

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS
PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS

PAULO CESAR FORMIGA RAMOS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA
ORIENTADOR:

PROF. DR. FLÁVIO WAGNER RODRIGUES

Durante a elaboração deste trabalho o
autor recebeu apoio financeiro da CAPES

- SÃO PAULO, NOVEMBRO DE 1975 -

Quero dedicar este trabalho
aos meus pais, Zenóbio e Nair,
pela formação que me propi-
ciaram, à minha esposa Ana
Maria e meu filho Paulo Ce-
sar, pelo apoio e estímulo
em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Ao terminarmos este trabalho não podemos esquecer, toda a ajuda que muitos, direta ou indiretamente, nos prestaram. Em especial, gostaríamos de mencionar os seguintes:

- O Prof. Dr. FLÁVIO WAGNER RODRIGUES, que sugeriu o tema desta dissertação e nos orientou de forma efetiva durante todo o trabalho;
- Os membros do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, particularmente o Prof. CARLOS ALBERTO DE BRAGANÇA PEREIRA, pelo apoio e estímulo que me proporcionaram;
- O Professor DIRCEU GOMES DE HOLLANDA, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que guiou os meus primeiros passos na Estatística;
- O Professor HELENO BOLFARINI, companheiro de estudos durante os dois anos do meu curso de Pós-Graduação;
- A Universidade Federal do Rio Grande do Norte, nas pessoas do Magnífico Reitor, Prof. DOMINGOS GOMES DE LIMA, do Diretor do Centro de Ciências Exatas e Naturais, Professor ZACHEU LUIZ DOS SANTOS e do Chefe do Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Prof. GILVAN TRIGUEIRO, que tornaram possível a minha ida a São Paulo para a realização deste trabalho;
- Os companheiros do Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Centro de Ciências Exatas e Naturais da UFRN, pelo sacrifício do aumento de suas cargas didáticas durante a minha ausência.

I N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAP. I - PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS	9
1.A - Análise dos Planejamento por Blocos	10
1.B - Planejamento Conexos	24
1.C - Planejamento Balanceados	31
1.D - Planejamento Incompletos Balanceados	34
1.E - Fator Eficiência	41
1.F - Construção de BIB	44
CAP. II - PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS	49
2.A - Descrição do PBIB	58
2.B - Relações entre os Parâmetros do PBIB	60
2.B (a) - Relações entre parâmetros do 1º tipo	60
2.B (b) - Relações entre parâmetros do 1º e 2º tipo	61
2.C - Análise do PBIB	62
2.D - Planejamento por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados Baseados em Configurações geométricas	70
CAP. III - ESQUEMAS DE ASSOCIAÇÃO	77
3.A - Esquemas de Associação e PBIB's Gerados	78
3.B - Matrizes de Associação - suas propriedades algébricas e Aplicações	82
3.C - Classificação dos PBIB(2)	89
3.C (a) - Esquemas de associação por grupo divisível	89

3.C (b) - Esquema de associação triangular.	91
3.C (c) - Esquema de associação por Quadro Latino (Lr).	93
3.C (d) - Esquema de associação cíclico . .	97
3.D - Um Esquema de Associação com $m=3$ classes	101
3.E - Construção de PBIB(2)	102
3.F - Comentários Finais.	110
APÊNDICE.	116
A - Propriedades dos Números.	116
B - Teoria das Congruências	119
C - Grupos, Anéis e Corpos.	124
D - O Corpo de Galois $GF(s)$	127
E - Geometrias Finitas.	133
E.1 - Geometria Projetiva Finita ($PR(u,s)$)	133
E.2 - Geometria Euclidiana Finita ($EG(n,s)$)	143
REFERÊNCIAS	148
BIBLIOGRAFIA.	149

INTRODUÇÃO

O problema fundamental do planejamento de um experimento está na escolha do tipo de planejamento que melhor se adapte às condições experimentais. Sua solução, embora dependa de conhecimentos teóricos, é, em geral, tanto melhor quanto maiores forem a experiência e o bom senso do planejador.

O melhor planejamento, logicamente, seria aquele que permitisse controlar o maior número possível de variáveis envolvidas. Mas, como cada tipo de planejamento implica em um determinado método de análise, às vezes não é possível conciliar a obtenção do melhor planejamento com o método de análise mais adequado aos objetivos da experiência.

Diante disto, ou modificamos o método de análise, com alguma perda, ou procuramos um outro tipo de planejamento cuja análise atenda aos objetivos e que, preferivelmente, preserve algumas características importantes do planejamento ótimo.

O objetivo do nosso trabalho é apresentar um quadro geral do Planejamento por Blocos Incompletos, cuja introdução foi motivada pela impossibilidade de adoção, em al

guns casos, do melhor planejamento dentro dessa linha, que seria o Planejamento por Blocos Completos Casualizados.

A nomenclaturá que adotaremos neste trabalho será a mesma dos ensaios de campo, que já é clássica e foi inicialmente adotada por Fisher e Yates (1948). Desta forma, usaremos o termo "tratamento" para designar qualquer variedade de interesse comparativo, tais como tipos de dietas para porcos, métodos de ensino, tipos de máquinas, tipos de tratamentos terapêuticos, etc., cujas "unidades experimentais" são os elementos aos quais os tratamentos são aplicados, no caso, os porcos, os alunos, os operadores de máquinas, os pacientes, etc. O "rendimento" de uma unidade experimental é o resultado quantitativo que esta unidade produz quando submetida a um dado tratamento. Assim, se os tratamentos exemplificados acima são aplicados às correspondentes unidades experimentais, os rendimentos destas unidades poderiam ser quantificados, respectivamente, em ganho de peso em gramas, grau de aproveitamento, número de peças produzidas, número de curados, etc. Usaremos ainda o termo "bloco" para designar um conjunto de unidades experimentais homogêneas, isto é, unidades para as quais as diferenças entre os rendimentos produzidos, quando submetidas ao mesmo tratamento, sejam atribuíveis apenas ao acaso.

Vamos em seguida, discutir um mesmo problema, em condições distintas, o que nos levará, de maneira natural, a

um encadeamento de vários tipos de planejamentos. Tal encadeamento partindo do Planejamento Completamente Casualizado, será feito ora por refinamento das técnicas experimentais, ora por necessidade devida à não existência de um planejamento anterior. O exemplo é, em sua essência, devido a W. L. Stevens (1950). Introduzimos algumas modificações, para melhor atender aos nossos propósitos:

PROBLEMA: Uma companhia de transportes coletivos está interessada em comparar as resistências de várias marcas de pneus, não no laboratório, mas nas condições reais de serviço. A experiência sugerida consiste em equipar, de alguma forma, os ônibus da companhia com as diversas marcas de pneus e após, digamos 6.000 Km de uso, examiná-los e compará-los segundo algum critério conveniente, talvez o número de milímetros de borracha gastos.

Como se trata de um experimento comparativo, é natural que o tipo de planejamento a propor implique em um método de análise que permita sejam feitas todas as comparações entre as médias dos efeitos e com a mesma "precisão".

Suponhamos, inicialmente, que a Empresa A esteja interessada em 6 marcas de pneus, para utilização em sua frota de 12 ônibus, os quais servem a uma mesma rota.

Um primeiro tipo de planejamento que podemos propor, o mais simples de todos, é o Planejamento Completamente Casualizado. Tomando as marcas de pneus como tratamentos

e os ônibus como unidades experimentais, este planejamento consiste em aplicar cada tratamento a uma unidade experimental escolhida ao acaso, sendo o experimento aplicado duas vezes, nas mesmas condições. O rendimento de cada unidade seria a média do número de milímetros de borracha gastos em cada uma das seis posições das rodas.

O tipo de planejamento proposto apresenta a vantagem de implicar em um método de análise bastante simples que permite comparar as médias dos efeitos das diferentes marcas de pneus com a mesma precisão. Mas, para que ele seja perfeitamente adequado às condições experimentais é necessário que todas as unidades experimentais sejam homogêneas, isto é, que as diferenças de rendimentos de dois ônibus, equipados com a mesma marca de pneu, sejam devidas unicamente ao acaso.

Para a empresa A, a homogeneidade entre seus ônibus poderia estar fundamentada no fato de que, se eles percorrem o mesmo trajeto, não haveria assim grandes diferenças entre os rendimentos, as quais poderiam ser creditadas ao acaso.

Mas a principal desvantagem do Planejamento Completamente Casualizado é que esta hipótese de homogeneidade não pode ser formulada em grande parte dos problemas experimentais. A análise deste tipo de Planejamento pode ser encontrada em textos de Planejamento de Experimentos, tais como Peter W. M. John (1971).

Suponhamos agora que uma outra Empresa B esteja interessada ainda em 6 marcas de pneus para utilização em sua frota de 18 ônibus, os quais servem 3 rotas distintas, com igual número de veículos para cada rota.

Aqui, a proposição do Planejamento Completamente Casualizado implicaria em continuar com a hipótese de homogeneidade entre os ônibus, ainda que estes percorram trajetos diferentes. Mas o bom senso nos leva à consideração de que algumas rotas podem abranger ruas cheias de pedras e buracos, enquanto outras venham a abranger ruas pavimentadas e bem cuidadas. Desta forma, o desgaste sofrido por uma determinada marca de pneu poderá ter sido influenciado pela rota na qual foi utilizada, gerando diferenças entre os ônibus, que percorrem rotas distintas, não totalmente atribuíveis ao acaso. Surge, então, a necessidade da introdução de um outro fator no planejamento, o qual venha controlar a falta de homogeneidade do material. Mantendo a hipótese de que os ônibus são homogêneos se percorrem a mesma rota e considerando-os heterogêneos se percorrem rotas diferentes, podemos propor um segundo tipo de planejamento cujo método de análise implícito elimine, das comparações entre as médias dos efeitos das diferentes marcas, as diferenças gerais atribuíveis às diferentes rotas.

Este novo tipo de planejamento é o chamado Planejamento por Blocos Completos ao Acaso e consiste em dividir

as unidades experimentais em conjuntos ou blocos de tal forma que as unidades de um mesmo bloco sejam tão homogêneas quanto possível enquanto que de bloco para bloco haja bastante heterogeneidade.

No nosso caso podemos considerar os ônibus ainda como unidades experimentais e as rotas como blocos. Como cada bloco contem 6 unidades experimentais, uma para cada tratamento, dizemos que os blocos são completos. Além disso, o experimento é feito ao acaso dentro de cada bloco, isto é, os 6 tratamentos são aplicados ao acaso às 6 unidades de cada bloco. As vantagens teóricas deste tipo de planejamento serão discutidas no Capítulo I do nosso texto e sua análise específica encontra referências em Peter W.M. John (1971).

Um refinamento das técnicas experimentais poderia ser obtido a partir da consideração de que, por exemplo, os cuidados do motorista, as condições dos freios, o número excessivo de passageiros, etc., podem gerar diferenças sensíveis de ônibus para ônibus, independentemente do trajeto. Neste caso, um melhoramento do planejamento pode ser sugerido: supondo não haver diferenças significantes entre as posições ocupadas por cada roda, podemos considerar agora cada ônibus como um bloco e as unidades experimentais como sendo as posições da roda. Desta forma, dentro do esquema do Planejamento por Blocos Completos ao Acaso, as 6 posições da roda, em cada ônibus, seriam ocupadas, ao acaso, pelas 6 marcas de pneus. Este melhoramento traz ainda a vantagem de

diminuir o número de ônibus a serem utilizados na experiência, pois poderíamos utilizar, por exemplo, apenas 6 ônibus, dois em cada rota, ao invés dos 18 propostos anteriormente. E a redução do custo da experiência não acarreta grande perda nos objetivos.

Se levarmos em consideração as diferenças entre as posições das rodas, atribuíveis, por exemplo, à tração, meio fio, etc., tais diferenças poderiam ser eliminadas das comparações entre os efeitos, estabelecendo-se convenientemente o rodízio de pneus dentro de cada ônibus, talvez a cada 1.000 Km de uso, ou ainda, pela introdução de um terceiro fator que viesse a controlar essas diferenças. Esta última alternativa motivaria a introdução de novos tipos de planejamentos que escapam à nossa discussão: o Planejamento por Quadrados Latinos ou o Planejamento por Quadrados de Youden, desde que o número de tratamentos seja igual ao número de blocos e estes sejam completos ou não. Estes planejamentos encontram referências em W.L.Stevens (1950) e Peter W.M.John (1971).

No Capítulo I motivaremos a introdução dos chamados Blocos Incompletos e a necessidade do seu balanceamento, discutindo, à partir daí, as propriedades dos Blocos Incompletos Balanceados.

No Capítulo II mostraremos algumas situações em que, não sendo possível obter um balanceamento total do experi-

mento, motivaremos a introdução dos Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados, discutindo suas propriedades.

Finalmente, no Capítulo III, discutiremos a idéia da introdução dos Esquemas de Associação como elementos fundamentais no estudo dos Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados.

Apresentaremos ainda um Apêndice com alguns resultados utilizados no texto.

CAPÍTULO I

PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS

BALANCEADOS (BIB)

A discussão do problema da companhia de transporte, na Introdução do nosso trabalho, mostra a importância e necessidade da introdução do fator bloco para controlar a falta de homogeneidade do material experimental. A teoria dos Planejamentos por Blocos foi iniciada a partir da consideração de Blocos Completos, isto é, de blocos com tantas unidades experimentais quantos sejam os tratamentos a comparar. Se os blocos são completos, então cada um deles contém uma repetição completa do experimento. Desta forma é possível eliminar as diferenças entre blocos de modo que possamos obter estimadores não viciados das médias dos efeitos dos diversos tratamentos. O mais importante é que as diferenças entre as médias de dois efeitos quaisquer fica totalmente isenta do efeito de bloco.

A impossibilidade, em grande parte dos problemas práticos, da formação de blocos completos, motivou o desen-

volvimento de uma teoria mais complexa dos Planejamentos por Blocos, na qual o número de unidades experimentais em cada bloco é inferior ao número de tratamentos a comparar. Só para exemplificar, voltemos ao problema, já discutido, da companhia de transporte, supondo que a empresa esteja interessada em comparar 8 marcas de pneus. Se o planejamento propõe considerar cada ônibus como um bloco, teremos que o número de unidades (posições dos pneus) em cada bloco é inferior ao número de tratamentos (marcas de pneus) a comparar e, portanto, não teremos blocos completos.

Vamos a seguir, desenvolver a teoria geral para os Planejamentos por Blocos. Com isto pretendemos colocar em relevo o seguinte:

- a) as propriedades de um Planejamento por Blocos Completos;
- b) aquilo que se perde, devido ao desequilíbrio que se verifica em um Planejamento por Blocos quando os blocos não são completos;
- c) a partir de (a) e (b), discutir as restrições que podem ser impostas de maneira a evitar esse desequilíbrio, preservando assim, algumas das propriedades do Planejamento por Blocos Completos.

1.A - ANÁLISE DOS PLANEJAMENTOS POR BLOCOS

Consideremos v tratamentos aplicados a caselas ar-

ranjadas em b blocos de tamanhos k_1, k_2, \dots, k_b . Seja o i -ésimo tratamento ocorrendo em r_i blocos e o i -ésimo e i' ésimo tratamentos ocorrendo juntos em $\lambda_{ii'}$ blocos ($i, i' = 1, 2, \dots, v; i \neq i'$). Seja T_i o total de rendimentos para o i -ésimo tratamento e B_j o total de rendimentos para o j -ésimo bloco ($i = 1, 2, \dots, v; j = 1, 2, \dots, b$). Coloquemos $T' = (T_1, T_2, \dots, T_v)$ e $B' = (B_1, B_2, \dots, B_b)$.

Nos problemas combinatórios e de análise de planejamentos por blocos, a matriz incidente $N = (n_{ij})$, de ordem $v \times b$, onde n_{ij} é o número de vezes que o i -ésimo tratamento ocorre no j -ésimo bloco, desempenha um papel chave. Se n_{ij} assume apenas os valores 0 e 1, o planejamento é dito binário. Nós estudaremos somente os planejamentos binários.

Denotando

$$R' = (r_1, r_2, \dots, r_v) \text{ e } K' = (k_1, k_2, \dots, k_b)$$

vemos imediatamente que

$$N \epsilon_{b,1} = R$$

e

$$N' \epsilon_{v,1} = K$$

onde $\epsilon_{r,s}$ é a matriz $r \times s$ com todos os elementos iguais a 1.

Se $k_j < v$, para algum $j = 1, 2, \dots, b$, o planejamento é dito por Blocos Incompletos.

Se $k_k = v$, $j = 1, 2, \dots, b$, o planejamento é dito próprio (equibloco).

Se $r_i = r$, $i = 1, 2, \dots, v$, o planejamento é dito equi-

replicado.

Teremos o Planejamento por Blocos Completos quando $k_j = v$, $j=1,2,\dots,b$ e $r_i = b$, $i=1,2,\dots,v$.

Se y_{ij} representa o rendimento da casela no j -ésimo bloco para o qual o i -ésimo tratamento é aplicado, nós su pomos que:

$$E(y_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j, \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,v \\ j=1,2,\dots,b \end{matrix} \quad (1.A.3)$$

onde μ é o efeito geral, α_i é o efeito do i -ésimo tratamen- to e β_j é o efeito do j -ésimo bloco. Supomos ainda que os y_{ij} são independentes e normalmente distribuídos com variân- cia comum σ^2 .

Seja, então, Y_i o vetor coluna das r_i repetições do i -ésimo tratamento e seja U_i uma matriz $r_i \times b$, tal que $U_i = u_{jk}^i$, onde

$$u_{jk}^i = \begin{cases} 1, & \text{se a } j\text{-ésima repetição do tratamento} \\ & i \text{ ocorre no bloco } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,v; \quad j=1,2,\dots,r_i; \quad k=1,2,\dots,b.$$

Desta forma, as $\sum_{i=1}^v r_i = n$ observações podem ser es- critas na seguinte forma matricial:

$$Y = A'\theta + \epsilon \quad (1.A.4)$$

onde

$$Y' = (Y_1, Y_2, \dots, Y_v), \quad \theta' = (\mu, \alpha, \beta)$$

com $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v)$ e $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b)$

A' é uma matriz $n \times (v+b+1)$ dada por:

$$A' = \left[\begin{array}{c|cccc} \epsilon_{n,1} & & & & \\ & \text{diag}[\epsilon_{r_1,1}, \epsilon_{r_2,1}, \dots, \epsilon_{r_v,1}] & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_v \end{array} \right] \quad (1.A.5)$$

e ϵ' representa o vetor de erros aleatórios

$\epsilon' = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{vb})$, tal que $E(e_{ij}) = 0$ e $v(e_{ij}) = \sigma^2$.

As equações normais serão então

$$AA'\hat{\theta} = AY \quad (1.A.6)$$

onde $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$, com $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_v)$ e $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_b)$

De (1.A.5) tiramos que:

$$AA' = \begin{bmatrix} n & R' & K' \\ R & R' I_v & N \\ K & N' & K' I_b \end{bmatrix} \quad (1.A.7)$$

onde os I_s representa a matriz identidade $s \times s$.

Escrevendo $G = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b y_{ij}$, temos que

$$AY = \begin{bmatrix} G \\ T \\ B \end{bmatrix}$$

e as equações normais ficam

$$\begin{bmatrix} G \\ T \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & R' & K' \\ R & R' I_V & N \\ K & N' & R' I_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \quad (1.A.8)$$

ou seja

$$(i) \quad G = n\hat{\mu} + \sum_{i=1}^v r_i \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^b k_j \hat{\beta}_j$$

$$(ii) \quad T_i = r_i \hat{\mu} + r_i \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j \quad (1.A.9)$$

$$(iii) \quad B_j = k_j \hat{\mu} + \sum_{i=1}^v n_{ij} \hat{\alpha}_i + k_j \hat{\beta}_j$$

Para eliminar o efeito de bloco em (1.A.9) (ii), multiplicamos cada equação de (iii) por $\frac{n_{hj}}{k_j}$, para um dado $i=h$, somamos para todo $j=1,2,\dots,b$ e subtraímos este resultado da h -ésima equação de (ii). Isto equivale a multiplicar à esquerda, ambos os membros de (1.A.8) por

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & I_V & -N(K' I_b)^{-1} \\ 0 & -N'(R' I_V)^{-1} & I_b \end{bmatrix}$$

Efetuando

$$FAY = FAA'\hat{\theta},$$

temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{G}{n} \\ I_V T - N(K' I_b)^{-1} B \\ I_b B - N'(R' I_V) T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n} R' & \frac{1}{n} K' \\ I_V R - N(K' I_b)^{-1} K & I_V R' I_V - N(K' I_b) N' & I_V N - N(K' I_b)^{-1} (K' I_b) \\ I_b K - N'(R' I_V)^{-1} R & I_b N' - N'(R' I_V)^{-1} (R' I_V) & I_b K' I_b - N'(R' I_V)^{-1} N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

Usando o fato de que

$$I_V R = R; (K' I_b)^{-1} K = \epsilon_{b,1}; (K' I_b)^{-1} (K' I_b) = I_b$$

$$I_b K = K; (R' I_V) R = \epsilon_{v,1}; (R' I_V)^{-1} (R' I_V) = I_V$$

$$I_V R' I_V = R' I; I_b K' I_b = K' I_b; I_V T = T; I_b B = B$$

$$I_V N = N I_b = I_b N' = N' I_V = N$$

$$N \epsilon_{b,1} = R \quad N' \epsilon_{v,1} = K$$

ficamos com:

$$\begin{bmatrix} \frac{G}{n} \\ T - N(K' I_b)^{-1} B \\ B - N'(R' I_V)^{-1} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n} R' & \frac{1}{n} K' \\ 0 & R' I_V - N(K' I_b)^{-1} N' & 0 \\ 0 & 0 & K' I_b - N'(R' I_V)^{-1} N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

Desta forma obtemos as equações reduzidas:

- 1) $\frac{G}{n} = \hat{\mu} + \frac{1}{n}R'\hat{\alpha} + \frac{1}{n}K'\hat{\beta}$
- 2) $T - N(K' I_b)^{-1}B = [R' I_v - N(K' I_b)^{-1}N']\hat{\alpha}$ (1.A.10)
- 3) $B - N'(R' I_v)^{-1}T = [K' I_s - N'(R' I_v)^{-1}N]\hat{\beta}$

Impondo agora as condições laterais:

$$\sum_{i=1}^v r_i \hat{\alpha}_i = R'\hat{\alpha} = 0$$

$$\sum_{j=1}^b k_j \hat{\beta}_j = K'\hat{\beta} = 0$$

vemos que a equação (1) fornece $\hat{\mu} = \frac{G}{n} = \bar{y}$.

O segundo conjunto de equações (2) pode ser escrito como

$$Q = C\hat{\alpha} \quad (1.A.11)$$

onde

$$Q = T - N(K' I_b)^{-1}B \quad (1.A.12)$$

e

$$C = R' I_v - N(K' I_b)^{-1}N' \quad (1.A.13)$$

Para o planejamento equibloco e equireplicado temos:

$$C = R I_v - \frac{1}{k}NN' \quad (1.A.14)$$

As equações (1.A.11) são chamadas Equações Intra-bloco Ajustadas para Tratamentos e estas são as equações que nos interessam para as comparações das médias dos efeitos dos tratamentos, isentas dos efeitos dos blocos. É fá-

cil verificar que $Ce_{v,1} = 0$.

Shah provou em 1959 que a solução de (1.A.11) é

$$\hat{\alpha} = (C + ae_{v,v})^{-1}Q = C^{ij}Q \quad (1.A.15)$$

onde a é um real não nulo.

Na realidade, a solução de (1.A.11) pode ser escrita:

$$\hat{\alpha} = DQ \quad (1.A.16)$$

onde D é uma inversa generalizada de c .

As funções lineares $l'\alpha$, com $\sum_{i=1}^v l_i = 0$, são denominadas de contrastes. Os contrastes da forma $\alpha_i - \alpha_j$ são chamados contrastes elementares. O Teorema de Gauss-Markov nos garante que, se $l'\alpha$ é linearmente estimável, então seu melhor estimador é $l'\hat{\alpha}$. Assim, o melhor estimador linear não viciado de um contraste elementar $\alpha_i - \alpha_j$ é $\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j$. Além disso, temos que:

$$\text{cov}(\hat{\alpha}) = (C + ae_{v,v})\sigma^2 \quad (1.A.17)$$

o que nos fornece

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = (C^{ii} + C^{jj} - 2C^{ij})\sigma^2 \quad (1.A.18)$$

Uma função linear $l'\alpha$ é linearmente estimável se e somente se posto $(C) = \rho(C) = \rho(C, l)$ onde denotamos o símbolo ρ para posto e (C, l) representa a matriz C acrescida da coluna l . Denotaremos o contraste elementar $\alpha_i - \alpha_j$ como $l'_{ij}\alpha$, onde l_{ij} é o vetor coluna $v \times 1$ que tem o valor 1 na posição

i e -1 na posição j , sendo nulos todos os outros valores.

Como C é uma matriz $v \times v$, temos que se $\rho(C) = v$, então todas as funções lineares $l'\alpha$ são linearmente estimáveis. Em particular, todos os contrastes elementares são linearmente estimáveis.

A soma dos quadrados para testar

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_v$$

pode ser tomada como $\hat{\alpha}'Q$ com $v-1$ graus de liberdade, contra a soma de quadrados devido ao erro que é

$$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b Y_{ij} = \sum_{j=1}^b \frac{B_j^2}{k_j} - \hat{\alpha}'Q,$$

com $n - b - v + 1$ graus de liberdade.

