USO DE ESTIMADORES RAZÃO PARA CONSTRUÇÃO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA EM SIMULAÇÃO

José Edmilson Mazza Batista

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
ESTATÍSTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROBABILIDADE

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS ALBERTO BARBOSA DANTAS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e UFPe

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1983 -

À Socorro, Eduardo

e Mariana

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Carlos Alberto Barbosa Dantas pela segura orientação e atenção que sempre me dispensou.

A cada um daqueles professores e colegas do Programa de Mestrado da USP bem como do Departamento de Estatística da U.F.PE., pela colaboração, incentivo e atenção.

Ao estudante Eduardo Vanderley Cavalcante pela colaboração na execução do programa computacional.

Aos amigos Péricles e Angela pelas sugestões gramaticais.

As funcionárias da Biblioteca do IME-USP e da U.F.PE., pelo bom atendimento oferecido durante a pesquisa.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO..... 1

CAPÍTULO 2 - O MÉTODO REGENERATIVO..... 4

2.1 - Introdução..... 4

2.2 - Tópicos da Teoria da Renovação..... 5

2.3 - Processos Regenerativos..... 15

CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DOS ESTIMADORES TIPO RAZÃO... 23

3.1 - Introdução..... 23

3.2 - Comparação Entre Estimadores..... 34

3.3 - Uso dos Estimadores Razão em Problemas de Fila..... 40

3.3.1 - Introdução..... 40

3.3.2 - Fila GI/G/1..... 43

3.4 - Tamanho da Amostra, Gerador de Números Aleatórios e Programa Computacional..... 49

CAPÍTULO 4 - COMPARAÇÕES ENTRE OS ESTIMADORES ATRAVÉS DE DADOS SIMULADOS..... 51

4.1 - Introdução..... 51

4.2 - Resultados Experimentais..... 52

4.3 - Conclusões..... 65

BIBLIOGRAFIA..... 66

APÊNDICE..... 70

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Inúmeros problemas do mundo real envolvem sistemas de natureza aleatória, isto é, sistemas estocásticos.

Ocorre com freqüência que os modelos matemáticos desses sistemas têm grande grau de complexidade, não sendo possível algumas vezes encontrarmos fórmulas analíticas para descrever o seu comportamento. Na teoria das filas, quando os intervalos entre chegadas e os tempos de serviços não são exponenciais, em geral não obtemos fórmulas analíticas para a distribuição estacionária quer do número de elementos no sistema quer para o tempo de espera na fila. Nas redes de filas e redes de comunicações é difícil determinar fórmulas analíticas para as medidas de desempenho desses sistemas. Além de métodos de aproximação, a simulação desses sistemas é um instrumento importante para o seu estudo.

O principal objetivo da maioria das simulações de sistemas estocásticos é estimar propriedades do comportamento estacionário do mesmo, tais como obter estimativas pontuais ou intervalos de confiança para a média da sua distribuição estacionária ou funções da mesma.

Como em geral as observações $X_1, X_2, \ldots$ geradas através da simulação são correlacionadas, os métodos da estatística clássica para obtenção de intervalos de confiança, baseados em seqüências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, não são aplicáveis.

Algumas aproximações têm sido utilizadas para enfrentar o problema da correlação, como por exemplo, agrupar as observações em blocos aproximadamente independentes e identicamente distribuidos e então utilizar os métodos da estatística clássica. Este procedimento é adotado nos métodos de réplicas e blocos.

Métodos de análise de séries temporais, que levam em consideração a existência da correlação entre as observações, podem também ser utilizados.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns resultados fundamentais da teoria da renovação e dos processos regenerativos. O primeiro a introduzir o processo regenerativo foi Smith (1955 e 1958), seguido de Miller (1972).

O método regenerativo permite a obtenção de blocos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tem a vantagem de eliminar os problemas decorrentes da escolha do estado inicial da simulação e permite que se apliquem os resultados da estatística clássica.

No Capítulo 3, apresentaremos estimadores pontuais e intervalos de confiança para parâmetros associados à distribuição estacionária de processos que podem ser modelados como processos regenerativos. Consideraremos em especial a construção de intervalos de confiança para a média da distribuição estacionária.

No Capítulo 4, faremos as aplicações práticas e simularemos uma fila M/M/1 usando o método regenerativo, a fim de estimarmos o tempo médio de espera na fila sob a distribuição estacionária, através dos estimadores apresentados no Capítulo 3. Intervalos de confiança para o tempo médio de espera na fila, serão apresentados e determinada a proporção de cobertura para os mesmos.

Para obtenção destes resultados foi elaborado um programa computacional em linguagem Fortran, na versão Flex, que apresentaremos no Apêndice, onde também serão apresentados alguns tópicos pertinentes ao desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO REGENERATIVO

2.1 - INTRODUÇÃO

O método regenerativo é uma técnica que possibilita o uso dos métodos da estatística clássica como conseqüência da obtenção de um grupo de observações aleatórias, que grupadas de acordo com os sucessivos retornos para uma determinada condição, produzem blocos independentes e identicamente distribuídos.

Assim, os problemas de dependência entre observações e a dificuldade em começarmos o sistema no estado de equilíbrio, são eliminados, pois, é possível tomarmos um estado em que o sistema se regenera como o estado inicial e fixarmos um certo número de ciclos para rodarmos a simulação, obtendo então, observações em blocos independentes e identicamente distribuídos.

O uso de tal método é possível quando o processo simulado é um processo "regenerativo", do qual trataremos neste capítulo.

Como os processos regenerativos estão fundamentados

na teoria da renovação, que é uma importante ferramenta da teoria da probabilidade, apresentaremos inicialmente alguns dos principais resultados daquela teoria.

2.2 - TÓPICOS DA TEORIA DA RENOVAÇÃO

Consideremos um determinado fenômeno, sendo $\{X_k, k \geq 1\}$ a seqüência de instantes entre ocorrências sucessivas deste fenômeno. Seja

$$S_o = 0$$

e

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \; n \in N$$

que representa o tempo total até a n-ésima ocorrência.

Definição 2.2.1 - A seqüência $S = \{S_n : n \in N\}$ será um processo de renovação se $X_1, X_2, \ldots$ forem variáveis aleatórias não-negativas, independentes, e identicamente distribuídas. Então os S_n são chamados tempos de renovação.

Sejam a função de distribuição comum e o tempo médio comum das variáveis X_k's dados respectivamente por:

$$F(t) = P(X_k \leqslant t), \quad k \geqslant 1$$

e

$$\mu = E(X_k) = \int xF(dx), \quad k \geqslant 1 \qquad (2.2.2)$$

Suporemos $F(0) = P(X_k = 0) < 1$ e que $E(X_k) < \infty$, $k \geqslant 1$.

Pela lei forte dos grandes números, temos que:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \mu, \text{ com probabilidade 1.} \qquad (2.2.3)$$

Agora, consideremos também o número de renovações no intervalo de tempo $[0;t]$ dado por:

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leqslant t\}. \qquad (2.2.4)$$

O principal objetivo da teoria da renovação é obter propriedades de certas variáveis aleatórias associadas com $\{N(t)\}$ e $\{S_n, n \geqslant 0\}$, como por exemplo, o número médio de renovações em $[0,t]$.

Para calcularmos a distribuição de probabilidade de $N(t)$, temos que

$$N(t) \geqslant n \Longleftrightarrow S_n \leqslant t \qquad (2.2.5)$$

então

$$P[N(t) = n] = P[N(t) \geqslant n] - P[N(t) \geqslant n+1]$$

$$= P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t)$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad t \geqslant 0, \; n \geqslant 1$$

onde

$$F_n(t) = \int_0^\infty F_{n-1}(t-x)\, dF(x) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)\, dF(x) \qquad (2.2.6)$$

é a fórmula da convolução das "n" variáveis aleatórias (ver Apêndice).

Seja $M(t)$, o número médio de renovações no intervalo $[0,t]$, denominado por função renovação, então

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \qquad (2.2.7)$$

Para verificação desta igualdade consideremos

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

onde

$$A_n = \begin{cases} 1, \text{ se a n-ésima renovação ocorreu em } [0,t]; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n=1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leqslant t)$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

<u>Teorema</u> <u>2.2.8</u> - Seja $S = \{S_n : n \in N\}$ um processo de renovação, e suponha que $F(t)$ seja tal que $F(0)<1$ então $M(t) < \infty$ para $0 \leqslant t < \infty$.

A prova deste teorema encontra-se em Çinlar (1975) e Ross (1970), por exemplo, sendo por isso, aqui omitida.

Mostraremos que $M(t)$ (2.2.7) satisfaz a seguinte equação:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)\, dF(x), \quad t \geqslant 0 \qquad (2.2.9)$$

Para obtenção de tal resultado definiremos a esperança condicional de $N(t)$ dado o tempo da primeira renovação:

$$E[N(t)/X_1=x] = \begin{cases} 0, & x>t; \\ 1 + M(t-x), & x\leq t. \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

então

$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[N(t)/X_1=x]\, dF(x)$$

$$= \int_0^t [1 + M(t-x)]\, dF(x)$$

logo

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)\, dF(x)$$

que é chamada equação renovação.

Uma generalização da equação renovação é a seguinte:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)\, dF(x), \quad t\geq 0 \qquad (2.2.11)$$

onde, h e F são funções conhecidas e o problema é determinar g como solução da equação 2.2.11.

<u>Teorema 2.2.12</u> - Suponha que h(t) seja uma função limitada. Existe uma única função g limitada em intervalos finitos que satisfaz a equação renovação (2.2.11) e

esta função é:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)\, dM(x) \qquad (2.2.13)$$

onde $M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ é a função renovação.

<u>Demonstração</u>: A equação 2.2.11 em termos de convolução é:

$$g = h + g * F;$$

tomando a transformada de Laplace temos:

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{g}(s)\, \tilde{F}(s) \qquad (2.2.14)$$

donde vem

$$\tilde{g}(s) = \frac{\tilde{h}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$$

ou

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) \left[\frac{1}{1-\tilde{F}(s)}\right] = \tilde{h}(s) \left[1 + \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}\right];$$

usando o fato de que $\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$ temos então

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\,\tilde{m}(s) \qquad (2.2.15)$$

donde obtemos então 2.2.12. A unicidade é garantida, desde que a transformada de Laplace determina unicamente a função.

Apresentaremos a seguir alguns resultados fundamentais da teoria da renovação.

<u>Teorema</u> <u>2.2.16</u> - Com probabilidade 1

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \qquad (2.2.17)$$

<u>Demonstração</u>: Temos que

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \qquad (2.2.18)$$

pela lei forte dos grandes números, com probabilidade 1

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu.$$

Desde que $N(t) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \infty$ com probabilidade 1,

temos que:

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \mu \quad \text{com probabilidade 1.} \qquad (2.2.19)$$

Pelo mesmo argumento, temos com probabilidade 1, que:

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \mu \qquad (2.2.20)$$

pois $\frac{N(t)+1}{N(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} 1$ ocorre.

De 2.2.18, 2.2.19 e 2.2.20 obtemos então 2.2.17.

A seguir apresentaremos um resultado sobre a convergência do número médio de renovações por unidade de tempo.

<u>Teorema</u> <u>2.2.21</u> - Teorema Elementar da Renovação

Seja $S = \{S_n : n \geq 0\}$ um processo de renovação com $\mu = E(X_i) < \infty$, $i \geq 1$, então:

$$\frac{M(t)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{1}{\mu} \ . \qquad (2.2.22)$$

Um modo de demonstrar este resultado é mostrar que:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} \quad \text{e} \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

os quais implicam na convergência precedente.

O resultado que enunciaremos a seguir, dá o comportamento assintótico da solução da equação renovação.

Teorema 2.2.23 - Teorema Básico da Renovação

Seja F a função de distribuição de uma variável aleatória com média μ. Suponha que h é diretamente integrável e g é a solução da equação renovação

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)\, dF(x).$$

i) Se F é não-aritmético, então

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(t)dx, & \text{se } \mu<\infty; \\ 0, & \text{se } \mu=\infty. \end{cases} \qquad (2.2.24)$$

ii) Se F é aritmético com amplitude λ, então para $\forall c>0$

$$\lim_{t\to\infty} g(c+n\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} h(c+n\lambda), & \text{se } \mu<\infty; \\ 0, & \text{se } \mu=\infty. \end{cases} \qquad (2.2.25)$$

As definições de aritmético e diretamente Riemann integrável encontram-se no Apêndice; para demonstração ver Feller (1966).

Uma formulação equivalente e expressa em termos da função renovação é apresentada a seguir:

<u>Teorema 2.2.26</u> - Seja F a função de distribuição de uma variável aleatória positiva com média μ. Seja $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ a funçaõ renovação associada a F. Seja $h>0$ e fixado.

i) Se F é não aritmético, então

$$\lim_{t\to\infty}[M(t+h)-M(t)] = \frac{h}{\mu}, \text{ ver Feller (1966).} \qquad (2.2.27)$$

ii) Se F é aritmético com amplitude λ, então o resultado (2.2.27) continuará válido desde que h seja um múltiplo da amplitude λ. Ver Feller (1966).

