MEDIDAS INVARIANTES PARA UM PROCESSO DE MISTURA HOMOGENÊO DE ALCANCE LIMITADO

IRENE MORSOLETTO FERREIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

ORIENTADOR: PROF. DR. ANTONIO GALVES

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FAPESP

- SÃO PAULO, OUTUBRO DE 1982 -

SUMÁRIO

Introdução. 1

1ª. Parte

Definições e Notações 4

Enunciado do Teorema I. 6

Enunciado do Teorema II 8

2ª. Parte

Demonstração do Teorema I 9

Demonstração do Teorema II. 26

Referências bibliográficas. 47

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é o estudo de uma classe de sistemas Markovianos de Partículas introduzida por Lee [5] e Harris [3], que chamaremos de Processos de Mistura.

Estes processos podem ser descritos intuitivamente da seguinte forma: partículas são dispostas nos pontos de Z, cada ponto podendo ter uma ou nenhuma partícula. Essas partículas evoluem pelo efeito de permutações, que atuam sobre conjuntos finitos de posições, escolhidas ao acaso, ao longo do tempo, segundo um Processo Pontual de Poisson, σ-finito, definido no espaço produto, tempo $\times$ conjunto das permutações.

Nota-se que um caso particular dos processo de Mistura, são os Processos de Exclusão Simples Simétrico, estudados por Spitzer [9] e Liggett [6] e [7].

Nossa principal preocupação é caracterizar completamente o conjunto das medidas de probabilidade invariantes para os Processos de Mistura. Lee, em seu trabalho, simplesmente mostra que uma certa classe de medidas de probabilidade é invariante em relação ao Processo, identificando também uma parte de seu domínio de atração. No entanto, não demonstra que es-

tas são as únicas medidas de probabilidade invariantes.

Resultados semelhantes aos de Lee são obtidos em [2], onde também se generalizam os Processos de Exclusão Simétricos, para uma classe de sistemas em $\mathbb{R}$.

Estes resultados, contudo, estão aquém daqueles obtidos por Liggett e Spitzer, que demonstraram que as probabilidades permutáveis são as únicas invariantes, com respeito ao Processo de Exclusão Simples Simétrico.

Neste trabalho, conseguimos estender esta caracterização para os Processos de Mistura Homogêneos, nos quais o alcance das permutações aplicadas é limitado.

Nossa técnica, semelhante àquela empregada por Spitzer [9], baseia-se num acoplamento entre dois Processos de Mistura com um número finito de partículas. Esse acoplamento é a generalização natural, daquele que Liggett, em seu curso de St. Flour, chama de acoplamento básico.

A limitação no alcance máximo das permutações é uma restrição puramente técnica e dela trataremos de nos desvencilhar, num próximo trabalho.

Como etapa prévia, apenas para que a apresentação fique completa, iniciamos o trabalho construindo o processo. Não utilizamos aqui, a restrição no alcance máximo das permutações. Nossa construção é semelhante àquela feita em [1], para sistemas aditivos em geral, reescrita para o caso particular que nos interessa.

Com o objetivo de facilitar a leitura, dividimos o trabalho em duas partes: na primeira apresentamos as definições e enunciamos os dois grandes teoremas que serão demonstrados na segunda parte. O primeiro teorema é demonstrado utilizando-se a propriedade da aditividade e dualidade.

A existência do processo dual, será largamente utilizada na demonstração do segundo teorema, onde provamos que o conjunto das medidas de probabilidade permutáveis coincide com o conjunto de medidas invariantes para o Processo; sendo esse nosso principal resultado, pelo seu caráter novo e original.

- o -

1ª PARTE

DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES

1- $$\sum = \bigcup_{\substack{x \in z \\ n=2,3\ldots}} \sum_{x,n}$$

onde

$$\sum_{x,n} = \left\{ \begin{array}{l} \pi : \{x, x+1, \ldots, x+n-1\} \longrightarrow \{x, x+1, \ldots, x+n-1\} / \pi \text{ é bijeção e} \\ \pi(x) \neq x, \ \pi(x+n-1) \neq x+n-1 \end{array} \right\}$$

Em outras palavras, $\sum_{x,n}$ é o conjunto das permutações de $\{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$ que não deixam fixados nem x, nem $(x+n-1)$.

OBSERVAÇÃO - Essa última restrição é feita, a fim de que, toda permutação aplicada em $\{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$, $x \in Z$, $n = 2, 3, \ldots$, pertença a um e apenas um sub-conjunto $\sum_{x,n}$.

2 - $\lambda : \sum \longrightarrow \mathbb{R}_+$, invariante por translação, ou seja, $\forall x \in Z$, $n = 2, 3, \ldots$. Se, $\pi \in \sum_{0,n}$ e $\pi' \in \sum_{x,n}$ com $\pi'(x+i) = x + \pi(i), \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$, então

$$\lambda(\pi) = \lambda(\pi')$$

OBSERVAÇÃO - $\pi \in \sum$ pode ser considerada como uma bijeção de Z em Z da seguinte maneira: se $\pi \in \sum_{x,n}$, então definimos a sua extensão como a aplicação identidade fora do conjunto $\{x, \ldots, x+n-1\}$

e coincidindo com π no conjunto $\{x_1,\ldots,x+n-1\}$. Por abuso de linguagem denotaremos essa extensão, também por π.

3 - $S = \{0,1\}^Z$

$\hat{S} = \left\{\eta\in S \,\middle|\, \sum_{x\in Z} \eta(x) < \infty\right\}$

E = conjunto das partes de Z

$\hat{E}$ = conjunto das partes finitas de Z.

4 - Para $\pi\in\sum$, seja π^{-1} a bijeção inversa, isto é,

$$\pi^{-1}(y) = x \iff \pi(x) = y, \qquad \forall x\in Z,\ \forall y\in Z.$$

5 - Para $\pi\in\sum$ seja $T_\pi : S \longrightarrow S$ tal que $\forall\zeta\in S$ e $\forall x\in Z$

$$T_\pi\zeta(x) = \zeta(\pi^{-1}(x)).$$

6 - $\forall x\in Z,\ I_x = \left\{\pi\in\sum \,\middle|\, \pi(x) \neq x\right\}$

$\forall\eta\in S,\ I_\eta = \left\{\pi\in\sum \,\middle|\, T_\pi\eta \neq \eta\right\}.$

7 - $\forall\pi\in\sum$, suporte $\pi = \{x,x+1,\ldots,x+n-1\}$ se

$\pi(x) \neq x,\ \pi(x+n-1) \neq x+n-1$ e $\pi(z) = z\ \forall z < x$

ou $z > x+n-1$, isto é, $\pi\in\sum_{x,n}$.

8 - $\forall\eta\in S,\ |\eta| = \sum_{x\in Z} \eta(x)$

$\forall A\in E,\ |A|$ = número de elementos do conjunto A.

9 - $\forall\eta,\zeta\in S$, $\eta\vee\zeta$ é um elemento de S, dado por:

$$(\eta\vee\zeta)(x) = \eta(x)\vee\zeta(x), \qquad \forall x\in Z.$$

10 - $\forall\zeta\in S$ ζ^x é um elemento de S, dado por:

$$\zeta^x(z) = \begin{cases} 1 \text{ se } z = x \\ 0 \text{ se } z \neq x. \end{cases}$$

TEOREMAS

TEOREMA I - Seja $\lambda: \sum \longrightarrow \mathbb{R}_+$ invariante por translação e tal que

$$0 < \sum_{\pi \in I_0} \lambda(\pi) < \infty.$$

Então existem duas famílias de funções aleatórias

$$\left\{(\zeta_t^\eta)_{t\geq 0} : \eta \in S\right\} \quad \text{e} \quad \left\{(C_t^A)_{t\geq 0} : A \in \hat{E}\right\},$$

definidas num mesmo espaço de probabilidade (Ω, β, P) e tais que:

1) para todo $\eta \in S$, $(\zeta_t^\eta)_{t\geq 0}$ é um processo de Markov com a propriedade de Feller assumindo valores em S, tendo η como configuração inicial e cujo gerador infinitesimal aplicado a uma função cilíndrica $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ tem o valor

$$Lf = \sum_{\pi \in \Sigma} \lambda(\pi)[f \circ T_\pi - f].$$

Esta família tem a propriedade de aditividade seguinte: para todo $\eta \in S$, $\zeta \in S$, $\omega \in \Omega$ e $t \geq 0$,

$$\zeta_t^{\eta \vee \zeta}(\omega) = \zeta_t^\eta(\omega) \vee \zeta_t^\zeta(\omega).$$

2) para todo $A \in \hat{E}$, $(C_t^A)_{t\geq 0}$ é um processo Markoviano de Salto, assumindo valores em $\hat{E}$, tendo $\bar{A}$ como elemento i-

nicial e cujo gerador infinitesimal aplicado a uma função limitada $f: \hat{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem o valor:

$$\hat{L}f = \sum_{\pi \in \Sigma} \hat{\lambda}(\pi^{-1})[f_0\pi^{-1} - f].$$

Esta família tem a seguinte propriedade de aditividade: quaisquer que sejam $A \in \hat{E}$, $B \in \hat{E}$, $\omega \in \Omega$ e $t \geq 0$:

$$C_t^{A \cup B}(\omega) = C_t^A(\omega) \cup C_t^B(\omega).$$

3) As duas famílias são ligadas pela propriedade de dualidade dada por: $\forall t \geq 0$, $A \in \hat{E}$ e $\eta \in S$.

$$E[\prod_{x \in A} \zeta_t^\eta(\omega)] = E[\prod_{x \in C_t^A(\omega)} \eta(x)].$$

OBSERVAÇÃO 1 - O processo de Markov (ζ_t^η) será chamado de Processo de Mistura definido pela aplicação λ.