Para blocos Completos, temos particularmente que

$$N = \epsilon_{v,b} \text{ e } C = rI_v - \frac{r}{k}\epsilon_{v,v}$$

e tomando $a = \frac{R}{k}$ em (1.A.15), temos:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{r}I_v Q = \frac{1}{r}Q = \frac{1}{r}(T - \frac{1}{k}B) = \frac{1}{r}T - \frac{1}{rk}B.$$

Além disso por (1.A.18) tiramos:

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2\sigma^2}{r}, \quad \forall i, j, \quad i \neq j \quad (1.A.19)$$

Observamos então que, se os blocos são completos, todos os contrastes dos efeitos de tratamentos são linearmente estimáveis e com a mesma precisão, isto é, com a mesma variância. Isto significa que o Planejamento por Blocos

Completos preserva as propriedades do Planejamento Completamente Casualizados.

Como estamos tratando com experiências comparativas, é importante que possamos comparar os efeitos dos tratamentos dois a dois, pelo menos. Podemos exigir, então, que nosso planejamento por Blocos, se não é completo, pelo menos implique em um método de análise que possibilite estimar, se não todos os contrastes, pelo menos os elementares.

Vamos, então, estudar que restrições devemos impor a um Planejamento por Blocos Incompletos para que este possua duas propriedades importantes a saber:

P.1 - Todos os contrastes elementares sejam estimáveis;

P.2 - As estimativas em P.1 sejam feitas com a mesma precisão.

Damos a seguir, três exemplos de Planejamentos por Blocos Incompletos que nos permitirão tirar algumas conclusões intuitivas com respeito à propriedade P.1. Estas conclusões serão comprovadas teoricamente logo em seguida.

EXEMPLO (1.A.1) - Consideremos o Planejamento por Blocos Incompletos com parâmetros $v = b = 4$,

$$r_i = 2, i=1,2,3,4$$

$$k_j = 2, j=1,2,3,4$$

e matriz incidente:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para os dados acima, por (1.A.13), temos que:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e } \rho(C) = 2$$

Temos também que para os efeitos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 :

$$\rho(C, l_{12}) = \rho(C, l_{34}) = 2,$$

enquanto

$$\rho(C, l_{13}) = \rho(C, l_{14}) = \rho(C, l_{23}) = \rho(C, l_{24}) = 3$$

Observamos então que só podemos estimar dois contrastes elementares e exatamente os referentes aos tratamentos que ocorrem no mesmo bloco. Verificaremos no próximo exemplo que esta condição é suficiente mas não é necessária.

EXEMPLO (1.A.2) - Seja agora um Planejamento por Blocos In-

completos com $v=5$, $b=6$,

$$k_j = 2, j=1,2,\dots,6;$$

$$r_i = 2, i=1,2,3,4,5 \text{ e}$$

$$r_4 = 4$$

e a matriz incidente

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho(C) = 3.$$

Temos também, para os efeitos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e α_5 que:

$$\rho(C, \ell_{ij}) = 3,$$

para $(i, j) = (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$ enquanto

$$\rho(C, \ell_{ij}) = 4,$$

para $(i, j) = (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$.

Observamos aqui, mais uma vez, que os contrastes entre efeitos de tratamentos pertencentes ao mesmo bloco são estimáveis. Mas o contraste entre os efeitos dos tratamentos 2 e 5 é estimável, e no entanto estes tratamentos não ocorrem juntos em nenhum bloco. Isto mostra que a condição de que os dois tratamentos ocorram juntos no mesmo bloco é suficiente, mas não necessária.

É conveniente, a esta altura, que procuremos investigar em que condições um contraste elementar entre os efeitos de dois tratamentos que não ocorrem juntos no mesmo bloco é estimável, já que o contraste $\alpha_2 - \alpha_5$ é estimável, enquanto $\alpha_1 - \alpha_2$, por exemplo, não o é.

Podemos verificar à primeira vista, que embora os tratamentos 2 e 5 não sejam aplicados no mesmo bloco, existe pelo menos um par de blocos (3 e 5), um contendo os tratamentos 2 e 4 e o outro contendo os tratamentos 4 e 5, ou seja, em ambos ocorre um tratamento comum que é o 4. Quer dizer, existe um encadeamento tratamento-bloco-tratamento de 2 para 5 que permite a estimação de $\alpha_2 - \alpha_5$ através de α_4 , já

que $(\alpha_2 - \alpha_5) = (\alpha_2 - \alpha_4) - (\alpha_5 - \alpha_4)$. Tal encadeamento não existe em relação aos tratamentos 1 e 2, pois nenhum outro tratamento foi aplicado conjuntamente com 1 e 2.

Mostraremos a seguir, que um tal encadeamento fornece uma condição necessária e suficiente para que um contraste elementar seja estimável.

EXEMPLO (1.A.3) - Seja, finalmente, o Planejamento por Blocos Incompletos com $v = 4$, $b = 5$

$$k_j = 2; j=1,2,3,4,5,$$

$$r_1 = r_2 = 2; r_3 = r_4 = 3.$$

com matriz incidente:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para os dados acima, por (1.A.13), temos:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

com $\rho(C) = 3$ e $\rho(C, \ell_{ij}) = 3$ ($i, j=1, 2, 3, 4; i \neq j$).

Observamos então que, para o planejamento acima todos os contrastes elementares são estimáveis e que todos os tratamentos estão encadeados entre si através de blocos que possuam algum tratamento em comum. Quando um planejamento possui um tal encadeamento, dizemos ter um planejamento conexo. Passemos então ao estudo das propriedades dos planejamentos conexos, cuja idéia inicial é devida a Bose.

1. B - PLANEJAMENTOS CONEXOS

Um bloco e um tratamento são ditos associados se o tratamento ocorre no bloco. Dois tratamentos A e B são ditos conectados se podemos formar uma cadeia de tratamentos e blocos: tratamento - bloco - --- - bloco - tratamento, começando com A e terminando com B, tal que todo bloco na cadeia é associado com ambos os tratamentos adjacentes. A relação "A conectado com B" é uma relação de equivalência, a qual estabelece classes de equivalência disjuntas para os tratamentos.

DEFINIÇÃO (1.B.1) - Um planejamento é dito conexo quando todo par de tratamentos é conectado. Neste caso, temos uma única classe de equivalência.

EXEMPLOS (1.B.1):

- a) Nos Exemplos (1.A.1) e (1.A.2), os planejamentos não são conexos. Em ambos temos duas classes de equivalência.
- b) No Exemplo (1.A.3) o planejamento é conexo. Os tratamentos 1 e 4 são conectados pela cadeia 1-I-3-V-4. O contraste $\alpha_1 - \alpha_4$ é estimável, pois seguindo a cadeia, temos

$$z = Y_{11} - Y_{31} + Y_{35} - Y_{45} \text{ e}$$

$$E(z) = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_3 - \beta_1 + \alpha_3 + \beta_5 - \alpha_4 - \beta_5 = \alpha_1 - \alpha_4$$

DEFINIÇÃO (1.B.2) - Um planejamento é dito conexo se todos os contrastes elementares são estimáveis

TEOREMA (1.B.1) - As definições (1.B.1) e (1.B.2) são equivalentes.

Já vimos que a matriz C em (1.A.13) satisfaz

$$C \epsilon_{v,1} = 0.$$

Portanto C é singular e tem $\epsilon_{v,1}$ como vetor característico correspondente às suas raízes nulas. Assim $\rho(C) \leq v-1$. O posto da matriz C está relacionado com a propriedade de conexidade do planejamento, como é visto no seguinte:

TEOREMA (1.B.2) - Um Planejamento por Blocos Incompletos é

conexo se e somente se o posto de sua matriz C é igual a $v-1$

PROVA: Consideremos um planejamento conexo e sejam $v-1$ contrastes independentes $\alpha_i - \alpha_j$ ($i, j=1, 2, \dots, v$) estimados por $l_1'Q, l_2'Q, \dots, l_{v-1}'Q$.

Temos então que $l_i' C \neq 0, i=1, 2, \dots, v$, o que significa que os l_i' são vetores característicos correspondentes a raízes características não nulas de C . Portanto são ortogonais a $\epsilon_{v,1}$, o vetor característico das raízes nulas de C . Mas, os vetores l_i' são independentes, por hipótese, e são $v-1$ ao todo. Como C é de ordem v , temos então que $\rho(C) = v-1$.

Inversamente, suponhamos que $\rho(C) = v-1$. Sejam x_1, x_2, \dots, x_{v-1} os vetores característicos ortonormais correspondentes às raízes não nulas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{v-1}$ de C . Então

$$E(x_i'Q) = x_i' C \alpha = \theta_i x_i' \alpha,$$

onde x_i' é estimado por $\frac{x_i'Q}{\theta_i}$.

Como todos x_i são ortogonais a $\epsilon_{v,1}$ e no contraste elementar $l'\alpha, l$ é ortogonal a $\epsilon_{v,1}$, então l pertence ao espaço vetorial gerado pelos x_i ($i=1, 2, \dots, v-1$). Seja então

$$l = \sum_{i=1}^{v-1} a_i x_i$$

Desta forma,

$$E \left(\sum_{i=1}^{v-1} \frac{a_i x_i' Q}{\theta_i} \right) = l' \alpha$$

Logo, o contraste $\lambda' \alpha$ é estimável.

Pelo exposto acima, para satisfazer a propriedade P.1 o planejamento deve ser conexo.

Damos a seguir dois outros resultados interessantes sobre a estrutura da matriz C no planejamento conexo. Estes resultados foram provados por Chakrabarti (1963).

TEOREMA (1.B.3) - Num planejamento conexo, os elementos diagonais da matriz C são todos positivos. Mais ainda, os menores principais de todas as ordens são positivos.

TEOREMA (1.B.4) - Num planejamento conexo os cofatores de todos os elementos de C têm o mesmo valor positivo.

Vamos agora estudar as restrições que devemos impor a um planejamento conexo, isto é, a um planejamento que satisfaz P.1, para que todos os contrastes elementares sejam estimados com a mesma variância, isto é, satisfaça também P.2. Através dos três exemplos de planejamentos conexos que seguem, vamos procurar estabelecer intuitivamente algumas restrições que serão comprovadas teoricamente logo em seguida

EXEMPLO (1.B.2)

No planejamento do Exemplo (1.A.3), o qual já vimos que é conexo, temos, por (1.A.16) e (1.A.17), que:

$$(C+\epsilon_{4,4}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ e } (C+\epsilon_{4,4})^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 19 & -13 & 7 & -9 \\ -13 & 19 & -9 & 7 \\ 7 & -9 & 11 & -5 \\ -9 & 7 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

E de acordo com (1.A.17) e (1.A.18):

$$V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = 4\sigma^2; \quad V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_4) = \sigma^2$$

$$V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4) = 2\sigma^2; \quad V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_4) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3) = 3\sigma^2$$

Como podemos observar, os contrastes elementares não são estimados com a mesma variância, o que intuitivamente era de se esperar, já que há um desequilíbrio quanto ao número de vezes em que cada tratamento é aplicado. Vejamos o que acontece quando o planejamento é equireplicado.

EXEMPLO (1.B.3) - Consideremos o planejamento com

$v=b=4$, $r=k=2$ e matriz incidente

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para os dados acima, por (1.A.13), temos:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{matrix} & \times & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

Como $\rho(C) = 3$, o planejamento é conexo.

De (1.A.15) e (1.A.17), temos que:

$$\left(C + \frac{1}{2} \epsilon_{4,4} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left(C + \frac{1}{2} \epsilon_{4,4} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

De acordo com (1.A.17) e (1.A.18), temos:

$$V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_4) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4) = \frac{3}{2}\sigma^2$$

$$V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_4) = 2\sigma^2$$

Podemos observar aqui que a condição de que cada tratamento seja aplicado o mesmo número de vezes não é suficiente para a igualdade das variâncias dos contrastes elementares. Um detalhe interessante neste exemplo é que, para os tratamentos que ocorrem juntos uma vez no mesmo bloco, a variância dos contrastes entre seus efeitos é a mesma, isto ocorrendo também para os que não ocorrem nenhuma vez juntos no mesmo bloco.

Vejamos, no próximo exemplo, o que acontece quando o número λ_{ii} , é constante para todo par $i \neq j$, isto é, quan-

do todo par de tratamentos ocorre junto no mesmo número de blocos.

EXEMPLO (1.B.4) - Consideremos agora o Planejamento por Blocos Incompletos com $v=4$, $b=6$, $r=3$, $k=2$ e matriz incidente

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para os dados acima, por (1.A.13), temos:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Como $\rho(C) = 3$, o planejamento é conexo.

De (1.A.15) e (1.A.18), temos que

$$(C + \frac{1}{2} \epsilon_{4,4}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (C + \frac{1}{2} \epsilon_{4,4})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

E de acordo com (1.A.17) e (1.A.18),

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \sigma^2, \quad \forall i, j (i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j).$$

Aqui, finalmente podemos estimar todos os contrastes elementares com a mesma variância. As características que podemos observar no planejamento acima é que ele é equibloco, equireplicado e dois tratamentos quaisquer ocorrem juntos no mesmo número de blocos. Os planejamentos que satisfazem a propriedade (P.2) são chamados de Planejamentos Balanceados.

1.C - PLANEJAMENTOS BALANCEADOS

DEFINIÇÃO (1.C.1) - Um planejamento é dito Balanceado se todos os contrastes elementares são estimados com a mesma precisão.

A seguinte condição necessária é suficiente para balanceamento em planejamentos conexos é devida a V. R. Rao (1958):

TEOREMA (1.C.1) - Um planejamento conexo é balanceado se e somente se todas as raízes características não nulas de sua matriz C são iguais.

PROVA - Seja x_1, x_2, \dots, x_{v-1} um conjunto de vetores característicos ortonormais correspondentes às raízes não-nulas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{v-1}$ da matriz C . Então a decomposição espectral de C é

$$C = \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i x_i x_i'$$

De (1.A.16) tiramos que

$$\hat{\alpha} = \left\{ \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1} x_i x_i' \right\} Q$$

é a solução das equações normais, com matriz de dispersão dada por

$$\text{cov}(\hat{\alpha}) = \left\{ \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1} x_i x_i' \right\} \sigma^2.$$

A variância média de todos os contrastes elementares pode ser facilmente vista como

$$\frac{2\sigma^2}{v(v-1)} \left\{ v \text{tr} \left(\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1} x_i x_i' \right) - \epsilon_{1,v} \left(\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1} x_i x_i' \right) \epsilon_{v,1} \right\} = 2\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}}{v-1}$$

Suponhamos agora em planejamento conexo balanceado. Então, todos os contrastes elementares são estimados com va

riância

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = 2\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}}{v-1}$$

Mais ainda,

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_k) + V(\hat{\alpha}_j - \hat{\alpha}_k) - 2 \text{cov}[(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_k), (\hat{\alpha}_j - \hat{\alpha}_k)]$$

e então

$$\text{cov}[(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_k), (\hat{\alpha}_j - \hat{\alpha}_k)] = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}}{v-1}$$

Consideremos agora a função linear paramétrica $x_i' \alpha$.
A variância de seu estimador \hat{e} , por um lado,

$$V(x_i' \alpha) = \sigma^2 x_i' \left(\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1} x_i x_i' \right) x_i = \sigma^2 \theta_i^{-1} \quad (1.C.2)$$

Por outro lado, se escrevemos

$$x_i' \alpha = \sum_{j=2}^v a_j (\alpha_j - \alpha_i), \text{ onde } \sum_{j=2}^v a_j^2 + \left(\sum_{j=2}^v a_j \right)^2 = 1$$

teremos:

$$\begin{aligned} V(x_i' \alpha) &= \left(\sum_{j=2}^v a_j^2 \right) \left\{ \sigma^2 \frac{\sum_{j=1}^{v-1} \theta_j^{-1}}{v-1} \right\} + \left(\sum_{\substack{j, j'=2 \\ j \neq j'}}^v a_j a_{j'} \right) \left\{ \sigma^2 \frac{\sum_{j=1}^{v-1} \theta_j^{-1}}{v-1} \right\} = \\ &= \sigma^2 \frac{\sum_{j=1}^{v-1} \theta_j^{-1}}{v-1} \end{aligned} \quad (1.C.3)$$

Comparando os resultados em (1.C.1) e (1.C.2) temos que

$$\theta_i^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{v-1} \theta_j^{-1}}{v-1} \quad (1.C.4)$$

Como a igualdade em (1.C.4) é válida para todo $i = 1, 2, \dots, v-1$, temos que:

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{v-1}$$

e então a condição é necessária.

Inversamente, se as raízes características não nulas da matriz C são todas iguais (digamos θ), cada um dos contrastes é estimado com a mesma variância $2\sigma^2\theta^{-1}$ e o planejamento é balanceado. A prova é então completa.

1.D - BLOCOS INCOMPLETOS BALANCEADOS

O planejamento por Blocos Incompletos que satisfaz a Definição (1.C.1) é conhecido como Planejamento por Blocos Incompletos Balanceados (BIB). Formalmente nós o definimos como segue:

DEFINIÇÃO (1.D.1) - Um planejamento BIB é um arranjo de v símbolos em b conjuntos, cada um contendo k ($k < v$) símbolos, satisfazendo as seguintes condições:

- 1) Todo símbolo ocorre no máximo uma vez em um conjunto.

- 2) Todo símbolo ocorre em exatamente r conjuntos.
- 3) Todo par de símbolos ocorre junto em λ conjuntos.

Um planejamento BIB é dito simétrico se $v = b$ e, conseqüentemente $r = k$. Os números v, b, r, k, λ são conhecidos como parâmetros do planejamento BIB.

É importante ressaltar que o planejamento BIB da definição (1.D.1) não é o único planejamento Balanceado da Definição (1.C.1). Para distinguir os planejamentos balanceados da Definição (1.D.1) do BIB, nós diremos que aqueles formam planejamentos com variâncias balanceadas.

Existem também alguns planejamentos que são chamados de planejamentos combinatoriamente balanceados, os quais satisfazem a condição (3) da Definição (1.D.1). Vejamos agora as relações entre os parâmetros do BIB:

TEOREMA 1.D.1 - Os parâmetros do planejamento BIB satisfazem:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad vr &= bk \\ \text{ii)} \quad \lambda(v-1) &= r(k-1) \end{aligned} \tag{1.D.1}$$

De fato, (i) conta o número de caselas usadas de duas maneiras: temos b conjuntos, cada um contendo k símbolos e temos v símbolos, cada um ocorrendo r vezes.

Para mostrar ii), consideremos os pares contendo um particular símbolo θ . Vemos que θ ocorre em r conjuntos e em cada um deles é emparelhado com $k-1$ símbolos. Mas θ será emparelhado com cada um dos $v-1$ símbolos restantes exatamente

λ vezes. Comparando as duas contagens temos (ii).

As relações a que estão sujeitos os parâmetros do BIB impõem uma restrição muito forte sobre a sua existência. Se fixarmos os parâmetros $v=b=6$ e $r=k=3$, por exemplo, a relação (i) é satisfeita, mas, por (ii) teremos $\lambda = \frac{6}{5}$. Como λ tem que ser inteiro, não existe BIB para os parâmetros fixados acima.

EXEMPLO (1.D.1) - Podemos facilmente verificar que o seguinte arranjo

$$S_1 = (3,4,5,7); S_2 = (2,5,6,7); S_3 = (1,4,6,7)$$

$$S_5 = (1,3,5,6); S_6 = (1,2,4,5); S_7 = (1,2,3,7)$$

é um planejamento BIB com parâmetros

$$v=b=7, r=k=4 \text{ e } \lambda=2.$$

Algumas séries particulares de planejamento BIB eram conhecidas antes de 1847 por Kirkman e um tratamento sistemático estabelecido por Yates (1936) as introduziu como planejamentos estatísticos. Desta rica contribuição foram feitas configurações estabelecidas por Fisher (1940, 1942), Fisher e Yates (1963) e Bose (1939, 1959), e agora formam a parte padrão desta teoria.

Voltemos, agora, à análise dos Blocos Incompletos obtida na seção 1.A, com o propósito de estabelecermos as expressões particulares para o caso do BIB.

Das relações (1.A.1) e (1.A.2), tiramos imediatamente que

$$N\epsilon_{b,1} = r\epsilon_{v,1} \quad (1.D.2)$$

$$N'\epsilon_{v,1} = k\epsilon_{b,1} \quad (1.D.3)$$

Da relação (1.A.12), temos que

$$C = rI_v - \frac{1}{k}NN' \quad (1.D.4)$$

Se denotamos os elementos de NN' por g_{ih} , vemos que

$$g_{ii} = \sum_{j=1}^b h_{ij}^2 \text{ e } g_{ih} = \sum_{j=1}^b h_{ij}h_{hj} \quad (i \neq j)$$

os quais, no caso do BIB:

$$g_{ii} = r \text{ e } g_{ih} = \lambda \quad (i \neq h).$$

Desta forma teremos

$$NN' = (r-\lambda)I_v + \lambda\epsilon_{v,v} \quad (1.D.5)$$

Substituindo em (1.D.4), temos

$$C = \frac{vr-b}{v-1} \left[I_v - \frac{1}{v} \epsilon_{v,v} \right] \quad (1.D.6)$$

Desta forma, os elementos diagonais de C são iguais a $r - \frac{r}{k}$, o que fornece

$$\text{tr}(C) = \frac{vr(k-1)}{k} = vr - b \quad (1.D.7)$$

Por outro lado, se θ é a raiz característica não nula de C , de multiplicidade $v-1$, temos

$$\text{tr}(C) = \theta(v-1) \quad (1.D.8)$$

Comparando (1.D.7) e (1.D.8) obtemos:

$$\theta = \frac{vr-b}{v-1} \quad (1.D.9)$$

Pela relação (1.C.1) tiramos então que

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = 2\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta^{-1}}{v-1} = \frac{2\sigma^2}{\theta} = 2\sigma^2 \frac{(v-1)}{vr-1}$$

Depois de alguma simplificação, tiramos que, para

BIB:

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 \quad (1.D.10)$$

Majundar (1953), notou que, se N é uma matriz $v \times b$ com $n_{ij} = 0$ ou 1 , satisfazendo (1.D.3) e (1.D.5), então N é a matriz incidente de um planejamento BIB com parâmetros v , b , r , k e λ .

Da relação (1.D.5), com $r > \lambda$, temos que

$$v = \rho(NN') = \rho(N) \leq b \quad (1.D.11)$$

A desigualdade acima é devida a Fisher (1940).

Vejamos agora como um planejamento BIB pode gerar um outro planejamento BIB.

Sejam S_1, S_2, \dots, S_b os b conjuntos formando um planejamento BIB com parâmetros v , b , r , k e λ . Então, se S'_i é o complemento do conjunto S_i , isto é, $S'_i = \{1, 2, \dots, v\} - S_i$, então podemos verificar que os conjuntos S'_1, S'_2, \dots, S'_b formam

um outro planejamento BIB, conhecido como planejamento BIB complementar de um planejamento dado, cujos parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned}v_1 &= v, b_1 = b, r_1 = b-r \\k_i &= v-k, \lambda_1 = b-2r+\lambda\end{aligned}\tag{1.D.12}$$

EXEMPLO (1.D.2) - No Exemplo (1.D.1) temos um BIB com parâmetros $v=b=7$, $r=k=4$ e $\lambda=2$, cujos complementos dos conjuntos S_i ($i=1,2,\dots,7$):

$$\begin{aligned}S_1^c &= (1,2,6); S_2^c = (1,3,4); S_3^c = (2,3,5); S_4^c = (1,5,7) \\S_5^c &= (2,4,7); S_6^c = (6,3,7) \text{ e } S_7^c = (4,5,6)\end{aligned}$$

formam um planejamento BIB com parâmetros

$$v_1 = b_1 = 7, r_1 = k_i = 3 \text{ e } \lambda_1 = 1.$$

O teorema que segue, estabelece uma propriedade bastante útil para os planejamentos BIB simétricos, isto é, os planejamentos BIB com

$$v = b \text{ e } r = k$$

TEOREMA (1.D.2) - Em um planejamento BIB simétrico, quaisquer dois conjuntos tem exatamente λ símbolos em comum.

PROVA - Seja N a matriz incidente de um planejamento BIB simétrico. Então, de (1.D.2) e (1.D.3),

$$N\epsilon_{v,v} = \epsilon_{v,v}N = r\epsilon_{v,v}\tag{1.D.13}$$

Da relação (1.D.5) temos que:

$$\begin{aligned} N'NN' &= N'[(r-\lambda)I_v + \lambda\epsilon_{v,v}] = (r-\lambda)N'I_v + \lambda N'\epsilon_{v,v} = \\ &= [(r-\lambda)I_v + \lambda\epsilon_{v,v}]N' \end{aligned}$$

e como N' é não-singular,

$$N'N = (r-\lambda)I_v + \lambda\epsilon_{v,v} \quad (1.D.14)$$

Logo, como $NN' = N'N$, a interseção de quaisquer 2 conjuntos do planejamento contém λ símbolos.

Através desse fato, podemos encontrar outros planejamentos BIB gerados por um BIB simétrico.

Seja D um planejamento BIB simétrico consistindo dos v conjuntos S_1, S_2, \dots, S_v e com parâmetros $v=b$, $r=k$ e λ . Nós escolhemos um desses conjuntos digamos S_1 , e excluímos de cada um dos S_2, S_3, \dots, S_v conjuntos os λ símbolos que têm em comum com S_1 . Os conjuntos resultantes $S_2^-, S_3^-, \dots, S_v^-$ formam o que chamamos de planejamento residual D^- , no qual os parâmetros são dados por

$$v_2 = v-k, \quad b_2 = v-1, \quad r_2 = k, \quad k_2 = v-\lambda \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda \quad (1.D.15)$$

pois exatamente λ símbolos são extraídos de cada um dos S_2, S_3, \dots, S_v conjuntos e os $v-k$ símbolos de D , não pertencentes a S_1 continuam inalterados.