O teorema elementar da renovação (2.2.21) pode ser considerado como um corolário do teorema 2.2.26 considerando $b_n = M(n+1)-M(n)$, se F é não-aritmético, o teorema 2.2.26 diz-nos que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\mu} \qquad (2.2.28)$$

A média de b_n também converge para $\frac{1}{\mu}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [M(k+1)-M(k)] = \lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n} = \frac{1}{\mu} \qquad (2.2.29)$$

Agora para um t arbitrário e positivo, seja $[t]$ o maior inteiro não excedendo t. Como $M(t)$ é uma função monotona, temos que

$$\frac{[t]}{t}\,\frac{M([t])}{[t]} \leq \frac{M(t)}{t} \leq \frac{[t]+1}{t}\cdot\frac{M([t])+1}{[t]+1} \qquad (2.2.30)$$

como $\frac{M(t)}{t}$ está entre duas quantidades que convergem para $\frac{1}{\mu}$ temos então

$$\lim \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

que é o teorema elementar da renovação.

2.3 - PROCESSOS REGENERATIVOS

Suponha que o sistema simulado seja um processo estocástico. De modo informal, tal processo é dito "regenerativo" se tem a propriedade de sempre retornar para alguma condição "regenerativa", mediante a qual a evolução futura do processo é independente do comportamento passado e tem a mesma distribuição de probabilidade. Isto equivale a dizer que existirá uma seqüência de instantes aleatórios $0 = \beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots$, chamados de instantes de regeneração, tal que a cada um destes instantes, o processo tem a mesma estrutura

probabilística que teria no instante β_1; ou seja, entre quaisquer dois instantes consecutivos a porção do processo é uma réplica identicamente distribuída e independente da porção entre quaisquer dois tempos consecutivos.

Um processo regenerativo é definido da seguinte maneira:

<u>Definição 2.3.1</u> - O processo $\{X_t : t \geq 0\}$ é dito regenerativo se existe uma seqüência $S_o, S_1, \ldots$ de tempos de parada, tal que

(a) $S = \{S_n : n \in N\}$ é um processo de renovação.

(b) Para qualquer $n, m \in N$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in R_+$ e qualquer função limitada g, definida no espaço R^n, temos

$$E[g(X_{S_m+t_1}, \ldots, X_{S_m+t_n}) / X_u : u \leq S_m] = E[g(X_{t_1}, \ldots X_{t_n})] \qquad (2.3.2)$$

A definição de tempos de parada encontra-se no Apêndice. A propriedade (b) é denominada propriedade de regeneração e os instantes $S_o, S_1 \ldots$ são chamados os instantes de regeneração.

Designemos por $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ o futuro do processo

$\{X_t : t \geqslant 0\}$ com relação ao instante T, para $T=S_m$, $m=1,2\ldots$, isto é $\hat{X}_t = X_{T+t}$. A parte (b) da definição 2.3.1 nos diz que $\{\hat{X}_t, t \geqslant 0\}$ é independente da história $\{X_\mu, \mu \leqslant T\}$ e que a distribuição de $\{\hat{X}_t, t \geqslant 0\}$ é a mesma que de $\{X_t, t \geqslant 0\}$.

Seja $\{X_t : t \geqslant 0\}$ um processo regenerativo com pontos de regeneração $S = \{S_n : n \in N\}$ e seja F a função de distribuição dos tempos entre regenerações. Definamos para um subconjunto A contido no espaço de estados E, a função:

$$h(t,A) = P(S_1 > t,\ X_t \in A),\ t \geqslant 0, \tag{2.3.3}$$

e seja

$$g(t) = P(X_t \in A),\ t \geqslant 0; \tag{2.3.4}$$

de 2.3.1 temos que

$$P(X_t \in A / S_1) = g(t - S_1) \quad \text{no conjunto} \quad \{S_1 \leqslant t\} \tag{2.3.5}$$

e então a função g satisfaz a equação

$$g(t) = h(t,A) + \int_0^t g(t-s)\, dF(s) \tag{2.3.6}$$

que é a equação renovação dada por 2.2.11.

Exemplos de Processos Regenerativos

Exemplo 2.3.7 - Seja Z uma cadeia de Markov irredutível recorrente aperiódica, com espaço de estados contável; se j é um estado fixado, então cada instante em que o estado j é alcançado é um instante regenerativo para Z iniciando em j.

Exemplo 2.3.8 - Seja Z_t o tamanho da fila com um servidor, com chegadas de Poisson independentes e identicamente distribuídas e tempos de serviços também independentes e identicamente distribuídos bem como independentes dos intervalos entre chegadas. Suponha que a origem do tempo é considerada como o instante em que um cliente sai do sistema e deixa exatamente "j" clientes neste sistema. Então a cada instante que sai um cliente e deixa exatamente "j" clientes no sistema o processo se regenera e Z_t é um processo regenerativo.

Exemplo 2.3.9 - Seja Z_t o intervalo de tempo de t até o instante da $(n+1)$-ésima ocorrência em um processo de renovação S; isto é,

$$Z_t = \begin{cases} S_{n+1}-t, \text{ se } S_n \leq t \leq S_{n+1} \text{ para algum } n \in N; \\ +\infty, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

então Z_t é um processo regenerativo com espaço de estados $E=[0,\infty]$.

Os resultados obtidos da teoria da renovação aplicam-se para o processo regenerativo.

Pode-se considerar processos regenerativos a parâmetro discreto ou contínuo.

Sejam $0=\beta_0\leq\beta_1\leq\ldots$ a seqüência de instantes de regeneração de um processo a parâmetro discreto. Consideremos a porção do processo

$$\{X_n:\ \beta_{j-1}\leq n\leq\beta_j\}.$$

Façamos

$$\alpha_j = \beta_j-\beta_{j-1},\ j\geq 1 \qquad (2.3.10)$$

então α_j representa o número de ocorrências entre os instantes regenerativos (j-1)-ésimo e j-ésimo e é chamado de j-ésimo ciclo.

Para aplicações a simulação, suponhamos que o processo simulado possa ser identificado como um processo regenerativo e, para um intervalo de tempo finito, muda de estados somente um número finito de vezes. Suponhamos ainda que

$$\mu = E(\alpha_j) < \infty, \; j \geq 1.$$

<u>Teorema 2.3.11</u> - Seja F a função de distribuição comum dos α_j, $j \geq 1$:

(a) Se F é não-aritmético, então

$$X_n \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} X \qquad (2.3.12)$$

(b) Se F é aritmético com amplitude λ, então

$$X_{n\lambda} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathcal{L}} X \qquad (2.3.13)$$

A demonstração deste teorema é uma conseqüência direta do teorema 2.2.23 (ver Smith (1955 e 1958)) e Miller (1972). Para definição de aritmético ver Apêndice.

Seja f uma função mensurável (a valores reais). Suponha que o objetivo da simulação seja obter estimadores e intervalos de confiança para

$r = E\{f(X)\}$, onde X é a distribuição estacionária.

$$\text{Seja} \quad Y_j = \sum_{i=\beta_{j-1}}^{\beta_j - 1} f(X_i), \text{ para } j \geq 1 \qquad (2.3.14)$$

isto é, Y_j é a soma dos valores $f(X_i)$ sob o j-ésimo ciclo regenerativo de comprimento α_j.

Suponhamos que o processo seja simulado "n" ciclos de comprimento $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e para cada ciclo sejam registrados os valores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

A seguir são apresentados duas propriedades dos processos regenerativos, que têm importância fundamental para o uso destes.

<u>Teorema</u> <u>2.3.15</u> - A seqüência $\{(Y_j, \alpha_j)\}$, $j \geq 1$ consiste de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

A proposição enunciada é uma conseqüência da estrutura do processo regenerativo; para sua demonstração ver Chung (1973).

<u>Teorema</u> <u>2.3.16</u> - Se $E\{|f(X)|\} < \infty$ e F é não-aritmético, então

$$r = E\{f(X)\} = \frac{E(Y_j)}{E(\alpha_j)} \quad j \geq 1 \qquad (2.3.17)$$

onde Y_j é definido por 2.3.14.

A demonstração deste teorema encontra-se em Crane e Iglehart (1975) que também analisam o caso em que F é aritmético.

Para o processo regenerativo a tempo contínuo, designando-se R_j, $j \geq 1$ a seqüência de instantes de regeneração e por $T_j = R_j - R_{j-1}$ a amplitude do j-ésimo ciclo regenerativo, permanecem válidos os teoremas 2.3.11, 2.3.15 e 2.3.16, onde o termo 2.3.14 é substituído por

$$Z_j = \int_{R_{j-1}}^{R_j} f\{X(t)\}dt. \qquad (2.3.18)$$

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO DE ESTIMADORES TIPO RAZÃO

3.1 - INTRODUÇÃO

Apresentaremos aqui alguns estimadores, tipo razão, e a construção de intervalos de confiança com base nestes estimadores. Para construirmos os intervalos de confiança, usaremos o método regenerativo e compararemos os estimadores quanto à tendência e à variância.

Desejamos obter intervalos de confiança para $r = E\{f(X)\}$, onde f é uma função real e X é uma variável aleatória, que representa o processo sendo estudado sob a distribuição estacionária.

Como foi visto no Capítulo 2, no método regenerativo obtemos o processo simulado $\{X_t : t \geq 0\}$ em ciclos de comprimento α_i, $i=1,2,\ldots,n$, e para o i-ésimo ciclo, Y_i representa a área sob a curva $f(X_t)$.

Sejam

$$U_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i=1,2,\ldots,n;$$

e

$$E(U_i) = \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(Y_i) \\ E(\alpha_i) \end{pmatrix} , \quad i=1,2,\ldots,n;$$

com $\mu_2 \neq 0$ e $\underset{\sim}{\Sigma}$ a matriz de covariância com elementos dados por:

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} .$$

<u>Observação</u>: A importância do método regenerativo é permitir considerarmos as variáveis aleatórias U_i's independentes e identicamente distribuídas e

$$r = \frac{E(Y_i)}{E(\alpha_i)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

como sendo o quociente de médias entre duas variáveis aleatórias (ver 2.3).

Portanto o valor r será estimado através dos estimadores razão, a seguir:

Estimador de Fieller

$$\hat{r}_f = \frac{\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12}}{\bar{\alpha}^2-Ks_{22}}; \qquad (3.1.1)$$

onde

$$K = [\phi^{-1}(1-\gamma/2)]^2/n, \qquad (3.1.2)$$

sendo ϕ a função de distribuição normal com média zero e variância um. s_{11}, s_{12} e s_{22} são elementos de $\underset{\sim}{s}$ (estimador não viciado de $\underset{\sim}{\Sigma}$) dada por

$$\underset{\sim}{s} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (U_i-\bar{U})(U_i-\bar{U})', \qquad (3.1.3)$$

e

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i;$$

Observação: s_{11}, s_{12}, s_{21} e s_{22} são obtidos como função de n (tamanho da amostra) que deixamos de exibir explicitamente.

Estimador de Beale

$$\hat{r}_b = \frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}} \frac{(1+s_{12}/n\bar{Y}\bar{\alpha})}{(1+s_{22}/n\bar{\alpha}^2)}; \qquad (3.1.4)$$

Estimador Clássico

$$\hat{r}_c = \frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}}; \qquad (3.1.5)$$

Estimador Jacknife

$$\hat{r}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \theta_i; \qquad (3.1.6)$$

onde

$$\theta_i = n \frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}} - (n-1) \left(\sum_{j \neq i} Y_j \Big/ \sum_{j \neq i} \alpha_j \right); \qquad (3.1.7)$$

Estimador de Tin

$$\hat{r}_t = \frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}} \left[1 + \left(\frac{s_{12}}{\bar{Y}\bar{\alpha}} + \frac{s_{22}}{\bar{\alpha}^2} \right) \frac{1}{n} \right], \qquad (3.1.8)$$

onde todos os estimadores são fortemente consistentes e são todos viciados.

Os estimadores de Beale, Jacknife e de Tin foram desenvolvidos com o objetivo de reduzir a tendência do estimador clássico.

Apresentaremos, a seguir, intervalos de confiança para os estimadores citados anteriormente.

Intervalo de Confiança Fieller

Consideremos $Z_i = Y_i - r\alpha_i$, $i=1,2,\ldots,n$ e $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Temos que

$$E(Z_i) = 0,$$

e

$$\sigma^2 = Var(Z_i) = \sigma_{11} - 2r\sigma_{12} + r^2\sigma_{22}.$$

Pelo Teorema Central do Limite, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\bar{Z}\sqrt{n}}{\sigma} \leqslant z\right] = \Phi(z), \quad -\infty<z<\infty$$

onde

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du.$$

Seja

$$S^2 = s_{11}-2rs_{12}+r^2 s_{22}, \qquad (3.1.9)$$

um estimador não viciado de σ^2, para um tamanho de amostra n. Como pela lei forte dos grandes números,

$$S \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \sigma \quad \text{com probabilidade 1,}$$

então

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\bar{Z}\sqrt{n}}{S} \leqslant z\right] = \phi(z), \quad -\infty<z<\infty,$$

ver Chung (4.4.8, 1968). Temos então:

$$P\left[z_{1-\gamma/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}\ \bar{Z}}{S} \leqslant z_{1-\gamma/2}\right] \simeq 1-\gamma$$

ou equivalentemente

$$P\left[-z_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{Z} \leqslant z_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \simeq 1-\gamma.$$

Elevando ao quadrado os termos da desigualdade temos:

$$P[\bar{Z}^2 \leqslant S^2.K] \simeq 1-\gamma$$

onde

$$K = z^2_{1-\gamma/2}/n \qquad (3.1.10)$$

ou

$$P[\bar{Z}^2-KS^2 \leqslant 0] \simeq 1-\gamma.$$

Substituindo $\bar{Z}^2$ e S^2 e reescrevendo a expressão precedente de forma explícita, temos:

$$P[(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})r^2-2(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})r+(\bar{Y}^2-Ks_{11}) \leqslant 0] \simeq 1-\gamma \qquad (3.1.11)$$

Como $\bar{\alpha}^2 \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu_2^2$ com probabilidade 1, e

$$K = \frac{z^2_{1-\gamma/2}}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0,$$

segue que

$$(\bar{\alpha}^2-Ks_{22}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu_2^2 \quad \text{com probabilidade 1.}$$

Portanto para n suficientemente grande a expressão (3.1.11) é equivalente a:

$$P\{[(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})r^2-2(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})r+(\bar{Y}^2-Ks_{11})] \leqslant 0,$$

$$[\bar{\alpha}^2-Ks_{22}] > 0\} \simeq 1-\gamma. \qquad (3.1.12)$$

Assim a questão se resume em analisar a função quadrática g(r), com coeficientes aleatórios, dada por:

$$g(r) = (\bar{\alpha}^2-Ks_{22})r^2-2(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})r+(\bar{Y}^2-Ks_{11})$$

tal que $g(r)<0$.