OBSERVAÇÃO 2 - Se identificarmos $\hat{E}$ com o conjunto $\{\zeta \in S: |\zeta| < \infty\}$ da maneira habitual, a cada conjunto $A \in \hat{E}$ fazemos corresponder a configuração $1_A \in S$ definida como

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A, \end{cases}$$

então o processo (C_t^A) também é um processo de Mistura definido pela aplicação $\hat{\lambda}$ tal que $\hat{\lambda}(\pi) = \lambda(\pi^{-1})$. Isso faz com que a a parte 2, do Teorema I, seja uma conseqüência direta da parte 1 do mesmo teorema.

OBSERVAÇÃO 3 - O Processo de Mistura (ζ_t^η) satisfaz ainda a seguite expressão para a propriedade da aditividade:

$$\zeta_t^\eta(\omega) = \sum_{x:\eta(x)=1} \zeta_t^{\zeta_x}(\omega).$$

TEOREMA II - O processo de Mistura, definido no Teorema I, tem como conjunto de distribuições invariantes as medidas de probabilidade permutáveis.

- o -

2ª PARTE

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA I*

a) Construção do Processo

Seja $\eta \in \hat{S}$. Nessas condições o processo $(\zeta_t^\eta)_{t\geq 0}$ será o Processo Markoviano de Salto, assumindo valores no espaço

$$\left\{\zeta \in \hat{S} : \sum_x \zeta(x) = \sum_x \eta(x)\right\}.$$

Esse processo permanecerá em uma configuração η, um tempo exponencial de parâmetro $\sum_{\pi \in I_\eta} \lambda(\pi)$ ao cabo do qual pulara para uma nova configuração ζ, escolhida ao acaso com probabilidade $Q(\eta,\zeta)$ dada por:

$$Q(\eta,\zeta) = \frac{\sum_{\substack{\pi \in I_\eta : \\ T_\pi(\eta)=\zeta}} \lambda(\pi)}{\sum_{\pi \in I_\eta} \lambda(\pi)}$$

Observemos que $Q(\eta,\eta) = 0$, $\forall \eta \in \hat{S}$ e que $\sum_{\pi \in I_\eta} \lambda(\pi) > 0$ já que supomos que $\sum_{\pi \in I_0} \lambda(\pi) > 0$.

(*) - A demonstração não segue a ordem do enunciado.

Os instantes sucessivos de salto do processo serão chamados de $T_0^\eta, T_1^\eta, T_2^\eta \ldots$ e as posições sucessivas por ele assumidas, serão chamadas de $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots$, ou seja, para todo $n \geq 0$

$$\zeta_t^\eta = \eta_n \quad \text{se} \quad T_n^\eta \leq t < T_{n+1}^\eta$$

com $T_0^\eta = 0$ e $\eta_0 = \eta$.

Passemos à construção do processo.

Consideremos $\{N^\pi : \pi \in \Sigma\}$ uma família de processos pontuais de Poisson, em $\mathbb{R}_+$, independentes, de parâmetros $\lambda(\pi)$ definidos no espaço de probabilidade (Ω, β, P).

OBSERVAÇÃO 1 - Como Σ é enumerável, o conjunto de realizações para as quais há coincidências nos tempos de salto de ao menos dois dos processos pontuais de Poisson, tem medida nula. Podemos portanto considerar Ω como sendo o conjunto de realizações para as quais não há coincidências.

Seja N um processo de Poisson, σ-finito, definido em $]0,\infty[\times \Sigma$, munido da σ-álgebra, produto da σ-álgebra boreliana e da σ-álgebra das partes de Σ, dado por:

$$N(B \times I; \cdot) = \sum_{\pi \in I} N^\pi(B; \cdot), \qquad \forall B \in \beta([0,\infty[) \qquad \text{(a.1)}$$

e $I \in \Sigma$, I finito.

Seja ainda, A_t a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{N(]0,s] \times I, \cdot) : 0 < s \leq t, I \subset \Sigma\}$.

Definimos então:

$$T_1^\eta = \inf\left\{t\geq 0:\ N(]0,t]\times I_\eta)>0\right\}.$$

Como:

$$\sum_{\pi\in I_\eta}\lambda(\pi) \leq \sum_{\substack{x\in Z:\\ \eta(x)=1}}\ \sum_{\substack{\pi\in\Sigma:\\ T_\pi\eta(x)\neq\eta(x)}}\lambda(\pi) \leq \sum_{\substack{x\in Z:\\ \eta(x)=1}}\ \sum_{\pi\in I_x}\lambda(\pi) =$$

$$= \sum_{\substack{x\in Z:\\ \eta(x)=1}}\ \sum_{\pi'\in I_0}\lambda(\pi') = |\eta|\sum_{\pi'\in I_0}\lambda(\pi') < \infty, \qquad (a.2)$$

resulta que T_1^η é variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\sum_{\pi\in I_\eta}\lambda(\pi)$.

Suponhamos que $\pi_1\in\Sigma$ seja a (única) transformação ocorrida no instante T_1^η; π_1 e T_1^π são variáveis aleatórias independentes e

$$P(\pi_1=\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\sigma)}{\sum_{\pi\in I_\eta}\lambda(\pi)}, & \text{se } T_\sigma(\eta)\neq\eta \\ 0 & \text{, caso contrário.}\end{cases}$$

Denotando por η_1 o estado do processo ζ_t^η, depois da primeira transformação, isto é,

$$\eta_1 = T_{\pi_1}(\eta),$$

temos:

$$Q(\eta,\eta_1) = \sum_{\substack{\sigma\in I_\eta: \\ T_\sigma\eta=\eta_1}} P(\pi_1=\sigma) = \frac{\sum_{\substack{\sigma\in I_\eta: \\ T_\sigma\eta=\eta_1}} \lambda(\sigma)}{\sum_{\pi\in I_\eta} \lambda(\pi)} .$$

Prosseguindo na construção dos tempos de salto, definimos

$$T_2^\eta = \inf\left\{t>T_1 : N(]T_1,t]\times I_{\eta_1})>0\right\}.$$

Como T_1^η é tempo de parada para o processo N e, η_1 (e portanto I_{η_1}) é $A_{T_1^\eta}$-mensurável, temos que, condicionalmente em $A_{T_1^\eta}$, $T_2^\eta - T_1^\eta$ é uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\sum_{\pi\in I_{\eta_1}} \lambda(\pi) < \infty$.

Seja π_2 a (única) transformação ocorrida no instante T_2^η. Temos que

$$P(\pi_2=\sigma,\ T_2^\eta-T_1^\eta>t/A_{T_1^\eta}) = \frac{\lambda(\sigma)}{\sum_{\pi\in I_{\eta_1}} \lambda(\pi)} \cdot e^{-t\sum_{\pi\in I_{\eta_1}} \lambda(\pi)}$$

e definimos o elemento η_2 como

$$\eta_2 = T_{\pi_2}(\eta_1).$$

Por recorrência, temos então $\forall n \geq 0$

$$T_{n+1}^\eta = \inf\left\{t>T_n^\eta : N(]T_n^\eta,t]\times I_{\eta_n})>0\right\}$$

e

$$\eta_{n+1} = T_{\pi_{n+1}}(\eta_n)$$

onde π_{n+1} é a (única) transformação ocorrida no instante T^{η}_{n+1}.

OBSERVAÇÃO 2 - Para maiores esclarecimentos, no que se refere às propriedades do processo pontual de Poisson utilizadas aqui, ver Ito [4].

b) Continuando a demonstração do teorema, provemos que o processo construído acima é não explosivo, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} T^{\eta}_n = \infty \text{ quase certamente (q.c.)}, \forall \eta \in \hat{S}.$$

Para isso provemos o seguinte lema.

LEMA 1 - Seja $(T_n)_{n\geq 1}$ os instantes de salto de um processo de Markov (X_t) a valores num conjunto F, enumerável e suponhamos ainda que as taxas de salto $q(\cdot)$, satisfaçam a seguinte condição:

$$\sup_{x\in F} q(x) = M < \infty.$$

Então

$$P(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ a cadeia imersa do processo $(X_t)_{t\geq 0}$.