Podemos também formar um planejamento derivado D^+ , tomando para nossos conjuntos $S_2^+, S_3^+, \dots, S_v^+$ os λ símbolos que S_2, S_3, \dots, S_v têm em comum com S_1 . Podemos ver que D^+ é um planejamento BIB com parâmetros

$$v_3 = k, b_3 = v-1, r_3 = k, k_3 = \lambda \text{ e } \lambda_3 = \lambda-1 \quad (1.D.16)$$

EXEMPLO (1.D.3) - Consideremos o planejamento BIB simétrico exibido no Exemplo (1.D.1). Escolhendo o conjunto S_1 , temos

$$i) S_2^- = (2,6); S_3^- = (1,6); S_4^- = (2,6); S_5^- = (1,6)$$

$$S_6^- = (1,2) \text{ e } S_7^- = (1,2)$$

$$ii) S_2^+ = (5,7); S_3^+ = (4,7); S_4^+ = (3,4); S_5^+ = (3,5)$$

$$S_6^+ = (4,5) \text{ e } S_7^+ = (3,7)$$

Em (i) temos o BIB residual, com parâmetros

$$v_2 = 3, b_2 = 6, r_2 = 4, k_2 = 2 \text{ e } \lambda_2 = 2.$$

Em (ii) temos o BIB derivado, com parâmetros

$$v_3 = 4, b_3 = 6, r_3 = 3, k_3 = 2 \text{ e } \lambda_3 = 1.$$

O método de obtenção dos planejamentos residual e derivado de BIB simétrico nem sempre admite o processo inverso, como foi mostrado por Bhattacharya (1945). Mas Hall e Connor (1953), Shrikhaude (1960) e Hall (1967), mostraram que o processo inverso sempre existe se $\lambda = 1$ ou 2 .

1.E - FATOR EFICIÊNCIA

Com a avaliação de um grande número de planejamentos do mesmo tamanho (mesmo número de unidades experimentais), torna-se essencial que tenhamos uma norma para comparar os vários planejamentos.

O fator eficiência, definido a seguir, nos fornece tal medida.

DEFINIÇÃO (1.E.1) - O fator eficiência de um planejamento é definido pela razão:

$$E = \frac{\bar{V}_r}{\bar{V}} \quad (1.E.1)$$

onde \bar{V} é a variância média das estimativas intrablocos dos contrastes elementares entre tratamentos, para o planejamento em consideração, e \bar{V}_r , o mesmo, para blocos aleatorizados, considerando o mesmo número de unidades experimentais. \bar{V}_r e \bar{V} são computados supondo que a variância do erro intrablocos é a mesma, em ambos os casos.

A variância das estimativas dos contrastes nos planejamentos conexos, é, de acordo com (1.C.1):

$$\bar{V} = 2\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}}{v-1}$$

onde $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{v-1}$ são raízes características não nulas da matriz C do planejamento.

Por outro lado, de acordo com (1.A.15), temos

$$\bar{V}_r = \frac{2\sigma^2}{\bar{r}}$$

onde \bar{r} é o número médio de repetições dos tratamentos no planejamento sob consideração.

Desta forma,

$$E = \frac{\frac{2\sigma^2}{\bar{r}}}{\frac{v-1}{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}}} = \frac{v-1}{\bar{r} \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i^{-1}} = \frac{\delta}{\bar{r}} \quad (1.E.2)$$

onde δ é a média harmônica das raízes de C .

Como a média harmônica de um conjunto de quantidades positivas não pode exceder a média aritmética destas quantidades, temos:

$$\delta \leq \frac{\sum_{i=1}^{v-1} \theta_i}{v-1} = \frac{\text{tr}(C)}{v-1} = \frac{v\bar{r}-b}{v-1}$$

e então

$$E \leq \frac{v\bar{r}-b}{v-1} \quad (1.E.3)$$

Nós resumimos este resultado no seguinte:

TEOREMA (1.E.1) - O fator eficiência E de qualquer planejamento conexo satisfaz (1.E.3).

O sinal de igualdade em (1.E.3) é válido quando e somente quando $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{v-1}$, e neste caso, o planejamento conexo mais eficiente é o planejamento balanceado.

O teorema acima fornece uma propriedade de optimalidade do BIB sobre os demais planejamentos por Blocos Incompletos.

No planejamento BIB, para o qual, por (1.D.10),

$$\bar{V} = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2,$$

temos que

$$E = \frac{\lambda v}{rk} \quad (1.E.4)$$

1.F - CONSTRUÇÃO DE BIB

Dentre os vários métodos existentes para a construção de BIB's, vamos apresentar, de forma ilustrativa, o método que se utiliza de geometria finita, não só por ser um dos mais importantes, mas também bastante curioso.

1.F (a) - Das propriedades da Geometria Projetiva Finita, citadas no Apêndice, se os pontos da $PG(n,s)$ são identificados com os v símbolos e os (m) subespaços são identificados com os b conjuntos, podemos construir um planejamento BIB com parâmetros:

$$v = \frac{s^{n+1}-1}{s-1}; \quad b = \phi(n,m,s), \quad r = \phi(n-1,m-1,s) \quad (1.F.1)$$

$$k = \frac{s^{m+1}-1}{s-1}; \quad \lambda = \phi(n-2,m-2,s)$$

onde

$$\phi(n,m,s) = \frac{(s^{n+1}-1)(s^n-1)\dots(s^{n-m+1}-1)}{(s^{m+1}-1)(s^m-1)\dots(s-1)}$$

e $s = p^h$, onde p é um primo e $h \geq 1$ um inteiro.

Em particular, as seguintes séries de planejamentos BIB podem ser construídos:

Para $n = 2$, com $m = 1$

$$v = s^2 + s + 1; \quad b = s^2 + s + 1; \quad r = s + 1; \quad k = s + 1, \quad \lambda = 1 \quad (1.F.2)$$

Para $n = 3$, com $m = 1$

$$v = (s+1)(s^2+1); \quad b = (s^2+1)(s^2+s+1); \quad r = s^2+s+1$$
$$k = s+1 \quad e \quad \lambda = 1 \quad (1.F.3)$$

Para $n = 3$, com $m = 2$

$$v = (s+1)(s^2+1); \quad b = (s+1)(s^2+1); \quad r = s^2+s+1$$
$$k = s^2+s+1 \quad e \quad \lambda = s+1 \quad (1.F.4)$$

EXEMPLO (1.F.1) - Na série (1.F.2), com $s = 2$ temos a PG(2,2). De acordo com o Exemplo (E.1.1) do Apêndice, as 7 linhas tem equações

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_0 + x_1 = 0; \quad x_0 + x_2 = 0;$$

$$x_1 + x_2 = 0; \quad x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Denotando por ijk o ponto (i, j, k) , temos os conjuntos:

$$S_1 = \{001, 010, 011\}; \quad S_2 = \{001, 100, 101\};$$

$$S_3 = \{010, 100, 110\}; \quad S_4 = \{001, 110, 111\};$$

$$S_5 = \{010, 101, 111\}; \quad S_6 = \{011, 100, 111\},$$

$$e \quad S_7 = \{101, 110, 011\}$$

formam um planejamento BIB com parâmetros

$$v = 7; b = 7; r = 3; k = 3 \text{ e } \lambda = 1.$$

1.F.(b) - Deforma análoga, podemos construir um planejamento BIB através da Geometria Euclideana Finita $EG(n,s)$. Das propriedades desta geometria, citadas no Apêndice, se identificarmos os pontos da $EG(n,s)$ com os v símbolos e os (m) -subespaços com os b conjuntos, teremos um planejamento BIB com parâmetros

$$v = s^n; b = \phi(n,m,s) - \phi(n-1,m,s) = s^{n-m} \phi(n-1,m-1,s) \quad (1.F.5)$$

$$r = \phi(n-1,m-1,s); k = s^m \text{ e } \lambda = \phi(n-2,m-2,s)$$

e $s = p^h$, onde p é um primo e $h \geq 1$, um inteiro.

Em particular, as seguintes séries de planejamento BIB podem ser obtidas:

Para $n = 2$, com $m = 1$

$$v = s^2; b = s(s+1); r = s+1; k = s; \lambda = 1 \quad (1.F.6)$$

Para $n = 3$, com $m = 1$

$$v = s^3; b = s^2(s^2+s+1); r = s^2+s+1; k = s; \lambda = 1 \quad (1.F.7)$$

Para $n = 3$, com $m = 2$

$$v = s^3; b = s(s^2+s+1); r = s^2+s+1; k = s^2; \lambda = s+1 \quad (1.F.8)$$

EXEMPLO (1.F.2) - Utilizando a série (1.F.6) com $s = 3$, temos a $EG(2,3)$. De acordo com o Exemplo (E.2.1) do Apêndice, as 12 linhas tem equações dadas por:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_1 + x_2 = 0; x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_1 + x_2 = 2; x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_1 = 2; x_2 = 2; x_1 + x_2 = 4; x_1 + 2x_2 = 2$$

Denotado por ij o ponto (i, j) , temos que os conjuntos:

$$S_1 = \{00, 01, 02\}; S_2 = \{10, 11, 12\}; S_3 = \{20, 21, 22\};$$

$$S_4 = \{00, 10, 20\}; S_5 = \{01, 11, 21\}; S_6 = \{02, 12, 22\};$$

$$S_7 = \{00, 12, 21\}; S_8 = \{01, 10, 22\}; S_9 = \{02, 20, 11\};$$

$$S_{10} = \{00, 11, 22\}; S_{11} = \{10, 02, 21\}; S_{12} = \{20, 12, 11\},$$

formam um planejamento BIB com parâmetros

$$v = 9, b = 12, r = 4, k = 3 \text{ e } \lambda = 1.$$

A construção de planejamentos BIB por processos geométricos encontram referências em Bose (1939, 1959), Bose e Chakravarti (1966) e Yamamoto, Fukuda e Hamaka (1966). É importante notar que alguns planejamentos cujos parâmetros podem ser identificados com os planejamentos geométricos podem também ser construídos por outros métodos.

Vários outros métodos de construção de planejamentos BIB encontram referências em Hanani (1960, 1961, 1964), Yalavigi (1968), para métodos recursivos; Hall, Jr. (1967), Bose (1939, 1942), Bruck (1955), Elliot e Butson (1966), Maun (1967), Rao (1946), Sprott (1964) e Stanton & Sprott (1958), para o método dos Conjuntos Diferença.

Fisher e Yates listaram todas as combinações de pa

râmetros e suas soluções para planejamentos BIB no conjunto $v, b \leq 100$ e $r, k \leq 10$, em suas tabelas. Esta lista foi estendida por Rao (1961), incluindo os casos $r, k \leq 15$. Sprott (1962) incluiu os casos $r, k \leq 20$ e Raghavarao (1971) listou todas as combinações de parâmetros para os planejamentos existentes no conjunto $v, b \leq 100$ e $r, k \leq 15$, indicando o método de construção, dos quais ele apresenta grande parte.

Os problemas de existência e construção de planejamentos BIB tem despertado um considerável interesse de estatísticos e algebristas. As restrições nos parâmetros BIB conduziram-nos à investigação de outros tipos de planejamentos por Blocos Incompletos, notavelmente aos Planejamentos por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados, que serão discutidos no Capítulo seguinte.

CAPÍTULO II

PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS

PARCIALMENTE BALANCEADOS

Foi visto no Capítulo anterior que o Planejamento balanceado é o mais eficiente da classe dos Planejamentos por Blocos Incompletos. Mais ainda, na classes dos Planejamentos equiblocos e equireplicados, o BIB é o único balanceado e, portanto, o mais eficiente.

Infortunadamente, no entanto, o Planejamento BIB é possível apenas para um número limitado de casos, e, então, torna-se necessária a introdução de novos planejamentos.

A propriedade característica de um Planejamento BIB é que a variância das diferenças entre os estimadores dos e feitos de dois tratamentos quaisquer é a mesma para qualquer par de tratamentos, isto é, as comparações entre os efeitos dos tratamentos são feitas com a mesma precisão. Uma alternativa para manter um certo balanceamento é a determinação de um planejamento no qual essa propriedade característica seja convenientemente modificada.

Vejamos, a seguir, dois casos distintos, nos quais

verificaremos as consequências da impossibilidade da aplicação do planejamento ótimo, que é o BIB, e que, em alguns casos específicos as consequências podem não ser tão graves quanto imaginamos. Vamos supor fixados o número de tratamentos a comparar e o número de unidades homogêneas para cada bloco, o que, na prática não é de todo incomum. A adoção de valores numéricos pequenos para os parâmetros prende-se unicamente à facilidade de cálculo.

1º caso: Suponha que desejamos comparar $v=4$ tratamentos, através de um Planejamento BIB, em blocos de tamanho $k=2$. Do Teorema (1.D.1) temos que os parâmetros do BIB satisfazem:

$$i) \quad vr = bk \quad \text{e} \quad ii) \quad \lambda(v-1) = r(k-1)$$

Para os valores $v=4$ e $k=2$, temos

$$i) \quad 4r = 2b \quad \text{ou seja} \quad b = 2r$$

$$ii) \quad \lambda = \frac{r}{3} \quad \text{ou seja, } r \text{ deve ser múltiplo de } 3.$$

Vemos então que se fixamos um valor para r tal que $r \neq 3n$, $n=1,2,\dots$, não será possível a aplicação do BIB. Se, ao contrário, fixamos um valor alto para λ , isto implicará em um valor grande para r e maior ainda para b , o que pode não ser desejável. Além do que, um valor fixo de b

impõe também algumas restrições. É possível, pois, verificar que para a aplicação do BIB não temos muitos graus de liberdade na escolha dos parâmetros.

Com os valores fixos $v=4$ e $k=2$, vamos considerar em primeiro lugar que, para um dado caso específico, não há restrições quanto ao valor $r=3$. Neste caso é possível construir o BIB, o qual terá parâmetros: $v=4$, $b=6$, $k=2$, $r=3$ e $\lambda=1$.

Do Capítulo anterior, pela relação (1.D.9), os $\frac{v(v-1)}{2} = 6$ contrastes elementares serão estimados com variância

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 = \sigma^2$$

O fator eficiência deste planejamento, de acordo com a Definição (1.E.1) e a relação (1.E.4) é então:

$$E = \frac{\lambda v}{rk} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Vamos agora supor, que o problema em questão, além de fixar os valores $v=4$ e $k=2$ imponha o valor $r=4$. Para este valor de r não é possível construir o planejamento BIB. Teremos então um planejamento por Blocos Incompletos com parâmetros: $v=4$, $b=8$, $r=4$ e $k=2$.

Podemos construir um planejamento cuja matriz incidente é dada por:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad NN' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Desta forma, do Capítulo anterior, por (1.A.14) temos:

$$C = r'_{\mathbf{v}} \frac{1}{k} NN' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

De (1.A.15) e (1.A.17) temos que:

$$(C + \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbf{v}, \mathbf{v}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (C + \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbf{v}, \mathbf{v}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

E de acordo com (1.A.17) e (1.A.18), temos:

a) $V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_4) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4) = \frac{5}{6} \sigma^2$

b) $V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_4) = \frac{2}{3} \sigma^2$.

A eficiência para as comparações em (a), de acordo com (1.E.1) é dada por:

$$E_a = \frac{1/2}{5/6} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

A eficiência para as comparações em (b) de acordo com (1.E.1) é dada por:

$$E_b = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Para determinar a eficiência do planejamento podemos tomar a média ponderada das eficiências E_a e E_b com pesos dados pelo número de comparações consideradas em cada uma. Assim,

$$E = [4E_a + 2E_b] = \frac{1}{6}[4 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{4}] = \frac{78}{120} = 0,65.$$

Como é possível observar, o segundo planejamento não balanceado, não perdeu muito em eficiência com relação ao primeiro planejamento, que é balanceado. Mais ainda, mesmo com relação às comparações em (a) a diferença pode não ser significativa se levarmos em conta que houve um ganho em eficiência nas comparações em (b).

É interessante notar que, embora o segundo planejamento não seja balanceado em "strictu-sensu" podemos dizer que ele preserva um balanceamento em "latu-sensu", no sentido de que ele estabelece uma divisão dos tratamentos em dois grupos ou classes não disjuntas e mantém a igualdade das variâncias para as comparações em uma mesma classe.

Seria, portanto, aceitável a aplicação do segundo planejamento, no caso em que fosse fixado o valor $r=4$, sem falar na situação hipotética em que houvesse maior interes-

se do pesquisador nas comparações dos pares de tratamentos (1,3) e (2,4), dentro dos pares, que entre eles. Neste caso o planejamento poderia ser não só aceitável, como, talvez, preferível.

2º caso: Suponha agora, que desejamos comparar $v = 6$ tratamentos, distribuídos em blocos de tamanho $k = 4$. Se desejamos aplicar o BIB, temos novamente as relações:

$$i) \quad vr = bk \quad \text{e} \quad ii) \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

Para os valores $v = 6$ e $k = 4$, temos:

$$i) \quad br = 4b \Rightarrow b = \frac{3}{2} r \Rightarrow r \text{ deve ser par}$$

$$ii) \quad \lambda = \frac{3r}{5} \Rightarrow r \text{ deve ser múltiplo de } 5.$$

Vemos então que, para podemos aplicar o BIB, devemos ter um número mínimo de 10 repetições para cada tratamento.

Vamos agora impor um outro tipo de restrição, que não a de fixar valores para r ou λ . Vamos supor que o custo financeiro de cada repetição de qualquer dos tratamentos seja suficientemente alto a ponto de o pesquisador preferir sacrificar um pouco a eficiência do planejamento, a onerar demasiado custo de sua experiência. Um outro tipo de restrição que pode surgir na prática, é a não disponibilidade de um número elevado de unidades experimentais, a qual, de algum modo poderia estar implicitamente ligada à restrição cus

to.

Para restrições desse tipo, supondo que $r=10$ é suficientemente grande, qualquer valor de $r < 10$, tornaria impraticável o BIB.

Tal como fizemos no 1º caso, fixando os valores $v=6$ e $k=4$, considerando primeiramente o valor $r=10$, teremos um planejamento BIB com parâmetros: $v=6$, $b=15$, $k=r$, $r=10$ e $\lambda=6$.

Pela relação (1.D.9), os $\frac{v(v-1)}{2} = 15$ contrastes elementares serão estimados com variância:

$$V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2k}{\lambda v} \sigma^2 = \frac{2}{9} \sigma^2.$$

A eficiência do planejamento, de acordo com (1.E.4), é dado por:

$$E = \frac{\lambda v}{rk} = \frac{9}{10} = 0,90.$$

Consideremos agora que, sob a restrição custo, r deve ser o menor possível. Como r deve ser par, tomemos $r=2$. Neste caso, temos um planejamento por Blocos Incompletos com parâmetros:

$$v=6, b=3, r=2 \text{ e } k=4.$$

Com tais parâmetros podemos construir um planejamento cuja matriz incidente é dada por:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad NN' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, da relação (1.A.14), temos:

$$C = rIv - \frac{1}{K} NN' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

De (1.A.15) e (1.A.17), temos que:

$$(C + \frac{1}{4} \epsilon_{v,v}) = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (C + \frac{1}{4} \epsilon_{v,v})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

E de acordo com (1.A.7) e (1.A.8), temos:

- a) $V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) = V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3) = V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_5) = V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_6) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_3) =$
 $= V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_5) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_6) = V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_5) = V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_6) =$
 $= V(\hat{\alpha}_4 - \hat{\alpha}_5) = V(\hat{\alpha}_4 - \hat{\alpha}_6) = V(\hat{\alpha}_5 - \hat{\alpha}_6) = \frac{7}{6} \sigma^2.$
- b) $V(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_4) = V(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_4) = V(\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_4) = \sigma^2.$

A eficiência para as comparações em (a), de acordo com (1.E.1) é dada por:

$$E_a = \frac{1}{7/6} = \frac{6}{7} = 0,86$$

A eficiência para as comparações em (b), de acordo com (1.E.1), é dada por:

$$E_b = \frac{1}{1} = 1.$$

Tal como no 1º caso, a eficiência do planejamento pode ser tomada como:

$$E = \frac{1}{15} [12 \cdot \frac{6}{7} + 3] = \frac{93}{105} = 0,88.$$

Também aqui podemos observar que o segundo planejamento não perdeu muito em eficiência com relação ao primeiro, que é balanceado, apesar das variâncias dos contrastes terem aumentado substancialmente, o que não ocorreu no 1º caso. E ainda houve um ganho em eficiência para as comparações em (b), precisamente as comparações de um dos tratamentos com três dos demais. Desta forma, este segundo planejamento poderia ser aceitável, e até mesmo preferível em alguns casos práticos.

Este tipo de planejamento, que estabelece um balanceamento parcial, no caso dos Blocos Incompletos recebeu a denominação de Planejamento por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados (PBIB) e foi introduzido por Bose e Nair

(1939). Tal planejamento estabelece uma separação dos tratamentos em m classes, $m > 1$ e mantém a igualdade das variâncias para as comparações dentro de uma mesma classe.

2.A - DESCRIÇÃO DO PBIB

Damos a seguir a definição formal e original de PBIB, devida a Bose e Nair (1938), publicada em 1939 no *The Indian Journal of Statistics (Sankhiã)* nº 4:

DEFINIÇÃO (2.A.1) - Considere V variedades ou tratamentos, a serem arranjadas em b blocos com k caselas cada (cada casela pode receber um tratamento e duas caselas no mesmo bloco não podem receber o mesmo tratamento). Tal arranjo será chamado um Planejamento por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceado se as seguintes condições forem satisfeitas:

i) Cada tratamento é repetido r vezes.

ii) Com respeito a todo tratamento dado, os restantes formam classes de n_1, n_2, \dots, n_m cada, tal que todo tratamento da i -ésima classe ocorre λ_i vezes com o dado tratamento, os números λ_i e n_i sendo independentes do tratamento com o qual começamos. Sem perda de generalidade podemos supor $\lambda_1 > \lambda_{i+1}$. O conjunto de números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ são todos desiguais e podem incluir o zero, mas n_1, n_2, \dots, n_m devem ser todos não nulos e podem ser iguais ou diferentes.

Dois tratamentos ocorrendo juntos λ_i vezes, podem ser chamados i -ésimos associados. Cada um pertence, é claro, à i -ésima classe com respeito ao outro.

iii) Dados dois tratamentos quaisquer, os quais são i -ésimos associados, o número de tratamentos comuns com os j -ésimos associados de um e k -ésimos associados do outro, é independente do par de i -ésimos associados, com o qual começamos. Este número será denotado por p_{jk}^i e, é claro, $p_{jk}^i = p_{kj}^i$.

Os números $v, b, r, k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m; n_1, n_2, \dots, n_m$, podem ser chamados parâmetros do 1º tipo, e os números p_{jk}^i ($i, j, k=1, 2, \dots, m$) de parâmetros de 2º tipo, pertencentes ao nosso planejamento. Assim, temos $2m+4$ parâmetros do 1º tipo e $\frac{m^2(m+1)}{2}$ parâmetros do 2º tipo, pois $p_{jk}^i = p_{kj}^i$.

EXEMPLO (2.A.1) - O planejamento alternativo no 1º caso apresentado no início deste Capítulo é um PBIB com $m=2$ e parâmetros:

1º tipo: $v=4, b=8, r=4, k=2, n_1=1, n_2=2, \lambda_1=2, \lambda_2=1$.

2º tipo: $p_{11}^1 = p_{12}^1 = p_{21}^1 = p_{11}^2 = p_{22}^2 = 0, p_{21}^2 = p_{12}^2 = 1$ e $p_{22}^1 = 2$.

EXEMPLO (2.A.2) - O planejamento alternativo no 2º caso apresentado no início deste Capítulo é um PBIB com $m=2$ e parâmetros:

1º tipo: $v=6, b=3, r=2, k=4, n_1=1, n_2=4, \lambda_1=2, \lambda_2=1$.

2º tipo: $p_{11}^1 = p_{12}^1 = p_{21}^1 = p_{11}^2 = 0, p_{12}^2 = p_{21}^2 = 1, p_{22}^1 = 4$ e $p_{22}^2 = 2$.

2.B - RELAÇÕES ENTRE OS PARÂMETROS DO PBIB

Os parâmetros do PBIB satisfazem certas relações que passamos a enumerar.

2.B (a) - Relações entre parâmetros do 1º tipo

Da condição (i) da definição do PBIB, tiramos que:

$$vr = bk \quad (2.B.1)$$

Da condição (ii), como com respeito a todo tratamento os restantes $v-1$ estão em grupos de tamanhos n_1, n_2, \dots, n_m , tiramos que:

$$v-1 = n_1 + n_2 + \dots + n_m = \sum_{i=1}^m n_i \quad (2.B.2)$$

Consideremos um particular tratamento θ . Pela condição (i) θ ocorre em r blocos e em cada um desses blocos θ correm $k-1$ outros tratamentos. Portanto θ é membro de $r(k-1)$ pares. Mas, cada um dos n_i tratamentos que são i -ésimos associados com θ , ocorre conjuntamente com ele λ_i vezes. Portanto:

$$r(k-1) = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_m \lambda_m = \sum_{i=1}^m n_i \lambda_i \quad (2.B.3)$$

As relações (2.B.1), (2.B.2) e (2.B.3) mostram que somente $2m+1$ dos parâmetros do 1º tipo são independentes.