O discriminante da expressão quadrática g(r) dividido por 4 é dado por:

$$D = [\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12}]^2-(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})(\bar{Y}^2-Ks_{11}).$$

No conjunto dos "r" onde as desigualdades de 3.1.12 estão satisfeitas, temos $D\geqslant 0$ e 3.1.12 é equivalente a "r" estar compreendido entre as raízes de g(r),

$$\frac{(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})\pm D^{1/2}}{(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})},$$

isto é, 3.1.12 equivale a

$$P\left[\frac{(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})-D^{1/2}}{\bar{\alpha}^2-Ks_{22}} \leqslant r \leqslant \frac{(\bar{Y}\bar{\alpha}-Ks_{12})+D^{1/2}}{\bar{\alpha}^2-Ks_{22}}\right] \simeq 1-\gamma$$

e então temos o intervalo de Fieller

$$\left[\hat{r}_f - \frac{D^{1/2}}{(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})};\ \hat{r}_f + \frac{D^{1/2}}{(\bar{\alpha}^2-Ks_{22})}\right]. \qquad (3.1.13)$$

<u>Intervalo de Confiança Usando o Estimador Clássico</u>

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\Sigma Z_i}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant z\right) = \phi(z),\ -\infty<z<\infty$$

onde

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}\ \sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - r\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sqrt{n}\ \sigma} = \frac{\hat{r}_c \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - r\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sqrt{n}\ \sigma}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ (\hat{r}_c - r)}{\sqrt{n}\ \sigma} = \frac{n\bar{\alpha}(\hat{r}_c - r)}{\sqrt{n}\ \sigma} = \frac{\sqrt{n}(\hat{r}_c - r)}{\sigma/\bar{\alpha}}; \qquad (3.1.14)$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\Sigma Z_i}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant z\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{r}_c - r)}{\sigma/\bar{\alpha}}\right) = \Phi(z). \qquad (3.1.15)$$

Estimando σ por:

$$\hat{\sigma} = s_c = (s_{11} - 2\hat{r}_c s_{12} + \hat{r}_c^2 s_{22})^{1/2}, \qquad (3.1.16)$$

segue que, para n suficientemente grande

$$P\left(-z_{1-\gamma/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}(\hat{r}_c - r)}{s_c/\bar{\alpha}} \leqslant z_{1-\gamma/2}\right) \simeq 1-\gamma, \qquad (3.1.17)$$

pois $\hat{\sigma}$ é um estimador consistente de σ.

Desenvolvendo 3.1.17 temos que:

$$P\left(\hat{r}_c - \frac{z_{1-\gamma/2} \cdot s_c}{\bar{\alpha} n^{1/2}} \leqslant r \leqslant \hat{r}_c + \frac{z_{1-\gamma/2} \cdot s_c}{\bar{\alpha} n^{1/2}}\right) \simeq 1-\gamma.$$

Temos então um intervalo para r com $100(1-\gamma)\%$ de confiança dado por:

$$\left[\hat{r}_c - \frac{z_{1-\gamma/2} \cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}};\ \hat{r}_c + \frac{z_{1-\gamma/2} \cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}}\right]. \qquad (3.1.18)$$

Intervalo de Confiança Usando o Estimador Jacknife

Considerando o estimador de σ dado por:

$$\hat{s}_j = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(\theta_i - \hat{r}_j)^2}{n-1} \right]^{1/2}$$

e usando o seguinte teorema limite

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\sqrt{n}(\hat{r}_j - r)}{\hat{s}_j} \leqslant z \right] = \Phi(z)$$

obtemos:

$$P\left[z_{1-\gamma/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}(\hat{r}_j - r)}{\hat{s}_j} \leqslant z_{1-\gamma/2} \right] \simeq 1-\gamma,$$

donde desenvolvendo, temos um intervalo de confiança para r, com $100(1-\gamma)\%$ de confiança, dado por:

$$\left[\frac{\hat{r}_j - z_{1-\gamma/2} \cdot \hat{s}_j}{\sqrt{n}} ; \frac{\hat{r}_j + z_{1-\gamma/2} \cdot \hat{s}_j}{\sqrt{n}} \right]. \qquad (3.1.19)$$

Intervalo de Confiança Usando o Estimador de Beale

Utilizando-se o mesmo estimador σ, usado para o

intervalo clássico, e considerando o fato de que

$$\sqrt{n}(\hat{r}_b-\hat{r}_c) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \text{com probabilidade 1,}$$

obteremos então um intervalo de confiança com $100(1-\gamma)\%$ de confiança, dado por:

$$\left[\hat{r}_b - \frac{z_{1-\gamma/2}\cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}};\ \hat{r}_b + \frac{z_{1-\gamma/2}\cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}}\right] \qquad (3.1.20)$$

Intervalo de Confiança Tin

De modo análogo para o estimador Tin,

$$\sqrt{n}(\hat{r}_t-\hat{r}_c) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \text{com probabilidade 1,}$$

e usando-se s_c, obtemos

$$\left[\hat{r}_t - \frac{z_{1-\gamma/2}\cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}};\ \hat{r}_t + \frac{z_{1-\gamma/2}\cdot s_c}{\bar{\alpha}\sqrt{n}}\right]. \qquad (3.1.21)$$

3.2 - COMPARAÇÕES ENTRE ESTIMADORES

Inicialmente apresentaremos uma comparação entre os estimadores Clássico e Jacknife.

Seja (Y_i, X_i), $i=1,\ldots,n$ uma amostra aleatória tal que $X_i \sim N(1,nh)$ e Y_i dado pelo seguinte modelo:

$$Y_i = a+bX_i+e_i, \quad i=1,\ldots,n \tag{3.2.1}$$

com $E(e_i/X_i) = 0$ e $Var(e_i/X_i) = n\delta$.

Considerando $\xi_i = 1-X_i$ onde $|\xi_i|<1$ temos que:

$$E(\bar{\xi}) = 0, \quad Var(\bar{\xi}) = h,$$

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) = 1+h+3h^2+15h^3+O(n^{-4}), \tag{3.2.2}$$

e

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) = 1+3h+15h^2+105h^3+O(n^{-4}), \tag{3.2.3}$$

(ver Apêndice).

Seja $\hat{r}_c$ definido por 3.1.5; da expressão 3.2.1 temos que:

$$E(\hat{r}_c) = E\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) = E\left(\frac{a+b\bar{X}+e}{\bar{X}}\right)$$

$$= aE(\bar{X}^{-1})+b. \tag{3.2.4}$$

Usando 3.2.2 e desprezando termos de $O(n^{-4})$, temos que:

$$E(\hat{r}_c) = a(1+h+3h^2+15h^3) + b. \qquad (3.2.5)$$

Como

$$r = \frac{E(Y_i)}{E(X_i)} = a+b \qquad (3.2.6)$$

então a tendência assintótica de $\hat{r}_c$ é:

$$B = E(\hat{r}_c) - r$$

$$B = a(h+3h^2+15h^3), \qquad (3.2.7)$$

logo

$$Var(\hat{r}_c) = E(\hat{r}_c - r)^2 - B^2$$

$$= E\left[\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - (a+b)\right]^2 - [a(h+3h^2+15h^3)]^2$$

donde, desenvolvendo, usando 3.2.3 e desprezando termos de ordem maior que 3, temos

$$Var(\hat{r}_c) = a^2(h+8h^2+69h^3) + \delta(1+3h+15h^2+105h^3). \quad (3.2.8)$$

Agora seja o estimador proposto por Quenouille (1956)

dado pela seguinte expressão:

$$\hat{r}_Q = g\hat{r}_c - \frac{(g-1)}{g} \sum_{i=1}^{g} \hat{r}_i \qquad (3.2.9)$$

onde: "g"- é o número de grupos de tamanho "m" cujos elementos são escolhidos aleatoriamente, tal que $n = mg$ e

$$\hat{r}_i = \frac{\bar{Y}_i'}{\bar{X}_i'} = \frac{n\bar{Y}-m\bar{Y}_i}{n\bar{X}-m\bar{X}_i},$$

onde $\bar{X}_i$ e $\bar{Y}_i$ são as médias amostrais do i-ésimo grupo.

<u>Observação</u>: Para $g=n$ o estimador $\hat{r}_Q$ reduz-se ao estimador Jacknife.

Desenvolvendo $\hat{r}_Q$(3.2.9) temos

$$\hat{r}_Q = g\left(\frac{a+b\bar{X}+e}{\bar{X}}\right) - \frac{(g-1)}{g} \sum_{i=1}^{g} \frac{(n\bar{Y}-m\bar{Y}_i)/(n-m)}{(n\bar{X}-m\bar{X}_i)/(n-m)}$$

$$= b + a\left\{\frac{g}{\bar{X}} - \frac{(g-1)}{g} \sum_{i=1}^{g} \frac{1}{\bar{X}_i'}\right\} + \left\{g\,\frac{\bar{e}}{\bar{X}} - \frac{(g-1)}{g} \sum_{i=1}^{g} \frac{\bar{e}_i}{\bar{X}_i'}\right\} \qquad (3.2.10)$$

onde $\bar{e}_i' = (n\bar{e}-m\bar{e}_i)/(n-m)$ e

$\bar{e}_i$- é a média amostral do i-ésimo grupo.

Como $Var(X_i) = nh$ e $n = mg$, obtemos:

$$Var(\bar{X}_i') = \frac{g}{g-1}h. \qquad (3.2.11)$$

Substituindo h por $\frac{g}{g-1}.h$ em 3.2.2 e 3.2.3 temos:

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}_i'}\right) = 1 + \frac{g}{g-1}h + \frac{3g^2}{(g-1)^2}h^2 + 15\frac{g^3}{(1-g)^3}h^3 + O(n^{-4}) \qquad (3.2.12)$$

e

$$E\left(\frac{1}{(\bar{X}_i')^2}\right) = 1 + \frac{3g}{(g-1)}h + 15\frac{g}{(g-1)^2}h^2 + 105\frac{g}{(g-1)^3}h^3 + O(n^{-4}). \qquad (3.2.13)$$

Usando 3.2.10 obtemos então:

$$E(\hat{r}_Q) = b + a\,E\left[\frac{g}{\bar{X}} - \frac{(g-1)}{g}\sum_{i=1}^{g}\frac{1}{\bar{X}_i'}\right]$$

$$= b + a\left[1 - 3\frac{g}{g-1}h^2 - 15g\frac{(2g-1)}{(g-1)^2}h^3\right],$$

logo, a tendência assintótica de $\hat{r}_Q$ é:

$$B = a\left[3\frac{g}{g-1}h^2 + 15g\frac{(2g-1)}{(g-1)^2}h^3\right], \qquad (3.2.14)$$

que é de ordem n^{-2}.

Desde que os coeficientes de h^2 e h^3 são funções decrescentes de $g(g\geqslant 2)$, segue que a menor tendência ocorrerá para $g=n$.

Como

$$E(\bar{e}^2/X_i) = \delta,\ E[(\bar{e}_i')^2/X_i] = \frac{g}{g-1}\delta,$$

$$E(\bar{e}_i'\ \bar{e}_j'/X_i) = \frac{g(g-2)}{(g-1)^2}\delta \quad e \quad E(\bar{e}\ \bar{e}_i/X_i) = \delta,$$

a variância de $\hat{r}_Q$ e:

$$Var(\hat{r}_Q) = a^2\left[h + 2\ \frac{g}{g-1}h^2 - \frac{6g(4g^2-14g+11)}{(g-1)^3}h^3\right]$$

$$+\ \delta\left[1 + \frac{g}{g-1}h - 2g\frac{(2g^2-9g+8)}{(g-1)^3}h^2 - 3g\frac{(28g^4-149g^3+260g^2-173g+32)}{(g-1)^5}h^3\right], \tag{3.2.15}$$

(ver Rao, 1965).

Dado que os coeficientes de h, h^2 e h^3 são funções decrescentes de g (tal que $g\geqslant 2$), segue que o menor lor da $Var(\hat{r}_Q)$ ocorre para $g=n$. Como a tendência é também mínima para $g=n$, a escolha ótima de g é n.

Considerando $g=n$, $X_i=\alpha_i$ e $\hat{r}_i=\theta_i$, o estimador $\hat{r}_Q$ é o estimador Jacknife dado por 3.1.6, o qual tem menor

tendência e menor variância do que o estimador clássico $\hat{r}_c$ dado por 3.1.5.

Durbin (1959) demonstrou esse caso para $g=2$.