Tomemos uma seqüência de variáveis aleatórias, (U_n, V_n) $n \geq 1$,

independentes, de leis exponenciais de parâmetros $q(Y_n)$ e $M - q(Y_n)$ respectivamente e definimos $\forall n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \min(U_i, V_i).$$

As variáveis aleatórias $T_1, T_2, \ldots,$ são dadas por:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i, \qquad \forall n \geq 1,$$

e portanto, $\forall n \geq 1$.

$$S_n < T_n \quad \text{q.c.}$$

Por outro lado, pela lei dos grandes números:

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{M} \quad \text{q.c.}$$

o que implica

$$S_n \longrightarrow \infty \quad \text{q.c.}$$

e portanto,

$$T_n \longrightarrow \infty \quad \text{q.c.} \qquad \square$$

Voltando ao processo (ζ_t^η), observamos que se

$$\eta \in \hat{S}_r = \left\{ \zeta \in \hat{S} : |\zeta| = r \right\} \text{ para } r = 1, 2, \ldots,$$

então $\forall t \geq 0$, $\zeta_t^\eta \in \hat{S}_r$, conjunto enumerável, e como

$$\max_{\eta \in \hat{S}_r} \sum_{\pi \in I_\eta} \lambda(\pi) \leq \Gamma \cdot \sum_{\pi \in I_0} \lambda(\pi) < \infty,$$

temos, pelo Lema 1,

$$P(\lim_{n\to\infty} T_n^{\eta} = \infty) = 1.$$

c) a demonstração da propriedade de aditividade para o processo em questão é dada a seguir.

Observemos que $\forall \eta, \zeta \in S$ e $\pi \in \Sigma$.

C.1 - $\quad T_\pi \eta(x) \vee T_\pi \zeta(x) \leq 1, \qquad \forall x \in Z.$

C.2 - $\quad T_\pi(\eta \vee \zeta) = T_\pi \eta \vee T_\pi \zeta.$

Tomemos $\eta, \zeta \in \hat{S}$ e ordenemos os instantes de salto de ζ_t^{η} e ζ_t^{ζ} numa seqüência crescente U_n. Chamemos π_n a transformação ocorrida no instante U_n, $n \geq 1$.

OBSERVAÇÃO 1 - Se U_n é um instante de salto para os dois processos, ζ_t^{η} e ζ_t^{ζ}, então a transformação que atua no processo ζ_t^{η} coincide com a transformação que atua em ζ_t^{ζ} nesse instante.

Provemos por indução, que $\forall n \geq 1$, $t \in [U_n, U_{n+1}[$

$$\zeta_t^{\eta \vee \zeta} = \zeta_t^{\eta} \vee \zeta_t^{\zeta} \qquad \text{(c.3)}$$

i) para $t \in [U_1, U_2[$, suponhamos que U_1 é um instante de salto para o processo ζ_t^{η}. Então

$$\zeta_t^{\eta} = T_{\pi_1}(\eta) \neq \eta \quad \text{e} \quad \zeta_t^{\zeta} = T_{\pi_1}(\zeta) \neq \zeta$$

ou

$$\zeta_t^{\zeta} = T_{\pi_1}(\zeta) = \zeta,$$

isto é, U_1 é ou não um instante de salto para o processo (ζ_t^ζ).

Se $t < U_1$, então $\zeta_t^{\eta\vee\zeta} = \eta\vee\zeta$ pois, supondo por absurdo que $T_1 < U_1$ é um instante de salto para o processo $\zeta_t^{\eta\vee\zeta}$ e π a transformação ocorrida em T_1,

$$\zeta_t^{\eta\vee\zeta} = T_\pi(\eta\vee\zeta) \neq \eta\vee\zeta, \qquad \text{se } t > T_1,$$

o que implica, por (c.2), que:

$$T_\pi\eta \neq \eta \text{ ou } T_\eta\zeta \neq \zeta \text{ e } T_1$$

é um instante de salto para ζ_t^η ou ζ_t^ζ. Mas isso é absurdo, pela construção dos U_i, $i = 1,2,\ldots$.

Então

$$\zeta_t^{\eta\vee\zeta} = \zeta_t^\eta\vee\zeta_t^\zeta, \qquad \text{se } t\in[0,U_1[$$

e

$$\zeta_t^{\eta\vee\zeta} = T_{\pi_1}(\eta\vee\zeta) = \zeta_t^\eta\vee\zeta_t^\zeta, \qquad \text{se } t\in[U_1,U_2[.$$

Supondo (c.3) verdadeiro para $t\in[U_n,U_{n+1}[$, $\forall n \leq k-1$, temos:

ii) se $t\in[U_k,U_{k+1}[$ e U_k é um instante de salto para o processo ζ_t^η, então:

$$\zeta_t^\eta = T_{\pi_k}(\zeta_{U_{k-1}}^\eta) \neq \zeta_{u_{k-1}}^\eta \quad \text{e} \quad \zeta_t^\zeta = T_{\pi_k}(\zeta_{U_{k-1}}^\zeta).$$

Por outro lado, para $t \neq U_i$, $i \leq k$, t não é um instante

de salto para o processo $\zeta_t^{\eta\vee\zeta}$ e se $t\in[U_k,U_{k+1}[$

$$\zeta_t^{\eta\vee\zeta} = T_{\pi_k}(\zeta_{U_{k-1}}^{\eta\vee\zeta}) = T_{\pi_k}(\zeta_{U_{k-1}}^{\eta}) \vee T_{\pi_k}(\zeta_{U_{k-1}}^{\zeta}) = \zeta_t^{\eta} \vee \zeta_t^{\zeta}.$$

d) Propriedade da dualidade

LEMA 2 - Seja $(C_t^A)_{t\geq 0}$, $A\in\hat{E}$, o processo Markoviano de salto, definido em (I-2). Então, sob as condições do Teorema I-1 e I-2, para todo $t\geq 0$, $A\in\hat{E}$ e $\eta\in\hat{S}$,

$$E\left[\prod_{x\in A}\zeta^{\eta}(\omega,x)\right] = E\left[\prod_{x\in C_t^A(\omega)}\eta(x)\right].$$

DEMONSTRAÇÃO - Consideremos inicialmente que $\sum_{\pi\in\Sigma}\lambda(\pi) = c < \infty$ (basta supor que para partículas suficientemente afastadas, não há interação).

Então:

$$E\left[\prod_{x\in A}\zeta_t^{\eta}(x)\right] = P(\zeta_t^{\eta}(x)=1,\ x\in A) =$$

$$= \sum_{\substack{n\geq 1\\ \pi_1\pi_2\cdots\pi_n}} \frac{e^{-tc}t^n}{n!}\lambda(\pi_1)\ldots\lambda(\pi_n)\ 1_{(T_{\pi_n}0\ldots0T_{\pi_1}(\eta(x)=1,\ \forall x\in A)} =$$

$$= \sum_{\substack{n\geq 1\\ \pi_1\pi_2\cdots\pi_n}} \frac{e^{-tc}t^n}{n!}\lambda(\pi_1)\ldots\lambda(\pi_n)1_{(\pi_1^{-1})0\ldots0\pi_n^{-1}(A)\subset\{x:\eta(x)=1\})} =$$

$$= \sum_{\substack{n\geq 1\\ \pi_1\pi_2\cdots\pi_n}} \frac{e^{-tc}t^n}{n!}\hat{\lambda}(\pi_1^{-1})\ldots\hat{\lambda}(\pi_n^{-1})\ 1_{(\pi_1^{-1}0\ldots0\pi_n^{-1}(A)\subset\{x:\eta(x)=1\})} =$$

$$= P(C_t^A\subset\{x:\eta(x)=1\} = E\left[\prod_{x\in C_t^A}\eta(x)\right] \qquad \text{(d.1)}$$

No caso geral, isto é, sem a restrição na $\sum_{\pi\in\Sigma}\lambda(\pi)$, consideremos uma seqüência de conjuntos finitos Σ^n crescendo para Σ, e os geradores

$$L_n f = \sum_{\pi\in\Sigma^n} \lambda(\pi)[f_0 T_\pi - f]$$

definido em $\hat{S}$ para $f: \hat{S} \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada; e

$$\hat{L}_n g = \sum_{\pi\in\Sigma^n} \hat{\lambda}(\pi^{-1})[g_0 \pi^{-1} - g]$$

definido em $\hat{E}$ para $g: \hat{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada.

Os processos $(\zeta_t^{n,\cdot})$ e $(C_t^{n,\cdot})$ de geradores L_n e $\hat{L}_n$, respectivamente, tem a propriedade da dualidade, por (d.1).

Provemos que

$$E\left[\prod_{x\in A} \zeta_t^{n,\eta}(x)\right] \longrightarrow E\left[\prod_{x\in A} \zeta_t^{\eta}(x)\right] \tag{d.2}$$

$$E\left[\prod_{x\in C_t^{n,A}} \zeta(x)\right] \longrightarrow E\left[\prod_{x\in C_t^{A}} \eta(x)\right]. \tag{d.3}$$

quando $n\uparrow\infty$.

Inicialmente, provemos que $\forall\eta\in S$

$$M_t = f(\zeta_t^\eta) - f(\zeta_0^\eta) - \int_0^t Lf(\zeta_{s-}^\eta)ds \tag{d.4}$$

é um martingal.