2.B (b) - Relações entre parâmetros do 1º e 2º tipo

Sejam θ e ϕ dois tratamentos que são i -ésimos associados. Então ϕ está contido no grupo dos n_i tratamentos que são i -ésimos associados a θ . Entre os restantes $n_i - 1$ tratamentos deste grupo existem exatamente p_{ik}^i tratamentos que são k -ésimos associados de ϕ . Portanto:

$$p_{i1}^i + p_{i2}^i + \dots + p_{im}^i = \sum_{k=1}^m p_{ik}^i = n_i - 1 \quad (2.B.4)$$

Agora, se $j \neq i$, entre os n_j tratamentos que são j -ésimos associados de θ , existem exatamente p_{jk}^i tratamentos que são k -ésimos associados de ϕ . Portanto:

$$p_{j1}^i + p_{j2}^i + \dots + p_{jm}^i = \sum_{k=1}^m p_{jk}^i = n_j \quad (n \neq j) \quad (2.B.5)$$

Juntando as relações (2.B.4) e (2.B.5) temos:

$$\sum_{k=1}^k p_{jk}^i = \begin{cases} n_j - 1, & i=j \\ n_j, & i \neq j \end{cases} \quad (2.B.6)$$

Consideremos agora o grupo G_i dos n_i tratamentos que são i -ésimos associados de um dado tratamento θ e o grupo G_j dos n_j tratamentos que são j -ésimos associados de θ . Todo tratamento pertencente a G_i terá exatamente p_{jk}^i k -ésimos associados entre os tratamentos do grupo G_j . Agora todo tratamento pertencente a G_j tem exatamente p_{ik}^j k -ésimos associados entre os tratamentos do grupo G_i . Portanto, o número

de pares de k-ésimos associados que podemos formar, tomando um tratamento do grupo G_i e outro do grupo G_j é, por um lado $n_i p_{jk}^i$ e por outro $n_j p_{ik}^j$. Portanto

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j \quad (2.B.7)$$

2.C - ANÁLISE DO PBIB

A análise do Planejamento por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados pode ser obtida da análise geral para Blocos Incompletos apresentada na seção A do Capítulo I. Vamos apenas estabelecer as expressões particulares para as variâncias dos contrastes elementares entre efeitos de tratamentos e para o fator eficiência definido em (1.E.1), restritas ao caso $m=2$.

Das equações Intra-bloco Ajustadas (1.A.11), tiramos que, como o PBIB é equireplicado e equibloco

$$\begin{aligned} Q &= C\hat{\alpha} = (rI_v - \frac{1}{k}NN')\hat{\alpha}, \text{ ou seja,} \\ Q_h &= r\hat{\alpha}_h - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b n_{hj} n_{ij} \hat{\alpha}_i = \\ &= r\hat{\alpha}_h - \frac{1}{k} \left[\sum_{\substack{i=j \\ i \neq j}}^v \sum_{j=1}^b n_{hj} n_{ij} \hat{\alpha}_i + r\hat{\alpha}_h \right], \text{ pois } \sum_{j=1}^b n_{hj}^2 = r. \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } \sum_{j=1}^b n_{hj} n_{ij} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{se } i \text{ e } h \text{ são primeiros associados} \\ \lambda_2, & \text{se } i \text{ e } h \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

E definindo:

$$S_1(\hat{\alpha}_h) = \sum_s \alpha_s, \text{ onde } s \text{ é o primeiro associado de } h$$

$$S_2(\hat{\alpha}_h) = \sum_{\mu} \hat{\alpha}_{\mu}, \text{ onde } \mu \text{ é o segundo associado de } h,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} Q_h &= r\hat{\alpha}_h - \frac{1}{k}(\lambda_1 S_1(\hat{\alpha}_h) + \lambda_2 S_2(\hat{\alpha}_h) + r\hat{\alpha}_h) = \\ &= (r - \frac{r}{k})\hat{\alpha}_h - \frac{1}{k}(\lambda_1 S_1(\hat{\alpha}_h) + \lambda_2 S_2(\hat{\alpha}_h)) = \\ &= \frac{r(k-1)}{k} \hat{\alpha}_h - \frac{1}{k}(\lambda_1 S_1(\hat{\alpha}_h) + \lambda_2 S_2(\hat{\alpha}_h)). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$kQ_h = r(k-1)\hat{\alpha}_h - \lambda_1 S_1(\hat{\alpha}_h) - \lambda_2 S_2(\hat{\alpha}_h) \quad (2.C.1)$$

Denotando agora:

$$S_1(Q_h) = \sum_s Q_s, \text{ onde } s \text{ é o primeiro associado de } h$$

$$S_2(Q_h) = \sum_{\mu} Q_{\mu}, \text{ onde } \mu \text{ é o segundo associado de } h.$$

Somando então (2.C.1) para todo s que é primeiro associado de h , temos:

$$\begin{aligned} kS_1(Q_h) &= [r(k-1)S_1(\hat{\alpha}_h)] - \lambda_1 [n_1 \hat{\alpha}_h + p_{11}^1 S_1(\hat{\alpha}_h) + p_{11}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)] \\ &\quad - \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(\hat{\alpha}_h) + p_{12}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)] \quad (2.C.2) \end{aligned}$$

O membro direito da igualdade acima, o qual denotaremos por $r(k-1)A - \lambda_1[B+C+D] - \lambda_2[E+F]$, foi obtido da seguinte maneira:

Quando somamos (2.C.1) para todo s que é primeiro

associado de h, as n_1 parcelas da soma resultam:

1) $A = \sum_s \hat{\alpha}_s$, onde s é primeiro associado de h, isto é

$$A = S_1(\hat{\alpha}_h);$$

2) $B+C+D = \sum_s S_1(\hat{\alpha}_s)$, onde s é primeiro associado de h.

Esta soma têm três parcelas:

$B = n_1 \hat{\alpha}_h$, pois h é primeiro associado de s, para todo s que é primeiro associado de h;

$C = p_{11}^1 S_1(\hat{\alpha}_h)$, pois todos os tratamentos que são primeiros associados de h e de s aparecem, cada um deles, p_{11}^1 vezes;

$D = p_{11}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)$, pois todos os tratamentos que são segundos associados com h e primeiros associados de s aparecem, cada um, p_{11}^2 vezes.

3) $E+F = \sum_s S_2(\hat{\alpha}_s)$, onde s é o primeiro associado de h.

Esta soma têm duas parcelas:

$E = p_{12}^1 S_1(\hat{\alpha}_h)$, pois todos os tratamentos que são primeiros associados de h e segundos associados de s aparecem, cada um deles, p_{12}^1 vezes;

$F = p_{12}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)$, pois todos os tratamentos que são segundos associados de h e segundos associados de s aparecem, cada um deles, p_{12}^2 vezes.

E somando (2.C.1) para todo μ que é segundo associado de h , obtemos:

$$kS_2(Q_h) = r(k-1)S_2(\hat{\alpha}_h) - \lambda_1 [p_{12}^1 S_1(\hat{\alpha}_h) + p_{12}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)] - \lambda_2 [n_2 \hat{\alpha}_h + p_{22}^1 S_1(\hat{\alpha}_h) + p_{22}^2 S_2(\hat{\alpha}_h)] \quad (2.C.3)$$

O membro direito da igualdade acima foi obtido utilizando argumento semelhante ao da igualdade (2.C.2).

Simplificando as relações (2.C.2) e (2.C.3), temos:

$$kS_1(Q_h) = -\lambda_1 n_1 \hat{\alpha}_h + S_1(\hat{\alpha}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^2] + S_2(\hat{\alpha}_h) [-\lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^2] \quad (2.C.4)$$

$$kS_2(Q_h) = -\lambda_2 n_2 \hat{\alpha}_h + S_1(\hat{\alpha}_h) [-\lambda_1 p_{12}^1 - \lambda_2 p_{22}^1] + S_2(\hat{\alpha}_h) [r(k-1) - \lambda_1 p_{12}^2 - \lambda_2 p_{22}^2] \quad (2.C.5)$$

Existem dois métodos para continuar a análise. Eles são devidos a Rao (1947) e Bose e Shimamoto (1952).

O método de Rao consiste em eliminar $S_2(\hat{\alpha}_h)$ somando as quantidades

$$\lambda_2 \sum_{i=1}^v \hat{\alpha}_i = \lambda_2 [\hat{\alpha}_h + S_1(\hat{\alpha}_h) + S_2(\hat{\alpha}_h)] \equiv 0$$

$$(\lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2) \sum_{i=1}^v \hat{\alpha}_i = (\lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2) (\hat{\alpha}_h + S_1(\hat{\alpha}_h) + S_2(\hat{\alpha}_h)) \equiv 0$$

as relações (2.C.2) e (2.C.5) respectivamente.

Apresentamos o método de Bose e Shimamoto.

Podemos escrever (2.C.4) e (2.C.5) na forma:

$$kS_1(Q_h) = -\lambda_1 n_1 \hat{\alpha}_h + a_{11} S_1(\hat{\alpha}_h) + a_{12} S_2(\hat{\alpha}_h) \quad (2.C.6)$$

$$kS_2(Q_h) = -\lambda_2 n_2 \hat{\alpha}_h + a_{21} S_1(\hat{\alpha}_h) + a_{22} S_2(\hat{\alpha}_h) \quad (2.C.7)$$

onde $a_{11} = r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1$; $a_{12} = -\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2$

$a_{21} = -\lambda_1 p_{12}^1 - \lambda_2 p_{22}^1$; $a_{22} = r(k-1) - \lambda_1 p_{12}^2 - \lambda_2 p_{22}^2$

Consideremos então a combinação linear

$$L_h = k^2 Q_h + c_1 k S_1(Q_h) + c_2 k S_2(Q_h)$$

Substituindo nas relações (2.C.1), (2.C.6) e (2.C.7),

temos:

$$L_h = rk(k-1)\hat{\alpha}_h - (c_1 \lambda_1 n_1 + c_2 \lambda_2 n_2)\hat{\alpha}_h + (a_{11}c_1 + a_{21}c_2 - \lambda_1 k)S_1(\hat{\alpha}_h) + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 - \lambda_2 k)S_2(\hat{\alpha}_h)$$

Devemos escolher c_1 e c_2 de modo que:

$$k^2 Q_h + c_1 k S_1(Q_h) + c_2 k S_2(Q_h) = rk(k-1)\hat{\alpha}_h$$

Isto significa que

$$-\lambda_1 n_1 c_1 - \lambda_2 n_2 c_2 = -\lambda_1 k + a_{11} c_1 + a_{21} c_2 = -\lambda_2 k + a_{12} c_1 + a_{22} c_2$$

fornecendo

$$\lambda_1 k = (a_{11} + \lambda_1 n_1) c_1 + (a_{21} + \lambda_2 n_2) c_2 \quad (2.C.8)$$

$$\lambda_2 k = (a_{12} + \lambda_1 n_1) c_1 + (a_{22} + \lambda_2 n_2) c_2$$

Resolvendo o sistema (2.C.8) por determinantes, te

mos que:

$$c_1 = \frac{D_1}{D} \quad e \quad c_2 = \frac{D_2}{D} \quad (2.C.9)$$

onde

$$\begin{cases} D = (a_{11} + \lambda_1 n_1)(a_{22} + \lambda_2 n_2) - (a_{12} + \lambda_1 n_1)(a_{21} + \lambda_2 n_2) \\ D_1 = \lambda_1 k(a_{22} + \lambda_2 n_2) - \lambda_2 k(a_{21} + \lambda_2 n_2) \\ D_2 = \lambda_2 k(a_{11} + \lambda_1 n_1) - \lambda_1 k(a_{12} + \lambda_1 n_1) \end{cases} \quad (2.C.10)$$

Denotando D por $k^2 \Delta$, temos, depois de alguma simplificação

$$k^2 \Delta = (rk - r + \lambda_1)(2k - r + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \{ r(k-1)(p_{12}^1 - p_{12}^2) + \lambda_2(p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2) \}$$

$$k \Delta c_1 = \lambda_1 (rk - r + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2)$$

$$k \Delta c_2 = \lambda_2 (rk - r + \lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2)$$

Podemos escrever as soluções como

$$\begin{aligned} rk(k-1) \tilde{\alpha}_h &= (k - c_1) k Q_h + (c_2 - c_1) S_2(Q_h) \\ &= (k - c_2) k Q_h + (c_1 - c_2) S_1(Q_h) \end{aligned} \quad (2.C.11)$$

A matriz solução P fornece:

$$P_{ii} = \frac{k}{r(k-1)}$$

e

$$P_{ih} = \begin{cases} \frac{c_1}{r(k-1)}, & \text{se } h \text{ e } i \text{ são } 1^{\text{os}} \text{ associados} \\ \frac{c_2}{r(k-1)}, & \text{se } h \text{ e } i \text{ são } 2^{\text{os}} \text{ associados} \end{cases}$$

onde P é uma inversa generalizada de C.

Desta forma, por (1.A.18), temos que

$$V(\hat{\alpha}_h - \hat{\alpha}_i) = (p_{hh} + p_{ii} - 2p_{hi})\sigma^2 = \begin{cases} \frac{2(k-c_1)}{r(k-1)}\sigma^2, & \text{se } h \text{ e } i \text{ são } 1^{\text{os}} \\ & \text{associados} \\ \frac{2(k-c_2)}{r(k-1)}\sigma^2, & \text{se } h \text{ e } i \text{ são } 2^{\text{os}} \\ & \text{associados} \end{cases} \quad (2.C.12)$$

E, a partir da Definição (1.E.1), temos:

Para as comparações do 1º tipo:

$$E_1 = \frac{\frac{2/r}{2(k-c_1)}}{\frac{r(k-1)}{r(k-1)}} = \frac{k-1}{k-c_2} \quad (2.C.13)$$

Para as comparações do 2º tipo:

$$E_2 = \frac{\frac{2/r}{2(k-c_2)}}{\frac{r(k-1)}{r(k-1)}} = \frac{k-1}{k-c_2} \quad (2.C.14)$$

Como temos $\frac{1}{2}vn_1$ comparações do 1º tipo e $\frac{1}{2}vn_2$ comparações do 2º tipo, o fator eficiência do planejamento, é dado por:

$$E = \frac{1}{v-1}[n_1E_1 + n_2E_2] = \frac{1}{v-1} \left[\frac{n_1(k-1)}{(k-c_1)} + \frac{n_2(k-2)}{(k-c_2)} \right] \quad (2.C.15)$$

EXEMPLO (2.C.1) - Para o Exemplo (2.A.1), temos que

$$a_{11} = 4; a_{21} = -2; a_{12} = -1 \text{ e } a_{22} = 4-2 = 2$$

$$D = (4+2)(2+2) - (-1+2)(-2+2) = 6 \times 4 = 24$$

$$D_1 = 4(2+2) - 2(-2+2) = 4 \times 4 = 8$$

$$D_2 = 2(4+2) - 4(-1+2) = 2 \times 6 - 4 = 8$$

Assim,

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\text{a) } V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2(k-c_2)}{r(k-1)} \sigma^2 = \frac{2(2-\frac{1}{3})}{4 \times 1} \sigma^2 = \frac{5/3}{2} \sigma^2 = \frac{5}{6} \sigma^2,$$

i e j , 2^{os} associados

$$\text{b) } V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2(k-c_1)}{r(k-1)} \sigma^2 = \frac{2(2-\frac{2}{3})}{4 \times 1} \sigma^2 = \frac{4/3}{2} \sigma^2 = \frac{2}{3} \sigma^2,$$

i e j , 1^{os} associados.

$$E_2 = \frac{k-1}{k-c_2} = \frac{1}{2-1/3} = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$E_1 = \frac{k-1}{k-c_1} = \frac{1}{2-2/3} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$E = \frac{1}{3} \left[1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{5} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{15+24}{20} \right] = \frac{39}{60} = 0,65$$

EXEMPLO (2.C.2) - Para o Exemplo (2.A.2), temos que

$$a_{11} = 6; a_{12} = -1; a_{21} = -4; a_{22} = 2$$

$$D = (6+2)(2+4) - (-1+2)(-4+4) = 8 \times 6 = 48$$

$$D_1 = 8(2+4) - 4(-4+4) = 8 \times 6 = 48$$

$$D_2 = 4(6+2) - 8(-1+2) = 4 \times 8 - 8 = 24$$

Assim,

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{48}{48} = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$a) V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2(k-c_2)}{r(k-1)} \sigma^2 = \frac{2(4-\frac{1}{2})}{2 \times 3} \sigma^2 = \frac{7}{6} \sigma^2, \text{ i e j, segundos associados.}$$

$$b) V(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j) = \frac{2(k-c_1)}{r(k-1)} \sigma^2 = \frac{2(4-1)}{2(4-1)} \sigma^2 = \sigma^2, \text{ i e j, primeiros associados.}$$

$$E_2 = \frac{k-1}{k-c_2} = \frac{4-1}{4-1/2} = \frac{3}{7/2} = \frac{6}{7} = 0,86$$

$$E_1 = \frac{k-1}{k-c_1} = \frac{4-1}{4-1} = 1$$

$$E = \frac{1}{5} \left[1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{6}{7} \right] = \frac{1}{5} \left[\frac{31}{7} \right] = \frac{31}{35} = 0,88.$$

2.D - PLANEJAMENTOS POR BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS BASEADOS EM CONFIGURAÇÕES GEOMÉTRICAS

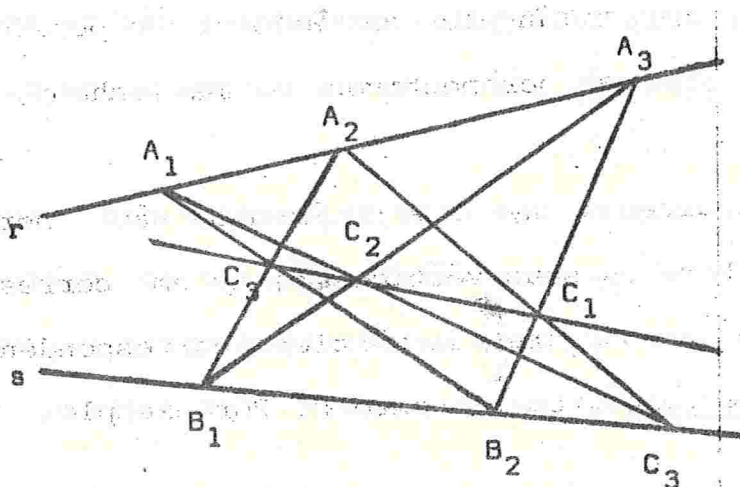
Os Planejamentos por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados podem ser construídos através de vários métodos, um dos quais apresentaremos no Capítulo seguinte. Mas, alguns planejamentos interessantes podem ser obtidos através de algumas configurações geométricas simples. Apresentamos aqui algumas delas, como ilustração.

1. Da Geometria Projetiva temos o seguinte Teorema de Pappus:

"Num plano projetivo, sejam A_1, A_2 e A_3 pontos distintos de uma linha r e B_1, B_2 e B_3 pontos distintos de ou-

tra linha s . Então os pontos $C_1 = A_2B_3 \cdot A_2B_3$, $C_2 = A_1B_3 \cdot A_3B_1$ e $C_3 = A_1B_2 \cdot A_2B_1$ estão numa mesma linha". A notação $A_iB_j \cdot A_jB_i$ significa a interseção das linhas A_iB_j e A_jB_i .

Este importante teorema fornece a seguinte configuração:



Para a configuração acima, identificando os pontos com os tratamentos e as linhas com os blocos, teremos o seguinte PBIB:

$$S_1 = (A_1, A_2, A_3); S_2 = (A_1, C_2, B_3); S_3 = (A_1, C_3, B_2)$$

$$S_4 = (A_2, C_3, B_1); S_5 = (A_2, C_1, B_3); S_6 = (A_3, C_2, B_1)$$

$$S_7 = (A_3, C_1, B_2); S_8 = (C_1, C_2, C_3); S_9 = (B_1, B_2, B_3)$$

O qual tem parâmetros dados por:

$$v=9, b=9, r=3, k=3, \lambda_1=1, \lambda_2=0, n_1=6 \text{ e } n_2=2$$

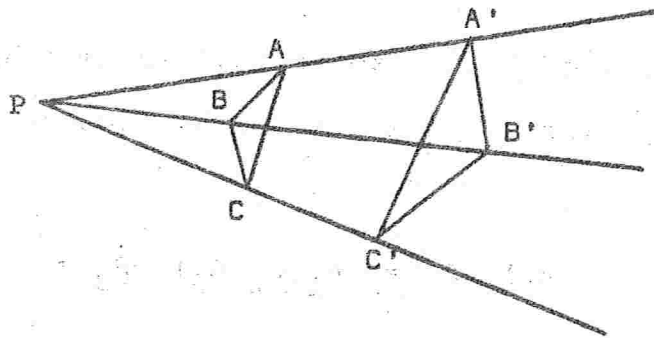
$$p_{11}^1=3, p_{12}^1=p_{21}^1=2, p_{22}^1=p_{12}^2=p_{21}^2=0, p_{11}^2=6 \text{ e } p_{22}^2=1,$$

onde o grupo dos primeiros associados de um tratamento é definido como o conjunto dos pontos que estão na mesma linha que o tratamento considerado.

2. Ainda da Geometria Projetiva, temos o seguinte Teorema dos Dois Triângulos de Desargues:

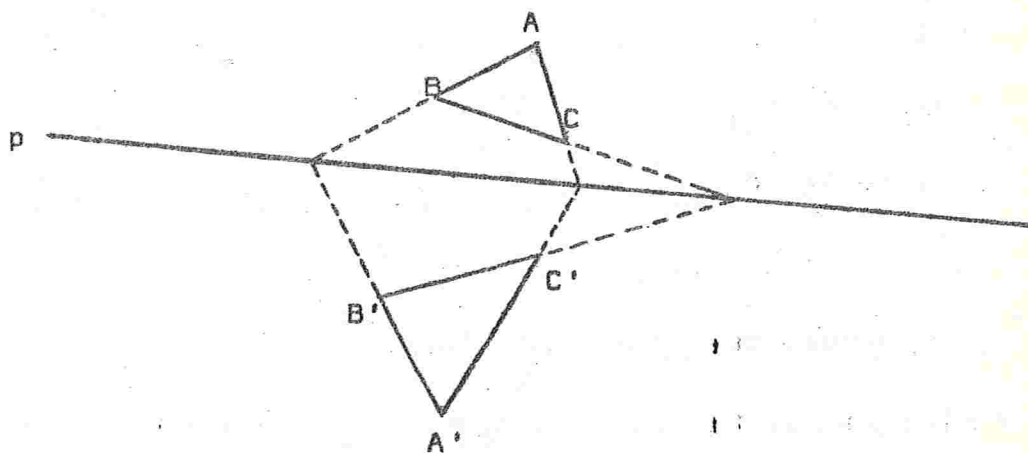
"Se dois triângulos coplanares são perspectivos de um ponto P , eles são perspectivos de uma linha p , e inversamente."

Nós dizemos que dois triângulos são perspectivos de um ponto P se os seus vértices estão em correspondência 1-1 de modo que os pares de vértices correspondentes estão em linhas que concorrem no ponto P . Por exemplo:



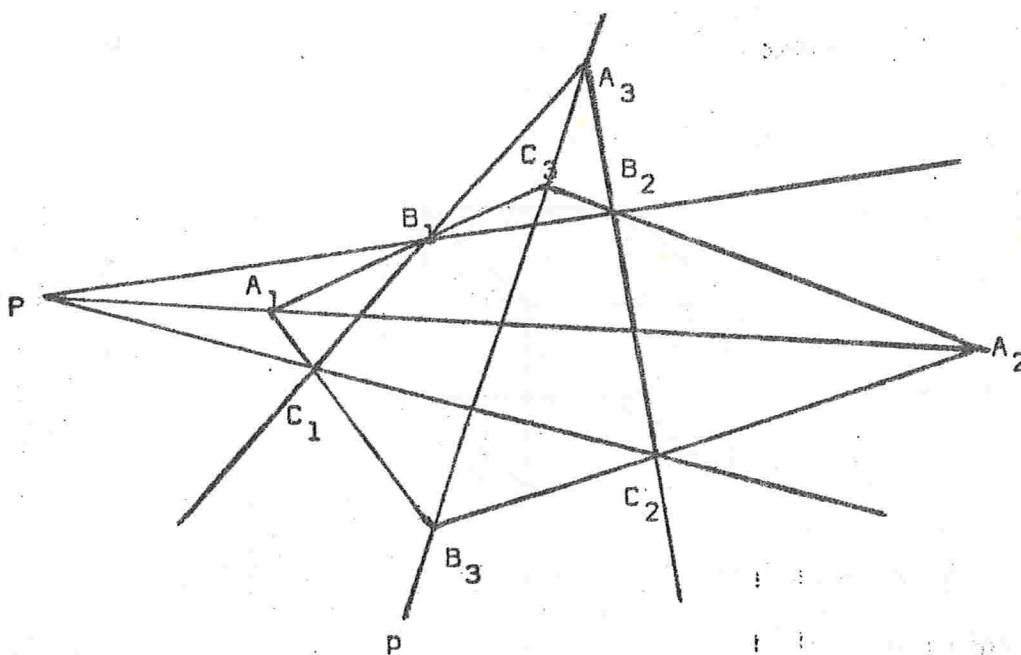
Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos do ponto P , o qual é chamado de centro de perspectividade.

Nós dizemos que dois triângulos são perspectivos de uma linha p se os seus lados estão em correspondência 1-1 de modo que os pares de lados correspondentes se interceptem na linha p . Por exemplo:



Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos da linha p , a qual é chamada de eixo de perspectividade.

O Teorema de Desargues nos fornece a seguinte configuração:



Para a configuração acima, identificando com os tratamentos e as linhas com os blocos, temos o seguinte PBIB:

$$\begin{aligned} S_1 &= (P, A_1, A_2); S_2 = (P, B_1, B_2); S_3 = (P, C_1, C_2); \\ S_4 &= (A_1, B_1, C_3); S_5 = (A_1, C_1, B_3); S_6 = (A_2, B_2, C_3); \\ S_7 &= (A_2, C_2, B_3); S_8 = (A_3, B_1, C_1); S_9 = (A_3, B_2, C_2) \text{ e} \\ S_{10} &= (A_3, B_3, C_3). \end{aligned}$$

O qual tem parâmetros dados por:

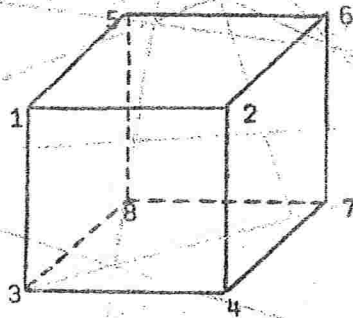
$$v = 10, b = 10, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, n_1 = 6 \text{ e } n_2 = 3$$

$$p_{11}^1 = 3; p_{12}^1 = p_{21}^1 = p_{12}^2 = p_{21}^2 = 2, p_{22}^1 = 1, p_{11}^2 = 4 \text{ e } p_{22}^2 = 0$$

onde o grupo dos primeiros associados de um tratamento é definido como o conjunto dos pontos que estão na mesma linha que o tratamento dado.

