ANÁLISE DE VARIÂNCIA MULTIVARIADA NÃO PARAMÉTRICA

SILVIO AGUIAR

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. PEDRO ALBERTO MORETTIN

- SÃO PAULO, SETEMBRO DE 1982 -

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Ao Professor Doutor Pedro Alberto Morettin pela orientação e amizade demonstrada a todo momento;

Ao Professor Doutor Adolpho Walter Pimazoni Canton, pelas sugestões apresentadas durante a elaboração deste trabalho;

Ao amigo Professor Doutor Francisco Rui Tavares de Almeida, pelo incentivo, interesse e paciência em discutir demonstrações deste trabalho, cuja área é fora de seu campo de pesquisa;

À Divisão de Usuários do Centro de Computação da Universidade Federal de Minas Gerais (CECOM), pela ajuda na parte computacional;

E a todos que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

CAP. I - INTRODUÇÃO 1

CAP. II - ANÁLISE DE VARIÂNCIA NÃO PARAMÉTRICA UNI - RIADA 3

2.1 - Experimentos Com Um Fator (One Way Layout). 3

2.2 - Experimentos Com Dois Fatores (Two Way Layout). 7

2.3 - Comparações Múltiplas 13

2.4 - Estimação de Contrastes 24

CAP. III - ANÁLISE DE VARIÂNCIA NÃO PARAMÉTRICA MULTIVARIADA 31

3.1 - Experimentos com Um Fator (One Way Layout) 31

3.1.1 - Princípios Básicos e Testes Para Localização de Multi-Amostras Multivariadas 33

A - Princípio da Permutação dos postos. 33

A.1 - Distribuição Assintótica de $\mathcal{L}_N$. 43

A.2 - Distribuição Limite de $\hat{\mathcal{L}}_N$ para sequências de Alter-

nativas de Escala e Translação 52

B - Testes Multivariados para Multiamostras Baseados na Estatística U 58

C - Eficiência Relativa Assintótica dos Testes da Ordem dos Postos. . 68

3.2 - Experimentos com Dois Fatores (Two Way Layout). 75

3.2.1 - Distribuição Assintótica do Teste $\mathcal{L}_N$ . . . 80

3.2.2 - Distribuição Assintótica Não Nula de $T^s_{n,j}$; $j = 1,\ldots,p$; $s = 1,\ldots, q$. 84

3.2.3 - Distribuição Assintótica de $\mathcal{L}_N$ sob Alternativas de Translação local 86

3.2.4 - Testes Não Paramétricos para MANOVA em Experimentos com Dois Fatores Utilizando Ordenação Após Alinhamento (Ranking After Alignment) . . 88

A - Distribuição Permutacional Assintótica de S_N 93
B - Distribuição Permutacional Assintótica Não-Nula de S_N 97

CAP. IV - PLANEJAMENTO EM BLOCOS INCOMPLETOS E ANÁLISE DE COVARIÂNCIA MULTIVARIADA (NÃO PARAMÉTRICA). 103

4.1 - Planejamento em Blocos Incompletos 103

4.1.1 - Introdução 103

4.1.2 - Noções Preliminares . . 106

4.1.3 - Propriedades de $\mathcal{L}_N$ para Grandes Amostras . . . 114

4.1.4 - Eficiência Assintótica de $\mathcal{L}_N$ 118

4.2 - Análise de Covariância Multivariada 127

4.2.1 - Análise de Covariância Baseada na Ordem dos Postos, Sem Alinhamento. 127

A) Caso Univariado . . . 127

B) Caso Multivariado . . 134

4.2.2 - Análise de Covariância Multivariada Utilizando Ordenação Após Alinhamento 153

4.2.3 - Testes Simultâneos para Contrastes, Utilizando a Ordem dos Postos, em Análise de Covariância Multivariada 157

A) Procedimentos para Testes Simultâneos .. 171

4.2.4 - Considerações das E.R.A.'s 180

CAP. V - ANÁLISE DE PERFIL 184

5.1 - Testes Não Paramétricos para Análise de Perfil de Várias Amostras Multivariadas com Distribuições que Diferem em Localização 184

5.1.1 - Notação e Resultados Preliminares 186

5.1.2 - Testes Não Paramétricos para Paralelismo dos Perfis 195

5.1.3 - Consistência de T_o, T_1, e T_2 202

5.1.4 - Distribuição Assintótica de T_o, T_1 e T_2 . 212

5.1.5 - Conclusão 227

5.2 - Testes Não Paramétricos para Análise de Perfil de Várias Amostras Multivariadas de Populações que Diferem por Escala 228

5.2.1 - Distribuições Assintóticas 233

CAP. VI - APLICAÇÕES 246

BIBLIOGRAFIA 256

CAPÍTULO I

O objetivo deste trabalho é apresentar a Análise de Variância Multivariada Não-Paramétrica como uma extensão da Análise de Variância Multivariada Paramétrica.

Inicialmente, no Capítulo II, faremos um resumo do material encontrado em Randles & Wolfe (1979) e Hollander & Wolfe (1973) sobre Análise de Variância Univariada Não-Paramétrica.

Logo após, no Capítulo III, generalizaremos a Análise da Variância Univariada para a Análise de Variância Multivariada Não-Paramétrica, utilizando-se dos resultados de Puri & Sen (1971). Este capítulo é básico pois fornecerá resultados necessários para o entendimento e o desenvolvimento dos próximos.

No Capítulo IV, faremos a Análise de Variância Multivariada Não-Paramétrica para planejamentos de experimentos em blocos incompletos, como uma extensão da Análise de Variância para planejamentos de experimentos em blocos completos apresentada no Capítulo III. Ainda no Capítulo IV, trataremos da Análise de Covariância Multivariada Não-Paramétrica, para observações alinhadas ou não, além de procedimentos e testes simultâneos para este tipo de análise.

Completaremos a parte teórica no Capítulo V, onde apresentaremos a Análise de Perfil Multivariada Não- Paramétrica para dados que diferem por deslocamento ou escala, baseando-se nos trabalhos de Bhapkar & Patterson (1977) e Bhapkar (1979).

No Capítulo VI, faremos aplicações dos assuntos acima citados.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DE VARIÂNCIA NÃO PARAMÉTRICA UNIVARIADA

Neste capítulo vamos desenvolver de modo resumido, alguns resultados sobre Análise de Variância Univariada, tomando como base Myles, H. & Wolfe, D.A (1973) e Randles, R. H. & Wolfe, D.A. (1979).

2.1 - EXPERIMENTOS COM UM FATOR (ONE WAY LAYOUT)

Sejam X_{ij}, $j = 1,\ldots, k$; $i = 1,\ldots, n_k$ a.a. independentes de k tratamentos, com n_j observações do tratamento j.

Assumiremos que:

i) $X_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}$; $j = 1,\ldots,k$; $i = 1,\ldots, n_j$

onde μ é a média geral e τ_j é o efeito devido ao tratamento j e $\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0$.

ii) Os e_{ij} são mutuamente independentes com a mesma distribuição contínua F.

Queremos testar

(2.1) $H_o : \tau_1 = \ldots. = \tau_k$ contra alguma alternativa de interesse.

Mas se tomarmos $\theta_j = \mu + \tau_j$; $j = 1,\ldots, k$ o problema recai em testar

$H_o : \theta_1 = \ldots = \theta_k$ versus alguma alternativa de interesse.

onde θ_j é a média da população com f.d.a. $F(x - \theta_j)$.

Se R_{ij} é o posto de X_{ij} sobre $X_{11},\ldots, X_{1n_1}, X_{21}, \ldots, X_{2n_2}, \ldots, X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}$, sob $H_o : \theta_1 = \ldots = \theta_k$, $R^* = (R_{11},\ldots, R_{1n_1},\ldots, R_{k1},\ldots, R_{kn_k})$ tem distribuição uniforme sobre

$$R = \{ r \mid r \text{ é uma permutação dos inteiros } 1,\ldots, N = \sum_{j=1}^{k} n_j \}$$

pelo resultado ,

(2.2) " Seja $Z_1,\ldots, Z_N$ uma amostra aleatória de uma distribuição contínua, e $R^* = (R_1^*, \ldots, R_N^*)$ um vetor de postos, onde R_i^* é o posto de Z_i sobre $Z_1, \ldots, Z_N$. Se $R = \{ r : r$ é uma permutação dos inteiros $1,\ldots, N \}$, então R^* é uniformemente distribuída sobre R. "

Como consequência de (2.2), qualquer estatística $V (R^*)$, função de $X_{11},\ldots, X_{1n_1},\ldots, X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}$ somente através de R^* é livre de distribuição não paramétrica, sobre a classe das distribuições contínuas F, sob H_o.

Dizemos que uma estatística T é livre de distribuição sobre uma classe de distribuições Q, se a distribuição de T é a mesma para toda distribuição com elementos de Q. Se Q possui mais de um elemento, dizemos que T é livre de distribuição não- paramétrica sobre Q.

Vejamos agora alguns exemplos de alternativas e testes associados a estas.

<u>Exemplo</u> <u>2.1</u>

$H_1 : \theta_i \neq \theta_j$ para pelo menos um $i \neq j$.

Tomemos $R.j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}$. Sob H_o, usando (2.2), chegamos a $E_{H_o}(R.j) = \frac{N+1}{2}$. Deste modo, uma maneira de sentirmos alguma diferença nos θ_i, $i = 1,\ldots, k$ é basearmos o teste em $\left(R.j - \frac{N+1}{2} \right)^2$, $j = 1,\ldots,k$. Pensando assim Krushall & Wallis (1952) sugeriram o teste

$$(2.3) \quad V_1 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(R.j - \frac{N+1}{2} \right)^2 \qquad (2.21)$$

Tábuas para os quantis superiores deste teste foram feitas por Hollander & Wolfe (1973) para $k = 3$, $n_i < 5$ e $i = 1, 2, 3$. e Iman, Quade & Alexander (1975) construiram as tábuas adicionais. Krushal & Wallis (1952) mostraram

que V_1 tende em distribuição para uma v.a. qui-quadrado com k-1 graus de liberdade com

$$(2.4) \quad \text{mínimo}\,(n_1,\ldots,n_k) \to \infty \text{ e } \frac{n_j}{N} \to \lambda_j\,,\ 0 < \lambda_j < 1\ ;\quad j = 1,\ldots,k.$$

<u>Exemplo</u> <u>2.2</u>.

$H_1 : \theta_1 \leq \ldots \leq \theta_k$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

Para esta alternativa, Jonckheere (1954) e Terpstra (1952), independentemente, propuseram o teste

$$(2.5) \quad V_2 = \sum_{\mu < v}^{k} \sum U_{\mu v}\ ;\ U_{\mu v} = \sum_{s=1}^{n_\mu} \sum_{t=1}^{n_v} \psi\,(X_{vt} - X_{\mu s})$$

onde $\psi\,(t) = 1$ com $t > < 0$. Este teste rejeita H_o a favor de H_1, a nível α, se

$$V_2 \geq v_2\,(\alpha)$$

onde $v_2\,(\alpha)$ é o limite superior de $100\,\alpha\,\%$ de V_2 sob H_o.

Quando min $(n_1,\ldots,n_k) \to \infty$ com $\frac{n_j}{N} \to \lambda_j$,

$$0 < \lambda_j < 1,\ j = 1,\ldots,k$$

$$(2.6) \qquad \frac{V_2 - E_{H_o}(V_2)}{\sqrt{Var\,(V_2)}} \xrightarrow[\text{sob } H_o]{D} N\,(0,1).$$

$$\text{onde} \quad E_{H_o}(V_2) = \frac{N^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j^2}{4} \quad ;$$

$$Var_{H_o}(V_2) = \frac{N^2\,(2N+3) - \sum_{j=1}^{k} n_j^2\,(2n_j+3)}{72}$$

Note que V_1 e V_2 são estatísticas que são função linear dos postos, isto é, da forma $\sum_{j=1}^{k} c_j\, a_j(R^*)$. Puri (1964, 1965) generalizou V_1 e V_2 usando escores $a_j(.)$ mais gerais.

2.2 - EXPERIMENTOS COM DOIS FATORES (TWO WAY LAYOUT)

A) Com uma observação por Casela (Experimento Cruzado sem Interação).

Sejam X_{ij}, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, satisfazendo $X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$ onde

i) μ é média geral

τ_i é o i- ésimo nível do fator τ.

β_j é o j-ésimo nível do fator β

com $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$, $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$.

ii) Os e_{ij} são v.a. mutuamente independentes provenientes de uma mesma distribuição contínua F, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$.

Queremos testar

$H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_k$ versus alguma alternativa de H_1 de interesse.

Sob H_o, X_{ij}, $i = 1, \ldots, k$ tem a mesma distribuição $F(x - \mu - \tau - \beta_j)$ isto é, X_{ij}, $i = 1, \ldots, k$ é a.a. de $F(x - \mu - \tau - \beta_j)$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, j fixo, seja R_{ij} o posto de X_{ij} sobre $X_{1j}, \ldots, X_{kj}$. Deste modo, sob H_o (De acordo com (2.2), $R_j^* = (R_{1j}, \ldots, R_{kj})$ é uniformemente distribuida sobre $R = \{r \mid r$ é uma permutação de $1, \ldots, k\}$. Supondo cada observação do fator β independente das demais, por "$Z_1, \ldots, Z_N$ uma amostra aleatória de uma distribuição contínua e $R^* = (R_1^*, \ldots, R_N^*)$ o vetor de postos definido como em (2.2). Se $V(R^*)$ é uma estatística baseada em $(Z_1, \ldots, Z_N)$ somente através de $R^* \Longrightarrow V(R^*)$ é livre de distribuição sobre a classe das distribuições conjuntas de N variáveis independentes e identicamente distribuídas contínuas e univariadas", tiramos que qualquer estatística $S(R_1^*$,

$,\ldots, R_n^*$) que é função de $X_{11},\ldots, X_{kn}$ somente através de $R_1^*,\ldots, R_n^*$ é livre de distribuição não-paramétrica sobre a classe das distribuições contínuas sob H_o.

Vejamos agora algumas alternativas e testes associados a elas.

Exemplo 2.3

$H_1 : \tau_i \neq \tau_j$ com algum i diferente de j.

Tomemos $R_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_{ij}$; $E_{H_o}(R_{i.}) = \frac{k+1}{2}$,

como consequência de (2.2). Note que se basearmos em $(R_{i.} - \frac{k+1}{2})^2$, teremos uma noção se está ocorrendo H_1 ou H_o . Pensando neste fato, independentemente, Friedman (1937), Kendall e Babington (1939) propuseram a estatística

$$(2.7) \qquad S_1 = \frac{12\, n}{k\,(k+1)} \sum_{i=1}^{k} \left(R_{i.} - \frac{k+1}{2} \right)^2$$

para o teste acima. Rejeitaremos H_o a nível α se $S_1 \geq s_1(\alpha)$, onde $s_1(\alpha)$ é o limite superior de $100\,\alpha\,\%$ de S_1 sob H_o .

(2.8) Quando $n \to \infty$, $S_1 \longrightarrow \chi^2_{k-1}$, fato que pode ser usado para aproximar $s_1(\alpha)$ (vide Lehmann (1975) pág. 388 - 389).

Exemplo 2.4.

$H_1 : \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

Tomemos $R_i = n\, R_{i.}$. Page (1963) propôs o teste $S_2 = \sum_{i=1}^{k} i\, R_i$ para a alternativa acima. Rejeitaremos H_o

a nível α se $S_2 \geq s_2(\alpha)$, onde $s_2(\alpha)$ é o α-quantil de S_2 sob H_o. Quando $n \to \infty$

$$(2.9) \qquad \frac{S_2 - E_o(S_2)}{\mathrm{Var}_{H_o}(S_2)} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

onde $E_{H_o}(S_2) = \dfrac{n\,k\,(k+1)^2}{4}$;

$$\mathrm{Var}_{H_o}(S_2) = \frac{n\,k^2\,(k+1)^2\,(k-1)}{144}$$

Podemos aproximar $s_2(\alpha)$ por

$$(2.10) \qquad s_2(\alpha) \cong \frac{n\,k\,(k+1)^2}{4} + Z_{(\alpha)} \cdot \sqrt{n\,k^2\,(k+1)^2\,(k-1)}$$

onde $Z_{(\alpha)}$ é o α - quantil da $N(0, 1)$.

B) <u>Com mais de uma observação por casela (sem interação)</u>

Sejam $X_{ij\ell}$; $i = 1,\ldots, k$; $j = 1,\ldots, n$; $\ell = 1,\ldots,t_{ij}$ as $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}$ v.a. mutuamente independentes tais que as $X_{ij\ell}$ tem uma distribuição contínua $F(x - \tau_i - \beta_j)$. Consideraremos um planejamento com dois fatores τ e β, sem interação, com $t_{ij\ell}$ observações (ou réplicas) para

cada combinação de nível i (de τ) e j (de β).

Estamos interessados em testar $H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_k$ versus alguma alternativa de interesse . Vejamos os seguintes exemplos :

<u>Exemplo</u> <u>2.5</u>

$H_1 : \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_k$, com pelo menos uma desigualdade estrita.

Skillings e Wolfe (1977) consideraram o teste

$$(2.11) \qquad S_3 = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{V_{2j} - E_{H_o}(V_{2j})}{\mathrm{Var}_{H_o}(V_{2j})} \right]$$

onde V_{2j} é a estatística de Jonckheere (2.5) para as observações do j -ésimo nível(ou tratamento) do fator β . Rejeitaremos H_o a nível α se $S_3 \geq s_3(\alpha)$ onde $s_3(\alpha)$ é o α -ésimo quantil de S_3 sob H_o.

Quando $\min(t_{11}, \ldots, t_{kn}) \to \infty$ com n fixado de tal modo que

$$\frac{t_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} t_{ij}} \to \lambda_{ij}, \quad 0 < \lambda_{ij} < I \quad \text{para } i = 1,\ldots,k \quad \text{e} \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$(2.12) \qquad \frac{S_3}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

sob H_o. Fato que pode ser usado para aproximar $s_3(\alpha)$.

Exemplo 2.6

$H_1 : \tau_i \neq \tau_j$ para algum $i \neq j$, $i, j = 1,\ldots, k$

Rejeitaremos H_o a nível α se $S_4 \geq s_4(\alpha)$, onde $s_4(\alpha)$ é o α - quantil de

$$(2.13) \qquad S_4 = \sum_{j=1}^{n} V_{1j}$$

onde V_{1j} é a estatística de Krushal - Wallis (2.3) para as observações do j - ésimo tratamento de β.

Quando $\min(t_{11}, \ldots, t_{kn}) \to \infty$ com

$$\frac{t_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} t_{ij}} \longrightarrow \lambda_{ij}, \quad 0 < \lambda_{ij} < 1, \; i = 1,\ldots,k; \; j = 1,\ldots,n.$$

$$(2.14) \qquad S_4 \xrightarrow{D} \chi^2_{(n-1)(k-1)} \quad \text{sob } H_o.$$

resultado usado para aproximar $s_4(\alpha)$.

Testes para experimentos cruzados com dois fatores com interação, são encontrados, além de outros nos traba-

lhos de Lehmann (1963 b), Patel & Hoel (1973).

2.3 - COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS

A) Testes Livres de Distribuição para Comparações Multiplas Baseados na Soma dos Postos de Krushal-Wallis (Modelo com um fator).

I) Comparação de todos os tratamentos de um determinado fator

a) Tomemos $n_1 = \ldots = n_k = n$, isto é, o mesmo número de observações de cada tratamento. Seja R_{ij} o posto de X_{ij} sobre $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{k1}, \ldots, X_{kn_k}$ e

$$R_j = \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} \tag{2.15}$$

Decidimos que $\tau_\mu \neq \tau_v$ com $\mu < v$ ao nível α se $|R_\mu - R_v| \geq y(\alpha, k, n)$ onde $y(\alpha, k, n)$ satisfaz

$$P_{H_o}(|R_\mu - R_v| < y(\alpha, k, n), \mu = 1, \ldots, k-1; v = \mu + 1, \ldots, k) = 1 - \alpha \tag{2.16}$$

onde $H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_k = \tau$.

b) Procedimento Conservativo

Seja $R.j = \left(\sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} \right) \frac{1}{n_j}$. Decidimos que

$\tau_\mu \neq \tau_v$, $\mu \neq v$ ao nível α se

$$(2.17) \quad \left| R_{.\mu} - R_{.v} \right| \geq \left[h (\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{N (N+1)}{12} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{n_\mu} + \frac{1}{n_v} \right)^{1/2}$$

onde $h (\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$ é o quantil superior do teste de Krushall- Wallis de nível α , pois

$$(2.18) \quad S = \frac{12}{N (N+1)} \sum_{j=1}^{k} n_j \left(R.j - R.. \right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{12}{N (N + 1)} \cdot \frac{n_\mu \; n_v}{n_\mu + n_v} \cdot$$

$$\cdot \left(R_{.\mu} - R_{.v} \right)^2 = T \; , \; \forall \; \mu, v \; .$$

Expliquemos isto: se $h (\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$ é o quantil superior de nível α para S ($P (T \geq h (x, \alpha, n_1, \ldots , , n_k)) \leq \alpha$) então h é quantil superior de nível α para T ($P (T \geq h (x, \alpha, (n_1, \ldots, n_k)) \leq P (S \geq h (x, \alpha, , (n_1, \ldots, n_k))$ devido a $S \geq T$).

c) Aproximação para amostras grandes.

i) Quando $n_1 = \ldots = n_k = n$, n grande, Miller (1966) sugeriu para decidirmos que $\tau_\mu \neq \tau_v$ ao nível α se

$$(2.19) \qquad | R_{.\mu} - R_{.v} | > q(\alpha, k, \infty) \left[\frac{k(kn+1)}{12} \right]^{1/2}$$

onde $q(\alpha, k, \infty)$ é o quantil superior da amplitude (Range) de k variáveis aleatórias $N(0, 1)$ independentes. Note que $h(x, \alpha, (n_1, \ldots, n_k))$ em (2.17) foi aproximado por $q(\alpha, k, \infty)$

ii) Dunn (1964) sugeriu que aproximemos $h(\alpha, k, (n_1, \ldots, n_k))$ em $\underline{b}$ por

$$Z\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right), \text{ onde}$$

$$(2.20) \qquad P\left(X \geq Z\left(\frac{\alpha}{k(k-1)}\right)\right) = \frac{\alpha}{k(k-1)}, \quad X \sim N(0, 1)$$

II. <u>Tratamento versus Controle</u>

Assumiremos que o tratamento 1 é o tratamento controle.

a) Procedimentos Exatos

Consideremos neste caso $n_1 = n_k$, $k = 2, \ldots, n$.

i) Decidiremos $\tau_\mu > \tau_1$ se $R_{.\mu} - R_{.1} \geq y^*(\alpha, k-1, n)$

onde $y^*(\alpha, k-1, n)$ satisfaz

$$P_{H_o}((R_\mu - R_1) < y^*(\alpha, k-1, n), \mu = 2,\ldots,k) = 1 - \alpha.$$

ii) Decidimos $\tau_\mu \neq \tau_1$ se $|R_\mu - R_1| \geq y^{**}(\alpha, k-1, n)$

onde $y^{**}(\alpha, k-1, n)$ satisfaz

$$P_{H_o}\{|R_\mu - R_1| < y^{**}(\alpha, k-1, n), \mu = 2,\ldots, k\}$$

b) Procedimentos Aproximados

Sejam $n_1 = b$, $n_2 = \ldots = n_k = n$, b e n grandes.

i) Miller (1966) sugeriu que se aproximasse $y^*(\alpha, k-1, n)$ do procedimento i) de a) por

$$(2.21) \quad y^*(\alpha, k-1, n) \cong m\left(\alpha, k-1, \frac{n}{b+n}\right)\left(\frac{N(N+1)}{12}\right)^{1/2}\left|\frac{1}{b} + \frac{1}{n}\right|^{1/2}$$

onde $m\left(\alpha, k-1, \frac{n}{b+n}\right)$ satisfaz

$$(2.22) \quad P(N_{k-1} > m(\alpha, k-1, \rho) = \alpha$$

onde N_{k-1} é a soma de $k-1$ variáveis $N(0,1)$ com correlação comum ρ.

ii) O procedimento ii) de a), Miller (1966) aproximou por :

$$\tau_\mu \neq \tau_1 \quad \text{se} \quad |R_{.\mu} - R_{.1}| > |m|\left(\alpha, k-1, \frac{n}{b+n}\right).$$

$$\cdot \left|\frac{N(N+1)}{12}\right|^{1/2} \cdot \left|\frac{1}{b} + \frac{1}{n}\right|^{1/2}$$

onde $|m|\left(\alpha, k-1, \frac{n}{b+n}\right)$ satisfaz

(2.23) $$P_{H_o}\left(M_{k-1} > |m|\left(\alpha, k-1, \frac{n}{b+n}\right) \leq \alpha\right)$$

e M_{k-1} é o máximo de k-1 variáveis N (0, 1) com correlação comum $\rho = \frac{n}{b+n}$

iii) Dunn (1964) aproximou $y^*(\alpha, k-1, n)$ de a) subtópico i) por

(2.24) $$y^*(\alpha, k-1, n) \cong Z_{\frac{\alpha}{k-1}} \left[\frac{N(N+1)}{12}\right]^{1/2} \left(\frac{1}{n_\mu} + \frac{1}{n_v}\right)^{1/2}$$

e

$y^{**}(\alpha, k-1, n)$ de a) sub tópico ii) por

(2.25) $$y^{**}(\alpha, k-1, n) \cong Z_{\frac{\alpha}{2(k-1)}} \left[\frac{N(N+1)}{12}\right] \left(\frac{1}{n_\mu} + \frac{1}{n_v}\right)$$

onde o tamanho das amostras não precisam ser iguais e

(2.26) Z_t é t- quantil de uma N (0, 1).

B) <u>Testes Livres de Distribuição para Comparações Múltiplas Baseados na Soma dos Postos de Friedman.</u>

Seja os modelos com dois fatores

$$X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}, \quad i = 1,\ldots, k \; ; \; j = 1,\ldots, n$$

considerados anteriormente. Usaremos as notações ,

$$(2.27) \quad R_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \ , \quad R_{i.} = \frac{R_i}{n} \ ; \quad R_{..} = \frac{k+1}{2}$$

I. <u>Comparações de Todos os Tratamentos de um Determinado Fator.</u>

Sejam $n_i = n$, $i = 1, \ldots, k$.

i) Decidimos que $\tau_\mu \neq \tau_v$ a nível α se

$$| R_\mu - R_v | \geq r (\alpha, k, n) \ , \quad \text{onde}$$

$$(2.28) \quad P_{H_o} \{ | R_\mu - R_v | < r (\alpha, k, n) \ , \mu = 1, \ldots, k-1 \ ;$$

$$; \ v = \mu + 1, \ldots, k \} = 1 - \alpha$$

e

$$H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_n = \tau .$$

Como

$$(2.29) \quad S_1 = \frac{12\, n}{k\,(k+1)} \sum_{i=1}^{k} (R_{i.} - R_{..})^2 \geq \frac{12}{n\,k\,(k+1)} \cdot$$

$$\cdot \ (R_\mu - R_v)^2 , \quad \forall \mu, v$$

podemos aproximar $r (\alpha, k, n)$ pelo limite superior de $100\,\alpha\,\%$ de confiança da soma dos postos de Friedman

ℓ (α, k n), pois ,

$$P \left\{ | R_\mu - R_v | \geq \left(\ell (\alpha, k, n) \right)^{1/2} \left[\frac{n k (k+1)}{12} \right]^{1/2} \right\} \leq$$

$$\leq P \left[S_1 \geq \ell (\alpha, k, n) \right] \leq \alpha .$$

Note que neste caso r (α, k, n) é tomado como

$$(2.30) \quad r (\alpha, k, n) = \left[\ell (\alpha, k, n) \right]^{1/2} \left[\frac{n k (k+1)}{12} \right]^{1/2}$$

ii) Aproximação para grandes amostras

Quando n grande, podemos aproximar r (α, k, n) por

$$(2.31) \quad r (\alpha, k, n) = q (\alpha, k, \infty) \left[\frac{n k (k+1)}{12} \right]^{1/2}$$

onde q (α, k, ∞) é o limite superior de 100 α % da "range" de v.a. N (0, 1) e independentes

Miller (1966) & Nemenyi (1963) fizeram um estudo completo dos testes acima.

II- <u>Tratamento</u> <u>Versus</u> <u>Controle</u>

Consideramos o tratamento 1 como o controle.

i) Decidimos que $\tau_\mu > \tau_1$ a nível α se

(2.32) $R_\mu - R_1 \geq r^*(\alpha, k-1, n)$

onde $r^*(\alpha, k-1, n)$ satisfaz

$$P_{H_o}\left[R_\mu - R_1 < r^*(\alpha, k-1, n),\ \mu = 2,\ldots, k\right] = 1 - \alpha$$

e $H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_k$.

ii) Decidimos que $\tau_\mu \neq \tau_1$ a nível α se

(2.33) $\left[R_\mu - R_1\right] \geq r^{**}(\alpha, k-1, n)$

onde $r^{**}(\alpha, k-1, n)$ satisfaz

$$P_{H_o}\left(|R_\mu - R_1| < r^{**}(\alpha, k-1, n),\ \mu = 2,\ldots,k\right) = 1 - \alpha$$

iii) Aproximação para grandes amostras

Quando n grande, $r^*(\alpha, k-1, n)$ pode ser aproximado por

(2.34) $r^*(\alpha, k-1, n) = m\left(\alpha, k-1, \frac{1}{2}\right)\left[\frac{n\,k\,(k+1)}{6}\right]^{1/2}$

e $r^{**}(\alpha, k-1, n)$ por

(2.35) $r^{**}(\alpha, k-1, n) = |m|\left(\alpha, k-1, \frac{1}{2}\right)\left[\frac{n\,k\,(k+1)}{6}\right]^{1/2}$

Os procedimentos de tratamento versus controle até agora descritos foram tratados por Nemeyi (1963), Wilcoxon & Wilcox (1964) e Miller (1966).

c) - Testes Livres de Distribuição para Comparações Múltiplas Baseados em Postos Sinalizados de Wilcoxon.

I) Comparação de Todos os Tratamentos.

Seja $Y^j_{\mu v} = | X_{j\mu} - X_{jv} |$, $j = 1, \ldots, n$

$$\psi^j_{\mu v} = \begin{cases} 1, \text{ se } X_{j\mu} < X_{jv} \\ 0, \text{ se } X_{j\mu} \geq X_{jv} \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n$$

(2.36) $R^j_{\mu v}$, o posto de $Y^j_{\mu v}$ sobre

$$Y^1_{\mu v}, \ldots, Y^k_{\mu v}$$

$$T_{\mu v} = \sum_{j=1}^{n} R^j_{\mu v} \psi^j_{\mu v}$$

$$T'_{\mu v} = \max \left\{ T_{\mu v}, \frac{n(n+1)}{2} - T_{\mu v} \right\}, \mu < v$$

Decidimos que $\tau_\mu \neq \tau_v$ a nível α se

(2.37) $P_{H_0} \{ T_{\mu v} < t(\alpha, k, n), \mu = 1, \ldots, k-1; v = \mu + 1, \ldots, k \} \cong 1 - \alpha.$

A constante $t(\alpha, k, n)$ pode ser aproximada por

$$t(\alpha, k, n) = \frac{n(n+1)}{4} + q(\alpha, k, \infty) \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{48}\right]^{1/2}$$

onde $q(\alpha, k, \infty)$ já foi anteriormente definida.

O procedimento baseado na aproximação anterior não é livre de distribuição (Nemenyi - 1963). Sen (1968 a) derivou um procedimento livre de distribuição baseado nas $T_{\mu v}$'s .

II - <u>Tratamento Versus Controle</u>

i) Decidimos que $\tau_u > \tau_l$ a nível α se

$$T_{l\mu} \geq t^*(\alpha, k-1, n) \quad \text{onde}$$

$$(2.38) \quad P_{H_o}\{T_{l\mu} < t^*(\alpha, k-1, n) ; \mu = 2,\ldots,k\} \cong 1 - \alpha$$

Hollander (1966) propôs a aproximação

$$(2.39) \quad t^*(\alpha, k-1, n) = \frac{n(n+1)}{4} + m(\alpha, k-1, \hat{\rho}) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

onde

$\hat{\rho} = 12\,\hat{\lambda} - 3$

$\hat{\lambda}$ é a proporção de sextuplas ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, v, w$) que satisfaz

(2.40) $(X_{\alpha\mu} < X_{\beta\mu} + X_{\alpha v} - X_{\beta v}$ e $X_{\alpha\mu} < X_{\gamma\mu} + X_{\alpha w} - X_{\alpha w})$

onde α, β, γ são níveis de um fator e μ, v, w são níveis de outro fator.

$m (\alpha, k-1, \rho)$ é o limite superior com 100 α % de confiança do máximo de k-1 variáveis N (0, 1) com comum correlação ρ .

Em (1967 a) Hollander propôs que trocássemos $m (\alpha, k-1, \hat{\rho})$ da estimativa anterior por $m (\alpha, k-1, \rho_U^n)$, onde ρ_U^n é a correlação, sob H_o, de duas estatísticas baseadas em postos sinalizados. Nemenyi (1963) propôs substituirmos $m (\alpha, k-1, \hat{\rho})$ por $m (\alpha, k-1, \frac{1}{2})$ para $n > 50$.

ii) Decidimos que $\tau_l \neq \tau_u$ a nível α se

(2.41) $T'_{l\mu} \geq t^{**} (\alpha, k-1, n)$

onde $t^{**} (\alpha, k-1, n)$ satisfaz

$$(2.42) \quad P_{H_o} \{ T'_{1\mu} < t^{**} (\alpha, k-1, n), \ \mu = 2,\ldots, k-1 \} \cong k - 1.$$

Baseando-se nas aproximações anteriores, pode-se tirar as aproximações

$$t^{*} (\alpha, k-1, n) \cong \frac{n (n+1)}{2} + | m | (\alpha, k-1, \frac{1}{2}) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{n (n+1) \ (2n + 1)}{24} \right]^{1/2}$$

$$t^{**} (\alpha, k-1, n) \cong \frac{n (n+1)}{4} + | m | (\alpha, k-1, \hat{\rho}) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{n (n+1) \ (2n + 1)}{24} \right]^{1/2}$$

Tabelas para $| m | (\alpha, k-1, \rho)$ são encontradas em Thigpen (1961), Krishnavah e Armitage (1965).

2.4 - ESTIMAÇÃO DE CONTRASTES

A) Experimentos com Um Fator

Seja o modelo,

$$(2.44) \quad X_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ji} \quad i = 1,\ldots, n_j \ ; \ j = 1,\ldots, k.$$

onde

μ : é a média geral

τ_j : é o efeito devido ao tratamento j do fator τ ,

e_{ji} : é o erro cometido ao fazer a i -ésima observação do tratamento j,

sendo que as seguintes condições estão satisfeitas

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0,$$

e_{ij} são v.a. i.i.d. com uma distribuição contínua F.

Chamaremos de <u>contraste</u> nos efeitos τ's do modelo acima a

$$(2.45) \quad \theta = \sum_{j=1}^{k} a_j \tau_j \quad \text{onde} \quad \sum_{j=1}^{k} a_j = 0, \quad a_j\text{'s constantes,}$$

que pode ser escrito como

$$(2.46) \quad \theta = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} \Delta_{h_j}$$

onde

$$d_{h_j} = \frac{a_h}{k}, \quad \Delta_{h_j} = \tau_h - \tau_j \; ; \quad j = 1,\ldots,k, \quad h = 1,\ldots,k.$$

Seja

$$Z_{h_j} = \text{mediana} \{ X_{\alpha h} - X_{\beta j} \; ; \; \alpha = 1,\ldots, n_h; \; \beta = 1,\ldots, n_j \}$$

$h \neq j$, o estimador de Hodges Lehmann para $\tau_h - \tau_j$.

$$\bar{\Delta}_h = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j Z_{h_j}}{\sum_{j=1}^{k} n_j}, \quad h = 1, \ldots, k; \; Z_{hh} = 0, \; \forall \; h.$$

$$W_{h_j} = \bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j$$

O estimador de θ_k, ajustado pelos pesos a_j é

$$(2.47) \quad \hat{\theta} = \sum_{j=1}^{k} a_j \bar{\Delta}_j = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} W_{h_j} =$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} (\bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j)$$

Note que se $n_1 = \ldots = n_k = n$,

$$(2.48) \quad \bar{\Delta}_h = \frac{\sum_{j=1}^{k} Z_{h_j}}{k} \quad \text{e} \quad \bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j = Z_{h.} - Z_{j.}.$$

O estimador de $W_{h_j} = \bar{\Delta}_h - \bar{\Delta}_j$ para $\tau_h - \tau_j$ foi proposto por Spjøtvoll (1968) como uma modificação de (2.48), devido a Lehmann (1963 a). Os resultados obtidos por Lehmann (1963a) foram estendidos por Bhuchong-

kul e Puri (1965). Intervalos de confiança para contrastes θ podem ser encontrados em Lehmann (1963b) e Sen (1966a).

O desvio padrão assintótico de $\hat{\theta}$ foi desenvolvido por Spjøtvoll (1968), normalidade assintótica e eficiência por Spjøtvoll (1968) e Lehmann (1963a).

B) <u>Experimentos com dois fatores sem interação, com uma observação por casela</u>.

Seja o modelo,

(2.49) $X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$, $i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots,k$

onde,

μ : É a média geral

τ_j : É o efeito devido ao tratamento j do fator τ.

β_i : É o efeito devido ao tratamento i do fator β.

e_{ij}: É o erro cometido ao fazer a i-ésima observação do tratamento j

e as seguintes condições satisfeitas

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$$

e_{ij} são i.i.d. com distribuição contínua F.

Tomemos $\theta = \sum_{j=1}^{k} a_j \tau_j = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} \Delta_{h_j}$

contraste nos efeitos τ's, como definido no exemplo anterior.

Definamos

- $D^i_{\mu v} = X_{i\mu} - X_{iv}$, $i = 1, \ldots, n$,

  a diferença entre o tratamento μ e v, calculada para cada dos n efeitos do fator β.

- $Z_{\mu v}$ = média $\{ D^i_{\mu v} \; ; \; i = 1, \ldots, n \}$.

- $\hat{\Delta}_{\mu v} = Z_{\mu .} - Z_{v .}$, onde

$$Z_{\mu .} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Z_{\mu j}}{k} \quad , \quad Z_{\mu\mu} = 0 \; ; \quad \mu = 1, \ldots, k$$

  o estimador de $\Delta_{\mu v .}$.

Um estimador de θ será obtido considerando $\hat{\theta} = \tilde{\theta}$, onde

$$(2.50) \quad \tilde{\theta} = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} \cdot \hat{\Delta}_{h_j} = \sum_{j=1}^{k} a_j Z_j .$$

O desvio padrão assintótico e a normalidade assintótica de $\tilde{\theta}$ além de estudos sobre sua eficiência, foram obtidos por Doksum (1967).

Lehmann (1963a, 1963b, 1964) e Puri - Sen (1967b) obtiveram intervalos de confiança para os contrastes.

Um outro estimador de θ pode ser obtido, baseando-se no estimador de uma amostra de Hodges - Lehmann proposto por Lehmann (1964) é,

$$(2.51) \quad \hat{\theta} = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} d_{h_j} \cdot \hat{\hat{\Delta}}_{h_j} = \sum_{j=1} a_j W_j.$$

onde

$$W_{\mu v} = \text{mediana} \left\{ \frac{X_{i\mu} - X_{iv} + X_{j\mu} - X_{jv}}{2}, \; i \leq j \right\}$$

$$i,j = 1,\ldots,n.$$

$$W_{\mu\mu} = 0$$

$$W_{\mu.} = \frac{\sum_{j=1}^{k} W_{\mu j}}{k}$$

$$\hat{\hat{\Delta}}_{\mu v} = W_{\mu.} - W_{v.}$$

O desvio padrão, a normalidade assintótica e estudos sobre sua eficiência deste estimador também são encontrados em Lehmann (1964).

Tabelas para $q(\alpha, k, \infty)$; $h(x, \alpha(n_1, \ldots, n_k))$, $y^*(\alpha, k-1, n)$, $y^{**}(\alpha, k-1, n)$, N_{k-1} , $m(\alpha, k-1, \rho)$, $|m|(\alpha, k-1, \rho)$, M_{k-1} , $r(\alpha, k, n)$, $\ell(\alpha, k, n)$, $r^*(\alpha, k, n)$, $r^{**}(\alpha, k, n)$, $t(\alpha, k, n)$ e $t^*(\alpha, k, n)$ são encontradas em Hollander & Wolfe (1973) .

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE VARIÂNCIA NÃO PARAMÉTRICA MULTIVARIADA

Iremos desenvolver, neste capítulo, os resultados obtidos para Análise de Variância Não Paramétrica Multivariada, resumindo os tópicos de Puri, M.L. & Sen, P.K. (1971) e complementando o assunto com as publicações não constantes da referência acima.

3.1 - EXPERIMENTOS COM UM FATOR "ONE-WAY LAYOUT"

Sejam $N = \sum_{k=1}^{c} n_k$ observações, com n_k observações do tratamento k. O modelo a ser estudado é

$$(3.1)\quad X_j^{(i)} = \mu + \tau_i + e_{ij}, \quad 1 \leq i \leq c; \quad j = 1,..,n_i$$

onde

$X_j^{(i)} = (X_{1j}^{(i)}, \ldots, X_{pj}^{(i)})'$ é o j - ésimo vetor de observações do i- ésimo efeito do fator τ.

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)'$, é a média geral (constante)

$\tau_i = (\tau_{i_1}, \ldots \tau_{i_p})'$, é o efeito devido ao tratamento i (constante)

$e_{ij} = (e_{1j}^{(i)} , \ldots , e_{pj}^{(i)})'$ é o erro cometido ao fazer a j - ésima observação do efeito i do fator τ .

e as seguintes condições estão satisfeitas

$$\sum_{i=1}^{c} \tau_i = 0$$

e_{ij} são v.a.i.i.d. com distribuição acumulada contínua F.

Estamos interessados em testar

(3.2) $H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_c$ versus $H_1 : \tau_i \neq \tau_j$

para algum $i \neq j$, $1 \leq i , j \leq c$.

Tomando

$$\theta_i = \mu + \tau_i$$

o problema se resume em testar

(3.3) $H_o : \theta_1 = \ldots = \theta_c$ versus $H_1 : \theta_i \neq \theta_j$

para algum $i \neq j$, $1 \leq i , j \leq c$.

Como $X_j^{(i)} + \theta_i = e_{ij}$, e os e_{ij} tem a mesma distribuição contínua F, os testes anteriores são equivalentes a

$$H_o : F(X + \theta_1) = \ldots = F(X + \theta_c) \quad \text{versus}$$

(3.4) $$H_1 : F(X + \theta_i) \neq F(X + \theta_j) \text{ para algum } i \neq j$$

$$1 \leq i,j \leq c.$$

Este é o problema de localização de multi-amostras multivariadas.

Faremos a seguir uma cobertura do que foi feito nesta direção até a publicação de Puri & Sen (1971).

3.1.1 - Princípios Básicos e Testes para Localização de Multi-amostras Multivariadas.

A) - O Princípio da Permutação dos Postos

Seja a i-variável $X_{i\alpha}^{(k)}$, $i = 1,\ldots,p$; $\alpha = 1, \ldots, n_k$ $k = 1,\ldots,c$ e $R_{i\alpha}^{(k)}$ o posto de $X_{i\alpha}^{(k)}$ sobre as $N = \sum_{k=1}^{c} n_k$ observações. Ao vetor $X_\alpha^{(k)} = (X_{1\alpha}^{(k)}, \ldots, X_{p\alpha}^{(k)})'$ está associado o vetor de postos $R_\alpha^{(k)} = (R_{1\alpha}^{(k)}, \ldots, R_{p\alpha}^{(k)})'$. Os N vetores de postos $R_\alpha^{(k)}$ $\alpha = 1,\ldots, n_k$; $k = 1,\ldots,c$ podem ser representados pela matriz

(3.5) $$R_N = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & \ldots, & R_{1n_1} & \ldots & R_{11} & \ldots & R_{1n_c}^{(c)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{p1}^{(1)} & \ldots & R_{pn_1}^{(1)} & \ldots & R_{p1} & \ldots & R_{pn_c}^{(c)} \end{bmatrix}$$

de ordem $p \times N$

Diremos que duas matrizes de ordem $p \times N$ são permutacionalmente equivalentes se uma pode ser obtida da outra rearranjando suas colunas. Se rearranjarmos as colunas da matriz (3.5) de tal modo que na primeira linha apareçam os números $1, \ldots, N$, na ordem natural, obteremos a matriz R_N^*, permutacionalmente equivalente a R_N, da forma

$$(3.6) \quad R_N^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ R_{21}^* & R_{22}^* & \cdots & R_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{p1}^* & R_{p2}^* & \cdots & R_{pN}^* \end{bmatrix}$$

Como as p - variáveis $X_{i\alpha}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, p$ são dependentes (em geral) a distribuição conjunta de R_N (ou R_N^*) sob a hipótese (3.4) irá depender de F. Mas os vetores $X_\alpha^{(k)}$; $\alpha = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, c$ sob H_o (3.4) são v.a.i.i.d. e portanto sua distribuição conjunta (ou de R_N^*) permanece invariante sob qualquer permutação destes vetores entre si. Definamos,

(3.7) $S(R_N^*) = \{ R_N \mid R_N$ é uma matriz obtida de R_N^* fazendo uma permutação em suas colunas $\}$.

Então

$$(3.8) \quad P(R_N = r_N \mid S(R_N^*), H_o) = \frac{1}{N!}$$

$\forall r_N \in S(R_N^*)$ e F contínua.

Podemos concluir que qualquer estatística de $X_\alpha^{(k)}$; $\alpha = 1, \ldots, n_k$; $k = 1, \ldots, c$ baseada em (3.7) e (3.8) é livre de distribuição não paramétrica. Testes baseados em R_N^*, somente através das permutações dos vetores colunas de R_N^*, serão chamados testes permutacionais baseados na ordenação linear dos postos.

<u>Exemplos de Testes Permutacionais Baseados na Ordenação Linear dos Postos</u>

Definamos

$$(3.9) \quad E_{N,\alpha}^{(i)} = j_{N_i}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) \; ; \; 1 \leq \alpha \leq N; \; i = 1, \ldots, p$$

onde j_{N_i} esta definida para $\frac{1}{N+1}, \ldots, \frac{N}{N+1}$ e é constante em $\left(\frac{\alpha}{N+1}, \frac{\alpha+1}{N+1}\right)$, $1 \leq \alpha \leq N-1$.