Por construção ζ_t^η satisfaz:

$$\zeta_t^\eta = \zeta_0^\eta \sum_{\pi\in\Sigma}\int_0^t [T_\pi(\zeta_{s-}^\eta) - \zeta_{s-}^\eta]N^\pi(ds),$$

e qualquer que seja a função cilíndrica f,

$$f(\zeta_t^\eta) = f(\zeta_0^\eta) + \sum_{\pi\in\Sigma}\int_0^t [f(T_\pi(\zeta_{s-}^\eta)) - f(\zeta_{s-}^\eta)]N^\pi(ds),$$

Por outro lado,

$$f(\zeta_t^\eta) = f(\zeta_0^\eta) + \sum_{\pi\in\Sigma}\int_0^t [f(T_\pi(\zeta_{s-}^\eta)) - f(\zeta_{s-}^\eta)](N^\pi-\lambda(\pi))ds +$$

$$+ \sum_{\pi\in\Sigma}\int_0^t [f(T_\pi(\zeta_{s-}^\eta)) - f(\zeta_{s-}^\eta)]\lambda(\pi)ds,$$

o que implica

$$f(\zeta_t^\eta) - f(\zeta_0^\eta) - \int_0^t Lf(\zeta_{s-}^\eta)ds = \sum_{\pi\in\Sigma}\int_0^t Y_s(N^\pi-\lambda(\pi))ds. \quad (d.5)$$

onde $Y_s = f(T_\pi(\zeta_{s-}^\eta)) - f(\zeta_{s-}^\eta)$.

Mas, como o termo à direita de (d.5) é um martingal pois $(N^\pi([0,s])-\lambda(\pi)s)_{s\geq 0}$ é um martingal e Y_s é um processo adaptado e contínuo à esquerda, concluímos que (d.4) é também um martingal.

Temos então que, para todo $n \geq 1$

$$M_t^n = f(\zeta_t^{n,\eta}) - f(\zeta_0^{n,\eta}) - \int_0^t L_n f(\zeta_{s-}^{n,\eta})ds$$

e

$$M_t = f(\zeta_t^\eta) - f(\zeta_0^\eta) - \int_0^t Lf(\zeta_{s-}^\eta)ds$$

são martingais e

$$\frac{\partial}{\partial t} E(M_t^n) = \frac{\partial}{\partial t} Ef(\zeta_t^{n,\eta}) - L_n f(\zeta_t^{n,\eta}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(M_t) = \frac{\partial}{\partial t} Ef(\zeta_t^{\eta}) - Lf(\zeta_t^{\eta}) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} Ef(\zeta_t^{n,\eta}) - \frac{\partial}{\partial t} Ef(\zeta_t^{\eta}) = Lf(\zeta_t^{\eta}) - L_n f(\zeta_t^{n,\eta}).$$

Logo, para provarmos (d.2) é suficiente provarmos que L_n converge para L, fracamente, ou seja para toda função f, cilíndrica,

$$\|L_n f - Lf\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quando } n\uparrow\infty.$$

Mas

$$\|L_n f - Lf\|_\infty = \|\sum_{\pi\notin\Sigma^n} \lambda(\pi)[f_0 T_\pi - f]\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{\pi\notin\Sigma^n} \lambda(\pi)\|f_0 T_\pi - f\|$$

e quando $\Sigma^n\uparrow\Sigma$, $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$, $\|fT_\pi - f\| = 0$, $\forall\pi\notin\Sigma^n$, já que f é função cilíndrica.

A demonstração de (d.3) é análoga e portanto podemos concluir que os processos ζ_t^η e C_t^A tem a propriedade de dualidade qualquer que seja $\eta\in\hat{S}$ e $A\in\hat{E}$. □

Tomemos agora $(\eta_n)_{n\geq 1}$, uma seqüência crescente em $\hat{S}$ que converge para $\eta\in S$ e $A\in\hat{E}$.

Pelo Lema 2, os processos $\zeta_t^{\eta_n}$ e C_t^A tem a propriedade da dualidade $\forall n \geq 1$.

Definimos

$$\zeta_t^{\eta} = \lim_{n\to\infty} \zeta_t^{\eta_n}.$$

Observemos que, como $\zeta_t^{\eta_n}$ tem a propriedade da aditividade e η_n é uma seqüência crescente, então, $(\zeta_t^{\eta_n})_{n\geq 1}$ é também uma seqüência crescente e portanto existe o limite definido acima.

Para concluirmos que $\forall A \in \hat{E}$, $\eta \in S$ e $t \geq 0$,

$$E\left[\prod_{x\in A} \zeta_t^{\eta}(x)\right] = E\left[\prod_{x\in C_t^A} \eta(x)\right],$$

provemos o seguinte lema.

LEMA 3 - ζ_t^{η} definido acima, não depende da particular seqüência $(\eta_n)_{n\geq 1}$ escolhida.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $(\eta_n)_{n\geq 1}$ e $(\zeta_n)_{n\geq 1}$, duas seqüências crescentes em $\hat{S}$ convergindo para η. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \eta,$$

e $\forall k$, $\exists N_k$: $\eta_k \leq \zeta_{N_k}$, o que implica

$$\lim_{k\to\infty} \zeta_t^{\eta_k} \leq \lim_{k\to\infty} \zeta_t^{\zeta_{N_k}} = \lim_{n\to\infty} \zeta_t^{\zeta_n},$$

e analogamente $\forall k$, $\exists M_k$: $\zeta_k \leq \eta_{M_k}$ e

$$\lim_{k\to\infty} \zeta_t^{\zeta_k} \le \lim_{k\to\infty} \zeta_t^{\eta_{M_k}} = \lim_{n\to\infty} \zeta_t^{\eta_n}$$

o que conclui a demonstração. □

Temos, então, pelo Lema 2, que para todo $n \ge 1$,

$$E\left[\prod_{x\in A} \zeta_t^{\eta_n}(x)\right] = E\left[\prod_{x\in C_t^A} \eta_n(x)\right] \qquad (d.6)$$

e tomando o limite, obtemos o resultado desejado, isto é, $(\zeta_t^{\bullet})$ e $(C_t^{\bullet})$ tem a propriedade de dualidade.

OBSERVAÇÃO - Nesse ítem provamos a propriedade enunciada em I-3 e a usaremos a seguir para provar que o processo ζ_t^{η} definido em I-1 tem a propriedade de Feller e que seu gerador é dado por L.

e) Definimos:

$$Q_t(\eta,\cdot) = P(\zeta_t^{\eta}=\cdot), \qquad \forall\eta\in S.$$

Vamos mostrar que $(\zeta_t^{\bullet}, t\ge 0)$ é um processo de Markov, de semi-grupo Q_t e que Q_t é um semi-grupo de Feller.

Observemos que Q_t possui as seguintes propriedades:

i) sua restrição ao conjunto $\hat{S}$ é um semi-grupo pois a propriedade de Markov aplicada a (ζ_t^{η}) para $\eta\in\hat{S}$, permite-nos escrever:

$$Q_{t+s}(\eta,\zeta) = P(\zeta_{t+s}^{\eta}=\zeta) = Q_s Q_t(\eta,\zeta).$$

ii) A aplicação $\eta \longrightarrow Q_t(\eta,\cdot)$ é para todo $t \geq 0$, uma aplicação fracamente contínua de S no conjunto das medidas de probabilidade em S, isto é,

$$\lim_{\eta\to\eta_0} Q_t f(\eta) = Q_t f(\eta_0), \qquad \forall t\geq 0$$

e f, contínua em S.

Basta observar que se η_k é uma seqüência em S que converge para η e

$$g_A(\eta) = \prod_{x\in A} \eta(x),$$

então $\forall k \geq 1$

$$E(g_A(\zeta_t^{\eta_k}) = E(g_{C_t^A}(\eta_k))$$

e como $Eg_A(\zeta_t^{\eta_k})$ converge para $E(g_{C_t^A}(\eta)$ pois C_t^A é finito e se $\eta_k \longrightarrow \eta$, então $\eta_k(x) = \eta(x)$, $\forall x\in C_t^A$, a partir de um certo índice.

Logo,

$$\lim_{k\to\infty} Eg_A(\zeta_t^{\eta_k}) = Eg_{C_t^A}(\eta) = Eg_A(\zeta_t^{\eta}).$$

Para concluir que $(\zeta_t^{\cdot})$ é um processo de Markov de semigrupo (Q_t), resta-nos provar que,

$$E[f(\zeta_s^{\eta})g(\zeta_{t+s}^{\eta})] = \int Q_s(\eta,d\zeta)f(\zeta)\int Q_t(\zeta,d\eta)g(\eta),$$

qualquer que seja f,g, funções contínuas em S.

Consideremos então uma seqüência (η_n) crescente, tal que $\eta_n \in \hat{S}$, $\forall n = 1,2,\ldots$ e η_n cresce para η. Sabemos que $\zeta_s^{\eta_n}$ e $\zeta_{t+s}^{\eta_n}$ crescem respectivamente para ζ_t^{η} e ζ_{t+s}^{η}. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada e pela continuidade da aplicação $\eta \longrightarrow Q_t(\eta,\cdot)$, temos o resultado desejado.

f) Provemos que o gerador de ζ_t é dado por L sobre as funções cilíndricas f.

Mas isso é imediato já que,

$$M_t = f(\zeta_t^{\eta}) - f(\zeta_0^{\eta}) - \int_0^t Lf(\zeta_{s-}^{\eta})ds$$

é um martingal, (ver d.4), e portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} Ef(\zeta_t^{\eta})\Big|_{t=0} = Lf(\eta).$$

g) Para todo $\eta \in S$, a função aleatória (ζ_t^{η}) é q.c. contínua à direita e admite limites à esquerda.

Essa propriedade é verdadeira para $\eta \in \hat{S}$, por construção.