3. Consideremos o hexaedro regular da figura abaixo:

xo:



Na figura acima, identificando os vértices com os tratamentos e as faces com os blocos, obtemos o seguinte PBIB:

$$S_1 = (1, 2, 3, 4); S_2 = (1, 2, 5, 6); S_3 = (1, 3, 5, 8);$$

$$S_4 = (2, 4, 6, 7); S_5 = (3, 4, 7, 8) \text{ e } S_6 = (5, 6, 7, 8).$$

O qual tem parâmetros dados por:

$$v=8; b=6; a=3; k=4; \lambda_1=2; n_1=3; \lambda_2=1; n_2=3; \lambda_3=0; n_3=1$$

e

$$p_{11}^1=p_{13}^1=p_{22}^1=p_{31}^1=p_{33}^1=p_{12}^2=p_{21}^2=p_{23}^2=p_{32}^2=p_{11}^3=p_{13}^3=p_{22}^3=p_{23}^3=p_{31}^3=$$

$$p_{32}^3=p_{33}^3=0; p_{23}^1=p_{32}^1=p_{13}^2=p_{31}^2=1 \text{ e } p_{12}^1=p_{21}^1=p_{11}^2=p_{22}^2=2.$$

onde o grupo dos primeiros associados do tratamento i é o grupo dos vértices que estão na mesma aresta que i e o grupo dos segundos associados de i é o grupo dos vértices que estão na mesma diagonal de face que o tratamento i .

Ainda baseado no hexaedro, tomando como blocos cada grupo de arestas convergentes, obtemos o seguinte PBIB:

$$S_1 = (1, 2, 3, 5); S_2 = (2, 1, 4, 6); S_3 = (3, 1, 4, 8);$$

$$S_4 = (4, 2, 3, 7); S_5 = (5, 1, 6, 8); S_6 = (6, 5, 7, 8);$$

$$S_7 = (7, 4, 6, 8) \text{ e } S_8 = (8, 3, 5, 7).$$

Os parâmetros são dados por:

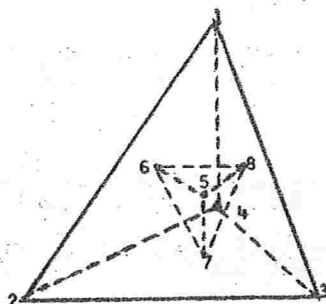
$$v=8, b=8, r=4, k=4, \lambda_1=2, n_1=6, \lambda_2=0, n_2=1$$

$$p_{11}^1=4, p_{12}^1=p_{21}^1=1, p_{22}^2=p_{12}^2=p_{21}^2=p_{22}^2=0 \text{ e } p_{11}^2=6$$

O grupo dos primeiros associados do tratamento i é o grupo dos vértices que estão na mesma face que i .

O mesmo PBIB acima pode ser obtido da figura a seguir, a qual representa dois tetraedros, um inscrito no ou-

tro.



Cada bloco é formado por cada face de um tetraedro e o vértice oposto do outro. Dois tratamentos são primeiros associados se não estão opostos em relação a uma face de um dos tetraedros.

Podemos observar que as configurações acima nos permitem esquematizar as associações entre tratamentos. Essa idéia de montar "esquemas de associação" para os tratamentos de modo a obter um planejamento PBIB é devida a Bose e Shimamoto (1952). O conceito de Esquemas de Associação é objeto de nossa discussão no Capítulo III.

CAPÍTULO III

ESQUEMAS DE ASSOCIAÇÃO

Os planejamentos parcialmente balanceados foram introduzidos pela primeira vez por R.C. Bose em colaboração com Nair (1939), como uma extensão dos Blocos Incompletos Balanceados (BIB) (Yates, 1936; Fisher e Yates 1938; Bose, 1939). Desde então, muito trabalho teórico tem sido desenvolvido a respeito e tais planejamentos têm encontrado vasta aplicação em problemas práticos. O trabalho inicial foi desenvolvido por Bose e Nair quando eram membros do Indian Statistical Institute, fundado pelo Professor P.C. Mahalanobis, ele próprio particularmente interessado na discussão destes planejamentos. A definição de PBIB foi ligeiramente modificada por Nair e Rao (1942), e foram incluídos alguns casos especiais. Um novo passo foi dado por Bose e Shimamoto em 1952 com a introdução do conceito de esquemas de associação, baseando a definição de PBIB nestes esquemas.

Passemos então a um estudo sucinto dos esquemas e aos PBIB's por eles gerados.

3.A - ESQUEMAS DE ASSOCIAÇÃO E PBIB'S GERADOS

DEFINIÇÃO (3.A.1) - Dados v tratamentos, denotados pelos números $1, 2, \dots, v$, uma relação entre eles é dito um esquema de associação com m classes, se satisfaz as seguintes condições:

- a) Quaisquer dois tratamentos são primeiros ou segundos ou ... m -ésimos associados, a relação de associação sendo simétrica, isto é, se o tratamento α é i -ésimo associado do tratamento β , então β é i -ésimo associado de α .
- b) Cada tratamento α tem n_i i -ésimos associados, o número n_i sendo independente de α .
- c) Se quaisquer dois tratamentos α e β são i -ésimos associados, então o número de tratamentos os quais são j -ésimos associados com α e k -ésimos associados com β é p_{jk}^i e é independente do par de i -ésimos associados α e β .

Os números v, n_i, p_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) são os parâmetros do Esquema de Associação.

EXEMPLO (3.A.1) - As configurações geométricas apresentadas na seção 2.D fornecem relações entre seus pontos que satisfazem a definição de Esquemas de Associação.

DEFINIÇÃO (3.A.2) - Dado um esquema de Associação com m classes, teremos um PBIB com r repetições e b blocos, baseado

neste Esquema, se podemos arranjar os v tratamentos em blocos de maneira que:

- a) Cada bloco contenha k tratamentos distintos.
- b) Cada tratamento está contido em r blocos.
- c) Se dois tratamentos α e β são i -ésimos associados, então eles ocorrem juntos em λ_i blocos, o número λ_i sendo independente do par de i -ésimos associados α e β , ($i=1, 2, \dots, m$).

Para um PBIB baseado em qualquer Esquema de Associação, os parâmetros do esquema serão chamados de parâmetros do 1º tipo e os parâmetros adicionais b , k , r e λ_i serão chamados de parâmetros do 2º tipo. Se o esquema tem m classes o PBIB será denotado por PBIB(m).

As relações entre os parâmetros do 1º e 2º tipo aqui definidos, são as mesmas já estabelecidas na seção 2.B.

A definição (3.A.1) para Esquemas de Associação não é minimal, isto é, a constância de alguns parâmetros pode ser deduzida a partir de outros. Para Esquemas de Associação com duas classes, Bose e Clatworthy (1955) provaram os seguintes lemas:

LEMA (3.A.1) - Considere uma relação de associação entre v tratamentos, satisfazendo as condições:

- a) Quaisquer dois tratamentos são primeiros ou segundos associados.

- b) Cada tratamento tem n_1 primeiros associados e n_2 segundos associados.
- c) Para qualquer par de tratamentos, os quais são primeiros associados, o número p_{11}^1 de tratamentos comuns com os primeiros associados de um e primeiros associados de outro é independente do par de tratamentos inicial.

Então, para todo par de primeiros associados entre os v tratamentos:

$$p_{12}^1, p_{21}^1 \text{ e } p_{22}^1 \text{ são constantes e } p_{12}^1 = p_{21}^1.$$

LEMA (3.A.2) - Seja uma relação de associação entre v tratamentos, satisfazendo as condições (a) e (b) do Lema (2.A.1) e a condição:

- c) Para qualquer par de tratamentos, os quais são segundos associados, o número p_{11}^2 de tratamentos que são comuns com os primeiros associados de um e primeiros associados do outro é independente do par de tratamentos inicial.

Então, para todo par de segundos associados entre os v tratamentos, os números:

$$p_{12}^2, p_{21}^2 \text{ e } p_{22}^2 \text{ são constantes e } p_{12}^2 = p_{21}^2.$$

Nenhum dos Lemas precedentes implica no outro. Como contra-exemplo consideremos a relação de associação em-

tre os $v = 7$ tratamentos:

<u>TRATAMENTOS</u>	<u>1^{os} ASSOCIADOS</u>	<u>2^{os} ASSOCIADOS</u>
1	2, 4, 5, 7	3, 6
2	1, 3, 5, 6	4, 7
3	2, 4, 6, 7	1, 5
4	1, 3, 5, 7	2, 6
5	1, 2, 4, 6	3, 7
6	2, 3, 5, 7	1, 4
7	1, 3, 4, 6	2, 5

Para a relação acima $n_1 = 4$ e $n_2 = 2$. Para qualquer par de tratamentos α e β os quais são **segundos** associados temos que $p_{11}^1 = 3$, independentemente de α e β . Logo, o Lema (2.A.2) é satisfeito com $p_{12}^2 = p_{21}^2 = 1$ e $p_{22}^2 = 0$. Entretanto, para quaisquer dois tratamentos α e β os quais são **primeiros** associados, temos que p_{11}^1 é 1 ou 2.

Grande parte das pesquisas sobre esquemas de associação estão relacionadas com os planejamentos com duas classes de associação PBIB(2). Extensas coleções de planejamentos PBIB(2) foram obtidas por Bose e Shimamoto (1952) e por Bose, Clatworthy e Shrikhande (1954).

Em vista dos Lemas (2.A.1) e (2.A.2), a condição (2) da Definição (3.A.1) pode ser substituída, para o caso particular $m = 2$ pela condição:

(c') Se qualquer par de tratamentos α e β são i -ésimos

associados, o número p_{11}^i ($i=1,2$) de tratamentos que são comuns com os primeiros associados de α e primeiros associados de β é independente do par de i -ésimos associados α e β .

As relações entre os parâmetros podem ser escritas na forma mais simplificada:

$$n_1 + n_2 = v - 1; \quad n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = r(k-1); \quad p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1; \quad p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1 - 1$$

$$p_{21}^1 + p_{22}^1 = n_2; \quad p_{21}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1; \quad n_1 p_{12}^1 = n_2 p_{11}^2; \quad n_1 p_{22}^1 = n_2 p_{22}^2$$

os parâmetros p_{jk}^i ($i, j, k=1,2$) podem ser convenientemente escritos na forma de matrizes simétricas:

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

3.B - MATRIZES DE ASSOCIAÇÃO - SUAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

E APLICAÇÕES

Para um Esquema de Associação com m classes, podemos definir m matrizes $v \times v$:

$$B_i = b_{\alpha\beta}^i, \quad \text{onde } b_{\alpha\beta}^i = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são } i\text{-ésimos} \\ & \text{associados} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.B.1)$$

O elemento $b_{\alpha\beta}^i$ pertence à α -ésima linha e β -ésima coluna de B_i . Podemos verificar que as matrizes B_i ($i=1,2,\dots$

...,m) são simétricas e a soma dos elementos de cada linha ou coluna é igual a n_i .

Considerando que cada tratamento é seu próprio 0-ésimo associado e de nenhum outro tratamento, temos que:

$$B_0 = I_v, n_0 = 1, p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}, p_{0k}^i = \lambda_{ik}, \lambda_0 = r \quad (3.B.2)$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

E as relações paramétricas em 2.B podem ser escritas:

$$\sum_{i=0}^m n_i = v \quad (3.B.3)$$

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk \quad (3.B.4)$$

$$\sum_{k=0}^m p_{jk}^i = n_j \quad (3.B.5)$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^i \quad (3.B.6)$$

As matrizes $B_0, B_1, B_2, \dots, B_m$ são chamadas de matrizes de associação dos tratamentos, do esquema de associação.

Dados dois tratamentos α e β , eles são primeiros, segundos, ou ..., m-ésimos associados e portanto somente um dos elementos $b_{\alpha\beta}^0, b_{\alpha\beta}^1, \dots, b_{\alpha\beta}^m$ é igual a 1. Desta forma,

$$\sum_{i=0}^m B_i = \epsilon_{v,v} \quad (3.B.7)$$

Além disso, pelo mesmo fato,

$$\sum_{i=0}^m c_i B_i = 0_{v,v} \quad (3.B.8)$$

se e somente se $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$.

Portanto, as funções lineares de $B_0, B_1, B_2, \dots, B_m$ formam um espaço vetorial de dimensão $m+1$ com base (B_0, B_1, \dots, B_m) .

Dados dois tratamentos α e β , os quais são i -ésimos associados, o elemento da α -ésima linha e β -ésima coluna de $B_j B_k$ pode ser interpretado como o número de símbolos comuns com os j -ésimos associados de α e k -ésimos associados de β . Desta forma, temos que:

$$B_j B_k = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i B_i, \quad j, k=0, 1, 2, \dots, m \quad (3.B.9)$$

Isto significa que a operação de multiplicação é fechada no conjunto de funções lineares de B_0, B_1, \dots, B_m . Como tal conjunto tem estrutura de grupo comutativo com a operação de adição, temos que o conjunto das funções lineares de B_0, B_1, \dots, B_m tem estrutura de um anel com elemento unida de, a qual será uma álgebra linear associativa se os coeficientes das funções lineares forem elementos de um corpo.

A multiplicação das matrizes B_i é comutativa, pois

$$\begin{aligned}
 B_k B_j &= B'_k B'_j = (B_j B_k)' = \left(\sum_{i=0}^m p_{jk}^i B_i \right)' = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i B_i' = \\
 &= \sum_{i=0}^m p_{jk}^i B_i = B_j B_k \quad (3.B.10)
 \end{aligned}$$

Como consequência de (3.B.10), temos:

$$p_{jk}^i = p_{kj}^i.$$

Como a multiplicação das matrizes B_i é associativa, temos:

$$B_i (B_j B_k) = \sum_{u,t} p_{jk}^u p_{iu}^t B_t = (B_i B_j) B_k = \sum_{u,t} p_{ij}^u p_{uk}^t B_t \quad (3.B.11)$$

A independência de B_0, B_1, \dots, B_m implica que:

$$\sum_u p_{jk}^u p_{iu}^t = \sum_u p_{ij}^u p_{uk}^t \quad (3.B.12)$$

Definamos agora as matrizes Π_i por:

$$\Pi_i = (p_{ji}^k) = \begin{bmatrix} p_{0i}^0 & p_{0i}^1 & \cdots & p_{0i}^m \\ p_{1i}^0 & p_{1i}^1 & \cdots & p_{1i}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{mi}^0 & p_{mi}^1 & \cdots & p_{mi}^m \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (3.B.13)$$

Em termos de matrizes Π_i , a relação (3.B.12) implica que:

$$\Pi_j \Pi_k = \sum_{i=0}^m p_{jk}^i \Pi_i \quad (3.B.14)$$

Assim, as matrizes Π_i multiplicam da mesma maneira que as matrizes B_i . Podemos verificar facilmente que $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_m$ são linearmente independentes e portanto formam uma base para o espaço vetorial de dimensão $m+1$, combinando da forma que as matrizes B_i , tanto na adição como na multiplicação. Isto estabelece uma representação regular em matrizes $(m+1) \times (m+1)$ da álgebra das matrizes B_i , as quais são matrizes $v \times v$.

Desta representação regular podemos obter o seguinte importante resultado:

TEOREMA (3.B.1) - As raízes características distintas de

$$B = \sum_{i=0}^m c_i B_i \quad (3.B.15)$$

e as raízes características distintas de

$$\Pi = \sum_{i=0}^m c_i \Pi_i \quad (3.B.16)$$

são as mesmas.

PROVA - Sejam $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ os polinômios minimais de B e Π , respectivamente, os quais são mônicos. O termo $f(B)$ pode ser expresso como

$$f(B) = \sum_{i=0}^m d_i B_i \quad (3.B.17)$$

cujas representação em matrizes $(m+1) \times (m+1)$ é dada por:

$$f(\Pi) = \sum_{i=0}^m d_i \Pi_i \quad (3.B.18)$$

Como $f(\lambda)$ é o polinômio minimal de B , temos que $f(B) = 0_{v,v}$, o que nos fornece $d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0$ e portanto $f(\Pi) = 0_{v,v}$. Como $f(\Pi) = 0$ e $g(\lambda)$ é o polinômio minimal de Π , concluímos que $g(\lambda)$ divide $f(\lambda)$.

De maneira análoga, podemos mostrar que $f(\lambda)$ divide $g(\lambda)$. Como $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ são polinômios mônicos, temos que $f(\lambda) = g(\lambda)$, e isto garante que as raízes características distintas de B e Π são as mesmas.

Como corolário imediato do Teorema acima, temos:

COROLÁRIO (3.B.1) - Se N é a matriz incidente de um PBIB, então as raízes características distintas de

$$NN' = rB_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_m B_m \quad (3.B.19)$$

e

$$\Pi = r\Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_m \Pi_m \quad (3.B.20)$$

são as mesmas.

Este resultado foi primeiro obtido por Connor e Clatworthy (1954) por um método longo. A presente forma é devida a Bose e Mesner (1959). Connor e Clatworthy também determinaram as raízes características de NN' e suas multiplicidades para o caso $m=2$. As três raízes distintas de NN' são:

$$\theta_0 = rk, \theta_i = r^{-\frac{1}{2}}\{(\lambda_i - \lambda_2)[-\gamma + (-1)^i \sqrt{\Delta}] + (\lambda_1 + \lambda_2)\} \quad (3.B.21)$$

$i=1,2$

onde

$$\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1, \beta = p_{12}^1 + p_{12}^2, \Delta = \gamma^2 + 2\beta + 1 \quad (3.B.22)$$

Sejam α_0, α_1 e α_2 as multiplicidades das raízes θ_0, θ_1 e θ_2 , respectivamente, de NN' . Se o planejamento é conexo, então θ_0 é uma raiz simples e portanto $\alpha_0 = 1$. As outras multiplicidades satisfazem:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = v - 1$$

e

$$(3.B.23)$$

$$\text{tr}(NN') = vr = rk + \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2$$

Resolvendo o sistema de duas equações acima, temos que:

$$\alpha_i = \frac{n_1 + n_2}{2} + (-1)^i \left[\frac{(n_1 + n_2) + \gamma(n_1 + n_2)}{2\sqrt{\Delta}} \right], \quad i=1,2 \quad (3.B.24)$$

É interessante notar que as multiplicidades dependem somente dos parâmetros do esquema de associação com m classes, e não dos parâmetros do PBIB. Além disso, como as multiplicidades são números inteiros, isto impõe uma condição necessária para a existência de algum esquema de associação com m -classes.

3.C - CLASSIFICAÇÃO DOS PBIB(2)

Bose e Shimamoto (1952) classificaram todos os PBIB(2) conhecidos em cinco tipos. Os PBIB(2) simples são aqueles para os quais λ_1 ou λ_2 são nulos. Os outros correspondem a um dos seguintes esquemas de associação. Grupo Divisível (GD), Triangular, Quadrado Latino e Cíclico, os quais podem também gerar planejamentos simples.

Vamos a seguir, descrever e exemplificar cada um dos quatro últimos tipos de esquemas e alguns PBIB(2) gerados, com propósito puramente ilustrativo e não exaustivo.

3.C (a) - Esquema de Associação por Grupo Divisível (GD)

Neste esquema existem $v = m \cdot n$ tratamentos, os quais são divididos em m grupos de n tratamentos cada. Dois tratamentos pertencentes ao mesmo grupo são primeiros associados e dois tratamentos são segundos associados se pertencem a grupos diferentes. Tal esquema pode ser exibido escrevendo-se os $m \cdot n$ tratamentos na forma de um arranjo retangular no qual os tratamentos de um mesmo grupo ocupam a mesma linha.

Podemos ver facilmente que os parâmetros do esquema de associação assim obtidos são:

$$v = m \cdot n, n_1 = n - 1 \text{ e } n_2 = n(m - 1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix} \quad (3.C.1)$$

Diversas séries de PBIB's podem ser obtidas a partir deste tipo de esquema de associação. Pelas relações (3.B.21) e (3.B.24) temos que as raízes características de NN' são

$$\theta_0 = rk; \theta_1 = rk - \lambda_2 v \text{ e } \theta_2 = r - \lambda_1$$

com multiplicidades

(3.B.2)

$$\alpha_0 = 1; \alpha_1 = m-1 \text{ e } \alpha_2 = m(n-1)$$

EXEMPLO (3.C.1) - Para $m=4$ e $n=2$, denotando os tratamentos por $1, 2, \dots, 8$, o correspondente esquema GD pode ser exibido como:

- 1 5 O primeiro associado do tratamen-
- 2 6 to 1 é o tratamento 5 e os segun-
- 3 7 dos associados são os tratamentos
- 4 8 2, 3, 4, 6, 7 e 8.

Um PBIB trivial baseado neste esquema pode ser obtido tomando-se para blocos as combinações das linhas duas a duas. Tal PBIB, dado por:

$$S_1 = (1, 5, 2, 6); S_2 = (1, 5, 3, 7); S_3 = (1, 5, 4, 8);$$

$$S_4 = (2, 6, 3, 7); S_5 = (2, 6, 4, 8) \text{ e } S_6 = (3, 7, 4, 8),$$

tem parâmetros do 2º tipo dados por:

$$b=6, r=3, k=4, \lambda_1=3 \text{ e } \lambda_2=1.$$

Dependendo dos valores das raízes características de NN' , os Planejamentos por Grupo Divisível foram subdivididos em três classes por Bose e Connor (1952):

1. Singulares, se $r-\lambda_1=0$;
2. Semiregulares, se $r-\lambda_1 > 0$ e $rk-\lambda_2=0$
3. Regulares, se $r-\lambda_1 > 0$ e $rk-v\lambda_2 > 0$.

3.C (c) - Esquema de Associação Triangular

Para este esquema, tomamos um quadrado $m \times m$ e preenchemos as $\frac{m(m-1)}{2}$ posições acima da diagonal principal com tratamentos diferentes, tomados em qualquer ordem. As posições da diagonal principal são deixadas em branco, enquanto que as posições abaixo desta diagonal são preenchidas de modo que o esquema seja simétrico em relação à diagonal. Dois tratamentos na mesma linha ou coluna são primeiros associados e segundos associados em caso contrário.

