveram os fundamentos de uma teoria geral para processos estocásticos com parâmetro discreto. Uma outra abordagem do problema da parada ótima, pode ser encontrada nos trabalhos de Dynkin,

Grigelionis, Shiriaev e Dantas que utilizaram técnicas baseadas na *Teoria Probabilística do Potencial*, no caso de Processos de Markov com parâmetros discreto e contínuo.

Neste trabalho, discutiremos alguns aspectos da Teoria da Parada Ótima tal como foi sugerida por Chow & Robbins, procurando discutir seus resultados principais apresentando-os em forma didática e acompanhados de demonstrações formais.

O trabalho se divide em cinco seções e dois apêndices, organizados da seguinte forma: na seção 1 descrevemos e ilustramos com alguns exemplos, problemas de parada ótima; na seção 2 o problema é formulado com precisão e de forma genérica; na seção 3 desenvolvemos a teoria para processos com parâmetro discreto; na seção 4 tratamos técnicas para determinar regras de parada ótimas e na seção 5 é feita uma comparação dos resultados da seção 3 com aqueles obtidos por Snell. Nos apêndices foram incluídos alguns resultados da Teoria das Probabilidades que são utilizados, acompanhados de uma bibliografia adequada, a fim de tornar mais completo o trabalho.

I - O PROBLEMA DA PARADA ÓTIMA

Suponha que será realizada uma sequência de partidas de um determinado jogo de apostas e que um jogador deseja participar delas mas pretende abandonar o jogo após haver realizado um certo número de partidas, retirando-se então com a fortuna obtida até aquele instante. Obviamente estamos supondo que o jogador não tem capacidade de profetizar e portanto a escolha do instante em que irá abandonar o jogo deverá basear-se apenas no seu conhecimento acerca do passado e presente. Assim, após a realização de cada partida, com base nos resultados obtidos até aquele instante, o jogador deve optar entre: parar retirando-se com a fortuna obtida até aquele instante; ou jogar a próxima partida. Seu objetivo, com isto, é tornar máxima a fortuna que espera receber no instante em que abandona o jogo.

Neste contexto o *problema da parada ótima* fica caracterizado de forma natural e podemos considerar como características essenciais de tal problema:

1) *um mecanismo aleatório regido por uma lei probabilística que iremos supor conhecida;*

2) *uma recompensa* e

3) *sistemas de decisão que, após cada observação da "posição" do mecanismo, nos permita optar entre:*

a) *parar e receber a recompensa devida até aquele instante;*

b) *continuar até observar novamente a posição do mecanismo.*

Observe ainda que no caso do jogador, a solução para o seu problema consiste na determinação, caso exista, de um sistema de decisão satisfazendo ao critério de otimalidade por ele estabelecido, ou seja, aquele que corresponde ao seu objetivo.

Neste trabalho, trataremos o problema da parada ótima num contexto geral e para tanto estabeleceremos na próxima seção uma estrutura matemática formal na qual este problema poderá ser formulado com precisão e estudaremos com detalhe a existência e determinação de soluções para o mesmo.

Entretanto, antes de prosseguirmos vamos ilustrar com alguns exemplos:

EXEMPLO 1 - Suponha que uma pessoa queira procurar emprego. Ela sabe ainda que após cada visita a um empregador, ela pode decidir entre parar de procurar emprego, aceitando o melhor entre os que já possui informações ou continuar sua procura investigando outra oferta de trabalho. A questão é que procedimento deve adotar na procura a fim de que possa esperar aceitar a melhor oferta.

EXEMPLO 2 - Um jogador pode fazer uma sequência de apostas da seguinte maneira: cada vez que ele aposta, sua fortuna é duplicada com probabilidade p ou reduzida a zero com probabilidade $1-p$. A questão é qual deve ser o melhor instante para parar de apostar, supondo que sua fortuna inicial é c.

EXEMPLO 3 - Suponha que iremos examinar ν ($\nu \geq 2$) objetos em uma ordem aleatória, e que dentre esses objetos desejamos escolher a melhor. Após examinar cada um dos objetos, devemos escolhê-lo ou rejeitá-lo definitivamente. O problema consiste em determinar um método tal que seja possível discriminar o melhor objeto, no instante em que o mesmo é examinado, com a maior probabilidade possível.

O exemplo 3, nos diversos contextos em que é apresentado, recebe os mais diferentes nomes, entre eles, o problema da secretária ou ainda o problema do concurso de beleza.

EXEMPLO 4 - *O problema do estacionamento* - Uma pessoa deseja encontrar um local para estacionar seu automóvel, a fim de assistir uma peça num determinado teatro. Suponha que ela se aproxima do teatro a uma distância de x unidades e se passar do teatro sem haver estacionado, a pessoa circula os quarteirões adjacentes na procura de uma vaga. Como a pessoa quer chegar ao teatro o mais cedo possível, que estratégia deve adotar para que possa esperar gastar o menor tempo possível para chegar ao teatro.

EXEMPLO 5 - Suponha que um equipamento tenha probabilidade p_k de fa-

lhar entre os instantes k e k+1. Existem oportunidades periódicas de substituição, nos instantes 0, 1, 2, ... e o equipamento é novo no instante 0. Em qualquer instante n, ele pode ser substituido por um novo, a um custo c_1, se estiver em funcionamento, e o equipamento que o substitue será considerado novo no instante n+1. Por outro lado, se o equipamento falha entre os instantes n e n+1, ele é substituido a um custo c_1+c_2 e o novo equipamento entra em operação no instante n+2. O objetivo consiste em estabelecer uma política de substituição que minimize o custo por unidade de tempo.

EXEMPLO 6 - Um pesquisador toma observações independentes de uma distribuição F, sobre a reta, com média 0 e variância finita. Supondo que ele deseja parar de tomar observações em algum instante, que procedimento ele deve adotar na escolha deste, a fim de que possa esperar obter a maior média de observações possível.

Alguns exemplos mencionados acima, encontram-se basicamente em Chow, Robbins & Siegmund (1971). São problemas clássicos da Teoria da Parada Ótima, e foram amplamente estudados. Outros exemplos poderão ser encontrados em Breiman (1964). Não será nosso objetivo nos referir a eles eventualmente. O leitor interessado nas soluções poderá consultar a bibliografia indicada no final deste trabalho.

II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Na seção anterior, introduzimos e ilustramos com alguns exemplos, problemas de parada ótima. Nesta seção vamos estabelecer uma estrutura matemática na qual poderemos formulá-los com precisão e tratá-los de um modo genérico. Para tanto, consideraremos inicialmente o exemplo 1 da seção anterior.

Suponha que a pessoa esteja interessada em apenas um tipo de atividade, e que deseja fazer sua escolha com base nas informações relativas a salários. Duas coisas são óbvias: a pessoa não vai procurar emprego indefinidamente e além disso a decisão de parar de procurar emprego após ter se entrevistado com n empregadores só pode depender das informações obtidas nas n primeiras entrevistas.

Vamos introduzir uma sequência $\{Y_n\}_{n\in N}$ de variáveis aleatórias, com distribuição conjunta conhecida, para representar os salários que lhe são oferecidos nas sucessivas visitas aos empregadores. Assim, podemos indicar a oferta finalmente aceita, através de uma variável aleatória, definindo, para cada $n\in N$, $X_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Neste contexto, um sistema de decisão para a escolha do instante em que deve parar a procura, pode ser descrito por uma variá-

vel aleatória t assumindo valores inteiros positivos e tal que o evento $\{t=n\}$ (parar após a n-ésima visita) só depende de $Y_1, \ldots, Y_n$. Esta variável aleatória é denominada *regra de parada*.

Qual o procedimento, ou melhor, que regra de parada esta pessoa deve utilizar na procura de emprego, a fim de que possa esperar aceitar a melhor oferta? Na resposta a esta pergunta, reside a solução do problema de parada ótima considerado.

A cada regra de parada t para este problema, é possível associar uma variável aleatória X_t, que representa a oferta finalmente aceita pela pessoa, e interpretar EX_t, quando existir, como a performance de t. A pergunta do parágrafo anterior pode ser reformulada em termos de regras de parada e respectivas performances, e o objetivo da pessoa consistirá em determinar, caso exista, a regra de parada cuja performance é máxima.

Com este *background* intuitivo, vamos colocar o problema de uma maneira precisa e geral. Para tanto, consideraremos dados a partir desta seção:

a) um espaço de probabilidade (Ω, F, P);

b) uma sequência crescente, $\{F_n\}_{n\in N}$, de sub-σ-álgebras de F;

c) uma sequência, $\{X_n\}_{n\in N}$, de variáveis aleatórias definidas em (Ω, F, P), tal que X_n é F_n-mensurável, $\forall\, n\in N$.

Durante todo o desenvolvimento deste trabalho, a menos que seja feita alguma menção explícita, teremos em mente o espaço de probabilidade (Ω, F, P), de sorte que todas as variáveis aleatórias e definições

serão relativas ao mesmo. Além disso reservaremos a letra X para representar o processo estocástico $\{X_n, F_n\}_{n\in N}$ considerado em (c), e que denominaremos *processo de recompensa*.

DEFINIÇÃO 2.1 - Uma *regra de parada* relativa a uma sequência crescente, $\{B_n\}_{n\in N}$ de sub-σ-álgebras de F é uma variável aleatória t com valores em $\bar{N}$ e tal que:

a) $\{t=n\} \in B_n$, $\forall\ n\in N$;

b) $P(t < \infty) = 1$.

OBSERVAÇÃO - Em alguns casos, torna-se natural a consideração de variáveis aleatórias com valores em $\bar{N}$ que satisfazem apenas a condição (a) da definição 2.1. Estas variáveis aleatórias são denominadas *regras de parada extendidas*. Neste trabalho não nos dedicaremos ao estudo de tais regras, podendo o leitor interessado consultar Siegmund (1967) ou Chow-Robbins & Siegmund (1971).

Com respeito a um processo estocástico qualquer, $Y = \{Y_n, B_n\}_{n\in N}$, uma regra de parada relativa a $\{B_n\}_{n\in N}$ será denominada uma regra de parada para Y. O exemplo seguinte, dá uma interpretação para as condições (a) e (b) da definição 2.1, em termos do *background* intuítivo do início desta seção.

EXEMPLO 2.1 - Como $X_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$, se tomarmos $F_n = F(Y_1, \ldots, Y_n)$, um sistema de decisão que indica a pessoa o instante em que deve parar de procurar emprego nada mais é do que uma regra de parada para o processo

de recompensa $\{X_n, F_n\}_{n\in N}$. Note que neste caso a condição (a) da definição 2.1 é equivalente a dizer que

$$I_{\{t=n\}} = \phi(Y_1, \ldots, Y_n)$$

para alguma função Borel-mensurável ϕ e pode ser considerada portanto como representativa do fato da decisão de parar no instante n só depender das informações obtidas até aquele instante. A condição (b) garante a pessoa que ela não irá procurar indefinidamente.

É importante observar que se t é uma regra de parada para X, os eventos $\{t \leq n\}$, $\{t < n\}$, $\{t \geq n\}$ e $\{t > n\}$ são elementos de F_n, $\forall\, n \in N$. A seguir vamos considerar alguns exemplos de regras de parada que encontraremos no decorrer deste trabalho.

EXEMPLO 2.2 - Seja $\{B_n\}_{n\in N}$ uma sequência de eventos tal que para cada $n\in N$, $B_n \in F_n$ e $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$. Defina

$$t(\omega) = \begin{cases} \inf\{n: \omega \in B_n\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Observe então que t é uma variável aleatória com valores em $\bar{N}$, e além disso $\{t=n\} = B_1^c \cap \ldots \cap B_{n-1}^c \cap B_n \in F_n$ pois, $B_i^c \in F_i \subset F_n$, $i=1,\ldots,n-1$.

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \{t<\infty\}$, $P(t<\infty) = 1$ e consequentemente t é uma regra de parada relativa a $\{F_n\}_{n\in N}$.

EXEMPLO 2.3 - Sejam t_1 e t_2 regras de parada relativas a $\{F_n\}_{n\in N}$. Defina

(2.2) $$t(\omega) = \max\{t_1(\omega), t_2(\omega)\}$$

É fácil ver que t é também uma regra de parada relativa a $\{F_n\}_{n\in N}$ pois

$\{t=n\} = (\{t_1=n\} \cap \{t_2\leq n\}) \cup (\{t_1\leq n\} \cap \{t_2=n\}) \in F_n$ e

$\{t_1<\infty\} \cap \{t_2<\infty\} = \{t<\infty\}$.

EXEMPLO 2.4 - Seja $\{t_k\}_{k\in N}$ uma sequência de regras de parada relativas a $\{F_n\}_{n\in N}$ e seja $\{A_n\}_{n\in N}$ uma sequência de eventos 2 a 2 disjuntos em F_1 tal que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Defina

(2.3) $$t(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} t_n(\omega) I_{A_n}(\omega) & \text{se } \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \infty & \text{se } \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \end{cases}$$

É fácil ver que t assume valores em $\bar{N}$ e além disso, se $k\in N$, $\{t=k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \{t_n=k\}$ e $A_n \in F_1 \subset F_k$, $\forall\, n\in N$. Logo segue que $\{t=k\} \in F_k$, $\forall\, k\in N$. Como $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{t_n=\infty\}) = 0$, temos que $P(t<\infty) = 1$. Portanto, t é uma regra de parada relativa a $\{F_n\}_{n\in N}$.

Dada uma regra de parada, t, para X definimos a variável aleatória

(2.4) $$X_t(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{se } t(\omega) = n \\ \limsup_n X_n(\omega) & \text{se } t(\omega) = \infty \end{cases}$$

que representa a recompensa final quando adotamos a regra de parada t.

Note que

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_{\{t=n\}} \qquad \text{q.c.}$$

A seguinte definição estabelece formalmente o critério de optimalidade que adotaremos.

DEFINIÇÃO 2.2 - Seja T uma classe não vazia de regras de parada para o processo de recompensa X, tal que EX_t existe, $\forall t \in T$. Se $t_0 \in T$ e

$$EX_{t_0} = v(T) = \sup_{t \in T} EX_t$$

a regra de parada t_0 é dita *ótima em* T. O número v(T) é denominado *valor de* X *relativamente a* T.

Vamos denotar por $\tilde{C}$ a classe de todas as possíveis regras de parada para X, para as quais EX_t existe. Uma regra de parada ótima em $\tilde{C}$ é denominada simplesmente *ótima*, e $v(\tilde{C})$ é chamado apenas de *valor de* X.

Com os elementos que já dispomos podemos formular, com precisão e de forma genérica, o problema da parada ótima, da seguinte maneira: "dado o processo de recompensa X,

a) qual o valor de $v(\tilde{C})$?

b) existe uma regra de parada ótima para X?

c) se existe, qual é esta regra?"

O problema acima não está suficientemente bem formulado, no

sentido de que não há nada que nos garanta que a classe $\tilde{C}$ seja não vazia. De uma maneira geral não fica claro a existência de regras de parada t para um processo de recompensa arbitrário, X, tais que EX_t exista. Assim sendo, estabeleceremos uma hipótese inicial para evitar especulações em torno deste problema. Este procedimento é comum na literatura, onde encontramos frequentemente hipóteses como:

1) EX_n existe, $\forall n \in N$;

2) EX_n^- existe, $\forall n \in N$;

3) $E \sup_n X_n^+ < \infty$.

A adoção de qualquer uma dessas hipóteses acarreta de imediato a existência de regras de parada t para X tais que EX_t exista. No caso das hipóteses 1 e 2 acima as regras de parada $t \equiv n$ satisfazem a esta condição, enquanto que sob a hipótese 3 fica garantida a existência de EX_t, qualquer que seja a regra de parada t para X pois

$$X_t^+ \leq \sup_n X_n^+ \quad \text{q.c.}$$

EXEMPLO 2.5 - Para mostrarmos que, dado um processo de recompensa $X = \{X_n, F_n\}_{n \in N}$, nem sempre existe uma regra de parada ótima, considere a seguinte situação: suponha que Ω é um conjunto unitário, $\Omega = \{\omega_0\}$, $X_n(\omega_0) = 1 - \frac{1}{n}$ e $F = F_n = \{\emptyset, \Omega\}$ para cada $n \in N$. É fácil ver que se t é uma regra de parada para $X = \{X_n, F_n\}_{n \in N}$, então $t = n$ q.c. para algum $n \in N$. Logo, $v(\tilde{C}) = 1$ e consequentemente não existe regra de parada ótima para este processo. Entretanto, dado $\varepsilon > 0$ existem regras de parada t, tais que

$EX_t > v(\tilde{C}) - \varepsilon$. Tais regras são denominadas *ε-ótimas*.