Então

$$(3.10) \quad E_N^{(i)}, R_{i\alpha}^{(k)} = j_{N_i}\left(\frac{R_{i\alpha}^{(k)}}{N+1}\right)$$

Definamos

$$(3.11) \quad T_{N,i}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_N^{(i)}, R_{i\alpha}^{(k)}$$

a média dos escores gerais $j_{N_i}\left(\frac{R_{i\alpha}^{(k)}}{N+1}\right)$

na k - ésima distribuição; $k = 1, \ldots, c$; $1 \leq i \leq p$.

Se definirmos $Z^{(k)}_{N_i,\alpha}$ como

$$(3.12)\quad Z^{(k)}_{N_i,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{se a } \alpha \text{ - ésima menor observação sobre } X^{(k)}_{i\alpha}, \ \alpha = 1, \ldots, n_k; \\ & k = 1, \ldots, c \text{ é da amostra da distribuição } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

teremos que

$$(3.13)\quad \sum_{\alpha=1}^{N} E^{i}_{N,\alpha} \cdot Z^{(k)}_{N_i,\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} j_{N_i}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) Z^{(k)}_{N_i,\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n_k} j_{N_i}\left(\frac{R^{(k)}_{i\alpha}}{N+1}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n_k} E^{(i)}_{N,\, R^{(k)}_{i\alpha}} =$$

$$= n_k \, T^{(k)}_{N,i}$$

Seja

$$(3.14)\quad \bar{E}^{(i)}_{N} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E^{(i)}_{N,\alpha} .$$

Se H_o é dada por (3.5)

$$(3.15)\quad E\left(T^{(k)}_{N,i} - \bar{E}^{(i)}_{N} \,\middle|\, S(R^{*}_{N}), H_o \right) =$$

$$= E\left(\frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{N} E^{(i)}_{N,\alpha} \cdot Z^{(k)}_{N_i,\alpha} - \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E^{(i)}_{N,\alpha} \,\middle|\, S(R^*_N), H_o \right) =$$

$$= E\left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} j_{N_i} \left(\frac{\alpha}{N+1}\right) \left(\left[\frac{1}{n_k} Z^{(k)}_{N_i,\alpha} - \frac{1}{N} \right] \right) / S(R^*_N), H_o) \right\} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} j_{N_i} \left(\frac{\alpha}{N+1}\right) \left\{ \left[\frac{1}{n_k} E\left(Z^{(k)}_{N_i,\alpha} \right) - \frac{1}{N} \right] / S(R^*_N), H_o \right\} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} j_{N_i} \left(\frac{\alpha}{N+1}\right) \left[\frac{n_k}{N} \cdot \frac{1}{n_k} - \frac{1}{N} \right] = 0 \text{ . Portanto}$$

$$(3.16) \quad E\left(T^{(k)}_{N,i} / S(R^*_N), H_o \right) = \bar{E}^{(i)}_N$$

Chamaremos de J_N a probabilidade condicional gerada pelas $N!$ igualmente prováveis permutações das colunas de R^*_N, isto é, a probabilidade

$$P\left(R_N = r_N / S(R^*_N), H_o \right) =$$

$$= P\left(R_N = r_N / J_N \right) = \frac{1}{N!}$$

Deste modo,

$$(3.17)\quad \mathrm{Cov}\left[\left(T^{(k)}_{N,i} , T^{(q)}_{N,j} \right) / J_N \right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{N-1} \bar{E}^{(i)}_N \bar{E}^{(j)}_N - \dfrac{1}{N(N-1)} \sum\limits_{k=1}^{c} \sum\limits_{\alpha=1}^{k} j_{N_i} \left(\dfrac{R^{(k)}_{i,\alpha}}{N+1} \right) \cdot \\ \cdot\ j_{N_j} \left(\dfrac{R^{(k)}_{j,\alpha}}{N+1} \right) \quad \text{se } q \neq k \\ \dfrac{n_k - N}{n_k\ (N-1)} \bar{E}^{(i)}_N \bar{E}^{(j)}_N - \dfrac{n_k - N}{n_k\ N\ (N-1)} \cdot \\ \cdot \sum\limits_{k=1}^{c} \sum\limits_{\alpha=1}^{n_k} J_{N_i} \left(\dfrac{R^{(k)}_{i,\alpha}}{N+1} \right) J_{N_j} \left(\dfrac{R^{(k)}_{j,\alpha}}{N+1} \right) \text{ se } q = k \end{cases}$$

Sob H_o, $X^{(k)}_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots, n_k$; $k = 1,\ldots,c$ são identicamente distribuidas então

$$(3.18)\quad E_{H_o} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} n_k T^{(k)}_{N,i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} n_k E_{H_o} \left(T^{(k)}_{N,i} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} n_k \bar{E}^{(i)}_N = \bar{E}^{(i)}_N$$

Devido a este fato construiremos testes para H_o baseados nos escores médios $T^{(k)}_{N,i}$, isto é, tomaremos $p(c-1)$ contrastes linearmente independentes $T^{(k)}_{N,i} - \bar{E}^{(i)}_N$, $k = 1,\ldots, c-1$;

$i = 1, \ldots, p$ e construiremos nosssos teste como sendo uma forma quadrática positiva definida deles. A maneira mais lógica é tomarmos um teste assintoticamente equivalente à razão de verossimilhança de Hotelling. Usaremos a função

$$(3.19) \qquad \mathcal{L}_N = \sum_{k=1}^{c} n_k \left(T_N^{(k)} - \bar{E}_N \right)' V^{-1} \left(R_N^* \right) \left(T_N^{(k)} - \bar{E}_N \right)$$

onde

$$T_N^{(k)} = \left(T_{N,1}^{(k)}, \ldots, T_{N,p}^{(k)} \right)'$$

$$\bar{E}_N = \left(\bar{E}_N^{(1)}, \ldots, \bar{E}_N^{(p)} \right)'$$

$$V\left(R_N^* \right) = \left(v_{ij} \left(R_N^* \right) \right)_{i,j = 1, \ldots, p}$$

$$v_{ij}\left(R_N^* \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,\alpha,i}^{(k)} E_{N,\alpha,j}^{(q)} - \bar{E}_N^{(i)} \bar{E}_N^{(j)}$$

$$E_{N,\alpha,j}^{(q)} = j_{N_j}\left(\frac{R_{j,\beta}^{(q)}}{N+1} \right)$$

e $V\left(R_N^* \right)$ é considerada positiva definida. Se $V\left(R_N^* \right)$ não for positiva definida, trabalharemos com a matriz de maior ordem obtida de $V\left(R_N^* \right)$ retirando o mesmo número

de linhas e colunas até que o $\det (V (R_N^*)) \neq 0$.

Como a distribuição de $\mathcal{L}_N / R_N^*$, H_o é a mesma para qualquer F contínua , podemos construir um teste aleatorizado de nível ε , livre de distribuição,

$$(3.20) \quad \phi (R_N) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{L}_N > L_N (R_N^*) \\ A_{N,\varepsilon} (R_N^*), & \text{se } \mathcal{L}_N = L_N (R_N^*) \\ 0, & \text{se } \mathcal{L}_N < L_N (R_N^*) \end{cases}$$

onde $L_N (R_N^*)$ é determinado para satisfazer

$$E (\phi (R_N) / J_N) = \varepsilon .$$

Exceto para pequenos valores de N e p uma aplicação exata do teste acima é muito laboriosa. Por isso estudaremos a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$.

Vejamos primeiramente alguns testes baseados na forma exata de $\mathcal{L}_N$.

<u>Teste Médio Para Multiamostras Multivariadas</u>

Definamos

$$(3.21) \quad E_{N,\alpha}^{(i)} = j_{N_i} \left(\frac{\alpha}{N+1} \right) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha < \left[\frac{N}{2} \right] = a \\ 0, & \text{c. contrário} \end{cases}$$

$$\alpha = 1, \ldots, N \; ; \; i = 1, \ldots, p.$$

então $T_{N,i}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,\, R_{i\alpha}}^{(i)}$ é a proporção de valores da amostra da k - ésima distribuição, na i - ésima variável que é menor ou igual a $a = \left[\frac{N}{2} \right]$

$$(3.22) \quad v_{ij} \left(R_N^* \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,\alpha,i}^{(k)} \; E_{N,\alpha,j}^{(k)} -$$

$$- \bar{E}_N^{(i)} \; \bar{E}_N^{(j)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{N} - \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N} = \frac{a\,(N-a)}{N^2} & \text{se} \quad i = j \\ a_{N,i,j} - \left(\frac{a}{N} \right)^2 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

onde $a_{N,i,j}$ é a proporção das observações amostrais combinadas para as quais a i- ésima e a j- ésima variável são simultaneamente menores ou iguais a $\left[\frac{N}{2} \right]$.

Para $p = 1$, $\mathcal{L}_N$ é a estatística de Mood - Brown (1951)

<u>Teste da Soma dos Postos</u>

Definamos

$$(3.23) \quad E_{N,\alpha}^{(i)} = j_{N_i} \left(\frac{\alpha}{N+1} \right) = \frac{\alpha}{N+1} \; ; \quad 1 \leq \alpha \leq N; \; i = 1,\ldots,p$$

então

$$(3.24)\quad T^{(k)}_{N,i} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j_{N_i} \left(\frac{R^{(k)}_{i,\alpha}}{N+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \frac{R^{(k)}_{i,\alpha}}{n_k}$$

que é $(N+1)^{-1}$ vezes a média dos postos da k - ésima variável, nas observações do i - ésimo componente da variável, $i = 1,\ldots, p$; $k = 1,\ldots, c$.

$$(3.25)\quad v_{ij}(R^*_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \frac{R^{(k)}_{i,\alpha} \cdot R^{(k)}_{j,\alpha}}{(N+1)^2} - \frac{1}{N^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \frac{R^{(k)}_{i,\alpha}}{N+1} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_q} \frac{R^{(q)}_{j,\alpha}}{N+1} \right)$$

Para $p = 1$, $\mathcal{L}_N$ é a estatística de Kruskal-Wallis.

<u>Teste dos Escores Normais</u>

Definamos $E^{(i)}_{N,\alpha} = E\left(\frac{R_{i,\alpha}}{N+1} \right)$; $\alpha = 1,\ldots, N$

onde $R_{i,\alpha}$ é o posto de ordem α de $X^{(q)}_{i,\beta}$, $\beta = 1,\ldots, n_q$; $q = 1,\ldots, c$ onde estamos considerando $X^{(q)}_{i,\beta} \sim N(0,1)$ para $q = 1,\ldots,c$; $\alpha = 1,\ldots, n_q$.

A.1 - Distribuição Assintótica de $\mathcal{L}_N$

Enunciaremos agora os resultados sobre a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$, resultados estes que estão provados em Puri - Sen (1971), capítulo 5.

Teorema 3.1

Se $V(R_N^*)$ é assintoticamente não singular, então a distribuição conjunta das $p(c-1)$ variáveis

$$\{ T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} \; ; \; i = 1,\dots,p \; ; \; k = 1,\dots,c-1 \}$$

sob J_N tem assintoticamente uma distribuição $p(c-1)$ - normal.

Enunciaremos condições e notações necessárias para o entendimento dos próximos resultados

$F_{[i]}^{(k)}$: Distribuição Acumulada de $X_{i,\alpha}^{(k)}$

$F_{[i,j]}^{(k)}$: " " " $(X_{i,\alpha}^{(k)}, X_{j,\alpha}^{(k)})$

$j, i = 1,\dots,p \; ; \; k = 1,\dots,c$

$$N = \sum_{k=1}^{c} n_k \quad ; \quad \lambda_N^{(k)} = \frac{n_k}{N}$$

(3.26) Condição : Assumiremos que para todo N, as desi- $0 \leq \lambda_o \leq \lambda_N^{(k)} \leq 1 - \lambda_o < 1$ valem para

algum $\lambda_o \leq \frac{1}{c}$ e $k = 1,\ldots, c$.

$$H_{N\,[i]}(x) = \sum_{k=1}^{c} \lambda_N^{(k)} F_{N\,[i]}^{(k)}(x)$$

$$F_{N\,[i]}(x) = \frac{1}{n_k} \left[\text{número de } X_{i,\alpha}^{(k)} \text{ tal que } X_{i,\alpha}^{(k)} \leq x \right]$$

$$F_{N\,[i,j]}^{(k)}(x,y) = \frac{1}{n_k} \left[\text{número de } (X_{i,\alpha}^{(k)} ; X_{j,\alpha}^{(k)}) \text{ tal que } X_{i,\alpha}^{(k)} \leq x \text{ e } X_{j,\alpha}^{(k)} \leq y \right]$$

$$H_{N\,[i,j]}(x,y) = \sum_{k=1}^{c} \lambda_N^{(k)} F_{N\,[i,j]}^{(k)}(x,y)$$

$$H_{[i,j]}(x,y) = \sum_{k=1}^{c} \lambda_N^{(k)} F_{[i,j]}^{(k)}(x,y)$$

$$H_{[i]}(x) = \sum_{k=1}^{c} \lambda_N^{(k)} F_{[i]}^{(k)}(x)$$

Seja j_{N_i} como definido em (3.10) satisfazendo

(3.27) $\lim_{N \to \infty} j_{N_i}(\mu) = j_i(\mu)$ para $0 < \mu < 1$ e não constante, $i = 1,\ldots, p$.

$$(3.28) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[j_{N_i}\left(\frac{N}{N+1} H_{N\,[i]}(x) \right) - j_i\left(\frac{N}{N+1} H_{N\,[i]}(x) \right) \right] . \, dF_{N\,[i]}^{(k)}(x) = \theta_p\left(N^{-\frac{1}{2}} \right) .$$

$$(3.29)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[j_{N_i}\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N[i]}(x)\Big)\, j_{N_j}\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N[j]}(y)\Big) -$$

$$- j_i\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N[i]}(x)\Big)\, j_j\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N[j]}(y)\Big)\Big] \;.$$

$$.\; d\, F^{(k)}_{N[i,j]}(x,y) = 0_p(1) \;;\quad i \neq j,\; i,j = 1,\dots,p$$

Note que (3.29) segue de

$$(3.30)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[j_{N_i}\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N_i}(x)\Big) - j_i\Big(\frac{N}{N+1}\, H_{N_i}(x)\Big)\Big]^2 \;.$$

$$.\; d\, F^{(k)}_{N,i}(x) = \theta_p(1)$$

e também satisfazendo

$$(3.31)\quad \left| \frac{d^{\ell}_{j_i}(\mu)}{d\mu} \right| \leq K \Big[\mu(1-\mu) \Big]^{-\ell - \frac{1}{2} + \delta} ,$$

$$\ell = 0, 1 \;;\; i = 1,\dots,p$$

ou a condição

(3.32) Existe um número finito de intervalos semi-abertos,

$$0 = \alpha_o \leq \mu < \alpha_1^{(i)} \;;\; \alpha_1^{(i)} \leq \mu < \alpha_2^{(i)} \;;\; \dots ,$$

$$\dots,\; \alpha^{(i)}_{r_{i-1}} \leq \mu < 1 = \alpha^{(i)}_{r_i} \text{ tal que } j_{N_i}(\mu)$$

assume valores constantes nestes intervalos com

$$j_{N_i}(\mu) = j_{i,j} \text{ para qualquer } \mu : \alpha_{j-1}^{(i)} \leq \mu < \alpha_j^{(i)} ;$$

$$j = 1,\ldots, r_i$$

e para algum $\delta > 0$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \left| j_{i,j} \right|^{2+\delta} (\alpha_j^{(i)} - \alpha_{j-1}^{(i)}) < \infty \quad \text{para todo } i = 1,..,p,$$

$$j = 1,\ldots, r_i.$$

Suporemos que X_α^k ; $\alpha = 1,\ldots, n_k$; $k = 1,\ldots,c$ têm a mesma distribuição F e sejam $F_{[i]}$ e $F_{[i,j]}$ as distribuições marginais de $X_{i,\alpha}^{(k)}$ e $(X_{i,\alpha}^{(k)} ; X_{j,\alpha}^{(k)})$ respectivamente.

Definamos

$$(3.33) \quad \gamma_{ij}(F) = \begin{cases} \int_0^1 j_i^2(\mu)d\mu - \mu_i^2 , \quad \mu_i = \int_0^1 j_i(\mu)\, d\mu \\ \text{para } i = j, \quad i,j = 1,\ldots, p \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} j_i(F_{[i]}(x))\, j_j(F_{[j]}(y)) \,. \\ \,. \; dF_{[i,j]}(x,y) - \mu_i \mu_j , \quad i \neq j = 1,\ldots, p. \end{cases}$$

$$(3.34) \quad \gamma(F) = (\gamma_{ij}(F)) \qquad i,j = 1, \ldots, p$$

Teorema 3.2

Se (3.27), (3.28), (3.29) e (3.31) valem, então para todo $F_k \in \Omega$, $k = 1,\ldots, c$ (Ω conjunto de todas distribuições p - variadas contínuas) temos que

$$V(R_N^*) \xrightarrow[p]{} \gamma(H) \text{ com } N \to \infty, \text{ sob } J_N, \text{ ponto a ponto}$$

$$\mathcal{L}_N \xrightarrow[p]{} \chi^2_{p(c-1)} \quad \text{com } N \to \infty, \text{ sob } J_N .$$

Teorema 3.3 : (Generalização do teorema 3.2)

Se $F_k \in \mathcal{F}$, para $k = 1,\ldots, c$ ($\mathcal{F}$ espaço das Distribuições contínuas) e se j_{N_i} satisfaz (3.34), (3.35) e (3.38) para $i = 1,\ldots,p$, então o vetor estacástico

$$\left[N^{\frac{1}{2}} \left(T_{N,i}^{(k)} - \mu_{N,i}^{(k)} \right) \quad i = 1,\ldots,p ; k = 1,\ldots,c \right]$$

tem uma distribuição limite normal com vetor média zero e matriz de covariância

$$\Sigma = \left(\left(\sigma_{N\,[i,j]}^{(k,q)} \right) \right)$$

onde

$$\mu_{N,i}^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_i \left(H_{[i]}(x) \right) \, d F_{[i]}^{(k)}(x) \; ; \; i = 1,\ldots,p \; ; \; k = 1,\ldots,c.$$

$$\sigma^{(k,q)}_{N[i,j]} = 2 \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{c} \lambda_N^{(r)} \iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(r)}(x,y)\, d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(r)}_{[i]}(y) +$$

$$+ \frac{2}{\lambda_N^{(k)}} \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{c} \left[\lambda_N^{(r)} \right]^2 \iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(k)}(x,y)\, d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(r)}_{[i]}(y) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_N^{(k)}} \sum_{\substack{r=1 \\ s\neq r \\ s\neq k}}^{c} \sum_{\substack{s=1 \\ r\neq k}}^{c} \lambda_N^{(r)} \lambda_N^{(s)} \left[\iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(k)}(x,y) \,.\right.$$

$$. \; d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(s)}_{[i]}(y) + \iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(k)}(y,x) \,.$$

$$\left. . \; d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(s)}_{[i]}(y) \right]$$

(se $k = q$, $i = j$)

$$= \sum_{r=1}^{c} \sum_{s=1}^{c} \frac{\lambda_N^{(r)} \lambda_N^{(s)}}{\lambda_N^{(k)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B^{(k)}_{i,j}(x,y) \,.$$

$$. \; d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(s)}_{[j]}(y) - \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \,.$$

$$. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B^{(k)}_{i,j}(x,y) \left[d F^{(r)}_{[i]}(x)\, d F^{(k)}_{[j]}(y) + \right.$$

$$+ \, d F^{(k)}_{[i]}(x) \quad d F^{(r)}_{[j]}(y) \Big] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B^{(r)}_{i,j}(x,y) \quad d F^{(k)}_{[i]}(x) \quad d F^{(k)}_{[j]}(y)$$

(se $k = q, \quad i \neq j$)

$$= - \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \Bigg[\iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(k)}(x,y) \quad d F^{(r)}_{[i]}(x) \quad d F^{(q)}_{[i]}(y) \quad +$$

$$+ \iint_{-\infty < y < x < \infty} A_i^{(k)}(y,x) \quad d F^{(k)}_{[i]}(x) \quad d F^{(q)}_{[i]}(y) \Bigg] -$$

$$- \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \Bigg[\iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(q)}(x,y) \quad d F^{(r)}_{[i]}(x) \; d F^{(k)}_{[i]}(y) \quad +$$

$$+ \iint_{-\infty < y < x < \infty} A_i^{(q)}(y,x) \quad d F^{(r)}_{[i]}(x) \; d F^{(k)}_{[i]}(y) \Bigg] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \Bigg[\iint_{-\infty < x < y < \infty} A_i^{(r)}(x,y) \quad d F^{(k)}_{[i]}(x) \quad d F^{(q)}_{[i]}(y) \quad +$$

$$+ \iint_{-\infty < y < x < \infty} A_i^{(r)}(y,x) \quad d F^{(k)}_{[i]}(x) \quad d F^{(q)}_{[i]}(y) \Bigg]$$

(se $k \neq q, \; i = j$)

$$= - \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}^{(k)} (x,y) \, d F_{[i]}^{(r)}(x) \, d F_{[j]}^{(q)}(y) -$$

$$- \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}^{(q)} (x,y) \, d F_{[i]}^{(k)}(x) \, d F_{[j]}^{(q)}(y) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{c} \lambda_N^{(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{i,j}^{(r)} (x,y) \, d F_{[i]}^{(k)}(x) \, d F_{[j]}^{(q)}(y)$$

$$(\text{se } k \neq q \ , \ i \neq j$$

onde

$$A_i^{(\alpha)} (t, \mu) = F_{[i]}^{(\alpha)} (t) \left[1 - F_{[i]}^{(\alpha)} (\mu) \right] j_i' (H_{[i]} (t)) \, j_i' (H_{[i]} (\mu))$$

$$B_{i,j}^{(\alpha)} (t, \mu) = \left[F_{[i,j]}^{(\alpha)} (t, \mu) - F_{[i]}^{(\alpha)} (t) \, F_{[j]}^{(\alpha)} (\mu) \right] j_{[i]}' (H_{[i]} (t)) \, .$$

$$. \ j_j' (H_{[j]} (\mu)) \, .$$

Observação :

a) A distribuição normal assintótica obtida no teorema anterior é singular e seu posto é no máximo $p\,(c-1)$

b) Sob H_o ,

$$\sigma^{(k,q)}_{N[i,j]} = \left(\frac{\delta_{kq}}{\lambda^{(k)}_N} - 1 \right) \gamma_{ij}(F)$$

onde δ_{kq} é o delta de Kronecker e $\gamma_{ij}(F)$ é dado por (3.33).

c) Se $\gamma(F)$ é positiva definida,

$$\{ N^{\frac{1}{2}} (T^{(k)}_{N,i} - \mu^{(k)}_i) , i = 1,\ldots,p; k = 1,\ldots, c \}$$ é

assintoticamente normal $p(c-1)$ multivariada de posto $P(c-1)$ e

$$(3.35) \quad \mathcal{L}^*_N = \sum_{k=1}^{c} n_k \left[T^{(k)}_N - \bar{E}_N \right] \gamma^{-1}(F) \left[T^{(k)}_N - \bar{E}_N \right]'$$

tem distribuição $\chi^2_{p(c-1)}$, assintoticamente, sob H_o.

d) Se $\hat{\gamma}^{-1}(F)$ é um estimador consistente de $\gamma^{-1}(F)$, $\gamma(F)$ de posto $p(c-1)$,

$$(3.36) \quad \hat{\mathcal{L}}_N = \sum_{k=1}^{c} n_k (T^{(k)}_N - \bar{E}_N)' \hat{\gamma}^{-1}(F) (T^{(k)}_N - \bar{E}_N)$$

tem também sob H_o uma distribuição assintótica $\chi^2_{p(c-1)}$.

e) Podemos basear os testes assintóticos para H_o em $\hat{\mathcal{L}}_N$ dado por (3.36). Chamaremos tais testes de "testes assintóticos da ordem dos postos livres de distribuição".

A.2 - Distribuição Limite de $\hat{\mathcal{L}}_N$ para Sequências de Alternativas de Escala e Translação.

Sejam alternativas $\{ H_N \}$ que especificam para cada k, (k = 1,..., c) a distribuição de

$$F_k(x) = F (x_{1,N}^{(k)} , \ldots, x_{p,N}^{(k)})$$

com $F \in \Omega_o = \{ F \mid F$ é contínua de posto $p \}$

onde

$$(3.37) \quad x_{i,N}^{(k)} = (x_i + \theta_i^{(k)} N^{-\frac{1}{2}}) (1 + \delta_i^{(k)} N^{-\frac{1}{2}}) , \; i = 1,\ldots,p.$$

Denotaremos

$$(3.38) \quad \theta^{(k)} = (\theta_1^{(k)} , \ldots, \theta_p^{(k)})' ; \quad \delta^{(k)} = (\delta_1^{(k)} ,\ldots, \delta_p^{(k)})'$$

e assumiremos que no mínimo uma das duas igualdades

$$(3.39) \quad \theta^{(1)} = \ldots = \theta^{(c)} ; \quad \delta^{(1)} = \ldots = \delta^{(c)}$$

não é verdadeira. Note que se $\delta^{(1)} = \ldots = \delta^{(c)}$ temos o problema usual de localização e quando $\theta^{(1)} = \ldots = \theta^{(c)}$ o de escala e se (3.39) vale temos $H_o : F_1 = \ldots = F_c$.

Teorema 3.4

Se

— $\exists \lim_{N \to \infty} \lambda_N^{(k)} = \lambda^{(k)}$ com $0 < \lambda^{(k)} < 1$, $k = 1,\ldots,c$.

- As condições do teorema (3.3) valem sob $\{ H_N \}$

então

$$\{ N^{\frac{1}{2}} (T^{(k)}_{N,i} - \mu^{(k)}_{N,i}) , i = 1,\ldots, p ; k = 1,\ldots c \} \xrightarrow{D}$$

$$\xrightarrow{D} N_{pc} (0, \Sigma^*)$$

com

$$\Sigma^* = (\sigma^{(k,q)}_{[i,j]}) \quad \text{onde}$$

$$\sigma^{(k,q)}_{[i,j]} = \left(\frac{\delta_{kq}}{\lambda^{(k)}} - 1 \right) \quad \gamma_{ij} (F); \; i,j = 1,\ldots, p \quad k,q = 1,\ldots, c$$

e δ_{kq} é o delta de Kronecker e γ_{ij} (F) como anteriormente definido.

□

Sejam $F_{[i]}$, $F_{[i,j]}$ as f.d.a. marginais das variáveis (i) e (i,j) da distribuição $F(x_1, \ldots, x_p)$, respectivamente.

<u>Teorema 3.5</u>

Se

- As condições do teorema (3.4) estão satisfeitas

- $F^{(q)}_{[i]}(x)$ tem distribuição $F_{[i]}(x)$ para todo q (= 1, , ..., c) , i = 1,..., p

- $$\alpha^{(q)}_i = \lim_{N \to \infty} \sqrt{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ j_{(i)} \left[\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)}_N \cdot F_{[i]}\left(x + \theta^{(k)}_i N^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1 + \delta^{(k)}_i N^{-\frac{1}{2}}\right) \right] - j_{(i)}\left(F^{(q)}_{[i]}(x)\right) \right\} d F^{(q)}_{[i]}(x)$$ existe e é finito.

Então

$$\mathcal{L}_N \xrightarrow{D} \chi^2_{p(c-1),\,\Delta}$$

onde o parâmetro de não centralidade Δ , vale

$$\Delta = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left[\alpha^{(k)\prime} \gamma^{-1}(F) \alpha^{(k)} \right]$$

$$\alpha^{(k)} = \left(\alpha^{(k)}_1, \ldots, \alpha^{(k)}_p \right)' \; ; \; k = 1, \ldots, c.$$

□

Vejamos agora algumas notações e conceitos necessários para o entendimento do resultado que nos dá outra forma de cálculo de Δ .

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. com f.d.a F com $x \in R^p$ $(p \geq 1)$, $\mathcal{F} = \{ F \mid F$ é f.d.a. em $R^p \}$ e $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow R$.

θ é chamado um funcional regular sobre $\mathcal{F}$ se $\exists\, \phi : R^n \longrightarrow R$ tal que

$$(3.40) \quad \int \cdots \int_{R^{pn}} \phi(x_1, \ldots, x_n)\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) = \theta(F)$$

para $\forall F \in \mathcal{F}$

Se (3.40) vale, dizemos que θ é estimável. O menor inteiro $\underline{n}$ que satisfaz (3.40) é chamado grau e ϕ é chamado núcleo de θ. Consideraremos o núcleo ϕ sempre simétrico sobre seus argumentos, pois se existe um núcleo podemos construir um simétrico através dele.

Definamos

$$\phi_c(x_1, \ldots, x_c) = E_F\{\phi(x_1, \ldots, x_c, X_{c+1}, \ldots X_m)\}$$

$$\psi(X_1, \ldots, X_c) = \phi_c(X_1, \ldots, X_c) - \theta(F)$$

$$\rho_c(F) = E_F\{\psi_c^2(X_1, \ldots, X_c)\} \quad \text{para todo } \rho = 1, \ldots, m.$$

Note que $\phi_o = \theta(F)$ e $\rho_o(F) = 0$, $\forall F$.

$$\rho_s^{(i)}(F) = E_F \{ \psi_s^{(i)}(X_1, \ldots, X_s) \}$$

$$f_{[i]}(\rho_s^{(i)}) = \frac{d}{dx} F_{[i]}(\rho_s^{(i)}) \Big|_{\rho_s^{(i)} > 0}$$

$$h_{[i]}(\rho_s^{(i)}) = \frac{d}{dx} H_{[i]}(\rho_s^{(i)}) \Big|_{\rho_s^{(i)} > 0}$$

$$s = 1, \ldots, r_i - 1 \; ; \; i = 1, \ldots, p$$

$$(3.41) \quad \eta_i^{(k)} = \theta_i^{(k)} \sum_{s=1}^{r_i - 1} \{ j_{i,s} - j_{i,s+1} \} f_{[i]}(\rho_s^{(i)}) +$$

$$+ \delta_i^{(k)} \sum_{s=1}^{r_i - 1} \{ j_{i,s} - j_{i,s+1} \} \rho_s^{(i)} f_{[i]}(\rho_s^{(i)})$$

para $k = 1, \ldots, c \; ; \; i = 1, \ldots, p$

$$B_i(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} j_i(F_{[i]}(x)) \, dF_{[i]}(x) \; ;$$

$$i = 1, \ldots, p$$

$$C_i(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} j_i(F_{[i]}(x)) \, dF_{[i]}(x) \; ;$$

$$i = 1, \ldots, p$$

$$(3.42) \quad \eta_i^{(k)} = B_i(F) (\theta_i^{(k)} - \bar{\theta}_i) + C_i(F) (\delta_i^{(k)} - \bar{\delta}_i) \; ;$$

$$i = 1, \ldots, p$$

$$(3.43) \quad \eta^{(k)} = (\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_p^{(k)})' \; ; \; k = 1, \ldots, c$$

$$\bar{\theta}_i = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \theta_i^{(k)} \quad e \quad \bar{\delta}_i = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \delta_i^{(k)} \; ; \; i = 1, \ldots, p$$

Se (3.31) é trocado por (3.32), o $\eta^{(k)}$ dado por (3.43) toma a forma (3.41)

$$a_{i,s} = \frac{f_{[i]}(\rho_s^{(i)})}{h_{[i]}(\rho_s^{(i)})} \quad ; \quad s = 1, \ldots, r_i - 1; \quad i = 1, \ldots, p.$$

<u>Teorema 3.6</u>

Se $F(X)$ e j_i são tais que para $i = 1, \ldots, p$,

- $F_{[i]}(X)$ é contínua e derivável em cada um dos intervalos abertos $(-\infty, a_{i1})$; (a_{i1}, a_{i2}), ... , $(a_{i(r_i-1)}, +\infty)$

- $F_{[i]}(x)$ tem uma densidade $f_{[i]}(x)$ que é limitada em cada um desses intervalos acima

- A função $\frac{d}{dx} j_i \left[F_{[i]}(x) \right]$ é limitada para $x \to \pm\infty$

então os limites $\alpha^{(k)}$, $k = 1, \ldots, c$ existem e são dados por

$$\alpha^{(k)} = -\eta^{(k)}$$

onde $\eta^{(k)}$ é dado por (3.42) e (3.43).

$\square$

Se as condições do teorema (3.6) estão satisfeitas Δ é dado por

$$(3.44) \qquad \Delta\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(K)} \left[\eta^{(k)'} \gamma^{-1}_{(F)} \eta^{(k)} \right]$$

onde $\eta^{(k)}$ é dado por (3.42) e (3.43)

<u>Teorema 3.7</u>

Se as condições do Teorema (3.4) e (3.6) estão satisfeitas sob $\{ H_N \}$ definidas por (3.37) e (3.38) a estatística $\mathcal{L}_N$ definida por (3.19) tem, assintoticamente, uma distribuição qui-quadrado com parâmetro de não centralidade $\Delta\mathcal{L}$ dado por (3.44).

$\square$

Segue dos teoremas (3.2), (3.4), (3.5) e (3.6) que sob as alternativas $\{ H_N \}$

$$(3.45) \qquad \mathcal{L}_N \overset{P}{\sim} \hat{\mathcal{L}}_N$$

Pode-se concluir de(3.45) que para testar H_o versus $\{ H_N \}$, $\mathcal{L}_N$ e $\hat{\mathcal{L}}_N$ têm , assintóticamente, o mesmo poder.

B) <u>Testes Multivariados para Multiamostras Baseados nas Estatísticas U</u> .

Sejam

$$X_\alpha^{(k)} = (X_{1\alpha}^{(k)} , \ldots, X_{p\alpha}^{(p)})' ; \quad \alpha = 1,\ldots, n_k$$

a..a. de $F_k(X)$, $k = 1,.., c$ onde F_k não é necessariamente contínua

$$F = (F_1, \ldots, F_c)', \quad F \in \Omega$$

$$\Omega = \{ F \mid F \text{ não precisa ser contínua} \}$$

$$\theta(F) = (\theta_1(F), \ldots, \theta_t(F))', \quad t \geq 1$$

um (vetor) funcional regular de $F \in \Omega$ com

$$\theta(F) = \theta^o = (\theta_1^o, \ldots \theta_t^o)' \text{ sob } H_o$$

onde θ^o é conhecido e independente de F.

Como estamos supondo $\underline{\theta}$ estimável então existe um vetor núcleo

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_t)' \text{ de } \theta$$

onde

$$\phi_i = \phi_i \left(X^{(1)}_{\alpha_{11}}, \ldots, X^{(1)}_{\alpha_{1m_{i_1}}}, \ldots, X^{(c)}_{\alpha_{c1}}, \ldots, X_{\alpha_{c\,m_{i_c}}} \right)$$

$$i = 1, \ldots, t$$

isto é,

$$(3.46) \quad \int \cdots \int_{p \times (m_{i_1} + \ldots + m_{i_c})} \phi_i \left(X^{(1)}_{\alpha_{11}}, \ldots, X^{(1)}_{\alpha_{1\,m_{i_1}}}, \ldots, X^{(c)}_{\alpha_{c1}}, \ldots, X^{(c)}_{\alpha_{c\,m_{i_c}}} \right).$$

$$\cdot\ dF_1(X^{(1)}_{\alpha_{11}}) \ldots\ldots dF_1(X^{(1)}_{\alpha_{1 m_{i_1}}}) \ldots\ldots dF_c(X^{(c)}_{\alpha_{c_1}}) \ldots\ldots$$

$$\cdot\ dF_c(X^{(c)}_{\alpha_{c\, m_{i_c}}}) = \theta_i(F) \in R, \quad \forall F \text{ e } i = 1,\ldots,t$$

e matriz grau

$$(3.47) \qquad m = \begin{bmatrix} m_{11}, \ldots, & m_{1c} \\ \vdots & \vdots \\ m_{t_1}, \ldots, & m_{t_c} \end{bmatrix}$$

onde cada m_{ij}, $i = 1,\ldots, t$; $j = 1,\ldots,c$ é um inteiro não negativo, isto é, $m_{i_1}, \ldots, m_{ic}$, $i = 1,\ldots,t$ são os menores inteiros que satisfazem (3.46).

Consideraremos ϕ_i simétrica em $(X^{(k)}_{\alpha_{k_1}}, \ldots, X_{\alpha_{k\, m_{i_c}}})$, $k = 1,\ldots,c$, mas não sobre os diferentes $\underline{c}$ conjuntos.

Chamaremos

$$U_N = (U_{N_1}, \ldots, U_{N_t})'$$

de U - estatística generalizada correspondendo a ϕ, onde

$$(3.48) \quad U_{N_i} = \left[\prod_{\ell=1}^{c} \binom{n_k}{m_{\ell k}}^{-1} \right] \sum_{S_i} \phi_i(X^{(1)}_{\alpha_{11}}, \ldots, X^{(c)}_{\alpha_{c\, m_{i_c}}})$$

e

$$S_i = \{ 1 \leq \alpha_{k_1} < \ldots < \alpha_{k\, m_{ik}} \leq n_k \; ; \; k = 1,\ldots, c; \; i = 1, \ldots, t, \; \sum_{k=1}^{c} n_k = N \text{ o tamanho da amostra tirada da distribuição } F_k, \; m_{ik} \in \mathbb{N} \} .$$

Construiremos testes para H_o baseando-se em U_N.

Tomando as c amostras formaremos um vetor de tamanho N_p, Z_N, das observações,

$$(3.49) \quad Z_N = (Z_1,\ldots, Z_N) \; ; \; Z_\alpha = (Z_{1\alpha}, \ldots, Z_{p\alpha}) \; ;$$

$$\alpha = 1,\ldots, N$$

onde

$$Z_\alpha = \begin{cases} X_\alpha^{(1)}, & \alpha = 1, \ldots, n, \\ X_{\alpha - n_1 - \ldots - n_{k-1}}^{(k)}, & \text{para } \alpha = n_1 + \ldots + n_{k-1} + 1,\ldots, n_1 + \ldots + n_k; \; K = 2,\ldots,c. \end{cases}$$

Sob H_o, Z_N é composto de N vetores aleatórios i.i. distribuidos. Então

$$(3.50) \quad P (Z_N = z_\alpha \mid H_o \text{ e } Z_{ON}) = \frac{1}{N!}$$

quando F é contínua, z_α é um vetor obtido de Z_{ON} fazendo uma permutação dos seus elementos e Z_{ON} é o valor obtido de Z_N na amostra. Deste modo, todas as pos-

síveis partições das N observações em c subconjuntos de tamanhos $n_1, \ldots, n_c$, respectivamente, são igualmente prováveis (sob H_o e dado $Z_N = Z_{ON}$) e cada partição tendo a probabilidade permutacional

$$(3.51) \quad \binom{N}{n_1, \ldots, n_c}^{-1} = \frac{n_1! \ldots n_c!}{N!}$$

Note que (3.51) é independente do $F \in \Omega$ e do Z_{ON} tomado (fixado), então qualquer teste baseado em (3.51) é livre de distribuição (condicionalmente livre de distribuição). Neste caso U_N, baseado na medida (3.51) é livre de distribuição. A distribuição de U_N baseada em (3.51) será chamada "distribuição de U_N baseada em permutações".

<u>Propriedades da Distribuição de U_N Baseada em Permutações</u>

Sejam

$$m_i = m_{i1} + \ldots + m_{ic} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, t$$

$$\phi_i^* = (Z_{\alpha_1}, \ldots, Z_{\alpha m_i}) = \frac{1}{m_i!} \sum_{S_i^*} \phi_i (Z_{\alpha_1}, \ldots, Z_{\alpha m_i})$$

onde S_i^* é o conjunto de todas as $m_i!$ permutações de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i})$.

$$\phi^* = (\phi_1^*, \ldots, \phi_t^*)'$$

Note que ϕ_i^* é uma forma simétrica de ϕ_i, $i = 1, \ldots, t$.

Assumiremos que $\underline{\theta}$ satisfaça as seguintes condições :

(3.52) $\phi^*(Z_N) = \theta^o$, $\forall Z_N$

(3.53) A matriz de covariância de $N^{\frac{1}{2}}\{U_N - \theta^o\}$ tem assintoticamente (com $N \to \infty$ sujeito a condição $\frac{n_k}{N} \to \lambda_k$, $0 < \lambda_k < 1$, $\sum_{k=1}^{c} \lambda_k = 1$) um limite positivo definido $\Gamma(F, \lambda)$ sob H_o, onde F é a f.d.a. comum $(F_1 = \ldots = F_c = F)$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_c)$.

Seja $\tau(Z_N)$ a medida de probabilidade gerada por (3.50) (isto é, dado Z_{ON} e H_o e pensando nas permutações das coordenadas de Z_{ON}).

Então,

(3.54) $E(U_N \mid \tau(Z_N)) = (E(U_{N_1} \mid \tau(Z_N)), \ldots,$

$, E(U_{N_t} \mid \tau(Z_N))) =$

Por (3.48) $\left(\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{c} \binom{n_k}{m_{\ell k}}} \sum_{S_i} E(\phi_1 / \tau(Z_N)) \right.$,

$$, \ldots , \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{c} \binom{n_k}{m_{\ell k}}} \sum_{S_i} E (\phi_t / \tau (Z_N)) =$$

$$= (\theta_1^o , \ldots , \theta_t^o) = \theta^o .$$

(3.55) Assumiremos que $E (\phi \ \phi' \mid F \in \Omega_o) < \infty$

Definiremos

$$\rho^{(i,j)}_{d_1,\ldots, d_c}(F) \quad , \quad 0 \leq d_k \leq \min (m_{ik} , m_{jk})$$

$$k = 1,\ldots,c \ ; \ i,j = 1,\ldots, t$$

como a covariância entre ϕ_i e ϕ_j onde d_k das variáveis $\{ X_\alpha^{(k)} \}$, $k = 1,\ldots,c$ são iguais e ϕ_i , ϕ_j definidas para o uso em (3.46).

Considerando a medida de probabilidade $\tau (Z_N)$, representaremos a mesma covariância acima como

$$\rho^{(i,j)}_{d_1,\ldots,d_c} (Z_N) \ ; \ 0 \leq d_k < \min (m_{ik} , m_{jk})$$

$$k = 1,\ldots,d \ ; \ i,j = 1,\ldots,t.$$

Note que

(3.56) $\rho^{(i,j)}_{0,\ldots,0} (Z_N) = 0 \ ; \ i,j = 1,\ldots, t$

$$(3.57)\quad \sigma_{i,j}(Z_N) = \mathrm{Cov}\{(U_{N_i}, U_{N_j}) / \tau(Z_N)\} =$$

$$= \{\prod_{k=1}^{c} \binom{n_k}{m_k}^{-1} \sum_{d_1=0}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{d_c=0}^{m_{i_c}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{c} \{\binom{m_{ik}}{d_k} \binom{n_k - m_{ik}}{m_{jk} - d_k}\} \rho^{(i,j)}_{d_1,\ldots,d_c}(Z_N)$$

$$(3.58)\quad \sigma_{i,j}(F) = \mathrm{Cov}\{(U_{N_i}, U_{N_j}) \mid F_1 = \ldots = F_c = F\} =$$

$$= \{\prod_{k=1}^{c} \binom{n_k}{m_{jk}}^{-1}\} \sum_{d_1=1}^{m_{i1}} \cdots \sum_{d_c=0}^{m_{ic}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{c} \binom{m_{ik}}{d_k} \binom{n_k - m_{ik}}{m_{jk} - d_k} \rho^{(i,j)}_{d_1,\ldots,d_c}(F),$$

para todo $i,j = 1, \ldots, t$. Então,

$$(3.59)\quad \Sigma(Z_N) = ((\sigma_{ij}(Z_N)))_{i,j=1,\ldots,t} \quad \text{e}$$

$$\Sigma(F) = ((\sigma_{ij}(F)))_{i,j=1,\ldots,t}.$$

<u>Teorema 5.8</u>

a) Se (3.58) vale e $F \in \Omega_o$ então

$$N[\Sigma(Z_N) - \Sigma(F)] \xrightarrow{q.t.p} 0$$

b) Se (3.58) e (3.53) valem então

$$N\,\Sigma\,(Z_N) \xrightarrow{q.t.p} \Gamma\,(F\,,\lambda)$$

□

Teorema 5.9

Se ϕ tem momentos finitos de quarta ordem, para todo $F \in \Omega_o$, então

$$N\,|\,\Sigma\,(Z_N) - \Sigma\,(\bar{F})\,| \xrightarrow{p} 0$$

onde

$$\bar{F} = \sum_{k=1}^{c} \lambda_k F_k$$

□

Teorema 3.10

Se sob H_o, ϕ tem momentos de ordem $2+\delta$, $\delta > 0$ finitos, ou, sob a alternativa ϕ tem momentos finitos de ordem quatro, e se (3.58) vale

$$(3.60)\quad (N^{\frac{1}{2}}(U_N - \theta_\rho)/\tau(Z_N)) \xrightarrow{p} N_t(0, \Gamma(\bar{F}, \lambda))$$

E além do mais

$$(3.61)\quad (T_N/\tau(Z_N)) = ([U_N - \theta^o]'(\Sigma(Z_N))^{-1} \cdot [U_N - \theta^o]/\tau(Z_N))$$

converge em probabilidade para χ^2_t .

□

Para pequenas amostras podemos calcular a distribuição de U_N sob a medida $\tau(Z_N)$ usando (3.51), mas para grandes amostras isto se torna trabalhoso. Usaremos neste caso, os últimos teoremas. Por exemplo: O Teorema 3.10 sugere que T_N dado por (3.61) pode ser usada como estatística teste para H_o quando N é grande.

Se tomarmos $N\hat{\Sigma}(F)$ um estimador consistente de $N\Sigma(F)$, a estatística

$$(3.62) \quad T^*_N = N(U_N - \theta_o)' \, (N\hat{\Sigma}(F))^{-1} \, (U_N - \theta_o)$$

converge em distribuição para uma χ^2_t . Deste modo, T^*_N é um teste livre de distribuição para H_o, quando N é grande.

Mostraremos agora que T_N e T^*_N têm assintóticamente, o mesmo poder.

Seja

$$(3.63) \quad F_N = (F_{1N}, \ldots, F_{cN}) \text{ tal que } F_{kN} \to F \, . \; (k = 1, \ldots, c)$$

em distribuição nos pontos de continuidade de F.