Seja η_n uma seqüência crescente em $\hat{S}$ convergindo para $\eta \in S$.

Para todo $x \in Z$, definimos,

$$\theta_x(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta(x) = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, $\forall t \geq 0$

$$M_t^{\eta_n} = \theta_x(\zeta_t^{\eta_n}) - \theta_x(\eta_n) - \int_0^t L\theta_x(\zeta_{s-}^{\eta_n})ds,$$

é um martingal cad lae, ou seja, as trajetórias do martingal são contínuas à direita e convergem para um limite à esquerda, em cada instante t.

Para todo $t \geq 0$, $M_t^{\eta_n}$ converge quase certamente para

$$M_t^{\eta} = \theta_x(\zeta_t^{\eta}) - \theta_x(\eta) - \int_0^t L\theta_x(\zeta_{s-}^{\eta})ds$$

pois θ_x e $L\theta_x$ são contínuas e limitadas.

Pela desigualdade de Doob, temos:

$$E\left(\sup_{\mu \leq t}\left|M_\mu^{\eta_n} - M_\mu^{\eta_p}\right|^2\right) \leq 4 \cdot E\left(\left|M_t^{\eta_n} - M_t^{\eta_p}\right|^2\right)$$

e a expressão da direita, tende para zero quando n e p tendem ao infinito, pelo teorema da Convergência Dominada.

Logo, uma sub-seqüência $(M_\mu^{\eta_n}(\omega))_n$, converge q.c. em ω, uniformemente em $u \in [0,t]$ para $M_\mu^{\eta}(\omega)$.

Então $(M_t^{\eta}, t \geq 0)$ é q.c. cad lae e como

$$\int_0^t L\theta_x(\zeta_t^{\eta})$$

é contínua em t, as funções $t \to \theta_x(\zeta_t^{\eta})$ são cad lae para todo $x \in Z$ e portanto também a função ζ_t^{η}.

- o -

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II*

Seja $(\zeta_t^\eta)_{t\geq 0}$, $\eta\in S$, o processo definido no Teorema I e suponhamos que μ é uma medida invariante. Queremos provar que μ é permutável, isto é, $\forall A,B\in\hat{E}$: $|A| = |B|$,

$$\mu(\zeta(x)=1, x\in A) = \mu(\zeta(x)=1, x\in B).$$

Mas, se μ é invariante, qualquer que seja $t \geq 0$,

$$\mu(\zeta(x)=1, x\in A) = \int_S \mu(d\eta) P(\zeta_t^\eta(x)=1, x\in A)$$

e

$$\mu(\zeta(x)=1, x\in B) = \int_S \mu(d\eta) P(\zeta_t^\eta(x)=1, x\in B).$$

Além disso, pela propriedade da dualidade, (I-d),

$$\int \mu(d\eta) P(\zeta_t^\eta(x)=1, x\in A) = \sum_{D\in\hat{E}} P(C_t^A=D)\,\mu(\eta(z)=1, z\in D)$$

e

$$\int \eta(d\eta) P(\zeta_t^\eta(x)=1, x\in B) = \sum_{D\in\hat{E}} P(C_t^B=D)\,\mu(\eta(z)=1, z\in D).$$

(*) - Lembramos que a demonstração será feita para $\bigcup_{\substack{x\in Z\\ n=2,3,\ldots,N}} \Sigma_{x,n}$ onde N é um número natural fixado.

Portanto, qualquer que seja $t \geq 0$:

$$|\mu(\zeta(x)=1, x\in A)-\mu(\zeta(x)=1, x\in B)| \leq \sum_{D\in\hat{E}} |P(C_t^A=D)-P(C_t^B=D)| \qquad (0.1)$$

Logo, se provarmos que:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{D\in\hat{E}} |P(C_t^A=D) - P(C_t^B=D)| = 0 \qquad (0.2)$$

$\forall A,B\in\hat{E}$: $|A| = |B|$, teremos mostrado que μ é uma medida permutável. Provemos então o seguinte lema para o caso em que A,B forem distintos em apenas um elemento, já que nos demais casos, (0.1) segue por indução.

LEMA 1 - Sejam C_t^A e C_t^B dois processos, definidos no teorema I-2, com $A,B\in\hat{E}$, $|A| = |B|$ e $|A-B| = 1$. Então,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{D\in\hat{E}} |P(C_t^A=D) - P(C_t^B=D)| = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - O lema será demonstrado acoplando-se C_t^A e C_t^B de maneira que, para todo $\omega\in\Omega$, $C_t^A = C_t^B$ para todo $t > T(\omega)$, ou seja, vamos mostrar que existe um processo Markoviano de salto

$$(\hat{C}_t^A, \hat{C}_t^B)_{t\geq 0},$$

que assume valores no conjunto $\hat{E}\times\hat{E}$ de maneira que, a primeira projeção, $(\hat{C}_t^A)$, seja um associado, (dual), do processo de mistura, tendo $\hat{L}$ como gerador infinitesimal, onde $\hat{L}$ é o gerador associado de L e A como configuração inicial e que $\hat{C}_t^B$ a segunda projeção, seja também um associado do processo de mistura, de gerador $\hat{L}$ e que tem B como configuração inicial.

Em resumo, o processo acoplado será construído de modo que:

(1) - $Z_t = (\hat{C}_t^A, \hat{C}_t^B)_{t\geq 0}$, seja um processo Markoviano de salto, com espaço de estado $\hat{E} \times \hat{E}$ e estado inicial (A,B);

(2) - para todo $t \geq 0$, $\hat{C}_t^A$ terá a mesma distribuição de probabilidade de C_t^A e $\hat{C}_t^B$ a mesma de C_t^B;

(3) - para quase toda realização, $\hat{C}_t^A = \hat{C}_t^B$, $\forall t > T$, onde T é um tempo de parada, finito com probabilidade 1.

DEFINIÇÃO DO ACOPLAMENTO

Consideremos 3 processos de Poisson, N^1, N^2 e N^3, definidos em $[0,\infty[\times \Sigma$, independentes entre si, identicamente distribuídos com:

$$N^i(B\times I, \cdot) = \sum_{\pi \in I} N_i^\pi(B, \cdot)$$

onde N_i^π, $\pi \in I$, $i = 1,2,3$, são processos pontuais de Poisson em $[0,\infty[\times \Sigma$, independentes entre si, de parâmetro $\hat{\lambda}(\pi)$, quaisquer que sejam $B \in \beta([0,\infty[)$ e $I \subset \Sigma$, I finito.

A cada ocorrência do processo pontual de Poisson N^i, (PPP(i)), uma permutação $\pi \in \Sigma$ é aplicada nas partículas situadas em Z, da seguinte forma:

a) se π for determinada pelo PPP(1), π atuará sobre as partículas de $\hat{C}_t^A$, somente no caso em que o suporte da permutação não contiver partículas de $\hat{C}_t^B$ ocupando po-

sições onde hajam partículas de $\hat{C}_t^A$;

b) se π for determinada pelo PPP(2), π atuará sobre as partículas de $\hat{C}_t^B$, somente no caso em que o suporte da permutação não contiver partículas de $\hat{C}_t^A$ ocupando posições onde hajam partículas de $\hat{C}_t^B$;

c) e finalmente, atuarão as permutações, determinadas pelo PPP(3) se houver superposição de partículas de $\hat{C}_t^A$ e $\hat{C}_t^B$. Nesse caso, elas também agirão sobre as outras partículas de $\hat{C}_t^A$ e $\hat{C}_t^B$ que estiverem em seus raios de ação (suporte).

Para facilitar a argumentação, chamemos de partículas do tipo 1 às partículas de $\hat{C}_t^A$ sujeitas a marcas determinadas pelo PPP(1); às partículas de $\hat{C}_t^B$, sujeitas a marcas determinadas pelo PPP(2), de partículas do tipo 2 e às partículas de $\hat{C}_t^A \cap \hat{C}_t^B$, de partículas do tipo 3.

Observemos que, pela construção do acoplamento, ocorre uma superposição de partículas quando uma marca determinada pelo PPP(1), (ou analogamente pelo PPP(2)), provocar uma permutação numa partícula do tipo 1, (tipo 2), fazendo-a saltar para uma posição onde haja uma partícula do tipo 2 (tipo 1); e que após a sua ocorrência, a superposição das partículas não mais de desfaz.

Formalmente, a definição do acoplamento pode ser dada por:

$$\forall \pi \in \Sigma = \bigcup_{\substack{x \in Z \\ n=2,\ldots,N}} \Sigma_{x,n},$$

a) se no instante t houver uma marca do processo N_1^π e se

$$\text{suporte } \pi \cap \hat{C}_{t-}^A \cap \hat{C}_{t-}^B = \emptyset,$$

então,

$$(\hat{C}_t^A, \hat{C}_t^B) = (\pi(\hat{C}_{t-}^A), \hat{C}_{t-}^B);$$

b) se no instante t houver uma marca do processo N_2^π e se

$$\text{suporte } \pi \cap \hat{C}_{t-}^A \cap \hat{C}_{t-}^B = \emptyset,$$

então,

$$(\hat{C}_t^A, \hat{C}_t^B) = (\hat{C}_{t-}^A, \pi(\hat{C}_{t-}^B));$$

c) se no instante t houver uma marca do processo N_3^π e se

$$\text{suporte } \pi \cap \hat{C}_{t-}^A \cap \hat{C}_{t-}^B \neq \emptyset,$$

então,

$$(\hat{C}_t^A, \hat{C}_t^B) = (\pi(\hat{C}_{t-}^A); \pi(\hat{C}_{t-}^B)).$$

É imediato que, a partir de a, b e c, (1) e (2) ocorrem, pois se olharmos, por exemplo para $\hat{C}_t^A$, observaremos que esse processo é construído de maneira semelhante ao processo do Teorema I-2, sendo que aqui, o processo pontual de Poisson é

composto de pedaços disjuntos dos processos independentes N^1 e N^3.