Os parâmetros do esquema assim obtidos são dados por:

$$v = \frac{m(m-1)}{2}, n_1 = 2m-4 \text{ e } n_2 = \frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} m-2 & m-3 \\ m-3 & \frac{(m-3)(m-4)}{2} \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2m-8 \\ 2m-8 & \frac{(m-4)(m-5)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.C.4)$$

Uma classe trivial de PBIB's baseados neste esquema pode ser obtida tomando-se cada fila como um bloco. Os parâmetros do PBIB assim obtidos são dados por:

$$b = m, r = 2, k = m - 1, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0$$

Pelas relações (3.B.21) e (3.B.24), temos que as raízes características de NN' são:

$$\theta_0 = rk; \theta_1 = r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 \text{ e } \theta_2 = r - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

com multiplicidades

(3.C.5)

$$\alpha_0 = 1; \alpha_1 = n - 1 \text{ e } \alpha_2 = \frac{n(n-3)}{2}$$

EXEMPLO (3.C.2) - Para $m = 5$, denotando os tratamentos por $1, 2, \dots, 10$, o correspondente esquema triangular pode ser exibido como:

x	1	2	3	4
	1	x	5	6 7
		2	5	x 8 9
			3	6 8 x 10
				4 7 9 10 x

Os primeiros associados do tratamento 1 são os tratamentos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 e os segundos associados são 8, 9 e 10. O PBIB trivial baseado neste esquema é dado por:

$$S_1 = (1, 2, 3, 4); S_2 = (1, 5, 6, 7); S_3 = (2, 5, 8, 9);$$

$$S_4 = (3, 6, 8, 10) \text{ e } S_5 = (4, 7, 9, 10),$$

cujos parâmetros do 2º tipo são:

$$b = 5, r = 2, k = 4, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0.$$

EXEMPLO (3.C.3) - Pode haver mais de um PBIB baseado no mesmo esquema de associação. Existem pelo menos mais três baseados no esquema triangular com $m = 5$:

a) $b = 10; r = 3; k = 3; \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0$

$$S_1 = (1, 2, 5); S_2 = (8, 9, 10); S_3 = (2, 8, 3);$$

$$S_4 = (7, 5, 9); S_5 = (9, 4, 2); S_6 = (5, 6, 8);$$

$$S_7 = (3, 10, 4); S_8 = (10, 7, 6); S_9 = (4, 1, 7);$$

$$\text{e } S_{10} = (6, 3, 2).$$

b) $b = 6, r = 3, k = 5, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2$

$$S_1 = (1, 8, 9, 7, 3); S_2 = (1, 8, 4, 10, 5); S_3 = (8, 4, 6, 7, 2)$$

$$S_4 = (4, 6, 9, 5, 3); S_5 = (1, 6, 9, 10, 2); S_6 = (10, 7, 5, 2, 3)$$

c) $b = 10, r = 4, k = 4, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2$

$$S_1 = (2, 10, 6, 7); S_2 = (10, 1, 2, 5); S_3 = (7, 3, 8, 2);$$

$$S_4 = (6, 2, 9, 4); S_5 = (1, 9, 10, 8); S_6 = (5, 4, 3, 10);$$

$$S_7 = (8, 7, 4, 1); S_8 = (3, 5, 7, 9); S_9 = (9, 6, 1, 3);$$

$$\text{e } S_{10} = (4, 8, 5, 6).$$

3.C (c) - Esquema de Associação por Quadrado Latino (Lr)

Considere $v = k^2$ tratamentos, os quais podem ser dis

postos em um esquema $k \times k$. Por exemplo, se $k=4$, os tratamentos, denotados por $1, 2, \dots, 16$, temos o seguinte esquema quadrado:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \quad (3.C.6)$$

Para o caso $r=2$, isto é, no esquema L_2 , nos definimos dois tratamentos como primeiros associados se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do esquema quadrado e segundos associados em caso contrário. Os parâmetros de tal esquema são dados por:

$$v = k^2, \quad n_1 = 2(k-1) \quad \text{e} \quad n_2 = (k-1)^2$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} k-2 & k-1 \\ k-1 & (k-1)(k-2) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2(k-2) \\ 2(k-1) & (k-2)^2 \end{bmatrix} \quad (3.C.7)$$

No caso geral, com $2 \leq r \leq k+1$, tomamos um conjunto de $r-2$ quadrados latinos mutuamente ortogonais (se tal conjunto existe). Para o esquema de associação L_r , nós definimos dois tratamentos como primeiros associados se eles ocorrem na mesma linha ou coluna do esquema quadrado, ou se eles correspondem ao mesmo símbolo de um dos quadrados latinos. Caso contrário nós os definimos como segundos associados. Os parâmetros do Esquema de Associação L_r são dados por:

$$v = k^2, n_1 = r(k-1), n_2 = (k-1)(k-r+1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} (r-2) + (r-1)(r-2) & (r-1)(k-r+1) \\ (r-1)(k-r+1) & (k-r)(k-r+1) \end{bmatrix} \quad e \quad (3.C.8)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} r(r-1) & r(k-r) \\ r(k-r) & (k-r)^2 + (r-2) \end{bmatrix}$$

A classe trivial de PBIB's baseada em L_r é obtida tomando-se por blocos as linhas e colunas do esquema quadrado e, em cada um dos $r-2$ quadrados latinos, os tratamentos correspondentes ao mesmo símbolo. Tal classe tem parâmetros do 2º tipo dados por:

$$b = kr; r, k, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0 \quad (3.C.9)$$

Pelas relações (2.B.21) e (2.B.24), temos que as raízes características de NN' são dadas por:

$$\theta_0 = rk; \theta_1 = r + (k-r)\lambda_1 - (k-r+1)\lambda_2 \text{ e } \theta_2 = r - r\lambda_1 + (r-1)\lambda_2$$

com multiplicidades

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = r(k-1) \text{ e } \alpha_2 = (k-r+1)(k-1).$$

EXEMPLO (3.C.4) - Para $r = 4$, temos o esquema L_4 . Para $k = 4$, temos:

ESQUEMA QUADRADO				$[L_1]$	$[L_2]$		
1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	2	1	4	3
9	10	11	12	3	4	1	2
13	14	15	16	4	3	2	1

Para este esquema, os tratamentos que são primeiros associados do tratamento 7 são:

5, 6, 8, 3, 11 e 15 (tratamentos que estão na mesma linha ou coluna do esquema quadrado)

4, 10 e 13 (tratamentos que correspondem, no esquema quadrado, às posições do 4 em $[L_1]$)

1, 12 e 14 (tratamentos que correspondem, no esquema quadrado, às posições do 1 em $[L_2]$)

Os segundos associados do tratamento 7 são: 2, 9 e 16.

O PBIB trivial baseado no esquema acima é dado por:

a) Linhas e colunas do esquema quadrado:

$$S_1 = (1, 2, 3, 4); S_2 = (5, 6, 7, 8); S_3 = (9, 10, 11, 12);$$

$$S_4 = (13, 14, 15, 16); S_5 = (1, 5, 9, 13); S_6 = (2, 6, 10, 14);$$

$$S_7 = (3, 7, 11, 15) \text{ e } S_8 = (4, 8, 12, 16).$$

b) Tratamentos que, no esquema quadrado, correspondem ao mesmo símbolo em $[L_1]$:

$$S_9 = (1, 6, 11, 16); S_{10} = (2, 5, 12, 15); S_{11} = (3, 8, 9, 14)$$

$$\text{e } S_{12} = (4, 7, 10, 13)$$

c) Tratamentos que, no esquema quadrado, correspondem ao mesmo símbolo em $[L_2]$:

$$S_{13} = (1, 7, 12, 14); S_{14} = (2, 8, 11, 13); S_{15} = (3, 5, 10, 16)$$

$$\text{e } S_{16} = (4, 6, 9, 15),$$

cujos parâmetros do 2º tipo são dados por:

$$b=16, r=4, k=4, \lambda_1=1, \lambda_2=0.$$

3.C (d) - Esquemas de Associações Cíclicas

Sejam os v tratamentos denotados pelos v inteiros $0, 1, 2, \dots, v-1$. Sejam d_1, d_2, \dots, d_{n_1} , n_1 inteiros satisfazendo as seguintes condições:

a) Os números d_j são todos diferentes e $0 < d_j < v$, $j=1, 2, \dots, n_1$,

b) Entre os $n_1(n_1-1)$ diferenças $d_j - d_{j'}$, reduzidas ao menor inteiro positivo módulo v , cada um dos números

d_1, d_2, \dots, d_{n_1} ocorre g vezes, enquanto cada um dos números e_1, e_2, \dots, e_{n_2} ocorre h vezes, onde os números e_j são todos diferentes $0 < e_j < v$ e

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n_2}\} = \{1, 2, 3, \dots, v-1\} - \{d_1, d_2, \dots, d_{n_1}\};$$

c) O conjunto $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{n_1}\}$ é tal que

$$D = \{-d_1, -d_2, \dots, -d_{n_2}\}.$$

Claro, é necessário que: $n_1g + n_2h = n_1(n_1 - 1)$.

O conjunto dos primeiros associados do tratamento i é definido como:

$$(i + d_1, i + d_2, \dots, i + d_{n_1}) \pmod{v}$$

e o conjunto dos segundos associados como:

$$(i + e_1, i + e_2, \dots, i + e_{n_2}) \pmod{v}.$$

O esquema de associação assim definido, tem parâmetros dados por:

$$v, n_1, n_2$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} g & n_1 - g - 1 \\ n_1 - g - 1 & n_2 - n_1 + g + 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} h & n_1 - h \\ n_1 - h & n_2 - n_1 + h - 1 \end{bmatrix} \quad (3.C.10)$$

Todos os Esquemas de Associação Cíclicos conhecidos tem parâmetros dados por:

$$v = 4t + 1, n_1 = n_2 = 2t$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} t-1 & t \\ t & t \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} t & t \\ t & t-1 \end{bmatrix} \quad (3.C.11)$$

Somente as condições (a) e (b) foram incluídas na definição de Esquemas de Associação Cíclicos de Bose e Shi-

mamoto. Nandi e Adhikary (1966) mostraram que as condições (a) e (b) definem um Esquema de Associação com duas classes se $h=g$, mas não quando $h \neq g$. Eles impuseram a condição (c), a qual é automaticamente satisfeita se $h=g$, para definir um esquema de associação mesmo quando $h \neq g$.

Pelas relações (2.B.21) e (2.B.24), as raízes características de NN' são dadas por:

$$\theta_0 = rk, \theta_1 = r + \frac{\lambda_1}{2}(\sqrt{v}-1) - \frac{\lambda_2}{2}(\sqrt{v}+1) \quad (3.C.12)$$

$$\theta_2 = r - \frac{\lambda_1}{2}(\sqrt{v}+1) + \frac{\lambda_2}{2}(\sqrt{v}-1)$$

com multiplicidades

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2t \text{ e } \alpha_2 = 2t$$

EXEMPLO (3.C.5) - Tomando $v=13$, temos que os números:

$$d_1 = 2, d_2 = 5, d_3 = 6, d_4 = 7, d_5 = 8 \text{ e } d_6 = 11$$

satisfazem (a), (b) e (c) com $g=2$ e $h=3$.

O conjunto dos primeiros associados do tratamento 5 é dado por:

$$(5+2, 5+5, 5+6, 5+7, 5+8, 5+11) \pmod{13}$$

ou seja

$$(7, 10, 11, 12, 0, 3).$$

Um PBIB baseado neste esquema é obtido tomando-se para blocos o desenvolvimento cíclico de $(1, 3, 9) \pmod{13}$, isto é:

$S_1 = (1, 3, 9); S_2 = (2, 4, 10); S_3 = (3, 5, 11);$
 $S_4 = (4, 6, 12); S_5 = (5, 7, 0); S_6 = (6, 8, 1);$
 $S_7 = (7, 9, 2); S_8 = (8, 10, 3); S_9 = (9, 11, 4);$
 $S_{10} = (10, 12, 5); S_{11} = (11, 0, 6); S_{12} = (12, 1, 7);$
e $S_{13} = (0, 2, 8),$

cujos parâmetros do 2º tipo são dados por:

$$b = 13, r = 3, k = 3, \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0.$$

(51.0.7)

Outro PBIB baseado no mesmo esquema pode ser obtido tomando-se para blocos o desenvolvimento cíclico de

$$(1, 2, 4, 7, 9, 0) \pmod{13}$$

o qual terá parâmetros do 2º tipo dados por:

$$b = 13, r = 6, k = 6, \lambda_1 = 4 \text{ e } \lambda_2 = 3.$$

Tabelas de PBIB com duas classes de associação foram preparadas por Bose, Clatworthy e Shrikande (1954) e mais tarde estendidas por Clatworthy (1956). Nas 1954 tabelas, os parâmetros de 27 planejamentos simples, 283 planejamentos por Grupo Divisível (124 singulares, 91 semi-regulares e 68 regulares), 36 planejamentos triangulares, 20 planejamentos por Quadrado Latino e 10 planejamentos Cíclicos foram listados juntamente com seus planos.

Os Esquemas de Associação com $m = 2$ classes que não foram cobertos por Bose e Shimamoto ficam em duas catego-

rias. A primeira categoria contém os Esquemas de Associação Pseudo-Triangulares, Pseudo-Quadrado Latino e Pseudo-Cíclicos. A outra categoria difere de qualquer dos Esquemas Classificados por Bose e Shimamoto e em geral não satisfazem

$$\lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0.$$

3.D - UM ESQUEMA DE ASSOCIAÇÃO COM m = 3 CLASSES

Apenas como ilustração, apresentamos o Esquema de Associação Retangular com 3 classes de associação, introduzido por Vartak (1955).

Sejam $v = m \cdot n$ tratamentos arranjados em um retângulo de m linhas e n colunas. Os primeiros associados de qualquer tratamento θ são os outros $n-1$ da mesma linha. Os segundos associados são os outros $m-1$ da mesma coluna e os restantes $(n-1)(m-1)$ são os terceiros associados de θ . Para tal esquema, temos os seguintes parâmetros:

$$v = m \cdot n, \quad n_1 = n-1, \quad n_2 = m-1 \text{ e } n_3 = (n-1)(m-1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & (m-1)(n-2) \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n-1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ n-1 & 0 & (m-2)(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.D.1)$$

$$\text{e } P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & n-2 \\ 1 & 0 & m-2 \\ n-2 & m-2 & (n-2)(m-2) \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que as raízes características de NN' são dadas por

$$\theta_0 = rk, \theta_1 = r - \lambda_1 + (m-1)(\lambda_2 - \lambda_3),$$

$$\theta_2 = r - \lambda_2 + (n-1)(\lambda_1 - \lambda_3), \theta_3 = r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

com multiplicidades: (3.D.2)

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = n-1, \alpha_2 = m-1 \text{ e } \alpha_3 = (n-1)(m-1)$$

Para as propriedades do Esquema de Associação Retangular citamos S.M.Shah (1964) e Vartak (1955, 1959).

Alguns Esquemas de Associação com m classes, $m > 2$ foram introduzidos por Raghavarao e Chandrasekhararao (1964)

(Cúbico), Peter W.M.John (1966) e Bose e Laskar (1967) (Extensão do Triangular), Tarthare (1963), Raghavarao (1960, 1962) e Roy (1953, 1954 e 1962) (Grupo Divisível para m classes) e outros foram apresentados por Adhikary (1966, 1967) e Yamamoto, Fuji e Hamada (1965).

3.E - CONSTRUÇÃO DE PBIB(2)

Utilizamos anteriormente, na seção 1.F, do Capítulo I, as propriedades da Geometria Plana Projetiva Finita $PG(u,s)$ e da Geometria Euclidiana Finita para a Construção de Planejamentos por Blocos Incompletos Balanceados. As mesmas propriedades podem ser convenientemente utilizadas para a construção de planejamentos por Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados, com $m = 2$ classes de Associação. Va-

mos então descrever, de forma ilustrativa, algumas séries de PBIB(2) obtidas através da PG(n,s) e da EG(u,s).

3.E(a)-Na PG(3,s), retiremos um de seus pontos e todos os m-subespaços que contêm este ponto. Se identificarmos os pontos restantes com os tratamentos e os m-subespaços restantes com os blocos, teremos um planejamento PBIB, para o qual dois tratamentos são primeiros associados se nenhum m-subespaço que contém a ambos, contém também o ponto retirado, isto é, nenhum dos m-subespaços suprimidos contém um par de primeiros associados.

Em particular, a seguinte série de PBIB's podem ser obtidas

$$m = 2; v = s^3 + s^2 + s; b = s^3; r = s^2; k = s^2 + s + 1$$

$$\lambda_1 = s; \lambda_2 = 0; n_1 = s^3 + s^2; n_2 = s - 1 \quad (3.E.1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} s^3 + s^2 - s & s - 1 \\ s - 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} s^3 + s^2 & 0 \\ 0 & s - 2 \end{bmatrix}$$

$$m = 1; v = s^3 + s^2 + s; b = s^4 + s^3 + s^2; r = s^2 + s; k = s + 1$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 0; n_1 = s^3 + s^2; n_2 = s - 1 \quad (3.E.2)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} s^3 + s^2 - s & s - 1 \\ s - 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} s^3 + s^2 & 0 \\ 0 & s - 2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO (3.E.1) - Se tomarmos a série (3.E.1) com $s = 2$, retirando o ponto (1,0,0,0) da PG(3,2) e todos os planos que contêm este ponto, temos pelo Exemplo E.1.2 da seção E do A pênndice que os planos restantes têm equações:

- | | | |
|--------------------|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $x_0 = 0$ | 4) $x_1 + x_4 = 0$ | 7) $x_0 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 2) $x_0 + x_1 = 0$ | 5) $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ | 8) $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 3) $x_0 + x_2 = 0$ | 6) $x_0 + x_1 + x_3 = 0$ | |

onde $x_i = 0, 1, i=0, 1, 2, 3$.

Usando o símbolo $ijkl$ para o ponto (i, j, k, l) temos que o conjunto:

$$S_1 = (0001, 0010, 0100, 0011, 0101, 0110, 0111)$$

$$S_2 = (0001, 0010, 0011, 1100, 1101, 1110, 1111)$$

$$S_3 = (0001, 0100, 0101, 1010, 1110, 1011, 1111)$$

$$S_4 = (0100, 0010, 0110, 1001, 1101, 1011, 1111)$$

$$S_5 = (0001, 0111, 1011, 1101, 0110, 1010, 1100)$$

$$S_6 = (0010, 1011, 1110, 0111, 1001, 0101, 1100)$$

$$S_7 = (0011, 1001, 1010, 1101, 1110, 0111, 0100)$$

$$S_8 = (0011, 1001, 1010, 1100, 0110, 0101, 1111)$$

forma um PBIB com parâmetros:

$$v = 14, r = 4, b = 8, k = 7, n_1 = 12, n_2 = 1, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.E (b) - Na $PG(3, s)$ retiramos todos os pontos de uma linha e todos os planos que contém esta linha. Se identificarmos os tratamentos com os pontos restantes e os blocos com os planos restantes, teremos um planejamento PBIB, para o qual dois tratamentos são primeiros associados se não pertencem à linha que foi retirada. Os parâmetros do PBIB assim obtidos

são:

$$v = s^3 + s^2; \quad b = s^3 + s^2; \quad r = s^2 + s; \quad k = s^2 + s$$

$$\lambda_1 = s+1, \quad \lambda_2 = s, \quad n_1 = s^3 \quad \text{e} \quad n_2 = s^2 - 1$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} s^3 - s^2 & s^2 - 1 \\ s^2 - 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & s^2 - 2 \end{bmatrix} \quad (3.E.3)$$

EXEMPLO (3.E.2) - Na $PG(3, s)$, tomando $s = 2$, retirando a linha $x_2 = x_3 = 0$ e todos os planos que a contêm, os planos restantes tem equações, de acordo com o Exemplo E.1.2 da seção E do Apêndice:

- | | | |
|--------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 1) $x_0 = 0$ | 5) $x_0 + x_3 = 0$ | 9) $x_0 + x_1 + x_3 = 0$ |
| 2) $x_1 = 0$ | 6) $x_0 + x_2 = 0$ | 10) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 3) $x_0 + x_1 = 0$ | 7) $x_1 + x_3 = 0$ | 11) $x_0 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 4) $x_0 + x_2 = 0$ | 8) $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ | 12) $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |

onde $x_i = 0$ ou 1, $i=1, 2, 3$.

Temos então que o conjunto

$$S_1 = \{0001, 0010, 0011, 0101, 0110, 0111\};$$

$$S_2 = \{0001, 0010, 0011, 1001, 1010, 1011\};$$

$$S_3 = \{0001, 0010, 0011, 1101, 1101, 1111\};$$

$$S_4 = \{0001, 0101, 1010, 1110, 1011, 1111\};$$

$$S_5 = \{0010, 0110, 1001, 1101, 1011, 1111\};$$

$$S_6 = \{0001, 0110, 1001, 0111, 1110, 1111\};$$

$$S_7 = \{0010, 1010, 0101, 0111, 1110, 1111\};$$

$$S_8 = \{0001, 0111, 1011, 1101, 0110, 1010\};$$

$$S_9 = \{0010, 1011, 1110, 0111, 1001, 0101\}$$

$$S_{10} = \{1001, 1010, 1101, 1110, 0111, 0011\}$$

$$S_{11} = \{1011, 1101, 1011, 1110, 0110, 0101\}$$

$$S_{12} = \{0011, 1001, 1010, 0110, 0101, 1111\}$$

forma um PBIB com parâmetros:

$$v = 12; b = 12; r = 6; k = 6; n_1 = 8; n_2 = 3; \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 2$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.E (c) - Ainda na $PG(3, s)$ podemos retirar todos os pontos de uma linha e todas as linhas que passam por estes pontos. Identificando os pontos e linhas restantes com os tratamentos e blocos, respectivamente, obtemos um planejamento PBIB, para o qual dois tratamentos são primeiros associados se não pertencem, ambos, a uma das linhas retiradas. O PBIB assim obtido tem parâmetros dados por:

$$v = s^3 + s^2; b = s^4; r = s^2; k = s + 1; n_1 = s^3; n_2 = s^2 - 1$$

$$\lambda_1 = 1 \quad e \quad \lambda_2 = 0$$

(3.E.3)

$$P_1 = \begin{bmatrix} s^3 - s^2 & s^2 - 1 \\ s^2 - 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & s^2 - 2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO (3.E.3) - Na $PG(3, s)$, tomando $s = 2$, retirando todos os pontos da linha $x_1 = x_2 = 0$ e todas as linhas que passam por estes pontos, as linhas restantes, de acordo com o Exem

plano E.1.2 da seção E do Apêndice, tem equações dadas por:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $x_0 + x_3 = 0$ | 9) $x_1 + x_2 + x_3 = x_0 = 0$ |
| 2) $x_0 + x_1 = x_3 = 0$ | 10) $x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 3) $x_0 + x_2 = x_3 = 0$ | 11) $x_0 + x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 4) $x_1 + x_3 = x_0 = 0$ | 12) $x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + x_1 + x_3 = 0$ |
| 5) $x_2 + x_3 = x_0 = 0$ | 13) $x_0 + x_1 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 6) $x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = 0$ | 14) $x_0 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ |
| 7) $x_0 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$ | 15) $x_0 = x_2 = x_3$ |
| 8) $x_0 + x_1 + x_2 = x_3 = 0$ | 16) $x_0 = x_1 = x_3$ |

Temos então que o conjunto:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{0100, 0010, 0110\}; & S_9 &= \{0110, 0101, 0011\}; \\ S_2 &= \{0010, 1110, 1100\}; & S_{10} &= \{0111, 1010, 1101\}; \\ S_3 &= \{0100, 1010, 1110\}; & S_{11} &= \{0110, 1011, 1101\}; \\ S_4 &= \{0010, 0111, 0101\}; & S_{12} &= \{0111, 1011, 1100\}; \\ S_5 &= \{0100, 0111, 0011\}; & S_{13} &= \{1110, 1011, 0101\}; \\ S_6 &= \{0011, 1100, 1111\}; & S_{14} &= \{1110, 1101, 0011\}; \\ S_7 &= \{0101, 1010, 1111\}; & S_{15} &= \{0100, 1011, 1111\}; \\ S_8 &= \{1100, 0110, 1010\}; & S_{16} &= \{0010, 1101, 1111\}; \end{aligned}$$

forma um PBIB com parâmetros:

$$v = 12, b = 16, r = 4, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, n_1 = 8, n_2 = 3$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.E (d) - Na EG(n,s), retiramos a origem e todos os m subes

paços que passam por este ponto. Identificando os pontos e os m -espaços restantes com os tratamentos e blocos, respectivamente, temos um planejamento PBIB, para o qual dois tratamentos são primeiros associados se os m -subespaços que os contém não contém a origem. Em particular, na $EG(2, s)$, com $m=1$, a seguinte série de PBIB pode ser construída:

$$v = s^2 - 1, \quad b = s^2 - 1, \quad r = s, \quad k = s, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,$$

$$n_1 = s^2 - s, \quad n_2 = s - 2$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & s-2 \\ s-2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} s^2 - s & 0 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO (3.E.4) - Na $EG(2, s)$, com $s=3$, suprimindo a origem e todas as linhas que a contém, de acordo com o Exemplo E.2. 1. da seção E do Apêndice, as linhas restantes tem equação dadas por:

- | | |
|---------------|----------------------|
| 1) $x_1 = 1;$ | 5) $x_1 + x_2 = 1;$ |
| 2) $x_1 = 2;$ | 6) $x_1 + x_2 = 2;$ |
| 3) $x_2 = 1;$ | 7) $x_1 + 2x_2 = 1;$ |
| 4) $x_2 = 2;$ | 8) $x_1 + 2x_2 = 2.$ |

Temos então que o conjunto:

$$S_1 = \{10, 11, 12\}; \quad S_2 = \{20, 21, 22\};$$

$$S_3 = \{01, 11, 21\}; \quad S_4 = \{02, 12, 22\};$$

$$S_5 = \{10, 01, 22\}; \quad S_6 = \{02, 20, 11\};$$

$$S_7 = \{10, 02, 21\}; \quad S_8 = \{12, 01, 20\};$$

forma um PBIB com parâmetros dados por:

$$v=8, \quad b=8, \quad r=3, \quad k=3, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=0, \quad n_1=6, \\ n_2=1.$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As geometrias finitas são muito usadas para a construção de planejamentos PBIB. A esse respeito nós repetimos Bose e Chakravati (1966); Clatworthy (1964); Dai e Feng (1964); Raychaudhury (1962,1965); Seiden (1966); Wan (1964, 1965); Wan e Yang (1964); Yamamoto, Fukuda e Hamada (1966) e Yang (1965). Outros métodos de construção, de interesse são apresentados por Addelman e Bush (1964), Archbold e Johnson (1956), Bose e Clatworthy (1955), Clatworthy (1967), Masuyama (1964, 1965, 1967) e Sprott (1955, 1959). Para uma análise do planejamento PBIB nós referimos Kempthorne (1952).

A despeito do grande desenvolvimento que tem tido esta área do planejamento estatístico nas últimas três décadas, muitos problemas permanecem em aberto.

3.F - COMENTÁRIOS FINAIS

Os resultados discutidos neste trabalho encontram-se basicamente em Raghavarao (1971) e em John (1971). As referências bibliográficas encontradas nesses trabalhos (muitas das quais são também citadas aqui) dão uma idéia bastante completa do desenvolvimento desta área de pesquisa, até o ano de 1969. A seguir faremos alguns comentários sobre os resultados obtidos no período 1970-1975, com especial referência ao trabalho de Hedayat e John (1974). Resultados que dizem respeito a novos métodos para a construção de BIB's e a obtenção de esquemas de associação para PBIB's, podem ser encontrados em John (1970), Kageyama (1974), Saha e Kulshreshtha (1973), Hamada (1974) e Aggarwal (1972). O artigo de Trail e Weeks (1973) trata do problema da extensão de blocos completos gerados por BIB enquanto que Kageyama (1972) discute a redução das classes de associação de alguns PBIB's. Kiefer (1975) discute o planejamento BIB em conexão com a construção do quadrado de Youden generalizado e finalmente Smith (1973) trata da estimação de Bayes em modelos a um e dois critérios de classificação. Daremos a seguir um breve resumo do trabalho de Hedayat e John (1974), que nos interessou pelo seu potencial com relação às aplicações e também pelos problemas de pesquisa que são sugeridos pelos autores.

Usaremos a definição (1.C.1) de planejamento balanceado, isto é, diremos que um planejamento é balanceado se todos os contrastes elementares puderem ser estimados com a mesma precisão. Um planejamento BIB é balanceado, segundo esta definição, e além disso poderíamos dizer que também é balanceado num sentido mais amplo, pois, os pares de tratamentos ocorrem no mesmo número de blocos.