Considerando as hipóteses a seguir:

i) $Y_i = a + bX_i + e_i$,

ii) $E(e_i/X_i) = 0$, $Var(e_i/X_i) = \delta$

iii) X_i com distribuição gama com parâmetro h,

Tin (1965) demonstrou que o estimador por ele proposto é o menos viciado entre os estimadores em estudo, seguido, na ordem crescente de vício, pelos estimadores de Beale, Jacknife e Clássico, isto, para um dado grau de aproximação; quanto às variâncias, para $O(n^{-2})$ e $O(n^{-3})$ o estimador de Tin tem a menor variância, seguido pelo de Beale, Jacknife e Clássico.

3.3 - USO DOS ESTIMADORES EM PROBLEMAS DE FILA

3.3.1 - INTRODUÇÃO

Suponha que estivéssemos interessados em estimar o tempo médio de espera (denotado por $E(W)$), numa fila com um

servidor, sob a distribuição estacionária. Um estimador natural seria

$$W^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i}{N} \qquad (3.3.1.1)$$

que é um estimador consistente para $E(W)$ onde

W_i – é o tempo de espera (na fila) do i-ésimo cliente.

N – é o número de clientes simulados.

Entretanto tal estimador, devido ao efeito das condições iniciais, é um estimador viciado; a construção de um intervalo de confiança para $E(W)$, baseado numa seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, não é possível, pois as observações serão correlacionadas.

Uma maneira alternativa nesta situação seria tomar observações até que "n" ciclos regenerativos, $(Y_1,\alpha_1),\ldots,(Y_n,\alpha_n)$, fossem simulados e então,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i/n}{\Sigma\alpha_i/n}$$

onde

Y_i – é a soma dos tempos de espera no i-ésimo ciclo;

α_i – é o número de clientes atendidos no i-ésimo ciclo;

N – é o número de clientes simulados atendidos nos n ciclos.

Desde que cada seqüência $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ e $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, é composta de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, temos, pela lei forte dos grandes números que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} E(Y_i) \quad \text{com probabilidade 1} \quad i=1,\ldots,n,$$

e

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} E(\alpha_i) \quad \text{com probabilidade 1} \quad i=1,\ldots,n,$$

como $E(Y_i) = rE(\alpha_i) = E(W).\ E(\alpha_i)$, temos então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} E(W) \quad \text{com probabilidade 1.}$$

Com a obtenção das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, é possível usar diretamente os resultados limite da estatística clássica. Em contrapartida, obteremos estimadores do tipo razão.

Outros métodos que têm sido usados na estimação em simulação, são os métodos de réplicas e blocos. No método de réplicas geram-se K rodadas independentes da simulação, cada uma com o mesmo número de observações, que podem ser obtidas iniciando-se cada rodada com o sistema no mesmo estado, usando-se seqüência diferentes de números aleatórios e supondo-se que as médias das réplicas são independentes e identicamente distribuídas. No método de blocos obtém-se uma única rodada da simulação, dividida em K blocos de mesmo tamanho e supõe-se que as médias dos blocos são independentes e identicamente distribuídas, se o tamanho de cada bloco é suficientemente grande.

3.3.2 - FILA GI/G/1

Considere um sistema de fila GI/G/1, com ordem de serviço FIFO no qual o primeiro cliente (o de número zero) encontra o servidor livre e é imediatamente atendido, tendo tempo de serviço V_o. O de número "n" chega no tempo t_n e tem um tempo de serviço V_n.

Seja

$$U_n = t_n - t_{n-1} \qquad (3.3.2.1)$$

o intervalo de tempo entre as chegadas do (n-1)-ésimo e n-ésimo clientes, para $n \geq 1$ e seja $\underset{\sim}{Z}_n = \{V_{n-1}, U_n\}$ onde $\{\underset{\sim}{Z}_n : n \geq 1\}$ são independentes e identicamente distribuídas com

$$E(V_n) = \frac{1}{\mu} \quad \text{e} \quad 0<\mu<\infty$$

$$E(U_n) = \frac{1}{\lambda} \qquad 0<\lambda<\infty.$$

Seja

$$\rho = \frac{E(V_n)}{E(U_n)} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Assumiremos $\rho<1$ como condição para que o sistema seja estável, implicando em infinitos retornos à condição regenerativa. Os instantes de tempo crescentes $0, T_1, T_2, \ldots,$ em que os clientes chegam e encontram o sistema vazio, são os instantes em que o sistema se regenera.

Seja

$$X_n = V_{n-1} - U_n, \; n \geq 1$$

então os tempos de espera na fila W_i poderão ser obtidos recursivamente por:

$$W_{n+1} = \begin{cases} W_n + X_{n+1}, & \text{se } W_n + X_{n+1} > 0, \\ 0, & \text{se } W_n + X_{n+1} \leq 0 \end{cases} \quad n \geq 0 \qquad (3.3.2.2)$$

Usando-se a noção da variável tempo de parada (ou variável opcional) pode-se mostrar que existe uma seqüência de variáveis aleatórias $\{\beta_i : i \geq 0\}$ tal que $\beta_o = 0$, $\beta_i < \beta_{i+1}$ e $W_{\beta_i} = 0$ com probabilidade 1, ou seja, os β_i são os números dos clientes que chegam e encontram o sistema vazio.

Fazendo-se $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1}$, $i \geq 1$, então α_i, representa o número de clientes atendidos no i-ésimo ciclo.

<u>Observação</u>: Um período ocupado, acrescido do intervalo desocupado imediatamente posterior, forma um ciclo ocupado.

A suposição $\rho < 1$ implica na condição adicional que $E(\alpha_K) < 0$, $K \geq 1$. (Ver Ross, 1970, 99-100).

Seja

$$Y_i = \sum_{K=\beta_{i-1}}^{\beta_i - 1} W_K \qquad (3.3.2.3)$$

o tempo total de espera de todos os clientes para o i-ésimo ciclo ocupado. Mostraremos que Y_i pode ser escrito como:

$$Y_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} N_q(t)dt$$

onde (T_{i-1}, T_i)- representa o intervalo do ciclo ocupado,

$N_q(t)$- representa o número de clientes na fila no tempo t.

<u>Demonstração</u>: Sejam $0,1,\ldots,n_{\beta_i-1}$ os números dos clientes atendidos no i-ésimo ciclo ocupado.

Seja

$$A_K(t) = \begin{cases} 1, \text{ se o k-ésimo cliente está na fila no tempo } t; \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

então

$$N_q(t) = \sum_{K=0}^{\infty} A_K(t),$$

logo,

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} N_q(t)dt = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sum_{K=0}^{\infty} A_K(t)dt,$$

trocando-se a ordem da integral com a soma, vem

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} N_q(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \int_{T_{i-1}}^{T_i} A_K(t)dt,$$

como

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} A_K(t)dt = \begin{cases} W_K, & \text{se } \beta_{i-1} \leq K \leq \beta_K - 1, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

temos então que:

$$Y_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} N_q(t)dt = \sum_{K=\beta_{i-1}}^{\beta_i - 1} W_K,$$

isto é, Y_i representa a área sob a curva $f(X)$ onde $f(W)=W$ e X é a distribuição estacionária.

Pelos teoremas 2.3.15 e 2.3.16 temos respectivamente que:

i) U_i's são independentes e indenticamente distribuídos, onde

$$U_i = \begin{pmatrix} Y_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i=1,\ldots,n,$$

ii) $E(W) = \dfrac{E(Y_i)}{E(\alpha_i)}$, $i=1,2,\ldots,n$, onde

$$r = E[f(X)] = E(W).$$

Os resultados (i) e (ii) sugerem outro modo de estimar $E(W)$. Em vez de rodarmos a simulação até que N clientes tenham sidos atendidos ou que t unidades de tempo tenham sido completadas, simularemos n ciclos regenerativos, obtendo-se assim a seguinte seqüência:

$$(Y_1,\alpha_1),\ (Y_2,\alpha_2),\ldots,(Y_n,\alpha_n)$$

então

$$\hat{W}^{(2)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}},$$

onde

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

que é o estimador razão clássico dado por 3.1.5. Logo, como foi visto no inicio do capítulo, outros estimadores alternativos para E(W) são dados por 3.1.1, 3.1.4, 3.1.6 e 3.1.8.

3.4 - TAMANHO DA AMOSTRA, GERADOR DE NÚMEROS ALEATÓRIOS E PROGRAMA COMPUTACIONAL

Na construção dos intervalos de confiança apresentados neste capítulo, o tamanho da amostra, dado pelo número de ciclos, foi fixado. Entretanto, para um nível de precisão fixado, podemos determinar o tamanho da amostra.

Suponha que estejamos interessados em construir um intervalo de confiança para r com nível $100(1-\gamma)\%$ de confiança, cujo erro seja $100\delta\%$ de r, então de 3.1.18 com s_c substituído por σ, temos que:

$$\frac{Z_{1-\gamma/2} \cdot \sigma}{\bar{\alpha}\sqrt{n}} = \delta r. \qquad (3.4.1)$$

Como pela lei forte dos grandes números

$$\bar{\alpha} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} E(\alpha) \quad \text{com probabilidade 1,}$$

vem

$$\frac{Z_{1-\gamma/2} \cdot \sigma}{E(\alpha) . \sqrt{n}} = \delta r,$$

logo

$$n = \left(\frac{Z_{1-\gamma/2}}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{E(\alpha) r}\right)$$

onde n é o número de ciclos.

O gerador de números aleatórios que consideraremos, será o implantado no sistema DEC-10 da U.F.PE. através da função $Y = RAN(X_o)$, onde X_o é a semente dada. A função $RAN(X_o)$ gera números aleatórios entre zero e um, de modo recursivo. O programa computacional será elaborado na linguagem FORTRAN na versão FLEX e constará o mesmo do Apêndice.

CAPÍTULO 4

COMPARAÇÕES ENTRE OS ESTIMADORES ATRAVÉS DE DADOS SIMULADOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma aplicação a um modelo de fila M/M/1, tendo em vista que tal modelo tem propriedades bem conhecidas e nos fornece um meio de comparar os resultados obtidos através da simulação com os resultados teóricos.

Seja uma fila onde os tempos de serviços V_n, $n=0,1,\ldots$, são independentes, os intervalos entre chegadas consecutivas $U_n = t_n - t_{n-1}$, $n=1,\ldots$, são independentes e onde t_n representa o instante de chegada do i-ésimo cliente. Suponha que $\{V_n\}$ e $\{U_n\}$ são independentes entre si e têm respectivamente distribuição exponencial com parâmetros μ e λ, $0<\mu<\infty$, $0<\lambda<\infty$ e que o primeiro cliente (o de número zero) chega e é imediatamente atendido.

Seja

$$\rho = \frac{E(V_n)}{E(U_n)} = \frac{\lambda}{\mu}, \text{ como definido no Capítulo 3,}$$

o termo que representa a taxa de ocupação do sistema.

Simularemos o processo $\{W_n, n \geq 1\}$ que é um processo markoviano a tempo discreto com espaço de estados contínuo.

Supondo $\rho<1$ temos que

$$W_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} W \quad \text{(ver Khintchine, 1960).}$$

Nessa simulação consideraremos $\lambda=5$ e $\mu=10$, donde vem $\rho=0,5$.

Estamos interessados em estimar $r= E(W)$, que para o modelo M/M/1 é dado por:

$$E(W) = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu} \quad \text{(ver Dantas, 1978)} \qquad (4.1.1)$$

logo $E(W)=0,1$.

4.2 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O modelo foi rodado um número "n" de ciclos regenerativos, obtendo-se assim n pares independentes e identicamente distribuídos:

$$(Y_1,\alpha_1),\ (Y_2,\alpha_2),\ldots,(Y_n,\alpha_n)$$

onde

Y_i – tempo total de espera na fila no i-ésimo ciclo, $i=1,\ldots,n$.

α_i – nº de clientes atendidos no i-ésimo ciclo, $i=1,\ldots,n$.

Como vimos,

$$E(W) = \frac{E(Y_i)}{E(\alpha_i)}, \quad i=1,\ldots,n$$

conforme consta no Capítulo 3, onde foi sugerido estimá-lo através dos cinco estimadores: Fieller, Clássico, Jacknife, Beale e Tin.

Para cada número de ciclos foram calculadas as estimativas dos cinco estimadores e os intervalos de confiança correspondentes, com nível de 90%, dados pelas expressões 3.1.13, 3.1.18, 3.1.19, 3.1.20 e 3.1.21. Foram efetuadas réplicas das estimativas pontuais e dos intervalos de confiança. Para um número de ciclos menor que 1000 foram feitas 200 réplicas e para um número de ciclos superior ou igual a 1000 feitas 100 réplicas.

Para cada réplica foi testado se o verdadeiro $E(W)=0,1$ estava ou não incluído nos intervalos de confiança dos esti-

madores em pauta.

A Tabela 1 a seguir, apresenta, como função do número de ciclos, a média das réplicas para as estimativa pontuais, um intervalo de confiança para a verdadeira média com nível de 90% e a variância entre réplicas; isto foi efetuado para os cincos estimadores.