(3.64) $H_N : \theta(F_N) = \theta^o + N^{-\frac{1}{2}} \eta_N \; ; \; \eta_N \to \eta$ com $N \to \infty$

onde $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_t)'$

Teorema 3.11

Se ϕ tem momentos de quarta ordem finitos para todo $F \in \Omega$ e se (3.53) vale então sob $\{H_N\}$ dado por (3.64)

$$T_N \overset{P}{\sim} T_N^* :$$

Entretanto qualquer dos dois testes tem assintoticamente (sob $\{H_N\}$) uma distribuição $\chi^2_{t,\Delta}$; $\Delta = \eta' (\Gamma(F\lambda))^{-1} \eta$.

□

c) Eficiência Relativa Assintótica dos Testes da Ordem dos Postos.

1. Para o Problema de Localização de Multiamostras multivariadas

Na teoria paramétrica é usualmente assumida que $F_1, \ldots, F_c$ são todas f.d.a. multinormais independentes com matriz de dispersão Σ comum e não singular, e vetores médios possivelmente diferentes. O teste comumente usado, baseado na razão de máxima verossimilhança generalizada, é

(3.65) $$U_N = \frac{|N \hat{\Sigma}_\Omega|}{|N \hat{\Sigma}_W|}$$

onde

$$N\,\hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} (X_{\alpha}^{(k)} - \bar{X}^{(k)})(X_{\alpha}^{(k)} - \bar{X}^{(k)})'$$

$$N\,\hat{\Sigma}_{w} = \sum_{k=1}^{c} n_k (\bar{X}^{(k)} - \bar{X})(\bar{X}^{(k)} - \bar{X})' + N\,\hat{\Sigma}_{\Omega}$$

e

$$\bar{X}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} X_{\alpha}^{(k)} \; ; \quad k = 1,\ldots, c \; ;$$

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k}{N} \bar{X}^{(k)}$$

Pode ser mostrado que $-N \log U_N$ é assintóticamente, em probabilidade, equivalente a

$$(3.66) \quad W_N = \sum_{k=1}^{c} n_k (\bar{X}^{(k)} - \bar{X})\, \Sigma^{-1} (\bar{X}^{(k)} - \bar{X})' .$$

Como

$$(3.67) \quad n_k^{\frac{1}{2}} (\bar{X}^{(k)} - E(\bar{X}^{(k)})) ; \qquad k = 1,\ldots, c,$$

são independentes, pelo teorema do limite central, (3.67) tem distribuição assintótica normal multivariada, com vetor média nulo e matriz de dispersão Σ (para todos $F_1,\ldots,F_c$ diferindo somente em localização e tendo momentos de ordem dois finitos). Segue-se então, que W_N tem uma distri-

buição assintótica multivariada qui-quadrado com $p(c-1)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$(3.68) \quad \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left(E(\bar{x}^{(k)}) - E(\bar{x}) \right) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \left(E(\bar{x}^{(k)}) - E(\bar{x}) \right)'$$

Deste modo, sob (3.38) com $\delta^{(k)} = 0$, $k = 1,\ldots,c$, W_N tem assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com $p(c-1)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$(3.69) \quad \Delta_W = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\theta^{(k)} - \bar{\theta})' \Sigma^{-1} (\theta^{(k)} - \bar{\theta})$$

onde $\bar{\theta} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \theta^{(k)}$

Assumiremos $\bar{\theta} = 0$ para simplificar a notação.

Pelo visto atrás e teoremas (3.5) e (3.6) a eficiência relativa assintótica (E.R.A) de $\mathcal{L}_N$ em relação a W_N é

$$(3.70) \quad e_{\mathcal{L},W} = \frac{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \{ \eta^{(k)'} \gamma^{-1}(F) \eta^{(k)} \}}{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \{ \theta^{(k)'} \Sigma^{-1} \theta^{(k)} \}}$$

onde

$$\eta^{(k)} = (\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_p^{(k)})'$$

e $\eta_i^{(k)}$ dado por (3.42) e (3.41) com $\delta_i^{(k)} = 0$ para $i = 1,\ldots, p$; $k = 1,\ldots,c$.

Casos Especiais

1. Para o teste $\mathcal{L}_N(R)$ da soma dos postos onde $j_i(\mu) = \mu$, $0 < \mu < 1$, $i = 1,\ldots,p$, temos

$$e\ \mathcal{L}_N(R),\ W_N = \frac{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\varepsilon^{*(k)'} \gamma^{*-1} \varepsilon^{*k})}{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\theta^{(k)'} \Sigma^{-1} \theta^{(k)})}$$

onde

$$\varepsilon^{*(k)} = (\varepsilon_1^{*(k)}, \ldots, \varepsilon_p^{*(k)})' \quad ;$$

$$\varepsilon_i^{*(k)} = \theta_i^{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i^{\infty}(x)\, dx \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots, p \ ; \\ k = 1,\ldots,c. \end{array}$$

$$\gamma_{ij}(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{12} & \text{se } i = j = 1,\ldots, p \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{[i]}(x)\, F_{[j]}(y)\, dF_{[i,j]}(x,y) - \frac{1}{4} \ ; & \\[2ex] \qquad i \neq j = 1, \ldots, p & \end{cases}$$

onde $\gamma^{*\,-1}(F) = (\gamma^{*}_{ij}(F))^{-1}$

2. Para o teste dos escores normais

$\mathcal{L}_N(\phi)$, onde $j_i(\mu) = \phi^{-1}(\mu)$; $0 < \mu < 1$,

$i = 1,\ldots,p$ onde $\phi(x)$ é f.d.a. $N(0, 1)$,

$$e_{\mathcal{L}(\phi),W} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left(\delta^{(k)'} \tau^{-1}(F)\, \delta^{(k)} \right) \Big/ \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left(\theta^{(k)'} \Sigma^{-1} \theta^{(k)} \right)$$

onde

$$\delta^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_p^{(k)})' \quad ;$$

$$\delta_i^{(k)} = \theta_i^{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \phi^{-1}(F_{[i]}(x))\, dF_{[i]}(x)$$

$$\tau_{ij}(F) = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j = 1,\ldots, p \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{-1}(F_{[i]}(x))\, \phi^{-1}(F_{[j]}(y))\, dF_{[i,j]}(x,y) \\ \qquad\qquad i \neq j = 1,\ldots, p \end{cases}$$

e $\tau^{-1}(F) = ((\tau_{ij}(F)))^{-1}$

Note que se F é $N(0, \Sigma)$ então $e_{\mathcal{L}(\phi),W} = 1$

3. Para o teste médio onde $j_i(\mu)$ é 1 ou 0 se $\mu \leq \frac{1}{2}$ ou não, respectivamente, $i = 1, \ldots, p$, temos

$$e_{\mathcal{L}(\mu),W} = \frac{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \theta^{(k)\prime} T^{*-1}(F) \theta^{(k)}}{\sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \theta^{(k)\prime} \Sigma^{-1} \theta^{(k)}}$$

onde

$$T^{*-1}(F) = \left(\left(\tau^{*}_{ij}(F) \right) \right)^{-1}$$

e

$$\tau^{*}_{ij}(F) = \begin{cases} = -\frac{1}{4} f^{2}_{[i]}(0) \; ; \; i = j = 1, \ldots, p \\ = \{ F_{[i,j]}(0, 0) - F_{[i]}(0) \, F_{[j]}(0) \} / \\ / \left[f_{[i]}(0) \, f_{[j]}(0) \right] \\ \qquad\qquad i \neq j = 1, \ldots, p \end{cases}$$

2. Para o Problema de Escala de Multiamostras Multivariadas.

No caso paramétrico, é usual considerar $F_1, \ldots, F_c$ com

distribuição normal multivariada não singular e alguns testes baseados na razão de máxima verossimilhança são disponíveis para testar se a matriz de dispersão de F_1 , , ..., F_c é a identidade ou não. Se estamos interessados somente em testar a identidade das variâncias das p variáveis, temos um teste semelhante ao teste estatístico W, digamos W_N, que tem assintoticamente sob H_N (onde $\theta^{(k)} = 0$, $k = 1,\ldots, c$) uma distribuição qui - quadrado com p (c-1) g.l. e parâmetro de não centralidade.

$$(3.71) \quad \Delta_W = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left[\delta^{(k)'} \Gamma^{-1} \delta^{(k)} \right]$$

onde

$$(3.72) \quad \Gamma = ((\gamma_{ij}))_{i,j = 1,\ldots,p}$$

com

$$(3.73) \quad \gamma_{ij} = 2 \sigma^2_{ij} \quad , \quad i,j = 1,\ldots, p$$

(3.74) $\Sigma = ((\sigma_{ij}))$ a matriz de covariância de F.

Deste modo o E.R.A. de $\mathcal{L}_N$ com respeito a W_N é

$$e_{\mathcal{L}_N, W_N} = \frac{\Delta_{\mathcal{L}}}{\Delta_W}$$

Pode-se concluir que se $F \sim N(0, \Sigma)$, $\det(W) \neq 0$, o teste dos escores normais multivariados e W_N são assintoticamente equivalentes e os limites inferior e superior para a E.R.A., tanto para o problema de escala e analogamente para localização são obtidos calculando a menor e a maior raiz característica de $\Gamma^{-1}\Sigma$.

3.2 - EXPERIMENTOS COM DOIS FATORES (TWO WAY LAYOUT)

Considere um experimento "two-way layout", com um fator, com p níveis, e n blocos independentes, onde o efeito devido a bloco não é aditivo e a variável resposta é uma q - variável.

Seja

$$X_{ij} = (X_{ij}^{(1)}, \ldots, X_{ij}^{(q)})'$$

a resposta do experimento no i-ésimo bloco que recebeu o j-ésimo tratamento, $i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots,p$.

Assumiremos que a f.d.a. de X_{ij}, F_{ij}, é contínua.

Estamos interessados em testar se os diversos níveis do fator estão produzindo efeito ou não, isto é, iremos testar as hipóteses :

(3.75) $H_o : F_{i1} = \ldots = F_{ip} = F_i$, $i = 1,\ldots, n$ versus

(3.76) $H_1 : F_{ij}(x) = F_i(X - \theta_j)$; $j = 1,\ldots, p$; $i = 1,\ldots, n$

onde

$$\theta_j = (\theta_j^{(1)},\ldots, \theta_j^{(q)})' \; ; \; j = 1,\ldots, p.$$

Construamos agora o método das n ordenações (n ranking method).

Seja $r_{ij}^{(s)}$ o posto de $X_{ij}^{(s)}$ sobre as observações $\{ X_{ij}^{(s)} / j = 1,\ldots, p \}$ para $i = 1,\ldots, n$; $s = 1,\ldots, q$.

Destes dados podemos construir a matriz

$$(3.77) \qquad R_i = \begin{bmatrix} r_{i1}^{(1)} & \cdots & r_{ip}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{i1}^{(q)} & & r_{ip}^{(q)} \end{bmatrix} \qquad i = 1,\ldots, n$$

Definiremos por R_i^* a matriz obtida de R_i permutando as colunas de R_i de tal maneira que na 1ª linha tenhamos o número i na posição i, posição contada da direita para a esquerda, $i = 1,\ldots,p$.

Diremos que as matrizes A e B de mesma ordem são permutacionalmente equivalentes se A pode ser obtido de B por um número finito de permutações das colunas de B.

Seja

$$S(R_i^*) = \{ A / A \text{ é permutacionalmente equivalente a } R_i^* \}.$$

Note que para cada $R_i^o \in S(R_i^*)$

$$(3.78) \quad P\left(R_i = R_i^o / S(R_i^*), H_o \text{ dado por } (3.75) \right) = \frac{1}{p!}$$

isto é, uniforme sobre $S(R_i^*)$.

Como os efeitos devido a blocos são independentes, $R_1, \ldots, R_n$ são estocasticamente independentes. Se tomarmos $(R_1^o, \ldots, R_n^o) \in (S(R_1^*), \ldots, S(R_N^*))$ então

$$(3.79) \quad P\{ R_i = R_i^o, i = 1, \ldots, n / S(R_1^*), \ldots, S(R_n^*), H_o \text{ dado por } (3.75) \} = \left(\frac{1}{p!} \right)^n$$

independente de $F_1, \ldots, F_n$. Chamaremos de $\mathcal{P}_n$ a probabilidade condicional dada por (3.79). Deste modo testes baseados em $R_1, \ldots, R_n$ e na probabilidade $\mathcal{P}_n$ são livres de distribuição.

Construamos um destes testes

Defina

$$(3.80) \quad T_{n,j}^{(s)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_{ij}^{(s)} \; ; \; j = 1, \ldots, p \; ; \; s = 1, \ldots, q$$

então

$$(3.81)\quad E_{\mathcal{P}_n}\left(T^{(s)}_{n,j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\mathcal{P}_n}\left(r^{(s)}_{ij}\right) = \frac{p+1}{2}\,;$$

$$j = 1,\ldots,p$$

$$(3.82)\quad \mathrm{Cov}_{\mathcal{P}_n}\left(r^{(s)}_{ij},\ r^{(s')}_{i'j'}\right) = \frac{\delta_{ii'}\left(\delta_{jj'}p - 1\right)}{p\,(p-1)}\ .$$

$$.\left[\sum_{t=1}^{p} r^{(s)}_{it}\, r^{(s')}_{it} - \frac{p(p+1)^2}{4}\right]$$

para $i,i' = 1,\ldots,n$; $j,j' = 1,\ldots,p$; $s,s' = 1,\ldots,q$

onde $\delta_{ii'}$ e $\delta_{jj'}$ são os delta de Kronecker usuais. Podemos então concluir que

$$(3.83)\quad n\ \mathrm{Cov}_{\mathcal{P}_n}\left(T^{(s)}_{n,j},\ T^{(s')}_{n,j'}\right) = \left(\delta_{jj'} - \frac{1}{p}\right)\sigma_{ss'}(\mathcal{P}_n)$$

onde $\Sigma(\mathcal{P}_n) = \left(\left(\sigma_{ss'}(\mathcal{P}_n)\right)\right)$ definido por

$$(3.84)\quad \sigma_{ss'}(\mathcal{P}_n) = \frac{1}{n\,(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} r^{(s)}_{it}\, r^{(s')}_{it} - \frac{p\,(p+1)^2}{4\,(p-1)}\,;$$

$$s,\ s' = 1,\ldots,q$$

Se tomarmos $T_n = \left(T^{(1)}_{n,1},\ldots,T^{(q)}_{n,1},\ldots,T^{(1)}_{n,p-1},\ldots,T^{(q)}_{n,p-1}\right)'$

$$(3.85)\quad n\,V_{\mathcal{P}_n}\left(T_n\right) = \left[I_{p-1} - p^{-1}\,\ell_{p-1}\,\ell'_{p-1}\right]\otimes\Sigma(\mathcal{P}_n);$$

$$\ell_{p-1} = (1,\ldots,1)'.$$

Considerando a forma quadrática em $T_n - \frac{1}{2}(p+1)\ \ell_{q(p-1)}$, e usando $V_{\mathcal{P}_n}(T_n)$ como seu discriminante e usando a relação

$$\sum_{j=1}^{p-1} T_{n,j}^{(s)} = -T_{n,p}^{(s)} \quad ; \ s = 1,\ldots, q$$

nós obtemos a estatística teste

$$(3.86)\quad \mathcal{L}_n = n\left(T_n - \frac{1}{2}(p+1)\ \ell_{q(p-1)}\right)' \left(V_{\mathcal{P}_n}(T_n)\right)^{-1} .$$

$$. \left(T_n - \frac{1}{2}(p+1)\ \ell_{q(p-1)}\right) =$$

$$= n \sum_{s=1}^{q} \sum_{s'=1}^{q} \sigma^{ss'}(\mathcal{P}_n) \sum_{j=1}^{p} \left(T_{n,j}^{(s')} - \frac{p+1}{2}\right) .$$

$$. \left(T_{n,j}^{(s')} - \frac{p+1}{2}\right) ;$$

onde $((\sigma^{ss'}(\mathcal{P}_n)) = (\Sigma(\mathcal{P}_n))^{-1}$ que é assumida positiva definida (Na prática se $\Sigma^{-1}(\mathcal{P}_n)$ é singular, podemos torná-la não singular eliminando variáveis).

A distribuição permutacional de $\mathcal{L}_N$ pode ser calculada usando (3.79). Mas para grandes valores de n este cálculo torna-se muito trabalhoso. Com intuito de simplificar estudaremos o comportamento assintótico de $\mathcal{L}_N$.

3.2.1 - Distribuição Permutacional Assintótica de $\mathcal{L}_N$.

Defina $F_{ij[s]}(x)$ e $F_{ij[s,s']}(x,y)$ como a f.d.a. marginal de $X_{ij}^{(s)}$ e $(X_{ij}^{(s)}, X_{ij}^{(s')})$ para $s \neq s'$ $(= 1,\ldots,q)$; $j = 1,\ldots,p$; $i=1,\ldots n$, respectivamente.

Seja

$$(3.87)\quad \sigma_{ss'}(F_i) = \begin{cases} = \dfrac{p(p+1)}{12} & \text{se } s = s' \ (= 1,\ldots, q) \\[2ex] = \dfrac{1}{p-1}\left\{ \displaystyle\sum_{j\neq j'\neq t=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{it[s]}(x)\, F_{ij'[s']}(y)\, dF_{ij[s,s']}(x,y) + \right. \\[2ex] \left. + \displaystyle\sum_{j\neq t=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{it[s,s']}(x,y)\, dF_{ij[s,s']}(x,y) - \dfrac{p(p+1)^2}{4} \right\} \\[2ex] \qquad s \neq s' = 1,\ldots, q \\ \qquad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$$(3.88)\quad \Sigma(F_i) = ((\sigma_{ss'}(F_i))), \quad i = 1,\ldots, n$$

<u>Teorema</u> <u>3.13</u>

Se as $F_{ij}(x)$ são todas contínuas então

$$\Sigma(\mathcal{P}_n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\Sigma(F_i)\} \xrightarrow{p} 0 \text{ com } n \to \infty .$$

$\square$

Corolário 3.13

Sob H_o, dado por (3.75)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\Sigma (F_i)) = \Sigma_n = ((\sigma_{n,ss'}))$$

onde

$$\sigma_{n,ss'} = \begin{cases} \dfrac{p(p+1)}{12}, & s = s' = 1,\ldots, p \\[2ex] \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\dfrac{p}{4} \tau_{i,ss'} + \dfrac{p(p-2)}{12} \rho_{gi,ss'} \right] & \\ & s \neq s' = 1,\ldots, q \end{cases}$$

□

Note que sob H_o,

$$F_{ij} = F_i \quad \text{para} \quad j = 1,\ldots,p \; ; \; i = 1,\ldots, n$$

e por isto definiremos

$$F_{ij[s]} = F_{i[s]} \; ; \; F_{ij[s,s']} = F_{i[s,s']}$$

Definimos $\tau_{i,ss'}$ e $\rho_{gi,ss'}$ como

$$\tau_{i,ss'} = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{i[s,s']}(x,y) \, d F_{i[s,s']}(x,y) - 1$$

$$\rho_{gi,ss'} = 12 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{i[s]}(x) \; F_{i[s']}(y) \; d F_{i[s,s']}(x,y) - 1$$

Pelo colorário 3.13, se pelo menos uma das matrizes $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ((\tau_{i,ss'}))$ e $\bar{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ((\rho_{gi,ss'}))$ é positiva definida então Σ_n também o é.

(3.89) Se F_i $(i = 1,\ldots,n)$ é não singular então ambos $\bar{T}_n$ e $\bar{G}_n$ o são.

Podemos concluir de (3.80) que $\Sigma (F_i)$ pode ser expresso como soma de uma matriz positiva definida e uma positiva semi-definida, quando F_{ij} é não singular. Deste modo $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (F_i)$ é não singular.

Considereremos a condição :

(3.90) Existe $n_o \in N$ tal que para $n \geq n_o$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\Sigma (F_i)) \text{ é positiva definida}$$

Note que pelo Teorema 3.13 a condição (3.90) implica que $\Sigma (\mathcal{P}_n)$ é positiva definida.

<u>Teorema 3.14</u>

Se as F_{ij} são todas contínuas e (3.90) vale, a distribui-

ção conjunta permutacional de $\{ n^{\frac{1}{2}} (T^{(s)}_{n,j} - \frac{p+1}{2}) ;$ $s = 1,\ldots, q ;\ j = 1,\ldots, p-1 \}$ é assintoticamente, em probabilidade, uma

$$N_{q(p-1)} (0 , I_{p-1} - \frac{1}{p} \ell_{p-1} \ell'_{p-1}) \otimes \Sigma (\mathcal{P}_n)$$

□

O Teorema 3.14 nos leva ao seguinte teorema

<u>Teorema</u> <u>3.15</u>

Sob (3.90), a distribuição permutacional assintótica de $\mathcal{L}_n$ é, em probabilidade, uma $\chi^2_{q(p-1)}$.

□

Deste modo, para n grande, o teste permutacional $\mathcal{L}_n$ reduz-se a:

(3.91)

Rejeitar H_o a nível α se $\mathcal{L}_n \geq \chi^2_{q(p-1),\alpha}$

Aceitar H_o " " " se $\mathcal{L}_n \leq \chi^2_{q(p-1),\alpha}$

A consistência do teste $\mathcal{L}_n$ segue do seguinte :

$$(3.92) \quad \mathcal{L}_n \geq \max_{s,j} \left[n (T^{(s)}_{n,j} - \frac{p+1}{2})^2 / \sigma_{ss} (\mathcal{P}_n) \right] =$$

$$= \frac{12\, n}{p(p+1)} \{ \max_{s,j} (T^{(s)}_{n,j} - \frac{p+1}{2})^2 \}$$

(3.93) Pela lei dos grandes números

$$T_{n,j}^{(s)} - \frac{p+1}{2} \xrightarrow{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_i(x)\, d F_{ij}(x) - \frac{1}{2} \right\}$$

onde

$$\bar{F}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} F_{ij}(x)$$

O lado direito de (3.92) é $\theta_p(n)$ e quando comparado com uma $\chi^2_{q(p-1),\alpha}$ é de $\theta_p(1)$.

3.2.2. <u>Distribuição Assintótica não Nula de $\left[T_{n,j}^{(s)} ; j = 1,\ldots,p ; s = 1,\ldots,q \right]$</u>

Sejam :

$$\mu_{n,j}^{(s)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{p} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{it[s]}(x)\, d F_{ij[s]}(x) \right.$$

$$j = 1,\ldots,p ; s = 1,\ldots,q$$

$$\pi_{i,jt,j't'}^{(s,s')} = P\left(X_{ij}^{(s)} > X_{it}^{(s)} , X_{ij'}^{(s')} > X_{it'}^{(s')} \right) -$$

$$- P\left(X_{ij}^{(s)} > X_{it}^{(s)} \right) P\left(X_{ij'}^{(s')} > X_{it'}^{(s')} \right)$$

para $j \neq t$, $j' \neq t' = 1,\ldots,p$; $s,s' = 1,\ldots, q$; $i = 1$, , ..., n.

onde

$$\P^{(s,s)}_{i,jt,jt} = P\,(X^{(s)}_{ij} > X^{(s)}_{it})\,(1 - P\,(X^{(s)}_{ij} > X^{(s)}_{it})$$

$$j \neq t = 1,\ldots,p\ ;\ s = 1,\ldots,q.$$

$$\sigma^{*}_{n,js,j's'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{t=1(\neq j)}^{p}\ \sum_{t'=1(\neq j')}^{p} \P_{i,jt,j't'}\right\}$$

$$\Sigma^{*}_{n} = (\sigma^{*}_{n,js,j's'})_{pq \times pq}$$

$$F_i = (F_{i_1},\ldots F_{i_p})' \quad , \quad F^{*}_{n} = (F_1,\ldots, F_n)$$

$$\mathfrak{J}^{*}_{n} = \{\ F^{*}_{n} : \text{posto de } \Sigma^{*}_{n} \text{ é maior ou igual a } 1\ \}\ .$$

$$A = ((a_{sj}))_{s = 1,\ldots,q;\ j = 1,\ldots,p}\ \ a_{sj} \text{ constantes reais}$$

$H_n(x, A)$ a distribuição acumulada de

$$n^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} a_{sj}\,(T^{(s)}_{n,j} - \mu^{(s)}_{n,j})\ /\ \gamma_n(A) \qquad \text{onde}$$

$$\gamma^{2}_{n}(A) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{j'=1}^{p}\sum_{s=1}^{q}\sum_{s'=1}^{q} a_{sj}\ a_{s'j'}\ \sigma^{*}_{n,js}\ \sigma_{n,j's'}\ .$$

<u>Teorema 3.16</u>

Para todo A onde $\inf_n \gamma_n(A) > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} H_n (x : A) = \Phi(x), \text{ uniformemente em } x;\ x \in R,$$

onde Φ é a distribuição acumulada da $N(0,1)$.

Note que

- sob H_o, $\Sigma_n^* = \left[I_p - \frac{1}{p} \ell_p \ell_p' \right] \otimes \Sigma_n$

- se (3.90) ocorre, Σ_n é positiva definida então posto de Σ_n^* é $q(p-1)$. Consequentemente, para todo A (onde $\sum_{j=1}^{p} a_{sj} = 0$, $s = 1,\ldots,q$), $\gamma_n^2(A)$ é positiva e $T_{n,j}^{(k)}$ terá distribuição assintótica singular de posto $q(p-1)$.

3.2.3 - Distribuição Assintótica de $\mathcal{L}_n$ sob Alternativas de Translação Local

Sejam :

- $\{K_n\}$ uma sequência de alternativas de translação local dada por

$$(3.94) \quad K_n : F_{ij}(x) = F_{n,ij}(x) = F_i(x + n^{-\frac{1}{2}} \cdot \alpha_j)$$

$$j = 1,\ldots,p\ ;\ i = 1,\ldots,n$$

onde $\alpha_j = (\alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(q)})'$; $j = 1,\ldots,p$ são q - vetores constantes, com $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 0$ e os α_j's não todos nulos.

- $\mathcal{F}_n^{o}$ a classe de todas $F_n = (F_1, \ldots, F_n)$ que são absolutamente contínuas com Σ_n positiva definida.

- $a_n = (a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(q)})'$ onde

$$(3.95) \quad a_n^{(s)} = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{i|s|}(x) \, d F_{i|s|}(x) \quad , \quad s = 1, \ldots, q$$

<u>Teorema</u> <u>3.17</u>

Se $F_n \in \mathcal{F}_n^{o}$ $(n \geq 1)$ então sob $\{K_n\}$ dada por (3.94), $\mathcal{L}_n$ definida por (3.89) tem assintoticamente uma distribuição qui-quadrado não central com $q(p-1)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$(3.96) \quad \Delta_{\mathcal{L}} = \sum_{s=1}^{q} \sum_{s'=1}^{q} \sigma^{ss'} a^{(s)} a^{(s')} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(s)} \alpha_j^{(s')}$$

onde $((\sigma^{ss'})) = \Sigma^{-1}$ $\square$

Conforme Anderson (1958, páginas 187 - 210) temos que se X_{ij} satisfaz (3.94) e tem momentos finitos de ordem $2 + \delta$, $\delta > 0$ para todo i,j com $F_1, \ldots, F_n$ normais e tem matrizes de dispersão homogêneas então $-2 \log U_n$, (U_n teste da razão de máxima verossimilhança para a hipótese nula $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$) tem distribuição assintótica qui-quadrado com $p(q-1)$ graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$(3.97) \qquad \Delta_U = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j' \, \bar{\Lambda} \, \alpha_j ,$$

onde os α_j's são definidos por (3.94).

$$\bar{\Lambda} = \lim_{n \to \infty} \bar{\Lambda}_n \quad ; \quad \bar{\Lambda}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \quad e \quad \Lambda_i$$

é a matriz de dispersão de F_i.

Deste modo a E.R.A. de $\mathcal{L}_n$ em relação a U_n é $\dfrac{\Delta_{\mathcal{L}}}{\Delta_U}$,

que irá depender de $\bar{\Lambda}$, Σ e dos α_j's. Alguns resultados para modelos especiais são encontrados em Puri & Sen (1970).

3.2.4 - Testes Não - Paramétricos para MANOVA em Experimentos com Dois Fatores Utilizando Ordenação Após Alinhamento ("Ranking After Alignment")

Seja um experimento completo com n blocos, sendo aplicados a cada bloco p tratamentos. O vetor resposta da experiência feita no i-ésimo bloco aplicando o j-ésimo tratamento é

$$X_{ij} = (X_{ij}^{(1)} , \ldots , X_{ij}^{(q)})' \; ; \; j = 1 \ldots, p \; ; \; i = 1, \ldots, n.$$

com

$$(3.98) \qquad X_{ij} = \mu + \tau_j + \alpha_i + e_{ij}$$

onde

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q)'$ é a média geral

$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{iq})'$ é o efeito fixo devido ao bloco i, $i = 1, \ldots, n$.

$\tau_j = (\tau_{j1}, \ldots, \tau_{jq})'$ é o efeito fixo devido ao tratamento j, $j = 1, \ldots, p$

$e_{ij} = (e_{ij}^{(1)}, \ldots e_{ij}^{(q)})'$ é o erro cometido ao fazer a j-ésima observação no bloco i ; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, p$.

Assumiremos que

- e_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, p$ é um vetor aleatório cuja distribuição conjunta $G_i(e_{i1}, \ldots, e_{ip})$ é simétrica (contínua sobre os seus p-vetores $e_{i1}, \ldots, e_{ip}$ e pode ser diferente para cada i, $i = 1, \ldots, n$.

- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{p} \tau_j = 0.$

Seja $\tilde{X}_{i.}$ uma função de $X_{i1}, \ldots, X_{ip}$ simétrica e invariante por translação (por exemplo $\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} X_{ij}$). Definiremos as observações alinhadas

(3.99) $Y_{ij} = X_{ij} - \tilde{X}_{i.}, \quad j = 1, \ldots, p \; ; \; i = 1, \ldots, n,$

com o intuito de retirar o efeito devido a bloco e com isso aumentar a eficiência dos testes baseados nas ordenações, como feito anteriormente.

Para a k- ésima variável do vetor

$$Y_{ij} = (Y_{ij}^{(1)}, \ldots, Y_{ij}^{(q)})'$$

seja $R_{ij}^{(k)}$ o posto de $Y_{ij}^{(k)}$ nas observações $Y_{11}^{(k)}, \ldots,$ $, Y_{np}^{(k)}$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, p$; $k = 1, \ldots, = q$.

Deste modo, correspondendo ao vetor Y_{ij}, temos o vetor posto $R_{ij} = (R_{ij}^{(1)}, \ldots, R_{ij}^{(q)})'$, $j = 1, \ldots, p$; $i = 1,$ $, \ldots, n$.

Para cada inteiro N ($= np$) e cada k ($k = 1, \ldots, q$) definiremos

$$E_N^{(k)} = (E_{N,1}^{(k)}, \ldots, E_{N,N}^{(k)})' \; ; \; E_N^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E_{N,\alpha}^{(k)}$$

onde

$$E_{N,j}^{(k)} = j_{N,k} \left(\frac{j}{N+1} \right) ; \quad 1 \leq j \leq N$$

com $j_{N,k}$ satisfazendo as condições (3.27), (3.28) e (3.30).

Definiremos

$$Z^{(j)}_{N\,k,\alpha} = \begin{cases} = 1, & \text{se a } \alpha\text{- ésima menor observação sobre os } N \text{ valores } Y^{(k)}_{ij} \text{ é do } j\text{- ésimo tratamento} \\ = 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$T^{(k)}_{N} = (T^{(k)}_{N,1} , \ldots , T^{(k)}_{N,p})'$$

onde

$$T^{(k)}_{N,j} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{N} Z^{(j)}_{N\cdot k,\alpha} \cdot E^{(k)}_{N,\alpha} .$$

Os testes que veremos serão baseados em

$$\{ T^{(k)}_{N,j} - \bar{E}^{(k)}_{N} ; \quad k = 1,\ldots, q ; \; j = 1,\ldots, p \}$$

Construamos então tais testes livres de distribuição.

Seja

$$R^{o}_{N} = (R_{11} , \ldots , R_{np})_{q \times N} = (R_1,\ldots, R_n)$$

onde

$$R_i = (R_{i1} ,\ldots, R_{ip}) ; \quad i = 1,\ldots, n.$$

Estamos interessados em testar

(3.100) $H_o : \tau_1 = \ldots = \tau_p = 0$

e sob esta H_o a distribuição de $Y_{i1}, \ldots, Y_{ip}$ é simétrica nestes p -vetores e portanto permanece invariante sob qualquer permutação detes. Então a distribuição conjunta de

$$Y_N = (Y_{11}, \ldots, Y_{1p}, \ldots, Y_{n1}, \ldots, Y_{np})'$$

permanece invariante sobre o grupo finito de transformações

(3.101) $G_n = \{ g_n : R^{qnp} \longrightarrow R^{qnp} \mid g (Y_N) = Y_N^* = (Y_{11}^*, \ldots, Y_{np}^*)'$

onde $(Y_{i1}^*, \ldots, Y_{ip}^*)'$ é uma permutação de $(Y_{i1}, \ldots, Y_{ip})' \}$.

Note que o número de elementos de G_n é $(p!)^n$.

Chamaremos de R_N^* a matriz posto correspondente a Y_N^*. Para cada R_N^*, existe $g_n \in G_n$ tal que $R_N^* = g_n (R_N^o)$ e para cada $g \in G_n$ existe R_N^* tal que $g_n (R_N^o) = R_N^*$. Quando H_o (3.100) vale, a distribuição de R_N^o so-

bre as suas $(N!)^q$ realizações irá depender de G_i, $i = 1, \ldots, n$, e, Y_n^* terá a mesma distribuição de Y_n para cada $g_n \in G_n$. Como teremos $(p!)^n$ distintos $g_n \in G_n$,

$$(3.102) \quad P\left(Y_N = Y_N^* \;\middle|\; Y_n^* = g_n Y_n,\ g_n \in G_n \text{ e } H_o\ (3.100) \right) = \frac{1}{(p!)^n}$$

o que implica

$$(3.103) \quad P\left(R_N^o = R_N^* \;\middle|\; R_N^* = g_n(R_N^o),\ g_n \in G_n \text{ e } H_o\ (3.100) \right) = \frac{1}{(p!)^n}$$

Chamaremos a medida de probabilidade condicional acima de $\mathcal{P}_n$. Podemos concluir que qualquer teste baseado na medida (3.103) é livre de distribuição.

Seja

$$\bar{E}^{(k)}_{N,\, R_{i.}} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} E^{(k)}_{N,\, R_{ij}} \quad ; \ i = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots,q.$$

a média dentro dos blocos de $E^{(k)}_{N,\, R_{ij}}$.

$$(3.104) \quad \gamma_{kk'}(R_N^o) = \frac{1}{n(p-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left\{ E^{(k)}_{N,\, R_{ij}} - \bar{E}^{(k)}_{N,\, R_{i.}} \right\}.$$

$$\cdot \{ E^{(k')}_{N, R^{(k')}_{ij}} - E^{(k')}_{N, R^{(k')}_{i.}} \} \quad ; \; k, k' = 1,\ldots, q$$

$$V_N \; (R^o_N) = (\gamma_{kk'} (R^o_N)) \qquad k, k' = 1,\ldots,q$$

Pode-se provar que

$$(3.105) \qquad E_{\mathcal{P}_n} (T^{(k)}_{N,j}) = \bar{E}^{(k)}_N \quad ; \; j = 1,\ldots,p \; ; \; k = 1,\ldots,q$$

$$(3.106) \qquad \mathrm{Cov}_{\mathcal{P}} (T^{(k)}_{N,j} , T^{(k')}_{N,j'}) = \frac{1}{np} (\delta_{jj'} \, p \; -1)$$

$$\cdot \; \gamma_{kk'} (R^o_N)$$

$$k, k' = 1,\ldots,q \; ; \; j, j' = 1,\ldots, p.$$

Suporemos $V_N (R^o_N)$ positiva definida e definiremos sua inversa por

$$V^{-1}_N (R^o_N) = (\gamma^{kk'} (R^o_N)) \qquad k,k' = 1,.., q.$$

Para testar H_o dado por (3.100) usaremos o teste

$$(3.107) \qquad S_N = n \sum_{k=1}^{q} \sum_{k'=1}^{q} \gamma^{kk'} (R^o_N) \sum_{j=1}^{p} \left[T^{(k)}_{N,j} - \bar{E}^{(k)}_N \right] .$$

$$\cdot \left[T^{(k')}_{N,j} - \bar{E}^{(k')} \right]$$

Se $V_N(R_N^o)$ é singular, podemos usar na definição de S_N o menor principal de maior ordem, que é positivo definido, trabalhando com a forma quadrática que envolve as variáveis do menor principal.

A) <u>Distribuição Permutacional Assintótica de</u> S_N

Definamos

$$F_{N[j]}(x) = \frac{1}{n}\left[\text{número de } Y_{i,j}^{(k)} \leq x\right] ; \; k = 1,\ldots, q. \quad j = 1,\ldots, p$$

$$H_N^{(k)}(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} F_{N[j]}(x) \; ; \; k = 1,\ldots, q$$

$$F_{N[j,\ell]}^{(k,k')}(x,y) = \frac{1}{n}\left[\text{número de } Y_{ij}^{(k)} \leq x, \; Y_{i\ell}^{(k')} \leq y\right]$$

$k, K' = 1,\ldots, q$; $j, \ell = 1,\ldots, p$; com $j \neq \ell$ ou $k \neq k'$ ou ambos

$F_{i[j]}^{(k)}(x)$ e $F_{i[j,\ell]}^{(k,k')}(x,y)$ as f.d.a. marginais de $Y_{ij}^{(k)}$ e $(Y_{ij}^{(k)}, Y_{ij}^{(k')})$, respectivamente, da f.d.a. conjunta G_i, $j, \ell = 1,\ldots, p$; $k, k' = 1,\ldots, q$ com pelo menos um $j \neq \ell$, $k \neq k$ ocorrendo.

$$\bar{H}_N^{(k)}(x) = \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} F_{i[j]}(x) \quad \text{com } k = 1,\ldots, q.$$

Assumiremos que $E^{(k)}_{N,\alpha} = j^{(k)}_N \left(\frac{\alpha}{N+1} \right)$

satisfaz (3.27), (3.28) e (3.30) e as condições

$$(3.108) \quad \int_0^1 \left[j^{(k)}_N (\mu) - j^{(k)} (\mu) \right]^2 d\mu \to 0 \quad \text{com } N \to \infty .$$

(3.109) γ_N abaixo definida é positiva definida.

estão satisfeitas

Para a definição de γ_N chamaremos

$$Z^{(k)}_{ij} = j^{(k)} \left(\bar{H}^{(k)}_N \left(Y^{(k)}_{ij} \right) \right) ; \; k = 1,\ldots, q; \quad j = 1,\ldots, p \quad i = 1,\ldots, n.$$

$$Z'_{ij} = \left(Z^{(1)}_{ij}, \ldots , Z^{(q)}_{ij} \right) ; \; j = 1,\ldots,p ; \; i = 1,\ldots,n$$

$$a_{kk',j\ell,i} = E \left(Z^{(k)}_{ij} \cdot Z^{(k)}_{i\ell} \right) ; \; k, k' = 1,\ldots,q; \; j,\ell = 1\ldots,p$$

$$a^{(n)}_{kk',j\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{kk',j\ell,i} ; \; k,k' = 1,\ldots,q; \; j,\ell=1,\ldots,p.$$

$$A^{(n)}_{j\ell} = \left(\left(a^{(n)}_{kk',j\ell} \right) \right) \quad k, k' = 1,\ldots,q \text{ para } j,\ell = 1,\ldots,p.$$

$$v_{kk',N} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} a^{(n)}_{kk',jj} - \frac{1}{p^2} \sum_{j=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} a^{(n)}_{kk',j\ell}$$

para $k,k' = 1,\ldots, q$.

(3.110) $\gamma_N = ((v_{kk',N})) \quad k,k' = 1,\ldots,q$

$$A^{(n)}_{(j,\ell)} = (A^{(n)}_{jj} + A^{(n)}_{\ell\ell} - 2 A^{(n)}_{j\ell}) \quad j \neq \ell = 1,\ldots,p.$$

<u>Lema</u> - <u>3.18</u>

γ_N é positiva definida se

$$\max_{j \neq \ell = 1,\ldots,p} \left[\text{posto } A^{(n)}_{(j,\ell)} \right] = p$$

<u>Lema</u> - <u>3.19</u>

Como $V_N (R_N) \xrightarrow[p]{} \gamma_N$ podemos então concluir que

$V_N (R_N)$ é positiva definida se (3.109) vale

□

<u>Teorema</u> <u>3.20</u>

Suponhamos que (3.27), (3.28) e (3.30) na definição de $E^{(k)}_{N,\alpha}$ e (3.108), (3.109) valem, então

$$(S_N / \mathcal{P}_n) \xrightarrow{p} \chi^2_{q(p-1)}$$

B) <u>Distribuição Assintótica Não Nula de</u> S_N

Sejam :

$$\bar{F}^{(k)}_{n[j]} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F^{(k)}_{i[j]} \quad , \quad 1 \leq j \leq p \; ; \; 1 \leq k \leq q$$

$$\mu^{(k)}_{N,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} j^{(k)} \left[\bar{H}^{(k)}_{N}(x) \right] d\,\bar{F}^{(k)}_{n[j]}(x) \; ; \; j = 1,\ldots, p$$

$$k = 1,\ldots, q$$

$$\beta^{(k,k')}_{jj',\ell\ell',i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F^{(k,k')}_{i[j,j']}(x,y) - F^{(k)}_{i[j]}(x) \; F^{(k')}_{i[j']}(y) \right] .$$

$$. \; j^{(k)'} \left[\bar{H}^{(k)}_{N}(x) \right] . \; \bar{j}^{(k')'} \left[\bar{H}^{(k')}_{N}(y) \right] .$$

$$. \; d\,F^{(k)}_{n[\ell]}(x) \; d\,F^{(k')}_{n[\ell']}(y)$$

para $j, j', \ell, \ell' = 1,\ldots, p$; $k, k' = 1,\ldots,q$ com $j \neq j'$ ou $k \neq k'$ ou ambos.

$$\beta^{(k,k)}_{jj,\ell\ell',i} = \iint_{-\infty < x < y < \infty} F^{(k)}_{i[j]}(x) \left[1 - F^{(k)}_{i[j]}(y) \right] .$$

$$. \; j^{(k)'} \left[\bar{H}^{(k)}_{N}(x) \right] . \; j^{(k)'} \left[\bar{H}^{(k)}_{N}(y) \right] .$$

$$. \left[d\,\bar{F}^{(k)}_{n[\ell]}(x) \; d\,\bar{F}^{(k)}_{n[\ell']}(y) + d\,\bar{F}^{(k)}_{n[\ell']}(x) \; d\,\bar{F}^{(k)}_{n[\ell]}(y) \right]$$

para $j, \ell, \ell' = 1,\ldots, p$; $k = 1,\ldots,q$; $i = 1,\ldots, n$.

$$\beta^{(k,k')}_{jj',n} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{\ell'=1}^{p} \left[\beta^{(k,k')}_{jj',\ell\ell',i} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta^{(k,k')}_{\ell\ell',jj',i} - \beta^{(k,k')}_{j\ell',\ell j',i} - \beta^{(k,k')}_{\ell j',j\ell',i} \right]\right\}$$

para $k,k' = 1,\ldots,q;\ j,j' = 1,\ldots, p$

para $k,k' = 1,\ldots,q\ ;\ j, j' = 1,\ldots, p.$

<u>Teorema</u> <u>3.21</u>

Se as condições (3.27), (3.28) e (3.30) valem, o vetor

$$\left[N^{\frac{1}{2}} \left(T^{(k)}_{N,j} - \mu^{(k)}_{N,j} \right) ;\ j = 1,\ldots,p\ ;\ k = 1,\ldots,q \right] \xrightarrow[N \to \infty]{D}$$

$$N_{pk}\left(0,\ \left(B^{(k,k')}_{jj',n} \right) \quad \begin{array}{l} j, j' = 1,\ldots, p \\ k, k' = 1,\ldots, q \end{array} \right)$$

□

<u>Teorema</u> <u>3.22</u>

Sob H_o e as condições (3.27), (3.28), (3.30), (3.108) e (3.109)

$$S_N \xrightarrow{D} \chi^2_{q(p-1)}$$

□

Se $\hat{\gamma}_N$ é um estimador consistente de γ_N, positivo definido, o teste

$$(3.111) \quad \hat{S}_N = n \sum_{k=1}^{q} \sum_{k'=1}^{q} \hat{v}_N^{kk'} \sum_{j=1}^{p} (T_{N,j}^{(k)} - \bar{E}_N^{(k)}) \, .$$

$$. \; (T_{N,j}^{(k')} - \bar{E}_N^{(k')})$$

é assintóticamente livre de distribuição $(\chi^2_{q(p-1)})$ onde $(\hat{v}_N^{kk'}) = \hat{\gamma}_N^{-1}$. Note que $V_N (R_N)$ definido em (3.104) é um estimador consistente de γ_N.

Estudaremos agora a distribuição de S_n sob uma sequência de alternativas de translação.

Seja $\{ K_n \}$ uma sequência de hipóteses alternativas tal que K_N especifica a v.a. $X_{ij} - N^{-1/2} \tau_j$, $j = 1$, ..., p, permutáveis para cada i, $i = 1, \ldots, n$, onde τ_1, ..., τ_p são p q- vetores com $\sum_{j=1}^{p} \tau_j = 0$.

Sob K_N

$$F_{i[j]}^{(k)}(x) = F_i^{(k)} (x - N^{-\frac{1}{2}} \tau_j^{(k)}), \quad j = 1,\ldots,p \; ; \; k = 1,\ldots,q$$

$$F_{i[j,j']}^{(k,k')}(x,y) = F_{i,\delta\, jj'+1}^{(k,k')} (x - N^{-\frac{1}{2}} \tau_j^{(k)} , \; Y - N^{-\frac{1}{2}} \tau_{j'}^{(k')})$$

$$j,j' = 1,\ldots,p \; ; \; k, k' = 1,\ldots, q.$$

Assumiremos que $F_{i[j]}^{(k)}$, $j = 1,\ldots, p$; $k = 1,\ldots, q$ são absolutamente contínuas e

$$(3.111) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i^{(k)}(x) = F^{(k)}(x)$$

$$(3.112) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_{i,\delta jj'+1}^{(k,k')}(x,y) = F_{\delta jj'+1}^{(k,k')}(x,y)$$

para $k \neq k' = 1, \ldots, q$.