DEFINIÇÃO 2.3 - Se T é uma classe não vazia de regras de parada para o processo de recompensa X, tal que EX_t existe $\forall\ t \in T$, e $\varepsilon > 0$ arbitrário, dizemos que $t_0 \in T$ é *ε-ótima em* T, se

$$EX_{t_0} > v(T) - \varepsilon$$

É fácil ver que $t_0 \in \tilde{C}$ é ótima se e somente se for ε-ótima em $\tilde{C}$, $\forall\ \varepsilon > 0$. Note ainda que dado $\varepsilon > 0$, segue da definição de v(T) que existe $t_0 \in T$, ε-ótima nesta classe.

EXEMPLO 2.6 - Outro exemplo de problema de regra de parada onde não existe uma regra de parada ótima, é o exemplo 2 da seção anterior, quando tomamos $p > \frac{1}{2}$. Vamos introduzir, então, variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots$ para representar os resultados das sucessivas apostas, onde as variáveis aleatórias Y_i, $i \in N$, são independentes e identicamente distribuídas com $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = p$, onde o evento $\{Y_i = 1\}$ significa que o jogador venceu a i-ésima aposta. Neste caso, a sequência das recompensas $X_1, X_2, \ldots$ é definida por:

$$X_n = 2^n c\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right), \qquad n \in N,$$

indicando que o jogador recebe $2^n c$ se parar no instante n tendo vencido todas as apostas anteriores, e se ele

perder alguma aposta seu capital é reduzido a zero, assim permanecendo indefinidamente. Não é difícil ver que neste caso, as únicas regras de parada que interessam são as regras de parada $t_k \equiv k$. Entretanto,

$$\frac{EX_{t_k}}{EX_{t_{k+1}}} = \frac{2^k c\, p^k}{2^{k+1} c\, p^{k+1}} = \frac{1}{2\,p} < 1 \qquad \text{pois } p > \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$EX_{t_k} > EX_{t_{k+1}}$$

e consequentemente não existe uma regra de parada ótima. Vale a pena notar ainda que no caso em que $p < \frac{1}{2}$ a regra de parada ótima será t_1 ao passo que se $p = \frac{1}{2}$ todas as regras de parada t_k, $k \geq 1$, são ótimas.

Na próxima seção vamos estudar o problema da existência de regras de parada para o processo de recompensa $X = \{X_n, F_n\}_{n \in N}$ que estamos considerando dado, e responder com isto a questão b) colocada na página 10.

III - O PROBLEMA DA EXISTÊNCIA E CARACTERIZAÇÃO DE REGRAS DE PARADA ÓTIMA

Na seção anterior, ao formularmos o problema da parada ótima em termos do processo de recompensa X, colocamos questões referentes a existência e caracterização de regras de parada ótima para tal processo. Vimos então que ocorrem situações nas quais não existe uma regra de parada ótima e situações em que existem várias. Nesta seção iremos expor os resultados da Teoria da Parada ótima que tratam deste problema específico. Estes resultados constam basicamente em Haggstrom (1966) e Chow & Robbins (1963 e 1967).

Devido a grande quantidade de resultados e notação que é encontrada nesta seção, vamos fazer um breve sumário a fim de que o leitor não perca tempo com problemas de notação e detalhes técnicos de restultados.

Os lemas 3.1 e 3.2 mostram que na procura de soluções para um problema de parada ótima podemos nos restringir a subclasse das regras de parada que satisfazem a condição de regularidade, introduzida na definição 3.1. O lema 3.3 nos dá algumas propriedades das regras de parada nessa subclasse. Em seguida, o lema 3.4 estabelece uma con-

dição necessária e suficiente para que uma regra de parada na subclasse mencionada acima seja ótima, no caso em que $v(\tilde{C}) < \infty$. O teorema 3.1 nos dá condições que são suficientes para garantirmos a existência de uma regra de parada ótima, e o teorema 3.2 dá uma caracterização para a regra de parada ótima, utilizando a noção de supremo essencial de uma família de variáveis aleatórias, introduzida no Apêndice I.

A partir desta seção, a menos que seja feita alguma ressalva explícita, estaremos supondo que o processo de recompensa X é tal que $EX_n^- < \infty$, $\forall\, n \in N$.

Vamos denotar por $\tilde{C}_n$, $n \in N$, a classe das regras de parada $t \in \tilde{C}$ para as quais $P(t \geq n) = 1$. Observe que em virtude da hipótese feita no parágrafo anterior, estas classes são não vazias e

$$\tilde{C} = \tilde{C}_1 \supset \tilde{C}_2 \supset \dots . \tag{3.1}$$

Podemos interpretar os elementos das classes introduzidas acima, da seguinte maneira: "se já houvermos observado os valores de $X_1, \dots, X_{n-1}$, os elementos da classe $\tilde{C}_n$ representam todas as <u>possíveis</u> <u>continuações</u> do processo sequêncial de tomar observações".

LEMA 3.1 - Para qualquer $t \in \tilde{C}_n$, $n \in N$ fixado, defina

$$t' = tI_A + nI_{A^c} \tag{3.2}$$

onde $A = \{E(X_t \mid F_n) \geq X_n\}$. Então:

a) $EX_{t'}^- < \infty$

b) $E(X_t|F_n) \leq E(X_{t'}|F_n)$ q.c.

prova: Que t' é realmente uma regra de parada segue imediatamente do exemplo 2.4. Como $X_n^- \geq 0$, temos:

$$(3.3) \qquad EX_{t'}^- = \int_A X_{t'}^- dP + \int_{A^c} X_{t'}^- dP = \int_A X_t^- dP + \int_{A^c} X_n^- dP \leq \int_A X_t^- dP + EX_n^-$$

Por outro lado sabemos que $EX_n > -\infty$ e portanto,

$$-\infty < \int_A X_n dP \leq \int_A E(X_t|F_n) dP = \int_A X_t dP = \int_A X_t^+ dP - \int_A X_t^- dP \quad \text{e}$$

consequentemente $\int_A X_t^- dP < \infty$. Com isto, segue de (3.3) que $EX_t^- < \infty$ o que prova o item (a).

Observe ainda que pela definição de t', tem-se que

$$E(X_{t'}|F_n) = \max(X_n, E(X_{t'}|F_n) \geq E(X_t|F_n) \qquad \text{q.c.}$$

o que completa a demonstração do lema. ∎

Vamos denotar por C, a classe das regras de parada $t \in \bar{C}$ tais que $EX_t^- < \infty$, e por C_n a classe das regras de parada $t \in C$ para as quais $P(t \geq n) = 1$. O lema que acabamos de demonstrar, nos leva portanto a uma redução do problema inicial, no sentido de que podemos nos restringir as classes C_n, $n \in N$, na procura de regras de parada ótimas para o processo de recompensa X. Formalmente, temos o resultado seguinte.

COROLÁRIO 3.1 - As classes C_n, $n \in N$ são não vazias e

$$(3.4) \qquad C = C_1 \supset C_2 \supset \dots .$$

Além disso,

$$C_n \subset \tilde{C}_n \quad \text{e} \tag{3.5}$$

$$v(C_n) = v(\tilde{C}_n) \quad , \quad \forall\, n \in N. \tag{3.6}$$

prova: Como $EX_n^- < \infty$, tem-se que $t_n \equiv n \in C_n$. Portanto as classes C_n são não vazias, e é fácil ver que valem (3.4) e (3.5). De (3.5) segue ainda que $v(C_n) \leq v(\tilde{C}_n)$. Pelo lema 3.1, dada uma regra de parada $t \in \tilde{C}_n$, existe $t' \in C_n$ tal que $EX_t \leq EX_{t'}$ e consequentemente, $v(\tilde{C}_n) \leq v(C_n)$, o que prova (3.6). ∎

Vale a pena notar ainda que se t é ótima em $\tilde{C}_n$, a regra de parada $t' \in C_n$ definida em (3.2) é ótima em C_n e em $\tilde{C}_n$.

O lema seguinte mostra que podemos reduzir ainda mais o problema inicial.

LEMA 3.2 - Para qualquer $t \in C_n$, $n \in N$ fixado, defina

$$t' = \begin{cases} \inf\{k \geq n : E(X_t|F_k) \leq X_k\} \\ \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Então:

a) $t' \in C_n$ e $t' \leq t$ q.c.

b) $E(X_{t'}|F_n) \leq E(X_t|F_n)$ q.c.

c) $\forall\, k \geq n$, $E(X_{t'}|F_k) > X_k$ q.c. em $\{t'>k\}$

prova: Para provarmos (a) observe que

$$E(X_t|F_k) = X_k \quad \text{q.c. em } \{t=k\}.$$

De (3.7) segue que $t' \leq k$ q.c. em $\{t=k\}$ e consequentemente

$$t' \leq t \quad \text{q.c} \tag{3.8}$$

Como t é uma regra de parada para X, segue de (3.8) que $t' < \infty$ q.c. e segue do exemplo 2.2 que t' é uma regra de parada para X.

Da definição de t' e da desigualdade de Jensen para esperanças condicionais, vem:

$$EX_{t'}^- = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{t'=k\}} X_k^- dP \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{t'=k\}} E^-(X_t|F_k)dP \leq \tag{3.9}$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{t'=k\}} E(X_t^-|F_k)dP = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{t'=k\}} X_t^- dP = EX_t^- < \infty$$

De (3.9) segue finalmente que $t' \in C_n$, o que completa a demonstração de (a).

Para provarmos (b), tomemos $A \in F_j$ com $j \geq n$ fixado.

De (3.7) vem:

$$\int_{A\{t'\geq j\}} X_{t'}dP = \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\{t'=k\}} X_k dP \geq \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A\{t'=k\}} E(X_t|F_k)dP = \int_{A\{t'\geq j\}} X_t dP. \tag{3.10}$$

Tomando-se $j = n$ em (3.10) temos:

$$\int_A X_{t'}dP \geq \int_A X_t dP \qquad \forall\, A \in F_n$$

A última desigualdade demonstra o item (b) do teorema.

De (3.10) decorre que:

$$E(X_{t'}|F_j) \geq E(X_t|F_j) \quad \text{q.c. em } \{t'>j\} \tag{3.11}$$

Levando em conta a definição de t', segue de (3.11) que

$$E(X_{t'}|F_j) > X_j \quad \text{q.c. em } \{t'>j\}$$

Motivados pelo lema que acabamos de demonstrar, damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 3.1 - Uma regra de parada $t \in C_n$, $n \in N$, é dita ***n-regular*** se para cada $k \geq n$

$$E(X_t|F_k) > X_k \quad \text{q.c. em } \{t>k\} \tag{3.12}$$

Em particular, se $t \in C = C_1$ é 1-regular diremos **simplesmente** que t é *regular*. Para cada $n \in N$, a subclasse de C_n constituida pelas regras de parada n-regulares têm importância fundamental na Teoria desenvolvida por Chow & Robbins. É dentre as regras de parada n-regulares que iremos procurar aquela que satisfaz ao critério de otimalidade estabelecido na seção anterior.

Vamos denotar por C_n^*, $n \in N$, a classe das regras de parada $t \in C_n$ que são n-regulares. De maneira análoga ao corolário 3.1 é fácil verificar o resultado seguinte.

COROLÁRIO 3.2 - As classes C_n^*, $\forall\, n \in N$, são não vazias e

$$C^* = C_1^* \supset C_2^* \supset \dots . \tag{3.13}$$

Além disso,

$$C_n^* \subset C_n \subset \tilde{C}_n \quad \text{e} \tag{3.14}$$

$$v(C_n^*) = v(C_n) = v(\tilde{C}_n) \ , \quad \forall\, n \in N. \tag{3.15}$$

Portanto, a procura de regras de parada ótima para o processo de recompensa X pode se restringir as classes C_n^*, $n \in N$. Cabe novamente notar que se existe uma regra de parada ótima, t, em $\tilde{C}_n$ é possível definir através dos lemas 3.1 e 3.2 uma regra de parada $t' \in C_n^*$ ótima em C_n^*, C_n e $\tilde{C}_n$. Reciprocamente se t é ótima em C_n^* então por (3.15) t é ótima em C_n e em $\tilde{C}_n$. A verificação de que as classes C_n^*, $n \in N$, são não vazias é feita observando que as regras de parada $t_n \equiv n$, $n \in N$, são tais que $t_n \in C$ e $\forall\, j > n$, $\{t_n > j\} = \emptyset$.

Pode ocorrer entretanto a seguinte pergunta. Existem realmente regras de parada que não sejam n-regulares? A resposta a esta pergunta é afirmativa, conforme o exemplo seguinte.

EXEMPLO 3.1 - Suponha que um estatístico observa sequencialmente as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots$ independentes e tais que $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$, $i=1,2,\ldots$, e que a recompensa recebida se parar de tomar observações no instante n é definida por

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Desta forma, tomando-se $F_n = F(Y_1, \ldots, Y_n)$, o processo de recompensa X é um martingal e pelo lema A.2.1 do apêndice 2, se t é uma regra de parada para X tal que para algum $N \geq 1$ $P(t \leq N) = 1$, $E(X_t | F_n) = X_n$ q.c. em $\{t \geq n\}$. Consequentemente a regra de parada definida por $t_0 = \min(t,K)$ onde $t = \inf\{n: Y_n = 1\}$, por exemplo, e $K > 1$ inteiro fixado não é uma regra de parada regular.

Para referência futura, daremos abaixo uma propriedade das sequências de regras de parada n-regulares.

LEMA 3.3 - Seja $\{t_k\}_{k\in N}$ uma sequência de regras de parada em C_n^*, $n\in N$ fixado. Defina para cada $i \in N$

$$\tau_i = \max(t_1, \ldots, t_i)$$

Então, $\forall\, i \in N$, $\tau_i \in C_n^*$ e

$$(3.16) \qquad \max_{1\le k\le i} E(X_{t_k}|F_n) \le E(X_{\tau_i}|F_n) \le E(X_{\tau_{i+1}}|F_n) \le \ldots \quad \text{q.c.}$$

prova: Segue imediatamente do exemplo 2.3 da seção anterior que τ_i é uma regra de parada para X, $\forall\, i \ge 1$. Como $X^-_{\tau_i} \le \sum_{k=1}^{i} X^-_{t_k}$ segue que $\tau_i \in C_n$. Tomando-se $A \in F_j$, $j \ge n$ fixado, teremos

$$(3.17) \qquad \int_{A\{\tau_i\ge j\}} X_{\tau_i}\,dP = \sum_{k=j}^{\infty}\left[\int_{A\{\tau_i=k\ge t_{i+1}\}} X_{\tau_i}\,dP + \int_{A\{\tau_i=k<t_{i+1}\}} X_{\tau_i}\,dP\right] \le$$

$$\le \sum_{k=j}^{\infty}\left[\int_{A\{\tau_i=k\ge t_{i+1}\}} X_{\tau_{i+1}}\,dP + \int_{A\{\tau_i=k<t_{i+1}\}} X_{t_{i+1}}\,dP\right] =$$

$$= \int_{A\{\tau_i\ge j\}} X_{\tau_{i+1}}\,dP.$$

Observando que $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots$ e usando (3.17) obtemos:

$$(3.18) \qquad E(X_{\tau_i}|F_j) \le E(X_{\tau_{i+1}}|F_j) \le \ldots \qquad \text{q.c. em } \{\tau_i>j\}$$

Como $\tau_1 = t_1$ é n-regular segue-se de (3.18) que:

$$X_j < E(X_{t_1}|F_j) = E(X_{\tau_1}|F_j) \leq E(X_{\tau_2}|F_j) \leq \ldots \text{ q.c. em } \{t_1>j\}$$

Por simetria, temos que para $1 \leq k \leq i$

$$X_j < E(X_{t_k}|F_j) \leq E(X_{\tau_i}|F_j) \leq \ldots \quad \text{q.c. em } \{t_k>j\}. \tag{3.19}$$

Portanto, como $\{\tau_i>j\} \subset \bigcup_{k=1}^{i} \{t_k>j\}$ segue de (3.19) que

$$E(X_{\tau_i}|F_j) > X_j \quad \text{q.c. em } \{\tau_i>j\}$$

e consequentemente $\tau_i \in C_n^*$.