Tabela 4.1 - Média, intervalos de confiança e variâncias dos estimadores pontuais de E(W), em uma fila M/M/1 com $\rho=0,5$

Nº DE CICLOS	ESTIMADOR PONTUAL DE E(W)				
	FIELLER	CLÁSSICO	JACKNIFE	BEALE	TIN
40.	0.074444	0.093433	0.100581	0.098979	0.099281
IC/MÉDIA	[-0.070350, 0.078537]	[0.087002, 0.099863]	[0.092943, 0.108219]	[0.091779, 0.106180]	[0.092001, 0.106560]
VAR-REPL	0.001239	0.003056	0.004312	0.003832	0.003916
80.	0.084925	0.095964	0.100210	0.099651	0.099748
IC/MÉDIA	[0.081383, 0.088467]	[0.091297, 0.100632]	[0.095049, 0.105371]	[0.094595, 0.104708]	[0.094673, 0.104822]
VAR-REPL	0.000927	0.001610	0.001969	0.001890	0.001903
120.	0.088845	0.095547	0.098095	0.097890	0.097925
IC/MÉDIA	[0.085809, 0.091880]	[0.092001, 0.099092]	[0.094343, 0.101846]	[0.094164, 0.101617]	[0.094194, 0.101656]
VAR-REPL	0.000681	0.000929	0.001040	0.001026	0.001029
160.	0.093871	0.099289	0.101339	0.101211	0.101232
IC/MÉDIA	[0.090960, 0.096781]	[0.096002, 0.102577]	[0.097900, 0.104777]	[0.097786, 0.104635]	[0.097805, 0.104658]
VAR-REPL	0.000626	0.000799	0.000874	0.000867	0.000868
200.	0.090411	0.094325	0.095800	0.095728	0.095739
IC/MÉDIA	[0.087843, 0.092980]	[0.091498, 0.097151]	[0.092872, 0.098729]	[0.092807, 0.098648]	[0.092818, 0.098660]
VAR-REPL	0.000488	0.000590	0.000634	0.000630	0.000631
300.	0.094837	0.097648	0.098701	0.098665	0.098671
IC/MÉDIA	[0.092743, 0.096932]	[0.095406, 0.099890]	[0.096401, 0.101002]	[0.096368, 0.100962]	[0.096373, 0.100969]
VAR-REPL	0.000324	0.000372	0.000391	0.000390	0.000390
400.	0.095675	0.097861	0.098678	0.098657	0.098660
IC/MÉDIA	[0.093711, 0.097638]	[0.095794, 0.099927]	[0.096571, 0.100785]	[0.096551, 0.100762]	[0.096554, 0.100765]
VAR-REPL	0.000285	0.000316	0.000328	0.000328	0.000328
500.	0.098111	0.099937	0.100619	0.100604	0.100606
IC/MÉDIA	[0.096236, 0.099987]	[0.097970, 0.101905]	[0.098616, 0.102621]	[0.098603, 0.102605]	[0.098605, 0.102607]
VAR-REPL	0.000260	0.000286	0.000296	0.000296	0.000296
600.	0.097600	0.099106	0.099668	0.099657	0.099659
IC/MÉDIA	[0.095920, 0.099279]	[0.097349, 0.100863]	[0.097882, 0.101454]	[0.097872, 0.101442]	[0.097874, 0.101444]
VAR-REPL	0.000209	0.000228	0.000236	0.000235	0.000236
700.	0.097231	0.098503	0.098976	0.098969	0.098970
IC/MÉDIA	[0.095701, 0.098761]	[0.096931, 0.100074]	[0.097389, 0.100563]	[0.097382, 0.100556]	[0.097383, 0.100557]
VAR-REPL	0.000173	0.000182	0.000186	0.000186	0.000186
800.	0.098217	0.099368	0.099797	0.099791	0.099791
IC/MÉDIA	[0.096772, 0.099663]	[0.097884, 0.100852]	[0.098298, 0.101295]	[0.098293, 0.101289]	[0.098293, 0.101290]
VAR-REPL	0.000154	0.000163	0.000166	0.000166	0.000166
900.	0.099225	0.100217	0.100585	0.100581	0.100582
IC/MÉDIA	[0.097316, 0.101134]	[0.098266, 0.102168]	[0.098619, 0.102552]	[0.098615, 0.102547]	[0.098615, 0.102548]
VAR-REPL	0.000135	0.000141	0.000143	0.000143	0.000143
1000.	0.098654	0.099578	0.099921	0.099917	0.099918
IC/MÉDIA	[0.096717, 0.100591]	[0.097591, 0.101565]	[0.097915, 0.101927]	[0.097912, 0.101923]	[0.097912, 0.101924]
VAR-REPL	0.000139	0.000146	0.000149	0.000149	0.000149
1200.	0.100939	0.101777	0.102089	0.102086	0.102086
IC/MÉDIA	[0.098988, 0.102890]	[0.099787, 0.103767]	[0.100084, 0.104093]	[0.100081, 0.104090]	[0.100082, 0.104090]

NÚCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Cotinuação da Tabela 4.1

VAR-REPL	0.000141	0.000146	0.000149	0.000148	0.000148
1400.	0.099358	0.100036	0.100287	0.100285	0.100285
IC/MEDIA	[0.097799, 0.100917]	[0.098456, 0.101616]	[0.098699, 0.101875]	[0.098697, 0.101873]	[0.098698, 0.101873]
VAR-REPL	0.000090	0.000092	0.000093	0.000093	0.000093
1600.	0.099253	0.099839	0.100056	0.100054	0.100055
IC/MEDIA	[0.097665, 0.100840]	[0.098228, 0.101449]	[0.098437, 0.101675]	[0.098435, 0.101674]	[0.098435, 0.101674]
VAR-REPL	0.000093	0.000096	0.000097	0.000097	0.000097
1800.	0.100872	0.101411	0.101611	0.101609	0.101609
IC/MEDIA	[0.099565, 0.102180]	[0.100089, 0.102733]	[0.100283, 0.102938]	[0.100282, 0.102936]	[0.100282, 0.102937]
VAR-REPL	0.000063	0.000065	0.000065	0.000065	0.000065
2000.	0.099241	0.099898	0.099867	0.099866	0.099866
IC/MEDIA	[0.097987, 0.100495]	[0.098428, 0.100968]	[0.098592, 0.101143]	[0.098591, 0.101142]	[0.098591, 0.101142]
VAR-REPL	0.000058	0.000060	0.000060	0.000060	0.000060
2200.	0.100156	0.100590	0.100752	0.100750	0.100750
IC/MEDIA	[0.098897, 0.101416]	[0.099315, 0.101866]	[0.099470, 0.102033]	[0.099469, 0.102031]	[0.099469, 0.102031]
VAR-REPL	0.000059	0.000060	0.000061	0.000061	0.000061
2400.	0.099942	0.100335	0.100480	0.100480	0.100480
IC/MEDIA	[0.098637, 0.101246]	[0.099020, 0.101649]	[0.099162, 0.101798]	[0.099161, 0.101798]	[0.099161, 0.101798]
VAR-REPL	0.000063	0.000064	0.000064	0.000064	0.000064
2600.	0.099352	0.099719	0.099854	0.099854	0.099854
IC/MEDIA	[0.098217, 0.100486]	[0.098570, 0.100867]	[0.098701, 0.101008]	[0.098700, 0.101008]	[0.098700, 0.101008]
VAR-REPL	0.000048	0.000049	0.000049	0.000049	0.000049
2800.	0.100025	0.100374	0.100504	0.100503	0.100504
IC/MEDIA	[0.098639, 0.101411]	[0.098976, 0.101773]	[0.099101, 0.101907]	[0.099100, 0.101907]	[0.099100, 0.101907]
VAR-REPL	0.000071	0.000072	0.000073	0.000073	0.000073
3000.	0.099535	0.099845	0.099960	0.099960	0.099960
IC/MEDIA	[0.098554, 0.100515]	[0.098858, 0.100833]	[0.098970, 0.100951]	[0.098969, 0.100950]	[0.098969, 0.100950]
VAR-REPL	0.000036	0.000036	0.000036	0.000036	0.000036

Vemos, como era de se esperar, que para quantidades de ciclos menores, os estimadores Fieller, Clássico, Jacknife, Beale e Tin apresentaram vícios negativo, ou seja, foram inferiores ao valor teórico E(W)=0,1, vício esse que diminuiu à medida que o número de ciclos aumentou.

A Figura 4.1 apresenta a média das réplicas para as estimativas pontuais como função do número de ciclos para os cinco estimadores.

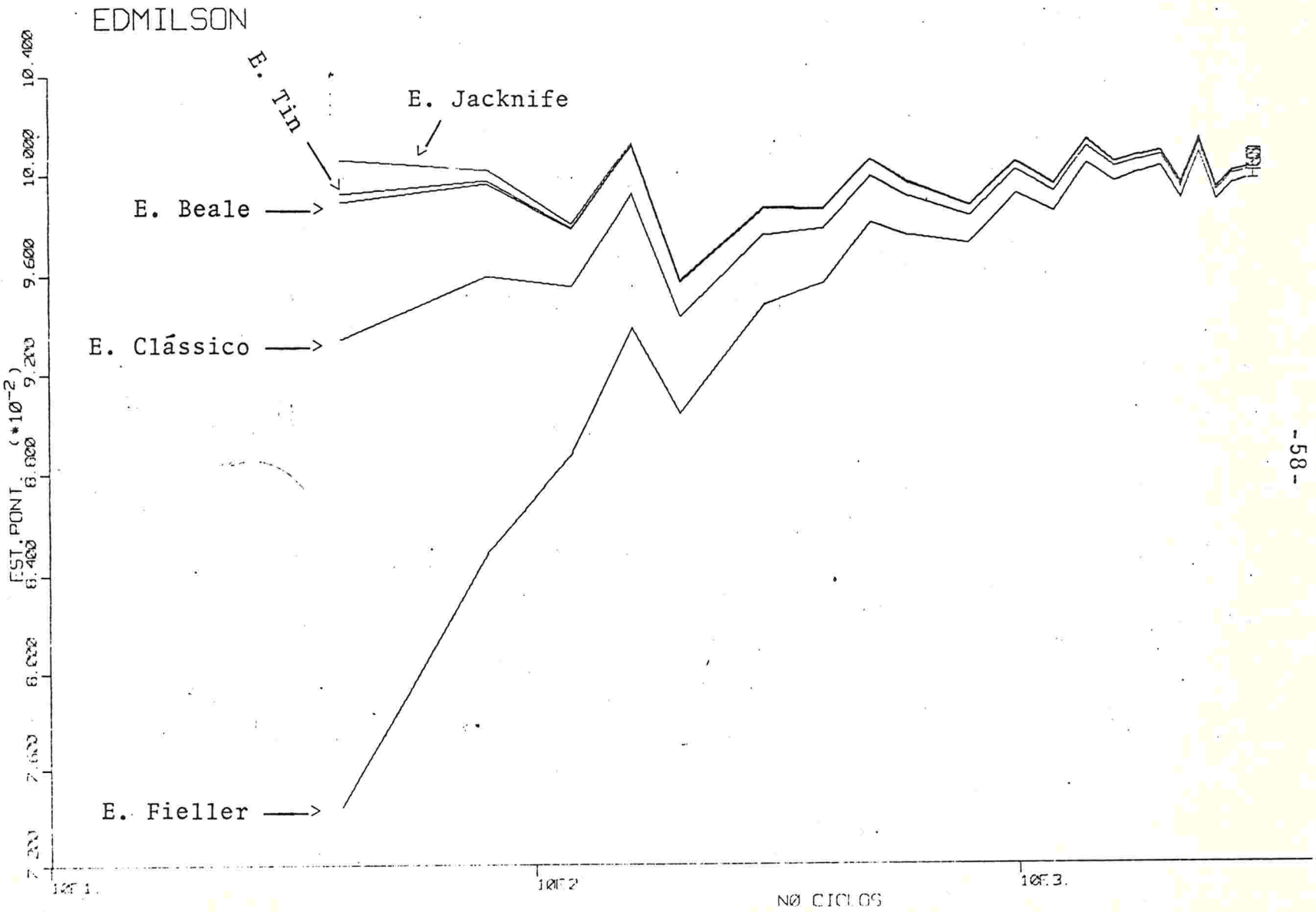

Figura 4.1 - Média das réplicas para as estimativas pontuais

Muito embora todos convirjam para o verdadeiro valor do tempo médio de espera na fila $E(W)=0,1$, podemos observar através do gráfico que, para as quantidades de ciclos menores, o estimador Fieller é o mais viciado e o que converge mais lentamente; em contrapartida o estimador Jacknife é o que tem melhor comportamento, sendo o que converge mais rapidamente. Os estimadores Beale e Tin são aproximadamente iguais em termos de tendência e um pouco mais viciados que o Jacknife, porém menos que o estimador Clássico. Vemos também que para quantidades de ciclos maiores, os cinco estimadores apresentaram resultados aproximadamente iguais, que oscilaram em torno do valor 0,1.

A Tabela 2, a seguir, apresenta para cada número de ciclos, a proporção de cobertura que foi observada nos intervalos de confiança para os cinco estimadores em pauta, bem como um intervalo de confiança, com nível de 90%, para a verdadeira proporção dessas réplicas.