Pelo lema (3.19) $V_N(R_N^o) \xrightarrow{p} \gamma$ onde γ é definido da mesma forma como em (3.110) e os $a_{kk',jj'}$ são todos calculados para a distribuição limite anterior. Definamos,

$$B(F^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} j^{(k)} \left[F^{(k)}(x) \right] d F^{(k)}(x) \; ;$$

$$k = 1, \ldots, q.$$

<u>Teorema</u> <u>3.23</u>

Sob a sequência de alternativas $\{ K_N \}$ e sob as condições do Teorema 3.22 e a existência dos limites (3.111) e (3.112)

$$S_N \xrightarrow{D} \chi^2_{q(p-1),\, \Delta_s}$$

onde

$$\Delta_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{k'=1}^{q} v^{kk'} \left(B(F^{(k)}) \right) B(F^{(k')}) \; .$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \tau_j^{(k)} \tau_j^{(k')} \right\}$$

□

Sob as alternativas $\{ K_N \}$, U_N, teste paramétrico de Máxima Verossimilhança para H_o, tem distribuição

$\chi^2_{q(p-1), \Delta_U}$,

$$(3.113) \qquad \Delta_U = \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{q} \sum_{k'=1}^{q} \lambda^{kk'} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \tau_j^{(k)} \tau_j^{(k')}$$

se as condições da secção 3.2.3 valem.

Deste modo a E.R.A. de S_N com respeito a U_N é $\dfrac{\Delta_s}{\Delta_U}$, que irá depender de Λ, γ.

CAPÍTULO IV

PLANEJAMENTO EM BLOCOS INCOMPLETOS
E
ANÁLISE DE COVARIÂNCIA MULTIVARIADA (NÃO PARAMÉTRICA)

4.1 - PLANEJAMENTO EM BLOCOS INCOMPLETOS

4.1.1. Introdução

Considere n -réplicas de um planejamento D, em blocos incompletos, consistindo de ,

- b blocos de tamanho constante k ($\geq$ 2)
- v tratamentos com $v \geq k$

onde os tratamentos são aplicados do seguinte modo :

i) Nenhum tratamento ocorre mais de uma vez em cada bloco

ii) O j - ésimo tratamento ocorre em r_j ($\leq b$) blocos

iii) Os (j, j') tratamentos ocorrem juntos em $r_{jj'}$ (>0) blocos para $j \neq j' = 1, \ldots, v$.

Seja S_i o conjunto de tratamentos que ocorrem no i- ésimo bloco, $i = 1, \ldots, b$.

Para a α - ésima réplica, a resposta do experimento no i - ésimo bloco, recebendo o j - ésimo tratamento, é o p - vetor $X_{\alpha ij}$ e será expressado como

$$(4.1) \quad X_{\alpha ij} = \mu_\alpha + \beta_{\alpha i} + \tau_j + \varepsilon_{\alpha ij}$$

$$j \in S_i \; ; \; i = 1, \ldots, b \; ; \; \alpha = 1, \ldots, n$$

com

$$\sum_{j \in S_i} \tau_j = 0$$

onde

μ_α : É o efeito devido a réplica α , $\alpha = 1, \ldots, n$.

$\beta_{\alpha i}$: É o efeito devido ao bloco i na réplica α ; $i = 1, \ldots, b$; $\alpha = 1, \ldots, n$.

τ_j : É o efeito devido ao tratamento j, $j \in S_i$; $i = 1, \ldots, b$.

$\varepsilon_{\alpha ij}$: É o p - vetor do erro cometido ao fazer a α - ésima réplica do j - ésimo tratamento no bloco i.

Assumiremos que as variáveis

$$(4.2) \quad \varepsilon_{\alpha i} = \{ \varepsilon_{\alpha ij} , \; j \in S_i \}$$

têm uma função distribuição acumulada conjunta $G_{\alpha i}(x_1, \ldots, x_k)$, simétrica sobre os k p- vetores e são independentes, para $\alpha = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, b$. Note que isto inclue a suposição convencional de que os $(N = n\,b\,k)$ erros são i.i. distribuidos.

Estamos interessados em testar a hipótese :

(4.3) $H_o : \tau_1 = \tau_v = 0$ versus $H_1 : \tau_j \neq 0$, para pelo menos um $j (= 1, \ldots, v)$.

No caso univariado (i.é. $p = 1$) os testes (dentro dos blocos) para este problema são devidos a Durbin (1951), Bernard e Elteren (1953), Bhapkar (1961) e outros. Para o caso especial de planejamentos balanceados, os estudos feitos por Elteren e Noether (1959) e Bhapkar (1963) revelam a baixa eficiência (de Pitman) destes testes, particularmente quando k é pequeno. Em planejamento em blocos incompletos, é conhecido (Hodges e Lehman (1962) e Sen (1968)) que o uso dos postos após alinhamento aumenta a eficiência dos testes que usam postos. Mostraremos aqui, novamente, que a ordenação após alinhamento pode também ser usada no tipo de planejamento que descrevemos anteriormente, e com este planejamento há também aumento da eficiência dos testes. Mostraremos que certos limites de onde a eficiência é derivada não dependem de D, isto é, dos particulares valores de b, v, r_j, $r_{jj'}$ e k.

4.1.2 - Noções Preliminares

Nós definiremos as observações alinhadas por

$$(4.4) \quad Y_{\alpha ij} = X_{\alpha ij} - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} X_{\alpha i \ell}$$

$$j \in S_i \; ; \; i = 1, \ldots, b \; ; \; \alpha = 1, \ldots, n.$$

e

$R^{(t)}_{\alpha ij}$, o posto de $Y^{(t)}_{\alpha ij}$ sobre as N observações alinhadas na t - ésima variável, $t = 1, \ldots, p$.

$$(4.5) \quad \tau_{j,i} = \tau_j - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \tau_\ell$$

$$i = 1, \ldots, b \; ; \; j \in S_i.$$

$$(4.6) \quad e_{\alpha ij} = \varepsilon_{\alpha ij} - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \varepsilon_{\alpha i \ell}$$

$$\alpha = 1, \ldots, n \; ; \; i = 1, \ldots, b, \; j \in S_i.$$

De (4.1), (4.4), (4.5) e (4.6) concluimos que

$$(4.7) \quad Y_{\alpha ij} = X_{\alpha ij} - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} X_{\alpha i \ell} =$$

$$= \mu_\alpha + \beta_{\alpha i} + \tau_j + \varepsilon_{\alpha ij} - \frac{1}{k} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\ell \in S_i} (\mu_\alpha + \beta_{\alpha i} + \tau_\ell + \varepsilon_{\alpha i \ell}) \right) =$$

$$= \mu_\alpha + \beta_{\alpha_i} + \tau_j + \varepsilon_{\alpha_{ij}} - \frac{1}{k}\left(\sum_{\ell \in S_i} (\mu_\alpha + \beta_{\alpha_i})\right) -$$

$$- \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \tau_\ell - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \varepsilon_{\alpha_{i\ell}} .$$

Como S_i tem k elementos, (4.7) pode ser escrito ,

$$(4.8) \quad Y_{\alpha_{ij}} = \tau_j - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \tau_\ell + \varepsilon_{\alpha_{ij}} - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \varepsilon_{\alpha_{i\ell}} =$$

$$= \tau_{j,i} + \ell_{\alpha_{ij}} .$$

$$j \in S_i ; \quad i = 1, \ldots, b ; \alpha = 1, \ldots, n.$$

Como nos demais casos de planejamento feitos iremos considerar agora p sequências de escores postos gerais

$$E^{(t)}_{N,s} = j_{N,t} \left(\frac{s}{N+1} \right) ; \quad 1 \leq s \leq N; \text{ para } t = 1,\ldots,p.$$

onde para cada t as seguintes condições, devido a Chernoff e Savage (1958) valem:

i) $\lim_{N \to \infty} j_{N,t} (\mu) = j_t (\mu)$, existe para todo $0 < \mu < 1$ e não é uma constante.

ii) $j_t (\mu)$ é absolutamente contínua com

$$\left| \frac{d^r}{d\mu^r} j_t(\mu) \right| \leq K \left[\mu(1-\mu) \right]^{-r-\frac{1}{2}+\delta} ,$$

para $\delta > 0$; $r = 0, 1$ e K constante finita.

iii) $$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| j_{N,t}\left(\frac{i}{N+1}\right) - j_t\left(\frac{i}{N+1}\right) \right| = \theta(N^{-1})$$

Para simplicidade de notação definiremos para cada t (t=1, ..., p)

$$\eta^{(t)}_{\alpha_{ij}} = E^{(t)}_{N,\, R^{(t)}_{\alpha_{ij}}} \quad ; \; j \in S_i; \quad i = 1, \ldots, b; \; \alpha = 1, \ldots, n.$$

$$\eta^{(t)}_{\alpha_{i.}} = \frac{1}{k} \sum_{j \in S_i} \eta^{(t)}_{\alpha_{ij}} \; ; \quad \eta^{(t)}_{\alpha..} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{b} \eta^{(t)}_{\alpha_{i.}}$$

$$\eta^{(t)}_{...} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \eta^{(t)}_{\alpha..}$$

A estatística de teste que será considerada é uma forma quadrática em

$$T^{(t)}_{N,j} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i \in P_j} \eta^{(t)}_{\alpha_{ij}}$$

onde

$$P_j = \{ i \,.\, j \in S_i \} \; ; \; j = 1, \ldots, v; \; t = 1, \ldots, p.$$

Para definir a estatística, sejam

$$V_N^{(i)} = ((v_{n,tt'}^{(i)})) \quad ; \; i = 1, 2.$$

onde

$$v_{N,tt'}^{(1)} = \frac{1}{n\,b\,k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{b} \sum_{j \in S_i} \left[\eta_{\alpha_{ij}}^{(t)} - \eta_{\alpha_{i.}}^{(t)} \right] .$$

$$. \left[\eta_{\alpha_{ij}}^{(t')} - \eta_{\alpha_{i.}}^{(t')} \right]$$

$$v_{N,tt'}^{(2)} = \frac{1}{n\,b} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{b} \left[\eta_{\alpha_{i.}}^{(t)} - \eta_{\alpha_{..}}^{(t)} \right] .$$

$$. \left[\eta_{\alpha_{i.}}^{(t')} - \eta_{\alpha_{..}}^{(t')} \right]$$

para $t, t' = 1, \ldots, p$.

$$A^{(i)} = ((a_{jj'}^{(i)})) \qquad i = 1, 2$$

onde

$$a_{jj'}^{(1)} = \left[k\, r_j\, \delta_{jj'} - r_{jj'} \right] \frac{1}{k-1} ,$$

$$a_{jj'}^{(2)} = \left[b\, r_{jj'} - r_j\, r_{j'} \right] \frac{1}{b-1}$$

$$j, j' = 1, \ldots, v ,$$

$\delta_{jj'}$ é o usual delta de Kronecker e $r_{jj} = r_j$.

$$W_N = A^{(1)} V_N^{(1)} + A^{(2)} V_N^{(2)}$$

$$T_N = (T_{N,1}^{(1)} ; \ldots, T_{N,v}^{(1)} ; \ldots ; T_{N,1}^{(p)} ; \ldots, T_{N,v}^{(p)})$$

$$\eta = (r_1 \eta_{\ldots}^{(1)} , \ldots, r_v \eta_{\ldots}^{(1)} , \ldots, r_1 \eta_{\ldots}^{(p)} , \ldots, r_v \eta_{\ldots}^{(p)})$$

A estatística dos postos ordenados (após alinhamento) proposta para testar (4.3) é :

$$(4.9) \quad \mathcal{L}_N = (T_N - \eta) \; W_N^- \; (T_N - \eta)'$$

onde W_N^- é uma inversa generalizada de W_N.

A construção de $\mathcal{L}_N$ é baseada na invariância permutacional da distribuição conjunta dos b k vetores,

$$(4.10) \quad \{ Y_{\alpha_{ij}} , j \in S_i , \; i = 1, \ldots, b \}$$

(para cada $\alpha = 1, \ldots, n$, sob H_o) sob as $(k!)^b$ permutações dentro de blocos dos b conjuntos de k vetores, como também nas b! permutações dos b blocos. As $(b! \; (k!)^b)^n$ permutações igualmente prováveis (levando em consideração agora as n réplicas), geram uma medida $\mathcal{P}_N$ (condicional) de probabilidade permutacional(isto é, sobre as permutações acima descritas), onde

(4.11) $E_{\mathcal{P}_N}(T_N) = \eta$ e $Var_{\mathcal{P}}(T_N) = W_N$.

Deste modo $\mathcal{L}_N$ é uma forma quadrática em $T_N - E_{\mathcal{P}_N}(T_N)$ com matriz discriminante W_N^-, uma inversa generalizada de W_N.

Para ilustrar calcularemos a primeira parte de (4.11), isto é $E_{\mathcal{P}_N}(T_N)$.

$$E_{\mathcal{P}_N}(T_{N,j}^{(t)}) = E_{\mathcal{P}_N}\left(\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i\in P_j}\eta_{\alpha_{ij}}^{(t)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i\in P_j} E_{\mathcal{P}_N}(\eta_{\alpha_{ij}}^{(t)}) = \frac{1}{n}\cdot n\, r_j\, E_{\mathcal{P}_N}(\eta_{\alpha_{ij}}^{(t)}).$$

$$E_{\mathcal{P}_N}(\eta_{\alpha_{ij}}^{(t)}) = E_{\mathcal{P}_N}(E_N^{(t)}, R_{\alpha_{ij}}^{(t)}) =$$

$$E_{\mathcal{P}_N}\, j_{N,t}\left(\frac{R_{\alpha_{ij}}^{(t)}}{N+1}\right) = \sum_{z=1}^{N} j_{N,t}\left(\frac{z}{N+1}\right).$$

$$\cdot\ P(R_{\alpha_{ij}}^{(t)} = z) = \sum_{z=1}^{N} j_{N,t}\left(\frac{z}{N+1}\right)\frac{1}{n\,p\,k}, \text{ pois}$$

$$P\left(R_{\alpha_{ij}}^{(t)} = z / \mathcal{F}_N \right) = \frac{1}{n\,p\,k} \; ; \qquad \begin{array}{l} j = 1, \ldots, v \\ t = 1, \ldots, p \\ i = 1, \ldots, b. \end{array}$$

Deste modo,

$$E_{\mathcal{F}_N} \left(T_{N,j}^{(t)} \right) = r_j \; \eta_{\ldots}^{(t)} = r_j \; \eta_{\ldots}^{(t)} \; ; \quad t = 1, \ldots, p$$

e

$$E_{\mathcal{F}_N} \left(T_N \right) = \eta .$$

Mostremos agora qual a distribuição de $R_{\alpha_{ij}}^{(t)}$.

<u>Distribuição de $R_{\alpha_{ij}}^{(t)}$</u>

Seja

$$Y_i = \{ ((Y_{ilj}^{(1)}, \ldots, Y_{ilj}^{(p)}) / j \in S_1), \ldots, ((Y_{ibj}^{(1)}, \ldots, Y_{ibj}^{(p)}) / j \in S_b \}$$

$$i = 1, \ldots, n;$$

a k b - upla da i-ésima réplica de p - vetores .

$$(Y_i)_{i=1,\ldots,n} \quad \text{são i.i.d} \Longrightarrow$$

$$(Y_1 , \ldots, Y_n) \overset{d}{\equiv} (Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(n)}) ,$$ para qualquer permutação σ de $(1, \ldots, n)$ então

$$((Y^{(t)}_{11j} / j \in S_1), \ldots, (Y^{(t)}_{1bj} / j \in S_b), \ldots ,$$

$$, (Y^{(t)}_{n1j} / j \in S_1), \ldots, (Y^{(t)}_{nbj} / j \in S_b) \overset{d}{\equiv}$$

$$((Y^{(t)}_{\sigma(1)1j} / j \in S_1), \ldots, (Y^{(t)}_{\sigma(1)bj} / j \in S_b) , \ldots,$$

$$, (Y^{(t)}_{\sigma(n)1j} / j \in S_1), \ldots, (Y^{(t)}_{\sigma(n)bj} / j \in S_b)) ,$$

$$t = 1, \ldots, p.$$

Sob H_o , $\tau_1 = \ldots = \tau_v$ e sabendo que $Y_{\alpha_{ij}}$ não sofre efeito de blocos, temos que

$$(4.12) \quad (Y^{(t)}_{ihj} / j \in S_h) \overset{d}{\equiv} (Y^{(t)}_{ih'j} / j \in S_{h'}) ; h, h' = 1, \ldots, b.$$

Como a distribuição de $(Y^{(t)}_{i\ell j} / j \in S_i)$, é simétrica para cada $\ell = 1, \ldots, b$, concluimos que

$$(4.13) \quad Y^{(t)}_{i\ell j} \overset{d}{\equiv} Y^{(t)}_{i\ell h} ; \quad h, j \in S_\ell ; \quad \ell = 1, \ldots, b.$$

De (4.12) $Y^{(t)}_{ihj} \overset{d}{\equiv} Y^{(t)}_{ih'j}$; $h, h' = 1, \ldots, b$

$\ell \in S_{h'}$; $j \in S_h$.

De (4.13) vem que

$$Y^{(t)}_{\sigma(i)hj} \overset{d}{\equiv} Y^{(t)}_{ih'\ell}$$

onde σ é qualquer permutação, $i = 1, \ldots, n$; $h, h' = 1, \ldots, b$; $\ell \in S_{h'}$; $j \in S_h$.

Como os $Y^{(t)}_{\alpha_{ij}}$, $\alpha = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, b$; $j \in S_i$ são contínuas

$$P_{\mathcal{P}_N} \left(R^{(t)}_{\alpha_{ij}} = z \right) = \frac{1}{N} = \frac{1}{n\,b\,k}$$

Assumiremos que $D \in \mathcal{D}$ onde $\mathcal{D}$ é a classe de todos planejamentos com blocos incompletos, para os quais

(4.14) posto de $A^{(1)} = v - 1$; $A^{(2)}$ e $b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)}$ são não negativas definidas.

4.1.3 - Propriedades de $\mathcal{L}_N$ para grandes amostras

Para pequenas amostras, a distribuição de $\mathcal{L}_N$ (sob $\mathcal{P}_N$), pode ser usada para construir testes livres de distribuição para H_o (4.3). Para N grande isto se torna muito trabalhoso. Por isto daremos a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$. As provas dos resultados sobre $\mathcal{L}_N$ (sob $\mathcal{P}_N$), para grandes amostras, são longas e têm a mesma linha das correspondentes provas, para blocos completos, tratados em Puri - Sen (1971), capítulo 7, seção 3, ou Sen (1967) ,

(1968), (1969). Por estas razões não as faremos aqui e nos limitaremos a enunciar os resultados.

<u>Teorema</u> - <u>4.1</u>

"Sob as condições da seção 3.3.2 a distribuição permutacional assintótica de $\mathcal{L}_N$ (sob $\mathcal{P}_N$) converge para a distribuição $\chi^2_{(p\,(v-1))}$. A distribuição de $\mathcal{L}_N$ (sob H_o (4.3)), sem considerar $\mathcal{P}_N$) depende da f.d.a que esta em jogo, mas também converge para uma distribuição qui-quadrado com $p\,(v-1)$ graus de liberdade".

Deste modo, para n grande, os valores críticos de $\mathcal{L}_N$ são aproximadamente aqueles da $\chi^2_{p\,(v-1)}$.

Para estudar as propriedades do poder assintótico do teste baseado em $\mathcal{L}_N$, tomaremos a seguinte sequência de alternativas $\{ H_N \}$ (de Pitman) especificadas por

$$(4.15)\quad H_N : \tau_j = \tau_{j,n} = n^{-\frac{1}{2}}\,\Theta_j \;;\quad \Theta_j = (\,\theta_j^{(1)},\ldots,\theta_j^{(p)}\,)$$

com $j = 1, \ldots, v$; $\sum_{j=1}^{v} \theta_j = 0$, e os $\theta_j^{(t)}$ reais e finitos.

Correspondendo a pk - variável $\left[\,\ell_{\alpha_{ij}} \;;\; j \in S_i\,\right]$ temos a f.d.a. conjunta $F\,(x_1,\ldots,x_k)$, a f.d.a. marginal de $\ell^{(t)}_{\alpha ij}$, $(\,e^{(t)}_{\alpha_{ij}}, \ell^{(t')}_{\alpha_{ij}}\,)$ e $(\,\epsilon^{(t)}_{\alpha_{ij}}, e^{(t')}_{\alpha_{ij'}}\,)$ denotadas por

$F_{[t]}(x)$; $F^{(1)}_{[t,t']}(x, y)$ e $F^{(2)}_{[t,t']}(x, y)$, respectivamente.

Como $Y_{\alpha_{ij}}$ eliminou o efeito devido a bloco, a f.d.a. conjunta $G(X_1, \ldots, X_k)$ de $[\varepsilon_{\alpha_{ij}}, j \in S_i]$ é simétrica sobre seus argumentos e sob H_o (4.3). As f.d. acumuladas marginais acima não dependem de i, j e j' ($j \neq j'$).

Tomemos $v^{(i)} = ((v^{(i)}_{tt'}))$, $i = 1, 2$ onde

$$v^{(i)}_{tt'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j_t \left[F_{[t]}(x) \right] j_{t'} \left[F_{[t']}(y) \right] d F^{(i)}_{[t,t']}(x, y) -$$

$$- \mu^*_t \mu^*_{t'} \; ; \; t, t' = 1, \ldots, p ,$$

$$\mu^*_t = \int_0^1 j_t (u) \, du$$ para $t = 1, \ldots, p$, e $F^{(i)}_{[t,t]}(x,y)$ é substituída por $F_{[t]}(x)$, $(i = 1, 2)$.

Nós assumiremos que $v^{(1)}$ é positiva definida e sejam

$$A = \frac{k-1}{k} A^{(1)} + \frac{b-1}{bk} A^{(2)}$$

(4.16) $$B = \frac{(k-1)}{k} A^{(1)} - \frac{(b-1)(k-1)}{bk} A^{(2)}$$

$$\Omega = A \otimes v^{(1)} - B \otimes v^{(2)}$$

Nós também assumimos que $F_{[t]}$ é absolutamente contínua com

$$\left| \frac{d}{dx} j_t \left[F_{[t]}(x) \right] \right| \text{ limitada, quando } x \to \pm \infty,$$

para $t = 1, \ldots, p$.

Definamos,

$$B_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} j_t \left[F_{[t]}(x) \right] d F_{[t]}(x) \ , \quad t = 1, \ldots, p$$

$$\varepsilon_j^{(t)} = B_t \tilde{\theta}_j^{(t)} \ ; \quad \tilde{\theta}_j^{(t)} = \frac{r_j (k-1)}{k} \theta_j^{(k)} - \sum_{\substack{j'=1 \\ j \neq j'}}^{v} \left(\frac{r_{jj'}}{k} \right) \theta_{j'}^{(t)} -$$

$$- r_j \tilde{\theta}_o^{(t)} \ ,$$

onde

$$\tilde{\theta}_o^{(t)} = \frac{1}{b\,k} \sum_{i=1}^{b} \sum_{j \in S_i} \left[\theta_j^{(t)} - \frac{1}{k} \sum_{\ell \in S_i} \theta_\ell^{(t)} \right] ; \ t = 1, \ldots, p.$$

Definamos, finalmente

$$K_i = \left(\left(k_{tt'}^{(i)} \right) \right) ; \ k_{tt'}^{(i)} = B_t \, v_{tt'}^{(i)} \, B_{t'} \ ; \quad t, t' = 1, \ldots, p; \ i = 1, 2.$$

$$\Gamma = A \otimes K_1 - B \otimes K_2$$

$$(4.17)\quad \varepsilon = (\varepsilon_1^{(1)}, \ldots, \varepsilon_v^{(1)}, \ldots, \varepsilon_1^{(p)}, \ldots, \varepsilon_v^{(p)})$$

$$\theta = (\tilde{\theta}_1^{(1)}, \ldots, \tilde{\theta}_v^{(1)}, \ldots, \tilde{\theta}_1^{(p)}, \ldots, \tilde{\theta}_v^{(p)})$$

$$\tilde{\theta}_o = (\tilde{\theta}_o^{(1)}, \ldots, \tilde{\theta}_o^{(1)}, \ldots, \tilde{\theta}_o^{(p)}, \ldots, \tilde{\theta}_o^{(p)})$$

<u>Teorema 4.2</u>

Sob $\{H_N\}$ em (4.15) e sob as condições acima estabelecidas, $\mathcal{L}_N$ tem, assintóticamente, uma distribuição qui - quadrado com p (v-1) graus de liberdade e parâmetro de não centralidade.

$$(4.18)\quad \Delta_{\mathcal{L}} = \varepsilon\ \bar{\Omega}\ \varepsilon' = (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)\ \bar{\Gamma}\ (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)'$$

onde $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Gamma}$ são as inversas generalizadas de Ω e Γ, respectivamente.

4.1.4 - <u>Eficiência Assintótica de</u> $\mathcal{L}_N$

No caso paramétrico (i.é. na teoria dos modelos normais), para p = 1, o teste ótimo e invariante é baseado no teste F, comparando a soma dos quadrados médios devido a tratamento (eliminando o efeito de bloco) com a soma dos quadrados médios devido ao erro.

Para $p \geq 2$, podemos ter as seguintes generalizações deste teste :

i) Da Razão de Verossimilhança da Teoria Normal (R.V.T.N), baseado na razão de verossilhança,

$$(4.19) \qquad \lambda_N = \left(\frac{|\hat{\Sigma}_\Omega|}{|\hat{\Sigma}_w|} \right)^{\frac{N}{2}}$$

onde,

$\hat{\Sigma}_\Omega$: é a estimativa de máxima verossimilhança da matriz de covariância na distribuição normal.

$\hat{\Omega}_w$: é a estimativa de máxima verossimilhança da matriz de covariância da normal, sob H_o .

Rejeitaremos a hipótese H_o se $\lambda_N < \lambda_o$, λ_o escolhido adequadamente.

ii) A Estatística Generalizada (Hotelling - Lawley) T_o^2 baseada no traço de $S_h S_e^{-1}$ (onde S_h é a matriz de somas de quadrados e produtos cruzados devida ao desvio em relação a hipótese nula e S_e é a matriz de soma de quadrados e produtos cruzados devida ao resíduo (erro)),

iii) A estatística de Roy baseada na maior raiz característica de $S_h S_e^{-1}$ e outros.

Para maiores detalhes sobre estas estatísticas vide Anderson ((1958), Capítulo 8) ou a dissertação de mestrado de Singer (1977).

Foi mostrado que T_o^2 e λ_N são assintóticamente equivalentes em probabilidade e portanto têm as mesmas propriedades.

Queremos comparar o teste $\mathcal{L}_N$ com o teste RUTN quando a função de distribuição que esta em jogo não é necessariamente normal.

A distribuição teórica de $-2 \log \lambda_N$, quando a distribuição que está em jogo não é necessariamente normal, foi estudada no contexto de hipótese linear geral multivariada em Puri & Sen (1970). Segue de seus resultados, particularmente o Teorema 2.2, que quando F (x) tem momentos finitos de até segunda ordem, a matriz de dispersão de $e_{\alpha_{ij}}$ (definido por (4.6)) denotada por $\Sigma = \Sigma$ (F), é finita e positiva definida,

$$(4.20) \quad -2 \log \lambda_N \xrightarrow[\to \infty]{D} \chi^2_{p(v-1)} \text{, sob } H_o \ (4.3) \text{ e sob}$$

H_N (4.15) tem assintóticamente uma distribuição quiquadrado com p(v-1) graus de liberdade e parâmetro de não centralidade,

$$(4.21) \quad \Delta_\lambda = (\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o) \left[A^{(1)} \otimes \Sigma \right] (\tilde{\theta} - \theta^o)' .$$

Assim a eficiência relativa assintótica (E.R.A) (conforme Sen & Puri (1967), Quade, (1976) ou Puri & Sen (1971))

de $\mathcal{L}_N$ com respeito a λ_N é

$$(4.22) \quad e(\mathcal{L}, \lambda) = \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta_\lambda} = e\,(A^{(1)}, A^{(2)}, \Sigma, K_1, K_2, \theta)$$

a qual não depende somente de $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ e matrizes de covariância Σ, K_1 e K_2, mas também do parâmetro de translação θ.

Provaremos agora algumas desigualdades sobre (4.22). Para isso chamaremos as raízes características mínima e máxima de A por $C_m(A)$ e $C_M(A)$, respectivamente.

<u>Teorema 4.3</u>

Sob as condições da seção 4.1.2 e 4.1.3 temos que

$$\inf_\theta e\,(A^{(1)}, A^{(2)}, \Sigma, K_1, K_2, \theta) \geq C_m(\Sigma^{-1} K_1)$$

$$\sup_\theta e\,(A^{(1)}, A^{(2)}, \Sigma, K_1, K_2, \theta) \geq C_M(\Sigma^{-1} K_1)$$

para todo $D \in \mathcal{F}$.

<u>Demonstração</u>

$$e(\mathcal{L}, \lambda) = \frac{(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)\,\bar{\Gamma}\,(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)'}{(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)\,[A^{(1)} \otimes \Sigma]^{-}\,(\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_o)'}$$

Pelo teorema de Courant sobre o quociente de duas formas quadráticas, temos :

$$\sup_\theta e(\mathcal{L}, \lambda) = c_M \left[\bar{\Gamma} \left(A^{(1)} \otimes \Sigma \right) \right]$$

$$\inf_\theta e(\mathcal{L}, \lambda) \quad c_m \left[\Gamma \left(A^{(1)} \otimes \Sigma \right) \right]$$

Mas $$c_M \left[\bar{\Gamma} \left(A^{(1)} \otimes \Sigma \right) \right] = \frac{1}{c_m \left[\left(A^{(1)} \otimes \Sigma \right)^- \Gamma \right]} =$$

$$= \frac{1}{c_m \left[\left(\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1} \right) \Gamma \right]}$$

onde $\bar{\Gamma}$, $\overline{A^{(1)}}$ são as inversas generalizadas de Γ e $A^{(1)}$, respectivamente.

Tirando o valor Γ de (4.16), e de B e A de (4.17) temos:

$$c_m \left[\left(A^{(1)} \otimes \Sigma^{-1} \right) \Gamma \right] = c_m \left[\left(\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1} \right) \left(A \otimes K_1 - B \otimes K_2 \right) \right] =$$

$$= c_m \left[\left(\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1} \right) \left\{ \left(\frac{k-1}{k} A^{(1)} + \frac{b-1}{bk} A^{(2)} \right) \otimes K_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{k-1}{k} A^{(1)} - \frac{(b-1)(k-1)}{bk} A^{(2)} \right) \otimes K_2 \right\} \right] =$$

$$= c_m \left[\left(\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1} \right) \left\{ \frac{k-1}{k} A^{(1)} \otimes K_1 + \frac{b-1}{bk} A^{(2)} \otimes K_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{k-1}{k} A^{(1)} \otimes K_2 + \frac{(b-1)(k-1)}{bk} A^{(2)} \otimes K_2 \right\} \right] .$$

Mas

$$A^{(1)} \otimes K_1 - \frac{1}{b\,k}\left(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)} \right) \otimes \left[K_1 + (k-1)\;K_2 \right] =$$

$$= A^{(1)} \otimes K_1 - \frac{1}{k}\;A^{(1)} \otimes K_1 + \frac{b-1}{b\,k}\;A^{(2)} \otimes K_1 - \frac{k-1}{k}\;.$$

$$A^{(1)} \otimes K_2 + \frac{(k-1)\;(b-1)}{b\,k}\;A^{(2)} \otimes K_2 =$$

$$= \frac{k-1}{k}\;A^{(1)} \otimes K_1 + \frac{b-1}{b\,k}\;A^{(2)} \otimes K_1 - \frac{k-1}{k}\;A^{(1)} \otimes K_2 +$$

$$+ \frac{(b-1)\;(k-1)}{b\,k}\;A^{(2)} \otimes K_2\;.$$

Substituindo esta igualdade acima, temos :

$$C_m \left[(\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1})\;\Gamma \right] = C_m \left[\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1} \right) \;\left(A^{(1)} \otimes K_1 \right) -$$

$$- \frac{1}{b\,k}\left(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)} \right) \otimes \left[K_1 + (k-1)\;K_2 \right] =$$

$$= C_m \left[I_v \otimes \Sigma^{-1}\;K_1 - \frac{\overline{A^{(1)}}}{bk}\;\left(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)} \right) \otimes \right.$$

$$\left. \otimes\;\Sigma^{-1}\;\left[K_1 + (k-1)\;K_2 \right] \right.\;.$$

Portanto

$$C_M \left[\bar{\Gamma}\,(A^{(1)} \otimes \Sigma)\right] = \frac{1}{C_m\left[I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1 - \frac{\overline{A^{(1)}}}{b\,k}\,(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)}) \otimes Z\right.}$$

onde $Z = \Sigma^{-1}\left[K_1 + (k-1)\,K_2\right]$

De maneira idêntica

$$C_m \left[\bar{\Gamma}\,(A^{(1)} \otimes \Sigma)\right] = \frac{1}{C_M\,(\,(\,\overline{A^{(1)}} \otimes \Sigma^{-1}\,)\,\Gamma\,)} =$$

$$= \frac{1}{C_M\left[I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1 - \frac{\overline{A^{(1)}}}{b\,k}\,(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)}) \otimes \Sigma^{-1}(K_1 + (k-1)\right.}$$

Mas

(4.23) $\overline{A^{(1)}}\,(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)}$ é positiva semi-definida por (4.14) e

(4.24) $K_1 + (k-1)\,K_2$ é positiva semi-definida pelo lema que mostraremos abaixo.

De (4.23) e (4.24) concluimos que

$$\overline{A^{(1)}}\,(b\,A^{(1)} - (b-1)\,A^{(2)}) \otimes (K_1 + (k-1)\,K_2)$$

é positiva semi-definida . Então

$$C_m \left[I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1 - \frac{\overline{A^{(1)}}}{b\,k} \left(b A^{(1)} - (b-1) A^{(2)} \right) \otimes \Sigma^{-1} (K_1 + (k-1) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot K_2) \right] \leq C_m \left[I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1 \right] = C_m \left[\Sigma^{-1} K_1 \right]$$

$$C_M \left[I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1 - \frac{\overline{A^{(1)}}}{b\,k} \left(b A^{(1)} - (b-1) A^{(2)} \right) \otimes \Sigma^{-1} (K_1 + (k-1) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot K_2) \right] \leq C_M (I_v \otimes \Sigma^{-1} K_1) = C_M (\Sigma^{-1} K_1) .$$

Deste modo

$$\inf_\theta e (A^{(1)} , A^{(2)} , \Sigma , K_1 , K_2 , \theta) \geq C_m (\Sigma^{-1} K_1)$$

$$\sup_\theta e (A^{(1)} A^{(2)} , \Sigma , K_1 , K_2 , \theta) \geq C_M (\Sigma^{-1} K_1)$$

<u>Lema - 4.3</u>

K_1 é positiva semi-definida $\Rightarrow$ $K_1 + (k-1) K_2$ é positiva semi-definida

<u>Demonstração</u>

Por (4.17) é suficiente provar o lema para $v^* = v^{(1)} + (k-1) v^{(2)}$. Note que :

- $v^{(1)}$ é a matriz de dispersão de

$$j_t \left[F_{[t]} \left(e^{(t)}_{\alpha_{ij}} \right) \right] ; \; t = 1, \ldots, p$$

- $v^{(2)}$ é a matriz de dispersão de

$$\left(j_t \left(F_{[t]} \left(e^{(t)}_{\alpha_{ij}} \right) \right) , j_{t'} \left[F_{[t']} \left(e^{(t')}_{\alpha_{ij'}} \right) \right] \right)$$

com $j \neq j'$; $t, t' = 1, \ldots, p$.

então v^* é a matriz de dispersão de $Z = (Z_1, \ldots, Z_p)$;

$$Z_t = \sum_{j \in S_i} j_t \left[F_{[t]} \left(e^{(t)}_{\alpha_{ij}} \right) \right] ; \; t = 1, \ldots, p$$

$\therefore$ positiva semi-definida.

Quando $p = 1$, a comparação da eficiência de $\mathcal{L}_N$ com outros testes paramétricos e não paramétricos são encontrados em Sen (1971).

Para $p \geq 2$, em virtude do teorema (4.3) a E.R.A. (definida em Puri & Sen (1967))

$$e(F, j) = \frac{\theta \; K_1^{-1} \; \theta'}{\theta \; \Sigma \; \theta'} , \; \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$$

satisfaz

$$C_m (\Sigma \; K_1^{-1}) \leq e(F, j) \leq C_M (\Sigma \; K_1^{-1}) .$$

4.2 - ANÁLISE DE COVARIÂNCIA MULTIVARIADA

Nas secções 3.3.1.1 e 3.3.2 faremos um resumo do que é apresentado em Puri & Sen (1971) e nas outras seções completaremos o assunto com os resultados obtidos não constantes desta publicação, como Análise de Covariância sem alinhar as observações e testes simultâneos para contrastes.

4.2.1 - Análise de Covariância baseada na ordem dos Postos, sem alinhamento

A) Caso Univariado

Seja $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ onde X_1 é a variável primária e $X = (X_2, \ldots, X_p)$ a covariável, onde

$Z_\alpha^k = (X_{1\alpha}^k, X_\alpha^k)$, $X_\alpha^k = (X_{2\alpha}^k, \ldots, X_{p\alpha}^k)$ $\alpha = 1, \ldots, n_k$ é

a α - ésima observação do k - ésimo tratamento, Isto é: Assumiremos que Z_α^k ; $\alpha = 1, \ldots, n_k$ são i.i.d. com uma f.d.a. contínua $G_k(Z)$, $Z \in R^p$ para $k = 1, \ldots, C$ $(k \geq 2)$.

Denotaremos a f.d.a. (conjunta) de $X_\alpha^{(k)}$ por $F_k^{(1)}(x)$, $x \in R^{p-1}$ e a f.d.a. condicional de $X_{1\alpha}^{(k)}$ dado $X_\alpha^{(k)} = x$ por $F_k^{(2)}(x_1 / x)$; $k = 1, \ldots, c$.

É também assumido que a co-variável não é afetada pela aplicação dos tratamentos, isto é,

$$(4.26) \quad F_k^{(1)}(x) = F^{(1)}(x) \quad , \; k = 1, \ldots, c \; ; \; x \in R^{p-1}$$

Estudaremos o modelo,

$$(4.27) \quad F_k^{(2)}(y / x) = F^{(2)}(y - \tau_k / x), \quad k = 1,\ldots,c.$$

onde $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_c)$ é o vetor dos efeitos devido a tratamentos.

Note que o modelo

$$(4.28) \quad y_{\alpha_k} = \tau_k + \beta X + \varepsilon_{\alpha_k}$$

onde ε_{α_k} são i.i.d. é um caso particular deste.

A hipótese nula de não efeito devido a tratamento é dada por

$$(4.29) \quad H_o : F_k^{(2)}(y / x) = F^{(2)}(y / x), \; k = 1,\ldots,c.$$

A hipótese H_o implica que $\tau = 0$ e como consequência $G_k \overset{d}{\equiv} G_1$; $k = 1, \ldots, c$.

Os testes para H_o dado por (4.29) foram estudados estabelecendo correspondência com o problema de multi-amostras

multivariadas, diferindo por localização, assunto este visto anteriormente ou para mais detalhes, vide Puri & Sen (1966) e Puri & Sen (1971).

Vejamos então os testes usados para H_o.

Adotaremos as mesmas notações da seção 3.1.1 e 3.1.2.

Sob H_o, $G_k \equiv G_1$, $k = 1, \ldots, c$ então a probabilidade (3.8) continua válida, isto é :

$$(4.30) \quad P(R_N = r_N \mid S(R_N^*), H_o) = \frac{1}{N!} \; ; \forall \, r_N \in S(R_N^*)$$

e G_1 contínua . Utilizaremos esta igualdade para construir os testes da ordem dos postos para H_o.

Definiremos $T_{N,i}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, p$; $k = 1, \ldots, c$ como em (3.11) e $V_N = (v_{ij}(R_N^*)) = V_N(R_N^*)$ $i,j = 1, \ldots p$ como em (3.19).

Como foi anteriormente verificado,

$$E(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} / J_n) = 0; \; i = 1,\ldots,p; \; k = 1, \ldots,c.$$

$$E((T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)})(T_{N,j}^{(q)} - \bar{E}_N^{(j)}) / J_N) =$$

$$= \frac{(\delta_{kq} N - n_k) \, v_{ij}(R_N^*)}{n_k (N-1)}$$

$$i, j = 0, \ldots, p \; ; \; k, q = 1, \ldots, c$$

e continua válido o resultado

" $$N^{\frac{1}{2}} \{ T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} \; , \; i = 1,\ldots,p \; ; \; k = 1,\ldots,c \}$$

sob J_N tem distribuição assintótica normal multivariada com média zero".

Utilizaremos a informação contida nas covariáveis para eliminar de $T_{N,1}^{(k)}$ a variação devido a regressão de $T_{N,1}^{(k)}$ em $T_{N,2}^{(k)}, \ldots, T_{N,p}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, c$. Por isso trabalharemos com o resíduo destas regressões. Os resíduos são

(4.31) $$T_{N,k}^{*} = T_{N,1}^{(k)} - \bar{E}_N^{(1)} - \{ \text{o valor ajustado de } T_{N,1}^{(k)} - \bar{E}_N^{(1)} \text{ em } T_{N,2}^{(k)}, \ldots, T_{N,p}^{(k)} \} =$$

$$= T_{N,1}^{(k)} - \bar{E}_N^{(1)} - \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \left(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} \right) \; ;$$

$$k = 1, \ldots, c.$$

onde $V_{N,ij}$ é o cofator de $v_{ij}(R_N^*)$, $i, j = 1,\ldots,p$.

Para maiores detalhes sobre este tipo de raciocínio, ver TIM (1975).

Como $X_2^{(k)}, \ldots, X_p^{(k)}$ são independentes

$$\mathrm{Cov}\left(T_{N,k}^*, T_{N,q}^* / J_N\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \cdot \left(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)}\right), \sum_{j=1}^{p} \frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \left(T_{N,j}^{(q)} - \bar{E}_N^{(j)}\right) / J_N\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \cdot \frac{V_{N,j1}}{V_{N,11}} \mathrm{Cov}\left[\left(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)}\right), \left(T_{N,j}^{(q)} - \bar{E}_N^{(j)}\right) / J_N\right] = \sum_{i=1}^{p} \frac{V_{N,i1}}{V_{N,11}} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{Cov}\left[\left(T_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)}, T_{N,l}^{(q)} - \bar{E}_N^{(l)}\right) / J_N\right] =$$

$$= \frac{|V_N|}{|V_{N,11}|} \cdot \frac{N\delta_{qk} - n_k}{\mu_k (N-1)}, \quad k, q = 1, \ldots, c$$

onde $|V_N|$ é o determinante de $V_N(R_N^*)$.

Com o mesmo argumento usado para justificar (3.26), podemos usar o teste

$$(4.32) \quad \mathcal{L}^*_N = \frac{|V_{N,11}|}{|V_N|} \sum_{k=1}^{c} n_k \left(T^*_{n,k} \right)^2$$

para H_o.

Para N pequeno, (4.30) nos dá uma maneira de calcular a distribuição de $\mathcal{L}^*_N$, mas para N grande este cálculo se torna muito trabalhoso. Nestes casos usaremos a distribuição assintótica de $\mathcal{L}^*_N$, dada pelos Teoremas 3.1 e 3.2, que é $\chi^2_{(c-1)}$, sob J_N. O Teorema 3.3 nos leva a concluir que a distribuição não nula de $\mathcal{L}^*_N$ é assintóticamente χ^2_{c-1}. Deste modo para grandes amostras o teste assintótico rejeita H_o, a nível α se $\mathcal{L}^*_N \geq \chi^2_{\alpha,c-1}$.

Estudaremos a distribuição não nula de $\mathcal{L}^*_N$ sob a sequência de alternativas

$$(4.33) \quad H^*_N : G_k(Z) = G_{k,N}(Z) = G(Z_1 - N^{-\frac{1}{2}} \theta_k, Z_2, \ldots, Z_k)$$

$$k = 1, \ldots, c \; ; \; \theta_i \in R, \; i = 1, \ldots, c.$$

Aplicando os teoremas (3.4), (3.5) e (3.6) em $\mathcal{L}^*_N$, conclui-se :

<u>Teorema 4.4</u>

Sob $\{ H^*_N \}$ e condições dos Teoremas (3.4) e (3.6), $\mathcal{L}^*_N$ tem

assintóticamente uma distribuição qui-quadrado com c-1 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade

$$(4.34) \quad \Delta^*_{\mathcal{L}} = v''(G) \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \left(\eta_1^{(k)} - \bar{\eta}_1 \right)^2$$

onde $v''(G)$ é o elemento da 1ª linha e 1ª coluna de $v^{-1}(G)$, definido por (3.34) onde

$$v^{-1}(G) = \left(v(G) \right)^{-1} \quad \text{para } F \equiv G \text{ e } \eta_1^{(k)}$$

$k = 1, \ldots, c$ definido por (3.41)

$$\bar{\eta}_1 = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \eta_1^{(k)} .$$

Denotemos a matriz de covariância de $Z_\alpha^{(k)}$ por $\Sigma_k(G)$ e sob H_o $\Sigma_k(G) = \Sigma(G)$, $k = 1, \ldots, c$. Suporemos que $\Sigma(G)$ seja não singular e denotaremos $(\Sigma(G))^{-1} = (\sigma^{ij}(G))$.

Sendo G normal, o teste usado na análise de covariância é o baseado na razão das variâncias (após a variação devido as covariáveis ser eliminada dos quadrados médios entre e dentro dos grupos. Vide Scheffé 1959, capítulo VI). Pode ser mostrado que se G é a f.d.a. multivariada com momentos finitos de ordem $2 + \delta$, $\delta > 0$, então sob (4.33), (c-1) vezes a razão das variâncias tem assintoticamente uma distribuição $\chi^2_{c-1, \Delta_{\mathfrak{F}}}$ onde

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \sigma''(G) \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\bar{\theta}_k - \bar{\theta})^2 , \quad \bar{\theta} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \theta_k$$

e $\lambda^{(k)}$ é o da condição (3.33).