Para finalizarmos a demonstração, tomando-se i=1 e j=n em 3.18 segue que

$$E(X_{t_1}|F_n) = E(X_{\tau_1}|F_n) \leq E(X_{\tau_2}|F_n) \leq \ldots \quad \text{q.c.}$$

Novamente por simetria, temos para $1 \leq k \leq i$

$$E(X_{t_k}|F_n) \leq E(X_{\tau_i}|F_n) \leq E(X_{\tau_{i+1}}|F_n) \leq \ldots \quad \text{q.c.} \tag{3.20}$$

De (3.20) obtêm-se finalmente

$$\max_{1\leq k\leq i} E(X_{t_k}|F_n) \leq E(X_{\tau_i}|F_n) \leq E(X_{\tau_{i+1}}|F_n) \leq \ldots \quad \text{q.c.} \quad \blacksquare$$

O lema seguinte, estabelece uma condição necessária e uma condição suficiente para que uma regra de parada $t \in C_n^*$, $n \in N$ fixado, seja ótima nesta classe.

LEMA 3.4 - a) Para $n \in N$ fixado, seja $t_0 \in C_n^*$. Se $\forall\, k \geq n$

(3.21) $X_k \geq E(X_t|F_k)$ q.c. em $\{t_0=k\}$, $\forall\ t\in C^*_{k+1}$,
então t_0 é ótima em C^*_n

b) Se $v(C^*_n) < \infty$ e $t_0 \in C^*_n$ é ótima nesta classe, então vale (3.21).

prova: Suponha que $t_0 \in C^*_n$ e satisfaz (3.21) e seja $t \in C^*_n$. Para cada $k \geq n$, defina $t(k+1) = \max(k+1,t)$. É fácil ver que $t(k+1)$ pertence a C^*_{k+1}. Ainda,

$$(3.22)\quad EX_{t_0} = \int_{\{t<t_0\}} X_{t_0}dP + \int_{\{t=t_0\}} X_{t_0}dP + \int_{\{t>t_0\}} X_{t_0}dP =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{k=t<t_0\}} X_{t_0}dP + \int_{\{t=t_0\}} X_t dP + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\{t>t_0=k\}} X_{t_0}dP.$$

Observe entretanto que pela n-regularidade de t_0 vem:

$$\int_{\{k=t<t_0\}} X_{t_0}dP = \int_{\{k=t<t_0\}} E(X_{t_0}|F_k)dP \geq \int_{\{k=t<t_0\}} X_k dP =$$

$$= \int_{\{k=t<t_0\}} X_t dP$$

Como $t = t(k+1)$ q.c. em $\{t>k\}$, segue de (3.21) que

$$\int_{\{k=t_0<t\}} X_{t_0}dP = \int_{\{k=t_0<t\}} X_k dP \geq \int_{\{k=t_0<t\}} E(X_{t(k+1)}|F_k)dP =$$

$$= \int_{\{k=t_0<t\}} X_t dP$$

Com estas duas últimas desigualdades, segue de (3.22) que

$$EX_{t_0} \geq \int_{\{t<t_0\}} X_t dP + \int_{\{t=t_0\}} X_t dP + \int_{\{t>t_0\}} X_t dP = EX_t$$

Isto demonstra a parte (a) do lema.

Suponha agora que t_0 é ótima em C_n^*. Para $k \geq n$ e $t \in C_{k+1}$, defina:

$$A = \{t_0 = k,\ E(X_t|F_k) > X_k\}$$

e considere a seguinte regra de parada

$$t' = tI_A + t_0 I_{A^c}$$

É fácil ver que $t' \in C_n$, e além disso

$$EX_{t'} = \int_A X_t dP + \int_{A^c} X_{t_0} dP \geq \int_A X_{t_0} dP + \int_{A^c} X_{t_0} dP = EX_{t_0} \tag{3.23}$$

Como $EX_{t_0} = v(C_n^*)$, vale a igualdade em (3.23), e como $v(C_n^*) < \infty$ podemos cancelar $\int_{A^c} X_{t_0} dP$ em ambos os membros da igualdade

$$\int_A X_t dP + \int_{A^c} X_{t_0} dP = \int_A X_{t_0} dP + \int_{A^c} X_{t_0} dP.$$

Portanto,

$$\int_A (E(X_t|F_k) - X_k)\ dP = 0.$$

Como $(E(X_t|F_k) - X_k) > 0$ q.c. em A, segue que $P(A) = 0$, isto é, $\forall\ k \geq n$ se tem

$$X_k \geq E(X_t|F_k) \quad \text{q.c. em } \{t_0=k\},\ \forall\ t \in C_{k+1}.$$

Em particular, vale (3.21) pois $C^*_{k+1} \subset C_{k+1}$. ▌

OBSERVAÇÃO - O lema que acabamos de demonstrar é uma reformulação de do lema 1 de Chow & Robbins (1961). Uma condição suficiente para que $v_n < \infty$, é que $E \sup_{k \geq n} X_k^+ < \infty$. Nestas condições, note que uma regra de parada $t \in C_n^*$ seja ótima nesta classe.

Entretanto, verificar a otimilidade de uma regra de parada a partir de (3.21) não é uma tarefa convidativa. Naturalmente, seria bom que pudéssemos antes de tudo, baseados apenas nas informações que dispomos acerca do processo de recompensa X, saber se existe ou não uma regra de parada ótima para este processo. O teorema seguinte estabelece um resultado neste sentido.

TEOREMA 3.1 - Se $E \sup_n X_n^+ < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c., então existe em C_n^*, $\forall\, n \in N$, uma regra de parada ótima para X.

prova: Para $n \in N$ fixado, sabemos que existe em C_n^* sequência $\{t_n\}_{n \in N}$ de regras de parada tal que

$$\sup_k EX_{t_k} = v(C_n^*)$$

Defina, para cada $k \in N$

$$\tau_k = \max(t_1, \ldots, t_k).$$

Pelo lema 3.3 sabemos que a sequência $\{EX_{\tau_k}\}_{k \in N}$ é crescente e que $\forall\, k \in N$

$$\max_{1 \leq i \leq k} EX_{t_i} \leq EX_{\tau_k} \leq v(C_n^*) \tag{3.24}$$

Tomando-se o limite quando $k \to \infty$ em (3.24), temos:

(3.25) $$v(C_n^*) = \sup_k EX_{t_k} \leq \lim_{k\to\infty} EX_{\tau_k} \leq v(C_n^*)$$

Defina agora a seguinte variável aleatória:

$$\tau = \lim_{k\to\infty} \tau_k$$

É fácil verificar que τ assume valores em $\bar{N}$ e satisfaz a condição (a) da definição 2.1. Além disso, como $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c. decorre da definição de X_τ que

(3.26) $$X_\tau = \lim_{k\to\infty} X_{\tau_k} \quad \text{q.c.}$$

Como $X_\tau \leq \sup_n X_n^+$, EX_τ existe e por (3.25) e (3.26) segue do lema de Fatou que

(3.27) $$EX_\tau \geq \lim_{k\to\infty} EX_{\tau_k} = v(C_n^*)$$

Suponha entretanto que $P(\tau=\infty) > 0$. Neste caso, como EX_τ existe $EX_\tau = -\infty$, o que contradiz (3.27) pois, $v(C^*) > -\infty$. Portanto, $\tau \in \tilde{C}_n$ e é ótima nesta classe.

Observe ainda que pelo lema 3.3 τ_k é n-regular $\forall$ $k \in N$ e por (3.18) segue que para cada $j \geq n$

(3.28) $$X_j < E(X_{\tau_k}|F_j) \leq E(X_{\tau_{k+1}}|F_j) \leq \ldots \quad \text{q.c. em } \{\tau_k > j\}$$

$\forall$ $k \in N$. Pelo lema de Fatou para esperanças condicionais segue de (3.28) que

$$X_j < \limsup_k E(X_{\tau_k}|F_j) < E(X_\tau|F_j) \quad \text{q.c. em } \{\tau_k > j\}$$

$\forall$ $k \in N$ e portanto:

$$X_j < E(X_\tau|F_j) \quad \text{q.c. em } \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k > j\} \supset \{\tau > j\}.$$

Lembrando que:

$$EX_\tau = \int_{\{\tau=n\}} X_\tau dP + \int_{\{\tau>n\}} X_\tau dP \geq \int_{\{\tau=n\}} X_n dP + \int_{\{\tau>n\}} X_n dP = EX_n > -\infty$$

segue-se que $EX_\tau^- < \infty$ o que prova que τ é ótima em C_n^*. ▌

EXEMPLO 3.2 - Como aplicação do teorema que acabamos de demonstrar, considere a seguinte situação: Sejam $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias definidas em (Ω, F, P), identicamente distribuídas e que $EY^- < \infty$. Suponha que os valores dessas variáveis aleatórias sejam observados sequencialmente e que a recompensa recebida por parar no instante n, $n \in N$, seja definida por

$$X_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n) - g(n)$$

onde $g(n)$ representa o custo das n primeiras observações

Seja $F_n = F(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Suponha que existam constantes positivas α e β tais que $E(Y^+)^{\beta+\alpha^{-1}} < \infty$. Desta forma, se $g(n) = cn^\alpha$, $c > 0$, temos

$$X_n \leq \max(Y_1^+ + \ldots + Y_n^+) - cn^\alpha$$

e pelo lema A.2.3. segue que $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c. e que

$$E \sup_n X_n^+ \leq E\left[\sup_n \{\max(Y_1^+, \ldots, Y_n^+) - cn^\alpha\}\right]^+ < \infty.$$

Consequentemente, existe uma regra de parada ótima para o processo de recompensa $X = \{X_n, F_n\}_{n\in N}$ definido acima. O problema de parada ótima neste exemplo, é conhecido pelo nome de *SAMPLING WITH RECALL*.

EXEMPLO 3.3 - Se no exemplo anterior definimos a recompensa quando paramos no intante n, $n \in N$ por

$$X'_n = Y_n - g(n)$$

segue ainda do lema A.2.3 que se existem constantes α e β positivas tais que $E(Y^+)^{\beta+\alpha^{-1}} < \infty$: $\lim_n X'_n = -\infty$ q.c. e $E \sup_n (X'_n)^+ < \infty$. Portanto, existe uma regra de parada ótima para o processo de recompensa $X'_n = \{X'_n, F_n\}_{n \in N}$. O problema de regra de parada definido pelo processo de recompensa X' é conhecido pelo nome de *SAMPLING WITHOUT RECALL*.

OBSERVAÇÃO - Nos exemplos 3.2 e 3.3, se Y tem variância finita, existem regras de parada ótimas para os dois processos de recompensa definidos, com $g(n) = cn^\alpha$, $\forall\ \alpha \geq 1$.

No exemplo 3.2, seja $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Suponha que as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots$ são independentes e que $0 \leq g(1) < g(2) < \ldots$. Se $EY^+ < \infty$, podemos definir constantes α_n, únicas, através da igualdade

$$E(Y - \alpha_n)^+ = g(n+1) = g(n) = \beta_n$$

Não é difícil ver que

$$E(M_{n+1} | F_n) = \int \max(y_1, \ldots, y_{n+1})\, dF(y_{n+1}),$$

onde F é a função de distribuição de Y. Portanto,

$$E(X_{n+1} | F_n) - X = E(Y - M_n)^+ - \beta_n.$$

É fácil ver que

$$E(X_{n+1}|F_n) \leq X_n \Longleftrightarrow M_n > \alpha_n.$$

Assim, se $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots$ teremos

$$\{E(X_{n+1}|F_n) \leq X_n\} \subset \{E(X_{n+2}|F_{n+1}) \leq X_{n+1}\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De uma maneira geral, se o processo de recompensa satisfaz a inclusão acima, dizemos que o problema de parada ótima é *monótono*. Podemos encontrar um estudo detalhado deste problema em Chow & Robbins (1961 e 1963).

Na demonstração do teorema 3.1 exibimos uma regra de parada ótima para X, tomando-se o supremo de uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de regras de paradas regulares, tais que $\sup_k EX_{t_k} = v(\tilde{C})$. Outras caracterizações da regra de parada ótima quando esta existe, são encontradas em Snell (1952), que utilizou resultados da Teoria dos Martingais, Chow & Robbins (1967) e Haggstrom (1966) que o fizeram utilizando respectivamente as noções de supremo e ínfimo essenciais. Prosseguindo, vamos apresentar os resultados obtidos por Chow & Robbins (resultados análogos foram obtidos independentemente por Haggstrom).

A fim de darmos ao leitor uma idéia intuitiva sobre a maneira pela qual o problema foi abordado, observe que é razoável supor que o instante ótimo para terminarmos o processo sequêncial de tomar observações deva ser um instante n, $n\in\mathbb{N}$, para o qual não exista uma *continuação vantajosa*, isto é, uma regra de parada $t\in C^*_{n+1}$ para a qual $E(X_t|F_n)(\omega) > X_n(\omega)$. Equivalentemente, deveríamos parar o processo sequêncial de tomar observações, no instante n se e somente se

$$X_n(\omega) \geq \sup_{t \in C^*_{n+1}} E(X_t | F_n)(\omega).$$

Todavia não podemos garantir que a função $\sup_{t \in C^*_{n+1}} E(X_t | F_n)$ seja F_n-mensurável e consequentemente que a função definida por

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf\{n: X_n(\omega) \geq \sup_{t \in C^*_{n+1}} E(X_t | F_n)(\omega)\} \\ \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio.} \end{cases}$$

seja uma regra de parada para X, ou melhor, satisfaça as condições (a) e (b) da definição 2.1. Esse problema é superado através da definição

$$(3.29) \qquad \delta(\omega) = \begin{cases} \inf\{n: X_n(\omega) \geq \sup_{t \in C^*_{n+1}} E(X_t | F_n)(\omega)\} \\ \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio.} \end{cases}$$

Para a definição e propriedades do supremo essencial de uma família de variáveis aleatórias veja o apêndice 1 no final do trabalho. Nessas condições δ é uma variável aleatória assumindo valores em $\bar{N}$ e satisfazendo a condição (a) da definição 2.1, pois $\sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t | F_n)$ é F_n-mensurável. Não podemos garantir entretanto que δ seja uma regra de parada para X, isto é, que $P(\delta < \infty) = 1$, mas se $\delta \in C^*$ é possível mostrar, como veremos, que δ é ótima. Inicialmente, demonstraremos um lema que nos permitirá reescrever δ numa forma mais conveniente.