Tabela 4.2 - Média e intervalos de confiança com nível de 90%, da cobertura dos intervalos de confiança para E(W) em uma fila M/M/1 com $\rho=0.5$

Nº DE CICLOS	ESTIMADOR PONTUAL DE E(W)				
	FIELLER	CLÁSSICO	JACKNIFE	BEALE	TIN
40.	0.610000	0.610000	0.645000	0.600000	0.600000
IC/PROP.	[0.553265, 0.666735]	[0.553265, 0.666735]	[0.589340, 0.700660]	[0.543016, 0.656984]	[0.543016, 0.656984]
80.	0.705000	0.735000	0.770000	0.755000	0.755000
IC/PROP.	[0.651954, 0.758046]	[0.683665, 0.786335]	[0.721049, 0.818951]	[0.704973, 0.805027]	[0.704973, 0.805027]
120.	0.705000	0.735000	0.750000	0.735000	0.735000
IC/PROP.	[0.651954, 0.758046]	[0.683665, 0.786335]	[0.699632, 0.800368]	[0.683665, 0.786335]	[0.683665, 0.786335]
160.	0.780000	0.795000	0.810000	0.800000	0.800000
IC/PROP.	[0.731815, 0.828185]	[0.748042, 0.841958]	[0.764368, 0.855632]	[0.753472, 0.846528]	[0.753472, 0.846528]
200.	0.750000	0.770000	0.775000	0.775000	0.775000
IC/PROP.	[0.699632, 0.800368]	[0.721049, 0.818951]	[0.726427, 0.823573]	[0.726427, 0.823573]	[0.726427, 0.823573]
300.	0.810000	0.815000	0.830000	0.825000	0.825000
IC/PROP.	[0.764368, 0.855632]	[0.769834, 0.860166]	[0.786307, 0.873693]	[0.780803, 0.869197]	[0.780803, 0.869197]
400.	0.785000	0.830000	0.850000	0.840000	0.840000
IC/PROP.	[0.737214, 0.832786]	[0.786307, 0.873693]	[0.808466, 0.891534]	[0.797357, 0.882643]	[0.797357, 0.882643]
500.	0.855000	0.850000	0.855000	0.855000	0.855000
IC/PROP.	[0.814044, 0.895956]	[0.808466, 0.891534]	[0.814044, 0.895956]	[0.814044, 0.895956]	[0.814044, 0.895956]
600.	0.860000	0.870000	0.870000	0.865000	0.865000
IC/PROP.	[0.819639, 0.900361]	[0.830881, 0.909118]	[0.830881, 0.909118]	[0.825251, 0.904749]	[0.825251, 0.904749]
700.	0.835000	0.840000	0.865000	0.855000	0.855000
IC/PROP.	[0.791825, 0.878175]	[0.797357, 0.882643]	[0.825251, 0.904749]	[0.814044, 0.895956]	[0.814044, 0.895956]
800.	0.870000	0.865000	0.865000	0.860000	0.860000
IC/PROP.	[0.830881, 0.909118]	[0.825251, 0.904749]	[0.825251, 0.904749]	[0.819639, 0.900361]	[0.819639, 0.900361]
900.	0.870000	0.860000	0.870000	0.870000	0.870000
IC/PROP.	[0.814678, 0.925322]	[0.802921, 0.917079]	[0.814678, 0.925322]	[0.814678, 0.925322]	[0.814678, 0.925322]
1000.	0.860000	0.860000	0.860000	0.860000	0.860000
IC/PROP.	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]
1200.	0.930000	0.930000	0.930000	0.920000	0.920000
IC/PROP.	[0.888028, 0.971972]	[0.888028, 0.971972]	[0.888028, 0.971972]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]
1400.	0.880000	0.880000	0.880000	0.880000	0.880000
IC/PROP.	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]
1600.	0.860000	0.860000	0.860000	0.860000	0.860000
IC/PROP.	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]	[0.802921, 0.917079]
1800.	0.940000	0.930000	0.920000	0.920000	0.920000
IC/PROP.	[0.900933, 0.979067]	[0.888028, 0.971972]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]
2000.	0.920000	0.930000	0.940000	0.940000	0.940000
IC/PROP.	[0.875372, 0.964628]	[0.888028, 0.971972]	[0.900933, 0.979067]	[0.900933, 0.979067]	[0.900933, 0.979067]

NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Continuação da Tabela 4.2

2200.	0.920000	0.920000	0.930000	0.930000	0.930000
IC/PROP.	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]	[0.888028, 0.971972]	[0.888028, 0.971972]	[0.888028, 0.971972]
2400.	0.870000	0.870000	0.880000	0.880000	0.880000
IC/PROP.	[0.814678, 0.925322]	[0.814678, 0.925322]	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]	[0.826544, 0.933456]
2600.	0.900000	0.890000	0.890000	0.890000	0.890000
IC/PROP.	[0.850650, 0.949350]	[0.838530, 0.941470]	[0.838530, 0.941470]	[0.838530, 0.941470]	[0.838530, 0.941470]
2800.	0.790000	0.780000	0.790000	0.790000	0.790000
IC/PROP.	[0.722998, 0.857002]	[0.711856, 0.848144]	[0.722998, 0.857002]	[0.722998, 0.857002]	[0.722998, 0.857002]
3000.	0.930000	0.920000	0.920000	0.920000	0.920000
IC/PROP.	[0.888028, 0.971972]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]	[0.875372, 0.964628]

6.

Vemos que para o número de ciclos até 1200, a proporção de cobertura cresceu, convergindo para o valor 0,90 do nível pré-fixado, e para o número de ciclos maior que 1200, esta proporção oscilou em torno do valor 0,9.

A Figura 4.2 apresenta a proporção de cobertura para os estimadores Fieller, Clássico e Jacknife e a Figura 4.3 apresenta esta proporção para os estimadores Fieller, Beale e Tin.

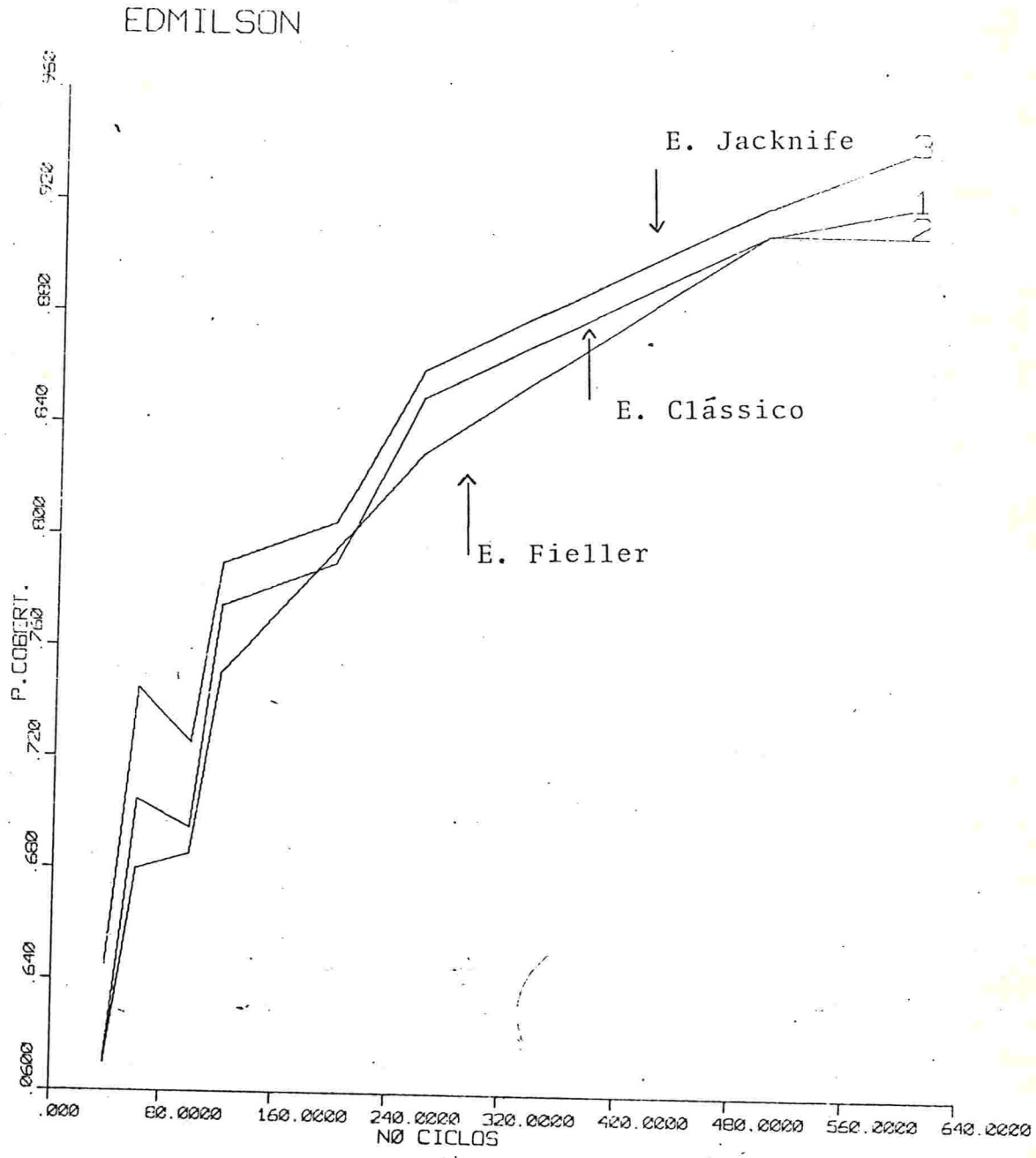

Figura 4.2 - Proporção de cobertura para os estimadores Fieller, Clássico e Jacknife

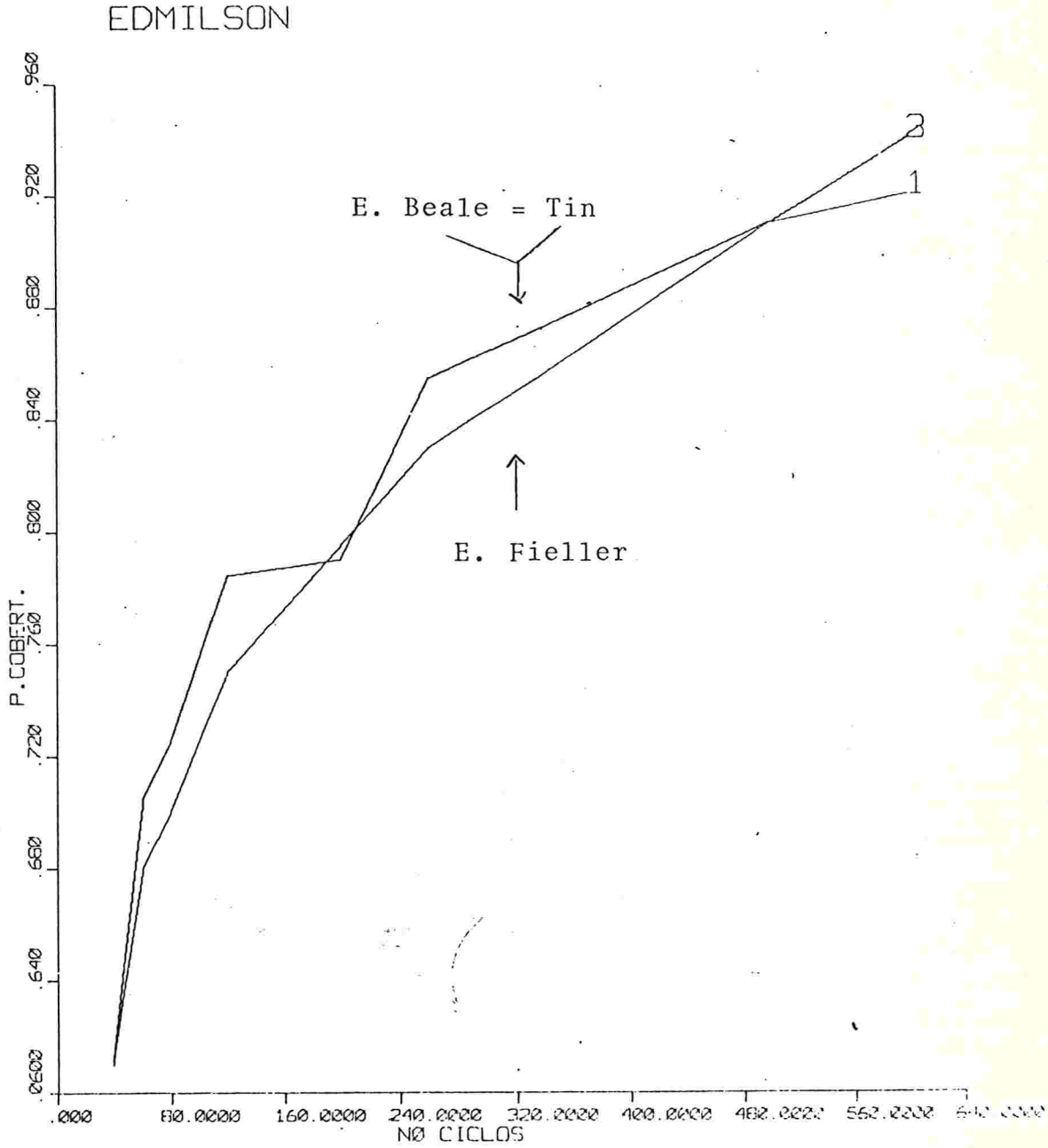

Figura 4.3 - Proporção de cobertura para os estimadores Fieller, Beale e Tin

Vemos através das Figuras 4.2 e 4.3 que a proporção de cobertura que convergiu mais rapidamente para 0,9, foi a do estimador Jacknife, seguida pelos de Beale e de Tin, cujas proporções convergiram de forma aproximadamente igual, seguidas pela do Clássico e, por último, pela de Fieller.

Vemos também, através das Figuras 4.2 e 4.3, que para pequenas rodadas de simulação, os intervalos de confiança não cobriram adequadamente o verdadeiro $r = E(W)$.