Estas duas características do BIB podem ser destruídas durante a experiência, pela perda de algumas (ou de todas) as unidades experimentais submetidas a um (ou mais de um) tratamento. Isto pode ocorrer com facilidade em experiências que envolvem drogas (a dose de alguma delas pode ser letal e matar a cobaia) ou em experiências agrícolas (uma alta dosagem de fertilizante pode destruir, total ou parcialmente, as plantas nas quais for aplicada). O trabalho de Hedayat e John explora o caso em que todas as unidades experimentais submetidas a um ou mais tratamentos são destruídas. Neste caso a estrutura restante mantém o balanceamento combinatório (cada par ocorre junto no mesmo número de blocos), mas, em geral não mantém o balanceamento das variâncias.

O propósito do trabalho de Hedayat e John é explorar os casos em que o balanceamento das variâncias é mantido quando um dos tratamentos é perdido ou retirado do planejamento.

Seja, portanto, D um planejamento BIB com parâmetros v, b, r, k e λ e Ω o conjunto dos v tratamentos. Seja $L \subset \Omega$ com cardinalidade $n \leq v-2$. Retirando todas as unidades experimentais em D , as quais são submetidas a tratamentos em L , seja \bar{D} a estrutura restante.

DEFINIÇÃO 1 - D é dito globalmente resistente de grau n , se \bar{D} é balanceado (variâncias) quando algum subconjunto L de cardinalidade n é retirado.

DEFINIÇÃO 2 - D é dito localmente resistente de grau n se \bar{D} é balanceado somente com respeito a alguns subconjuntos de cardinalidade n .

DEFINIÇÃO 3 - D é dito susceptível se não existe L tal que \bar{D} é balanceado.

Hedayat e John estabeleceram ainda uma condição necessária e suficiente sob a qual um BIB é localmente resistente com respeito a um tratamento fixo. Como generalização, uma condição necessária e suficiente sob a qual um BIB é globalmente resistente.

Seja D um BIB com parâmetros v, b, r, k, λ um planejamento sob Ω e seja $L = \{x\} \subset \Omega$. Dividamos D em duas partes: D_x e \bar{D}_x , onde D_x consiste de todos os blocos que não contêm x e \bar{D}_x é o conjunto dos blocos que contêm x . Seja ainda D'_x o planejamento obtido quando retiramos x dos blocos de \bar{D}_x .

LEMA 1 - D_x é um planejamento BIB se e somente se D'_x é um

BIB.

TEOREMA 1 - D é localmente resistente com respeito a x se e somente se Dx é um planejamento BIB.

COROLÁRIO 1.1 - D é globalmente resistente se e somente se Dx é um BIB para todo x em Ω .

COROLÁRIO 1.2 - Se D é localmente resistente com respeito a qualquer tratamento, então seus parâmetros satisfazem a seguinte condição:

1) $r \geq v-1$

2) $\frac{\lambda(k-2)}{v-2}$ é um inteiro.

COROLÁRIO 1.3 - A propriedade de ser resistente depende não somente dos parâmetros do planejamento mas também da forma como foi construído.

COROLÁRIO 1.4 - D é localmente resistente com respeito ao tratamento x em Ω se e somente se todo terno contendo x aparece o mesmo número de vezes em D.

Hedayat e John tratam ainda de alguns problemas de existência e construção de planejamentos resistentes. Transcrevemos aqui mais dois importantes teoremas:

TEOREMA 2 - Se $s = p^h$, onde p é um primo e $h \geq 1$ um inteiro, então existe um BIB globalmente resistente de grau um para qualquer inteiro d e:

$$v = s^{d+1}, b = \frac{(s^{d+1})}{s+1} \sum_{j=d-1}^{2(d-1)} s^j$$

$$r = \sum_{j=d-1}^{2(d-1)} s^j, k = s+1 \text{ e } \lambda = \sum_{j=0}^{d-1} s^j$$

Por exemplo, se $s=3$ e $d=2$, temos que o BIB com parâmetros $v=10$, $b=30$, $r=12$, $k=4$ e $\lambda=4$ é globalmente resistente.

TEOREMA 3 - Todo BIB simétrico com parâmetros $v=b$, $r=k$, λ é localmente resistente de grau k (mas não necessariamente, de grau menor que k).

Este trabalho representa também uma contribuição para a teoria dos blocos incompletos balanceados no caso de blocos com tamanhos diferentes. De fato, a partir de planejamentos que são local e globalmente resistentes podemos obter planejamentos por blocos incompletos balanceados com diferentes tamanhos de blocos, simplesmente retirando os tratamentos para os quais o planejamento é resistente.

O trabalho de Hedayat e John levanta vários problemas não resolvidos, dentre os quais destacamos os seguintes:

1. Os autores tratam dos planejamentos que são local e globalmente resistentes de grau um. Uma generalização para outros graus poderia ser levantada. Mesmo para o grau um eles não resolvem todos os problemas.

2. O teorema 3 dá uma condição suficiente para um BIB simétrico ser localmente resistente de grau k . Será que esta

condição é também necessária?

3. Finalmente, a teoria foi formulada e desenvolvida apenas no caso do modelo linear aditivo e homocedástico. Uma extensão ao modelo linear geral poderá ser interessante e bastante útil.

A P Ê N D I C E

Tratamos aqui, de alguns resultados utilizados no texto, para fácil referência do leitor.

A - PROPRIEDADES DOS NÚMEROS

DEFINIÇÃO A.1 - Se a , b e c são inteiros tais que $ab = c$, dizemos que a e b são fatores ou divisores de c e que c é um múltiplo de a e b . Usaremos a notação d/c para indicar que d é um fator ou divisor de c .

DEFINIÇÃO A.2 - Um inteiro positivo p é dito ser um número primo, ou simplesmente um primo se e somente se:

- i) $p > 1$
- ii) Se $p = ab$, então $a = 1$ ou $b = 1$.

Se um número não é primo, então é dito composto.

PROPOSIÇÃO A.1 - Todo número composto tem um fator primo.

PROPOSIÇÃO A.2 - O número de primos é infinito.

DEFINIÇÃO A.3 - Se a , b e c são inteiros tais que c/a e c/b dizemos que c é um divisor comum de a e b . Dizemos que g é o máximo divisor comum de a e b se e somente se:

- i) g/a e g/b
- ii) Se c/a e c/b , então c/g .

Usaremos o símbolo (a,b) para denotar o máximo divisor comum de a e b . Ao máximo divisor comum dos inteiros a_1, a_2, \dots, a_n , denotaremos por (a_1, a_2, \dots, a_n) .

PROPOSIÇÃO A.3 - O máximo divisor comum de dois inteiros é único.

DEFINIÇÃO A.4 - Dois inteiros a e b , não ambos nulos são relativamente primos se $(a,b) = 1$. No caso geral, os $n \geq 2$ inteiros a_1, a_2, \dots, a_n , não todos nulos são relativamente primos se $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

PROPOSIÇÃO A.4 - Se a e b são inteiros, não ambos nulos, então (a,b) é o menor inteiro positivo que pode ser expresso como uma função linear homogênea de a e b . Isto é, (a,b) é o menor inteiro positivo tal que $(a,b) = xa + yb$, onde x e y são inteiros.

PROPOSIÇÃO A.5 - Dois inteiros a e b , não ambos nulos, são relativamente primos entre si, se e somente se, existem inteiros x e y tais que:

$$1 = xa + yb.$$

PROPOSIÇÃO A.6 - Seja p um primo e m, n inteiros positivos não nulos. Se $p/m \cdot n$ então p/m ou p/n .

PROPOSIÇÃO A.7 - (Teorema Fundamental da Aritmética) - Sejam

um inteiro positivo tal que $m \geq 2$. Se m não é primo, então m pode ser escrito como produto de primos, não necessariamente distintos,

$$m = p_1 p_2 p_3 \dots p_r$$

onde os p_i ($i=1,2,\dots,r$) são unicamente determinados, a menos de uma permutação.

DEFINIÇÃO A.5 - Sejam a , b e c inteiros. Se a/c e b/c , dizemos que c é um múltiplo comum de a e b . Dizemos que h é o mínimo múltiplo comum de a e b se e somente se:

- i) a/h e b/h são inteiros;
- ii) Se a/c e b/c , então h/c .

Usaremos o símbolo $[a,b]$ para denotar o mínimo múltiplo comum de a e b . Ao mínimo múltiplo comum dos inteiros a_1, a_2, \dots, a_n , denotaremos por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

PROPOSIÇÃO A.8 - O mínimo múltiplo comum de dois inteiros é único.

DEFINIÇÃO A.6 - O número de inteiros menores ou iguais a m e relativamente primos com m será denotado por $\phi(m)$. A função numérica ϕ é conhecida como função de Euler.

EXEMPLO A.1 - $\phi(1) = 1$ $\phi(5) = 4$

$$\phi(2) = 1$$

$$\phi(11) = 10$$

$$\phi(3) = 2$$

$$\phi(6) = 2$$

PROPOSIÇÃO A.9 - Se p é um primo, então $\phi(p) = p-1$.

PROPOSIÇÃO A.10 - Se p é um primo e α é um inteiro positivo, então $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ e

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \phi(p^i) = p^\alpha.$$

PROPOSIÇÃO A.11 - Se n é um inteiro positivo, então

$$\sum_{d/n} \phi(d) = n.$$

PROPOSIÇÃO A.12 - A função ϕ de Euler é uma função numérica multiplicativa, isto é,

$$\phi(r \cdot s) = \phi(r) \cdot \phi(s), \text{ onde } (r, s) = 1.$$

Para referências sobre Teoria dos Números, citamos Sidki (1975) e Pettofrezzo e Byrkit (1972).

B - TEORIA DAS CONGRUÊNCIAS

DEFINIÇÃO B.1 - Seja m um inteiro positivo. Se a e b são dois inteiros tais que $m|(a-b)$, então dizemos que a é congruente com b módulo m e isto será denotado por $a \equiv b \pmod{m}$. Se m não divide $(a-b)$, dizemos que a é incongruente com b módulo m , isto é, $a \not\equiv b \pmod{m}$.

EXEMPLO A.1 - Temos que

$$7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$31 \equiv -2 \pmod{3}$$

$$16 \not\equiv 9 \pmod{4}$$

Escrever $a \equiv b \pmod{m}$ é equivalente a escrever $a-b = km$ ou $a = b+km$, k inteiro.

PROPOSIÇÃO B.1 - Dois inteiros a e b deixam o mesmo resto, quando são divididos por um inteiro positivo m , se e somente se $a \equiv b \pmod{m}$.

PROPOSIÇÃO B.2 - A relação de congruência módulo m , quando m é um inteiro positivo é uma relação de equivalência no conjunto dos inteiros, isto é, a relação de congruência módulo m é:

- i) reflexiva: $a \equiv a \pmod{m}$, para todo inteiro a ;
- ii) simétrica: se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$ para todo par de inteiros a e b ;
- iii) transitiva: se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$, para quaisquer inteiros a , b e c .

Sob a relação de congruência módulo m , o conjunto dos inteiros é dividido em m conjuntos ou classes de equivalência, isto é, cada inteiro pertencerá a uma das m classes, conforme o resto de sua divisão por m seja $0, 1, 2, \dots, m-1$.

Estas classes de equivalência são chamadas de classes residuais módulo m e cada classe contém todos os inteiros que são congruentes entre si módulo m .

EXEMPLO B.2 - Sob a relação de congruência módulo 3, as três classes residuais constam dos inteiros da forma $0+3k$, $1+3k$, $2+3k$, respectivamente, onde k é um inteiro, isto é, as três

classes residuais são:

$$\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$\{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

Cada classe residual módulo m pode ser representada por qualquer de seus membros. Em geral, costuma-se representar cada classe por (k) , onde k é o menor inteiro não negativo de sua classe e o número k é denominado de representante padrão da classe (k) . Assim, as classes residuais módulo 3 são (0) , (1) e (2) , cujos representantes padrão são 0, 1 e 2. Dois inteiros não pertencentes à mesma classe são incongruentes módulo m .

Pelo algoritmo da divisão, o resto r da divisão de qualquer inteiro por m satisfaz $0 \leq r < m$. Portanto, todo inteiro é congruente com um único elemento de

$$M_0 = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

DEFINIÇÃO B.2 - Seja S um conjunto de inteiros. Dizemos que S é um Sistema Completo de Resíduos (SCR) módulo m se e somente se:

- i) $s, t \in S$ e $s \neq t \Rightarrow s \not\equiv t \pmod{m}$;
- ii) se a é um inteiro, então existe $s \in S$ tal que $a \equiv s \pmod{m}$.

O conjunto $M_0 = \{0, 1, \dots, m-1\}$ é dito um sistema de resíduos mínimos módulo m .

PROPOSIÇÃO B.3 - As seguintes relações são válidas para congruência módulo m :

i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e c é um inteiro, então

$$a+c \equiv b+c \pmod{m}$$

e

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então

$$a+c \equiv b+d \pmod{m}$$

e

$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e n é um inteiro positivo, então

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

iv) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$ e r e s são inteiros, então,

$$ar+cs \equiv br+cs \pmod{m}$$

v) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $P(\alpha)$ é uma função polinômica de α com coeficientes inteiros, então,

$$P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$$

vi) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $P(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ são funções polinômicas de α com coeficientes inteiros, então,

$$P(a)+Q(a) \equiv P(b)+Q(b) \pmod{m}$$

e

$$P(a)Q(a) \equiv P(b)Q(b) \pmod{m}$$

DEFINIÇÃO B.3 - Seja S um sistema completo de resíduos módulo m . O subconjunto

$$S' = \{a \mid a \in S \text{ e } (a, m) = 1\}$$

de S é denominado de sistema reduzido de resíduos módulo m .

O número de elementos de S' é $\phi(m)$. É claro que se m é primo, digamos p , então $S = S'$ e o número de elementos de S' é $\phi(p) = p-1$.

PROPOSIÇÃO B.4 - Dado um inteiro a , então a congruência

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

tem solução se e somente se $(a, m) = 1$.

O número x que satisfaz a congruência acima é denominado o inverso de a módulo m , e denotado por $\left(\frac{1}{a}\right)_m$.

PROPOSIÇÃO B.5 - Se p é um primo e a é um inteiro, a congruência $ax \equiv 1 \pmod{p}$ sempre tem solução. Isto significa dizer que todo elemento de $S' = \{1, 2, \dots, p-1\}$ tem inverso módulo p .

PROPOSIÇÃO B.6 - (Teorema de Euler) - Se $(a, m) = 1$, então,

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

PROPOSIÇÃO B.7 - (Teorema de Fermat) - Se p é um primo e $(a, p) = 1$, então,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

PROPOSIÇÃO B.8 - Se p é um primo, então,

$$a^p \equiv a \pmod{p},$$

para qualquer inteiro a .

Mais sobre Teoria das Congruências encontram referências em Pettofrezzo e Byrkit (1972) e Sidki (1975).

C - GRUPOS, ANÉIS E CORPOS

DEFINIÇÃO C.1 - Seja G um conjunto não vazio munido de uma lei de composição "+", que a cada par de elementos a e b em G associa $a+b$ em G . Dizemos que G é um grupo, denotado por $(G,+)$, se os seguintes postulados são satisfeitos:

G.1 - $(a+b)+c = a+(b+c)$, a, b e c em G ;

G.2 - Existe " o " em G tal que $a+o = o+a$, $\forall a \in G$;

G.3 - Dado $a \in G$, existe " $(-a)$ " em G tq $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

O elemento " o " em (G.2) é chamado "elemento neutro" para a operação binária "+" e o elemento " $(-a)$ " em (G.3) é dito o "inverso de a " para a operação "+".

Se um grupo $(G,+)$ satisfaz:

G.4 - $a+b = b+a$, $\forall a, b$ em G

então $(G,+)$ é dito um grupo comutativo ou Abelianiano.

EXEMPLO C.1 -

a) O conjunto dos números racionais com a operação de adição é um grupo Abelianiano.

b) O conjunto dos números racionais não nulos com a ope

ração de multiplicação é um grupo Abelianiano.

- c) O conjunto dos números inteiros com a operação de adição é um grupo Abelianiano.
- d) O conjunto $A = \{-1, 1\}$ com a operação de multiplicação é um grupo Abelianiano.
- e) O conjunto M de todas as matrizes 2×2 com elementos inteiros, com a operação de adição de matrizes é um grupo Abelianiano.

Uma generalização da estrutura de grupo nos conduz à seguinte definição:

DEFINIÇÃO C.2 - Seja R um conjunto não vazio munido de duas leis de composição "+" e ".", as quais, a cada par de elementos a e b em R , associa $a+b$ e $a \cdot b$, respectivamente, em R . Dizemos que R é um anel, denotado por $(R, +, \cdot)$ se os postulados são satisfeitos:

R.1 - O conjunto $(R, +)$ é um grupo Abelianiano;

R.2 - $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, para todos a , b e c em R .

R.3 - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c$ em R .

Se existe "1" pertencente a R tal que:

R.4 - $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in R$, então R é dito com elemento de unidade.

Se um anel R satisfaz:

R.5 - $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b$ em R , então R é dito um anel comutativo.

EXEMPLO C.2 -

- a) O conjunto dos inteiros munido das operações de adição e multiplicação é um anel comutativo.
- b) O conjunto dos racionais munido das operações de adição e multiplicação é um anel comutativo.
- c) O conjunto M das matrizes 2×2 com elementos inteiros com as operações de adição e multiplicação de matrizes é um anel comutativo.

Em um anel R podemos ter elementos $a \neq 0$ e $b \neq 0$ tais que $a \cdot b = 0$. Tais elementos são chamados de "divisores de zero".

Um anel comutativo que não tem divisores do zero e tal que " $1 \neq 0$ " é chamado anel de integridade.

Um anel comutativo, tal que o conjunto dos elementos diferentes de " 0 ", munido da operação " \cdot " forma um grupo, é chamado corpo. Formalmente, temos:

DEFINIÇÃO C.3 - Seja F um conjunto não vazio, munido de duas leis de composição " $+$ " e " \cdot ", as quais, a cada par de elementos a e b em F associa $a+b$ e $a \cdot b$, respectivamente em F . Dizemos que F é um corpo se os seguintes postulados são satisfeitos:

F.1 - O conjunto $(F, +)$ é um grupo Abelianiano;

F.2 - O conjunto (F_0, \cdot) é um grupo Abelianiano, onde

$$F_0 = \{x \in F \mid x \neq 0\};$$

F.3 - A operação "." é distributiva em relação à operação "+".

O conjunto dos números racionais, dos números inteiros, dos números reais e dos números complexos são alguns exemplos de corpos.

O postulado (F.2) estabelece a principal condição para que um anel R tenha estrutura de corpo: a existência do inverso para a operação ".", isto é, dado $a \in R$, $a \neq "0"$, $\exists "(a^{-1})" \in R$, tal que

$$a \cdot "(a^{-1})" = "(a^{-1})" \cdot a = "1".$$

Um corpo é dito finito ou infinito conforme tenha um número finito ou infinito de elementos, respectivamente. Os livros textos de Álgebra Moderna, provam que, se o número de elementos de um corpo finito é s , então $s = p^h$, onde p é um primo e $h \geq 1$, inteiro. Os corpos finitos são também chamados de Corpos de Galois. Ao corpo finito, isto é, de Galois, com s elementos, denotaremos por $GF(s)$.

DEFINIÇÃO C.4 - Dizemos que um corpo F tem característica p , se p é o menor inteiro positivo tal que existe $a \neq "0"$, $a \in F$ para o qual $p \cdot a = "0"$.

D - O CORPO DE GALOIS $GF(s)$

Consideremos uma relação de equivalência módulo s , onde s é um inteiro positivo não nulo.

Definamos a operação de adição entre as classes residuais por:

$$(a)+(b) = (a+b).$$

Para qualquer s inteiro positivo, o conjunto das s classes residuais módulo s , munido da operação de adição definida acima é um grupo comutativo, cujo elemento "0" é a classe (0).

Definamos agora a operação de multiplicação entre as classes residuais por:

$$(a) \cdot (b) = (a \cdot b).$$

Desta forma, para qualquer s inteiro positivo, o conjunto das s classes residuais módulo s , munido das operações de adição e multiplicação definidos acima, é um anel comutativo. Este anel é denominado Anel das Classes Residuais módulo s , o que denotaremos por $R(s)$.

Se, para todo \underline{a} em $R(s)$, $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, isto é, se todo elemento de $R(s)$ tem inverso multiplicativo, então $R(s)$ terá estrutura de corpo. Em termos de resíduos módulo s , dado $(a) \in R(s)$, $(a) \neq (0)$, existe $(\frac{1}{a})_s$ tal que $(a) \cdot (\frac{1}{a})_s \equiv (1) \pmod{s}$. Esta congruência só admite solução para todo \underline{a} se e somente se s é um primo.

Desta forma, se s é um primo, o conjunto das classes residuais módulo s , munido das operações de adição e multiplicação definidos acima, é um corpo de Galois com s ele-

mentos. Tal corpo será denotado por $GF(p)$.

Se x é qualquer elemento de $GF(p)$, temos pelo Teorema de Fermat que:

$$x^{p-1} = 1$$

onde 1 é o representante padrão da classe (1), e é o elemento unidade de $GF(p)$. Se r é o menor inteiro positivo tal que $x^r = 1$, então r é dito ser a ordem do elemento x . A ordem de cada elemento é um divisor de $p-1$. Quando r tem o valor máximo $p-1$, x é dito ser um elemento primitivo de $GF(p)$.

Tal elemento sempre existe. Se x é um elemento primitivo, então todo elemento não nulo de $GF(p)$ está incluído na sequência

$$x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^{p-2}$$

a qual é chamada de potência cíclica de x .

Concluimos, pelo exposto acima, que se p é um primo, então o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ é um corpo de Galois.

Vejamos, a seguir, como obter os elementos de um corpo de Galois com s elementos, onde $s = p^h$, com p primo e $h \geq 2$ inteiro.

Seja $P(x)$ um polinômio em x de grau m , com coeficientes em $GF(s)$, isto é,

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

onde a_i assume qualquer dos valores $0, 1, 2, \dots, s-1$.

Qualquer polinômio $F(x)$, com coeficientes inteiros

pode ser expresso como

$$F(x) = f(x) + pq(x) + P(x)Q(x)$$

onde $f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1}$ com $b_i \in \text{GF}(p)$ e $q(x), Q(x)$ são polinômios com coeficientes inteiros.

EXEMPLO D.1 - Seja $F(x) = x^6 + 3x^4 + 2x^3 + x + 3$ e fixemos $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ e $p = 3$.

Assim,

$$\begin{aligned} F(x) &= x^6 + 3x^4 + 2x^3 + x + 3 = \\ &= 28x^2 - 6x + 16 + (x^3 + 2x^2 + 1)(x^3 - 2x^2 + 7x - 13) = \\ &= (x^2 + 1) + 3(9x^2 - 2x + 5) + (x^3 + 2x^2 + 1)(x^3 - 2x^2 + 7x - 13), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$q(x) = 9x^2 - 2x + 5$$

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 13$$

e

$$F(x) = f(x) + pq(x) + P(x)Q(x).$$

A relação acima pode ser escrita como

$$F(x) \equiv f(x) \pmod{p, P(x)}$$

e dizemos que $f(x)$ é o resíduo de $F(x)$ módulo p e $P(x)$.

Podemos assim obter uma relação de congruência módulo p e $P(x)$ sobre o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros, a qual determina um conjunto de classes residuais módulo p e $P(x)$. Como cada classe $(f(x))$ tem

m coeficientes e tais coeficientes assumem valores em $GF(p)$, o número de classes residuais módulo p e $P(x)$ é igual a p^m .

Se definirmos as operações de adição e multiplicação entre as classes residuais como:

$$(f_1(x)) + (f_2(x)) = (f_1(x) + f_2(x))$$

e

$$(f_1(x)) \cdot (f_2(x)) = (f_1(x) \cdot f_2(x))$$

temos que o conjunto das classes residuais módulo p e $P(x)$ forma um anel comutativo, o qual será um corpo se e somente se $P(x)$ for irredutível em $GF(p)$. Desta forma, podemos obter um Corpo de Galois com p^m elementos, o qual será denotado por $GF(p^m)$, quando fixamos p e $P(x)$.

Para a obtenção dos elementos de $GF(p^m)$, fixados p e m, é necessário obter o polinômio $P(x)$, o qual é conhecido como função mínima para gerar os elementos de $GF(p^m)$. Os elementos não nulos podem ser representados como polinômios de grau máximo m-1 ou como potências de uma raiz primitiva de x. Uma raiz primitiva de $GF(p^m)$ satisfaz $x^{p^m-1} = 1$, mas $x^d \neq 1$, se d é um divisor de p^m-1 . Os elementos não nulos pertencem à sequência $x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^{p^m-2}$, a qual é chamada de potência cíclica de x.

Para obter a função mínima, nós dividimos x^{p^m-1} pelo mínimo múltiplo comum dos fatores x^d-1 , onde d é um divisor de p^m-1 . Teremos então a equação ciclotômica, isto é, a equação que tem para raízes todas as raízes primitivas de

x^{p^m-1} . A ordem desta equação é $\phi(p^m-1)$ e reduzindo todos os seus coeficientes ao seu menor resíduo não nulo módulo p , teremos o polinômio ciclotômico de ordem $\phi(p^m-1)$. Se $P(x)$ é um fator de grau m , irreduzível em $GF(p)$ do polinômio ciclotômico obtido, então $P(x)$ é uma função mínima, a qual, em geral não é única.

EXEMPLO D.2 - Seja $p=3$ e $m=2$. Desejamos obter os elementos de $GF(3^2)$.

A equação ciclotômica é $\frac{x^{p^m-1}}{h(x)} = 0$, onde $h(x)$ é o mínimo múltiplo comum dos fatores x^d-1 , onde d é um divisor de p^m-1 .