LEMA 3.5 - Para cada $n \in N$, temos:

$$\sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t | F_n) = \max\left(X_n, \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t | F_n)\right) \quad \text{q.c.}$$

prova: Seja $t \in C^*_n$ e defina $t' = \max(n+1, t)$, é fácil ver que $t' \in C_{n+1}$ e como $t = t'$ q.c. $\{t' > k\}$ $\forall$ $k \geq n+1$ segue que

$$E(X_{t'}|F_k) = E(X_t|F_k) > X_k \quad \text{q.c. em } \{t'>k\}$$

e portanto $t' \in C^*_{n+1}$. Seja $A = \{t=n\}$; temos

$$(3.30) \qquad E(X_t|F_n) = E(\left[X_n I_A + X_{t'} I_{A^c}\right]|F_n) =$$

$$= X_n I_A + E(X_{t'}|F_n) I_{A^c} \leq$$

$$\leq X_n I_A + \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t|F_n) I_{A^c} \leq$$

$$\leq \max\ (X_n, \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t|F_n))$$

Como (3.30) vale $\forall\ t \in C^*_n$, temos

$$(3.31) \qquad \sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t|F_n) \leq \max(X_n, \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t|F_n)) \quad \text{q.c.}$$

Por outro lado, como $t \equiv n \in C^*_n$, temos

$$(3.32) \qquad \sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t|F_n) \geq X_n \quad \text{q.c.}$$

Como $C^*_n \supset C^*_{n+1}$, segue-se que:

$$(3.33) \qquad \sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t|F_n) \geq \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t|F_n) \quad \text{q.c.}$$

De (3.32) e (3.33) segue que:

$$(3.34) \qquad \sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t|F_n) \geq \max(X_n, \sup_{t \in C^*_{n+1}} \text{ess } E(X_t|F_n) \quad \text{q.c.}$$

De (3.30) e (3.34) o resultado segue. ∎

Para cada $n \in N$, seja $\gamma_n = \sup_{t \in C^*_n} \text{ess } E(X_t|F_n)$. Das propriedades do supremo essencial e da parte (b) dos lemas 3.1 e 3.3 segue-se que

$$(3.35)\quad \gamma_n = \sup_{t\in C_n^*} \operatorname{ess} E(X_t|F_n) = \sup_{t\in C_n} \operatorname{ess} E(X_t|F_n) = \sup_{t\in \tilde{C}_n} \operatorname{ess} E(X_t|F_n)$$

com probabilidade 1. Lembremos ainda que

$$(3.36)\qquad v(C_n^*) = v(C_n) = v(\tilde{C}_n)$$

e denotemos este valor comum por v_n. Portanto, o lema 3.5 segue que $\gamma_n \geq X_n$ q.c. e portanto a variável aleatória δ definida por (3.29) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$(3.37)\qquad \delta(\omega) = \begin{cases} \inf\{n: X_n(\omega) = \gamma_n(\omega)\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio.} \end{cases}$$

Os lemas que apresentamos a seguir são utilizados na demonstração das propriedades da variável aleatória introduzida em (3.37).

LEMA 3.6 - Para cada $n\in N$:

a) existe uma sequência $\{t_k\}_{k\in N}$ em C_n^* tal que

$$X_n \leq E(X_{t_k}|F_n) \underset{k\to\infty}{\uparrow} \gamma_n \quad \text{q.c.}$$

b) $E\gamma_n = v_n$.

prova: Sabemos que existe, para cada $n\in N$, uma sequência $\{t'_k\}_{k\in N}$ em C_n^* tal que

$$\sup_k E(X_{t'_k}|F_n) = \gamma_n = \sup_{t\in C_n^*} \operatorname{ess} E(X_t|F_n)$$

podemos supor ainda $t'_1 \equiv n$. Se tormarmos agora

$$t_k = \max(t'_1, \ldots, t'_k)$$

segue do lema 3.3 que $\{E(X_{t_k}|F_n\}_{k\in N}$ é uma sequência crescente de variáveis aleatórias e que

$$\max_{1\leq k\leq i} E(X_{t'_k}|F_n) \leq E(X_{t_i}|F_n) \leq \gamma_n \qquad i\in N.$$

Portanto,

$$\gamma_n = \sup_k E(X_{t'_k}|F_n) \leq \lim_{i\to\infty} E(X_{t_i}|F_n) \leq \gamma_n$$

o que prova o item (a)

Observe agora que pela parte (a), e pelo teorema da convergência monótona segue que:

(3.38)
$$E\gamma_n = \lim_{k\to\infty} E(E(X_{t_k}|F_n)) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} EX_{t_k} \leq v_n$$

Como por definição $E(X_t|F_n) \leq \gamma_n$ q.c. $\forall\ t\in C_n^*$, tem-se que $EX_t \leq E\gamma_n$ $\forall\ t\in C_n^*$ e consequentemente $v_n \leq E\gamma_n$. Desta última desigualdade e de (3.38) a parte (b) do lema segue. ▌

LEMA 3.7 - Se $t\in C$, então para cada $n\in N$

$$E(X_t|F_n) \leq \gamma_n \qquad \text{q.c. em } \{t>n\}$$

prova: Se $t\in C$, definindo $t' = \max(n,t)$, segue que $t'\in C_n$ e portanto, por (3.35),

(3.39)
$$E(X_{t'}|F_n) \leq \gamma_n \qquad \text{q.c.}$$

Como $t=t'$ q.c. em $\{t>n\}$ segue que

$$E(X_t|F_n) = E(X_{t'}|F_n) \leq \gamma_n \qquad \text{q.c. em } \{t>n\}$$ ▌

Para cada $n \in N$, defina a variável aleatória

$$(3.40) \qquad \sigma_n(\omega) = \begin{cases} \inf\{k \geq n;\ X_k(\omega) = \gamma_k(\omega)\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio} \end{cases}$$

Note que para $n=1$, σ_1 coincide com a variável aleatória s definida em (3.37). Temos então o seguinte lema.

LEMA 3.8 - Se $t \in C_n$, defina $t' = \min(t,\sigma_n)$. Então, $t' \in C_n$ e

$$E(X_{t'}|F_n) \geq E(X_t|F_n) \quad \text{q.c.} .$$

prova: Seja $A \in F_n$. Então:

$$(3.41) \quad \int_A X_t^- dP = \int_{A\{t\leq\sigma_n\}} X_t^- dP + \int_{A\{t>\sigma_n\}} X_t^- dP = \int_{A\{t\leq\sigma_n\}} X_{t'}^- dP + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} X_t dP$$

Pela desigualdade de Jensen, segue o lema 3.7 que $\forall\ k \geq n$

$$E(X_t^-|F_k) \geq E^-(X_t|F_k) \geq \gamma_k^- \qquad \text{q.c. em } \{t>k\}$$

Portanto,

$$(3.42) \qquad \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} X_t^- dP = \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} E(X_t^-|F_k) \geq \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} \gamma_k^- dP$$

Pela definição de σ_n,

$$(3.43) \qquad \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} \gamma_k^- dP = \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} X_k^- dP = \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} X_{t'}^- dP$$

pois $t'=k$ em $\{t>\sigma_n=k\}$. Logo, segue de (3.42) e (3.43) que

$$(3.44) \qquad \int_A X_t^- dP \geq \int_A X_{t'}^- dP.$$

Tomando-se $A=\Omega$, tem-se que $EX_{t'}^{-} \leq EX_{t}^{-} < \infty$ o que prova que $t' \in C_n$.

Do lema 3.7 segue que

$$(3.45) \qquad \int_A X_t = \int_{A\{t\leq\sigma_n\}} X_{t'}dP + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} X_t dP \leq$$

$$\leq \int_{A\{t\leq\sigma_n\}} X_{t'}dP \quad \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A\{t>\sigma_n=k\}} \gamma_k dP = \int_A X_t dP$$

pois, $X_k = \gamma_k$ q.c. em $\sigma_n=k>n$, e o lema fica demonstrado. ∎

Podemos agora demonstrar as propriedades das regras de parada σ_n, $n\in N$, definidas em (3.40), e que constituem um dos resultados principais desta seção.

TEOREMA 3.2 - Para cada $n\in N$:

a) Se $\sigma_n \in C_n^*$, então σ_n é ótima nesta classe.

b) Se $v_n < \infty$ e existe uma regra de parada ótima em C_n^*, então $\sigma_n \in C_n^*$, é ótima e minimal nesta classe.

prova: Pela definição de σ_n segue que $\forall\ k\geq n$, $n\in N$ fixado,

$$X_k = \gamma_k = \sup_{t\in C_k^*} \text{ess}\ E(X_t|F_k) \geq \sup_{t\in C_{k+1}^*} \text{ess}\ E(X_t|F_k) \geq E(X_t|F_k) \quad \text{q.c.}$$

em $\{\sigma_n=k\}$, $\forall\ t\in C_{k+1}^*$.

Portanto, pela parte (a) do lema 3.4, σ_n é ótima em C_n^* o que demonstra a parte (a).

Para demonstrarmos a parte (b), observe que se $s\in C_n^*$ é a regra de parada que por hipótese estamos supondo ótima, então

(3.46) $$X_k = \gamma_k \qquad \text{q.c. em } \{\delta=k\},\ \forall\ k\geq n.$$

pois se existir $t\in C_k^*$, $k\geq n$, tal que

$$P(\{\delta=k;\ E(X_t|F_k) > X_k\}) > 0,$$

definindo $\delta'=tI_B+\delta I_{B^c}$ onde $B=\{\delta=k;\ E(X_t|F_k) > X_k\}$ é fácil ver que $\delta'\in C_n^*$ e além disso, como $v_n < \infty$, segue-se que

$$EX_{\delta'} = E(I_B E(X_t|F_k) + I_{B^c}X_\delta) > E(X_\delta I_B + X_\delta I_{B^c}) = EX_\delta\ ,$$

que é absurdo. Portanto, $X_k \geq E(X_t|F_k)$ q.c. em $\{\delta=k\}$, $\forall\ t\in C_k^*$ e consequentemente $X_k\geq\gamma_k$ q.c. em $\{\delta=k\}$. Logo, (3.46) vale e

(3.47) $$\sigma_n \leq \delta \qquad \text{q.c.}$$

Suponha agora que para algum $k\geq n$, o evento

$$A = \{\sigma_n > k;\ E(X_{\sigma_n}|F_k) < \gamma_k\}$$

tenha probabilidade positiva. Como $v_n < \infty$

(3.48) $$\int_A X_{\sigma_n} dP = \int_A E(X_{\sigma_n}|F_k)dP < \int_A \gamma_k dP - \varepsilon$$

para algum $\varepsilon > 0$. Pelo lema 3.6, podemos escolher $t\in C_k^*$ tal que

(3.49) $$\int_A \gamma_k dP - \varepsilon < \int_A X_t dP$$

Se definirmos agora $t'=tI_A+\sigma_n I_{A^c}$, segue de (3.48), (3.49) e do lema 3.8 que

$$EX_{t'} = \int_A X_t dP + \int_A X_{\sigma_n} dP > \int_A X_{\sigma_n} dP + \int_{A^c} X_{\sigma_n} dP = EX_{\sigma_n} = v_n$$

que é uma contradição. Portanto, $P(A) = 0$ e $\forall\ k \geq n$

$$E(X_{\sigma_n} | F_k) \geq \gamma_k \qquad \text{q.c. em } \{\sigma_n > k\} \tag{3.50}$$

Pelo lema 3.7, vale a igualdade em (3.50) e pela definição σ_n

$$E(X_{\sigma_n} | F_k) = \gamma_k > X_k \qquad \text{q.c. em } \{\sigma_n > k\} \tag{3.51}$$

De (3.47), (3.51) e do lema 3.8 segue finalmente que $\sigma_n \in C_n^*$ é ótima nesta classe e minimal. ∎

Note que se $E \sup X_n^+ < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c., σ_n é ótima em C_n^* e $\sigma_n < \tau$ q.c., onde τ é a regra de parada ótima exibida no teorema 3.1. O lema seguinte, estabelece uma relação entre σ_n e a caracterização de regras de parada ótimas discutida no teorema 3.1.

LEMA 3.9 - Suponha que para $n \in N$ fixado, $v_n < \infty$. Então se $\{t_k\}_{k\in N}$ é uma sequência crescente de regras de parada em C_n tal que

$$EX_{t_k} \underset{k\to\infty}{\uparrow} v_n \quad \text{e} \quad t = \lim_{k\to\infty} t_k,\ \sigma_n < t \quad \text{q.c.}$$

prova: Suponha que para algum $i \geq n$ o evento

$$A = \{t = i < \sigma_n\}$$

tenha probabilidade positiva. Como $\infty > v_n \geq v_{n+1} \geq \ldots$ e $\gamma_i > X_i$ em A, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_A \gamma_i dP - 3\varepsilon > \int_A X_i dP \tag{3.52}$$

Para cada $k \in N$, considere o evento

$$B_k = \{t_k = i < \sigma_n\}$$

É fácil verificar que $I_{B_k} \longrightarrow I_A$ e consequentemente

$$X_i\, I_{B_k} \longrightarrow X_i\, I_A \quad e \quad \gamma_i\, I_{B_k} \longrightarrow \gamma_i\, I_A$$

Como $E\,|\,X_i\,| < \infty$, $E\,|\,\gamma_i\,| < \infty$ e $\forall\, k \in N$,

$$|\,X_i\,|\, I_{B_k} < |\,X_i\,| \quad e \quad |\,\gamma\,|\, I_{B_k} \leq |\,\gamma_i\,|$$

segue pelo teorema da convergência dominada que

$$\int_{B_k} X_i dP \longrightarrow \int_A X_i dP \qquad e \tag{3.53}$$

$$\int_{B_k} \gamma_i dP \longrightarrow \int_A \gamma_i dP \tag{3.54}$$

Por (3.53) e (3.54) existe k_0 suficientemente grande tal que $\forall\, k \geq k_0$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq \int_A X_i dP - \int_{B_k} X_i dP \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.55}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq \int_A \gamma_i dP - \int_{B_k} \gamma_i dP \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.56}$$

De (3.52), (3.55) e (3.56) vem:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} &\leq \int_A X_i dP - \int_{B_k} X_i dP \leq \\ &\leq \int_A \gamma_i dP - \int_{B_k} X_i dP - 3\varepsilon \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} - \int_{B_k} \gamma_i dP - \int_{B_k} X_i dP - 3\varepsilon \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\int_{B_k} X_i dP \leq \int_{B_k} Y_i dP - 2\varepsilon \tag{3.57}$$

Pelo lema 3.6, existe para cada $k \geq k_0$, uma regra de parada $t_k' \in C_i^*$ tal que

$$\int_{B_k} X_{t_k'} dP \geq \int_{B_k} Y_i dP - \varepsilon \tag{3.58}$$

Defina $$\tau_k = t_k' I_{B_k} + t_k I_{B_k^c}$$

É fácil verificar que $\tau_k \in C_n$ e por (3.57) e (3.58) tem-se que $\forall\ k \geq k_0$

$$EX_{\tau_k} = \int_{B_k} X_{t_k'} dP + \int_{B_k^c} X_{t_k} \geq \int_{B_k} X_i + \int_{B_k^c} X_{t_k} + \varepsilon = EX_{t_k} + \varepsilon$$

Consequentemente, $\sup_{k \geq k_0} EX_{\tau_k} \geq v_n + \varepsilon$ que é um absurdo. Portanto, $P(A) = 0$ e o lema segue. ∎

Por outro lado, se $E \sup X_n^+ < \infty$ temos o seguinte lema:

LEMA 3.10 - Suponha que $E \sup X_n^+ < \infty$ e que para algum $n \in N$ fixado existe uma regra de parada, t_0, ótima em C_n^*. Então se $\{t_k\}_{k \in N}$ é uma sequência crescente de regras de parada em C_n^* tal que $EX_{t_k} \underset{k \to \infty}{\uparrow} v_n$ e $t = \lim_{k \to \infty} t_k$, $t \in C_n^*$ é ótima nesta classe e $t \leq t_0$ q.c.

prova: Suponha que para algum $k \geq n$ e $i \in N$ o evento

$$A = \{t_0 = k < t_i\}$$

tenha probabilidade positiva. Se definirmos $t_i' = \max(k+1, t_i)$,

temos que $t_i' \in C^*_{k+1}$ e pelo lema 3.4 (b)

$$E(X_{t_i}|F_k) \leq X_k \qquad \text{q.c. em } \{t_0=k<t_i\} \tag{3.59}$$

Como $t_i'=t_i$ q.c. em $\{t_i>k\}$ segue de (3.59) que

$$E(X_{t_i}|F_k) \leq X_k \qquad \text{q.c. em } \{t_0=k<t_i\}$$

o que contraria a n-regularidade de t . Portanto, $P\{t_0=k<t_i\}=0$ $\forall\ k\geq n$ e $i\in N$, o que acarreta

$$t \leq t_0 \qquad \text{q.c.}$$

Consequentemente, t é uma regra de parada e temos:

$$X_t = \lim_{k\to\infty} X_{t_k} \qquad \text{q.c.}$$

A demonstração de que t é ótima em C^*_n é idêntica a feita para τ no teorema 3.1. Bastando para isto verificar que neste caso

$$\tau_k = \max(t_1, \ldots, t_k) = t_k \qquad \text{q.c.}$$

e portanto

$$\tau = \lim_{k\to\infty} \tau_k \quad \lim_{k\to\infty} t_k = t. \qquad \blacksquare$$

Observe então que nas condições do teorema 3.1, segue dos lemas 3.9 e 3.10 que a regra de parada τ do teorema 3.1, coincide com σ_n, isto é,

$$\sigma_n = \tau \qquad \text{q.c.}$$

Portanto, se $E \sup_n X_n^+ < \infty$ e existir uma regra de parada ótima em C^*_n, a regra de parada ótima é minimal e dada por σ_n e pode ser caracteriza-

da também como limite de sequências crescentes de regras de parada n-regulares conforme o lema 3.10. Entretanto, a determinação de $\gamma_n, n \in N$, bem como a escolha de uma sequência crescente $\{t_k\}_{k \in N}$ conforme o lema 3.10, são impraticáveis. Na próxima seção vamos tratar o problema da detrminação de soluções para problemas de parada ótima.