A demonstração de (3) que se segue, será feita considerando-se as diferentes cardinalidades de A e B para $A,B \in \hat{E}$ tal que,

$$|A| = |B| \quad e \quad |A-B| = 1.$$

OBSERVAÇÕES - Denotaremos daqui para a frente, num abuso de linguagem, $\hat{C}_t^A$ por C_t^A e $\hat{C}_t^B$ por C_t^B.

3-1) Consideremos inicialmente $A,B \in \hat{E}$:

$$A = \{x\}, \quad B = \{y\}$$

com $x \neq y$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $x < y$, isto é, inicialmente as partículas localizam-se como na Figura 1.

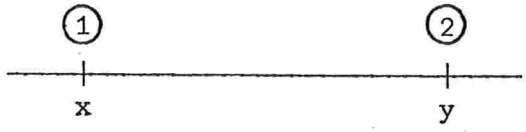

Figura 1

Como não existem partículas do tipo 3, somente as permutações determinadas pelo PPP(1) e PPP(2) é que, efetivamente, provocarão mudanças nas posições das partículas.

Chamemos de D_t, a distância das partículas no instante t:

$$D_t = \left| C_t^{\{x\}} - C_t^{\{y\}} \right|, \qquad \forall t \geq 0,$$

e indiquemos por $(X_n)_{n\geq 0}$, a cadeia imersa do processo D_t, is-

to é:

$$X_0 = D_t \quad \text{se} \quad t \in [0, \sigma_1[,$$

onde σ_1 é o primeiro instante no qual ocorre uma mudança na posição das partículas;

$$X_1 = D_t \quad \text{se} \quad t \in [\sigma_1, \sigma_2[,$$

onde σ_2 é o segundo instante no qual ocorre uma mudança na posição das partículas, e assim sucessivamente.

Notemos que $X_n \neq X_{n+1}$, $\forall\ 0 \leq n < \bar{L}$, onde

$$\bar{L} = \min\{n : X_n = 0\},$$

pois toda vez que ocorre uma permutação, uma e somente uma das partículas sofre um deslocamento.

Como queremos provar que a cadeia X_n, atinge o estado zero num campo finito, calculemos as probabilidades de transição no caso em que as partículas se situam como na Figura 1, já que nos demais casos as probabilidade são análogas.

Se considerarmos, como um recurso de demonstração, que a cadeia não é absorvida no estado zero, isto é, C_t^A é independente de C_t^B, $\forall t \geq 0$, então, teremos:

i) se $d = |x-y| \geq N$ e $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$P(d,d+i) = \left[\frac{\sum\limits_{\pi(x)=x-i} \hat{\lambda}(\pi)}{\sum\limits_{\pi\in I_x} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi\in I_y} \hat{\lambda}(\pi)} + \frac{\sum\limits_{\pi(y)=y+i} \hat{\lambda}(\pi)}{\sum\limits_{\pi\in I_x} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi\in I_y} \hat{\lambda}(\pi)} \right] =$$

$$= \left[\frac{\sum\limits_{\pi(0)=-i} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi(0)=+i} \hat{\lambda}(\pi)}{2\cdot \sum\limits_{\pi\in I_0} \lambda(\pi)} \right]$$

$$P(d,d-i) = \left[\frac{\sum\limits_{\pi(x)=x+i} \hat{\lambda}(\pi)}{\sum\limits_{\pi\in I_x} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi\in I_y} \hat{\lambda}(\pi)} + \frac{\sum\limits_{\pi(y)=y-i} \hat{\lambda}(\pi)}{\sum\limits_{\pi\in I_x} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi\in I_y} \hat{\lambda}(\pi)} \right] =$$

$$= \left[\frac{\sum\limits_{\pi(0)=+i} \hat{\lambda}(\pi) + \sum\limits_{\pi(0)=-i} \hat{\lambda}(\pi)}{2\cdot \sum\limits_{\pi\in I_0} \lambda(\pi)} \right].$$

Notemos que, em ambos os casos, a 1ª parcela refere-se ao PPP(1) e a 2ª ao PPP(2) e ainda que, pelo fato da distância entre as partículas ser maior ou igual a N, existe apenas uma posição possível para cada partícula, em cada caso.

Como λ, por hipótese, é invariante por translação, concluímos que $\forall x,y\in Z$: $|x-y| = d$, $d \geq N$ e $i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$

$$p(d,d+i) = p(d,d-i).$$

ii) se $d = |x-y| < N$, $\forall x,y\in Z$, $i\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ e $\sum\limits_{\pi\in I_0} \lambda(\pi) = 1$:

$$p(d,d+i) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\substack{\pi(x)=x-i \text{ ou} \\ \pi(x)=x+(2d+i)}} \hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\substack{\pi(y)=y+i \text{ ou} \\ \pi(y)=y-(2d+i)}} \hat{\lambda}(\pi)\right]$$

$$p(d,d-i) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\substack{\pi(x)=x+i \text{ ou} \\ \pi(x)=x+(2d-i)}} \hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\substack{\pi(y)=y-i \text{ ou} \\ \pi(y)=y-(2d-i)}} \hat{\lambda}(\pi)\right].$$

Como $d < N$, podem existir, para alguns $i's \in \{0,1,\ldots,N-1\}$, duas possíveis posições para cada partícula em cada caso, e como não sabemos, em geral, o valor de $\hat{\lambda}$ para $\pi(x) = x \pm (2d+1)$ e $\pi(x) = x \pm (2d-i)$, não podemos concluir que:

$$p(d,d+i) = p(d,d-i).$$

Resumindo, temos que:

i) no conjunto $\{N,N+1,\ldots\}$, a cadeia X_n, evolue como um passeio aleatório simétrico;

ii) no conjunto $\{0,1,\ldots,N\}$, (X_n) evolue como uma cadeia de Markov, irredutível, podendo atingir também o conjunto $\{N,N+1,\ldots\}$.

Para a cadeia X_n, definida acima, consideremos os tempos de paradas T_i, $i = 1,2,\ldots$, dado por:

$$T_1 = \min\{n>0: Y_n=N\}$$

$$T_2 = \min\{n>T_1: Y_n=N\}$$

e assim, sucessivamente.

É imediato que $T_1 < \infty$ pois, qualquer que seja o estado inicial, a cadeia X_n, ou realiza um passeio aleatório simétrico em $\{N,N+1,\ldots\}$ e portanto visita o estado N infinita vezes, ou atinge o estado N partindo de algum elemento do conjunto $\{0,1,\ldots,N-1\}$. Como em ambos os conjuntos, $\{0,1,\ldots,N-1\}$ e e $\{N,N+1,\ldots\}$, a cadeia visita o estado N, infinitas vezes, temos que $T_i < \infty$ com probabilidade 1, $\forall i=1,2,\ldots$.

Definimos então, para todo $i = 1,2,\ldots$

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = 0 \text{ para algum } n \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por construção, as variáveis aleatórias $U_i, i=1,2,\ldots$ são independentes (pela propriedade forte de Markov) e identicamente distribuídas com,

$$P(U_i=1) = \xi, \qquad \xi \in]0,1[.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(U_i=1) = \infty$$

o que implica, pelo Lema de Borel-Cantelli, que

$$P(\overline{\lim}\, U_i=1) = 1$$

e portanto

$$D_t = 0 \qquad \text{c.p.1 para algum } t < \infty.$$

3-2) Tomemos agora $A,B \in \hat{E}$, de maneira que:

$$A = \{x, c^1, \ldots, c^m\}$$

$$B = \{y, c^1, \ldots, c^m\}$$

$x \neq y$, $m = 1, 2, \ldots$.

Chamemos de Y_n a cadeia imersa no processo Markoviano de Salto, $Z_t = (C_t^A, C_t^B)$, isto é, para todo $n \geq 0$,

$$Y_n = (A_n, B_n) = (C_t^A, C_t^B) \text{ se } t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1}[$$

onde σ_n é o n-ésimo instante em que ocorre uma mudança na posição de pelo menos uma partícula, (partícula 1, 2 ou 3) e onde A_n e B_n são da forma

$$A_n = \{x_n, c_n^1, \ldots, c_n^m\}$$

$$B_n = \{y_n, c_n^1, \ldots, c_n^m\}$$

e $(A_0, B_0) = (A, B)$.

Consideremos ainda as classes de conjunto, F_d,

$$d \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

dadas por:

$$F_d = \left\{(\{x, z_1, \ldots, z_m\}, \{y, z_1, \ldots, z_m\}) \in \hat{E} \times \hat{E} : \ |x-y| = d\right\}.$$

Verifiquemos o comportamento de Y_n e consideremos, sem perda de generalidade, que inicialmente as partículas se situam como na Figura 2.