4.3 - CONCLUSÕES

Observamos que o estimador de Jacknife, para pequenas rodadas, foi o que produziu os melhores resultados em termos da tendência e da cobertura dos intervalos de confiança, embora tenha sido o que, visivelmente, produziu maior variação entre réplicas sendo portanto recomendado para estimar r. Para longas rodadas, todos os estimadores apresentaram resultados aproximadamente iguais, o que nos leva a sugerir que o estimador Clássico, por ser o mais simples, seria o recomendado.

BIBLIOGRAFIA

ÇINLAR, Erhan, 1975. *Introduction to stochastic processes*. New Jersey: Prentice Hall Inc. Englewood.

CHUNG, K.L., 1968. *A Course in probability theory*. New York: Harcourt, Brace and World.

CRANE, M.A. & IGLEHART, D.L., 1974. Simulating stable stochastic systems, I: General multiserver queues. *Journal Assoc. Comput. Mach* 21: 103-113.

CRANE, M.A. & IGLEHART, D.L., 1974. Simulating stable stochastic systems, II: Markov chain. *Journal Assoc. Comput. Mach.* 21: 114-123.

CRANE, M.A. & IGLEHART, D.L., 1975. Simulating stable stochastic systems III: regenetative processes and discret event simulations. *Operations Res.* 25: 33-45.

CRANE, M.A. & LEMOINE, A.J., 1977. *An introduction to the regenerative method for simulation analysis*. New York-Berlin.

DANTAS, C.A.B. *Análise estatística em simulação.* (a ser publicado).

DANTAS, C.A.B., 1978. *Tópicos de filas e simulação.* São Paulo, USP. 3º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.

DURBIN, J., 1959. A note on the application of Quenouille's method of bias reduction of the estimation of ratios. *Biometrika* 46: 477-480.

FELLER, W., 1966. *An introduction to probability theory and it's applications.* New York: Wiley. V.2

IGLEHART, D.L., 1975. Simulating stable stochastic systems, V: comparison of ratio estimators. *Naval Research Logistic Quartely* 22(3): 553-565.

KARLIN, SAMUEL e TAYLOR M. HOWARD, 1975. A *first course in stochastic processes.* 2. ed. Academic Press.

KHINTCHINE, A., 1960. *Mathematical methods in theory of queueing.* Griffin Statistival Monographs.

LAVENBERG, S.S. & SLUTZ, D.R., 1975. Introduction to regenerative simulation. *IBM. J. Res. Develop.* 19: 458-462.

MILLER, D.R., 1972. Existence of limits in regenerative processes. *Ann. Math. Statist.* 43: 1275-1282.

QUENOUILLE, M.H., 1956. Notes on bias in estimation. *Biometrika* 43: 353-360.

RAO, J.N.K., 1965. A note on estimation of ratios by Quenouille's method. *Biometrika* 52: 647-649.

RAO, J.N.K. & WEBSTER, J.T., 1966. On two methods of bias reduction in the estimation of ratios. *Biometrika*, 53: 571-577.

ROSS, SHELDON M., 1970. *Applied probability models with optimization application*. San Francisco, California: Holden-Day in Management Science.

ROY, S.N. e POTTHOF, R.F., 1958. Confidence bounds on vector analogues of the ratio of mean and the ratio of variances for two correlated normal variates and some associated tests. *Ann. Math. Statist.* 29: 829-841.

SMITH, W.L., 1955. Regenerative stochastic processes. *Proc. Roy. Soc.* A, 232: 6-31.

SMITH, W.L., 1958. Renewal theory and it's ramifications. *J. Roy. Statist. Soc.* B, 20: 243-302.

TIN, M., 1965. Comparison of some ratio estimators. *J. Am. Statist. Assoc.* 60: 294-307.

APÊNDICE

A.1 CONVOLUÇÃO

Seja F uma função de distribuição e seja g uma função qualquer. Então a função

$$(F * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)\,dF(x)$$

é chamada a convolução de F e g.

Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes com funções de distribuição F e G, respectivamente, então a distribuição de $X+Y$ é dada por

$$P(X+Y\leq t) = \int\int_{X+Y\leq t} dF(x)dF(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t-y} dF(x)dF(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t-y)\quad dG(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)dF(x) = (F*G)(t).$$

Observação: Se $F=G$ então $F*F=F_2$. Similarmente

$$F_n = F * (\underbrace{F * F \ldots * F}_{n-1})$$

A.2 FUNÇÃO ARITMÉTICO

Seja T uma variável aleatória com função de distribuição F. A função F é dita aritmético com amplitude $\lambda>0$ se a variável aleatória T assume valores no conjunto $\{0,\lambda,2\lambda,\ldots\}$ com probabilidade 1. Caso contrário F é não-aritmético.

A.3 FUNÇÃO DIRETAMENTE RIEMANN INTEGRÁVEL

Seja g uma função definida em R+. Para cada $a>0$ e $n=1,2,\ldots$, sejam

$$\underline{m}_n = \min\{g(t):\ (n-1)\ a\leq t\leq na\}$$

$$\bar{m}_n = \max\{g(t):\ (n-1)\ a\leq t\leq na\}$$

$$\underline{s}(a) = a \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n,\quad \bar{s}(a) = a \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n,$$

então g é dita diretamente Riemann integrável se as séries $\underline{s}(a)$ e $\bar{s}(a)$ são finitas e

$$\lim_{a\to 0} \underline{s}(a) = \lim_{a\to 0} \bar{s}(a).$$

Observação: Uma condição suficiente para g ser diretamente Riemann integrável é explicitada por:

i) $g(t) \geq 0, \ \forall t > 0;$

ii) $g(t)$ é não decrescente;

iii) $\int_0^\infty g(t)dt < \infty.$

A.4 MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A.4.1 Seja X uma variável aleatória e seja

$\mu_j = E[X-E(X)]^j$, o j-ésimo momento central.

Se X for uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, então

$$\mu_{2j} = \frac{(2j)!}{2^j.j!} \sigma^{2j}, \text{ se } j \geq 1$$

e

$$\mu_{2j-1} = 0, \text{ se } j \geq 1$$

(ver Kendall e Stuart, 1958).

A.4.2 Seja (Y_i, X_i), $i=1,\ldots,n$ amostra aleatória em que a variável X_i tem distribuição normal com média 1, variância nh e

$$Y_i = a + bX_i + e_i$$

onde e_i- é o i-ésimo erro aleatório, então

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) = 1 + h + 3h^2 + 15h^3 + O(n^{-4})$$

e

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) = 1 + 3h + 15h^2 + 105h^3 + O(n^{-4}).$$

<u>Demonstração</u>: Considerando $\xi_i = 1 - X_i$, temos que

$$\frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{1-\bar{\xi}} = 1+\bar{\xi}+\bar{\xi}^2+\bar{\xi}^3+\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\xi}^i \quad \text{e} \quad \bar{\xi} \sim N(0,h),$$

então

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) = 1+E(\bar{\xi}) + E(\bar{\xi}^2)+\ldots$$

usando A.4.1, temos que

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) = 1 + h + 3h^2 + 15h^3 + O(n^{-4})$$

é o resultado desejado.

De modo análogo

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) = E\left(\frac{1}{(1-\bar{\xi})^2}\right).$$

Usando o desenvolvimento em série

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0)+\ldots$$

onde $f^{(i)}(0)$- indica a derivada de ordem i, da função f(x), aplicada no ponto zero.