Assim a eficiência relativa assintótica (E.R.A) de $\mathcal{L}_N^*$ com respeito ao teste da razão das variâncias é

$$e_{\mathcal{L}^*,\mathcal{F}} = \frac{\Delta_{\mathcal{L}^*}}{\Delta_{\mathcal{F}}} = \frac{v''(G)}{\sigma''(G)} \left(B_{(1)}(G) \right)^2$$

onde

$$B_{(1)}(G) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} j_{(1)} \left(G_{[1]}(x) \right) d\, G_{[1]}(x) ,$$

$G_{[1]}$ se refere a f.d.a. $G_{k\,[1]}$ sob a condição $G_{1[1]} = \ldots = G_{c[1]} = G_{[1]}$ sendo $G_{k[i]}(x)$ a f.d.a. de $X_{i\alpha}^{(k)}$, $i = 1, \ldots, p$.

Exemplos de cálculos de $e_{\mathcal{L}^*,\mathcal{F}}$ são encontrados em Puri & Sen (1971) secção 5.9.

B) Caso Multivariado

Iremos agora generalizar a parte A) para o caso multivariado . Usaremos, o quanto possível, a notação anterior.

Seja,

$$Z_{k\alpha} = (Y_{k\alpha} , X_{k\alpha})'$$

onde

$$Y_{k\alpha} = (Y_{k\alpha}^{(1)} , \ldots , Y_{k\alpha}^{(p)}) \; ; \; X_{k\alpha} = (X_{k\alpha}^{(1)} , \ldots , X_{k\alpha}^{(q)})$$

com $p, q \geq 1, \alpha = 1, \ldots, n_k$.

Para cada k, $k = 1, \ldots, c$, teremos n_k vetores aleatórios i.i.d. tendo uma função distribuição acumulada $G_k(Z)$, com $Z \in R^{p+q}$. Supõem-se que $Z_{11}, \ldots, Z_{cnc}$ são mutuamente independentes.

Chamaremos de $F_k^{(1)}(X)$ a f.d.a. conjunta de $X_{k\alpha}$ e de $F_k^{(2)}(Y / X)$ a f.d.a. condicional de $Y_{k\alpha}$ dado $X_{k\alpha} = X$, $k = 1, \ldots, c$.

Como no caso da teoria univariada, do resumo anterior, assumiremos que

$$F_1^{(1)}(x) = \ldots = F_c^{(1)}(x)$$

isto é, as co- variáveis não afetadas pelos tratamentos .

A hipótese nula de interesse é

$$(4.35) \quad H_o : F_1^{(2)}(Y / X) = \ldots = F_c^{(2)}(Y / X)$$

Pode-se notar que no modelo aditivo usual,

$$(4.36) \quad F_k^{(2)} (Y / X) = F^{(2)} (Y - \tau_k / X) ,$$

$$\tau_k = (\tau_k^{(1)}, \ldots , \tau_k^{(p)})$$

e a hipótese H_o (4.34) implica que $\tau_1 = \ldots = \tau_c$.

Nosso objetivo agora é encontrar um teste para H_o.

Tomemos o ponto amostral

$$Z_N^* = (Z_{11}, \ldots , Z_{cn_c})$$

que é uma matriz de ordem (p + q) X N. Ordenando os N ($= \sum_{j=1}^{c} n_j$) elementos de cada linha de Z_N^* em ordem crescente nós obtemos a matriz de ordem (p + q) x N

$$(4.37) \quad R_N = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)}, \ldots, S_{1n_1}^{(1)}, \ldots, S_{c_1}^{(1)}, \ldots, S_{c\,n_c}^{(1)} \\ \vdots \\ S_{11}^{(p)}, \ldots, S_{1n_1}^{(p)}, \ldots, S_{c_1}^{(p)}, \ldots, S_{c\,n_c}^{(p)} \\ R_{11}^{(1)}, \ldots, R_{1\,n_1}^{(1)}, \ldots, R_{c_1}^{(1)}, \ldots, R_{c\,n_c}^{(1)} \\ \vdots \\ R_{11}^{(q)}, \ldots, R_{1\,n_1}^{(q)}, \ldots, R_{c_1}^{(q)}, \ldots, R_{c\,n_c}^{(q)} \end{bmatrix}$$

onde $S_{k\alpha}^{(i)}$ ($R_{k\alpha}^{(j)}$) é o posto de $Y_{k\alpha}^{(i)}$ ($X_{k\alpha}^{(j)}$)

sobre as N observações na i - ésima (j - ésima) variável Y (variável X) , i = 1, ..., p (j = 1, ..., q).

Nós definimos as estatísticas dos postos como

$$(4.38) \quad L_{N_i}^{k} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,\, S_{k\alpha}^{(i)}}^{(i)} \quad ; \quad i = 1,\ldots,p;\ k = 1,\ldots, c.$$

$$(4.39) \quad T_{Nj}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,\, R_{k\alpha}^{(j)}}^{*(j)} \quad ;$$

$$j = p + 1,\ldots,p + q; \quad k = 1, \ldots, c.$$

onde $E_{N,\alpha}^{(i)}$ e $E_{N,\alpha}^{*(j)}$, $\alpha = 1,\ldots, N$ são os escores gerais

satisfazendo as condições 4 de Puri & Sen (1969) ou as condições 5.4 de Puri & Sen (1971) (ou as condições para a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$ que são (3.33),(3.34), (3.35), (3.36) e (3.38). Para maior entendimento, reescreveremos estas condições :

Sejam $G_{k[i]}(x)$ e $G_{k[i,j]}(x, x')$ as f.d.a. marginais de $X_{i\alpha}^{(k)}$ e ($X_{i\alpha}^{(k)}$, $X_{j\alpha}^{(k)}$), respectivamente para $i \neq j = 1, 2, \ldots, p + q$, $k = 1, \ldots, c$. Definamos então

$$H_{[i]}(x) = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k}{N} G_{k[i]}(x)$$

$$H_{[i,j]}(x) = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k}{N} G_{k[i,j]}(x, y)$$

$$i,j = 1,\ldots, p+q$$

$$H(Z) = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k}{N} G_k(Z), \qquad Z \in R^{P+1}$$

Assumimos que

$$(4.40) \quad 0 < \lambda_o \leq \lambda_N^{(k)} = \frac{n_k}{N} \leq 1 - \lambda_o < 1 \left(0 \leq \lambda_o \leq \frac{1}{c} \right);$$

$$k = 1, \ldots, c.$$

Seja

$$E_{N,\alpha}^{(i)} = \bar{j}_N^{(i)} \left(\frac{\alpha}{N+1} \right) \text{ se } 1 \leq \alpha \leq N, \quad i = 1, \ldots, p+q$$

onde

$$(4.41) \quad \bar{j}_N^{(i)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) = \begin{cases} j_N^{(i)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) & \text{se } 1 \leq \alpha \leq N;\ i = 1, \ldots, p \\ j_N^{*(i-p)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) & \text{se } 1 \leq \alpha \leq N,\ i = p+1, \ldots, p+q \end{cases}$$

satisfaz as condições de Chernorff-Savage (1958) que são:

(4.42) $\lim_{N \to \infty} \bar{j}_{N(i)}(\mu) = \bar{j}_{(i)}(\mu)$; $0 < \mu < 1$, existe e é finito, $i = 1, \ldots, p+q$; $\bar{j}^{(i)} = j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$ e $\bar{j}^{(i)} = j^{*(i)}$, $i = p+1, \ldots, p+q$.

$$(4.43)\quad \bar{T}^{(k)}_{N,i} - \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \bar{j}^{(i)} \left(\frac{\bar{R}^{(k)}_{i\alpha}}{N+1} \right) = \theta_p^{(1)} \;;$$

$k = 1, \ldots, c;\; i = 1, \ldots, p+q$ onde

$$\bar{T}^{(k)}_{N,i} = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \bar{j}^{(i)}_N \left(\frac{\bar{R}^{(k)}_{i\alpha}}{N+1} \right)$$

$$\bar{R}^{(k)}_{i\alpha} = S^{(i)}_{k\alpha} \;;\; i = 1,\ldots,p \;;\; \bar{R}^{(k)}_{i\alpha} = R^{(i-p)}_{k\alpha} \quad i = p+1, \ldots, p+q.$$

(4.44) $\bar{j}^{(i)}$ é absolutamente contínua em μ ; $0 < \mu < 1$ e

$$(4.45)\quad \left| \frac{\delta^r}{\delta \mu} \bar{j}^{(i)} (\mu) \right| \leq K \{ \mu (1-\mu) \}^{-r-\frac{1}{2}+\delta}$$

para $r = 0, 1, 2$ onde $\delta > 0$, k ($k > 0$) são constantes independentes, $i = 1, \ldots, p+q$.

$$(4.46)\quad \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \bar{j}^{(i)}_N \left(\bar{R}^{(k)}_{i\alpha} \right) \bar{j}^{(j)}_N \left(\bar{R}^{(k)}_{j\alpha} \right) - \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} \bar{j}^{(i)} \left(\frac{\bar{R}^{(k)}_{i\alpha}}{N+1} \right) \cdot$$

$$\cdot\; \bar{j}^{(j)} \left(\frac{\bar{R}^{(k)}_{j\alpha}}{N+1} \right) = \theta_p^{(1)} \;,\; i,j = 1, \ldots, p+q \;;$$

$k = 1, \ldots, c.$

Consideraremos também a matriz $v(H)$, abaixo definida, como sendo positiva definida. Definamos

$$v_{ii}(H) = v_{ii} = \int_0^1 \left[\bar{j}^{(i)}(\mu) \right]^2 d\mu - \mu_i^2 \quad ;$$

$$\bar{\mu}_i = \int_0^1 \bar{j}^{(i)}(\mu)\, d\mu$$

$$v_{ij}(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{j}^{(i)}(H_{[i]}(x))\, \bar{j}^{(j)}(H_{[j]}(y)) \,.$$

$$.\, d\, H_{[i,j]}(x, y) - \mu_i \quad \mu_j \quad \text{para } i,j = 1, \ldots, p+q$$

(4.47) $$v(H) = \left(v_{ij}(H) \right)_{i,j = 1, \ldots, p+q}$$

Note que

$$\bar{\mu}_i = \begin{cases} \mu_i = \int_0^1 j^{(i)}(\mu)\, d\mu \,, & i = 1, \ldots, p \\ \mu_i^* = \int_0^1 j^{*(i-p)}(\mu)\, d\mu \,, & i = p+1, \ldots, p+q. \end{cases}$$

Definamos também

$$\bar{E}_N^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E_{N,\alpha}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} j_N^{(i)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right); \; i=1,\ldots,p$$

$$\bar{E}_N^{*(i)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E_{N,\alpha}^{*(i)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} j_N^{*(i)}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right) = \bar{E}_N^{(i)}$$

$$i = p+1, \ldots, p+q$$

$$v_{ij,11} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E^{(i)}_{N,\, S^{(i)}_{k\alpha}} \cdot E^{(j)}_{N,\, S^{(j)}_{k\alpha}} -$$

$$- \bar{E}^{(i)}_{N} \; \bar{E}^{(j)}_{N} \quad \text{para } i,j = 1,\ldots, p \; ; \; V_{11} = ((v_{ij,11}))$$

$$v_{ij,22} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E^{*(i)}_{N,\, R^{(i)}_{k\alpha}} \cdot E^{*(j)}_{N,\, R^{(j)}_{k\alpha}} -$$

$$- \bar{E}^{*(i)}_{N} \; \bar{E}^{*(j)}_{N} \quad \text{para } i,j = p+1,\ldots, p+q$$

$$V_{22} = ((v_{ij,22}))$$

$$v_{ij,12} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E^{(i)}_{N,\, S^{(i)}_{k\alpha}} \cdot E^{(j)}_{N,\, R^{(j)}_{k\alpha}} -$$

$$- \bar{E}^{(i)}_{N} \; \bar{E}^{*(j)}_{N} \quad \text{para } i = 1, \ldots, p; \; j = p+1,\ldots,p+q$$

$$V_{12} = ((v_{ij,12}))$$

e

$$(4.48) \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V'_{12} & V_{22} \end{pmatrix}$$

Seja J_N a probabilidade (condicional) gerada pelas $N!$ permutações igualmente prováveis de R_N, conforme racio-

cínio da secção 3.1.1 (ou de acordo com Puri (1964). Usando os resultados da seção 3.2 temos que :

$$E\left(L_{N_i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)} \,/\, J_N \right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$E\left(T_{N_i}^{(k)} - \bar{E}_N^{*(i)} \,/\, J_N \right) = 0 \qquad i = p+1, \ldots, p+q$$

$$\mathrm{Cov}\left(L_{N_i}^{(k)}, L_{Nj}^{(k)} \,/\, J_N \right) = \frac{\left(\delta_{k\ell} N - n_k \right) v_{ij,11}}{n_k \left(N - 1 \right)}$$

$$i,j = 1, \ldots, p$$

$$\mathrm{Cov}\left(T_{N_i}^{(k)}, T_{N\,j}^{(k)} \,/\, J_N \right) = \frac{\left(\delta_{k\ell} N - n_k \right) v_{ij,22}}{n_k \left(N - 1 \right)}$$

$$i,j = p+1, \ldots, p+q$$

$$\mathrm{Cov}\left(L_{N_i}^{(k)}, T_{N\,j}^{(\ell)} \,/\, J_N \right) = \frac{\left(\delta_{k\ell} N - n_k \right) v_{ij,12}}{n_k \left(N - 1 \right)}$$

$$i = 1,\ldots,p \; ; \; j = p+1,\ldots, q$$

onde $\delta_{k\ell}$ é o delta de Kronecker.

Procedendo como (4.31) nos obtemos os escores ajustados para as c amostras como

$$(4.49) \quad L_N^* = L_N - \bar{E}_N + V_{12} \, V_{22}^{-1} \left[T_N - \bar{E}_N^* \right]$$

$L_N = ((L_{N,i}^{(k)}))$; $L_N^* = ((L_{N,i}^{*(k)}))$ são matrizes de ordem p x c.

$$\bar{E}_N = ((\bar{E}_N^{(i)})) = \begin{pmatrix} \bar{E}_N^{(1)} & , \dots , & \bar{E}_N^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{E}_N^{(p)} & , \dots , & \bar{E}_N^{(p)} \end{pmatrix}_{p \times c}$$

$$\bar{E}_N^* = ((\bar{E}_N^{*(i)})) = \begin{pmatrix} \bar{E}_N^{*(p+1)} & , \dots , & \bar{E}_N^{*(p+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{E}_N^{*(p+q)} & , \dots , & \bar{E}_N^{*(p+q)} \end{pmatrix}_{q \times c}$$

$$T_N = ((T_{N,i}^{(k)}))_{q \times c}$$

Se a distribuição fosse normal $V_{11} - V_{12} V_{22}^{-1} V_{12}'$ seria a Cov (L_N^* , L_N). Note que Cov (L_N^* , $V_{12} \cdot V_{22}^{-1} \cdot (T_N - \bar{E}_N^*)$) = 0. Usaremos

$$(4.50) \quad V_{11,22} = V_{11} - V_{12} V_{22}^{-1} V_{12}'$$

para construir nosso teste para H_o. Proporemos a estatística

$$(4.51) \quad \mathcal{L}_N = \sum_{k=1}^{c} n_k L_{N,k}^{*'} V_{11.22}^{-1} L_{n,k}^*$$

onde $L^*_{N,k}$ é a k - ésima coluna de L^*_N ; k = 1, ..., c.

Note que quando p = 1, a estatística acima é aquela considerada na parte A. A distribuição permutacional de $\mathcal{L}_N$ não depende da f.d.a. quando H_o é válida, então a distribuição permutacional de $\mathcal{L}_N$ é livre de distribuição sob H_o. Para pequenas amostras o cálculo da distribuição de $\mathcal{L}_N$, sob a distribuição condicional, é razoável. Mas quando temos grandes amostras este cálculo torna-se trabalhoso. Por esta razão veremos a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$.

a) Teste Permutacional para Grandes Amostras Baseado em $\mathcal{L}_N$.

Suporemos que $\bar{j}_N^{(i)}$, i = 1, ..., p + q satisfazem as condições 4 de Puri & Sen (1969) (ou condições (4.40),(4.42), (4.43),(4.44), (4.45), (4.46) e v (H) positiva definida).

<u>Teorema 4.5</u>

Sob as condições acima citadas a estatística $\mathcal{L}_N$ definida por (4.51) tem assintóticamente, (sob permutação J_N) uma distribuição qui-quadrado com p (c-1) graus de liberdade.

<u>Demonstração</u>

Como $\bar{j}_N^{(i)}$ satisfaz as condições (4.40), (4.42), (4.43), (4.44) e (4.45)

a) Pelo Teorema 3.2

$V(R_N) \overset{p}{\sim} V(H)$, isto é são assintóticamente equivalentes.

b) Pelo Teorema 3.1, a distribuição conjunta de

$$\left\{ \bar{T}_{N_i}^{(k)} - \underline{E}_N^{(i)} \; ; \quad i = 1, \ldots, p+q; \; k = 1, \ldots, c-1 \right\}$$

é assintóticamente a de uma $(q+p)\cdot(c-1)$ normal com média zero (sob J_N).

Deste modo $\left\{ \left(L_{N,i}^{*(k)} \right), \; i = 1, \ldots, p \; ; \; k = 1, \ldots, c-1 \right\}$

é assintóticamente uma $p\cdot(c-1)$ normal com média zero.

Como $V(R_N) \xrightarrow{p} V(H)$, $V_{11.22} \xrightarrow{p} H_{11.22}$

onde $H_{11.22}$ é definido do mesmo modo que $V_{11.22}$, usando $\bar{j}^{(i)}$. Podemos então concluir que

$$\mathcal{L}_N \xrightarrow{D} \chi^2_{p(c-1)}$$

(ou usando o teorema 4.1 de Puri & Sen (1969) ou usando o teorema 3.2).

$\square$

Pelo teorema acima, para grandes amostras, podemos usar o teste :

Se $\mathcal{L}_N > \chi^2_{p(c-1),\varepsilon}$ rejeitamos H_o de outra maneira aceitamos H_o, onde $\chi^2_{p(c-1),\varepsilon}$

é o limite superior de $(100\ \varepsilon)\%$ de uma $\chi^2_{p(c-1)}$.

Estudaremos agora a distribuição assintótica de $\mathcal{L}_N$, sob uma sequência de alternativas $\{ K_n \}$ definida por

$$(4.52)\quad K_N : \tau_k = \tau_{kN} = N^{-\frac{1}{2}}\ \theta_k\ ,\quad k = 1, \ldots, c$$

onde $\theta_k = (\theta_{k1}, \ldots, \theta_{kp})$, $k = 1, \ldots, c$. Para isto teremos que estudar a convergência assintótica de L_N^*, ou de L_N e T_N sob as alternativas (4.52)

Assumiremos inicialmente que

$$(4.53)\quad \lim_{N \to \infty} \lambda_N^{(k)} = \lim_{N \to \infty} \frac{n_k}{N} = \lambda^{(k)},\quad 0 < \lambda^{(k)} < 1,\ k=1,\ldots,c.$$

Seja $G(Z)$ a distribuição comum de $Z_{k\alpha} = (Y_{k\alpha}, X_{k\alpha})'$ sob a H_o (4.35) e $G_{[1]}, \ldots, G_{[p]}$ a f.d.a. marginal das p Y- variáveis correspondendo a conjunta G.

Assumiremos também que as distribuições marginais são absolutamente contínuas e os seguintes resultados valem :

$$(4.54)\quad B^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\ j^{(i)} (G_{[i]}(x))\ d\, G_{[i]}(x)\ ,\quad i = 1,\ldots,p$$

$$v_{ii.11} = \int_0^1 \left[j^{(i)}(\mu) \right]^2 d\mu - \mu_i^2\ ;\ \mu_i = \int_0^1 j^{(i)}_{(\mu)}\ d\mu$$

$$v_{ij.11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{(i)} \left(G_{[i]}(x) \right) j^{(j)} \left(G_{[j]}(y) \right) .$$

$$. \, d G_{[i,j]}(x, y) - \mu_i \, \mu_j .$$

onde $G_{[i,j]}$ é a f.d.a. marginal da (i, j) Y- variável correspondente a f.d.a. G, $i \neq j = 1, \ldots, p$.

$$v_{ii.22} = \int_0^1 \left[j^{*(i)}(\mu) \right]^2 d\mu - \mu_i^{*2}$$

$$\mu_i^* = \int_0^1 j^{*(i)}(\mu) \, d\mu \, , \; i = 1, \ldots, q.$$

$$v_{ij.22} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{*(i)} \left(G_{[i]}(y) \right) .$$

$$. \, j^{*(j)} G_{[j]}(y)) \, d G^*_{[i,j]}(x, y) - \mu_i^* \, \mu_j^* \, ,$$

$$i \neq j = 1, \ldots, q$$

onde $G^*_{[i]}$ e $G^*_{[i,j]}$ são as f.d.a. marginais da i - ésima X - variável correspondendo a f.d.a. comum G, $i \neq j = 1, \ldots, q$.

$$v_{ij.12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{(i)} \left(G_{[i]}(x) \right) j^{*(j)} \left(G^*_{[j]}(y) \right) .$$

$$\cdot \; d\, G^{**}_{[i,j]}(x, y) - \mu_i \; \mu_j^{*} ,$$

onde $G^{**}_{[i,j]}(x, y)$ é a distribuição conjunta da i - ésima Y-variável e j - ésima X - variável correspondendo a f.d.a. comum G, i = 1, ..., p; j = 1, ..., q.

$$(4.55) \qquad v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v'_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \; ; \quad v_{rs} = ((v_{ij.rs})) \quad r, s = 1 , 2$$

e

$$(4.56) \qquad v_{11} = v_{11} - v_{12} \cdot v_{22}^{-1} \cdot v'_{12}$$

<u>Teorema 4.6</u>

Sob as condições (4.40), (4.42), (4.43), (4.44), (4.45), (4.46), v (H) positiva definida, (4.52), (4.53) e (4.54) a estatística $\mathcal{L}_N$ definida por (4.51) tem assintóticamente uma distribuição $\chi^2_{p(c-1), \Delta_{\mathcal{L}}}$ onde o parâmetro de não centralidade é dado por

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\eta_k - \bar{\bar{\eta}}) \, v_{11.22}^{-1} \cdot (\eta_k - \eta)' ,$$

onde

$$\eta_k = (\eta_{k1}, \ldots, \eta_{kp}) \; ; \; \eta_{ki} = \theta_{ki} B^{(i)} \; ;$$

$$i = 1, \ldots, p; \; K = 1, \ldots, c$$

e $$\bar{\eta} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} \eta_k \, .$$

<u>Demonstração</u>

Do teorema - 3.3 segue que sob as condições do enunciado

$$(N^{\frac{1}{2}} (L_{N,i}^{(k)} - \mu_{Ni}^{(k)} , T_{N,j}^{(k)} - \mu_{Nj}^{*(k)}) \; ; \; i = 1, \ldots, p; \; j = 1, \ldots, q;$$

$k = 1, \ldots, c$) tem (conjuntamente) uma distribuição limite multinormal com média zero e matriz de covariância Σ definida no Teorema (3.3). Deste modo

$$(N^{\frac{1}{2}} (L_{N,i}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)}, T_{N,j}^{(k)} - \bar{E}_N^{*(j)}) \; , \; i = 1, \ldots, p \; ; \; j = 1,$$

$, \ldots, q, \; k = 1, \ldots, c$) tem uma distribuição multinormal com médias

$$((\mu_i^{(k)} , \mu_j^{*(k)}) \quad i = 1, \ldots, p \; ; \; j = 1, \ldots, q; \; k = 1, \ldots, c)$$

onde

$$\mu_i^{(k)} = \lim_{N \to \infty} (\mu_{Ni}^{(k)} - \bar{E}_N^{(i)}) = \eta_i^{(k)} - \bar{\eta}$$

$$i = 1, \ldots, p \; ; \; k = 1, \ldots, c$$

$$\mu_j^{*(k)} = \lim_{N \to \infty} \left(\mu_{Ni}^{*(k)} - \bar{E}_N^{*(j)} \right) = 0$$

e mesma matriz de covariância.

Notemos agora que $L_{N,k}^{*(i)}$ é uma combinação linear de $T_{N,k}^{(j)}$; $j = 1,\ldots, q$; $i = 1,\ldots,p$, $k = 1,\ldots,c$ e sob as condições estabelecidas concluimos que (Para detalhes vide Puri & Sen (1966)

$$v(H) \xrightarrow{D} v(G) \quad \text{com} \quad N \to \infty$$

$$V(R_N^*) \overset{p}{\sim} v(H) \quad \text{com} \quad N \to \infty$$

Das duas convergências acima tiramos que

$$V_{11.22} \longrightarrow v_{11.22}$$

Deste modo

$$\left(\left(N^{\frac{1}{2}} L_{N,k}^{*(i)} , k = 1, \ldots,c ; \; i = 1,\ldots,p \right) \right)$$

tem assintoticamente uma distribuição normal com vetor médio $(\eta_k^{(i)} - \bar{\eta})$, $k = 1,\ldots,c$; $i = 1,\ldots,p$ e matriz de dispersão $v_{11.22}$.

Assim sob as condições do teorema, $\mathcal{L}_N$ (4.51) tem uma distribuição assintótica qui-quadrado com $p(c-1)$ graus de li-

berdade e parâmetro de não centralidade

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\eta_k - \bar{\eta}) v_{11.22}^{-1} (\eta_k - \eta)'$$

b) Eficiência Assintótica dos Testes Propostos

Se não considerarmos as covariáveis e considerarmos a estatística da ordem dos postos baseada somente na estatística $L_{N,k}^{(1)}$; $i = 1, \ldots, p$; $k = 1, \ldots, c$ os resultados da seção 3.2 (ou de Puri & Sen (1966) continuam válidos. O correspondente teste estatístico para esta situação é :

$$(4.57) \quad \mathcal{L}_N^{o} = \sum_{k=1}^{c} \eta_k (S_{N,k} - \bar{E}_N) V_{11}^{-1} (S_{N,k} - \bar{E}_N)'$$

onde

$\bar{E}_N = (\bar{E}_N^{(1)}, \ldots, \bar{E}_N^{(c)})$ e $S_{N,k}$ é a k - ésima ma coluna de L_N, usado em (4.49). Pelo Teorema 5.7 e sob a alternativa (4.52)

$$\mathcal{L}_N^{o} \xrightarrow{D} \chi^2_{p(c-1), \Delta_{\mathcal{L}^o}}$$

onde

$$\Delta_{\mathcal{L}^o} = \sum_{k=1}^{c} \lambda^{(k)} (\eta_k - \bar{\eta}) v_{11}^{-1} (\eta_k - \bar{\eta})'$$

com os $\eta^{(k)}$ e $\bar{\eta}$ anteriormente definidos. Deste modo a E.R.A. do teste MANOCA ($\mathcal{L}_N$) com respeito ao teste

MANOVA ($\mathcal{L}^{o}_{N}$) é dado por

$$\varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}} = \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \mathcal{L}^{o}}$$

a qual depende de $\theta_1, \ldots, \theta_c$ da distribuição G.

Mostremos que $\varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}}$ é limitada abaixo por 1, uniformemente em $\theta_1,\ldots,\theta_c$ e G, isto é, o teste MANOCA é superior ao correspondente teste MANOVA. Pelo teorema de Courant aplicado a $(\varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}})^{-1}$ temos :

$$\sup_{\theta_1\ldots,\theta_c} (\varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}})^{-1} = C_{max} \left[v_{11}^{-1} \; v_{12} \right]$$

onde C_{min} (C_{max}) é a menor (maior) raiz característica da matriz entre colchetes. Assim por (4.56)

$$C_{max} \left[v_{11}^{-1} \; v_{11.2} \right] = C_{max} \left[v_{11}^{-1} \{ v_{11} - v_{12} \; v_{22}^{-1} \; v_{21} \} \right] =$$

$$= C_{max} \left[I_{q1} - v_{11}^{-1} \{ v_{12} \; v_{22}^{-1} \; v_{21} \} \right] \leq 1$$

pois $v_{11}^{-1} \{ v_{12} \; v_{22}^{-1} \; v_{22} \}$ é positiva semi-definida.

Deste modo

$$\inf_{\theta_1,\ldots,\theta_c} \varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}} = \frac{1}{\sup_{\theta_1,\ldots,\theta_c} (\varepsilon_{\mathcal{L},\mathcal{L}^{o}})^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{C_{max}\left[v_{11}^{-1} \quad v_{12} \right]} \geq 1$$

4.2.2 - Análise de Covariância Multivariada Utilizando Ordenação Após Alinhamento

Sejam N ($= n\,c$) $(q+p)$-vetores estocásticos

$$Z_{k\alpha} = (Y_{k\alpha} , X_{k\alpha})' , \quad k = 1,\ldots,c \; ; \; \alpha = 1, \ldots, n.$$

onde

$$Y_{k\alpha} = (Y_{k\alpha}^{(1)} ,\ldots, Y_{k\alpha}^{(p)}) \; ; \; X_{k\alpha} = (X_{k\alpha}^{(1)} , \ldots, X_{k\alpha}^{(q)})$$

com $p, q \geq 1$, como antes definido e

$$Z_\alpha = (Z_{1\alpha} , \ldots, Z_{c\alpha}) \qquad \alpha = 1, \ldots, n$$

com uma f.d.a. contínua $G_\alpha(Z)$, $Z \in R^{c(p+q)}$.

Assumiremos que a f.d.a. conjunta de $X_\alpha = (X_{1\alpha},\ldots, X_{c\alpha})$ é simétrica sobre os seus c q-vetores, $\alpha = 1, \ldots, n$.

Seja a hipótese nula (H_o) que estabelece

(4.58) H_o: A f.d.a. de $(Y_\alpha = (Y_{1\alpha},\ldots , Y_{c\alpha})/ X_\alpha = x_\alpha)$ $\alpha = 1, \ldots, n$, é simétrica nos seus c p-vetores, e a hipótese alternativa considerada é sob um conjunto de pos-

síveis translações (efeitos devidos aos c tratamentos). Note que sob H_o (4.58) G_α (Z) é simétrica nos seus c (q + p)-vetores $\alpha = 1,\ldots,n$.

Consideremos as observações alinhadas

$$(4.59)\quad Z^*_{k\alpha} = Z_{k\alpha} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{c} Z_{k\alpha}\ ;\quad k = 1,\ldots,c;\ \alpha = 1,\ldots,n.$$

$$(4.60)\quad Z^*_\alpha = (Z^*_{1\alpha},\ \ldots,\ Z^*_{c\,\alpha}),\qquad \alpha = 1,\ldots,n.$$

$$(4.61)\quad Z^*_N = (Z^*_{11},\ \ldots,\ Z^*_{c\,n}).$$

Note que Z^*_N é uma matriz $(p+q)\times N$ e para esta Z^*_N definiremos R_N como em (4.37), $L^{(k)}_{N,i}$ e $T^{(k)}_{N\,j}$ como em (4.38) e (4.39) respectivamente, e V_N (R_N) de ordem $(p+q)\times(p+q)$ como em (4.48), L^*_N como em (4.49) e $V_{11.22}$ como em (4.50) . Deste modo um teste estatístico para H_o é

$$(4.62)\quad \mathcal{L}_N = n\sum_{j=1}^{p} L^{*\prime}_{N,k}\ V^{-1}_{11.22}\ L^*_{N,k}\ .$$

onde $L^*_{N,k}$ é a k - ésima coluna de L^*_N , $k = 1,\ldots,c$.

Sob a medida condicional $\mathcal{P}_n$ da seção 3.24, $V_{11.22}$ é invariante, enquanto que ($L^*_{N,1}$, ... , $L^*_{N,c}$) pode ter, sob $\mathcal{P}_n$, $(c!)^n$ realizações igualmente prováveis

(não necessariamente distintas). Podemos usar estes fatos para construir um teste, sob $\mathcal{P}_n$. Isto é, usar estes fatos para construir um teste, sob $\mathcal{P}_n$, baseado em $\mathcal{L}^*_N$, livre de distribuição, para H_o.

Usando o Teorema 3.20, conclui-se que $\mathcal{L}^*_N$ tem assintóticamente (e sob $\mathcal{P}_n$) uma distribuição $\chi^2_{(c-1)p}$.

Escrevamos agora $Z^*_i = (Y^*_i, X^*_i) = (Y^*_{1i},\ldots,Y^*_{ci}, X^*_{1i}, \ldots, X^*_{ci})$. De acordo com o suposto para X_i, X^*_i contínua simétrica sobre seus c q-vetores.

Esbocemos agora os resultados sobre a distribuição assintótica de $\mathcal{L}^*_N$ sob a alternativa.

$$(4.63) \quad H_N : G_\alpha(Z) = G_{\alpha,N}(Z) = G_\alpha(y - N^{-\frac{1}{2}}\tau, x) \; ; \; \alpha = 1,\ldots,n.$$

onde $\tau = ((\tau_{jk}))$ é o vetor c p dos efeitos devido a tratamentos e $G_\alpha(Z) = G_\alpha(x, y)$, $x \in R^{p \times c}$, $y \in R^{c.q}$.

A f.d.a. da k - ésima variável primária, correspondente a f.d.a. G_α é simbolizada por $G_{\alpha[k]}$; $k = 1,\ldots, p$; $\alpha = 1,\ldots, n$.

Suporemos que $\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} G_{\alpha[k]} \xrightarrow{n \to \infty} G_{[k]}$, para $k = 1, \ldots, c$ e a função densidade correspondente a $G_{[k]}$ é

assumida ser contínua.

Procedendo como na secção 3.2.4-B e pelo Teorema 3.23 podemos concluir que

$$(4.64) \quad \text{Sob } \{ H_N \} \ (4.63) \ , \ \mathcal{L}_N^{*} \xrightarrow{D} \chi^2_{p(c-1),\, \Delta_{\mathcal{L}^*}}$$

onde $\Delta_{\mathcal{L}^*} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{k'=1}^{p} \gamma^{kk'}_{11.22} \sum_{j=1}^{p} \eta_{j_k} \eta'_{j_k}$ "

onde $\eta_{j_k} = \frac{1}{p} B (F^{(k)})$, $\gamma = (v_{kk'})_{k,k'=1,\ldots,c}$ como definido para o Teorema 3.23, com

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \gamma_{11} \text{ é } p \times p & \gamma_{12} \text{ é } p \times q \\ \gamma_{22} \text{ é } q \times q & \gamma_{21} \text{ é } q \times p \end{matrix}$$

$$\gamma_{11.22} = \gamma_{11} - \gamma_{12} \gamma_{22}^{-1} \gamma_{21} \quad \text{e} \quad \gamma^{-1}_{11.22} = (\gamma^{kk'}_{11.22}) .$$

A E.R.A. entre os testes MANOCA e MANOVA baseados na ordenação após alinhamento é

$$(4.65) \quad \frac{\Delta_{\mathcal{L}^*}}{\Delta_{\mathcal{L}}} = \gamma^{-1}_{11} \gamma_{11.22} .$$

Pela definição (4.65) , vemos que as raízes características de $\gamma^{-1}_{11} \gamma_{11.22}$ são limitadas abaixo por 1 (raciocínio já feito anteriormente usando teorema de Courant),

deste modo a E.R.A acima é maior ou igual a 1.

4.2.3 - Testes simultâneos para contrastes, utilizando a ordem dos Postos, em Análise de Covariância Multivariada

Sejam $Z_\alpha^{(k)} = (Y_\alpha^{(k)} , X_\alpha^{(k)}) = (Y_{1\alpha}^{(k)} , \ldots, Y_{p\alpha}^{(k)}, X_{1\alpha}^{(k)}, \ldots ,$

$X_{q\alpha}^{(k)})$ $\alpha = 1,\ldots, n_k$ vetores aleatórios i.i.d. com f.d.a. contínua $\P_k (Z)$, $Z \in R^{p+q}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, $k = 1,\ldots,c$.

$N (= \sum_{k=1}^{c} n_k)$ é o número de vetores estocásticos independentes.

A f.d.a. da q - variável $X_\alpha^{(k)}$ é denotada por $G_k (x)$, $x \in R^q$ e a f.d.a. $(Y_\alpha^{(k)} / X_\alpha^{(k)} = x)$ será representada por $F_k (y / x)$, $y \in R^p$, $x \in R^q$, $k = 1, \ldots, c$.

O nosso modelo básico é

(4.66) $G_k (x) = G (x)$; $F_k (y / x) = F (y - \tau_k / x)$; $k = 1,\ldots, c$

onde F e G são f.d. acumuladas contínuas e $\tau_1,\ldots, \tau_c$ são os efeitos devido a tratamentos, p - vetores desconhecidos.

Testes para

(4.67) H_o : $\tau_1 = \ldots = \tau_c = 0$ versus H_1 : Existe pelo menos um k tal que $\tau_k \neq 0$, $1 \leq k \leq c$

são tratados nos parágrafos anteriores. Estamos agora interessados em testes simultâneos para contrastes em $\tau_1, \ldots, \tau_c$. Estenderemos os resultados de Puri & Sen (1970) (ou capítulo 7 de Puri & Sen (1971) ou resumo da seção 3.1.3 e 3.2.5) sobre estimativas de contrastes baseados na ordem dos postos em MANOVA para o problema de MANOCOVA. Iniciemos, então, este trabalho.

Considere o par (k, ℓ) de amostras e seja $n_{k\ell} = n_k + n_\ell$, para $1 \leq k < \ell \leq c$. Seja $R_{i,\alpha}^{(k,\ell)}$ o posto de $Y_{i\alpha}^{(k)}$ sobre as $n_{k\ell}$ observações $Y_{i1}^{(k)}, \ldots, Y_{in_k}^{(k)}$, $Y_{i1}^{(\ell)}, \ldots, Y_{in_\ell}^{(\ell)}$ para $\alpha = 1, \ldots, n_k$; $1 \leq i \leq p$ e seja $S_{i,\alpha}^{(k,\ell)}$ o posto de $X_{i\alpha}^{(k)}$ sobre as $n_{k\ell}$ observações

$X_{i1}^{(k)}, \ldots, X_{in_k}^{(k)}, X_{i1}^{(\ell)}, \ldots, X_{in_\ell}^{(\ell)}$ $\alpha = 1, \ldots, n_k$; $i = 1, \ldots, q$ para $1 \leq k < \ell \leq c$.

Tomemos agora $(p + q)$ conjuntos de escores formados por,

(4.68) $$j_{n_{k\ell}}^{(i)}\left(\frac{\alpha}{n_{k\ell}+1}\right)$$

$\alpha = 1, \ldots, n_{k\ell}$; $i = 1, \ldots, p$, escores da variável primária ,

$$(4.69) \qquad j^{*(j)}_{n_{k\ell}}\left(\frac{\alpha}{n_{k\ell}+1}\right)$$

$$\alpha = 1,\ldots, n_{k\ell}\ ;\ j = 1,\ldots, q\ ,$$

escores da co-variável, definidos para cada par $(k\ \ell)$, $1 \leq k < \ell \leq c$.

Definiremos então as estatísticas

$$(4.70) \qquad T^{(i)}_{k\ell} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j^{(i)}_{n_{k\ell}}\left(\frac{R^{(k,\ell)}_{i,\alpha}}{n_{k\ell}+1}\right)$$

$$i = 1,\ldots,p;\quad 1 \leq k < \ell \leq c.$$

$$(4.71) \qquad T^{*(j)}_{k\ell} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j^{*(j)}_{n_{k\ell}}\left(\frac{S^{(k,\ell)}_{j,\alpha}}{n_{k_\ell}+1}\right)$$

$$j = 1,\ldots,q\ ;\ 1 \leq k < \ell \leq c.$$

Em vez de trabalharmos com $Y^{(k)}_{i\alpha}$ e $Y^{(\ell)}_{i\alpha}$, trabalharemos com $Y^{(k)}_{i\alpha} - a$, $\alpha = 1,\ldots, n_k$ e $Y^{(\ell)}_{i\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n_\ell$. A estatística correspondente a (4.70) será denotada por $T^{(i)}_{k\ell}(a)$, $1 \leq k < \ell \leq c$, $i = 1,\ldots,p$ e $-\infty < a < \infty$.

Assumiremos que $j^{(i)}_{n_{k\ell}}(\mu)$ é crescente em μ, $0 < \mu < 1$, então

$$(4.72) \qquad T^{(i)}_{k\ell}(a) \quad \text{é decrescente em } a, \quad \infty < a < \infty\ .$$

Calcularemos agora o posto das observações de cada coordenada, dentro de cada amostra.

Seja $R^{*(k)}_{i\alpha}$ (ou $S^{*(k)}_{i,\alpha}$) o posto de $Y^{(k)}_{i\,\alpha}$ sobre $Y^{(k)}_{i1}, \ldots, Y^{(k)}_{in_k}$ (ou $X^{(k)}_{i\alpha}$ sobre $X^{(k)}_{i1}, \ldots, X^{(k)}_{in_k}$) para $i = 1, \ldots, p$ (ou $i = 1, \ldots, q$) e $k = 1, \ldots, c$.

Defina $j^{(i)}_{n_k}$, $i = 1, \ldots, p$ e $j^{*(j)}_{n_k}$, $j = 1, \ldots, q$

como em (4.68) e (4.69) respectivamente com $n_{k\ell}$ sendo trocado por n_q e seja,

$$(4.73) \quad v^{(k)}_{ij} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j^{(i)}_{n_k}\left(\frac{R^{*(k)}_{i,\alpha}}{n_k+1}\right) j^{(j)}_{n_k}\left(\frac{R^{*(k)}_{j,\alpha}}{n_k+1}\right) -$$

$$- \bar{j}^{(i)}_{n_k} \cdot \bar{j}^{(j)}_{n_k} \quad \text{para } i,j = 1, \ldots, p$$

onde

$$(4.74) \quad \bar{j}^{(i)}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j^{(i)}_{n_k}\left(\frac{\alpha}{n_k+1}\right); \; i = 1, \ldots, p$$

Analogamente,

$$(4.75) \quad v^{(k)}_{ij} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j^{*(i-p)}_{n_k}\left(\frac{S^{*(k)}_{(i-p),\alpha}}{n_k+1}\right) .$$

$$j_{n_k}^{*(i-p)} \cdot \left(\frac{S^{*(k)}_{(j-p),\alpha}}{n_k + 1} \right) - \bar{j}_{n_k}^{*(i-p)} \; \bar{j}_{n_k}^{*(j-p)}$$

$$i,j = p+1,\ldots, p+q$$

onde

$$(4.76) \quad \bar{j}_{n_k}^{*(i-p)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j_{n_k}^{*(i-p)} \left(\frac{\alpha}{n_k + 1} \right);$$

$$i = p+1,\ldots, p+q$$

$$(4.77) \quad v_{ij}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\alpha=1}^{n_k} j_{n_k}^{*(i)} \left(\frac{R^{*(k)}_{i,\alpha}}{n_k + 1} \right) \cdot$$

$$\cdot \; j_{n_k}^{*(j-p)} \; \frac{S^{*(k)}_{(1-p)\alpha}}{n_k + 1} - \bar{j}_{n_k}^{*(i)} \; \bar{j}_{n_k}^{*(j-p)} \;;$$

$$i = 1,\ldots,p; \; j = p+1,\ldots,q$$

$$(4.78) \quad V^{(k)} = ((v_{ij}^{(k)})) \qquad i,j = 1,\ldots,p+q, \qquad k = 1,\ldots, c$$

onde $v_{ij}^{(k)} = v_{ji}^{(k)}$ para todo i,j.

$$(4.79) \quad \bar{V}_N = \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{n_k}{N} \right) V^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{N,11} & , & \bar{V}_{N,12} \\ \bar{V}_{N,21} & , & \bar{V}_{N,22} \end{pmatrix}$$

onde $\bar{V}_{N,11}$, $\bar{V}_{N,12} = \bar{V}'_{N,21}$ e $\bar{V}_{N,22}$ são respectivamente de ordem $p \times p$, $p \times q$ e $q \times q$.

$$(4.80)\quad \bar{V}_N^* = \bar{V}_{N,11} - \bar{V}_{N,12}\,(\bar{V}_{N,22})^- \,\bar{V}_{N,21}$$

com $(\bar{V}_{N,22})^-$ sendo a inversa generalizada de $\bar{V}_{N,22}$.

Definiremos $\bar{j}^{(i)}_{n_{k\ell}}$; $i = 1,\ldots,p$ e $\bar{j}^{*(j)}_{n_{k\ell}}$, $j = 1,\ldots,q$

para $1 \leq k < \ell \leq c$ como em (4.74) com n_k sendo trocado por $n_{k\ell}$ e sejam

$$T_{k\ell}(\Theta) = (T^{(1)}_{k\ell}(a_1),\ldots,T^{(p)}_{k\ell}(a_p))' \,,\ 1 \leq k < \ell \leq c$$

$$\Theta = (a_1,\ldots,a_p).$$

$$T^*_{k\ell} = (T^{*(1)}_{k\ell},\ldots,T^{*(q)}_{k\ell})' \,,\ 1 \leq k < \ell \leq c$$

$$\bar{j}_{k\ell} = (\bar{j}^{(1)}_{k\ell},\ldots,\bar{j}^{(p)}_{k\ell})'$$

$$1 \leq k < \ell \leq c$$

$$\bar{j}^*_{k\ell} = (\bar{j}^{*(1)}_{k\ell},\ldots,j^{*(q)}_{k\ell})$$

$$(4.81)\quad T^o_{k\ell}(\Theta) = (T_{k\ell}(\Theta) - \bar{j}_{n_{k\ell}}) - \bar{V}_{N,12}\,(\bar{V}_{N,22})^- \,.$$

$$\cdot\,(T^*_{k\ell} - \bar{j}^*_{k\ell})$$

$$= (T^{o(1)}_{k\ell},\ldots,T^{o(p)}_{k\ell}) \,,\ 1 \leq k < \ell \leq c.$$

A estatística (4.81) é a estatística da ordem dos postos ajustada pela covariável, como definida em (4.49), com a única diferença de que sua matriz de covariância permutacional da amostra combinada $V_N = V$, definida em (4.48), é trocada aqui por $\bar{V}_N$, a média ponderada das matrizes de covariâncias da ordem dos postos, calculada dentro de cada amostra. Esta troca é feita com o objetivo de fazer o ajustamento da estatística pelas covariáveis, não afetadas por $\tau_1, \ldots, \tau_c$, em (4.81). V_N é invariante por translação, quando $\tau_1, \ldots, \tau_c$ não a afeta, isto é, quando a matriz de covariância permutacional da amostra combinada está sujeita a condição $\tau_1 = \ldots = \tau_c$, o que nem sempre acontece.