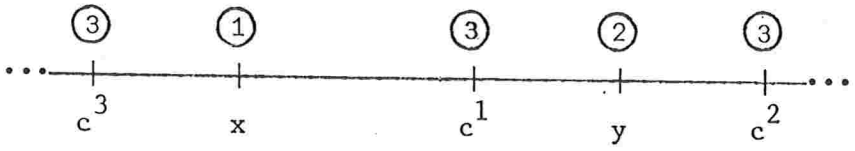

Figura 2

i) Se $|x-y| = d \geq N$, então não existe nenhuma permutação que afete ao mesmo tempo as partículas 1 e 2, e nesse caso, para $i \in \{1,\ldots,N-1\}$, temos:

$$p_{(A,B)}(d,d+i) = P(Y_1 \in F_{d+i}/Y_0=(A,B)\in F_d) =$$

$$= k^{-1}_{(A,B)}\left[\sum_{\pi(x)=x-i}\hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(y)=y+i}\hat{\lambda}(\pi)\right] =$$

$$= k^{-1}_{(A,B)}\left[\sum_{\pi(0)=-i}\hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(0)=+i}\hat{\lambda}(\pi)\right]$$

$$p_{(A,B)}(d,d-i) = k^{-1}_{(A,B)}\left[\sum_{\pi(x)=x+i}\hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(y)=y-i}\hat{\lambda}(\pi)\right] =$$

$$= k^{-1}_{(A,B)}\left[\sum_{\pi(0)=+i}\hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(0)=-i}\hat{\lambda}(\pi)\right].$$

Para $i = 0$,

$$p_{(A,B)}(d,d) = 1 - \sum_{\pm i=1}^{N-1} p_{(A,B)}(d,d+i) = 1 - 2\cdot k^{-1}_{(A,B)} \sum_{\pi\in I_0}\hat{\lambda}(\pi).$$

É imediato que, se a distância das partículas do tipo 3, em relação às partículas isoladas, for maior ou igual a N, ainda teremos:

$$p_{(A,B)}(d,d+i) = p_{(A,B)}(d,d-i).$$

Para todas as outras possíveis posições das partículas do tipo 3, as probabilidades $p_{(A,B)}(d,d+i)$ e $p_{(A,B)}(d,d-i)$ se escrevem de modo análogo às probabilidades dadas acima.

Em resumo, podemos argumentar que, quando tomamos $|x-y| \geq N$, todas as permutações que agiam sobre as partículas 1 e 2, no caso (3-1,i), continuam agindo aqui, com a condição de que, algumas são determinadas, por exemplo, pelo PPP(1) e outras pelo PPP(3). Por outro lado, como o valor dado a cada permutação é o mesmo, independentemente do processo que o determinou, segue que para todo $(A,B) \in F_d$, $d \geq N$ e $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$,

$$p_{(A,B)}(d,d+i) = p_{(A,B)}(d,d-i) =$$

$$= k^{-1}_{(A,B)} \left[\sum_{\pi(0)=-i} \hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(0)=+i} \hat{\lambda}(\pi) \right]$$

com,

$$k_{(A,B)} \leq \sum_{z \in A \cup B} \sum_{\pi \in I_z} \hat{\lambda}(\pi) = |A \cup B| \sum_{\pi \in I_0} \hat{\lambda}(\pi) = k.$$

Denotemos,

$$E(0,i) = k^{-1}\left[\sum_{\pi(0)=-i} \hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(0)=i} \hat{\lambda}(\pi)\right].$$

Então, para todo $(A,B)\in F_d$, $d \geq N$, $i\in\{\pm 1,\ldots,\pm(N-1)\}$,

$$E(0,i) \leq P_{(A,B)}(d,d+i) \qquad (3.2\text{-}1)$$

e

$$\alpha(0,0) = 1 - \sum_{i=\pm 1}^{\pm(N-1)} E(0,i) \geq p_{(A,B)}(d,d). \qquad (3.2\text{-}2)$$

ii) Se $(A,B)\in F_d$, $d\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ é fácil de ver que em geral,

$$p_{(A,B)}(d,d+i) \neq p_{(A,B)}(d,d-i).$$

Por outro lado, para $d_1\in\{1,\ldots,N-1\}$, $d_2\in\{1,\ldots,d_1+N-1\}$ e $(A,B)\in F_{d_1}$

$$p_{(A,B)}(d_1,d_2) > 0$$

e $p_{(A,B)}(d_1,0) = 0$ se (A,B) é tal que, existe pelo menos uma partícula do tipo 3, entre as partículas 1 e 2.

Consideremos então, para todo $d\in\{2,\ldots,N-1\}$

$$\bar{F}_d = \left\{\begin{array}{l}(\{x,z_1,\ldots,z_m\},\ \{y,z_1,\ldots,z_m\})\in F_d: \\ \text{se } x<y \text{ então } \forall i=1,\ldots,m,\ c_i<x \text{ ou } c_i>y \\ \text{se } x>y \text{ então } \forall i=1,\ldots,m,\ c_i>x \text{ ou } c_i<y\end{array}\right\}.$$

Logo,

$$p_{(A,B)}(d,0) > 0, \qquad \forall (A,B) \in \bar{F}_d.$$

Para $(A,B) \in F_d$, $d \in \{1,\ldots,N-1\}$ $i \in \{\pm 1,\ldots,\pm N-1\}$, chamemos:

$$g_{(A,B)}(d,d+i) = \frac{k_{(A,B)}}{k} p_{(A,B)}(d,d+i) \leq p_{(A,B)}(d,d+i).$$

E como $g_{(A,B)}(d,d+i)$ não depende das posições (em Z) das partículas do tipo 3 quando estas estão a uma distância maior ou igual a N, de ambas as partículas 1 e 2, podemos definir:

$$E(d,d+i) = \inf\{g_{(A,B)}(d,d+i) : (A,B) \in F_d\} =$$

$$= \min\{g_{(A,B)}(d,d+i) : (A,B) \in F_d \text{ e } A \cup B \subset [0,3N+m]\} \qquad (3.2\text{-}3)$$

e para $(A,B) \in \bar{F}_d$

$$E(d,0) = \min\{g_{(A,B)}(d,0) : (A,B) \in \bar{F}_d \text{ e } A \cup B \subset [0,3N+m]\} \qquad (3.2\text{-}4)$$

Então, $\forall (A,B) \in F_d$, $d \in \{1,\ldots,N-1\}$

$$p_{(A,B)}(d,d) \leq 1 - \sum_{d_1=1}^{d+N-1} p_{(A,B)}(d,d_1) \leq 1 - \sum_{d_1=1}^{d+N-1} E(d,d_1) = \alpha(d,d). \qquad (3.2\text{-}5)$$

Denotemos ainda,

$$\varepsilon = \inf\{E(d,0), d \in [1,\ldots,N-1]\}$$

$$\alpha = \max\left\{\alpha(0,0),\ \alpha(d,d), d \in \{1,\ldots,N-1\}\right\}$$

e provemos que, se $Y_0 = (A,B) \in F_d$, $d \geq 1$, então

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Y_n \in F_d\} / Y_0 = (A,B)\right) = 0. \qquad (3.2\text{-}6)$$

Mas,

$$P(Y_1 \in F_d | Y_0=(A,B)) \leq \alpha$$

e supondo que

$$P(Y_1 \in F_d, \ldots, Y_{n-1} \in F_d | Y_0=(A,B)) \leq \alpha^{n-1},$$

temos

$$P(Y_1 \in F_d, \ldots, Y_n \in F_d | Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{(A_{n-1},B_{n-1}) \in F_d} P(Y_n \in F_d | Y_{n-1}=(A_{n-1},B_{n-1})) \cdot$$

$$\cdot P(Y_{n-1}=(A_{n-1},B_{n-1}), Y_{n-2} \in F_d \ldots Y_1 \in F_d | Y_0=(A,B)) \leq$$

$$\leq \alpha \cdot \sum_{(A_{n-1},B_{n-1}) \in F_d} P(Y_{n-1}=(A_{n-1},B_{n-1}), Y_{n-2} \in F_d, \ldots, Y_1 \in F_d | Y_0=(A,B)) =$$

$$= \alpha \cdot P(Y_{n-1} \in F_d \ldots Y_1 \in F_d | Y_0=(A,B)) \leq \alpha^n.$$

Portanto,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Y_n \in F_d\} | Y_0=(A,B) \right) \leq \lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0.$$

Seja (Z_n) um passeio aleatório simétrico em Z, com probabilidade de transição dada por: $\forall x \in Z$, $i \in \{1,\ldots,N-1\}$,

$$P(Z_1=x+i | Z_0=x) = P(Z_1=x-i | z_0=x) =$$

$$= q(x,x+i) = \frac{\sum_{\pi(0)=i} \hat{\lambda}(\pi) + \sum_{\pi(0)=-i} \hat{\lambda}(\pi)}{2\cdot \sum_{\pi\in I_0} \hat{\lambda}(\pi)}.$$

Para $Y_0 = (A,B)\in F_d$, $d \geq 1$, definimos os instantes de parada,

$$\tau_1 = \inf\left\{n>0:\ Y_n \notin F_d\right\}$$

$$\tau_2 = \inf\left\{n>\tau_1:\ Y_n \notin \text{classe } Y_{\tau_1},\ \text{isto é, } |x_n-y_n| \neq |x_{\tau_1}-y_{\tau_1}|\right\}$$

e assim sucessivamente.