IV - TÉCNICAS PARA A DETERMINAÇÃO DE REGRAS DE PARADAS ÓTIMAS

Na seção III estudamos o problema da existência de regras de parada ótimas para o processo de recompensa X, sob a hipótese de que $EX_n^- < \infty$, $\forall\ n \in N$. Ainda naquela seção, vimos que sob determinadas condições a regra de parada ótima podia ser caracterizada como o primeiro instante em que o processo de recompensa X atinge o processo estocástico $\gamma = \{\gamma_n, F_n\}_{n \in N}$ (conforme (3.37)). Nesta seção estudaremos procedimentos que nos permitam, a partir do processo de recompensa X determinar regras de parada ótimas para o mesmo.

Com o intuíto de orientar o leitor a fim de que não se envolva com problemas de notação e detalhes técnicos, vamos fazer novamente um breve resumo dos resultados que apresentaremos nesta seção.

Introduz-se inicialmente a noção de *procedimento truncado*, isto é, regras de parada que decidem com base em, no máximo, um número ν prefixado de observações. O teorema 4.2 mostra então que se $EX_n^- < \infty$, $\forall$ $n \in N$, existe um procedimento truncado ótimo, para cada inteiro positivo ν prefixado, dando também o processo de construção da regra de pa-

rada ótima para este caso.

A questão que se coloca em seguida é se uma regra de parada ótima para X pode ser obtida através do limite de procedimentos truncados ótimos. O lema 4.2 apresenta um resultado neste sentido, e o lema 4.3 dá uma condição suficiente para que este resultado possa ser aplicado desde que exista uma regra de parada ótima para X. Finalmente, o teorema 4.3 permite também a determinação de regras de parada ótimas para X **sem que seja necessário lidar com o processo estocástico**

$$\gamma = \{\gamma_n, F_n\}_{n \in N} .$$

Dentre as técnicas utilizadas na determinação de uma regra de parada ótima para um dado processo de recompensa, destaca-se uma que consiste em aproximá-las através de regras de parada ótimas para os *processos de recompensa truncados*. Por processos de recompensa truncados, entendemos as subsequências finitas, $X^{\nu} = \{X_n, F_n\}_{1 \leq n \leq \nu}$, $\nu \geq 1$, do processo de recompensa X. As regras de parada para os processos truncados X^{ν}, $\nu \geq 1$, são comumente denominadas *procedimentos truncados ou limitados*. Especificamente temos a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 4.1 - Uma regra de parada para o processo de recompensa truncado X^{ν}, $\nu \geq 1$ fixado, é qualquer regra de parada t para X tal que $P(t \leq \nu) = 1$.

A técnica de aproximação por procedimentos truncados ótimos, foi introduzida originalmente por Arrow-Blackwell e Girshick (1949), na determinação de soluções de Bayes para problemas de decisão sequêncial. Enunciamos a seguir o resultado por eles obtido.

TEOREMA 4.1 - Suponha que o processo de recompensa X é tal que

$$E|X_n| < \infty, \ \forall \ n \in N,$$

e considere o processo truncado X^ν, $\nu \geq 1$ fixado. Defina

(4.1) $$\beta_\nu^\nu = X_\nu \quad \text{e} \quad \beta_n^\nu = \max(X_n, E(\beta_{n+1}^\nu | F_n)), \ 1 \leq n \leq \nu-1.$$

Então, a regra de parada definida por

(4.2) $$s_\nu = \inf\{k \geq 1 : X_k = \beta_k^\nu\}$$

é ótima para o processo de recompensa truncado X^ν.

A técnica para determinação de regras de parada ótimas para os processos truncados X^ν, $\nu \geq 1$, descrita pelo teorema 4.1 é conhecida pelo nome *Backward Induction* e só necessita das informações acerca de X^ν. Esta técnica pode ser justificada informalmente da seguinte maneira: "vamos supor que serão tomadas, no máximo, ν observações e que estamos utilizando um procedimento ótimo. Se já tiverem sido tomadas ν-1 observações, definimos a recompensa atingível quando podemos tomar no máximo mais uma observação, como

$$\beta_{\nu-1}^\nu = \max(X_{\nu-1}, E(X_\nu | F_{\nu-1})).$$

A decisão ótima com base em ν-1 observações seria parar no instante ν-1 se e somente se $X_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}^\nu$. Continuando o caminho de volta, se já tivermos tomado ν-2 observações, definimos a recompensa atingível quando podemos tomar no máximo mais duas observações como

$$\beta_{\nu-2}^\nu = \max(X_{\nu-2}, E(\beta_{\nu-1}^\nu | F_{\nu-2})).$$

Assim, a decisão ótima com base em ν-2 observações seria parar no ins

tante $\nu-2$ se e somente se $X_{\nu-2} = \beta^{\nu}_{\nu-2}$. Prosseguindo com este argumento, definimos para cada n, $1 \leq n \leq \nu$, a recompensa atingível, β^{ν}_{n}, quando podemos tomar no máximo mais $\nu-n$ observações. A decisão ótima com base nas n primeiras observações pode ser tomada comparando-se β^{ν}_{n} com X_n".

Chow & Robbins (1963) utilizaram o processo recursivo de indução descrito acima e provaram o teorema 4.1 utilizando novas técnicas. Neste mesmo artigo, Chow & Robbins mostraram ainda (*teorema 2 do artigo citado*) que sob certas condições, $s = \sup_{\nu} s_{\nu}$ é uma regra de parada ótima para o processo de recompensa X.

Seguindo a mesma linha de abordagem da seção 3 para o problema da parada ótima, vamos fazer agora algumas considerações a respeito do caso truncado.

Para cada $\nu \geq 1$ e $1 \leq n \leq \nu$, vamos denotar por $\tilde{C}^{\nu}_{n}$ a classe das regras de parada t para X^{ν} tais que EX_t existe, e $P(n \leq t \leq \nu) = 1$. Denotaremos por C^{ν}_{n} a classe das regras de parada $t \in \tilde{C}^{\nu}_{n}$ para as quais $EX^{-}_{t} < \infty$. Desta forma, se para cada $\nu \geq 1$ e $1 \leq n \leq \nu$,

$$(4.3) \qquad \gamma^{\nu}_{n} = \sup_{t \in C^{\nu}_{n}} \operatorname{ess} E(X_t | F_n) \quad \text{e} \quad v^{\nu}_{n} = \sup_{t \in C^{\nu}_{n}} EX_t ,$$

temos o lema seguinte:

LEMA 4.1 - Para cada $\nu \geq 1$ e $1 \leq n \leq \nu$, temos:

$$(4.4) \qquad \text{a)} \quad \gamma^{\nu}_{n} = \sup_{t \in \tilde{C}^{\nu}_{n}} \operatorname{ess} E(X_t | F_n) \quad \text{q.c.}$$

$$(4.5) \qquad \text{b)} \quad v^{\nu}_{n} = \sup_{t \in \tilde{C}^{\nu}_{n}} EX_t$$

(4.6) c) $E\gamma_n^\nu = v_n^\nu$

Ainda, para $1 \leq n \leq \nu-1$

(4.7) $$\gamma_n^\nu = \max\ (X_n,\ E(\gamma_{n+1}^\nu | F_n)) \quad \text{q.c.}$$

prova: Observando que os lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.6 se aplicam ao processo de recompensa truncado X^ν, os resultados de (a) a (c) seguem. Provemos (4.7).

Seja $t \in C_n^\nu$ e defina $t' = \max\ (n+1,\ t)$. Obviamente $t' \in C_{n+1}^\nu$, e se $A = \{t=n\}$ tem-se:

$$E(X_t | F_n) = X_n I_A + E(X_{t'} | F_n) I_{A^c} = X_n I_A + E(E(X_{t'} | F_{n+1}) | F_n) I_{A^c} \leq$$

$$\leq X_n I_A + E(\gamma_{n+1}^\nu | F_n) I_{A^c} \leq \max\ (X_n,\ E(\gamma_{n+1}^\nu | F_n)) \quad \text{q.c.}$$

Para provarmos a desigualdade no sentido inverso, note que $t \equiv n \in C_n^\nu$. Consequentemente

(4.8) $$\gamma_n^\nu \geq E(X_t | F_n) = X_n \quad \text{q.c.}$$

Do lema 3.6 segue que existe uma sequência $\{t_k\}_{k \in N}$ em C_{n+1}^ν tal que $E(X_{t_k} | F_{n+1}) \uparrow \gamma_{n+1}^\nu$. Pelo teorema da convergência monótona para esperanças condicionais segue que

(4.9) $$E(\gamma_{n+1}^\nu | F_n) = E(\lim_{k\to\infty} E(X_{t_k} | F_{n+1}) | F_n) = \lim_{k\to\infty} E(X_{t_k} | F_n) \leq \gamma_n^\nu$$

De (4.8) e (4.9) a desigualdade contrária segue trivialmente.

OBSERVAÇÕES: a) Note que se $t \in \tilde{C}_\nu^\nu$, $P(t=\nu) = 1$, e consequentemente $\gamma_\nu^\nu = X_\nu$;

b) Como por definição $\gamma_\nu^\nu = \beta_\nu^\nu = X_\nu$ (ver tma.4.1), é fácil ver que $\gamma_n^\nu = \beta_n^\nu$ q.c. $1 \le n \le \nu$. Assim, os γ_n^ν e os β_n^ν definidos no teorema 4.1 coincidem.

O teorema seguinte constitue uma pequena generalização do teorema 4.1.

TEOREMA 4.2 - Para $\nu \ge 1$ fixado, considere o processo de recompensa truncado X^ν. Para cada $n=1,2,\ldots,\nu$ defina

$$\sigma_n^\nu = \inf\{k:\ k \ge n,\ X_k = \gamma_k^\nu\} \tag{4.10}$$

Então $\sigma_n^\nu \in C_n^\nu$ e além disso $E(X_{\sigma_n^\nu}|F_n) = \gamma_n^\nu$.

prova: Observe inicialmente que pela observação (a) σ_n^ν é uma regra de parada para X^ν. Além disso,

$$EX^-_{\sigma_n^\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} \int_{\{\sigma_n^\nu = k\}} X_k^- dP = \sum_{k=1}^{\nu} \int_{\{\sigma_n^\nu = k\}} (\gamma_k^\nu)^- \, dP < \infty$$

O resultado acima se deve ao fato de que $(\gamma_k^\nu)^- \le X_\nu$, $1 \le k \le \nu$, e à definição de σ_n^ν. Portanto $\sigma_n^\nu \in C_n^\nu$. Para provarmos que $E(X_{\sigma_n^\nu}|F_n) = \gamma_n^\nu$ observe que $P(\sigma_\nu^\nu = \nu) = 1$ e consequentemente vale a igualdade se $n=\nu$. Suponha agora que a igualdade valha para algum $2 \le n < \nu$. Desta forma se $A \in F_{n-1}$, teremos:

$$\int_A X_{\sigma_{n-1}^\nu} dP = \int_{A\{X_{n-1} \ge E(\gamma_n^\nu|F_{n-1})\}} X_{\sigma_{n-1}^\nu} dP + \int_{A\{X_{n-1} < E(\gamma_n^\nu|F_{n-1})\}} X_{\sigma_{n-1}^\nu} dP \tag{4.11}$$

Da definição de σ_{n-1}^ν segue que

$$\sigma_{n-1}^\nu = n-1 \quad \text{q.c. em } A\{X_{n-1} \ge E(\gamma_n^\nu|F_{n-1})\} \tag{4.12}$$

Como $\sigma_{n-1}^{\nu} \geq \nu$ q.c. em $A\{X_{n-1} < E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1})\}$ segue que

$$\sigma_{n-1}^{\nu} = \sigma_n^{\nu} \text{ q.c. em } A\{X_{n-1} < E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1})\} \tag{4.13}$$

Por (4.12), (4.13) e pela hipótese de indução segue de (4.11) que

$$\int_A X_{\sigma_{n-1}^{\nu}} dP = \int_{A\{X_{n-1} \geq E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1})\}} X_{n-1} dP +$$

$$+ \int_{A\{X_{n-1} \ E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1})\}} E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1}) dP =$$

$$= \int_A \max(X_{n-1}, E(\gamma_n^{\nu}|F_{n-1})) dP = \int_A \gamma_{n-1}^{\nu} dP \text{ q.c.}$$

Portanto,

$$E(X_{\sigma_{n-1}^{\nu}}|F_{n-1}) = E(\gamma_{n-1}^{\nu}|F_{n-1}) = \gamma_{n-1}^{\nu}$$

Observe que decorre imediatamente do teorema 4.2 e de (4.6) que para cada $\nu \geq 1$ e $1 \leq n \leq \nu$,

$$EX_{\sigma_n^{\nu}} \geq EX_t \ , \ \forall \ t \in C_n^{\nu}$$

Isto mostra que σ_n^{ν} é ótima em C_n^{ν}. Note ainda que se tomarmos $n = 1$ no teorema 4.2 teremos exatamente o resultado do teorema 4.1.

O lema 4.1 e o teorema 4.2 nos dão um algoritmo mais ou menos construtivo para a determinação de soluções para problemas de parada ótima, quando o número de observações é limitado. A técnica contida nos dois últimos resultados apresentados, conhecida pelo nome de *Backward Induction*, foi aplicada com sucesso em Chow & Robbins (1965)

para provar a existência de uma regra de parada ótima para o processo de recompensa $X = \{X_n, F_n\}_{n\in N}$, onde $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_1$, sendo $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $P(Y_1=-1) = P(Y_1=1) = \frac{1}{2}$ e $F_n = F(Y_1, \ldots, Y_n)$. Este problema é um caso particular do exemplo 1.6, para o qual Dvoretzky (1967) provou haver uma solução. No exemplo abaixo daremos um exemplo da aplicação da técnica mencionada, considerando o exemplo 1.3 da seçãol. Uma variante deste problema encontra-se em Chow, Moriguti, Robbins & Samuels (1964) onde a mesma técnica é utilizada.