Considerando $f(x) = \frac{1}{(1-\bar{X}^2)}$ e usando A.4.1 temos finalmente

$$E\left(\frac{1}{\bar{X}^2}\right) = 1 + 3h + 15h^2 + 105h^3 + O(n^{-4}).$$

A.5 TEMPO DE PARADA

Sejam $X_1, X_2, \ldots,$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, e seja N uma variável aleatória que assume valores inteiros positivos. A variável N, será um tempo de parada para a seqüência $\{X_i, i\geqslant 1\}$ se o evento $\{N=n\}$ só depender de $\{X_i, i\leqslant n\}$ para todo $n=1,2\ldots$.

```
00010 ***********************************************
00020 ******ESTE PROGRAMA SIMULA UMA FILA M/M/1******
00030 ***********************************************
00040 C-----N--> NO DE CICLOS
00050 C      ML--> NO DE REPLICAS
00060 C-----CONT--> CONTADOR DE REPLICAS
00070 C      J-----> CONTADOR DE CICLOS
00080 C      TC----> SOMA DOS INTERVALOS ENTRE CHEGADAS PARA CADA CICLO
00090 C      TS----> SOMA DOS TEMPOS DE ESPERA PARA CADA CILO
00100 C      M-----> CONTADOR DO NO DE CLIENTES ATENDIDOS
00110 C      F-----> INCREMENTO DE CHEGADA
00120 C      I-----> INCREMENTO DE SAIDA
00130 C      CONTF-> CONTADOR DE INTERVALOS QUE CONTEM O VALOR 0.1 PARA O ESTI-
00140 C      MADOR FIELLER-IDEM PARA OS OUTROS ESTIMADORES.
00150 C      QMRF--> QUADRADO DE ESTIMADOR DE FILLER - IDEM PARA OS OUTROS ES -
00160 C      TIMADORES.
00170 C      MLF---> ESTIMADOR DE FIELLER - IDEM PARA OS OUTROS ESTIMADORES
00180 C      DPRF--> DESVIO PADRAO DAS REPLICAS PARA O ESTIMADOR FILLER - IDEM
00190 C      PARA OS OUTROS ESTIMADORES.
00200 C      INTPF-> METADE DO COMPRIMENTO DO INTERVALO PARA REPLICAS DO ESTIMA
00210 C      DOR FIELLER - IDEM PARA OS OUTROS ESTIMADORES.
00220 C      PCONF1--> LIMITE INFERIOR DO INTERVALO PARA REPLICAS DO ESTIMADOR
00230 C      FILLER - IDEM PARA OS OUTROS ESTIMADORES.
00240 C      PCONF2--> LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO PARA REPLICAS DO ESTIMADOR
00250 C      FIELLER - IDEM PARA OS OUTROS ESTIMADORES.
00260        IMPLICIT REAL    (A-Z)
00270        DIMENSION FILA(1000),CICL(3000,2),TETA(3000),NOME(8),NOME1(8)
00280        OPEN(UNIT=4,DEVICE='DSK')
00290        IMPRIMA=CABEC-1
00300        IMPRIMA=CABEC-2
00310        READ(2,7)NOME,NOME1
00320        READ(2,*)N,ML
00330        WHILE(N≠0)
00340        .  CONT=0
00350        .  CONTF=0
00360        .  CONTC=0
00370        .  QMRF=0
00380        .  QMRB=0
00390        .  QMRC=0
00400        .  QMRJ=0
00410        .  QMRT=0
00420        .  CONTB=0
00430        .  CONTJ=0
00440        .  CONTT=0
00450        .  MRF=0
00460        .  MRB=0
00470        .  MRC=0
00480        .  MRJ=0
00490        .  MRT=0
00500        .  WHILE(CONT<ML)
00510        .  .  CONT=CONT+1
00520        .  .  J=0
00530        .  .  WHILE(J< N)
00540        .  .  .  TC=0;TS=0
00550        .  .  .  U=RAN(150)
00560        .  .  .  CH=-(.2*ALOG(1.-U))
00570        .  .  .  U=RAN(1150)
00580        .  .  .  FS=-(.1*ALOG(1.-U))
```

```
00590          .  .  .  TC=CH;TS=FS;W=0;X=0
00600          .  .  .  WHEN(FS>=CH)
00610          .  .  .  .  W=FS-CH;X=X+W;M=1;F=0;I=1;J=J+1
00620          .  .  .  .  WHILE(F>=1.OR.TC<=TS)
00630          .  .  .  .  .  CONDITIONAL
00640          .  .  .  .  .  .  (TC<TS)GERE-CHEGADA
00650          .  .  .  .  .  .  (TC>TS)GERE-SAIDA
00660          .  .  .  .  .  .  (TC==TS)
00670          .  .  .  .  .  .  .  GERE-CHEGADA
00680          .  .  .  .  .  .  .  GERE-SAIDA
00690          .  .  .  .  .  .  ...FIN
00700          .  .  .  .  .  ...FIN
00710          .  .  .  .  ...FIN
00720          .  .  .  ...FIN
00730          .  .  .  ELSE
00740          .  .  .  .  M=1;W=0;J=J+1
00750          .  .  .  ...FIN
00760          .  .  .  CICL(J,1)=X
00770          .  .  .  CICL(J,2)=M
00780          .  .  ...FIN
00790          .  .  CALCULE-ESTATISTICAS
00800          .  ...FIN
00810          .  MRF=MRF/ML
00820          .  MRB=MRB/ML
00830          .  MRC=MRC/ML
00840          .  MRT=MRT/ML
00850          .  MRJ=MRJ/ML
00860          .  DPRF=SQRT(1./(ML-1)*(QMRF-ML*MRF^2))
00870          .  DPRB=SQRT(1./(ML-1)*(QMRB-ML*MRB^2))
00880          .  DPRC=SQRT(1./(ML-1)*(QMRC-ML*MRC^2))
00890          .  DPRJ=SQRT(1./(ML-1)*(QMRJ-ML*MRJ^2))
00900          .  DPRT=SQRT(1./(ML-1)*(QMRT-ML*MRT^2))
00910          .  CONTF=CONTF/ML
00920          .  CONTC=CONTC/ML
00930          .  CONTB=CONTB/ML
00940          .  CONTJ=CONTJ/ML
00950          .  CONTT=CONTT/ML
00960          .  VRRF=DPRF^2
00970          .  VRRB=DPRB^2
00980          .  VRRC=DPRC^2
00990          .  VRRJ=DPRJ^2
01000          .  VRRT=DPRT^2
01010          .  INTPF=C*SQRT(CONTF*(1.-CONTF)/ML)
01020          .  INTPC=C*SQRT(CONTC*(1.-CONTC)/ML)
01030          .  INTPB=C*SQRT(CONTB*(1.-CONTB)/ML)
01040          .  INTPJ=C*SQRT(CONTJ*(1.-CONTJ)/ML)
01050          .  INTPT=C*SQRT(CONTT*(1.-CONTT)/ML)
01060          .  SQ=SQRT(ML)
01070          .  PCONF1=CONTF-INTPF
01080          .  PCONF2=CONTF+INTPF
01090          .  PCONC1=CONTC-INTPC
01100          .  PCONC2=CONTC+INTPC
01110          .  PCONB1=CONTB-INTPB
01120          .  PCONB2=CONTB+INTPB
01130          .  PCONJ1=CONTJ-INTPJ
01140          .  PCONJ2=CONTJ+INTPJ
01150          .  PCONT1=CONTT-INTPT
01160          .  PCONT2=CONTT+INTPT
```

```
01170        .   INTRF=C*DPRF/SQ
01180        .   INTRC=C*DPRC/SQ
01190        .   INTRJ=C*DPRJ/SQ
01200        .   INTRT=C*DPRT/SQ
01210        .   INTRB=C*DPRB/SQ
01220        .   MICF1=MRF-INTRF
01230        .   MICF2=MRF+INTRF
01240        .   MICC1=MRC-INTRC
01250        .   MICC2=MRC+INTRC
01260        .   MICJ1=MRJ-INTRJ
01270        .   MICJ2=MRJ+INTRJ
01280        .   MICT1=MRT-INTRT
01290        .   MICT2=MRT+INTRT
01300        .   MICB1=MRB-INTRB
01310        .   MICB2=MRB+INTRB
01320        .   IMPRIMA-SAIDA1
01330        .   IMPRIMA-SAIDA2
01340        .   READ(2,*)N,ML
01350        ...FIN
01360       STOP
```

```
01370       10 GERE-CHEGADA
01380        .   U=RAN(150)
01390        .   CH=-(.2*ALOG(1.-U))
01400        .   F=F+1
01410        .   FILA(F)=CH
01420        .   TC=TC+CH
01430        ...FIN
```

```
01440       10 GERE-SAIDA
01450        .   M=M+1
01460        .   U=RAN(1150)
01470        .   FS=-(.1*ALOG(1.-U))
01480        .   W=W+FS-FILA(I)
01490        .   IF(W<0)W=0
01500        .   I=I+1
01510        .   X=X+W
01520        .   TS=TS+FS
01530        ...FIN
```

```
01540       10 CALCULE-ESTATISTICAS
01550        .   C=1.645
01560        .   Y=0;ALFA=0;S11=0;S22=0;S12=0
01570        .   DO(I=1,J)
01580        .   .   Y=Y+CICL(I,1);S11=S11+CICL(I,1)**2
01590        .   .   ALFA=ALFA+CICL(I,2);S22=S22+CICL(I,2)**2
01600        .   .   S12=S12+CICL(I,1)*CICL(I,2)
01610        .   ...FIN
01620        .   ALFAB=ALFA/J
01630        .   YB=Y/J
01640        .   QALFAB=ALFAB**2
01650        .   QYB=YB**2
```

```
01660        ,  S11=(S11-J*QYB  )/(J-1)
01670        ,  S22=(S22-J*QALFAB  )/(J-1)
01680        ,  S12=(S12-J*YB*ALFAB)/(J-1)
01690        ,  K=C**2/J
01700 ******,  ESTIMADOR DE FIELLER   ******
01710 *      ,  ******************
01720        ,  RF=(YB*ALFAB-K*S12)/(QALFAB  -K*S22)
01730        ,  MRF=MRF+RF
01740        ,  QMRF=QMRF+RF^2
01750 ******,  ESTIMADOR BENE   ******
01760 *      ,  **************
01770        ,  RB=(YB/ALFAB)*(1+S12/(J*YB*ALFAB))/(1+S22/(J*QALFAB))
01780        ,  MRB=MRB+RB
01790        ,  QMRB=QMRB+RB^2
01800 ******,  ESTIMADOR CLASSICO   ******
01810 *      ,  ******************
01820        ,  RC=YB/ALFAB
01830        ,  MRC=MRC+RC
01840        ,  QMRC=QMRC+RC^2
01850 ******,  ESTIMADOR JACKNIFE   ******
01860 *      ,  *******************
01870        ,  STETA=0
01880        ,  DO(I=1,J.
01890        ,  ,  TETA(I)=J*(YB/ALFAB)-(J-1)*((Y-CICL(1,1)) /(ALFA-CICL(1,2)))
01900        ,  ,  STETA=STETA+TETA(I)
01910        ,  ...FIN
01920        ,  RJ=STETA/J
01930        ,  MRJ=MRJ+RJ
01940        ,  QMRJ=QMRJ+RJ^2
01950 ******,  ESTIMADOR TIN   ******
01960 *      ,  **************
01970        ,  RT=(YB/ALFAB)*(1+(S12/(YB*ALFAB)-S22/QALFAB)/J)
01980        ,  MRT=MRT+RT
01990        ,  QMRT=QMRT+RT^2
02000 ******,  INTERVALO DE CONFIANCA FIELLER   ******
02010 *      ,  ****************************
02020        ,  D=(YB*ALFAB-K*S12)**2-(QALFAB-K*S22)*(QYB-K*S11)
02030        ,  INTF=SQRT(D)/(QALFAB-K*S22)
02040        ,  ICF1=RF-INTF
02050        ,  ICF2=RF+INTF
02060        ,  IF(ICF1<=,1,AND,ICF2>=,1)CONTF=CONTF+1
02070 ******,  INTERVALO DE CONFIANCA CLASSICO   ******
02080 *      ,  ****************************
02090        ,  SC=SQRT(S11-2*RC*S12+RC**2*S22)
02100        ,  INTC=C*SC/(ALFAB*SQRT(J))
02110        ,  ICC1=RC-INTC
02120        ,  ICC2=RC+INTC
02130        ,  IF(ICC1<=,1,AND,ICC2 >=,1)CONTC=CONTC+1
02140 ******,  INTERVALO DE CONFIANCA JACKNIFE   ******
02150 *      ,  ****************************
02160        ,  SJ=0
02170        ,  DO(I=1,J).
02180        ,  ,  SJ=SJ+((TETA(I)-RJ)**2)
02190        ,  ...FIN
02200        ,  SJ=SQRT(SJ/(J-1))
02210        ,  INTJ=C*SJ/(SQRT(J))
02220        ,  ICJ1=RJ-INTJ
02230        ,  ICJ2=RJ+INTJ
```

```
02240        ,  IF(ICJ1<=.1,AND,ICJ2 >=.1)CONTJ=CONTJ+1
02250 ******,  INTERVALO DE CONFIANCA BEALE    ******
02260 *      ,  ***********************************
02270        ,  INTB=C*SC/(ALFAB*SQRT(J))
02280        ,  ICB1=RB-INTB
02290        ,  ICB2=RB+INTB
02300        ,  IF(ICB1<=.1,AND,ICB2 >=.1)CONTB=CONTB+1
02310 ******,  INTERVALO DE CONFIANCA TIN    ******
02320 *      ,  ***********************************
02330        ,  ICT1=RT-INTB
02340        ,  ICT2=RT+INTB
02350        ,  IF(ICT1<=.1,AND,ICT2 >=.1)CONTT=CONTT+1
02360        ,,,FIN

      ----------------------------------------

02370        TO IMPRIMA-CABEC-1
02380        ,  WRITE(3,9)
02390        ,  WRITE(3,1)
02400        ,  WRITE(3,2)
02410        ,  WRITE(3,3)
02420        ,  WRITE(3,4)
02430        ,  WRITE(3,1)
02440        ,,,FIN

      ----------------------------------------

02450        TO IMPRIMA-CABEC-2
02460        ,  WRITE(4,9)
02470        ,  WRITE(4,1)
02480        ,  WRITE(4,2)
02490        ,  WRITE(4,3)
02500        ,  WRITE(4,4)
02510        ,  WRITE(4,1)
02520 1      ,  FORMAT(3X,130('-'))
02530 2      ,  FORMAT(4X,'NUMBER',4X,'!',47X,'POINT  ESTIMATOR  OF  EW',46X,'!')
02540 3      ,  FORMAT(6X,'OF',6X,'!',117('-'),'!')
02550 4      ,  FORMAT(4X,'CYCLES',4X,'!',4X,'FIELLER',16X,'CLASSICAL',14X,'JACKNI
02560       *,  FE',15X,'BEALE',18X,'TIN',18X,'!')
02570 9      ,  FORMAT('1')
02580        ,,,FIN

      ----------------------------------------

02590        TO IMPRIMA-SAIDA1
02600        ,  WRITE(3,5)N,MRF,MRC,MRJ,MRB,MRT
02610        ,  WRITE(3,6)NUME,MICF1,MICF2,MICC1,MICC2,MICJ1,MICJ2,MICB1,MICB2,MIC
02620       *,  T1,MICT2
02630        ,  WRITE(3,10)VRRF,VRRC,VRRJ,VRRB,VRRT
02640 10     ,  FORMAT(3X,'! VAR-REPL !',5(5X,F9.6,9X),2X,'!')
02650        ,  WRITE(3,1)
02660 5      ,  FORMAT(3X,'!     ',F5.0,1X,'!',5(5X,F9.6,9X),2X,'!')
02670 6      ,  FORMAT(3X,'! ',8A1,' !',5(2X,'[',F9.6,',',F9.6,']'),2X,'!')
02680 7      ,  FORMAT(2(8A1,2X))
02690        ,,,FIN

      ----------------------------------------
```

```
02700        10 IMPRIMA-SAIDA2
02710         , WRITE(4,5)R,CONTF,CONIC,CONIJ,CONIB,CONI1
02720         , WRITE(4,6)TOME1,PCONF1,PCONF2,PCONC1,PCONC2,PCONJ1,PCONJ2,
02730        -,  PCONB1,PCONB2,PCONI1,PCONI2
02740         , WRITE(4,1)
02750         ...FIN
02760        END
```

PROCEDURE CROSS-REFERENCE TABLE

```
01540 CALCULE-ESTATISTICAS
      00790

01370 GERE-CHEGADA
      00640  00670

01440 GERE-SAIDA
      00650  00680

02370 IMPRIMA-CABEC-1
      00290

02450 IMPRIMA-CABEC-2
      00300

02590 IMPRIMA-SAIDA1
      01320

02700 IMPRIMA-SAIDA2
      01330
```

ERRATA

Onde se lê:	Leia-se:	pág./linha	
Vanderley	Vanderlei	V	06
Cavalcante	Cavalcanti	V	06
3.2 Comparação entre Estimadores	Comparações entre Estimadores	VII	08
Diretamente integrável	Diretamente Riemann integrável	13	04
$\lim_{t\to\infty} g(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dx$	$\lim_{t\to\infty} g(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(x)dx$	13	07
$\lim_{t\to\infty} g(c+n\lambda) =$	$\lim_{n\to\infty} g(c+n\lambda) =$	13	11
onde X é a distribuição estacionária	onde X é a variável aleatória com distribuição estacionária	20	13
....	e γ é o nível de confiança fixado do intervalo que se deseja obter	25	05
$\hat{r}_t=\frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}}\left[1+\left(\frac{s_{12}}{\bar{Y}\bar{\alpha}}+\frac{s_{12}}{\bar{\alpha}^2}\right)\frac{1}{n}\right]$	$\hat{r}_t=\frac{\bar{Y}}{\bar{\alpha}}\left[1+\left(\frac{s_{12}}{\bar{Y}\bar{\alpha}}-\frac{s_{12}}{\bar{\alpha}^2}\right)\frac{1}{n}\right]$	27	02
$E\left(\frac{a+b\bar{X}+e}{\bar{X}}\right)$	$E\left(\frac{a+b\bar{X}+\bar{e}}{\bar{X}}\right)$	35	12
....	onde δ é uma constante de ordem n^{-1}	35	04
$\hat{r}_Q = g\left(\frac{a+b\bar{X}+e}{\bar{X}}\right)$	$g\left(\frac{a+b\bar{X}+\bar{e}}{\bar{X}}\right)$	37	12
$+15\frac{g}{(g-1)^2}h^2+105\frac{g}{(g-1)^3}h^3+0(n^{-4})$	$+15\frac{g^2}{(g-1)^2}h^2+105\frac{g^3}{(g-1)^3}h^3+0(n^{-4})$	38	07
menor lor	menor valor	39	13

ERRATA (cont.)

Onde se lê:	Leia-se:	Pág./linha	
Uso dos estimadores em problemas de fila	Uso dos estimadores razão em problemas de fila	40	16
$E(\alpha_K) < 0$	$E(\alpha_K) < \infty$	45	15
$n = \left(\frac{Z_{1-\gamma/2}}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{E(\alpha)r}\right)$	$n = \left(\frac{1-\gamma/2}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{E(\alpha)r}\right)^2$	50	06
$+\frac{x^2}{2}f^{(2)}(0)+\ldots$	$+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\ldots$	74	03