Com o mesmo raciocínio de 3.1.2 (ou capítulo 6 de Puri & Sen (1971) ou por Puri & Sen (1968)) definiremos

$$\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,1} = \inf \{ a : T^{o\,(i)}_{k\ell}(a) < 0 \}$$

$$\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,2} = \sup \{ a : T^{o\,(i)}_{k\ell}(a) > 0 \}$$

para $1 \leq k < \ell \leq c$, $i = 1, \ldots, p$ e propomos como estimador de $\Delta_{k\ell} = \tau_k - \tau_\ell$

$$\hat{\Delta}_{k\ell} = (\hat{\Delta}^{(1)}_{k\ell}, \ldots, \hat{\Delta}^{(p)}_{k\ell}) \qquad \text{onde}$$

$$\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,1} + \hat{\Delta}_{k\ell,2}\right)$$

Por convenção $\Delta_{kk} = \hat{\Delta}_{kk} = 0$, $k = 1,\ldots,c$ e $\Delta_{k\ell} = -\Delta_{\ell k}$ para $1 \leq k < \ell \leq c$.

De acordo com (3.1.2) (ou Puri & Sen (1968) ou Puri & Sen (1971)) o estimador compatível (ou ajustado) de $\Delta_{k\ell}$ é

$$(4.82)\quad \hat{\Delta}^{*}_{k\ell} = \hat{\Delta}_{k.} - \hat{\Delta}_{\ell.}\ ;\ \hat{\Delta}_{k.} = \frac{1}{c}\sum_{\ell=1}^{c} \Delta_{k\ell}\ ,\ 1 \leq k < \ell \leq c.$$

Seja $H_{(i)}(x)$ (e $G_{(j)}(x)$)) a f.d.a. marginal de $Y^{(k)}_{i\alpha} - \tau^{(i)}_{k}$ (e $X^{(k)}_{i\alpha}$) ; $i = 1,\ldots, p$ (e $j = 1,\ldots, q$) e sejam

$H^{(1)}_{(i,i')}(x,y)$; $H^{(2)}_{(i,j)}(x,y)$ e $G_{(j,j')}(x,y)$ as respectivas

f.d.a. conjuntas de

$$\left(Y^{(k)}_{i\alpha} - \tau^{(i)}_{k}\ ,\ Y^{(k)}_{i'\alpha} - \tau^{(i')}_{k}\right),\ \left(Y^{(i)}_{i\alpha} - \tau^{(i)}_{k}\ ,\ X^{(k)}_{j\alpha}\right) \quad \text{e}$$

$$\left(X^{(k)}_{j\alpha}\ ,\ X^{(k)}_{j'\alpha}\right) \quad \text{para } i\ (\neq i') = 1,\ldots,p;\ j\ (\neq j') = 1,\ldots,q.$$

Como anteriormente , definimos,

$$j^{(i)}_{(\mu)} = \lim_{n \to \infty} j^{(i)}_{(n)}(\mu) \; ; \; j^{*(j)}_{(\mu)} = \lim_{n \to \infty} j^{*(j)}_{n}(\mu)$$

para $0 < \mu < 1$; $i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$.

$$\mu_i = \int_0^1 j^{(i)}_{(\mu)} \, d\mu \; ; \; i = 1, \ldots, p \; ;$$

$$\mu^*_j = \int_0^1 j^{*(j)}_{(\mu)} \, d\mu \; ; \; j = 1, \ldots, q.$$

$$v_{ij,11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{(i)}(H_{(i)}(x)) \, j^{(j)}(H_{(j)}(x)) \, .$$

$$. \; d H^{(1)}_{(i,j)}(x, y) - \mu_i \, \mu_j \; ; \; i, j = 1, \ldots, p.$$

$$v_{ij,12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{(i)}(H_{(i)}(x)) \, j^{*(j)}(G_{(j)}(y)) \, .$$

$$. \; d H^{(2)}_{(i,j)}(x,y) - \mu_i \, \mu^*_j \; ; \; i = 1, \ldots, p \; ; \; j = 1, \ldots q.$$

$$v_{ij,22} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} j^{*(i)}(G_{(i)}(x)) \, j^{*(j)}(G_{(j)}(y)) \, .$$

$$. \; d G_{(i,j)}(x,y) - \mu^*_i \, \mu^*_j \; ; \; i, j = 1, \ldots, q \, .$$

$$(4.83) \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \quad ; \quad v_{11} = ((v_{ij,11})) \quad ;$$

$$v_{22} = ((v_{ij,22})) \text{ e } v_{12} = v_{21}' = ((v_{ij,12})) .$$

$$(4.84) \quad v^* = v_{11} - v_{12} \; \bar{v}_{22} \; v_{21} = ((v^*_{ij})) \quad i, j = 1,\ldots, p.$$

onde $\bar{v}_{22}$ é a inversa generalizada de v_{22}

$$(4.85) \quad \Gamma^* = ((\gamma^*_{ij})) = ((\frac{v^*_{ij}}{B_i B_j})) , \quad i,j = 1,\ldots, p.$$

onde

$$(4.86) \quad B_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \; j^{(i)} (H_{(i)} (x)) \; d H_{(i)}(x) \quad ; \; i=1,\ldots,p.$$

Finalmente consideremos o contraste

$$(4.87) \quad \phi (L) = \ell_1 \; 1 + \ldots + \ell_c \quad ; \quad L = (\ell_1, \ldots, \ell_c)' \perp . \perp (1,\ldots,1)' .$$

O estimador ajustado, invariante por translação de $\phi (L)$ é

$$(4.88) \quad \phi^* (L) = \ell_1 \hat{\Delta}_{1.} + \ldots + \ell_c \hat{\Delta}_c$$

onde $\hat{\Delta}_k$ é definido por (4.82) para qualquer $\ell \perp (1,\ldots,1)'$

Para estudar as propriedades assintóticas de $\phi^*(\mathbb{L})$, nós assumimos que, para $N \to \infty$

$$(4.89) \quad \frac{n_k}{N} \longrightarrow \lambda_k : \quad 0 < \lambda_k < 1, \text{ para } k = 1,\ldots, c.$$

Pelo Teorema 3.12

$$(4.90) \quad N^{\frac{1}{2}} (\phi^*(\mathbb{L}) - \phi(\mathbb{L}) \xrightarrow{D} N\left(0, \left(\sum_{k=1}^{c} \frac{\ell_k^2}{\lambda_i}\right) \Gamma^*\right)$$

De modo análogo, se nós temos r (≥ 1) contrastes linearmente independentes,

$$(4.91) \quad \phi(\mathbb{L}_s) = \sum_{k=1}^{c} \ell_{sk} \tau_k \quad ; \quad \mathbb{L}_s \perp (1,\ldots 1)', \; s = 1,.., r;$$

$$\mathbb{L}_s = (\ell s_1, \ldots, \ell s_c)'$$

e se definirmos,

$$(4.92) \quad C = ((C_{ss'})) \quad s,s' = 1,\ldots, r \quad ;$$

$$C_{ss'} = \sum_{k=1}^{c} \frac{\ell s_k \; \ell s'_k}{\lambda_k} \qquad s, s' = 1,\ldots, r$$

teremos,

$$(4.93) \quad \{ N^{\frac{1}{2}} (\phi^*(\mathbb{L}_s) - \phi(\mathbb{L}s)), \; 1 \leq s \leq r \} \xrightarrow{D}$$

$$\xrightarrow{D} N(0, C \otimes \Gamma^*)$$

onde $\otimes$ é o produto de Kronecker para duas matrizes.

Usaremos (4.90) e (4.92) para determinar um intervalo de confiança para $\phi(L)$, $L \perp (1,\ldots 1)'$, Para isso necessitaremos estimar a matriz desconhecida Γ^*. Façamos isto .

Chamaremos de

t_α : limite superior de 100 α % de confiança de uma N (0, 1)

$$\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,U} = \sup \left\{ a : T^{o\,(i)}_{k\ell}(a) > -t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left[\bar{v}^*_{N,ii} \cdot \frac{n_{k\ell}}{n_k\, n_\ell} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,L} = \inf \left\{ a : T^{o\,(i)}_{k}(a) < t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left[\bar{v}^*_{N,ii} \cdot \frac{n_{k\ell}}{n_k\, n_\ell} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\hat{B}^{(i)}_{k\ell} = \left[2\, t_{\frac{\alpha}{2}} \left(\bar{v}^*_{N,ii} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n_{k\ell}}{n_k \cdot n_\ell} \right) \left(\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,U} - \hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,L} \right)}$$

$$1 \leq k < \ell \leq c .$$

onde $\bar{v}^{*(k)}_{N,ii}$ é o elemento (i,i) da inversa generalizada de $\bar{V}^{*}_{N}$, definido em (4.80)

Note que $\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,U}$, $\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,L}$ e $\bar{V}^{*}_{N}$ são invariantes por translação, então $\hat{B}^{(i)}_{k\ell}$ é um estimador invariante por translação de $B_{(i)}$, dado por (4.86).

Pelo Teorema 3.2,

$$V^{(k)} = V^{(k)}_{N} \xrightarrow{P} \gamma \quad \text{com} \quad N \to \infty \text{, sob } J_N$$

então

$$\bar{V}_{N} \xrightarrow{P} \gamma \quad \text{com} \quad N \to \infty \text{, sob } J_N$$

e podemos concluir disto que $\bar{V}_{N} \xrightarrow{P} \gamma$ com $N \to \infty$, sob τ_N. Deste modo $\bar{v}^{*}_{N,ii} \xrightarrow{P} v^{*}_{ii}$ com $N \to \infty$, onde $\bar{v}^{*}_{N,ii}$ e v^{*}_{ii} são os elementos de localização (i, i) de $\bar{V}^{*}_{N}$ e γ^{*}, respectivamente.

Pelos argumentos usados na demonstração do Teorema 6.7.1 de Puri & Sen (1971), pode-se concluir que

$$(4.94)\qquad \frac{\left(\hat{2}\, t_{\frac{\alpha}{2}}\; v^*_{ii}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\dfrac{n_{k\ell}}{n_k \cdot n_\ell}\right)^{1/2}\left(\hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,U} - \hat{\Delta}^{(i)}_{k\ell,L}\right.} \xrightarrow{P} B_i$$

Se tomarmos

$$(4.95)\qquad \hat{B}^{(i)} = \binom{c}{2}^{-1} \sum_{1 \leq k < \ell \leq c} B^{(i)}_{k\ell} \quad ; \; i = 1, \ldots, p,$$

$\hat{B}^{(i)}$ é um estimador invariante por translação.

Podemos agora estimar Γ^* por

$$(4.96)\qquad \Gamma^*_N = \left(\left(\hat{\gamma}_{ij}\right)\right), \quad \hat{\gamma}_{ij} = \frac{v^*_{N,ii}}{\hat{B}^{(i)}\,\hat{B}^{(j)}} \; ; \; i,j = 1,\ldots,p.$$

Note que pelas convergências de $\bar{V}_N$ e $\hat{B}^{(i)}$ com $N \to \infty$,

$$(4.97)\qquad \hat{\Gamma}^*_N \xrightarrow{P} \Gamma^* \quad \text{com} \quad N \to \infty .$$

O espaço de todos possiveis contrastes $\phi(L)$, $L \perp (1,\ldots,1)'$ é gerado por um conjunto de $c-1$ contrastes linearmente independentes. Usando (4.91) com $r = c-1$, (4.88) e (4.90) concluimos que

$$(4.99)\qquad \lim_{N \to \infty} P\{ N^{\frac{1}{2}} \,|\, T'(\phi^*(L) - \phi(L))| \; [(T'\Gamma^*_N T) \; .$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{k=1}^{c} \frac{\ell_k^2}{\ell_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \leq \chi^2_{p(c-1),\alpha} \quad \text{para } L \perp (1,\ldots,1)'$$

$$T \neq 0 \} = 1 - \alpha$$

onde $\chi^2_{p(c-1),\alpha}$ é o limite superior de $(100\ \alpha)\%$ de confiança de uma qui-quadrado com $p(c-1)$ graus de liberdade. Isto nos dá um intervalo de confiança para $\phi\ (L)$.

A) - Procedimentos Para Testes Simultâneos

Procedimento I

Considere um conjunto de $r\ (\geq 1)$ contrastes linearmente independentes $\phi\ (L_s)$, $s = 1,\ldots, r$, como definido anteriormente e seja

(4.99) $H_s : \phi\ (L_s) = 0$ versus $A_s : \phi\ (L_s) \neq 0,\ s = 1,\ldots r$

(4.100) $H = H_1 \cap \ldots \cap H_r$ e $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$.

Definamos os estimadores ajustados $\phi^*\ (L_s)$, $s = 1,\ldots, r$ como em (4.88).

$$\phi_{N,s} = \frac{N}{c_{ss}} \left[\phi^*\ (L_s) \right]' \left[\hat{\Gamma}^*_N \right]^{-1} (\phi^*\ (L_s)),\ s = 1,\ldots,r$$

onde $\hat{\Gamma}^*_N$ é definido em (4.96) e c_{ss} em (4.92)

Como $\hat{\Gamma}^*_N \xrightarrow{p} \Gamma^*$, $N^{\frac{1}{2}} (\phi^* (L_s) - \phi (L_s)) \xrightarrow{D}$

$N (0, C_{ss} \Gamma^*)$, então $Q_{N,s} \xrightarrow{D} \chi^2_p$ sob H (4.100)

para $\forall s$ (Resultado de Krishnomorthy & Parthasarathy (1951). Deste modo existe um Q_α tal que

(4.101) $\lim_{N \to \infty} P \{ Q_{N,s} \leq Q_\alpha , \forall s = 1,\ldots,r / H \} \leq 1 - \alpha.$

O Q_α pode ser escolhido de tal maneira que,

$P (Q_{N,s} \geq Q_\alpha) \leq 1 - \sqrt[r]{1-(1-\alpha)} = 1 - \sqrt[r]{\alpha}$, sob H_s, para cada s , $s = 1,\ldots,r$.

Neste caso rejeitaremos Hs em favor de A_s, quando $Q_{N,s} > Q_\alpha$. De outra maneira aceitaremos H_s, $s = 1,\ldots,r$. A hipótese total H é aceita se e somente se $Q_{N,s} \leq Q_\alpha$ para todos s.

Os intervalos de confiança simultâneos para $t \phi (L_s)$, $t \neq 0$, associados com a probabilidade (4.101), com coeficiente de confiança $1 - \alpha$, assintóticamente,

(4.102) $$| T' (\phi^* (L_s) - \phi (L_s)) | \leq$$

$$\leq \left\{ \phi_\alpha C_{ss} (T' \hat{\Gamma}^*_N T) \frac{1}{N} \right\}^{\frac{1}{2}} ; \quad s = 1,\ldots,r; \; T \neq 0.$$

Procedimento II

Seja C_j o menor principal de C, incluindo as primeiras j linhas e colunas e escreva para $2 \leq j \leq r$,

$$(4.103) \quad C_j = \begin{pmatrix} C_{j-1} & C_{j-1} \\ C'_{j-1} & C_{jj} \end{pmatrix};$$

$$C^*_{jj} = C_{jj} - C'_{j-1} \, C^{-1}_{j-1} \, C_{j-1} \; ; \; j = 2, \ldots, r \text{ e } C^*_{11} = C_{11}$$

Definamos,

$$(4.104) \quad Z_1 = N^{\frac{1}{2}} \left[\phi^* (L_1) - \phi (L_1) \right]$$

$$(4.105) \quad Z_j = N^{\frac{1}{2}} \left[(\phi^* (L_1) - \phi (L_1)) , \ldots ,\right.$$

$$\left. , (\phi^* (L_{j-1}) - \phi (L_{j-1}) \right] \quad \text{para } j \geq 2$$

Por (4.93) podemos concluir que

$$Z_1 \xrightarrow{D} N (0 , C_{11} \; \Gamma^*_N)$$

$$(4.106) \quad (N^{\frac{1}{2}} (\phi^* (L_j) - \phi (L_j))) \xrightarrow{D} N (0, C_{ss} \, \Gamma^*)$$

$$Z_j \xrightarrow{D} N (0, C_{j-1} \otimes \Gamma^*_N) .$$

Pelos resultados (4.108) e (4.109) que colocaremos a seguir, podemos concluir :

$$(4.107) \quad \left(N^{\frac{1}{2}} (\phi^* (L_j) - \phi (L_j) / Z_j) \right) \xrightarrow{D}$$

$$N \left((C'_{j-1} C^{-1}_{j-1} \otimes I) Z_j , C^*_{jj} \Gamma^*_N \right) \text{ para } j = 2,\ldots,r.$$

Os resultados são :

$$(4.108) \quad \text{Se } X = (X_1 , X_2) \text{ é } N_p\left((\mu_1 , \mu_2) , \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right)$$

com $X_1 \sim N_r (\mu_1 , \Sigma_{11})$, $X_2 \sim N_{p-r} (\mu_2 , \Sigma_2)$

então a distribuição de X_2 / X_1 é

$$N_{p-r} (\mu_2 + \Sigma_{21} \Sigma^{-1}_{11} (X_1 - \mu_1) , \Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma^{-1}_{11} \Sigma_{12}) .$$

$$(4.109) \quad \text{Se } X'_N = (X'_{1N} , X'_{2N}) \xrightarrow{D} X' = (X'_1 , X'_2) \sim N_p (\mu , \Sigma)$$

$$\text{então } (X_{2N} / X_{1N}) \xrightarrow{D} (X_2 / X_1) .$$

Escrevamos agora

$$\eta_1 = \phi (L_1)$$

$$\eta_j = \phi (L_j) - (C'_{j-1} C^{-1}_{j-1} \otimes I) [\phi'(L_1),\ldots, ; \phi' (L_{j-1})] .$$

Uma outra maneira de escrever a hipótese H (4.100) é

(4.110) $$H = H_1^* \cap \ldots \cap H_r^*$$

onde

(4.111) $$H_j^* : \eta_j = 0, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, r.$$

Construamos inicialmente um procedimento simultâneo para testar H_j^*, $j = 1, \ldots, r$. Para isso seja

$$\eta_j^* = \phi^*(L_j) - (C'_{j-1} C_{j-1}^{-1} \otimes I)[\phi^*(L_1), \ldots, \phi^*(L_{j-1})]' \quad \text{para } j = 2, \ldots, r \quad \text{e}$$

$$\eta_1^* = \phi^*(L_1)$$

$$Q_{N,j}^* = \left(\frac{N}{C_{jj}^*}\right)((\eta_j^*)'(\hat{\Gamma}_N^*)^{-1}(\eta_j^*)) \quad j = 1, \ldots, r.$$

Por (4.93), (4.97) e (4.107) concluimos que sob H, $Q_{N,1}^*$, $\ldots$, $Q_{N,r}^*$ são assintóticamente independentes, tendo cada um uma distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. Usando este último resultado, concluimos que existe Q_α^* tal que

(4.112) $$\lim_{N \to \infty} P\{Q_{N,s}^* \leq Q_\alpha^* ; s = 1, \ldots, r / H\} = 1 - \alpha .$$

Construamos agora um procedimento simultâneo para H, testando sequencialmente $H_1^*, \ldots, H_r^*$. Expliquemos isto :

Se $Q_{N,1}^* > Q_\alpha^*$, rejeitar H_1^* e então H. Se isto não ocorrer passar para H_2^*. Se $Q_{N,2}^* > Q_\alpha^*$, rejeitar H_2^*, então H. Se isto não ocorrer, passar para H_3^* e assim por diante. A hipótese H é aceita se somente se $Q_{N,j}^* \leq Q_\alpha^*$ para todo j, $j = 1,\ldots, r$.

Em virtude de (4.107) podemos concluir que um intervalo de confiança para $t\,\eta_j$ é

$$(4.113) \quad | N^{\frac{1}{2}} (\eta_j^* - \eta_j)' t | \leq | Q_\alpha^* (t' (\hat{\Gamma}_N^*) t C_{jj} |^{\frac{1}{2}}$$

$$j = 1,\ldots,r, \; t \neq 0.$$

<u>Procedimento</u> <u>III</u>

Seja $\tau' = (\tau'_1, \ldots, \tau'_c)$; $\tau'_i = (\tau_{1i}, \ldots, \tau_{pi})$, $i = 1,\ldots,c$

e

$$(4.114) \quad \mathcal{A}' = (a_{11}, \ldots, a_{1p}, \ldots, a_{c1}, \ldots, a_{cp}) \neq 0$$

um pc - vetor tal que $a_{1i}, \ldots, a_{ci}$ não são todos iguais para $i = 1,\ldots, p$. Denotaremos de $\mathcal{A} = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ satisfaz as condições acima $\}$.

Mostraremos que a hipótese H (4.100) pode ser escrita como

(4.115) $\quad H : \bigcap_{a \in \mathcal{A}} H_a$

onde

(4.116) $\quad H_a : \quad a' \tau = 0 \quad$ para $\quad a \in \mathcal{A}$.

Demonstração

H (4.107) vale $\Longleftrightarrow$ H_s (4.99) = 0, $\quad s = 1,\ldots,r \Longleftrightarrow$

$\phi(L_s) = 0, \quad s = 1,\ldots,r \quad \Longleftrightarrow$

$\sum_{k=1}^{c} \ell_{sk} \tau_k = 0$, com $\sum_k \ell_{sk} = 0$ e todos ℓ_{sk} não nulos $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{c} \ell_{sk} \begin{bmatrix} \tau_{1k} \\ \vdots \\ \tau_{pk} \end{bmatrix} = 0, \text{ com } \sum_k \ell_{sk} = 0 \text{ e todos } \ell_{sk} \text{ não nulos}$$

$$H_a : a'\tau = 0 ; \forall a \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow H\ (4.115)$$

□

Usaremos esta nova forma de H. Denotemos

$$\hat{\Delta}' = (\hat{\Delta}_{1.}, \ldots, \hat{\Delta}_{c.})$$

onde $\hat{\Delta}_{k.}$, $k = 1,\ldots, c$ foi definido em (4.82)

N : matriz diagonal com $n_1, \ldots, n_c$ na diagonal , isto é :

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_c \end{pmatrix}$$

$$(4.117) \quad Q_{N,O} = \hat{\Delta}' (N \otimes (\Gamma_N^*)^{-1} \hat{\Delta} = \sum_{k=1}^{c} n_k \hat{\Delta}_{k.}' (\Gamma_N^*)^{-1} \hat{\Delta}_{k.} .$$

Por (4.93), (4.97) e sob H, $Q_{N,O}$ tem uma distribuição assintótica $\chi^2_{p(c-1)}$.

Deste modo

$$(4.118) \quad \lim_{N \to \infty} P \{ Q_{N,O} \leq \chi_{p(c-1),\alpha} / H \} = 1 - \alpha .$$

Se trocarmos $\hat{\Delta}$ por $\hat{\Delta} - \tau$ em (4.117) podemos eliminar H de (4.118).

Tomando $\mathcal{Q} \in \mathcal{A}$, e usando o mesmo raciocínio usado para obter (4.118), temos :

$$(4.119) \lim_{N \to \infty} P\{ [\mathcal{Q}' (\hat{\Delta} - \tau)]' (\mathcal{Q} (N \otimes (\hat{\Gamma}_N^*)^{-1} \mathcal{Q}') .$$

$$. \; (\mathcal{Q} (\hat{\Delta} - \tau)) \leq \chi^2_{p(c-1),\alpha} \Big\} \leq 1 - \alpha.$$

Portanto,

$$\lim_{N \to \infty} P \left\{ [Q'(\hat{\Delta} - \tau)]^2 \leq \chi^2_{p(c-1),\alpha} \left[Q' (N \otimes (\Gamma^*_N)^{-1} Q \right]^{-1} \right\} =$$

$$= 1 - \alpha.$$

Concluimos que o intervalo

$$(4.120) \quad |Q'(\hat{\Delta} - \tau)| \leq \chi^2_{p(c-1),\alpha} \left[Q' (N \otimes (\hat{\Gamma}^*_N)^{-1} Q \right]^{-1}$$

é um intervalo de confiança com coeficiente de confiança $1 - \alpha$ para $Q'\tau$, $\forall\, Q \in \mathcal{A}$

Podemos obter um teste para H_Q, $Q \in \mathcal{A}$, de nível $1 - \alpha$ rejeitando H_Q quando

$$(4.21) \quad |Q'\Delta| > \chi^2_{p(c-1),\alpha} \left[Q' (N \otimes (\Gamma^*_N)^{-1} Q \right]^{-1}.$$

O procedimento III tem máxima flexibilidade para todo $Q \in \mathcal{A}$, mas na prática, quando estamos interessados em contrastes específicos, é usualmente menos eficiente do que os outros dois.

A simplicidade computacional de Q^*_α sobre Q_α (derivado da independência assintótica de $Q^*_{N,1}, \ldots, Q^*_{N,r}$) tem que ser ponderada sobre a arbitrariedade e complicações envolvidas na escolha da sequência de sufixos $1, \ldots, r$ e na formulação de $H^*_1, \ldots, H^*_r$.

4.2.4 - Consideração das E.R.A's

Ignorando as co-variáveis como em Puri & Sen (1968), obtemos as estimativas dos contrastes usando

$$T_{k\ell} \quad , \quad 1 \leq k < \ell \leq c, \quad i = 1,\ldots, p.$$

Neste caso a matriz de covariância assintótica em (4.90) e (4.93) é

$$(4.122) \quad \Gamma = ((\gamma_{ij})) \; ; \quad \gamma_{ij} = \frac{v_{ij,11}}{B_i \, B_j} \; ; \; i,j = 1,\ldots,p$$

onde $v_{ij,11}$ e B_i são definidas em (4.83) e (4.86).

Puri & Sen (1968), definiram a E.R.A. como a razão das variâncias generalizadas elevadas a potência $\frac{1}{p}$, onde p é o número de componentes da variável que estamos trabalhando. Deste modo, a E.R.A. das estimativas da ordem dos postos, usando as covariáveis em relação as mesmas estimativas sem considerar as covariáveis é

$$(4.123) \quad \ell_1 = \left(\frac{|\Gamma|}{|\Gamma^*|} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{|v_{11}|}{|v^*|} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{|v_{11}|}{|v_{11} - v_{12} \, v_{22}^{-1} \, v_{21}|} \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde v^* é definido em (4.84) e $v_{12} \, v_{22}^{-1} \, v_{21}$ é positiva

semi-definida. Deste modo $\ell_1 \geq 1$ e a igualdade vale quando $v_{12} = 0$. Isto explica a supremacia assintótica das estimativas ajustadas pelas covariáveis.

Note que de maneira semelhante podemos concluir que a E.R.A. é função não decrescente do número de covariáveis, isto é, adicionando mais covariáveis teremos mais informação sobre as estimativas.

Na teoria normal clássica de estimação de contrastes, baseados no vetor médio amostral, chamaremos a matriz de covariância de

$$(Y_\alpha^{(k)} , X_\alpha^{(k)})' \quad \text{de}$$

$$(4.124) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Definamos como usualmente

$$(4.125) \quad \Sigma^* = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \; \bar{\Sigma}_{22} \; \Sigma_{21}$$

onde $\bar{\Sigma}_{22}$ é a matriz inversa generalizada de Σ_{22}.

Dos resultados de Puri & Sen (1970) (calculou as estimativas de $\phi(L)$ como se a distribuição fosse normal, embora não seja - maneira clássica) a E.R.A. de $\phi^*(L)$ com respeito a maneira clássica de calcular as estimativas para $\phi(L)$ é

$$(4.126) \qquad \ell_2 = \left(\frac{|\Sigma_*|}{|\Gamma^*|} \right)^{\frac{1}{p}}$$

a qual depende de Σ_{11} , Σ_{12} , Σ_{22} como também de v_{11} , v_{12} , v_{22} e B_1 , ..., B_p.

De maneira geral não é possível achar bons limites para ℓ_2 , mas

$$(4.127) \qquad \left(\frac{|\Sigma^*|}{|\Gamma|} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{|\Sigma^*|}{|\Gamma^*|} \right)^{\frac{1}{p}} = \ell_2 \leq$$

$$\leq \frac{|\Sigma_{11}|^{\frac{1}{p}}}{|\Gamma^*|^{\frac{1}{p}}}$$

Em particular se $\Sigma_{12} = 0$, $\ell_2 \geq \left(\frac{|\Sigma_{11}|}{|\Gamma|} \right)^{\frac{1}{p}}$ e a igualdade vale se $v_{12} = 0$. Assim se as variáveis originais são não correlacionadas, mas não necessariamente independentes, nós esperamos ganhar em eficiência considerando as estimativas $\phi^*(L)$.

Os mesmos resultados valem para intervalos de confiança simultâneos em (4.98) quando comparados com procedimentos idênticos para MANOVA e o procedimento tipo Scheffé paramétrico.

Para os testes simultâneos da seção 4.3, as E.R.A's destes com respeito a seus paramétricos análogos são considerados em Krishnaiah (1969) e depende do particular conjunto de variáveis ou amostras incluídas no conjunto de contrastes sob teste.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE PERFIL

Inicialmente, faremos a análise de perfil para várias amostras multivariadas que diferem por deslocamento, além de explicitar um teste para a "diferença pura" entre populações, isto é, após ser eliminado o efeito da interação entre as variáveis coordenadas e os tratamentos. Logo em seguida estenderemos este estudo para populações que diferem por escala.

5.1 - TESTES NÃO PARAMÉTRICOS PARA ANÁLISE DE PERFIL DE VÁRIAS AMOSTRAS MULTIVARIADAS COM DISTRIBUIÇÕES QUE DIFEREM EM LOCALIZAÇÃO.

Quando amostras aleatórias independentes (a.a.i) são obtidas de k populações p-variadas, em inferência estatística paramétrica, supõem-se que as distribuições das k-populações são normais p-variadas, com matriz de covariância desconhecida, não singular, comum, e as diferenças que ocorrem são devidas somente a localização das populações. Se a média da i-ésima população é

$$(5.1) \quad \mu_i = (\mu_i^{(1)} , \ldots , \mu_i^{p})$$

a hipótese de homogeneidade é equivalente a

(5.2) $H_o : \mu_1 = \ldots = \mu_k$

Vários testes MANOVA bem conhecidos para H_o são encontrados em Anderson (1958), Kshirsagar (1972), Morrison (1967) e Rao (1965).

A hipótese de paralelismo dos perfis das populações é estabelecida como

(5.3) $H_1 : \mu_i^{(1)} - \mu_1^{(1)} = \ldots = \mu_i^{(p)} - \mu_1^{(p)}$; $i = 2, \ldots k$

que é também interpretada como a hipótese de não interação entre as p variáveis e as k populações.

Se a hipótese H_1 foi aceita podemos estar interessados em saber se os perfis são idênticos, dados que são paralelos, isto é, testar

(5.4) $H_2 : H_o / H_1$ (H_o dado H_1).

Testes para H_1 e H_2 são encontrados em Kshirsagar (1972), Morrison (1967).

Agora nós necessitamos descartar a hipótese forte de normalidade e desenvolver testes não paramétricos que possam ser aplicados para testar H_o, H_1 e H_2. Vários trabalhos para testar a homogeinidade dada por H_o (5.1) são encontrados em Bhapkar (1965); PURI and SEN (1971); Rao

(1965) e Tamura (1966). Estenderemos as técnicas dos trabalhos acima para análise de perfil para várias amostras.

5.1.1 - Notação e Resultados Preliminares

Seja $X'_{ij} = (X_{ij}^{(1)}, \ldots, X_{ij}^{(p)})$; $j = 1, \ldots n_i$

a.a.i. de tamanho n_i da i-ésima população com f.d.a não singular F_i, $i = 1, \ldots, k$.

A hipótese de homogeinidade dessas k populações é

$$(5.5) \qquad H_o : F_1 = \ldots = F_k$$

Testes não paramétricos para H_o (5.5) são baseados na U-estatística generalizada, desenvolvida independentemente por Bhapkar (1965) e Sugiura (1965).

Sejam,

$$(5.6) \quad U_i^{(\alpha)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} n_j} \sum_{t_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{t_k=1}^{n_k} \phi_i^{(\alpha)} (X_{1t_1}, \ldots, X_{kt_k})$$

$$\alpha = 1, \ldots, p ; \quad i = 1, \ldots, k ,$$

$$(5.7) \quad U'_i = (U_i^{(1)}, \ldots, U_i^{(p)}) ; \quad U' = (U'_1, \ldots, U'_k)$$

onde

(5.8) $\phi_i^{(\alpha)} (X_1, \ldots, X_k) = \phi_i (X_1^{(\alpha)}, \ldots, X_k^{(\alpha)}) = \phi(R_i^{(\alpha)})$

com $X_j = (X_j^{(1)}, \ldots, X_j^{(p)})$; $j = 1, \ldots, k$ e $R_i^{(\alpha)}$ é o posto de $X_i^{(\alpha)}$ sobre $\{ X_i^{(\alpha)}, \ldots, X_k^{(\alpha)} \}$; $i = 1, \ldots k$.

Note que :

- Não há empates, pois as F_i são contínuas, $i = 1, \ldots k$.
- Seja $x_i^{(\alpha)}$ o valor observado de $X_i^{(\alpha)}$; $i = 1, \ldots, k$; $\alpha = 1, \ldots p$.

$$\phi_i (x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_i^{(\alpha)}, \ldots, x_k^{(\alpha)}) = \phi_i (x_{r_1}^{(\alpha)}, \ldots, x_{r-1}^{(\alpha)},$$

$$, x_{r_i}^{(\alpha)}, x_{r_{i+1}}^{(\alpha)}, \ldots, x_{r_k}^{(\alpha)})$$ onde $(r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k)$ é uma permutação de $\{ 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k \}$. Portanto $U_i^{(\alpha)}$ é a U- estatística generalizada de Bhapkar.

Se considerarmos na definição de Sugiura, $m_j^{(i)} = 1$, $j = 1, \ldots, c$, veremos que $U_i^{(\alpha)}$ é também uma U-estatística generalizada de Sugiura.

Seja

$$F' = (F_1, \ldots, F_k)$$

e defina

$$(5.9)\quad \eta_i^{(\alpha)}(F) = E(U_i^{(\alpha)}) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} n_j} \cdot \sum_{t_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{t_k=1}^{n_k} E[\phi_i^{(\alpha)}(X_{1t_1}, \ldots, X_{kt_k})] =$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} n_j} \sum_{t_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{t_k=1}^{n_k} E(\phi_i^{(\alpha)}(X_1, \ldots, X_k)) =$$

$$= E\,\phi_i^{(\alpha)}(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, P(R_i^{(\alpha)} = j),$$

onde os X_i's são vetores aleatórios com f.d. acumuladas F_i's, respectivamente. Então

$$\eta_i^{(\alpha)}(F) = E(\phi_i^{(\alpha)}) = \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, P(R_i^{(\alpha)} = j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F).$$

Aqui $R_i^{(\alpha)}$ é o posto de $X_i^{(\alpha)}$ sobre $\{X_j^{(\alpha)}, j = 1, \ldots, k\}$ e

$$(5.10)\quad \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F) = P(R_i^{(\alpha)} = j)$$

com a probabilidade computada sob F.

(5.11) Se $n_i \longrightarrow \infty$ de tal maneira que $\frac{n_i}{N} \longrightarrow p_i$, onde $N = \Sigma n_i$, $0 < p_i < 1$; $i = 1, \ldots, k$, e

$$\eta'(F) = (\eta_1'(F), \ldots, \eta_k'(F))$$

$$\eta_i'(F) = (\eta_i^{(1)}(F), \ldots, \eta_i^{(p)}(F))$$

$$i = 1, \ldots, k$$

por Bhapkar (1965),

$$(5.12) \quad N^{\frac{1}{2}} (\mathbb{U}_N - \eta(F)) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1k} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Sigma_{k1} & \Sigma_{k2} & & \Sigma_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{ij} = \left[\sigma_{i,j}^{(\alpha\ \beta)} \right] ; \quad \sigma_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{p_\ell} \rho_{(\ell)}^{(\alpha,\beta)}(i,j)$$

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, p$$

$$\rho_{(\ell)}^{(\alpha,\beta)}(i,j) = E\left(\phi_i^{(\alpha)}(X_1, \ldots, X_k)\right) \phi_j^{(\beta)}(Y_1, \ldots, Y_k) - \eta_i^{(\alpha)} \cdot \eta_j^{(\beta)},$$

onde X_i e Y_i são v.a. i.i.d. com f.d.a. F_i $(i = 1, \ldots, k)$, exceto que $Y_\ell = X_\ell$. $\mathbb{U}_N$ aqui, simboliza $\mathbb{U}$ calculada numa amostra de tamanho N.

Sob H_o (5.5), $\{ X_j^{(\alpha)} ; j = 1, \ldots, k \}$ são v.a. i.i.d. com f.d.a. contínua F, então $(R_i^{(\alpha)})$ é uniformemente distribuida sobre $\{ 1, \ldots, k \}$, portanto

$$(5.13) \quad \eta_i^{(\alpha)} (F) = \sum_{j=1}^{k} \phi (j) \; P (R_i^{(\alpha)} = j) = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{k} \phi (j) = \phi$$

$$i = 1, \ldots, k \; ; \; \alpha = 1, \ldots , p$$

$$\eta' (F) = ((\eta_1^{(1)} (F), \ldots, \eta_1^{(p)} (F)), \ldots, (\eta_k^{(1)} (F), \ldots,$$

$$, \eta_k^{(p)} (F))) = \phi j' ,$$

onde j é uma kp-upla de 1's.

Pela demonstração do Teorema 3.1 de Bhapkar (1965), conclui-se que

$$(5.14) \quad \Sigma = T (F) = \Sigma^* \otimes S (F)$$

onde $\otimes$ é o produto de Kronecker e

$$\Sigma^* = \frac{\mu}{(k-1)} \{ q I + k^2 \Delta - k Q j' - kj Q' \}$$

$I = [1]_{kxk}$; $j = [1]_{kx1}$; Δ = matriz diagonal com p_i^{-1} na posição (i,i); $i = 1, \ldots, k$;

$q = \sum_{i=1}^{k} p_i^{-1}$, $Q' = (p_1^{-1}, \ldots, p_k^{-1})$

S (F) é a matriz dos coeficientes de correlação $\rho_{\alpha\beta}$, onde $\rho_{\alpha\beta}$ é a correlação entre $\phi_i^{(\alpha)}(X_1,\ldots,X_k)$ e $\phi_i^{(\alpha)}(Y_1,\ldots,Y_k)$ $\alpha, \beta = 1,\ldots,p$ com os X_i's e Y_i's independentes, $i = 1,\ldots,k$, tendo f.d.a. comum F, exceto que $Y_i = X_i$.

$$\mu = E(\psi^2(X_i^{(\alpha)})) - (E[\psi(X_i^{(\alpha)})])^2$$

onde

$$\psi(x_i^{(\alpha)}) = E(\phi_i^{(\alpha)}(X_1,\ldots,X_p \mid X_i = x_i)$$

<u>Lema</u> <u>5.1</u>

Se as funções $\phi^{(\alpha)}$ satisfazem (5.8) e H_o (5.1) vale, então

$$\mu = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \phi(\ell)\,\phi(m) \binom{k-1}{\ell-1}\binom{k-1}{m-1} B(\ell+m-1,\ 2k-1-m+1) - \phi^2,$$

onde ϕ é dado por (5.13) e B é a distribuição beta

<u>Dem.</u>

$$\psi(x_i^{(\alpha)}) = E\{\phi_i^{(\alpha)}(x_1,\ldots,x_k) \mid X_i = x_i\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, P\{X_i^{(\alpha)} \text{ ter posto } j \text{ sobre}$$

$$X_1^{(\alpha)},\ldots,X_k^{(\alpha)} \text{ dado } X_i = x_i\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \binom{k-1}{j-1} \left[F^{(\alpha)}(x_i^{(\alpha)}) \right]^{j-1} .$$

$$. \left[1 - F^{(\alpha)}(x_i^{(\alpha)}) \right]^{k-j}$$

onde $F^{(\alpha)}$ é a distribuição comum de $X^{(\alpha)}$ sob H_o. Como $F^{(\alpha)}(X_i^{(\alpha)})$ tem distribuição uniforme em $[0, 1]$ (pois F é contínua e então $F^{(\alpha)}$ também o é), temos,

$$E(\psi(X_i^{(\alpha)})) = \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \binom{k-1}{j-1} E\left[(F^{(\alpha)}(X_i^{(\alpha)}))^{j-1} . \right.$$

$$\left. (1 - F^{(\alpha)}(X_i^{(\alpha)}))^{k-j} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \int_0^1 \binom{k-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{k-j} \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \binom{k-1}{j-1} \frac{(j-1)!\,(k-j)!}{(k)!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \frac{(k-1)!}{(k-j)!\,(j-1)!} . \frac{(j-1)!\,(k-j)!}{(k-j-j)!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \frac{1}{k} = \phi$$

Também, como

$$\left[\psi(X_i^{(\alpha)}) \right]^2 = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \phi(\ell)\, \phi(m) \binom{k-1}{\ell-1} \binom{k-1}{m-1} .$$

$$\cdot \left[F^{(\alpha)} (X_i^{(\alpha)}) \right]^{\ell+m-2} \cdot \left[1 - F^{(\alpha)} (X_i^{(\alpha)}) \right]^{2k-\ell-m}$$

Segue-se que

$$E \left[\psi (X_i^{(\alpha)}) \right]^2 = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{m=1} \phi (\ell) \phi (m) \binom{k-1}{\ell-1} \binom{k-1}{m-1} \cdot$$

$$E \left\{ \left[F^{(\alpha)} (X_i^{(\alpha)}) \right]^{\ell+m-2} \left[1 - F^{(\alpha)} (X_i^{(\alpha)}) \right]^{2k-\ell-m} \right\} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \phi (\ell) \phi (m) \binom{k-1}{\ell-1} \binom{k-1}{m-1} \cdot$$

$$\cdot \; B (\ell + m - 1, 2k - \ell - m + 1).$$

Portanto

$$\mu = E (\psi^2 (X_i^{(\alpha)})) - \left[E (\psi (X_i^{(\alpha)}) \right]^2 =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} \phi (\ell) \phi (m) \binom{k-1}{\ell-1} \binom{k-1}{m-1} \cdot$$

$$\cdot \; B (\ell + m - 1, 2k - \ell - m + 1) - \phi^2$$

Note que sob H_o, μ é livre de distribuição.

Se a massa probabilística de F não está em algum conjunto de dimensão menor que p, $S(F)$ é não singular, de acordo com Bhapkar (1965), e, considerando as restrições (a), (b), (d) do Teorema 3.15 de Bhapkar (1965), U_N é

singular de posto $p\,(k-1)$.

Sejam

$$(5.15)\quad U' = U'_N = (U'_{1N}, U'_{0N})\ ;\ U'_{0N} = (U'_{2N}, \ldots, U'_{kN})$$

onde N simboliza o tamanho da amostra usada no cálculo de U e Σ_{11} é o cofator de σ_{11} de Σ.

Tomemos $\hat{S}$ uma matriz de estimadores consistentes de S, como em Bhapkar (1965).

Definamos,

$$(5.16)\quad T_o = N\,(U'_o - \phi\, j')\,(\Sigma_{11}^{-1} \otimes \hat{S}^{-1})\,(U_o - \phi\, j)$$

onde j é o vetor de 1's de tamanho conveniente (j é $(k-1)\,p \times 1$). Por Bhapkar (1965), T_o é da forma

$$(5.17)\quad T_o = \frac{N\,(k-1)^2}{\mu\, k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(U_i - \bar{U})'\ \hat{S}^{-1}\ (U_i - \bar{U})$$

onde $p_i = \dfrac{n_i}{N}$, $\bar{U} = \sum_i p_i\, U_i$, e tem uma distribuição $\chi^2_{p(k-1)}$, sob H_o.

Alguns exemplos da estatística T_o são encontrados em Bhapkar (1965) e em Sugiura (1965).

5.1.2 -. Testes Não Paramétricos para Paralelismo dos Perfis

Formularemos um teste não paramétrico apropriado para o paralelismo dos perfis análogo ao H_1 (5.3).

Daremos a seguinte definição geral :

Definição - 4.31

As populações $F_1, \ldots, F_k$ são ditas terem perfis paralelos se $F' = (F_1, \ldots, F_k)$ satisfaz:

$$(5.18) \quad H_1 : \gamma_{ij}^{(1)}(F) = \ldots = \gamma_{ij}^{(p)}(F) \quad ; \; i,j = 1, \ldots k$$

onde $\gamma_{ij}^{(\alpha)}$ é definido em (5.10)

Podemos querer saber se H_1 (5.3) é equivalente a H_1 (5.18) sob a hipótese de normalidade. A resposta é não, exceto para o caso especial onde as variâncias $\sigma_{\alpha\alpha}$ de $X^{(\alpha)}$ são as mesmas, para todo α , $\alpha = 1, \ldots, p$. Provaremos o seguinte :

Lema 5.2

Se $X_1, \ldots, X_k$ são v.a. independentes com distribuição $N(\mu_1, \Sigma), \ldots, N(\mu_k, \Sigma)$ respectivamente, e os elementos da diagonal de Σ são iguais então H_o (5.3) implica H_o (5.18)

Dem.

Note que

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)}(F) = P\,(\,R_i^{(\alpha)} = j\,) = \sum_c P\,(\text{ cada um dos } \{\,X_{i\ell}^{(\alpha)},\ \ell = 1, \ldots, j-1\,\} < X_i^{(\alpha)} < \text{cada um dos } \{\,X_{im}^{(\alpha)},\ m = j+1, \ldots, k\,\}\,).$$

Tomando $X_i^{(\alpha)} = Y_i^{(\alpha)} + \mu_i^{(\alpha)}$; $i = 1, \ldots, k$, onde $\{\,Y_i^{(\alpha)},\ i = 1, \ldots, k\,\}$ são identicamente distribuidos, temos :

$$(5.19)\qquad \gamma_{i,j}^{(k)}(F) = \sum_c P\left[\,(\text{ cada um dos } \{\,Y_{i\ell}^{(\alpha)} + \mu_{i\ell}^{(\alpha)} - \mu_i^{(\alpha)}\,) < Y_i^{(\alpha)} < \text{ cada um dos } \{\,Y_{im}^{(\alpha)} + \mu_{im}^{(\alpha)} - \mu_i^{(\alpha)}\,\}\,\right].$$

Aqui $\sum_c$ denota a soma sobre as $\binom{k-1}{j-1}$ combinações de índices i_ℓ, $\ell = 1, \ldots, j-1$ escolhidos dos $k-1$ índices distintos i_ℓ, $\ell = 1,\ldots,k$ (exceto j), denotando inteiros $1, \ldots, k$, (exceto i).