EXEMPLO 4.1 - Para colocarmos o exemplo 1.3 no contexto da teoria desenvolvida neste trabalho, vamos representar por $(a_1, \ldots, a_\nu)$, uma permutação qualquer dos inteiros $1,2,\ldots,\nu$, onde 1 corresponde ao melhor objeto, 2 corresponde ao segundo melhor, ..., e ν corresponde ao pior objeto. Tomando-se Ω com o conjunto de todas as permutações $(a_1, \ldots, a_\nu)$, F como o conjunto das partes Ω e P como a medida de probabilidade definida em F que atribui probabilidades iguais a cada permutação, podemos representar nossas observações introduzindo as variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_\nu$ definidas da seguinte maneira:

$$Y_n(a_1,\ldots,a_\nu) = \#\{a_i : 1 \le i \le n \text{ e } a_i \le a_n\},\ 1\le n\le \nu.$$

Observe que Y_n representa a posição relativa do n-ésimo objeto examinado, em comparação com os objetos examinados anteriormente. Não é difícil ver que $Y_1, \ldots, Y_\nu$ são

independentes e que para cada $1 \leq n \leq \nu$, $P(Y_n=j) = \frac{1}{n}$ $1 \leq j \leq n$. Seguindo Chow, Robbins & Siegmund, defina para cada $1 \leq n \leq \nu$,

$$X_n = P(a_n=1|F_n)$$

onde $F_n = F(Y_1, \ldots, Y_n)$. Conforme a referência acima,

(4.14) $$X_n = \frac{n}{\nu} I_{\{Y_n=1\}} \quad \text{q.c.},$$

e se t é uma regra de parada para o processo de recompensa $X = \{X_n, F_n\}_{1 \leq n \leq \nu}$ definido acima, $EX_t = P(a_t=1)$. Para determinar a regra de parada ótima para X utilizando o método da indução *backward*, observe que $\gamma_\nu^\nu = X_\nu$, $\gamma_n^\nu = \max\{X_n, E\gamma_{n+1}^\nu\}$ para $1 \leq n \leq \nu-1$, e por (4.14) e pelo teorema 4.2 a regra de parada ótima é dada por:

$$s = \inf\{n : Y_n = 1 \text{ e } \frac{n}{\nu} \geq E\gamma_{n+1}^\nu\}$$

onde por razões de consistência definimos $\gamma_{\nu+1}^\nu \equiv 0$. É fácil ver então que s pode ser reescrita como

$$s = \inf\{n \geq r : Y_n=1\}$$

onde $r = \inf\{k : \frac{k}{\nu} \geq E\gamma_{k+1}^\nu\}$.

Para $1 \leq k \leq \nu$ defina $c(k) = \max\{\frac{k}{\nu}, E\gamma_{k+1}^\nu\}$. Assim,

$$E\gamma_k^\nu = c(k)\,\frac{1}{k} + E\gamma_{k+1}^\nu(1 - \frac{1}{k})$$

Como $E\gamma_\nu^\nu = \frac{1}{\nu}$, segue da expressão acima que, para $1<k<\nu$,

$$E\gamma_k^\nu = c(k)\frac{1}{k} + c(k+1)\frac{1}{k+1}(1-\frac{1}{k}) + \ldots + c(\nu)\frac{1}{\nu}(1-\frac{1}{\nu-1})\ldots(1-\frac{1}{k}) =$$

$$= (k-1)\sum_{j=k}^{\nu}\frac{c(j)}{j(j-1)}$$

Queremos determinar $r = \inf\{k : c(k) = \frac{k}{\nu}\}$. Como $c(k') = \frac{k'}{\nu}$ acarreta $c(k) = \frac{k}{\nu}$ $\forall\, k \geq k'$,

$$r = \inf\{k : \frac{k}{\nu} \geq k \sum_{j=k+1}^{\nu}\frac{(j/\nu)}{j(j-1)}\}.$$

Assim,

$$r = \inf\{k : \sum_{j=k}^{\nu-1}\frac{1}{j} \leq 1\}.$$

No início desta seção, dissemos que uma das técnicas utilizadas na determinação de uma regra de parada ótima para o processo de recompensa X, consistia em aproximá-la através de regras de parada ótimas para os processos de recompensa truncados. Note que o teorema 4.2 nos dá uma forma de obter estas últimas (pelo menos teoricamente) diretamente a partir do processo de recompensa X. A obtenção de uma regra de parada ótima para X como limite de procedimentos truncados ótimos é objeto do lema seguinte. Antes porém vamos fazer algumas observações. Observe inicialmente que

$$C_n^n \subset C_n^{n+1} \subset \ldots \subset C_n .$$

Portanto,

(4.15) $$X_n = \gamma_n^n \leq \gamma_n^{n+1} \leq \ldots \leq \gamma_n \quad \text{q.c.} \quad \text{e}$$

(4.16) $$-\infty < EX_n = v_n^n \leq v_n^{n+1} \leq \ldots \leq v_n .$$

Defina então

$$(4.17) \qquad \gamma_n' = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_n^\nu \qquad e \qquad v_n' = \lim_{\nu\to\infty} v_n^\nu$$

LEMA 4.2 - Se para $n\in N$ fixado existir em C_n uma regra de parada ótima para X e $\lim_{\nu\to\infty} \gamma_k^\nu = \gamma_k \quad \forall\ k\geq n$, então

$$\sup_\nu \sigma_n^\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_n^\nu$$

é ótima em C_n.

prova: Observe inicialmente que, como $C_n^\nu \subset C_n^{\nu+1}$ temos:

$$\gamma_n^\nu \leq \gamma_n^{\nu+1} \qquad q.c. \quad \forall\ \nu\geq n$$

Portanto, segue da definição de σ_n^ν que $\sigma_n^\nu \leq \sigma_n^{\nu+1}$, $\forall\ \nu\geq n$ e consequentemente tem-se:

$$\sup_\nu \sigma_n^\nu = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_n^\nu.$$

Para provarmos a **otimicidade** de $\sup_\nu \sigma_n^\nu$, basta mostrar que $\sup_\nu \sigma_n^\nu = \sigma_n'$ onde σ_n' é definida por

$$\sigma_n' = \begin{cases} \inf\ \{k \geq n:\ X_k = \gamma_k'\} \\ \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$$

A conclusão segue do teorema 3.2 pois $\gamma_k = \gamma_k'$, $\forall\ k\geq n$. Note então que se $\sup_\nu \sigma_n^\nu = k<\infty$, para ν_0 suficientemente grande $\sigma_n^{\nu_0} = k$ e portanto $X_i < \gamma_i^{\nu_0}$, $n\leq i\leq k-1$. Logo $X_i < \gamma_i'$, $n\leq i\leq k-1$, e consequentemente $\sigma_n' \geq k$. Se $\sup_\nu \sigma_n^\nu = \infty$, dado $M>0$, existe ν_0 tal que $\sigma_n^{\nu_0} > M$. Por outro lado, da desigualdade $\gamma_n^{\nu_0} \leq \gamma_n'$ segue-se que

$\sigma'_n \geq \sigma_n^{\nu_0}$. Portanto, $\sigma'_n > M$, donde decorre $\sigma'_n = \infty$. Com isto, tem-se que $\sup_\nu \sigma_n^\nu \leq \sigma'_n$. Para provarmos a desigualdade no sentido contrário, se $\sigma'_n = k$ teremos $X_i < \gamma'_i$, $n \leq i \leq k-1$ e para ν suficientemente grande teremos $X_i < \gamma_i^\nu$, $n \leq i \leq k-1$ e consequentemente $\sigma_n^\nu \geq k$. Além disso, se $\sigma'_n = \infty$, $X_i < \gamma'_i$, $\forall\ i \geq n$ e dado $M>0$, existe ν tal que $X_i < \gamma_i^\nu$, $n \leq i \leq M$. Portanto, $\sigma_n^\nu > M$. Logo, temos que

$$\sup_\nu \sigma_n^\nu \geq \sigma'_n.$$

Em Chow & Robbins (1963) encontramos o seguinte conjunto de condições que, se satisfeitas pelo processo de recompensa X, são suficientes para que $\sup_\nu \sigma_1^\nu$ seja ótima:

(4.18) $\quad E \sup X_n^+ < \infty \quad$ e $\quad E|X_n| < \infty \quad \forall\ n \in N$;

(4.19) $\quad X_n = X'_n - X''_n = X_n^* - X_n^{**}$ onde cada parcela é F_n-mensurável;

(4.20) $\quad E \sup_n (X'_n)^+ < \infty, \quad 0 \leq X''_1 \leq X''_2 \leq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} X''_n = \infty$ q.c.

(4.21) $\{(X_n^*)^-\}_{n \in N}$ uniformemente integrável e $X_n^{**} \leq c\, X''_n$ para alguma constante $0 < c < \infty$.

Note que de (4.20) segue que $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c., e como $E \sup X_n^+ < \infty$ fica garantida a existência de uma regra de parada ótima para X (conforme o teorema 3.1). Mais adiante veremos que as condições em (4.21) são suficientes para garantir as igualdades $\gamma'_n = \gamma_n$, $\forall\ n \in N$. De (4.15) e (4.16) segue que $v_n \geq v'_n$ e que $\gamma_n \geq \gamma'_n$, $\forall\ n \in N$. O exemplo seguinte mostra que a igualdade nem sempre se verifica.

EXEMPLO 4.2 - Suponha que um estatístico observa sequencialmente as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots$ independentes e identica

mente distribuídas, cuja distribuição é dada por

$$P(Y_i=1) = P(Y_i=-1) = \frac{1}{2} .$$

Se o estatístico para de tomar observações no instante n, $n\in N$, ele recebe como recompensa $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Neste caso, tomando-se $F_n = F(Y_1,\ldots,Y_n)$, $X = \{X_n, F_n\}_{n\in N}$ é um martingal e consequentemente pelo lema A.2.1

$$E(X_t|F_n) = X_n \qquad q.c.$$

para toda regra de parada $t\in C_n^{\nu}$, $\nu\geq n$. Com isto,

$$\gamma_n^{\nu} = X_n \qquad q.c. \ \forall \ \nu\geq n\geq 1.$$

Logo,

$$\gamma_n' = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_n^{\nu} = X_n \qquad q.c.$$

Por outro lado, como $\gamma_n = \sup_{t\in C_n} \text{ess } E(X_t|F_n)$ tem-se que $\gamma_n \geq X_k$ q.c. $\forall$ $k\geq n$ e portanto $\gamma_n \geq \limsup_{n\to\infty} X_n$.
Como $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$ q.c., segue que $\gamma_n = +\infty$ q.c. Não é verdade portanto que $v_n = v_n'$ e $\gamma_n = \gamma_n'$.

O lema seguinte nos dá uma condição suficiente para que as igualdades $\gamma_n = \gamma_n'$ se verifiquem.

LEMA 4.3 - Se para qualquer $n\in N$

(4.22)
$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_{\{t>\nu\}} (\gamma_\nu')^- \, dP = 0$$

Para toda regra de parada $t\in C_n$ tal que $P(t\leq\sigma_n) = 1$, então

$$\gamma_n = \gamma_n' \quad e \quad v_n = v_n' \qquad \forall \ n\in N.$$

prova: Pelo lema 3.8, se $t \in C_n$, $t' = \min(t, \sigma_n)$ é tal que $E(X_{t'}|F_n) \geq$ $\geq E(X_t|F_n)$ q.c. Sabemos ainda que $\gamma'_k \geq X_k$ q.c. $\forall\ k \geq 1$ e portanto $\gamma'_{t'} \geq X_{t'}$ q.c. Pelo lema A.2.2

$$\gamma'_n \geq E(\gamma'_{t'}|F_n) \geq E(X_{t'}|F_n) \geq E(X_t|F_n) \tag{4.23}$$

Portanto, $\gamma'_n \geq \gamma_n$ e a igualdade segue do fato de $\gamma'_n \leq \gamma_n$. A igualdade $v_n = v'_n$ agora é imediata.

Observe que se a sequência $\{X_n^-\}_{n \in N}$ é uniformemente integrável teremos:

$$0 \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\{t>\nu\}} (\gamma_\nu)^- dP \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\{t>\nu\}} X_\nu^- dP = 0 \quad \forall\ t \in C_n$$

Portanto (4.22) estará satisfeita. Em particular (4.22) vale se

$$E \sup X_n^- < \infty.$$

Como havíamos dito anteriormente, as condições (4.21) são suficientes para garantir que $\gamma_n = \gamma'_n$ $\forall\ n \in N$. Com efeito, não é difícil mostrar que se $t \in C_n$

$$0 \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\{t>\nu\}} X_\nu^- dP \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\{t>\nu\}} (X_\nu^*)^- dP = 0 \tag{4.24}$$

(para uma demonstração com detalhes de (4.24) o leitor pode consultar por exemplo Chow & Robbins (1963).). Segue imediatamente de (4.24) que vale (4.22).

EXEMPLO 4.3 - Considere novamente os exemplos 3.2 e 3.3 da seção anterior. Suponha que $g(n) = cn^\alpha$, $c>0$ e $\alpha>0$. Tomando-se

$$X'_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n) - \frac{cn^\alpha}{2}$$

$$X_n'' = \frac{cn^\alpha}{2}$$

$$X_n^* = \max\ (Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$X_n^{**} = \frac{cn^\alpha}{2}$$

e supondo que existe $\beta>0$ tal que $E(Y^+)^{\beta+\alpha^{-1}}$ é fácil ver que as condições (4.20) e (4.21) se verificam, utilizando o lema A.2.3. Em particular, a verificação de que $(X_n^*)^-$ é uniformemente integrável segue do fato $[\max\ (Y_1, \ldots, Y_n)]^- \leq Y_1^-$ $\forall\ n \in N$, pois $E|Y| < \infty$.

A verificação no caso do exemplo 3.3 é inteiramente análoga. Portanto nestes casos a determinação de uma regra de parada ótima pode ser feita através do processo recursivo de indução.

Finalizaremos esta seção, com um teorema cujo resultado nos permite determinar regras de parada ótimas para X sem que seja necessário nos referir a sequência $\{\gamma_n\}_{n \in N}$.

TEOREMA 4.3 - Se para cada $k \geq n$, $n \in N$ fixado, existir um conjunto $A_k \in F_k$ tal que:

i) $X_k \geq E(X_t | F_k)$ q.c. em A_k, $\forall\ t \in C_{k+1}^*$ e

ii) $X_k < \sup\limits_{t \in C_{k+1}^*} \text{ess}\ E(X_t | F_k)$ q.c. em A_k^c,

a variável aleatória σ_n definida em (3.40) é tal que, com probabilidade 1,

$$\sigma_n(\omega) = k \quad \text{se e somente se} \quad \omega \in A_k - \bigcup_{j=n}^{k-1} A_j.$$

prova: Observe inicialmente que por (i) $X_k \geq \sup_{t \in C^*_{k+1}} \text{ess}\, E(X_t | F_k)$ q.c. em A_k consequentemente, segue do lema 3.5 e de (3.35) que $X_k = \gamma_k$ q.c. em A_k. Se levarmos em conta (ii) teremos que $X_k < \gamma_k$ q.c. em A_k^c. Desta forma, tendo em vista a definição de σ_n, se $\sigma_n(\omega) = k$, $X_i(\omega) < \gamma_i(\omega)$, $n \leq i < k$ e $X_k(\omega) = \gamma_k(\omega)$ e pelo visto acima, $\omega \in A_k - \bigcup_{j=n}^{k-1} A_j$ exceto para $\omega \in A$ com $P(A) = 0$. A recíproca é trivial.

O exemplo seguinte nos dá uma idéia de como esta técnica é utilizada na determinação de uma regra de parada ótima para um dado processo de recompensa.

EXEMPLO 4.4 - Tomemos o exemplo 3.2 da seção anterior. Vamos supor que as variáveis aleatórias $Y_1, Y_2, \ldots,$ são independentes e que existem constantes $a<b$, tais que $a \leq Y_n \leq b$ q.c, $\forall n \in N$. Como vimos na observação que segue o exemplo 3.2,

$$E(X_{n+1} | F_n) - X_n = E(Y - M_n)^+ - \beta_n$$

Vimos também que para cada $n \in N$, existe uma única constante α_n tal que $E(Y - \alpha_n)^+ = \beta_n$.

Tomando-se $A_n = \{M_n \geq \alpha_n\}$, teremos:

1) $X_n \geq E(X_{n+1} | F_n)$ q.c. em A_n;

2) $X_n < E(X_{n+1} | F_n)$ q.c. em A_n^c.