Provemos por indução, que para todo $n \geq 1$,

$$d, d_1, \ldots, d_{n-1} \in \{N, N+1, \ldots\},$$

$$P(Y_{\tau_1} \in F_{d_1}, \ldots, Y_{\tau_{n-1}} \in F_{d_{n-1}}, Y_{\tau_n} \in F_{d_n} | Y_0=(A,B)) = \tag{3.2-7}$$

$$= q(d,d_1)\ldots q(d_{n-1},d_n).$$

Para $n = 1$

$$P(Y_{\tau_1} \in F_{d_1} | Y_0=(A,B)) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k \in F_{d_1},\ \tau_1=k | Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(A_{k-1},B_{k-1})\in F_d} P(Y_k \in F_{d_1}, Y_{k-1}=(A_{k-1},B_{k-1})\tau_1=k | Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(A_{k-1},B_{k-1})\in F_d} P(Y_k \in F_{d_1} | Y_{k-1}=(A_{k-1},B_{k-1})\tau_1=k)\cdot$$

$$\cdot\ P(Y_{k-1}=(A_{k-1},B_{k-1})\tau_1=k | Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(A_{k-1},B_{k-1})\in F_d} q(d,d_1)P(Y_{k-1}=(A_{k-1},B_{k-1})\tau_1=k|Y_0=(A,B)) =$$

$$= q(d,d_1)P(\tau_1<\infty|Y_0=(A,B)) = q(d,d_1).$$

A última igualdade decorre de (3.2-6).

Supondo que,

$$P(Y_{\tau_1}\in F_{d_1},\ldots,Y_{\tau_{n-1}}\in F_{d_{n-1}}|Y_0=(A,B)) = q(d,d_1)\ldots q(d_{n-2},d_{n-1})$$

temos,

$$P(Y_{\tau_n}\in F_{d_n},\ Y_{\tau_{n-1}}\in F_{d_{n-1}},\ldots,Y_{\tau_1}\in F_{d_1}|Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{i=\tau_{n-2}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P(Y_{i+j}\in F_{d_n},\tau_n=i+j,Y_i\in F_{d_{n-1}},\tau_{n-1}=i,\ldots,Y_{\tau_1}\in F_{d_1}|Y_0=(A,B))=$$

$$= \sum_{i=\tau_{n-2}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(A',B')\in F_{d_{n-1}}} P(Y_{i+j}\in F_{d_n},\tau_n=i+j|Y_i=(A',B')\tau_{n-1}=i)\cdot$$

$$\cdot P(Y_i=(A',B')\tau_{n-1}=i\ldots Y_{\tau_1}\in F_{d_1}|Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{i=\tau_{n-2}+1}^{\infty} \sum_{(A',B')} \left[\sum_{j=1}^{\infty} P(Y_j\in F_{d_n},\tau_1'=j|Y_0=(A',B')\right]\cdot$$

$$\cdot P(Y_i=(A',B')\tau_{n-1}=i,\ldots,Y_{\tau_1}\in F_{d_1}|Y_0=(A,B)) =$$

$$= q(d_{n-1},d_n)\cdot P(Y_{\tau_{n-1}}\in F_{d_{n-1}},\ldots,Y_{\tau_1}\in F_{d_1}|Y_0=(A,B)).$$

Preferimos provar a propriedade forte de Markov para a cadeia Y_n, em vez de utilizá-la na demonstração acima.

Finalalizando a demonstração, tomemos

$$Y_0 = (A,B) \in F_d, \ d \geq N \text{ e}$$

$$S_1 = \begin{cases} \inf\{n>0: \ Y_n \in F_d, \ d \in \{1,\ldots,N-1\}\} \\ \infty \qquad \text{se } Y_n \in F_{d_n}, \ d_n \geq N, \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Por (3.2-6) e (3.2-7), temos que

$$P(S_1 < \infty | Y_0 = (A,B)) = 1.$$

Seja então:

$$T_1 = \begin{cases} \inf\{n>S_1: \ Y_n \in F_d, \ d \geq N\} \\ \infty \text{ se } Y_n \in F_0 \text{ para algum } n > S_1 \\ -N, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} \inf\{n>T_1: \ Y_n \in F_d, \ d \in \{1,\ldots,N-1\}\} \text{ se } T_1 < \infty \\ \infty, \qquad \text{se } T_1 = \infty \\ -N, \qquad \text{se } T_1 = -N. \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{cases} \inf\{n>S_2: \ Y_n \in F_d, \ d \geq N\} \text{ se } S_2 < \infty \\ \infty, \qquad \text{se } S_2 = \infty \text{ ou} \\ \qquad\qquad S_2 < \infty \text{ e } Y_n \in F_0 \text{ para algum } n > S_2 \\ -N, \qquad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e assim sucessivamente.

Como $P(T_1 = -N | Y_0 = (A,B)) = 0$, provemos que

$$\lim_{n \to \infty} P(T_n < \infty | Y_0 = (A,B)) = 0.$$

$$P(T_1<\infty|Y_0=(A,B)) = 1 - P(T_1=\infty|Y_0=(A,B)) \leq$$

$$\leq 1 - P(Y_{S_1+1}\in F_0|S_1<\infty \text{ e } Y_0=(A,B)).$$

Mas,

$$P(Y_{S_1+1}\in F_0|S_1<\infty \text{ e } Y_0=(A,B)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d_k=1}^{N-1} \sum_{(A_k,B_k)\in\bar{F}_{d_k}} P(Y_{k+1}\in F_0|Y_k=(A_k,B_k)) \cdot$$

$$\cdot \frac{P(Y_k=(A_k,B_k)S_1=k|Y_0=(A,B))}{P(S_1<\infty|Y_0=(A,B))} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d_k=1}^{N-1} \sum_{(A_k,B_k)\in\bar{F}_{d_k}} P(Y_{k+1}\in F_0|Y_k=(A_k,B_k)) \cdot$$

$$\cdot P(Y_k=(A_k,B_k)S_1=k|Y_0=(A,B)) \geq$$

$$\geq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d_k=1}^{N-1} P(Y_k\in\bar{F}_{d_k},\ S_1=k|Y_0=(A,B)) = \bar{\varepsilon}.$$

Logo,

$$P(T_1<\infty|Y_0=(A,B)) \leq 1 - \bar{\varepsilon}$$

$$P(S_2<\infty|Y_0=(A,B)) = P(S_2<\infty|T_1<\infty, Y_0=(A,B)) \cdot$$

$$\cdot P(T_1<\infty|Y_0=(A,B)) \leq$$

$$\leq P(S_2<\infty|T_1<\infty,\ Y_0=(A,B))(1-\bar{\varepsilon}) = 1 - \bar{\varepsilon}$$

$$P(T_2<\infty|Y_0=(A,B)) = P(T_2<\infty|S_2<\infty, Y_0=(A,B))\cdot$$

$$\cdot\ P(S_2<\infty|Y_0=(A,B)) \leq (1-\bar{\varepsilon})^2$$

e por recorrência, temos:

$$\lim_{n\to\infty} P(T_n<\infty|Y_0=(A,B)) \leq \lim_{n\to\infty} (1-\bar{\varepsilon})^n = 0$$

ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(S_k<\infty \text{ e } Y_n \in F_0 \text{ para algum } n>S_k|Y_0=(A,B)) = 1$$

e podemos concluir que,

$$P(Y_n \in F_0 \text{ para algum } n\geq 1|Y_0=(A,B)) = 1.$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) BERTEIN, F. & GALVES, A. Une classe de systèmes de particules stable par association. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 41*(1):73-85,1977.

(2) COCOZZA, C.; GALVES, A.; ROUSSIGNOL, M. Étude de deux évolutions markoviennes de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ par des méthodes d'association. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B, 15*(3):235-259,1979.

(3) HARRIS, T.E. On a class of set-valued Markov processes. *Annals of Probability, 4*(2):175-194,1976.

(4) ITO, K. Poisson point processes attached to Markov processes. In: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY, 6., Berkeley, 1970. *Proceedings* Berkeley, University of California Press, 1972. v.3, p.225-239.

(5) LEE, W.C. Random stirring of the real line. *Annals of Probability, 4*(2):580-592,1974.

(6) LIGGETT, T.M. A characterization of the invariant measures for an infinite particle system with interactions. I, II. *Transactions of the American Mathematical Society, 179*(452):433-453,1973; *198*(471):201-213,1974.

(7) LIGGETT, T.M. The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles. In: ECOLE D'ETÉ DE PROBABILITÉS 6º, Saint-Flour, 1976. *Conferences*. Berlin, Springer, 1977. p.187-248. (Lecture Notes in Mathematics, 598)

(8) SPITZER, F. Interaction of Markov processes. *Advances in Mathematics*, 5(2):246-290,1970.

(9) SPITZER, F. Recurrent Random walk of an infinite particle system. *Transactions of the American Mathematical Society*, *198*(471):191-199,1974.