Se a condição (5.3) esta satisfeita e como os elementos da diagonal de Σ são iguais (isto é, $Y_i^{(\alpha)}$ não depende de α) então (5.19) não depende de α, portanto (5.18) está satisfeita.

Note que o fato de X_j , $j = 1, \ldots, k$ ser normal não foi usado, exceto que μ_i era um parâmetro de localização. Então usando o mesmo argumento anterior provaremos o lema abaixo.

<u>Lema</u> <u>5.3</u>

Suponha $X_1, \ldots, X_k$ independentes com f.d.a. $F_i(X) = F(X - \mu_i)$, $i = 1, \ldots, k$, para alguma F contínua e suponha que as f.d.a. marginais $F^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots p$ de F são idênticas. Então, (5.3) implica (5.18).

Para testar H_1 (5.18) Brapkar & Patterson (1977) propuseram a estatística

$$(5.20) \quad T_1 = \frac{N(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (U_i - \bar{U})' \cdot \left[\hat{S}^{-1} - \hat{\gamma} \hat{S}^{-1} J \hat{S}^{-1} \right] \cdot (U_i - \bar{U}) = T_0 - T_2$$

com

$$(5.21) \quad T_2 = \frac{N(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (U_i - \bar{U})' \hat{S}^{-1} J \hat{S}^{-1} (U_i - \bar{U})$$

onde

$\tilde{\gamma} = \dfrac{1}{j' \hat{S}^{-1} j}$ e T_o é a estatística (5.17) para H_o (5.2).

T_1 é um teste $\chi^2_{(p-1)(k-1)}$ para H_1, quando temos grandes amostras, enquanto que T_2 é um teste $\chi^2_{(k-1)}$ para H_o dado H_1, para grandes amostras. Note que H_o/H_1 (H_o dado H_1) testa a diferença "pura" das populações após eliminar de T_o a contribuição devido a interação, se houver.

Note que se P é uma matriz $(p-1) \times p$ de posto $p-1$, satisfazendo $Pj = 0_{(p-1)\times 1}$, então

$$(5.22) \qquad S^{-1} - \gamma S^{-1} J S^{-1} = P'(P S P)^{-1} P$$

onde S é uma matriz positiva definida e

$$(5.23) \qquad \gamma = \frac{1}{j' S^{-1} j}$$

pois

$$S^{-1} - \gamma S^{-1} J S^{-1} = P'(P S P)^{-1} P \iff$$

$$SS^{-1} - \gamma SS^{-1} J S^{-1} = S P'(P S P')^{-1} P \iff$$

$$(5.24) \qquad I - \gamma J S^{-1} = S P'(P S P')^{-1} P \iff$$

Se $Pj = 0$, então

$$P(\gamma J S^{-1}) = \gamma (P J) S^{-1} = 0$$

Seja $(L)^j$ a j-ésima coluna de $\gamma J S^{-1}$. Como $P(\gamma J S^{-1}) = 0$, $P(L)^j = 0$.

Pensando agora em P como operador linear Como P tem dimensão $p-1$ (equivalente a pensar que imagem de P tem posto $p-1$) e o espaço vetorial V onde o operador está definido é de dimensão p (pois $(L)^j$ é um vetor com p coordenadas) concluimos que o núcleo de P tem dimensão 1 (isto é, a dimensão do sub-espaço $N_{uc}(P) = \{ \gamma \mid P\gamma = 0 \}$ tem posto 1).

Mas $Pj = 0$, $N_{uc}(P)$ tem dimensão 1, conclui-se que $(L)^i = c_i \cdot j$ com $c_i \in R$, $i = 1, \ldots, p$.

Mas $\gamma J S^{-1}$ é simétrica e as colunas são da forma $c_i \cdot j$ então $\gamma J S^{-1}$ só pode ser da forma

$$\begin{bmatrix} c & \cdots & c \\ \vdots & & \vdots \\ c & \cdots & c \end{bmatrix}.$$

Deste modo

$$-\gamma J S^{-1} = c \cdot J$$

Mas

$$\begin{cases} -\gamma \, \mathbb{J} \, S^{-1} j = -\gamma \dfrac{1}{\gamma} J = -1 \, J \\ c \, \mathbb{J} \, J = c \, p \end{cases}$$

o que implica $cp = -1 \quad \therefore \quad c = \dfrac{-1}{p}$

Deste modo $\quad -\gamma \, \mathbb{J} \, S^{-1} = -\dfrac{1}{p} \, \mathbb{J}$

Vejamos agora a forma do 2º membro da igualdade (5.24).

$$S \, P' (P' S \, P)^{-1} P = I + M$$

$$P (I + M) = P \Longleftrightarrow P M = 0$$

Mas $I + M$ é simétrica e I também é, conclui-se que M é simétrica.

Como

$PM = 0$, M simétrica , pelo raciocínio feito para o 1º membro conclui-se que

$$M = c \mathbb{J} \quad .$$

Mas $(I + c \, \mathbb{J}) J = 0 \longrightarrow j + mp \, j = 0 \longrightarrow m = -\dfrac{1}{p}$

o que conclui o resultado.

Como S é matriz de correlação não singular, S é positiva definida, então $\hat{S}$ também é positiva definida com probabilidade 1, com $n_i \longrightarrow \infty$; $i = 1, \ldots, k$.

Usando a igualdade (5.23) podemos expressar T_1 como ,

$$(5.25) \quad T_1 = \frac{N\,(k-1)^2}{\mu\, k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i \; (U_i - \bar{U})' \, P' \, (P' \, S \, P)^{-1} \; .$$

$$. \; P \, (U_i - \bar{U})$$

o que justifica o fato

$$(5.26) \quad T_1 \xrightarrow[\text{sob } H_o]{D} \chi_{(p-1)\,(k-1)} \quad \text{com } n_i \longrightarrow \infty \; ; \; i=1,\ldots,k.$$

e $T_2 = T_1 - T_o \xrightarrow[\text{sob } H_o]{D} \chi^2_{k-1}$, com $n_i \longrightarrow \infty$; $i=1, \ldots k$

pelo Teorema 3.1 de Bhapkar (1965).

O objetivo é estabelecer uma distribuição limite para T_1 sob H_1 (5.3) somente. Como vimos, pelos resultados acima, isto não foi possível. Somente na secção 5, com o uso de "alternativas locais" para H_o, é que poderemos justificar o uso de T_1 para testar H_1.

Note que por (5.12) $\Sigma = T(F)$ é em geral uma matriz $pk \times pk$ de funcionais dependendo de F. Somente sob H_o que $T(F)$ tem a estrutura $\Sigma^* \otimes S$, onde Σ^* é conhecido e S é uma matriz $p \times p$ de fun-

cionais dependendo de F.

5.1.3 - Consistência de T_o, T_1 e T_2

Para estudar a consistência desses critérios, para suas respectivas hipóteses, nós necessitamos do

Lema 5.4

Suponha $N^{\frac{1}{2}} (Y_n - \varepsilon) \xrightarrow{D} N (0 , \Psi)$ e A uma matriz positiva definida.

Então a forma quadrática

$Q_n = N (Y_n - \delta)' \; A \; (Y_n - \delta) \to \infty$ no sentido que

$P (Q_n > c) \to 1$, quando $n_i \to \infty$, $\forall_i$ e para cada c fixado, se e somente se $\varepsilon \neq \delta$.

Dem.

Seja $\varepsilon \neq \delta$

$$N (Y_n - \delta)' \; A \; (Y_n - \delta) = N \left[(Y_n - \varepsilon) + (\varepsilon - \delta) \right]' \cdot$$

$$\cdot A \left[(Y_n - \varepsilon) + (\varepsilon - \delta) \right] =$$

$$= N (Y_n - \varepsilon)' \; A \; (Y_n - \varepsilon) +$$

$$+ N (Y_n - \varepsilon)' \; A \; (\varepsilon - \delta) +$$

$$+ N(\varepsilon - \delta)' A (Y_n - \varepsilon) + N(\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) =$$

$$= N(Y_n - \varepsilon)' A (Y_n - \varepsilon) + 2 N^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} (Y_n - \varepsilon)' A \,.$$

$$\cdot (\varepsilon - \delta) + N(\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) =$$

$$= N(Y_n - \varepsilon)' A (Y_n - \varepsilon) + N^{\frac{1}{2}} 2 (\varepsilon - \delta)' A N^{\frac{1}{2}} \,.$$

$$\cdot (Y_n - \varepsilon) + N(\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta)$$

$$N^{\frac{1}{2}} (Y_n - \varepsilon) \xrightarrow[\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\ldots,k}]{D} N(0, \Psi), \quad \text{então}$$

$$2 N^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \delta)' A (Y_n - \varepsilon) \xrightarrow[\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\ldots,k}]{D} N(0, (\varepsilon - \delta)' A A' (\varepsilon - \delta)).$$

Chamaremos de $T_n = 2 N^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \delta)' A (Y_n - \varepsilon)$.

$$P\left[N^{\frac{1}{2}} T_n + N(\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) > c \right] =$$

$$= P\left[T_n > \frac{c}{N^{\frac{1}{2}}} - \frac{N}{N^{\frac{1}{2}}} (\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) \right] =$$

$$= P\left[T_n > \frac{c}{N^{\frac{1}{2}}} - N^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) \right].$$

$$\lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}} P \left[N^{\frac{1}{2}} T_n + N(\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) > c \right] =$$

$$= \lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}} P \left[T_n > \frac{c}{N^{\frac{1}{2}}} - N^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) \right] = 1$$

pois T_n se aproxima da normal e $\dfrac{c}{N^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow 0$,

$- N^{\frac{1}{2}} (\varepsilon - \delta)' A (\varepsilon - \delta) \to \infty$ com $n_i \to \infty$, $i = 1,\dots,k$.

Como $N(Y_n - \varepsilon)' A (Y_n - \varepsilon)$ é um número positivo,

$$\lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}} P(Q_n > c) = 1$$

($\Longrightarrow$)

Suponhamos por absurdo que $\varepsilon = \delta$.

Seja a função contínua,

$$g : R^p \to R \mid g(Y) = Y' A Y.$$

Como $(Y_n - \varepsilon) \xrightarrow[\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}]{D} Y \sim N(0, \Psi)$ e g é contínua então

$$g(Y_n - \varepsilon) = (Y_n - \varepsilon)' A (Y_n - \varepsilon) \xrightarrow[\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}]{D} Y' A Y.$$

Mas $Y' A Y$ tem distribuição χ^2, portanto existe $c > 0$ tal que $P(Y' A Y \leq c) = \alpha > 0$

$\therefore \quad P(Y' A Y > c) = 1 - \alpha < 1.$

Podemos agora concluir que

$$\lim_{\substack{n_i \to \infty \\ i=1,\dots,k}} P(Q_n > c) = P((Y' A Y) >) = 1 - \alpha < 1, \text{absurdo.}$$

<u>Teorema 5.5</u>

Sejam $T_{o,n}$, $T_{1,n}$ e $T_{2,n}$ definidos por (5.17), (5.20) e (5.21) para funções $\phi_i^{(\alpha)}$ definida por (5.8). Se $n_i \to \infty$ de tal modo que $\frac{n_i}{N} \longrightarrow p_i$, $0 < p_i < 1$ então

(i) $T_{o,n} \xrightarrow{P} \infty \leftrightarrow F \notin \{ F \mid \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é independente de i e α; $i = 1,\dots,k$; $\alpha = 1;\dots,p \}$

(i,i) $T_{1,n} \xrightarrow{P} \infty \leftrightarrow F \notin \{ F \mid \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é independente de $\alpha = 1,\dots,p$, para cada i, $i = 1,\dots,k \}$

(iii) $T_{2,n} \xrightarrow{P} \infty \leftrightarrow F \notin \{ F \mid \sum_{j=1}^{k} \phi(j) \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \gamma_{ij}(F)$ é independente de $i \}$.

<u>Demonstração</u>

i) Seja $U' = (U_1', U_o')$ como em (5.15). Por (5.12) e Lema (5.4) conclui-se

$$(5.28)\quad N\,(\,U_{o,n} - \phi\, j\,)' \left[\, \Sigma_{11}^{-1} \otimes S^{-1} \right] (\,U_{o,n} - \phi\, j\,) \xrightarrow{P} \infty$$

se e somente se $\eta_i\,(F) = \phi\, j$, $i = 2,\ldots,k$, j um vetor $p \times 1$.

Como $\sum_{i=1}^{k} \eta_i\,(F) = k\,\phi\, j$, j é um vetor kp, concluimos que

(i) vale $\Longleftrightarrow \eta_i^{(\alpha)}\,(F) = \phi$, $i = 1,\ldots,k; \alpha = 1,\ldots,p \Longleftrightarrow$ $F \in \{\, F \mid \eta_i^{(\alpha)}\,(F)$ é independente de i, α; $i = 1,\ldots,k$; $\alpha = 1,\ldots,$ $,p\,\} \Longleftrightarrow$

$F \in \{\, F \mid \sum_{j=1}^{k} \phi\,(j)\ \gamma_{ij}^{(\alpha)}\,(F)$ é independente de α e $i\,\}$.

Se trocarmos S por estimadores consistentes, vimos que $T_{o,n}$ e a forma quadrática (5.28) tem a mesma distribuição limite em vista de (5.16) e (5.17). Deste modo (i) está provado.

ii) Por Bhapkar (1965) ou pelo fato de (5.20) ser igual a (5.21), temos :

$$T_{1,n} = \frac{N\,(k-1)^2}{\mu\, k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(\,U_i - \bar{U}\,)'\, P'\,(\,P\,\hat{S}\,P')^{-1}\, p\,(\,U_i - \bar{U}) =$$

$$= N\,(\,U_{o,n} - \phi\, j\,)'\,(\,\Sigma_{11}^{-1} \otimes P'\,(\,P\,\hat{S}\,P')^{-1} P)(\,U_{o,n} - \phi\, j\,)$$

Note que

$$(5.29)\quad \Sigma_{11}^{-1} \otimes P'\,(\,P\,\hat{S}\,P')^{-1}\, p =$$

$$= \begin{bmatrix} P' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P' & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \Sigma_{11}^{-1} \otimes (P\, S\, P')^{-1} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & P \end{bmatrix} =$$

$$= (I_{k-1} \otimes P)' \left[\Sigma_{11}^{-1} \otimes (P\, \hat{S}\, P)^{-1} \right] (I_{k-1} \otimes P).$$

Deste modo podemos expressar $T_{1,n}$ como

$$T_{1,n} = N \left[(I_{k-1} \otimes P)(U_{o,n} - \phi j) \right]' \left[\Sigma_{11}^{-1} \otimes (P\, \hat{S}\, P')^{-1} \right].$$

$$\cdot \left[I_{k-1} \otimes P \right] (U_{o,n} - \phi j).$$

Do lema 5.4 e de (5.12) concluimos que

$$T_{1,n} \not\longrightarrow \infty \leftrightarrow E\left[(I_{k-1} \otimes P)\, U_{o,n} \right] = (I_{k-1} \otimes P)\, \phi j.$$

Mas $E(I_{k-1} \otimes P)\, U_{o,n} = (I_{k-1} \otimes P)\, E(U_{o,n}) =$

$$= (I_{k-1} \otimes P) \begin{bmatrix} \eta_2 \ (F) \\ \vdots \\ \eta_k \ (F) \end{bmatrix}$$

Como $(I_{k-1} \otimes P)\, \phi j = \phi\, (I_{k-1} \otimes P)\, j = 0$,

pois $P_{j_i} = 0$, $i = 2, \ldots, k$; $j = \begin{pmatrix} j_2 \\ \vdots \\ j_k \end{pmatrix}$; j_i é um vetor de 1's de tamanho $p \times 1$, concluimos então que

$T_{1,n} \not\longrightarrow \infty \Longleftrightarrow$

(5.30) $\quad P\,\eta_i\,(F) = 0, \quad i = 2, \ldots, k$

Mas $\sum_{i=1}^{k} \eta_i\,(F) = k\,\phi\,j$, então

$P\,\eta_1\,(F) + \sum_{i=2}^{k} p\,\eta_i\,(F) = K\,\phi\,j\,P = 0$. Como (5.30) vale, $P\,\eta_1\,(F) = 0$.

Podemos agora concluir que

$T_{1,n} \not\longrightarrow \infty \Longleftrightarrow P\,\eta_i\,(F) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$

Como o núcleo de P tem posto 1

$T_{1,n} \not\longrightarrow \infty \Longleftrightarrow \eta_i\,(F) = \begin{pmatrix} \eta_i^{(1)}\,(F) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_i^{(p)}\,(F) \end{pmatrix} = k_i j$, isto é

$\eta_i^{(\alpha)}\,(F)$ é independente de α, $\alpha = 1, \ldots, k$; para cada i fixo, $i = 1, \ldots k \Longleftrightarrow F \in \{ F \mid \eta_i^{(\alpha)}\,(F)$ é independente de α, $\alpha = 1, \ldots, k$ e i fixo, $i = 1, \ldots, k\} \Longleftrightarrow$

$F \in \{ F \mid \sum_{j=1}^{k} \phi\,(j)\,\gamma_{ij}^{(\alpha)}\,(F)$ é independente de α, $\alpha = 1, \ldots, p$, i fixo, $i = 1, \ldots, k \}$

(iii) Por Bhapkar (1965) ou pelo fato de (5.20) ser igual a (5.21) temos :

$$T_{2,n} = \frac{n\,(k-1)^2}{n\,k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i \,(U_i - \bar{U})' \,\hat{S}^{-1} J \,\hat{S}^{-1} \,(U_i - \bar{U}) =$$

$$= N\,(U_{o,n} - \phi\, j)' \left[\Sigma_{11}^{-1} \otimes \hat{S}^{-1} J \,\hat{S}^{-1} \right] (U_{o,n} - \phi\, j)$$

Pelo mesmo argumento usado em (5.29) temos que

$$T_{2,n} = N \left[(I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1}) \,(U_{o,n} - \phi\, j) \right]' \left[\Sigma_{11}^{-1} \otimes J \right] .$$

$$. \left[(I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1}) \,(U_{o,n} - \phi\, j) \right].$$

Note que

$$(I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1}) \cdot (U_{o,n} - \phi\, j) =$$

$$= (I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1})\, U_{o,n} - \phi\, (I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1})\, j.$$

$$E\left[(I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1})\, U_{o,n} \right] = \phi\, (I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1})\, j \iff$$

$$(I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1}) \begin{pmatrix} \eta_{2}^{(F)} \\ \vdots \\ \eta_{k}^{(F)} \end{pmatrix} = \phi\, (I_{k-1} \otimes \hat{S}^{-1})\, j \iff$$

$$\begin{bmatrix} \hat{S}^{-1} \eta_2^{(F)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_k^{(F)} \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} \hat{S}^{-1} j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{S}^{-1} j \end{bmatrix} \iff$$

$$\left[\begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{1,\beta} \eta_2^{(\beta)}(F) \\ \vdots \\ \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{p,\beta} \eta_2^{(\beta)}(F) \end{pmatrix} \quad \bigcirc \quad \begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{1,\beta} \eta_p^{(\beta)}(F) \\ \vdots \\ \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{p,\beta} \eta_p^{(\beta)}(F) \end{pmatrix} \quad \bigcirc \right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{1,\beta} \\ \vdots \\ \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{p,\beta} \end{pmatrix} \quad \bigcirc \quad \begin{pmatrix} \sum_{\beta} \rho^{1,\beta} \\ \vdots \\ \sum_{\beta} \rho^{1,\beta} \end{pmatrix} \quad \bigcirc \right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \eta_i^{(\beta)} = \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \sum_j \phi(j) \gamma_{ij}^{(\beta)}(F) = \sum_{\beta} \rho^{\alpha,\beta}$$

$$\therefore \quad T_{2,n} \not\longrightarrow \infty \Longleftrightarrow \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\beta)}(F)$$

é independente de i, $i = 2, \ldots, k$, $\forall_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,p$.

Como $\sum_{i=1}^{k} \eta_i(F) = k\,\phi\,j$,

$$\sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \eta_1(F) + \sum_{\beta=1}^{p} \sum_{i=2}^{k} \rho^{\alpha,\beta} \eta_i(F) = K\,\phi\,j \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta}$$

Como $\sum_{\beta=1}^{p} \sum_{i=2}^{k} \rho^{\alpha,\beta} \cdot \eta_i(F)$ independe de i, $i = 2, \ldots, k$ e

$k\,\phi\,j \sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta}$ é independente de i, conclui-se que

$\sum_{\beta=1}^{p} \rho^{\alpha,\beta} \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\beta)}(F)$ é independente de i, $i = 1,\ldots k$,

para $\forall\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$.

$\square$

Observação: Nós notamos aqui que os testes T_o, T_1 designados para H_o e H_1, respectivamente, são consistentes somente sobre alternativas para as hipóteses "efetivamente" sendo testadas, isto é :

(5.31) $H_{o\emptyset}$: $\sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é independente de i e α

(5.32) $H_{1\emptyset}$: $\sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é independente de α para cada i,

dependendo da ϕ usada no cálculo das T's. Naturalmente, esta característica indesejável dos testes não paramétricos é usualmente inevitável, veja, por exemplo ,

que os testes de Krushall - Wallis, Man-Whitney e teste do sinal apresentam desvantagens semelhantes.

Note também que se H_1 é aceita, isto é, $\sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é independente de α, para cada i fixado, temos que $T_{2,n} \longrightarrow \infty$, a não ser que $\sum_j \phi(j) \cdot \gamma_{ij}^{(\alpha)}$ seja independente de i, que é precisamente a condição de $T_{o,n} \not\longrightarrow \infty$, assumindo $H_{1\phi}$.

5.1.4 - Distribuições Assintóticas

Nós acharemos agora a distribuição limite de T_o, T_1 e T_2 sob uma sequência de alternativas de Pitman

$$(5.33)\quad H_N : F_{iN}(x) = F(x - N^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_i) \qquad i = 1, \ldots, k$$

onde os δ_i's não são todos iguais e $\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 0$.

Teorema 4.6

Considere a sequência $\{H_N\}$ de distribuições $\{F_N\}$ dada por (5.33) e assuma que $F^{(\alpha)}$ é diferenciável e tem uma derivada limitada $f^{(\alpha)}$, ao menos para quase todo ponto, $\alpha = 1, \ldots, p$. Suponha, também, que exista uma função $g(\alpha)$ tal que para h suficientemente pequeno

$$(5.34)\quad \left| \frac{F^{(\alpha)}(x+h) - F^{(\alpha)}(x)}{h} \right| \leq g^{(\alpha)}(x) \qquad \text{para}$$

para todo x e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(\alpha)}(x)\, d F^{(\alpha)}(x) < \infty .$$

Então com

$$(5.35) \quad \frac{n_i}{N} \to p_i \ , \quad 0 < p_i < 1 \ ,$$

$$(5.36) \quad N^{\frac{1}{2}} (U_n - \phi j) \xrightarrow{D} N (\gamma (F), \Gamma (F))$$

onde $\Gamma (F)$ é dado por (4.22) e

$$\gamma_i^{(\alpha)} (F) = k\, \delta_i^{(\alpha)} q^{(\alpha)} (\phi, F); \ \gamma_i' = (\gamma_i^{(1)}, \ldots , \gamma_i^{(p)})$$

$$\gamma' = (\gamma_1', \ldots , \gamma_k')$$

$$q^{(\alpha)} (\phi , F) = \sum_{i=1}^{k} \phi (j) \left[\binom{k-2}{j-2} a^{(\alpha)} (j-2, k-j, F) - \right.$$

$$\left. - \binom{k-2}{j-1} a^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) \right]$$

<u>Demonstração</u>

Os detalhes da prova consistem, principalmente, em mostrar que para N grande

$$(5.37) \quad E_{H_N} (U_n) = E_{H_o} (U_n) + N^{-\frac{1}{2}} \gamma + \Theta (N^{-\frac{1}{2}})$$

$$(5.38) \quad N \operatorname{Var}_{H_N} (U_n) = N \operatorname{Var}_{H_o} (U_n) + \Theta (N^{-\frac{1}{2}})$$

Usando este fato o resultado sai usando (5.12).

Provaremos (5.37) . A afirmação (5.38) sai de maneira análoga, através de trabalhosa verificação de todos possíveis termos e será omitida.

$$E_{H_N}(U_n^{(\alpha)}) \doteq E_{H_N}\ \phi_i^{(\alpha)}(X_1,\ldots,X_k) = \sum_{j=1}^{k} \phi(j)\, P_{H_N}(R_i^{(\alpha)} = j)$$

Mas $P_{H_N}(R_i^{(\alpha)} = j) = \sum_c P(\text{cada } Y_{iL}^{(\alpha)}, L = 1,\ldots,j-1 < Y_i^{(\alpha)} <$ cada dos $Y_{im'}^{(\alpha)}$, $m' = j+1, \ldots,k)$ onde

$Y_{iv}^{(\alpha)} = X^{(\alpha)} - N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_{iv}$, $i = 1, \ldots,k$. Portanto

$$P_{H_N}(R_i^{(\alpha)} = j) = \sum_c P(\text{cada } X^{(\alpha)} - N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_{iL}^{(\alpha)},$$

$$L = 1, \ldots, j-1 < X^{(\alpha)} - N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_i^{(\alpha)} < \text{cada } X^{(\alpha)} - N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_{im'},$$

$$m' = j+1, \ldots, k) = \sum_c P(\text{cada } X^{(\alpha)} + N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_i^{(\alpha)} - N^{-\frac{1}{2}}\ \delta_{iL} < X^{(\alpha)} <$$

$$\text{cada } X^{(\alpha)} + N^{-\frac{1}{2}}\ (\delta_i^{(\alpha)} - \delta_{im'}^{(\alpha)}),\ L = 1, \ldots, j-1;\ m' = j+1,$$

$$,\ldots,k) = \sum_c P\Big[(\text{Cada } X^{(\alpha)} + \varepsilon_{iL}^{(\alpha)}\ N^{-\frac{1}{2}} < X^{(\alpha)} < \text{cada } X^{(\alpha)} +$$

$$+ \varepsilon_{im'}^{(\alpha)}\ N^{\frac{1}{2}}),\ L = 1, \ldots, j-1\ ;\ m' = j+1, \ldots, k\Big] =$$

$$= \sum_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{L=1}^{j-1} F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) .$$

$$\prod_{m'=j+1}^{k} \left[1 - F^{(\alpha)} (x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{im'}^{(\alpha)} \right] d F^{(\alpha)}(x) \text{, onde } \varepsilon_{iv}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)} - \delta_{iv}^{(\alpha)} \quad ;$$

$$v = 1, \ldots, k \;) = \sum_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{L=1}^{j-1} F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) .$$

$$\prod_{m=1}^{k-j} \left[1 - F^{(\alpha)} (x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{im}^{(\alpha)} \right] d F^{(\alpha)}(x)$$ onde $m = m'-j$ e $\sum_{c}$ é a soma sobre os $\binom{k-1}{j-1}$ combinações dos indices i_L, $L = 1, \ldots, j-1$, escolhidos sobre os $k-1$ indices i_L, $L = 1, \ldots, k$ (exceto j) (denotando os inteiros $1, \ldots, k$, exceto i).

Como $F^{(\alpha)}$ é derivavél, como $F^{(\alpha)\prime} = f^{(\alpha)}$, podemos aplicar a noção de derivada a

$$\prod_{L=1}^{j-1} \prod_{m=1}^{k-j} F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) \left[1 - F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{im}^{(\alpha)} \right] \right.$$

Analisemos primeiramente o caso mais simples, que é

$$(5.39) \qquad F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right) \left(1 - F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3} \right) \right.$$

onde estamos assumindo que $e_{iL} = e_{i1}$ e $e_{im} = e_{i3}$ ($j = 2$, $k = 3$). Aplicando a noção de derivada a (5.39) temos :

$$F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right) \left(1 - F^{(\alpha)} \left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} \right) \right) =$$

$$= F^{(\alpha)}(x)\,(1 - F^{(\alpha)}(x)) + f^{(\alpha)}(x)\,(1 - F^{(\alpha)}(x))\,N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon_{i1}^{(\alpha)} -$$

$$- f^{(\alpha)}(x)\,(F^{(\alpha)}(x))\,N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon_{i3} + \Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x)\,, \qquad \text{onde}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x,x)}{N^{-\frac{1}{2}}} = 0 \Leftrightarrow \Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x,x) = N^{-\frac{1}{2}}\,\Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x,x)$$

$$\text{com} \quad \lim N^{-\frac{1}{2}}\,\Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x) = 0$$

$$\sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(\alpha)}(x + N^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_{i1}^{(\alpha)})\,(1 - F^{(\alpha)}(x + N^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_{i3}^{(\alpha)}))\,.$$

$$.\, dF^{(\alpha)}(x) = P_{H_0}(R_i^{(\alpha)} = j) + \sum_c \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} N^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\,(1 - F^{(\alpha)}(x))\,.$$

$$.\, dF^{(\alpha)}(x) - \sum_c \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} N^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\,F^{(\alpha)}(x) + \sum_c N^{-\frac{1}{2}}\,.$$

$$.\, \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x,x)\, dF^{(\alpha)}(x).$$

Precisamos mostrar que :

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x,x)\,.\, dF^{(\alpha)}(x) = 0$$

$$\frac{F^{(\alpha)}(x + N^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_{i1}^{(\alpha)})\,(1 - F^{(\alpha)}(x + N^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_{i3}^{(\alpha)})\,f^{(\alpha)}(x) - F^{(\alpha)}(x)\,(1 - F^{(\alpha)}(x))\,f^{(\alpha}}{N^{-\frac{1}{2}}}$$

$$- \left[f^{(\alpha)}(x)\right]^2 (1 - F^{(\alpha)}(x))\,\varepsilon_{i1}^{(\alpha)} + \left[f^{(\alpha)}(x)\right]^2 \left[1 - F^{\alpha}(x)\right] \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} =$$

$$= \theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x)\, f^{(\alpha)}(x)$$

Mas

$$F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}\right)\left(1 - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right)\right) f^{(\alpha)}(x) -$$

$$- F^{(\alpha)}(x)\left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right) f^{(\alpha)}(x) = F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}\right) .$$

$$. \left[1 - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}\right)\right] f^{(\alpha)}(x) - \left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right) .$$

$$. F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right) f^{(\alpha)}(x) + \left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right) .$$

$$. F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right) f^{(\alpha)}(x) - F^{(\alpha)}(x)\left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right) f^{(\alpha)}(x) =$$

$$= - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}\right)\left[F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right) - F^{(\alpha)}(x)\right] .$$

$$. f^{(\alpha)}(x) + \left[1 - F^{(\alpha)}(x)\right]\left[F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right) - F^{(\alpha)}(x)\right] .$$

$$. f^{(\alpha)}(x) .$$

Temos que

$$N^{-\frac{1}{2}} f^{(\alpha)}(x)\left[F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}\right)\left(1 - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - F^{(\alpha)}(x)\left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right)\right] \xrightarrow[N \to \infty]{} - \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} F^{(\alpha)}(x)\left[f^{(\alpha)}(x)\right]^2 +$$

$$+ \left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right)\left[f^{(\alpha)}(x)\right]^2 \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}$$ pontualmente, portanto

$$\theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x) \longrightarrow 0, \text{ pontualmente.}$$

$$\left| \theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x) \right| \leq 2K \frac{\left| F^{(\alpha)}(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i1}^{(\alpha)}) - F^{(\alpha)}(x) \right|}{N^{-\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \left| \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right| \left[f^{(\alpha)}(x) \right]^2 \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right] + \left[f^{(\alpha)}(x) \right]^2 .$$

$$. \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right] \left[\varepsilon_{i3}^{(\alpha)} \right] \leq 2 k g(x) \left| \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right| + \left[f^{(\alpha)}(x) \right]^2 .$$

$$. \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right] \left| \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right| + \left[f^{(\alpha)}(x) \right]^2 \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right] .$$

$$. \left| \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} \right| = h(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx \leq 2k \left| \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx + \left| \varepsilon_{i1}^{(\alpha)} \right| 2 k .$$

$$. \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\, dx + 2 \left| \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} \right| K \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\, dx < \infty$$

Concluimos então que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{N^{-\frac{1}{2}}}(x, x)\, f^{(\alpha)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dx = 0 ,$$

usando o resultado abaixo, encontrado em Cunningham (1967) e Kestelman (1970).

<u>Teorema 4.7</u>

Suponha que :

i) g e f_n ($n = 1,2,\ldots$) sejam definidos em $(0, \infty)$ e que são Rieman- Integráveis em $[t, T]$ onde $0 < t < T < \infty$, $|f_n| \leq g$.

ii) $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ pontualmente em cada compacto contido em $(0, \infty)$.

iii) $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx < \infty$

Então :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

$\square$

Podemos agora concluir que

$$(5.40) \quad \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{il}^{(\alpha)}\right)\left(1 - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}\right)\right).$$

$$. \, dF^{(\alpha)}(x) = P_{H_o}(R_i^{(\alpha)} = j) + N^{-\frac{1}{2}} \Big[\varepsilon_{il}^{(\alpha)} \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x) \, .$$

$$. \left(1 - F^{(\alpha)}(x)\right) dF^{(\alpha)}(x) - \sum_c \varepsilon_{i3}^{(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\, F^{(\alpha)}(x)\, dF^{(\alpha)}(x) \Big] +$$

$$+ \Theta\left(N^{-\frac{1}{2}}\right).$$

De (5.40) tiramos que :

$$(5.41) \quad \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{L=1}^{j-1} \prod_{m=1}^{k-1} F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)}\right)\left[1 - F^{(\alpha)}\left(x + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{im}^{(\alpha)}\right)\right].$$

$$. \quad dF^{(\alpha)}(x) = P_{H_o}(R_i^{(\alpha)} = j) +$$

$$+ \sum_{c} N^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{L=1}^{j-1} \left(\varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x) \left[f^{(\alpha)}(x) \right]^{j-2} . \right.$$

$$. \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right]^{k-j} d F^{(\alpha)}(x) \Bigg] - \left(\sum_{m=j+1}^{k} \varepsilon_{im}^{(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x) . \right.$$

$$. \left[F^{(\alpha)}(x) \right]^{j-1} \left[1 - F^{(\alpha)}(x) \right]^{k-j-1} d F^{(\alpha)}(x) +$$

$$+ \theta \left(N^{-\frac{1}{2}} \right)).$$

(5.41) pode ser descrito como :

$$P_{H_o} \left(R_i^{(\alpha)} = j \right) + N^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{c} \left(\sum_{L=1}^{j-1} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) \right] a^{(\alpha)} (j-2, k-j, F) -$$

$$- N^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{c} \left(\sum_{m=j+1}^{k} \varepsilon_{im}^{(\alpha)} \right) a^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) \right] + \Theta \left(N^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= P_{H_o} \left(R_i^{(\alpha)} = j \right) + N^{-\frac{1}{2}} \binom{k-2}{j-2} \left(\sum_{L=1}^{k} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) a^{(\alpha)} (j-2, k-j, F) -$$

$$- N^{-\frac{1}{2}} \binom{k-1}{k-j-1} \left(\sum_{L=1}^{k} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) a^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) + O \left(N^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= P_{H_o} \left(R_i^{(\alpha)} = j \right) + N^{-\frac{1}{2}} k \, \delta_i^{(\alpha)} \left[\binom{k-2}{j-2} a^{(\alpha)} (j-2, k-j, F) - \right.$$

$$\left. - \binom{k-1}{k-j-1} a^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) \right] + \Theta \left(N^{-\frac{1}{2}} \right)$$

pois $\sum_{L=1}^{k} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} = k \, \delta_i^{(\alpha)}$. A soma

$$\sum_{c} \left(\sum_{L=1}^{j-1} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right) = \binom{k-2}{j-2} \left(\sum_{L=1}^{k} \varepsilon_{iL}^{(\alpha)} \right)$$ sai do

fato que $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} = 0$ e do resultado seguinte :

- Sejam $a_1, \ldots, a_m$ números reais distintos e considere as $n!$ permutações σ de $a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}$, cujas imagens de um determinado σ são da forma $\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\}$. Tomando as $n!$ permutações possíveis obteremos $\binom{n}{j}$ conjuntos distintos $\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(j)}\}$.

Vejamos agora quantas vezes o número a_ℓ, $1 \leq \ell \leq k$ aparece nos $\binom{k}{j}$ conjuntos distintos $\{a_{\sigma(1)}, \ldots a_{\sigma(j)}\}$ quando se toma as $k!$ permutações. Para isto basta saber o número de conjuntos distintos da forma $\{a_\ell, a_{\bar{\sigma}(1)}, \ldots, a_{\bar{\sigma}(j)}\}$ onde $\bar{\sigma}$ é uma permutação de $\{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_{\ell+1}, \ldots, a_k\}$. Este número é $\binom{k-1}{j-1}$. Deste modo

$$\sum_{c} \left(\sum_{\ell=1}^{j} a_{\sigma(\ell)} \right) = \binom{k-1}{j-1} \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell ,$$

onde $\sum_{c}$ denota as $\binom{k}{j}$ combinações dos índices $\sigma_{(\ell)}$ escolhidos dos k distintos índices, $1, \ldots, k$.

<u>Teorema 5.8</u>

Suponha válidas as condições do Teorema 5.7.

Seja,

$$(5.42)\quad T_n = \frac{N(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (U_{in} - \bar{U}_n)\, Q' (Q\ S\ Q')^{-1} .$$

$$. \ Q(U_{in} - \bar{U}_n)$$

onde Q é qualquer matriz $q \times p$ de posto q. Então sob $\{ H_N \}$ com $n_i \to \infty$

$$(5.43)\quad T_n \xrightarrow{D} \chi^2_{(q(k-1),\ \lambda_Q(\phi,\ \delta,\ F))}$$

e o parâmetro de não centralidade é :

$$(5.44)\quad \lambda_Q(\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (\gamma_i - \bar{\gamma})' Q' (Q\ S\ Q')^{-1} .$$

$$. \ Q(\gamma - \bar{\gamma}) \quad \text{onde } \bar{\gamma} = \Sigma_i\ p_i \gamma_i$$

<u>Demonstração</u>

Por argumentos usados em Bhapkar (1965) ou pelo raciocí - nio do Teorema 5.5 temos que se $U' = (U_o', U_1')$, T_n pode ser expresso por,

$$(5.45)\quad T_n = N(U_{o,n} - \phi j)' (\Sigma_{11}^{-1} \otimes Q' (Q\ S\ Q')^{-1} Q) .$$

$$. (U_{o,n} - \phi j) = N \left[(I_{k-1} \otimes Q)(U_{o,n} - \phi j) \right]' .$$

$$. \left[\Sigma_{11}^{-1} \otimes (Q\ S\ Q')^{-1} \right] \left[(I_{k-1} \otimes Q)(U_{o,n} - \phi j) \right]$$

Por (5.36)

$$N^{-\frac{1}{2}} (U_{o,n} - \phi j) \xrightarrow{D} N(\gamma(F), \Sigma_{11} \otimes S)$$

Então

$$N^{-\frac{1}{2}} (I_{k-1} \otimes Q) (U_{o,n} - \phi j) \xrightarrow{D} N((I_{k-1} \otimes Q) \gamma (F) ,$$

$$, (I_{k-1} \otimes Q)' (\Sigma_{11} \otimes S) (I_{k-1} \otimes Q))$$

Mas

$$(I_{k-1} \otimes Q)' (\Sigma_{11} \otimes S) (I_{k-1} \otimes Q) = \Sigma_{11} \otimes (Q' S Q)$$

por raciocínio análogo a (5.29). Portanto

$$N^{-\frac{1}{2}} \left[(I_{k-1} \otimes Q) (U_{o,n} - \phi j) \right]' (\Sigma_{11} \otimes (Q' S Q)^{-1}) .$$

$$. (I_{k-1} \otimes Q) (U_{o,n} - \phi j)$$

tende em distribuição para uma qui-quadrado com q(k-1) graus de liberdade, pois o posto de Q é q, e parâmetro de não centralidade dado por

$$(5.46) \quad \left[(I_{k-1} \otimes Q) \gamma_o (F) \right]' (\Sigma_{11} \otimes (Q S Q')^{-1}) .$$

$$. \left[(I_{k-1} \otimes Q) \gamma_o (F) \right]$$

com

$$\gamma'(F) = (\gamma_1' (F) , \gamma_o' (F)) , \quad \text{pois}$$

$$(\Sigma_{11} \otimes (Q S Q')) (\Sigma_{11}^{-1} \otimes (Q S Q)^{-1}) .$$

$$.(\Sigma_{11} \otimes (Q S Q')) = \Sigma_{11} \otimes (Q S Q') .$$

Note que (5.46) é equivalente a (5.44).

$\square$

O resultado do teorema anterior continua válido se substituirmos S por um estimador consistente $\hat{S}$, fato este mostrado por Bhapkar (1965).

Se trocarmos S por um estimador consistente $\hat{S}$ em (5.42) e Q por I_p e P obtemos respectivamente (5.17) e (5.25) e como consequência (5.26).

<u>Corolário 5.8</u>

Assumindo as condições do Teorema 5.7 e sendo $T_{o,n}$, $T_{1,n}$ e $T_{2,n}$ definidas por (5.16), (5.20) e (5.21) respectivamente, temos :

$$T_{o,n} \xrightarrow{D} \chi^2 \left(p\,(k-1),\ \lambda_o\,(\phi, \delta, F) \right)$$

$$(5.47)\quad T_{1,n} \xrightarrow{D} \chi^2 \left((p-1)\,(k-1),\ \lambda_1\,(\phi, \delta, F) \right)$$

$$T_{2,n} \xrightarrow{D} \chi^2 \left(k-1,\ \lambda_2\,(\phi, \delta, F) \right)$$

onde

$$\lambda_o\,(\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(\gamma_i - \bar{\gamma})'\,\hat{S}^{-1}\,(\gamma_i - \bar{\gamma})$$

$$(5.48)\quad \lambda_1\,(\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(\gamma_i - \bar{\gamma})\ .$$

$$.\left[\hat{S}^{-1} - \gamma\,\hat{S}^{-1} J\,\hat{S}^{-1} \right] (\gamma_i - \bar{\gamma})$$

$$\lambda_2 (\phi , \delta , F) = \lambda_o (\phi , \delta , F) - \lambda_1 (\phi, \delta , F)$$

$\square$

Teorema 5.9

Suponha que as condições do Teorema 5.7 continuam válidas e suponha

$q^{(\alpha)} (\phi, F) \neq 0$. Então

(i) $T_{o,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{p(k-1)} \iff H_o$ vale $(H_o : F_1 = \ldots = F_k)$

Entretanto se $F^{(\alpha)} = F^{(\beta)}$ para $\alpha \neq \beta$, então

(ii) $T_{1,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{(p-1)(k-1)} \iff \delta_i^{(1)} = \ldots = \delta_i^{(p)}, \quad i = 1, \ldots, k.$

(iii) $T_{2,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{k-1} \iff H_o$ vale, assumindo $\delta_i^{(\alpha)} = \delta_i^{(\beta)}$ para todo $\alpha \neq \beta$.

Demonstração

(i) De (5.48) vimos que $\lambda_o = 0 \iff \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (\gamma_i - \bar{\gamma}) .$

$. S^{-1} (\gamma_i - \bar{\gamma}) = 0$

Como S^{-1} é positiva definida concluimos que

$\lambda_o = 0 \iff \gamma_i = \bar{\gamma} , \quad \forall i \iff \gamma_i = \gamma_j , \quad \forall i,j \iff$

$\gamma_i^{(\alpha)} = \gamma_j^{(\alpha)} \quad \forall i,j, \alpha$. Mas $\gamma_i^{(k)} = k \, \delta_i^{(\alpha)} \, q^{(\alpha)} (\phi, F)$,

$$\gamma_i^{(\alpha)} = \gamma_j^{(\alpha)} \quad \forall i, \alpha, j \iff \delta_i^{(\alpha)} = \delta_j^{(\alpha)} \quad \forall i, \alpha, j$$

pois $q^{(\alpha)} (\phi, F) \neq 0 \iff H_o$ vale

(ii) De (5.48),

$$\lambda_1 = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i (\gamma_i - \bar{\gamma}) (S^{-1} - \gamma S^{-1} \gamma' S^{-1}) (\gamma_i - \bar{\gamma}) =$$

$$= \gamma_o' (F) (I_{k-1} \otimes P) (\Sigma_{11}^{-1} \otimes (P S P')^{-1}) \cdot$$

$$\cdot (I_{k-1} \otimes P) \gamma_o (F)$$

onde P é de posto $p-1$ e $Pj = 0$, por (5.29). Deste modo $\lambda_1 = 0 \iff$

$$(I_{k-1} \otimes P) \gamma_o (F) = 0 \iff P \gamma_i (F) = 0, \quad i = 2, \ldots, k .$$

Pelo teorema 5.7 temos que

$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^{(\alpha)} (F) = k q^{(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \delta_i^{(\alpha)} = 0$, do que segue

$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i (F) = 0$. Portanto $P \gamma_1 (F) + \sum_{i=2}^{k} P \gamma_i (F) = P\ O = 0$

Como $\sum_{i=2}^{k} P \gamma_i (F) = 0$, conclui-se que $P \gamma_1 (F) = 0$

Logo

$$\lambda_1 = 0 \iff P\ \gamma_i\ (F) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

Como assumimos que $F^{(\alpha)} = F^{(\beta)}$, $\forall\ \alpha, \beta$ então $q^{(\alpha)} = q^{(\beta)}$, $\forall\ \alpha, \beta$, portanto,

$P\ \gamma_i = 0 \iff P\ (\delta_i^{(1)}, \ldots, \delta_i^{(p)})' = 0$. Como o posto do núcleo de P é 1 e $Pj = 0$, concluimos que $(\delta_i^{(1)}, \ldots, \delta_i^{(p)})' = a_i j$. Portanto $\delta_i^{(\alpha)} = \delta_i^{(\beta)}$ $\forall\ \alpha, \beta$, e todo i.

(iii) O parâmetro de não centralidade da distribuição T_2 é $\lambda_2 = \lambda_o - \lambda_1$. Como é assumido que $F^{(\alpha)} = F^{(\beta)}$, $\delta_i^{(\alpha)} = \delta_i^{(\beta)}$, $\forall\ \alpha, \beta$, por (ii) conclui-se que $\lambda_1 = 0$. Deste modo $\lambda_2 = \lambda_o$.

Por (i) $\lambda_2 = 0 \iff H_o$ vale.