Como $p^m-1=8$, os valores de d são 1, 2 e 4 e o mínimo múltiplo comum de $x-1$, x^2-1 e x^4-1 é x^4-1 . Logo,

$$\frac{x^8-1}{x^4-1} = \frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x^4-1} = x^4+1 = 0$$

é a equação ciclotômica. O polinômio ciclotômico é x^4+1 .

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4-3x^2+1 = x^4-2x^2+1-x^2 = \\ &= (x^2-1)^2-x^2 = [x^2-1+x][x^2-1-x] \\ &= [x^2+x+2][x^2+2x+2]. \end{aligned}$$

Como o fator x^2+x+2 é irreduzível em $GF(p)$, então esta é a nossa função mínima.

Desta forma, com $P(x) = x^2+x+2$, os elementos não nulos de $GF(3^2)$ são:

$$x_0 = x^0 = 1$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = x^2 = x^2 + x + 2 - x - 2 = -x - 2 = 2x + 1$$

$$x_3 = x^3 = x(x^2) = x(2x + 1) = 2x^2 + x = 2(2x + 1) + x = 5x + 2 = 2x + 2$$

$$x_4 = x^4 = x(x^3) = x(2x + 2) = 2x^2 + 2x = 2(2x + 1) + 2x = 6x + 2 = 2$$

$$x_5 = x^5 = x(x^4) = x \cdot 2 = 2x$$

$$x_6 = x^6 = x(x^5) = x(2x) = 2x^2 = 2(2x + 1) = 4x + 2 = x + 2$$

$$x_7 = x^7 = x(x^6) = x(x + 2) = x^2 + 2x = 2x + 1 + 2x = 4x + 1 = x + 1$$

Assim os elementos de $GF(3^2)$ são:

$$0, 1, 2, x, 2x, x+1, x+2, 2x+1, 2x+2.$$

E - GEOMETRIAS FINITAS

E-1 - Geometria Projetiva Finita (PG(n,s))

Com o auxílio de um corpo de Galois $GF(s)$, é possível construir uma geometria projetiva finita de dimensão n , a qual será denotada por $PG(n,s)$, da seguinte maneira:

Qualquer conjunto ordenado de $n+1$ elementos

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde $x_i \in GF(s)$, $i=0,1,\dots,n$ e não são todos nulos simultaneamente, representará um ponto da nossa geometria. Dois conjuntos ordenados (x_0, x_1, \dots, x_n) e (y_0, y_1, \dots, y_n) representam o mesmo ponto quando e somente quando existe um elemento não-nulo $\rho \in GF(s)$ tal que $y_i = \rho x_i$ ($i=0,1,2,\dots,n$). Os ele

mentos x_0, x_1, \dots, x_n são chamados de coordenadas do ponto $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Cada ponto da $PG(n, s)$ tem $n+1$ coordenadas as quais assumem valores em $GF(s)$, que contém s elementos. Como essas coordenadas não podem ser simultaneamente nulas, o número de conjuntos de $n+1$ coordenadas que podemos formar com os s elementos de $GF(s)$ é dado por $s^{n+1}-1$. Mas, para cada um dos $s^{n+1}-1$ conjuntos escolhidos existem $s-1$ conjuntos que representam o mesmo ponto.

Desta forma, o número total de pontos da $PG(n, s)$ é dado por

$$Q_n = \frac{s^{n+1}-1}{s-1} \quad (E.1.1)$$

Todos os pontos que satisfazem a um conjunto de $n-m$ equações homogêneas linearmente independentes:

$$\begin{aligned} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{(n-m)0}x_0 + a_{(n-m)1}x_1 + \dots + a_{(n-m)n}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (E.1.2)$$

formam o que chamamos de um subespaço de dimensão m , denotado por (m) -subespaço, da $PG(n, s)$. Qualquer outro conjunto de $n-m$ equações homogêneas linearmente independentes obtidas através de combinações lineares das equações acima, determinam o mesmo (m) -subespaço.

Em (D.2) temos $n+1$ incógnitas e $n-m$ equações. As soluções do sistema serão:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 + \dots + a_m \xi_m \quad (\text{E.1.3})$$

onde $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ são quaisquer $m+1$ vetores colunas linearmente independentes satisfazendo (E.1.a) e $a_i \in \text{GF}(s)$, $i=0, 1, 2, \dots, m$, não todos nulos.

Em (E.1.3) cada a_i , $i=0, 1, 2, \dots, m$, pode ser escolhido de s maneiras e como não podem ser todos nulos o número total de pontos satisfazendo (E.1.2) é $s^{m+1} - 1$. Mas, cada ponto tem $s-1$ outros representantes. Portanto, o número total de pontos que satisfazem (E.1.2), isto é, o número de pontos do (m) -subespaço é dado por:

$$Q_m = \frac{s^{m+1} - 1}{s - 1} \quad (\text{E.1.4})$$

Vamos agora obter o número total de (m) -subespaços em uma $PG(n, s)$. Cada (m) -subespaço é determinado por qualquer conjunto de $(m+1)$ pontos independentes nele contidos. Portanto, o número total de (m) -subespaços da $PG(n, s)$, denotado por $\phi(n, m, s)$, será igual ao número total de maneiras de selecionar $(m+1)$ pontos independentes entre os Q_n pontos da geometria, dividido pelo número total de maneiras de se-

selecionar $m+1$ pontos independentes entre os Q_m pontos do (m) -subespaço. Do total de pontos da geometria, o primeiro ponto pode ser escolhido de Q_n maneiras e o segundo de $Q_n - 1 = Q_n - Q_0$ maneiras. O terceiro ponto deve ser escolhido de maneira a ser linearmente independente do primeiro e segundo, isto é, não deve pertencer ao (1) -subespaço gerado pelos dois pontos já escolhidos, o qual tem Q_1 pontos. Desta forma, o terceiro ponto pode ser escolhido de $Q_n - Q_1$ maneiras. Procedendo desta forma, se ℓ pontos independentes já foram escolhidos, o $(\ell+1)$ -ésimo deve ser escolhido de modo a ser linearmente independente dos ℓ primeiros, isto é, não deve pertencer ao $(\ell-1)$ -subespaço determinados pelos ℓ primeiros pontos, o qual tem $Q_{\ell-1}$ pontos. Desta forma, o $(\ell+1)$ -ésimo ponto pode ser escolhido de $Q_n - Q_{\ell-1}$ maneiras. Assim, o número de maneiras de selecionar $(m+1)$ pontos independentes entre os Q_n pontos da geometria é dado por $Q_n (Q_n - Q_0) (Q_n - Q_1) \dots (Q_n - Q_{m-1})$. Analogamente, o número de maneiras de selecionar $m+1$ pontos independentes entre os Q_m pontos do (m) -subespaço é dado por:

$$Q_m (Q_m - Q_0) \dots (Q_m - Q_{m-1}).$$

Assim, o número total de (m) -subespaços na $PG(n, s)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \phi(n, m, s) &= \frac{Q_n (Q_n - Q_0) (Q_n - Q_1) \dots (Q_n - Q_{m-1})}{Q_m (Q_m - Q_0) (Q_m - Q_1) \dots (Q_m - Q_{m-1})} = \\ &= \frac{(s^{n+1} - 1) (s^n - 1) (s^{n-1} - 1) \dots (s^{n-m+1} - 1)}{(s^{m+1} - 1) (s^m - 1) (s^{m-1} - 1) \dots (s - 1)} \end{aligned} \quad (E.1.5)$$

Podemos verificar que:

$$\Phi(n, m, s) = \Phi(n, n-m-1, s)$$

É conveniente definir $\Phi(n, -1, s) = 1$.

Seguindo o mesmo argumento em (E.1.5) podemos mostrar que:

O número de (m) -subespaços distintos que contêm um ponto fixo A é dado por

$$\Phi(n-1, m-1, s)$$

E o número de (m) -subespaços distintos que contêm dois pontos fixos A e B é dado por:

$$\Phi(n-2, m-2, s).$$

Se excluirmos um ponto da $PG(n, s)$ e todos os (m) -subespaços que o contêm, temos que:

O número de pontos que restam é dado por:

$$Q_{n-1} = \frac{s^n - 1}{s - 1}$$

O número de (m) -subespaços que restam é dado por:

$$\Phi(n, m, s) - \Phi(n-1, m-1, s)$$

O número de pontos em cada (m) -subespaços restante continua

$$Q_m = \frac{s^{m+1} - 1}{s - 1}$$

O número de (m) -subespaços que passam por um ponto

fixo é dado por:

$$\phi(n-1, m-1, s) - \phi(n-2, m-2, s).$$

EXEMPLO (E.1.1) - Para $n=2$ e $s=2$, cada ponto da $PG(2,2)$ será representado por três coordenadas x_0, x_1 e x_2 , onde $x_i = 0$ ou 1 ($i=0,1,2$), e não são todas todas simultaneamente nulas.

a) o número total de pontos é:

$$Q_2 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7$$

b) o número total de pontos em cada (1)-subespaço é:

$$Q_1 = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

c) o número total de (1)-subespaços é:

$$\phi(2, 1, 2) = \frac{(2^3 - 1)(2^2 - 1)}{(2^2 - 1)(2 - 1)} = 7$$

d) o número total de (1)-subespaços que contém um ponto fixo é:

$$\phi(1, 0, 2) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

e) o número total de (1)-subespaços que contém dois pontos fixos é

$$\phi(0, -1, 2) = 1.$$

De acordo com (E.1.2) temos: $[ijk \rightarrow (i, j, k)]$:

<u>EQUAÇÃO</u>	<u>(1)-SUBESPAÇOS</u>
$x_0 = 0$	$S_1 = \{001, 010, 011\}$
$x_1 = 0$	$S_2 = \{001, 100, 101\}$
$x_2 = 0$	$S_3 = \{100, 010, 110\}$
$x_0 + x_1 = 0$	$S_4 = \{001, 110, 111\}$
$x_0 + x_2 = 0$	$S_5 = \{010, 101, 111\}$
$x_1 + x_2 = 0$	$S_6 = \{100, 011, 111\}$
$x_0 + x_1 + x_2 = 0$	$S_7 = \{101, 110, 011\}$

EXEMPLO (E.1.2) - Para $n=3$ e $s=2$, cada ponto da $PG(3,2)$ será representado por quatro coordenadas x_0, x_1, x_2 e x_3 , onde $x_i = 0$ ou 1 ($i=0,1,2,3$) e não são todos simultaneamente nulos. Assim,

a) O número total de pontos é:

$$Q_3 = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15$$

b) O número total de pontos em cada (2)-subespaço é:

$$Q_2 = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7$$

b') O número total de pontos em cada (1)-subespaço é:

$$Q_1 = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

c) O número total de (2)-subespaços é:

$$\phi(3, 2, 2) = \frac{(2^4 - 1)(2^3 - 1)(2^2 - 1)}{(2^3 - 1)(2^2 - 1)(2 - 1)} = 15$$

c') O número total de (1)-subespaços é

$$\phi(3,1,2) = \frac{(2^4-1)(2^3-1)}{(2^2-1)(2-1)} = 35$$

d) O número total de (2)-subespaços que passam por um ponto fixo é:

$$\phi(2,1,2) = \frac{(2^3-1)(2^2-1)}{(2^2-1)(2-1)} = 7$$

d') O número total de (1)-subespaços que passam por um ponto fixo é:

$$\phi(2,0,2) = \frac{(2^3-1)}{2-1} = 7$$

e) O número total de (2)-subespaços que passam por dois pontos fixos é:

$$\phi(1,0,2) = \frac{2^2-1}{2-1} = 3$$

e') O número total de (1)-subespaços que passam por dois pontos fixos é:

$$\phi(1,-1,2) = 1.$$

Temos então por (E.1.2):

Equação

(2)-subespaço

$$x_0 = 0 \quad \{S_1 = 0001, 0010, 0100, 0011, 0101, 0110, 0111\}$$

$x_1 = 0$	S_2	$= \{0001, 0010, 1000, 0011, 1001, 1010, 1011\}$
$x_2 = 0$	S_3	$= \{0001, 0100, 1000, 0101, 1001, 1100, 1101\}$
$x_3 = 0$	S_4	$= \{0010, 0100, 1000, 0110, 1010, 1100, 1110\}$
$x_0 + x_1 = 0$	S_5	$= \{0001, 0010, 0011, 1100, 1101, 1110, 1111\}$
$x_0 + x_2 = 0$	S_6	$= \{0001, 0100, 0101, 1010, 1110, 1011, 1111\}$
$x_0 + x_3 = 0$	S_7	$= \{0100, 0010, 0110, 1001, 1101, 1011, 1111\}$
$x_1 + x_2 = 0$	S_8	$= \{0001, 1000, 1001, 0110, 1110, 0111, 1111\}$
$x_1 + x_3 = 0$	S_9	$= \{1000, 0010, 1010, 0101, 1101, 0111, 1111\}$
$x_2 + x_3 = 0$	S_{10}	$= \{1000, 0100, 0011, 1100, 1011, 0111, 1111\}$
$x_0 + x_1 + x_2 = 0$	S_{11}	$= \{0001, 0111, 1011, 1101, 0110, 1010, 1100\}$
$x_0 + x_1 + x_3 = 0$	S_{12}	$= \{0010, 1011, 1110, 0111, 1001, 0101, 1100\}$
$x_0 + x_2 + x_3 = 0$	S_{13}	$= \{0011, 1001, 1010, 1101, 1110, 0111, 0100\}$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$	S_{14}	$= \{1000, 0110, 0011, 0101, 1011, 1101, 1110\}$
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$	S_{15}	$= \{0011, 1001, 1010, 1100, 0110, 0101, 1111\}$

E,

Equações

(1)-subespaços

$x_0 = x_1 = 0$	$S_1 = \{0001, 0010, 0011\}$
$x_0 = x_2 = 0$	$S_2 = \{0001, 0100, 0101\}$
$x_0 = x_3 = 0$	$S_3 = \{0100, 0010, 0110\}$
$x_1 = x_2 = 0$	$S_4 = \{1000, 0001, 1001\}$
$x_1 = x_3 = 0$	$S_5 = \{1000, 0010, 1010\}$
$x_2 = x_3 = 0$	$S_6 = \{1000, 0100, 1100\}$
$x_0 + x_1 = x_2 = 0$	$S_7 = \{0001, 1100, 1101\}$
$x_0 + x_1 = x_2 = 0$	$S_8 = \{0010, 1100, 1110\}$

$x_0+x_2 = x_1 = 0$	$S_9 = \{0001, 1010, 1011\}$
$x_0+x_2 = x_3 = 0$	$S_{10} = \{0100, 1010, 1110\}$
$x_0+x_3 = x_1 = 0$	$S_{11} = \{0010, 1001, 1011\}$
$x_0+x_3 = x_2 = 0$	$S_{12} = \{0100, 1001, 1101\}$
$x_1+x_2 = x_0 = 0$	$S_{13} = \{0001, 0110, 0111\}$
$x_1+x_2 = x_3 = 0$	$S_{14} = \{1000, 0110, 1110\}$
$x_2+x_3 = x_0 = 0$	$S_{15} = \{0010, 0101, 0111\}$
$x_2+x_3 = x_1 = 0$	$S_{16} = \{1000, 0011, 1011\}$
$x_1+x_3 = x_0 = 0$	$S_{17} = \{0010, 0101, 0111\}$
$x_1+x_3 = x_2 = 0$	$S_{18} = \{1000, 0101, 1101\}$
$x_0+x_1 = x_2+x_3 = 0$	$S_{19} = \{0011, 1100, 1111\}$
$x_0+x_2 = x_1+x_3 = 0$	$S_{20} = \{0101, 1010, 1111\}$
$x_0+x_3 = x_1+x_2 = 0$	$S_{21} = \{0110, 1001, 1111\}$
$x_0+x_1+x_2 = x_3 = 0$	$S_{22} = \{1100, 1010, 0110\}$
$x_0+x_1+x_3 = x_2 = 0$	$S_{23} = \{1100, 1001, 0101\}$
$x_0+x_2+x_3 = x_1 = 0$	$S_{24} = \{0011, 1001, 1010\}$
$x_1+x_2+x_3 = x_0 = 0$	$S_{25} = \{0011, 0101, 0110\}$
$x_0+x_1+x_2 = x_0+x_2+x_3 = 0$	$S_{26} = \{0111, 1010, 1101\}$
$x_0+x_1+x_2 = x_1+x_2+x_3 = 0$	$S_{27} = \{0110, 1011, 1101\}$
$x_0+x_1+x_2 = x_0+x_1+x_3 = 0$	$S_{28} = \{0111, 1011, 1100\}$
$x_0+x_1+x_3 = x_1+x_2+x_3 = 0$	$S_{29} = \{1110, 1011, 0101\}$
$x_0+x_2+x_3 = x_1+x_2+x_3 = 0$	$S_{30} = \{1110, 1101, 0011\}$
$x_0+x_2+x_3 = x_0+x_1+x_3 = 0$	$S_{31} = \{1110, 0111, 1001\}$
$x_1 = x_2 = x_3$	$S_{32} = \{1000, 0111, 1111\}$
$x_0 = x_2 = x_3$	$S_{33} = \{0100, 1011, 1111\}$

$$x_0 = x_1 = x_3 \quad S_{34} = \{0010, 1101, 1111\}$$

$$x_0 = x_1 = x_2 \quad S_{35} = \{0001, 1110, 1111\}$$

E.2 - Geometria Euclidiana Finita (EG(n,s))

Ainda com o auxílio de um corpo de Galois $GF(s)$, é possível construir uma geometria Euclidiana Finita de dimensão n , a qual será denotada por $EG(n,s)$, da seguinte maneira:

Qualquer conjunto ordenado de n elementos

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

onde $x_i \in GF(s)$, $i=1, 2, \dots, n$, representará um ponto da nossa geometria. Dois conjuntos ordenados (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) representam o mesmo ponto quando e somente quando $y_i = x_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Os elementos x_1, x_2, \dots, x_n são chamados de coordenadas do ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Cada ponto contém n coordenadas, as quais são elementos de $GF(s)$ que tem s elementos. Desta forma, o número total de pontos na $EG(n,s)$ é dado por:

$$E_n = s^n \quad (E.2.1)$$

Todos os pontos que satisfazem a um conjunto de $n-m$ equações consistentes e linearmente independentes

$$\begin{aligned}
 a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\
 a_{20} + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\
 \vdots & \\
 a_{(n-m)0} + a_{(n-m)1}x_1 + \dots + a_{(n-m)n}x_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{E.2.2}$$

onde $a_{ij} \in GF(s)$, $i=1,2,\dots,n-m$, $j=1,2,\dots,n$, formam um (m) -subespaço da $EG(n,s)$, e qualquer outro conjunto de $n-m$ equações consistentes e linearmente independentes obtidas através de combinações lineares das equações acima, determinam o mesmo (m) -subespaço.

Em (E.2.2) temos n incógnitas e $(n-m)$ equações. As soluções em (E.2.2) são:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_m \xi_m
 \tag{E.2.3}$$

onde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ são quaisquer m vetores coluna linearmente independentes satisfazendo (E.2.2) e $a_i \in GF(s)$.

Em (E.2.3), cada a_i pode ser escolhido de s maneiras. Logo, o número de pontos distintos que satisfazem (E.2.2), isto é, o número de pontos distintos do (m) -subespaço é dado por:

$$E_m = s^m
 \tag{E.2.4}$$

Para obter o número total de (m) -subespaços na $EG(n,s)$, podemos usar o mesmo argumento em (E.1.5). Desta forma:

$$\begin{aligned} & \frac{E_n (E_n - E_0) (E_n - E_1) \dots (E_n - E_{m-1})}{E_m (E_m - E_0) (E_m - E_1) \dots (E_m - E_{m-1})} = \\ & = \frac{s^n (s^n - 1) (s^n - s) \dots (s^n - s^{m-1})}{s^m (s^m - 1) (s^m - s) \dots (s^m - s^{m-1})} = \\ & = s^{n-m} \phi(n-1, m-1, s) = \phi(n, m, s) - \phi(n-1, m, s) \end{aligned} \quad (E.2.5)$$

Seguindo o mesmo argumento em (E.2.5), temos que:

O número de (m) -subespaços distintos que contêm um ponto fixo é dado por:

$$\phi(n-1, m-1, s).$$

E o número de (m) -subespaços distintos que contêm dois pontos fixos é dado por:

$$\phi(n-2, m-2, s).$$

EXEMPLO (E.2.1) - Para $n=2$ e $s=3$, cada ponto da $EG(2,3)$ será representado por duas coordenadas x_1 e x_2 , onde $x_i = 1$ ou 2 ($i=1,2$). Assim,

a) O número total de pontos da $EG(2,3)$ é

$$E_2 = 3^2 = 9$$

b) O número total de pontos em cada (1) -subespaço é:

$$E_1 = 3$$

c) O número total de (1)-subespaços é:

$$3\phi(1,0,3) = 3 \frac{3^2-1}{3-1} = 12$$

d) O número total de (1)-subespaços que contem um ponto fixo é

$$\phi(1,0,3) = \frac{(3^2-1)}{(3-1)} = 4$$

e) O número total de (1)-subespaços que contém dois pontos fixos é:

$$\phi(0,-1,3) = 1.$$

De acordo com (E.2.2), temos:

<u>EQUAÇÃO</u>	<u>(1)-Subespaços</u>
$x_1 = 0$	$S_1 = \{00, 01, 02\}$
$x_1 = 1$	$S_2 = \{10, 11, 12\}$
$x_1 = 2$	$S_3 = \{20, 21, 22\}$
$x_2 = 0$	$S_4 = \{00, 10, 20\}$
$x_2 = 1$	$S_5 = \{01, 11, 21\}$
$x_2 = 2$	$S_6 = \{02, 12, 22\}$
$x_1+x_2 = 0$	$S_7 = \{00, 12, 21\}$
$x_1+x_2 = 1$	$S_8 = \{01, 10, 22\}$
$x_1+x_2 = 2$	$S_9 = \{02, 20, 11\}$
$x_1+2x_2 = 0$	$S_{10} = \{00, 11, 22\}$
$x_1+2x_2 = 1$	$S_{11} = \{10, 02, 21\}$
$x_1+2x_2 = 2$	$S_{12} = \{20, 12, 01\}$

Se excluimos um ponto da $EG(n,s)$ e todos os (m) -subespaços que o contém, temos:

O número de pontos que restam é:

$$E_{n-1} = s^{n-1}$$

O número de (m) -subespaços que restam é:

$$s^{n-m} \phi(n-1, m-1, s) - \phi(n-1, m-1, s) = (s^{n-m} - 1) \phi(n-1, m-1, s)$$

O número de pontos em cada (m) -subespaço continua:

$$E_m = s^m$$

O número de (m) -subespaços que passam por um ponto fixo é

$$\phi(n-1, m-1, s) - \phi(n-2, m-2, s)$$

□

REFERÊNCIAS

Para trabalhos anteriores a 1969, consultar Ragavarao (1971). Fazemos a seguir referência a alguns trabalhos mais recentes.

- [1] - Aggarwal, K.R. (1972) - A note on construction of Triangular PBIB Design with parameters $v = 21$, $b = 35$, $r = 10$, $k = 6$, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.
- [2] - Hamada, N. (1974) - On Geometrical Method of Construction of Group Divisible Incomplete Block Designs, Ann. Stat., 2, 1351-1356.
- [3] - John, P.W.M. (1970) - The Folded cubic Association Scheme, Ann. Math. Stat., 41, 1983-1991.
- [4] - Kageyama, Sanpei (1972) - On the reduction of Associate classes for certain PBIB designs, Ann. Math. and Stat., 43, 1528-1540.
- [5] - Kiefer, J. (1975) - Balanced Block Designs and Generalized Youden Designs. I. Construction (Patchwork), Ann. Math. Stat., 3, 109-118.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Bose, R.C. - On the Application of the properties of Galois Fields to the Problem of Construction of Hyper-Graeco-Latin Squares. Sankhya, 3, 323-338, 1938.
- [2] - Bose, R.C. - Combinatorial properties of Partially Balanced Designs and Association Schemes, Sankhya, A 25, 109-136, 1963.
- [3] - Bose, R.C. - On the construction of balanced incomplete block designs, Ann. Eugen., 9, 353-399, 1939.
- [4] - Bose, R.C. and Nair, K.R. - Partially Balanced Incomplete Block Designs, Sankhya, 4, 337-372, 1939.
- [5] - Bose, R.C. and Shimamoto, T. - Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes, J.Am.Stat.Assn., 47, 151-184, 1952.
- [6] - Bose, R.C., Shrikhande, S.S., Clatworthy, W.H. - Tables of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes, North Carolina Agricultural Experimental Bulletin, 17, 1954.
- [7] - Connor, W.S. and Clatworthy, W.H. - Some theorems for partially balanced designs, Ann.Math.Stat., 25, 100-112, 1954.
- [8] - Clatworthy, W.H. - A geometrical configuration which is a partially balanced design. Proc.Am.Math.Soc.,

5, 47, 1954.

- [9] - Clatworthy, W.H. - Some new families of partially balanced designs of the latin square type and related designs, Technometrics, 9, 229-243, 1967.
- [10] - Clatworthy, W.H. - Partially Balanced Incomplete Block Designs with two Associate Classes and two treatments per block, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 54, 177-190.
- [11] - Clatworthy, W.H., On John's Cyclic Incomplete Block Designs, The J. Royal Soc., B-29, 243-247.
- [12] - Hedayat, A and John, P.W.M. - Resistant and Susceptible BIB designs, Ann. Stat., 2, 148-158, 1974.
- [13] - John, P.W.M. - Statistical Design and Analysis of Experiments, The Macmillan Company, 1971.
- [14] - Raghavarao, D. - Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments, John Wiley & Sons Inc., 1971.
- [15] - Stevens, W.L. - Desenvolvimentos Modernos do Delineamento de Experiências, Ciência e Cultura, 1, 17-28, 1950.