Segue imediatamente de (2) que

$$X_k < \sup_{t \in C^*_{k+1}} \text{ess}\, E(X_t | F_k) \text{ q.c. em } A_k^c.$$

Portanto, a condição ii) do teorema 4.3 está satisfeita. Suponha agora que β_n é não decrescente. Nestas condições, a sequência $\{A_n\}_{n\in N}$ é crescente. Defina agora, para cada $j\geq 0$, e $n\in N$

$$Z_j = X_{n+j} I_{A_n}.$$

Assim, Z_j é F_{n+j}-mensurável, de forma que, por (1), o processo estocástico $\{Z_j ; F_{n+j}\}_{j\geq 0}$ é um supermartingal. Ainda, se $m\geq k$

$$X_m = M_m - g(m) \leq b - g(k) + (M_k - a) = X_k + (b-a).$$

Suponha agora que $g(k) = ck^{\alpha}$, onde $c>0$ e $\alpha\geq 1$. Pela desigualdade acima, segue dos lemas A.2.3 e A.2.4 que o processo estocástico $\{Z_j, F_{n+j}\}_{j>0}$ é um supermatingal tal que se $t\in C_n^*$,

$$I_{A_n} X_n \geq E(X_t | F_n) I_{A_n}$$

Isto garante a validade de i) no teorema 4.3. Desta forma, para cada $n\in N$ a regra de parada definida por

$$s = \begin{cases} \inf\{k\geq n : M_k \geq \alpha_k\} \\ \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$$

é ótima em C_n, para o processo de recompensa X considerado.

OBSERVAÇÃO - No exemplo acima, vimos que num caso particular de um problema de parada ótima monótono, a solução é dada por

$$t = \begin{cases} \inf\{k \geq n : E(X_{k+1} | F_k) \leq X_k\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima for vazio} \end{cases}$$

De uma maneira mais geral, se estamos no caso monótono, definindo-se $t' = \min(t,\nu)$, $\nu > n$ inteiro fixado, é possível mostrar que t' coincide com σ_n^ν, e que

$$\sup_\nu \{\min(t,\nu)\} = t.$$

Consequentemente, se existir em C_n uma regra de parada ótima para X, esta é dada por t e pode ser obtida como limite de procedimentos truncados ótimos.

V - SUPERMARTINGAIS: UMA COMPARAÇÃO COM O TRABALHO DE SNELL

Um dos trabalhos mais importantes abordando o problema da parada ótima foi desenvolvido por Snell (1952) utilizando resultados da Teoria dos Martingais. Originalmente Snell trabalhou no seguinte problema: "considere um processo estocástico $Z = \{Z_n, \mathcal{G}_n\}_{n \in N}$, definido em um espaço de probabilidade (Ω, G, P), tal que EX_t exista para qualquer regra de parada t para Z. Seja T a classe de todas as regras de parada t para Z. Existe $t_0 \in T$ tal que $EZ_{t_0} = \inf_{t \in T} EZ_t$?"

Note que o problema acima é, num certo sentido, dual do que foi estudado por Chow & Robbins. Nesta seção procuraremos verificar até que ponto esta dualidade se estende aos resultados obtidos nas duas teorias. Com este objetivo apresentaremos inicialmente alguns resultados que ligam a teoria desenvolvida na seção III com a Teoria dos Martingais.

LEMA 5.1 - Para cada $n \in N$: a) $\gamma_n = \max(X_n, E(\gamma_{n+1} | F_n))$

b) $\gamma'_n = \max(X_n, E(\gamma'_{n+1} | F_n))$

OBSERVAÇÃO: A demonstração da parte a) do lema 5.1 é idêntica a demonstração do lema 4.1 na seção anterior. A demonstração da parte b) segue imediatamente de (4.7) e do teorema da convergência monótona para esperanças condicionais.

Do lema 5.1 decorre imediatamente que $\gamma = \{\gamma_n, F_n\}_{n\in N}$ e $\gamma'_n = \{\gamma'_n, F_n\}_{n\in N}$ são supermartingais tais que $\forall\ n\in N\ \gamma_n \geq X_n$ q.c. e $\gamma'_n \geq X_n$ q.c. Assim fica caracterizada uma classe particular de sequências de variáveis aleatórias, adaptadas à família $\{F_n\}_{n\in N}$, parcialmente ordenada segundo a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 5.1 - Sejam $U = \{U_n, F_n\}_{n\in N}$ e $V = \{V_n, F_n\}_{n\in N}$ dois processos estocásticos. Dizemos que U domina V, e escrevemos: $U \geq V$, se $\forall\ n\in N\ \ U_n \geq V_n$ q.c.

Especificamente, a classe mencionada acima, e que denotaremos por $\mathcal{S}$, é a classe dos supermartingais $Y = \{Y_n, F_n\}$ que dominam o processo de recompensa X.

A definição seguinte estabelece duas formas de regularidade relativamente aos elementos de $\mathcal{S}$.

DEFINIÇÃO 5.2 - Seja $Y = \{Y_n, F_n\}_{n\in N}$ um elemento de $\mathcal{S}$. Dizemos que Y é:

a) *regular*, se para toda regra de parada t para Y, EY_t existe e

$$Y_n \geq E(Y_t | F_n) \text{ q.c. em } \{t\geq n\};\ \forall n\in N$$

b) *C-regular*, se para toda regra de parada $t\in C$, va-

le (5.1).

A noção de regularidade foi originalmente introduzida por Snell e constituiu a base fundamental para o desenvolvimento de seu trabalho. A noção de C-regularidade, além da noção de semi-regularidade que não aparece na definição acima, foram introduzidas mais tarde por Chow & Robbins (1967, pág. 133), que ampliaram o trabalho desenvolvido por Snell. Em particular, um dos resultados estabelecidos neste último trabalho, sobre as propriedades de regularidade possuídas por γ e γ', é o seguinte:

TEOREMA 5.1 - γ' é o elemento minimal de S e γ é o elemento C-regular minimal de S.

A demonstração do resultado acima não apresenta grande dificuldade, podendo o leitor, referir-se a Chow & Robbins (1967). Entretanto, uma nova técnica é introduzida para demonstrar que γ é C-regular, técnica esta utilizada com ênfase por Siegmund (1967) e que consiste em trabalhar com os processos de recompensa $X(a, b)$, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, definidos da seguinte maneira:

$$X_n(a,b) = \begin{cases} b & \text{se} \quad X_n > b \\ X_n & \text{se} \quad a \leq X_n \leq b \\ a & \text{se} \quad X_n < a \end{cases}$$

A técnica mencionada acima provou-se bastante útil no tratamento das regras de parada estendidas para um dado processo de recompensa. Para detalhes, sugerimos que o leitor consulte Siegmund (1967) ou Chow, Robbins & Siegmund (1971).

Snell (1952) ao propor uma solução para o problema descrito no início desta seção supôs, em relação a Z, a existência de uma variável aleatória U integrável tal que $Z_n \geq U$ q.c. $\forall$ $n \in N$, hipótese que denominou A. Sob a hipótese A, Snell (1952, teorema 3.4) mostrou que existia um submartingal generalizado regular maximal, relativo a Z, no qual fundamenta seus resultados subsequentes.

Como dissemos no início desta seção estaríamos interessados em verificar uma possível dualidade entre os resultados de Snell (1952) e Chow & Robbins (1967). Entretanto, a diferença entre as hipóteses iniciais consideradas num e noutro caso, acarretaram diferenças sutís nos resultados. Por esse motivo seria interessante verificar qual o efeito da introdução de uma hipótese que fosse dual da hipótese A, na teoria desenvolvida por Chow & Robbins. Neste sentido, o natural seria supor a existência de uma variável aleatória U integrável tal que $X_n \leq U$ q.c. $\forall$ $n \in N$, o que é equivalente a supor que

$$E \sup X_n^+ < \infty \text{ ou } E(\sup X_n)^+ < \infty.$$

O resultado seguinte é uma consequência da introdução desta hipótese.

TEOREMA 5.2 - Se $E \sup X_n^+ < \infty$, $\gamma = \{\gamma_n, F_n\}$ é regular.

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração sugerimos que o leitor consulte Chow & Robbins (1967).

Observe que se $Y \in S$ é C-regular temos:

$$Y_n \geq E(Y_t | F_n) \geq E(X_t | F_n) \text{ q.c. } \forall\ t \in C_n$$

Segue-se então que:

$$Y_n \geq \sup_{t \in C_n} \text{ess } E(X_t | F_n) = \gamma_n \quad \text{q.c.}$$

Como regularidade implica C-regularidade, segue-se do teorema 5.2 que sob a hipótese $E \sup X_n^+ < \infty$, γ é o elemento regular minimal de S.

Note que a introdução da hipótese $E \sup X_n^+ < \infty$ juntamente com a hipótese inicial, $E X_n^- < \infty \ \forall \ n \in N$, acarreta $E|X_n| < \infty \ \forall \ n \in N$. Haggstrom (1966) trabalhando no mesmo problema que Snell, supondo que $E(\inf Z_n)^- < \infty$ (equivalente a hipótese A), introduziu o processo estocástico $\alpha = \{\alpha_n, G_n\}_{n \in N}$, onde $\alpha_n = \inf_{t \in T_n} \text{ess } E(Z_n | G_n)$ e T_n representava a classe das regras de parada t para Z tais que $t \geq n$ q.c. Sob a hipótese adicional de que $E|Z_n| < \infty \ \forall \ n \in N$, Haggstrom mostrou que α era um submartingal generalizado regular maximal relativo a Z, e o teorema 5.2. acima é um resultado dual deste. Entretanto, Snell (1952) não necessitou da hipótese adicional feita por Haggstrom para provar a existência do supermartingal generalizado regular relativo a Z e mais tarde Chernoff (1967) mostrou que a caracterização de Haggstrom valia independentemente desta hipótese adicional. Em nosso caso é possível mostrar também que o resultado do teorema 5.2 vale mesmo que seja eliminada a hipótese $E X_n^- < \infty \ \forall \ n \in N$, considerada no início da seção III, ficando desta forma estabelecido um resultado dual ao de Snell, mais precisamente a existência (e caracterização) de um supermartingal (generalizado) regular minimal relativo a X. Para isso são necessárias, entretanto, certas adptações na notação bem como a verificação da validade dos resultados anteriores utilizados

na demonstração do teorema 5.2 quando substituirmos a condição inicial $E\,X_n^- < \infty\ \forall\ n\in N$ por $E \sup X_n^+ < \infty$. O leitor poderá notar que as demonstrações dos novos resultados são essencialmente as mesmas, e para que fiquem claras as adaptações a serem efetuadas, observe inicialmente que, sob a troca de hipóteses, $E\,X_t$ existe qualquer que seja a regra de parada t para X. Introduzindo-se as classes $T = T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ de regras de parada para X, onde T é a classe de todas estas regras e $T_n = \{\max(t,n); t\in T\}$, não é difícil ver que o lema 3.2 permanece válido quado substituímos C_n por T_n e continua portanto a fazer sentido a noção de regra de parada n-regular. As definições de γ_n e v_n são modificadas de forma natural e se T_n^* representa a classe das regras de parada n-regulares, o lema 3.2 nos dá:

$$\gamma_n = \operatorname*{supess}_{t\in T_n^*} E(X_n|F_n) = \operatorname*{supess}_{t\in T_n} E(X_n|F_n) \quad \text{q.c.} \qquad \text{e}$$

$$v_n = \sup_{t\in T_n} E\,X_t = \sup_{t\in T_n^*} E\,X_t$$

Outro resultado estabelecido por Snell consiste no seguinte

TEOREMA 5.3 - Suponha que o processo estocástico Z, satisfaz a hipótese A e seja $Y = \{Y_n, G_n\}_{n\in N}$ o submartingal generalizado regular maximal relativo a Z. Defina

$$m = \begin{cases} \inf\{n:\ Z_n \le Y_n + \varepsilon\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$$

i) Se $\varepsilon>0$, m é uma regra de parada para Z tal que

$$E\,Z_m \le \inf_{t\in T} E\,Z_t + \varepsilon \tag{5.2}$$

ii) Se $\varepsilon=0$ e $m<\infty$ q.c. então vale a igualdade em (5.2).

O resultado seguinte pode ser encontrado com detalhe em Chow & Robbins (1967).

TEOREMA 5.4 - Para $\varepsilon\geq 0$ arbitrário, defina

$$s = \begin{cases} \inf\{n: X_n \geq \gamma_n - \varepsilon\} \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$$

Suponha que:

a) $s < \infty$ q.c.

b) $E\, X_s$ existe

c) $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{s>n\}} E^+(\gamma_{n+1}|F_n) = 0$

Então $E\, X_s \geq v - \varepsilon$.

É possível mostrar que, se $v<\infty$ e $\varepsilon>0$, $P(X_n \geq \gamma_n - \varepsilon \text{ i.o}) = 1$. Se notarmos agora que $E \sup_n X_n^+ < \infty$ implica $v<\infty$ (a recíproca não é necessariamente verdadeira) bem como os itens (b) e (c) do teorema 5.4, teremos:

COROLÁRIO 5.4 - Suponha que $E \sup X_n^+ < \infty$.

i) Se $\varepsilon>0$, $E\, X_s \geq v-\varepsilon$

ii) Se $\varepsilon=0$, $s<\infty$ q.c., $E\, X_s = v$

Com os resultados acima não dependem do fato de $E\, X_n^- < \infty$, para cada $n\in N$, esta hipótese pode ser suprimida e com isto o resultado do corolário 5.4 juntamente com o do teorema 5.2 é dual ao resultado do teorema 5.3, devido a Snell. Podemos concluir que a todos os re-

sultados de Snell sobre o problema da parada ótima, corresponde um resultado dual na teoria desenvolvida por Chow & Robbins substituindo a hipótese $E\, X_n^- < \infty \ \forall\, n \in N$ por $E \sup_n X_n^+ < \infty$.

Para finalizar faremos a seguir um quadro contendo os resultados principais das duas teorias para que se torne mais fácil a comparação dos mesmos. Os resultados são válidos sob as hipóteses originais, isto é, que Z satisfaz a hipótese A no caso de Snell e que $E\, X_n^- < \infty \ \forall\, n \in N$ no caso de Chow & Robbins.

SNELL	*CHOW & ROBBINS*
1. Existe um submartingal generalizado regular maximal relativo a Z. (Este submartingal será representado por: $Y = \{Y_n, G_n\}_{n \in N}$ no que se segue).	*1.* $\gamma = \{\gamma_n, F_n\}_{n \in N}$ é o elemento C-regular minimal de S. Se $E \sup_n X_n^+ < \infty$ (e de fato esta hipótese é suficiente) $\gamma = \{\gamma_n, F_n\}_{n \in N}$ é o elemento regular minimal de S.
Defina, para $\varepsilon \geq 0$: $s = \begin{cases} \inf n: Z_n \leq Y_n + \varepsilon \} \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$	Defina, para $\varepsilon \geq 0$: $s = \begin{cases} \inf n: X_n \geq \gamma_n - \varepsilon \} \\ \infty \text{ se o conjunto acima é vazio} \end{cases}$
2. Suponha que $\varepsilon > 0$. Neste caso, $s < \infty$ q.c. e $E\, Z_s \leq \inf_t E\, Z_t + \varepsilon$.	*2.* $s < \infty$ q.c., $E\, X_s$ existe e $\liminf_n \int_{\{s>n\}} E^+(\gamma_{n+1} \mid F_n)\, dP = 0$,

	então $E\,X_s \geq \sup_{t\in C} E\,X_t - \varepsilon$. Se $E \sup_n X_n^+ < \infty$ (esta hipótese é suficiente) então para $\varepsilon > 0$ tem-se que $s < \infty$ q.c. e $E\,X_s > \sup_{t\in C} E\,X_t - \varepsilon$.
2a. Suponha que $\varepsilon = 0$. Neste caso, se $m < \infty$ q.c., $E\,Z_m = \inf_t E\,Z_t$. Reciprocamente se existe uma regra de parada m' para Z tal que $E\,Z_{m'} = \inf_t E\,Z_t$, então $E\,Z_m = E\,Z_{m'}$ e $m \leq m'$.	*2a.* Suponha que $\varepsilon = 0$. Então, se $s\in C^*$ $E\,X_s = \sup_{t\in C} E\,X_t$. No caso em que $E \sup_n X_n^+ < \infty$ (e de fa-basta isto) se $s\in C$, $E\,X_s = \sup_{t\in C} E\,X_t$. Reciprocamente se se existe $s'\in C$ tal que $E\,X_s = \sup_{t\in C} E\,X_t$, então $s\in C^*$ $E\,X_s = E\,X_{s'}$, e $s \leq s'$ q.c.