$\square$

5.1.5 - <u>Conclusão</u>

A estatística $T_o = T_{o,n}$ compara as k amostras levando em consideração a diferença entre amostras com respeito as p variáveis (compara vetores), enquanto que T_1 compara as diferenças entre amostras para as diferentes variáveis do p vetor (compara cada componente do p-vetor). Deste modo se H_o é falsa e existem diferenças reais entre as amostras levando a um valor significantemente grande de T_o, o componente T_1 extrai de T_o a contribuição devido à interação entre as p - variáveis e as k - amostras.

O resto, $T_2 = T_o - T_1$, testa a diferença entre os efeitos principais. Se T_1 é aceito, T_2 é usado para testar a igualdade entre perfis.

Para grandes amostras T_1 é tomada com distribuição $\chi^2_{(p-1)(k-1)}$ sendo uma estatística teste para H_1^*. T_o é tomada com distribuição $\chi^2_{p(k-1)}$ para testar H_o. T_2 é interpretado como χ^2_{k-1} para testar $H_2 = H_o / H_1^*$. (H_o dado H_1^*) e serve para testar se os perfis são idênticos, dados que são paralelos.

A consistência de T_o, T_1 e T_2 para uma determinada ϕ, bem como as propriedades assintóticas destes foram estabelecidas.

5.2 - TESTES NÃO PARAMÉTRICOS PARA ANÁLISE DE PERFIL DE VÁRIAS AMOSTRAS MULTIVARIADAS DE POPULAÇÕES QUE DIFEREM POR ESCALA

Nós agora focalizamos nossa atenção em uma família de populações com distribuições

$$(5.49) \quad F_i\,(x_1,\ldots,x_p) = F\left(\frac{x_1}{\theta_i^{(1)}}, \ldots, \frac{x_p}{\theta_i^{(p)}}\right), \; i=1,\ldots k$$

isto é :

$$(5.50) \quad F_i\,(X) = F\,(\partial_i^{-1} X)$$

onde θ_i é uma matriz diagonal $p \times p$ com elementos $\theta_i^{(1)}, \ldots, \theta_i^{(p)}$ na diagonal, $\theta_i^{(\alpha)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$; $\alpha = 1, \ldots, p$.

Note que para testar as hipóteses sobre distribuição de populações, que diferem por escala, é desejável que a $\underline{\phi}$ das U's estatísticas, as quais usaremos posteriormente, como no caso de populações que diferem por localização, sejam sensíveis a diferença por escala.

Assumindo o modelo (4.84), a hipótese de homogeinidade é dada por

(5.51) $\quad H_o : \theta_i = I, \quad \forall i$

versus a alternativa

$$\theta_i \neq I \text{ para algum } i.$$

A hipótese de paralelismo dos perfis, H_1^*, continuará sendo a mesma que no caso de localização de amostras.

Esboçaremos a seguir, condições sobre as populações que diferem por escala, que impliquem a hipótese H_1^*. Tais condições darão uma interpretação razoável da hipótese do paralelismo dos perfis, no caso das populações que diferem por escala.

<u>Teorema 5.10</u>

Suponha $X_1, \ldots, X_k$ independentes com f.d.a

$$F_i(X) = F(\theta_i^{-1} X), \quad i = 1, \ldots, k,$$

respectivamente, para alguma F contínua, e assuma que as f.d.a. marginais $F^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p$ de F sejam idênticas. Então a condição

$$(5.52) \qquad \frac{\theta_i^{(\alpha)}}{\theta_1^{(\alpha)}} = \frac{\theta_i^{(\alpha)}}{\theta_1^{(1)}} \quad ; \quad i = 2, \ldots, k; \alpha = 2, \ldots, p.$$

implica H_1^*.

Demonstração

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)}(F) = P(R_i^{(\alpha)} = j) =$$

$$= \sum_c \Big[\text{cada um dos } \{ X_{i(\ell)}^{(\alpha)}, \ell = 1, \ldots, j-1 \} < X_i^{(\alpha)} <$$

$$< \text{cada dos } \{ X_{i(m)}^{(\alpha)}, m = j+1, \ldots, k \} \Big]$$

onde $\sum_c$ denota a soma das $\binom{k-1}{j-1}$ combinações dos subscritos $i(\ell)$, $\ell = 1, \ldots, j-1$ escolhidos sobre os $k-1$ distintos índices $i(\ell), \ell = 1, \ldots, k$ (exceto j), denotando inteiros $1, \ldots, k$, exceto i.

Como $Y_i = \theta_i^{-1} X_i$, $i = 1, \ldots, k$ são i.i. distribuidos com f.d.a. F, segue que

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)}(F) = \sum_c P\Big[\text{cada dos } \{\theta_{i(\ell)}^{(\alpha)} Y_{i(\ell)}^{(\alpha)}, \ell = 1,\dots,j-1 <$$

$$< \theta_i^{(\alpha)} Y_i^{(\alpha)} < \text{cada dos } \{\theta_{i(m)}^{(\alpha)} Y_{i(m)}^{(\alpha)}, m = j+1,\dots,k\}\Big] =$$

$$= \sum_c P\Big[\text{cada dos } \{\frac{\theta_{i(\ell)}^{(\alpha)}}{\theta_i^{(\alpha)}} Y_{i(\ell)}^{(\alpha)} \ \ell = 1,\dots,j-1\} <$$

$$< Y_i^{(\alpha)} < \frac{\theta_{i(m)}^{(\alpha)}}{\theta_i^{(\alpha)}} Y_{i(m)}^{(\alpha)}, \quad m = j+1, \dots, k\Big] =$$

$$= \sum_c P\Big[\text{cada um dos } \Big\{\frac{\theta_{i(\ell)}}{\theta_i} Y_{i(j)}^{(\alpha)}, \ell = 1,\dots,j-1\Big\} <$$

$$< Y_i^{(\alpha)} < \text{cada um dos } \Big\{\frac{\theta_{i(m)}}{\theta_i} Y_{i(m)}^{(\alpha)}, m = j+1,\dots,k\Big\}\Big]$$

pois

$$\frac{\theta_{i(j)}^{(\alpha)}}{\theta_i^{(\alpha)}} = \frac{\dfrac{\theta_{i(j)}^{(\alpha)}}{\theta_1^{(\alpha)}}}{\dfrac{\theta_i^{(\alpha)}}{\theta_1^{(\alpha)}}} \quad \text{e por} \quad (5.52)$$

$$\frac{\theta_{i(j)}^{(\alpha)}}{\theta_i^{(\alpha)}} = \frac{\dfrac{\theta_{ij}^{(1)}}{\theta_1^{(1)}}}{\dfrac{\theta_i^{(1)}}{\theta_1^{(1)}}} = \frac{\theta_{i(j)}^{(1)}}{\theta_i^{(1)}}$$, portanto independente

de α.

Como as f.d.a. marginais $F^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p$ são idênticas, a Σ_c é a mesma para todo α, então

$$\gamma_{ij}^{(\alpha)}(F) = \gamma_{ij}^{(\beta)}(F), \quad \forall\ \alpha, \beta .$$

A condição (5.52) para populações que diferem por escala, é assim vista como a condição H_1 (5.3) para populações que diferem por localização. Nós podemos notar aqui, que a condição de igual variância marginal das p respostas juntamente com (5.3), para famílias que diferem por localização, pareceu ser natural para dar perfis paralelos. De modo análogo, a condição de igual localização das p respostas (a qual é implicada pela condição de igualdade das f.d.a. $F^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, p$) juntamente com a condição (5.3) parece ser natural para dar perfis paralelos. Façamos um gráfico para ilustração.

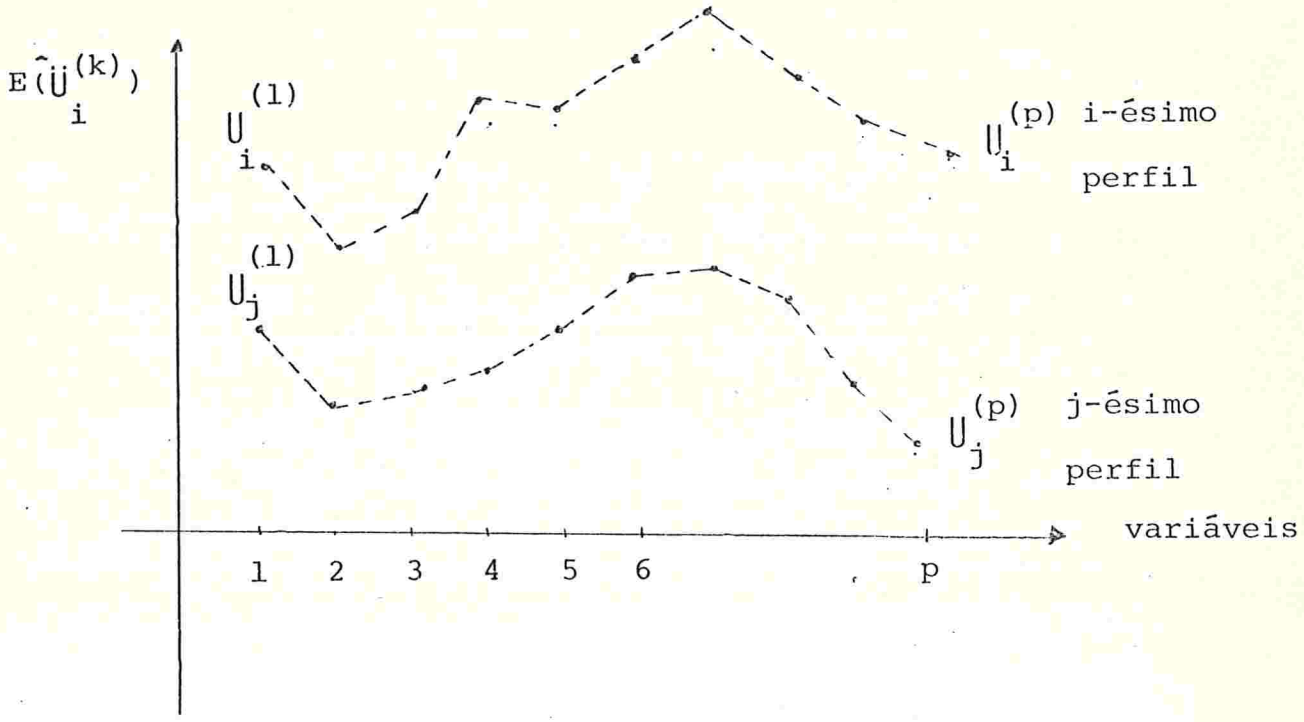
Coloquemos no eixo vertical as $U_i^{(\alpha)}(F)$ e no eixo das abcissas as p - variáveis, identificando-as com os números 1, ..., p, respectivamente.

Note que ao fazer o gráfico nós colocaremos "estimativas" de

$$\eta_i^{(\alpha)}(F) = E(U_i^{(\alpha)}) = E\ \phi_i^{(\alpha)}(X_1, \ldots, X_k) = \sum_j \phi(j)\ \gamma_{ij}^{(\alpha)}(F),$$

a não ser que se saiba o valor real de $\eta_i^{(\alpha)}(F)$, onde $\gamma_{ij}^{(\alpha)}(F)$ é definido por (5.10). Se H_1^* é verdadeira,

então o perfil de cada população é paralelo ao da outra (e ao eixo dos x). Entretanto se H_o é verdadeira, estes perfis paralelos coincidem, então $\gamma_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{k}$, $\forall i,j,\alpha$.



5.2.1 - <u>Distribuições Assintóticas</u>

O teorema 5.5 nos dá a classe das alternativas fixadas sobre $\mathbb{F} = (F_1, \ldots, F_k)$ onde os testes T_o, T_1 e T_2 são consistentes, isto é, alternativas onde o poder dos respectivos testes tende a 1, com $n_i \to \infty$, $i = 1,\ldots,k$. Nós acharemos agora, a distribuição limite de T_o, T_1 e T_2 sob a sequência de alternativas de Pitman para H_o, dadas por

$$(5.53) \qquad H_N : F_{iN}(x) = F\left[(I + N^{-\frac{1}{2}} \Delta_i) X \right]$$

onde as matrizes diagonais Δ_i's (com $\delta_{i's}^{(\alpha)}$ na diagonal) não são todas iguais e suponhamos que $\sum_{i=1}^{k} \Delta_i = 0$.

Teorema 5.11

Considere a sequência $\{ H_N \}$ de distribuições $\{ F_N \}$ dadas por (5.53). Assuma que $f^{(\alpha)}$ é a derivada de $F^{(\alpha)}$ e existem funções $g^{(\alpha)}$ tais que para h suficientemente pequeno

$$(5.54) \qquad \left| \frac{f^{(\alpha)}(x + h x) - f^{(\alpha)}(x)}{h} \right| \leq | x | \, g^{(\alpha)}(x)$$

para quase todo x , e

$$(5.55) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} | x | f^{(\alpha)}(x) \, d F^{(\alpha)}(x) < \infty \, , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} | x | g^{(\alpha)}(x) \, d F^{(\alpha)}(x) < \infty \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Então com $n_i \to \infty$, tal que $\frac{n_i}{N} \to p_i$, $0 < p_i < 1$.

$$(5.56) \qquad N^{-\frac{1}{2}} (U_n - \phi j) \xrightarrow{D} (\phi (F), \Gamma (F))$$

onde $\Gamma (F)$ é a matriz de covariância limite dada por (5.14) quando H_o (5.5) vale e

$$\phi_i^{(\alpha)}(F) = - k \, \delta_i^{(\alpha)} r^{(\alpha)} (\phi , F); \quad \phi_i' = (\phi_i^{(1)}, \ldots, \phi_i^{(p)})$$

$$\phi' = (\phi_1', \ldots, \phi_k')$$

$$(5.57) \quad r^{(\alpha)}(\phi, F) = \sum_{j=2}^{k} \{ \phi(j) - \phi(j-1) \} \binom{k-2}{j-2} \cdot$$

$$\cdot\, b^{\alpha}(j-2, k-j, F)$$

$$b^{(\alpha)}(a,b,c) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z \left[F^{(\alpha)}(Z) \right]^{a} \left[1 - F^{(\alpha)}(Z) \right]^{c} \cdot$$

$$\cdot\, f^{(\alpha)}(Z)\, d\, F^{(\alpha)}(Z)$$

Demonstração

Para demonstrar este teorema basta provar que para N grande

$$(5.58) \quad E_{H_N}(U_n) = E_{H_o}(U_n) + N^{-\frac{1}{2}} \phi + \theta(N^{-\frac{1}{2}})$$

$$(5.59) \quad N\, Var_{H_N}(U_n) = N\, Var_{H_o}(U_n) + \theta(N^{-\frac{1}{2}})$$

Mostraremos a igualdade (5.58). A prova da igualdade (5.59), por ser trabalhoso será omitida.

Usando a notação do teorema anterior, temos :

$$P_{H_N}\left[R_i^{(\alpha)} = j \right] = \sum_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} F^{(\alpha)} \left[\left(\frac{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_{i(\ell)}^{(\alpha)}}{1 + N^{\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} \right) \cdot y \right]$$

$$\cdot \prod_{m=j+1}^{k} \left(1 - F^{(\alpha)} \left[\frac{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_{i(m)}^{(\alpha)}}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} \right] y \right) \cdot \quad d\, F^{(\alpha)}(y) =$$

$$= \sum_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} F^{(\alpha)} \left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \left(\delta_i^{(\alpha)} - \delta_{i(\ell)}^{(\alpha)} \right)}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} y \right) .$$

$$. \prod_{m=j+1}^{k} \left[1 - F^{(\alpha)} \left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \left(\delta_i^{(\alpha)} - \delta_{i(\ell)}^{(\alpha)} \right)}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} y \right) \right] d F^{(\alpha)} (y)$$

Seja $\varepsilon_{i(\ell)}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)} - \delta_{i(\ell)}^{(\alpha)}$; $\ell = 1, \ldots, j-1$, então

$$(5.60) \quad P_{H_N} \left(R_i^{(\alpha)} = j \right) = \sum_{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} F^{(\alpha)} \left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(\ell)}^{(\alpha)}}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} \right) .$$

$$. \prod_{m=j+1}^{k} \left[1 - F^{(\alpha)} \left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(m)}^{(\alpha)}}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} \cdot y \right) \right] .$$

$$. \; d F^{(\alpha)} (y) .$$

Como existe a derivada de F,

$$(5.61) \quad F^{(\alpha)'}(y) = f^{(\alpha)}(y) = \lim_{N \to \infty} \frac{F^{(\alpha)} \left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(\ell)}^{(\alpha)}}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}} y \right) - F^{(\alpha)} (y)}{- \frac{N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(\ell)}^{(\alpha)} y}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta_i^{(\alpha)}}}$$

então

$$(5.62)\quad F\left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}}\right) - F^{(\alpha)}(y) =$$

$$= -\frac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}\,y}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}}\,f^{(\alpha)}(y) + \frac{-N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}\,y}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}}\,.$$

$\cdot\ \theta_y(1)$, onde $\lim \theta_y(1) = 0$, para cada y fixo. Tirando o valor de $\theta_y(1)$ em (4.97), obtemos

$$(5.63)\quad \theta_y(1) = \frac{F^{(\alpha)}\left(y - \dfrac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}}\right) - F^{(\alpha)}(y)}{\dfrac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}\cdot y}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}}} - f(y).$$

Como para N grande $\dfrac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}}{1+N^{-1/2}\,\delta^{(\alpha)}_{i}} \cong N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}$

pois $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_{i}\right) = 1$, a expressão (5.62)

se transforma ,

$$F^{(\alpha)}\left(y - \frac{N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)} y}{1 + N^{-\frac{1}{2}} \delta^{(\alpha)}_{i}} \right) = F^{(\alpha)}(y) - f^{(\alpha)}(y) N^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)} y + N^{-\frac{1}{2}} y \theta_y (1)$$

Substituindo em (5.60), temos

$$P_{H_N}(R_i^{(\alpha)} = j) = \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} (F^{(\alpha)}(y) - N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)} y f^{(\alpha)}(y) +$$

$$+ N^{-\frac{1}{2}} y \theta_y (1)) \prod_{m=j+1}^{k} (1 - F^{(\alpha)}(y) + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{(\alpha)}_{i(m)} y f^{(\alpha)}(y) +$$

$$+ N^{-\frac{1}{2}} y \theta_y (1)) d F^{(\alpha)}(y) = \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} \{ F^{(\alpha)}(y) -$$

$$- N^{-\frac{1}{2}} y \varepsilon^{(\alpha)}_{i(m)} f^{(\alpha)}(y) \} \prod_{m=j+1}^{k} \{ 1 - F^{(\alpha)}(y) + N^{-\frac{1}{2}} y \cdot$$

$$\cdot \varepsilon^{(\alpha)}_{i(m)} f^{(\alpha)}(y) \} d F^{(\alpha)}(y) + \theta(N^{-\frac{1}{2}}) + \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} y^{k-1} \cdot$$

$$\cdot \left[N^{-\frac{1}{2}} \theta_y (1) \right]^{k-1} d F^{(\alpha)}(y).$$

De (5.63) concluimos que $y\,\theta_y(1) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, pontualmente em R, então $\left[y\,\theta_y(1) \right]^{k-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, pontualmente em R.

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, g^{(\alpha)}(y)\, dF^{(\alpha)}(y) < \infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, f(y)\, dF^{(\alpha)}(y) < \infty$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[|y|\, g^{(\alpha)}(y) \right]^{\ell} \left[|y|\, f(y) \right]^{k-1-\ell} dF^{(\alpha)}(y) < \infty$$

Mas,

$$\left| y\,\theta_y(1) \right| \leq \left| \frac{F^{(\alpha)}\left(y - \dfrac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}}{1+\delta^{(\alpha)}_i N^{-\frac{1}{2}}} \right)}{\dfrac{N^{-\frac{1}{2}}\,\varepsilon^{(\alpha)}_{i(\ell)}}{1+N^{-\frac{1}{2}}\,\delta^{(\alpha)}_i}} \right| \leq$$

$$\leq |y|\, g^{(\alpha)}(y) + |y|\, f^{(\alpha)}(y)$$

Portanto

$$\left| y\,\theta_y(1) \right|^{k-1} \leq \sum_{\ell=1}^{k-1} \left[|y|\, g^{(\alpha)}(y) \right]^{\ell} \cdot$$

$$\left[|y|\, f^{(\alpha)}(y) \right]^{k-1-\ell}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y\, \theta_y (1) \right]^{k-1} d F^{(\alpha)} (y) < \infty$$

Pelo Teorema 5.7, temos

$$\lim_{N \to \infty} \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} y^{k-1} \left[N^{-\frac{1}{2}} \theta_y (1) \right]^{k-1} d F^{(\alpha)} (y) = \theta (N^{-1})$$

Deste modo,

$$P_{H_N} \left[R_i^{(\alpha)} = j \right] = \sum_c \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\ell=1}^{j-1} (f^{(\alpha)} (y) - N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(\ell)}^{(\alpha)} y f^{(\alpha)} (y)) \, .$$

$$. \prod_{m=j+1}^{k} (1 - F^{(\alpha)} (y) + N^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{i(m)}^{(\alpha)} . y f^{(\alpha)} (y)) \, d F^{(\alpha)} (y) + \theta (N^{-1}) =$$

$$= P_{H_o} \left[R_i^{(\alpha)} = j \right] - N^{-\frac{1}{2}} \{ b^{(\alpha)} (j-2, k-j, F) \sum_c \sum_{\ell=1}^{j-1} \varepsilon_{(\ell)}^{(\alpha)} -$$

$$- b^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) \sum_c \sum_{m=j+1}^{k} \varepsilon_{i(m)}^{(\alpha)} \} + \theta (N^{-1}) =$$

$$= P_{H_o} \left[R_i^{(\alpha)} = j \right] - N^{-\frac{1}{2}} k \, \delta_i^{(\alpha)} \left\{ \binom{k-2}{j-2} b^{(\alpha)} (j-2, k-j , F) - \right.$$

$$\left. - \binom{k-2}{j-1} b^{(\alpha)} (j-1, k-j-1, F) \right\} + \theta (N^{-1}) \, .$$

o que estabelece a 1ª parte do teorema.

Teorema 5.12

Suponha válidas as condições do Teorema 5.11 Seja

$$(5.64)\quad T_n = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(U_{in} - \bar{U}_n \right)' Q' \left(Q \; S \; Q' \right)^{-1} .$$

$$. \; Q \left(U_{in} - \bar{U}_n \right)$$

onde Q é qualquer matriz $q \times p$ de posto q. Então sob $\{ H_N \}$, com $n_i \to \infty$ e $\frac{n_i}{N} \to p_i$

$$(5.65)\quad T_n \xrightarrow{D} \chi^2 \left(q(k-1), \lambda_Q (\phi , \delta , F) \right)$$ e parâmetro de não centralidade dado por

$$(5.66)\quad \lambda_Q (\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\phi_i - \bar{\phi} \right)' .$$

$$. \; Q' \left(Q \; S \; Q' \right)^{-1} Q \left(\phi_i - \bar{\phi} \right) ,$$

onde $\bar{\phi} = \sum_{i=1}^{k} p_i \phi_i$

Demonstração

Análoga a demonstração do teorema 5.8.

□

Como no caso de populações que diferem por localização, se substituirmos S por um estimador consistente dele e se tomarmos Q respectivamente igual a I_p, P (P é qual -

quer matriz $(p-1) \times p$ de posto $p-1$ tal que $P\,j = 0$) e $j\,\hat{S}^{-1}$, obtemos o seguinte.

<u>Corolário</u> <u>5.12</u>

Sob as condições do Teorema 4.11, sejam $T_{o,n}$, $T_{1,n}$ e $T_{2,n}$ definidos de maneira análoga ao caso de populações que diferem por localização. Então,

$$T_{o,n} \xrightarrow{D} \chi^2 \left(p\,(k-1),\ \lambda_o\,(\phi, \delta, F) \right)$$

$$T_{1,n} \longrightarrow \chi^2 \left((p-1)\,(k-1),\ \lambda_1\,(\phi, \delta, F) \right)$$

$$T_{2,n} \longrightarrow \chi^2 \left((k-1),\ \lambda_2\,(\phi, \delta, F) \right)$$

onde

$$\lambda_o\,(\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu\,k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(\phi_i - \bar{\phi})'\,\hat{S}^{-1}\,(\phi_i - \bar{\phi})$$

$$\lambda_1\,(\phi, \delta, F) = \frac{(k-1)^2}{\mu\,k^2} \sum_{i=1}^{k} p_i\,(\phi_i - \bar{\phi})' \left[S^{-1} - \gamma\,S^{-1} \cdot J\,S^{-1} \right.$$

$$\left. \cdot\ (\phi_i - \bar{\phi}) \right.$$

$$\lambda_2\,(\phi, \delta, F) = \lambda_o\,(\phi, \delta, F) - \lambda_1\,(\phi, \delta, F)$$

Aqui $\gamma = \dfrac{1}{j' S^{-1} j}$ $\square$

O próximo teorema também segue de maneira análoga o caso de populações que diferem por localização.

Teorema 5.13

Suponha válidas as condições do Teorema 5.11 e suponha $r^{(\alpha)}(\phi, F) \neq 0$. Então

(i) $T_{o,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{(p(k-1))} \Longleftrightarrow H_o$ vale

se $F^{(\alpha)} = F^{(\beta)}$ para $\forall \alpha \neq \beta$, então

(ii) $T_{1,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{((p-1)(k-1))} \Longleftrightarrow \delta_i^{(1)} = \ldots = \delta_i^{(p)}$;

$i = 1, \ldots, k.$

(iii) $T_{2,n} \xrightarrow{D} \chi^2_{(k-1)} \Longleftrightarrow H_o$ vale, desde que assumamos $\delta_i^{(\alpha)} = \delta_i^{(\beta)}$, $\forall \alpha, \beta$.

Observações:

Espera-se que os procedimentos assintóticos, T_1 e T_2 para testar as hipóteses H_1^* e H_2 (H_o / H_1^*), respectivamente, tenham um desempenho razoável para grandes amostras, em análise de perfil de distribuições que dife-

rem por escalar, desde que as funções ϕ sejam efetivas para o tratamento do problema em questão.

Brapkar & Patterson (1978) observaram que os testes T_o e T_1 têm poderes desejáveis, sob H_o, para amostras de pequeno tamanho, da ordem de 20 observações. Também em análise de perfil de distribuições que diferem por localização, T_1 aparece com razoável poder para amostras de pequeno tamanho, da mesma ordem (vinte). Este poder parece ser mais sensível a desvios H_1 (5.3), do que sobre diferenças das distribuições marginais das variáveis, dado que as variáveis tenham a mesma variância e notando-se diferenças sobre as distribuições marginais. Entretanto as diferenças sobre as distribuições marginais, causadas principalmente por variâncias desiguais, também parecem ter algum efeito sobre o poder de T_1.

Exemplifiquemos aqui algumas ϕ de interesse

$$\phi_D(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 1 \text{ ou } k \\ 0, & \text{c. contrário} \end{cases}$$

ϕ_D é sensível a diferenças de distribuições com dupla cauda com um parâmetro de escala (exponencial dupla, etc)

$$\phi_V(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = 1 \\ 0, & \text{c. contrário} \end{cases}$$

$$\phi_B(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } r = k \\ 0, & r \neq k \end{cases}$$

$$\phi_L(r) = \begin{cases} 1, & r = k \\ -1, & r = 1 \\ 0, & \text{c. contrário} \end{cases}$$

$$\phi_W(r) = r$$

As estatísticas ϕ_V, ϕ_B, ϕ_L e ϕ_W são esperadas serem sensíveis a mudança de localização, conforme Brapkar (1966). ϕ_B e ϕ_V são sensíveis a distribuições unicaudais (como exponencial negativa, distribuições tipo gama, etc).

$$\phi_c(j) = \left| j - \frac{k+1}{2} \right|$$

ϕ_D e ϕ_c é sensível a distribuições simétricas F.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES

Faremos agora, algumas aplicações dos assuntos tratados nos capítulos anteriores, com o intuito de ilustrar as informações discutidas neste trabalho.

Nessas aplicações, a maioria dos cálculos foram programados e feitos através do pacote estatístico MINITAB.

EXEMPLO 6.1 - ANÁLISE DE COVARIÂNCIA

Um experimento com ratos foi feito com 4 tipos de ração (tratamentos): caseina ad libitum, caseina com restrição, soja + meteonina ad libitum e soja + meteonina com restrição, tomando-se 5 medidas de cada observação, CEA, CEP, GPT, GOT e Lipase, sendo as duas primeiras índices (coeficiente de eficácia alimentar e coeficiente de eficácia proteica) que medem respectivamente quanto um grama de ração ingerida promove de aumento de peso corporal, quanto um grama de proteína ingerida produz de aumento de peso corporal e as três últimas, enzimas encontradas no fígado.

Estamos interessados em verificar se os 4 tipos de ração produzem diferença significativa na 5-upla (CEA, CEP ,

GPT, GOT, LIPASE) levando em consideração o peso inicial dos ratos (Co-variável), dado este que cremos ser de grande influência na análise do resultado.

Uma amostra de 28 ratos foi dividida em 4 grupos de 7 ratos cada e cada grupo foi alimentado com um tipo de ração. Para cada animal foi tomado (em gramas) o peso inicial P_o e quatro semanas após o tratamento foram medidas as 5 variáveis. Os dados obtidos estão na Tabela 6.1.

Como a amostra é pequena, para cada tratamento, não será possível avaliar a forma da distribuição de cada componente da 5-upla (isto é, se apresentar cauda à esquerda, à direita, se é simétrica, etc), informação necessária para podermos escolher o escore mais sensível a variações de cada componente da 5-upla. Por conveniência de cálculos tomamos

$$j^*_{Nj} = j_{Ni} = I_d \quad \text{para} \quad j = 1; \quad i = 1,\ldots, 5.$$

e não usaremos o alinhamento das observações, o que daria uma eficiência maior a $\mathcal{L}_N$.

Deste modo, para o exemplo, encontramos os seguintes resultados.

$$R_N = \left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc|ccccccc}
10 & 12 & 13 & 11 & 7 & 11 & 7 & 8 & 6 & 6 & 5 & 5 & 1 & 3 & 9 & 10 & 8 & 9 & 7 & 10 & 8 \\
21 & 24 & 25 & 22 & 16 & 23 & 16 & 19 & 12 & 11 & 8 & 9 & 2 & 6 & 16 & 18 & 13 & 17 & 13 & 20 & 14 \\
14 & 12 & 3 & 20 & 18 & 17 & 28 & 8 & 25 & 24 & 19 & 16 & 22 & 23 & 6 & 9 & 1 & 11 & 7 & 2 & 4 \\
6 & 12 & 8 & 9 & 3 & 4 & 5 & 20 & 2 & 14 & 1 & 23 & 24 & 26 & 10 & 7 & 17 & 18 & 15 & 13 & 11 \\
12 & 4 & 6 & 1 & 18 & 5 & 20 & 2 & 23 & 9 & 22 & 11 & 17 & 7 & 24 & 19 & 10 & 15 & 15 & 15 & 25 \\
1 & 3 & 6 & 9 & 12 & 18 & 22 & 4 & 7 & 17 & 14 & 23 & 24 & 27 & 2 & 5 & 8 & 13 & 16 & 20 & 26
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
5 & 4 & 9 & 4 & 2 & 3 & 4 \\
7 & 4 & 15 & 13 & 10 & 1 & 5 \\
26 & 13 & 10 & 27 & 15 & 5 & 21 \\
28 & 19 & 25 & 16 & 21 & 22 & 27 \\
8 & 14 & 21 & 16 & 3 & 6 & 13 \\
10 & 11 & 15 & 19 & 26 & 21 & 28
\end{array}\right]$$

$$L_N = \left(L_{N,i}^{(k)} \right)_{5x4} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,17 & 0,30 & 0,15 \\ 0,73 & 0,33 & 0,55 & 0,22 \\ 0,55 & 0,67 & 0,20 & 0,58 \\ 0,23 & 0,54 & 0,45 & 0,78 \\ 0,33 & 0,45 & 0,61 & 0,40 \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_N = \left(\left(E_{N,k}^{(i)} \right) \right)_{5x4} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,24 & 0,24 & 0,24 \\ 0,45 & 0,45 & 0,45 & 0,45 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 0,50 & 0,50 & 0,50 \\ 0,45 & 0,45 & 0,45 & 0,45 \end{bmatrix}$$

$$V_{12} = \left(V_{ij,12} \right)_{5x1} = \begin{bmatrix} 2,86 \\ 5,31 \\ 7,62 \\ 7,97 \\ 6,30 \end{bmatrix}$$

$$V_{22} = \left(9,25 \right)_{1x1} \Longrightarrow V_{22}^{-1} = \left(0,11 \right)_{1x1}$$

$$T_N = \left(\left(T_{N,i} \right) \right)_{1x4} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,57 & 0,44 & 0,64 \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_N^* = ((E_N^{(i)}))_{1x4} = (0,5 \quad 0,5 \quad 0,5 \quad 0,5)$$

$$L_N^* = L_N - \bar{E}_N + V_{12} \; V_{22}^{-1} \left[T_N - E_N^* \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,02 & -0,23 & -0,60 & -0,28 \\ 0,10 & -0,42 & -0,13 & -0,57 \\ -0,20 & -0,27 & -0,63 & -0,41 \\ -0,53 & -0,42 & -0,39 & -0,24 \\ -0,33 & -0,36 & -0,11 & -0,36 \end{bmatrix}_{5x4}$$

$$V_{11} = \begin{bmatrix} 1,98 & 4,01 & 3,01 & 2,94 & 2,96 \\ 4,01 & 7,44 & 5,67 & 5,31 & 5,39 \\ 3,01 & 5,67 & 9,25 & 7,03 & 6,26 \\ 2,94 & 5,31 & 7,03 & 9,25 & 5,63 \\ 2,96 & 5,39 & 6,26 & 5,63 & 7,20 \end{bmatrix}_{5x5}$$

$$V_{11.22} = V_{11} - V_{12} \cdot V_{22}^{-1} \; V_{12}' = \begin{bmatrix} 1,08 & 2,34 & 0,61 & 0,43 & 0,98 \\ 2,34 & 4,34 & 1,22 & 0,65 & 1,71 \\ 0,61 & 1,22 & 2,86 & 0,34 & 0,98 \\ 0,43 & 0,65 & 0,34 & 2,26 & 0,11 \\ 0,98 & 1,71 & 0,98 & 0,11 & 2,83 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_N = \sum_{k=1}^{4} 7. \; L_{N,k}^{*\,\prime} \; V_{11,22} \; L_{N,k}^{*} = 51,4$$

TABELA 6.1.

	PESO INICIAL	CEA	CET	GPT	GOT	LIPASE
CASEÍNA AD LIBITIM	35,4	0,32	3,60	49,06	350,58	2,21
	37,3	0,36	4,00	46,36	438,53	1,17
	40,6	0,37	4,15	35,45	401,93	1,22
	42,0	0,33	3,69	74,17	407,93	0,78
	43,0	0,29	3,22	62,41	319,53	2,81
	44,9	0,33	3,73	61,98	342,20	1,20
	46,3	0,29	3,22	100,13	345,07	3,61
MÉDIA	41,36	0,33	3,66	61,37	372,22	1,86
CASEÍNA COM RESTRIÇÃO	37,7	0,30	3,30	42,48	799,83	0,90
	40,7	0,27	2,99	89,21	286,60	5,95
	44,6	0,27	2,97	80,13	493,14	1,85
	43,5	0,26	2,89	63,79	255,10	3,65
	46,8	0,26	2,92	56,40	883,75	2,11
	47,1	0,22	2,51	76,70	899,94	2,76
	48,8	0,24	2,69	78,50	1046,67	1,41
MÉDIA	44,17	0,26	2,90	69,46	666,43	2,66
SOJA + METEONINA AD LIBITUM	37,2	0,31	3,22	40,97	422,00	8,72
	39,3	0,32	3,29	44,16	368,06	3,57
	41,9	0,30	3,09	31,51	643,56	1,89
	43,2	0,31	3,28	45,95	656,69	2,66
	44,4	0,29	2,99	41,48	509,80	2,66
	45,4	0,32	3,35	32,82	446,57	2,66
	47,2	0,30	3,11	39,26	431,83	12,36
MÉDIA	42,7	0,31	3,20	39,45	496,93	4,93
SOJA + METEONINA COM RESTRIÇÃO	42,1	0,26	2,70	92,27	1285,03	1,53
	42,2	0,25	2,64	47,84	677,17	2,31
	44,0	0,31	3,20	44,39	1000,75	3,63
	45,3	0,25	2,63	95,69	551,12	2,75
	47,5	0,23	2,95	51,05	800,58	0,92
	45,8	0,24	2,48	40,34	805,59	1,22
	51,2	0,25	2,66	76,11	1137,63	2,28
MÉDIA	45,4	0,26	2,75	64,03	902,61	2,91

onde $L^*_{N,k}$ é a k-ésima coluna de L^*_N .

Como $\mathcal{L}_N$ tem, assintóticamente, distribuição χ^2_{15} concluimos que as rações produzem efeito na 5-upla ao nível de 5%.

EXEMPLO 6.2 - ANÁLISE DE PERFIL

Suponha que no exemplo 6.1. queiramos saber se há interação entre as cinco variáveis CEA, CET, GPT, GOT e Lipase com os 4 tipos de tratamentos. Com este objetivo faremos uma análise de perfil.

Calcularemos inicialmente T_o , a estatística para testar a homogeinidade dada por H_o .

Por conveniência tomaremos o escore

$$\phi_i^{(\alpha)} (x_1 ; \ldots ; x_4) = \phi_1 (r_1^{(\alpha)}) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ se } x_i < x_j \; ; \; i \neq j, \; j=1,\ldots,5 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

onde $r_1^{(\alpha)}$ é o posto de $x_1^{(\alpha)}$ sobre

$$\{ x_j : j = 1, \ldots, 4 \} \quad \text{com} \quad \alpha = 1, \ldots , 5.$$

Deste modo obtemos o que segue :

$$U_1' = (\ 0{,}005\ ;\ \ 0\ \ ;\ 0{,}1020\ ;\ \ 0{,}2916\ ;\ \ 0{,}5619\ )$$

$$U_2' = (\ 0{,}3349\ ;\ 0{,}3032\ ;\ 0{,}0300\ ;\ \ 0{,}2857\ ;\ \ 0{,}2274\ )$$

$$U_3' = (\ 0{,}0021\ ;\ 0{,}0088\ ;\ 0{,}7830\ ;\ \ 0{,}0729\ ;\ \ 0{,}0358\ )$$

$$U_4' = (\ 0{,}5103\ ;\ 0{,}6851\ ;\ 0{,}0850\ ;\ \ \ 0\ \ ;\ \ 0{,}2387\ )$$

Tomando como um estimador consistente da matriz de correlação $\mathcal{P}$, a matriz $\hat{\mathcal{P}} = (\ e_{\alpha\beta}\ )$, proposta por Bhapkar (1966), onde

$$c^{-2} + \mu\ \rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{N^*}\ N_1^*\ (\alpha,\beta)\ ,$$

$$\mu = \frac{(\ c-1\ )^2}{c^2\ (\ 2c-1\ )}$$

$$N^* = \sum_{i=1}^{c} n_i\ (\ n_i - 1\ )\ (\ n_i - 2c + 2\ )\ ,$$

com $N_1^*\ (\ \alpha\ ,\ \beta\ )$ sendo o número de $2c-1$ uplas $X_{ij_1}, \ldots$ $\ldots,\ X_{ij_{2c-1}}$ tal que $X_{ij_1}^{(\alpha)} < X_{ij_k}^{(\alpha)}$; $k = 2, \ldots, c$ e $X_{ij_1}^{(\beta)} < X_{ij_k}^{(\beta)}$, $k = c+1, \ldots, 2c-1$. No exemplo, $n_i = 7$, $i = 1, \ldots, 4$; $c = 4$ e

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} 0,56 & 0,33 & -0,42 & 0,24 & 0 \\ 0,33 & 0,56 & 0,47 & -0,16 & -0,16 \\ -0,42 & 0,47 & 1 & -0,44 & 0,51 \\ 0,24 & -0,16 & -0,44 & 1 & -0,18 \\ 0 & -0,16 & 0,51 & -0,18 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$T_o = \frac{N(c-1)^2}{\mu c^2} \sum_{i=1}^{c} p_i (U_i - \bar{U})' \hat{\varphi}^{-1} (U_i - \bar{U}) =$$

$= 8,23$, não significante, ao nível de 5% pois $T_o \xrightarrow{D} \chi^2_{15}$. Todavia, esta inclusão parece não estar condizente com os dados, pois como vimos no caso do uso do peso como covariável, chegamos a rejeição da hipótese de homogeneidade. Cremos que isto se deve ao fato de que a estimativa de φ usada não é conveniente (talvez os escores não sejam sensíveis as variações das coordenadas). Mudemos então a estimativa de φ dada por Bhapkar pela matriz de correlação usual .

Neste caso

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0,943 & 1 & & \\ -0,454 & -0,364 & 1 & \\ -0,531 & -0,552 & 0,132 & 1 \\ 0,045 & -0,083 & -0,103 & -0,29 \end{bmatrix}$$

e $T_o = 62,94$, levando a rejeição da hipótese de homogeneidade H_o, ao nível de 5%.

Para testarmos a interação calcularemos

$$T_1 = \frac{N(c-1)^2}{\mu c^2} \sum_{i=1}^{c} p_i (U_i - \bar{U})' \left[\hat{\varphi}^{-1} - \hat{\gamma} \hat{\varphi}^{-1} J \hat{\varphi}^{-1} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[U_i - \bar{U} \right] =$$

$$= \frac{28 . 3^2}{\frac{3^2}{4^2.7} . 4^2} \cdot \sum_{i=1}^{4} (U_i - U)' \left[\hat{\varphi}^{-1} - \hat{\gamma} \hat{\varphi}^{-1} J \hat{\varphi}^{-1} \right] \cdot$$

$$\cdot (U_i - \bar{U}) = -1,12,$$

concluindo que não há interação dos tratamentos com as variáveis coordenadas (isto é os perfis são paralelos) ao nível de 5%.

Note que $T_2 = T_o - T_1 = 64,06$ levando também a rejeição da hipótese de igualdade dos efeitos principais (ou igualdade dos perfis).

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, T.W. (1958) An introduction to Multivariate Analysis, John Wiley and Sons, New York.

[2] BHAPKAR,V.P. (1966). Some nonparametric tests for the multivariate several sample location problem, Proc. Internat. Symp. Multi.Analysis pag 29-42, Academic Press, New York

[3] BHAPKAR,V.P. & DESHPANDE, J.V. (1968). Some nonparametric tests for multi-sample problems, Technometrics, 10: 578-585

[4] BHAPKAR, V.P. & PATTERSON, K.W. (1977). On some nonparametric testes for profile analysis of several multivariate samples, J. Multivariate Analysis, 7: 265-277

[5] BHAPKAR, V.P. (1979). Nonparametric tests for scalar profile analysis of several multivariate samples, Ann. Inst. Statist. Math., 31,(A) 9-20

[6] CHERNOFF, H & SAVAGE, T.R. (1958) Asymptótic efficiency and normality of certain nonparametric tests, Ann. Math. Statist. 29: 972-994

[7] HOLLANDER, M & WOLFE, D.A. (1973) Nonparametric Statistical methods. John Wiley and Sons, New York.

[8] KRISHNAIAH, P.R. & SEN, P.K. (1971). On a class of simultâneos rank order tests in MANOCOVA, Ann. Inst. Statist. Math., 26: 135-145

[9] MORRISON, D. (1967). Multivariate statistical methods, Mc Graw-Hill, New York.

[10] PURI, M.L. (1964) Asymptotic efficiency of a class of c-sample tests, Ann. Math. Statist 35:102-121

[11] PURI, M.L. & SEN, P.K. (1966). On a class of multivariate multi-sample rank order testes, Sankhyã Ser A. 28: 353-376

[12] PURI, M.L. & SEN, P.K. (1967). On the theory of rank order tests for location in the multivariate one-sample problem, Ann.Math.Statist 1216-1227

[13] PURI, M.L. & SEN, P.K. (1968). On a class of rank order estimatives of contrastes in MANOVA, Sankhya Ser. A, 30: 31-36

[14] PURI, M.L. e Sen, P.K. (1969). Analysis of covariance basead on general rank scores, Annals of Math. Statit. 2: 610 - 618.

[15] PURI, M.L. & SEN, P.K. (1970). Asymptotic theory of likelihood ratio and rank order tests in some multivariate linear model's, Annals of Mathematical Statistcs 41: (1) 87 - 100

[16] PURI, M.L. & SEN, P.K. (1971). Nonparametric methods in multivariate analysis, John Wiley and Sons, Inc., New York

[17] QUADE, D. (1967). Rank Analysis covariance, J.Amer. Statist. Assoc. 62: 1187 -1200

[18] RANDES, R.H. & WOLFE, D.A. (1979). Introduction to the theory of nonparametric statistics, John Wiley and Sons, N.York.

[19] SCHEFFÉ, H. (1959). The Analysis of Variance, John Wiley and Sons, Inc. New York

[20] SEN, P.K. (1967). On some non-parametric generalization of wilk's tests for H_M,H_{VC} and H_{MVC}, I. Ann. Inst. Statist. Math. 19: 451 - 471

[21] SEN, P.K. (1968). On a class of aligned rank tests in two way layouts Ann. Math Statist., 39:1115-1124

[22] SEN, P.K. & PURI, M.L. (1969). A class of rank order tests for a general linear hypothesis, Ann. Math. Statist. 40: 1325 - 1343

[23] SEN, P.K. (1971). Asymptotic efficiency of a class of aligned rank order tests for multirepouse experiments in some incomplete block designs, Ann. Math. Statist., 42: 1104 - 1112

[24] SRIVASTAVA, M.S. (1972). Asympotic most powerful rank tests for regression parameters in MANOVA, Ann. Inst. Statis. Math, 24: 285 - 297

[25] SUGUIRA, N (1965). Multisample and multivariate nonparametric tests based on U-statistic and their asymptótic eficiencies, Osaka J. Math. 2: 385 - 426

[26] SVERDRUP, E. (1952). The limit distribuition of a continuos functions of randon variables, Skand Aktuarietidskr 35: 1 - 10

[27] TAMURA, R. (1966). Multivariate nonparametric several sample tests, Ann. Math. Statist. 37:611-618

[28] WALD A. (1943). Tests of statitical hypoteses concerning several parameters when the number of observations is large, Trans Americ. Math. Soc., 54: 426 - 482