O quadro acima apesar de não conter todos os resultados de ambas as teorias é suficiente para que possamos compará-las. Observe que apesar de Chow & Robbins terem exigido menos do processo de recompensa X obtiveram resultados mais gerais que os de Snell. De fato, resultados duais aos de Snell podem ser obtidos da teoria de Chow & Robbins trocando-se a hipótese inicial

$$E\,X_n^- < \infty \ \forall n\in N \text{ por } E \sup X_n^+ < \infty.$$

Um detalhe interessante é que sob a hipótese de que $E\,X_n^- < \infty$, $\forall\, n\in N$ foi possível em Chow & Robbins (1967) substituir a utilização de lema de Fatou, que exige uma condição de dominação, pela utilização do teorema da convergência monótona como por exemplo na demonstração da

parte b) do lema 3.6.

APÊNDICE I

Neste apêndice faremos um breve sumário dos resultados da Teoria das Probabilidades mais frequentemente utilizados neste trabalho, com o objetivo de torná-lo mais completo. Não apresentaremos as demonstrações da maioria dos resultados, podendo estes serem encontrados em textos de Probabilidades que se utilizam da Teoria da Medida. Daremos, entretanto, uma bibliografia para facilitar a consulta do leitor interessado.

DEFINIÇÃO A.1.1 - Um *espaço de probabilidade* é uma tripla (Ω, A, P), onde Ω é um conjunto abstrato, A uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P uma medida definida em A tal que $P(\Omega) = 1$.

Consideraremos dado um espaço de probabilidade (Ω, A, P) e denominaremos *variável aleatória (extendida)* toda função $X: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, A-mensurável.

TEOREMA A.1.1 - Para toda a família $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de variáveis aleatórias, existe uma variável aleatória Y, única a menos de equivalência, tal que para toda variável aleatória Z

se tem

$$X_\lambda \leq Z \quad q.c. \quad \forall\, \lambda \in L \iff Y \leq Z \quad q.c.$$

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração veja Neveu (1964, pág. 43).

Em virtude do teorema acima podemos definir

DEFINIÇÃO A.1.2 - Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de variáveis aleatórias. Qualquer variável aleatória X tal que

a) $X \geq X_\lambda$ q.c. $\forall\, \lambda \in L$

b) Se $Y \geq X_\lambda$ q.c. $\forall\, \lambda \in L \Rightarrow Y \geq X$ q.c.

é denominada supremo essencial da família $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ e denotada por $\sup\limits_{\lambda \in L} \text{ess}\, X_\lambda$.

Da demonstração do teorema A.1.1 segue-se que o supremo essencial de uma família $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de variáveis aleatórias, pode ser tomado como o supremo de uma subfamília enumerável, isto é, existe uma sequência $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ em L tal que $\sup\limits_i X_{\lambda_i}$ é uma versão do $\sup\limits_{\lambda \in L} \text{ess}\, X_\lambda$. É fácil ver ainda que se $L' \subset L$, $\sup\limits_{\lambda \in L'} \text{ess}\, X_\lambda \leq \sup\limits_{\lambda \in L} \text{ess}\, X_\lambda$ q.c.

LEMA A.1.1 - Se $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de variáveis aleatórias, temos:

a) Se U é uma variável aleatória finita e não negativa, então

$$U \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\, X_\lambda = \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\, U X_\lambda$$

b) Se Z é uma variável aleatória tal que $Z \geq X_\lambda$ q.c. em $A \in \mathcal{A}$, $\forall\ \lambda \in L$, então

$$\sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda \leq Z \quad \text{q.c. em } A.$$

c) Se $L' \subset L$ e para cada $\lambda \in L$ existe $\lambda' \in L'$ tal que $X_{\lambda'} > X_\lambda$ q.c. então $\sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda = \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda$.

prova: Observe inicialmente que existe uma sequência $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ em L tal que $\sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda = \sup_i X_{\lambda_i}$ q.c. Consequentemente,

$$\cup \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda = \sup_i \cup X_{\lambda_i} \leq \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ \cup X_\lambda \text{ q.c.}$$

A desigualdade no sentido contrário segue imediatamente do fato de que $\cup \sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda \geq \cup X_\lambda$ q.c. $\forall\ \lambda \in L$. Para provarmos o item b) basta notar que $ZI_A \geq X_\lambda I_A$ q.c. $\forall\ \lambda \in L$ e utilizar a parte a). A demonstração de c) é simples pois como para cada $\lambda \in L$ existe $\lambda' \in L'$ com $X_{\lambda'} \geq X_\lambda$ q.c. tem-se que $\sup_{\lambda \in L} \text{ess}\ X_\lambda \geq X_\lambda$ $\forall\ \lambda \in L$. O resto da demonstração segue da definição e do fato de $L' \subset L$.

DEFINIÇÃO A.1.3 - Se X é uma variável aleatória, definimos *média* ou *valor esperado* de X, denotada por E X, como

$$E\ X = \int_\Omega X\ dP$$

quando esta integral existir.

DEFINIÇÃO A.1.4 - Uma família de variáveis aleatórias $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é dita uniformemente integrável se

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup_{\lambda} \int_{\{|X_\lambda| > \nu\}} |X_\lambda| dP = 0$$

TEOREMA A.1.2 - Uma condição necessária e suficiente para que a família $\{X_\lambda\}_{\lambda \in L}$ seja uniformemente integrável é que

$$\sup_{\lambda} E|X_\lambda| < \infty \text{ e } \lim_{P(A) \to 0} \sup_{\lambda} \int_A |X_\lambda| dP = 0$$

no sentido de que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer $A \in \mathcal{A}$ com $P(A) < \delta$, $\sup_{\lambda} \int_A |X_\lambda| dP < \varepsilon$.

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração deste resultado o leitor poderá consultar Chung (1968).

Se X é uma variável aleatória tal que EX existe e $\mathcal{B}$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, sabemos que

$$\lambda(A) = \int_A X \, dP \quad , \quad A \in \mathcal{B}$$

define uma medida sinalizada em $\mathcal{B}$, absolutamente contínua em relação a P. O teorema de Radon-Nikodin [Ash (1972, pág. 63)] garante a existência de uma variável aleatória Y, $\mathcal{B}$-mensurável, única a menos de equivalência, tal que

$$(*) \qquad \int_A Y \, dP = \int_A X \, dP \ , \quad \forall \ A \in \mathcal{B}$$

DEFINIÇÃO A.1.5 - Se X é uma variável aleatória tal que EX existe, e $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, qualquer variável aleatória Y $\mathcal{B}$-mensurável tal que (*) vale a denominada uma versão da *esperança condicional* de X dado $\mathcal{B}$, denotada por $E(X|\mathcal{B})$.

LEMA A.1.2 - Sejam Y e Y' variáveis aleatórias tais que EY e EY' existem e $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}'$, sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$.

a) Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $aEY + bEY'$ está bem definido, então

$$E(aY + bY' \mid \mathcal{B}) = aE(Y \mid \mathcal{B}) + bE(Y' \mid \mathcal{B}) \text{ q.c.}$$

b) Se Y' e $\mathcal{B}$ mensurável e EYY' existe, então

$$E(YY' \mid \mathcal{B}) = Y'E(Y \mid \mathcal{B}) \quad \text{q.c.}$$

c) $E(E(Y \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{B}') = E(E(Y \mid \mathcal{B}') \mid \mathcal{B}) = E(Y \mid \mathcal{B})$ q.c.

d) Se $Y \geq 0$ q.c. $E(Y \mid \mathcal{B}) \geq 0$ q.c.

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração veja Ash (1972).

DEFINIÇÃO A.1.6 - Uma coleção de pares $\{X_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in L}$, onde $(L,\leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, é denominado um *processo estocástico* se $\forall\ \lambda\in L$, $\mathcal{A}_\lambda$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, X_λ é uma variável aleatória $\mathcal{A}_\lambda$-mensurável e $\mathcal{A}_\lambda\subset\mathcal{A}_{\lambda'}$ se $\lambda\leq\lambda'$. Um processo estocástico $\{X_\lambda,\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é denominado um *martingal* se

a) EX_λ existir, $\forall\ \lambda\in L$

b) $E(X_\lambda \mid \mathcal{A}_{\lambda'}) = X_{\lambda'}$ q.c. se $\lambda' \leq \lambda$.

Se o sinal de igualdade em b) é substituido por ($\geq$) $\leq$ o processo estocástico $\{X_\lambda, A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é denominado um *(submartingal) supermartingal.*

Um caso particular importante de processos estocásticos é aquele em que o conjunto de índices é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com sua ordem usual. Neste caso o processo é dito *com parâmetro discreto*. Observe que um *processo estocástico com parâmetro discreto* $\{X_n, A_n\}_{n \in N}$ é um martingal se $\forall$ $n \in N$: EX_n existe e $E(X_{n+1} \mid A_n) = X_n$ q.c. ou alternativamente.

$$\int_A X_{n+1} dP = \int_A X_n dP \qquad \forall\ A \in A_n$$

Uma condição análoga vale no caso de submartingais ou supermartingais

Outros resultados importantes da teoria das Probabilidades que são frequentemente utilizados em nossa exposição, dizem respeito a convergência de sequências de variáveis aleatórias. Mais especificamente, resultados que permitem a troca dos símbolos de limite e integral. Para uma demonstração dos teoremas abaixo o leitor poderá consultar Ash (1972).

Teorema da Convergência Monótona - Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \uparrow X$ q.c. ($X_n \downarrow X$ q.c.) e $EX_1^- < \infty$ ($EX_1^+ < \infty$), então, $EX_n \uparrow EX$ ($EX_n \downarrow EX$).

Lema de Fatou - Se $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \geq Y$ q.c. ($X_n \leq Z$ q.c.) $\forall$ $n \geq 1$ e $EY^- < \infty$ ($EZ^+ < \infty$), então,

$E \liminf_n X_n \leq \liminf_n EX_n$ $(\limsup_n EX_n \leq E \limsup_n X_n)$.

Teorema da Convergência Dominada - Se $\{X_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias tal que $|X_n| \leq Y$ q.c. $\forall\ n\geq 1$ e $E|Y| < \infty$, então, se $X_n \to X$ q.c., $E|X| < \infty$ e $EX_n \to EX$.

Os teoremas que acabamos de enunciar acima, têm um análogo no caso de esperanças condicionais, bastando trocar na conclusão dos teoremas acima, EX_n e EX respectivamente por $E(X_n|\mathcal{B})$ e $E(X|\mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. A demonstração destes resultados poderá também ser encontrado em Ash (1972).

APÊNDICE II

Neste apêndice utilizaremos a notação da seção III.

LEMA A.2.1 - Se $X = \{X_n, F_n\}_{n\in N}$ é um martingal e t uma regra de parada para X tal que $t \leq M$ q.c., para algum $M > 0$, então

$$E(X_t | F_n) = X_n \quad \text{q.c. em } \{t \geq n\}$$

prova: Seja $A \in F_n$ arbitrário. Como X é um martingal temos

$$\int_{A\{t\geq n\}} X_n dP = \int_{A\{t=n\}} X_t dP + \int_{A\{t>n\}} X_n dP = \int_{A\{t=n\}} X_t dP + \int_{A\{t>n\}} X_{n+1} dP$$

Aplicando-se o argumento acima reiteradamente, teremos:

$$\int_{A\{t\geq n\}} X_n dP = \int_{A\{n\leq t\leq k\}} X_t dP + \int_{A\{t>k\}} X_{k+1} dP \quad , \quad k \geq n$$

Como $t \leq M$ q.c., tem-se finalmente

$$\int_{A\{t\geq n\}} X_n dP = \int_{A\{t\geq n\}} X_t dP$$

LEMA A.2.2 - Seja $Y = \{Y_n, F_n\}_{n\in N}$ é um supermartingal e t uma regra de parada para Y tal que $t \geq n$ q.c. e $EY_t^- < \infty$. Se

$$\liminf_k \int_{\{t>k\}} Y_k^- \, dP = 0 \quad \text{então} \quad E(Y_t|F_n) \le Y_n \qquad \text{q.c.}$$

prova: Utilizando o mesmo argumento do lema anterior e o fato de que $-Y_k^- \le Y_k$ q.c. é fácil ver que:

$$\int_{A\{t\ge n\}} Y_n dP \ge \int_{A\{n\le t\le k\}} Y_t dP + \int_{A\{t>k\}} Y_k dP \ge \int_{A\{n\le t\le k\}} Y_t dP - \int_{\{t>k\}} Y_k^- dP$$

Pelo lema de Fatou teremos finalmente

$$\int_{A\{t\ge n\}} Y_n dP \ge \liminf_k \int_{A\{n\le t\le k\}} Y_t dP \ge \int_{A\{t\ge n\}} Y_t dP$$

LEMA A.2.3 - Sejam Y, Y_1, Y_2, ... variáveis aleatórias não negativas e identicamente distribuídas. Para quaisquer c e α positivos, seja $z = \sup_n\{\max(Y_1, \ldots, Y_n) - cn^\alpha\}$.

Então,

a) $EY^{\alpha^{-1}} < \infty \Longrightarrow P\{Z < \infty \,,\, Y_n - cn^\alpha \longrightarrow -\infty\} = 1$

b) $EY^{\alpha^{-1}+\beta} < \infty$ para algum $\beta > 0 \Longrightarrow E(Z^+)^\beta < \infty$

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração do lema acima, o leitor pode consultar Chow-Robbins & Siegmund (1970).

LEMA A.2.4 - Seja $X = \{X_n, F_n\}_{n\in N}$ um supermartingal e t uma regra de parada para X. Então, se

1) $E|X_t| < \infty$

2) $\limsup_n \int_{\{t>n\}} X_n^- \, dP = 0$,

$$E(X_t|F_n) \leq X_n \quad \text{q.c.} \quad \{t>n\} \ , \ \forall n \in N.$$

Em particular se X é um supermartingal e t uma regra de parada para X tal que vale (1), a condição (2) é verificada se existe uma variável aleatória $Z \geq 0$ q.c., com $EZ < \infty$, e uma sequência $j_1 < j_2 < \ldots$ de inteiros tal que $X_k < X_{j_i} + Z$ q.c. para $k \geq j_i$, $i \geq 1$.

OBSERVAÇÃO - Para uma demonstração do lema acima, sugerimos que o leitor consulte Doob (1953, Cap. VII) onde um resultado análogo é provado para submartingais.

B I B L I O G R A F I A

1. K.J.Arrow, D.Blackwell e M.A.Girshick — Bayes and minimax solutions of sequential decision problems, Econometrica, 17 (1949) 213-244.

2. R. Ash — Real Analysis and Probability, N.York Academic Press, 1972.

3. L.Breiman — Stopping-rule problems, Applied Combinatorial Mathematics (ed. E.F.Beckenbach), Wiley, N.York, 1964, 284-319.

4. H.Chernoff — A note on risk and maximal regular generalized submartingales in stopping problems, Ann.Math.Statist. 38 (1967) 606-607.

5. Y.S.Chow, S.Moriguti, H. Robbins e S.M.Samuels — Optimal selection based on relative rank, Israel J.Math.,2 (1964) 81-90.

6. Y.S.Chow e H.Robbins — A martingale system theorem and applications, 4th Berkeley Symp. Math.Stat. and Prob.,1 (1960) 93-104.

7. — On Optimal stopping rules, Zeitsch. f. Wahr., 2 (1963) 33-49.

8. — On Optimal stopping rules for s_n/n,Ill J.Math.,9 (1965) 444-454.

9. On values associated with a sthocastic sequence, Proc.5th Berkeley Symp.Math. Stat. and Prob., 1 (1965) 427-440.

10. K.L.Chung — A Course in Probability Theory, Harcourt Brace, N.York, 1968.

11. Y.S.Chow, H.Robbins e D.O.Siegmund — Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin,1971.

12. G.W.Haggstrom — Optimal stopping and experimental design, Ann.Math.Statist., 37 (1966) 7-29.

13. J.Neveu — Bases Mathematiques du Calcul de Probabilité, Masson, 1964.

14. D.O.Siegmund — Some problems in the theory optimal stopping rules, Ann.Math.Statis., 38 (1967) 1627-1640.

15. J.L.Snell — Applications of martingales system theorems, Trans.Amer.Math.Sco., 73 (1952) 293-312.