# INSENSIBILIDADE DE SISTEMAS SEMI-MARKOVIANOS COM VELOCIDADES

JOSÉ LUIZ KRUSIQUE

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

Α0

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

ESTATISTICA

AREA DE CONCENTRAÇÃO: PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

ORIENTADOR: PROF. DR. ENRIQUE DANIEL ANDJEL

<sup>-</sup> SÃO PAULO, JUNHO DE 1985 -

Ā

Lucy,

Celê,

Francisco

e a afilhada

Os meus agradecimentos pela paciência e minha admiração ao Professor Doutor Enrique Daniel Andjel e um preito de amizade a Júlio da Motta Singer, de quem posso aprender muito, dentro e fora da Ciência.

### **INTRODUÇÃO**

Este trabalho está baseado principalmente em uma série de 4 artigos publicados por R. Schasberger (I,II,III,IV) sobre esse assunto.

A "insensibilidade ", a grosso modo, consiste em a Distribuição Estacionária (DE) de certos processos serem insensíveis a certas mudanças, nesse caso insensível à mudança das distribuições de certas Variáveis Aleatórias (VA) que descrevem o intervalo entre eventos de certos processos pontuais internos do Processo, desde que se conservem constantes as médias dessas VAs, ou seja; a DE do processo só depende das médias dessas distribuições.

É evidente a qualquer probabilista que esta é uma propriedade bastante interessante tanto em teoria como em aplicações.

O que faremos nesse trabalho será principalmente dar uma caracterização dessa propriedade.

Esse tipo de processo e a insensibilidade tem aplicações em filas, confiabilidade,....

#### CAPITULO 1

## A CONSTRUÇÃO DO PROCESSO

Antes do processo em si construiremos uma "base física" para ele.

Uma 3-upla

$$(1.1) (GEp) = \Sigma$$

é chamada "Esquema Semi-Markoviano Generalizado" (ESMG) se:

- a) G é uma família enumerável de conjuntos g; Será o espaço de estados do processo: G = {g}.
- b) S é um conjunto enumerável tal que 0 < |gnS| < ∞ para todo g. gnS será o conjunto dos elementos "vivos" quando o processo estiver no estado g.

Significa que estando o processo no estado g e terminando o tempo de vida do elemento s, segnS (s morre), a probabilidade do estado resultante ser g'  $\acute{\rm e}$   $\cdot$ p(g,s,g').

A construção do nosso processo requer também,

a') Uma família

$$\Phi = \{\zeta_s; s \in S\}$$

de distribuições concentradas em  $R_+^*$  com média finita, pelas quais se determinam os tempos de vida dos elementos s ao "nascerem".

b') Uma familia

(1.3) 
$$C = \{c(s,g); g \in G, s \in g \cap S\}$$

sendo os c(s,g) números reais positivos satisfazendo:

$$\sum_{s \in g \cap G} c(s,g) > 0, \quad \forall g \in G$$

Podemos ver c(s,g) como a velocidade com que se escoa o tempo de vida do elemento s quando o processo está no estado g.

Para facilitar referências, quando conveniente usaremos enumerações, como por exemplo:

$$G = \{g_1, g_2, g_3, ...\}$$
 e

$$g_{i} \cap S = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in_{i}}\}, \qquad n_{i} = |g_{i} \cap S|$$

Descreveremos uma realização do nosso processo assim:

Escolhemos um estado e um conjunto de números positivos associados, por exemplo:

$$g_i$$
eG e { $y_{i1}$ ,  $y_{i2}$ ,..., $y_{in_i}$ }

g escolhido segundo uma distribuição inicial e y segundo a distribuição  $\zeta_s$ ,  $s_{ij} \varepsilon_{g_i} \circ S$ .

Dizemos então que no tempo t=0, o processo X está no estado  $g_i$ :  $X(0)=g_i$ ; e cada elemento  $s_{ij}$  de  $g_i \cap S$  dispõem, contado a partir de t=0, de um tempo de vida  $y_{ij}$ :

$$Y(0) = (Y_{i1}(0), \dots, Y_{in_i}(0)) = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i})$$

Seja  $T_1$  o instante da primeira morte de um elemento de  $g_i$ nS, digamos  $s_{ia}$ , ou seja:

$$T_{1} = \min_{1 \le j \le n_{i}} \{t: y_{ij} - tc(s_{ij}, g_{i}) = 0\} =$$

$$= \min_{1 \le j \le n_{i}} \{y_{ij} / c(s_{ij}, g_{i})\}$$

no nosso exemplo  $T_1 = y_{ia}/c(s_{ia},g_i)$ 

Nesse instante escolhe-se um novo estado, digamos  $g_{e}$ , segundo a distribuição

$$p(g_{i}, s_{ia}, \cdot)$$

Para t,  $0 \le t < T_1$ , temos:

$$X(t) = g_i e$$

$$Y(t) = (y_{i1} - tc(s_{i1}, g_1), ..., y_{in_i} - tc(s_{in_i}, g_i))$$

Seja

$$T_2 = \min_{1 \le j \le n_i} \left\{ \frac{y_{ej}}{c(s_{ej}, g_e)} + T_1 \right\}$$

seja b o índice que realiza esse mínimo: onde

$$y_{ej} = y_{ij} - T_1 c(s_{ij}, g_i)$$

para s<sub>ej</sub> = s<sub>ij'</sub> e j' ≠ a, e se s<sub>ej</sub>∉g<sub>i</sub>nS ou s<sub>ej</sub> = s<sub>ia</sub> então y<sub>ej</sub> é escolhido segundo a distribuição ζ<sub>sej</sub>

Dizemos então que para  $T_1 \le t < T_2$ 

$$X(t) = g_e e$$

$$Y(t) = (y_{e1} - (t-T_1)c(s_{e1}, g_e), ..., y_{en_1} - (t-T_1)c(s_{en_e}))$$

Em  $T_2$  escolhemos então um estado  $g_k$  segundo a distribuição

$$p(g_e, s_{eb}, \cdot) e$$

seja T<sub>3</sub> = ... e continuando assim indefinidamente temos como fazer uma realização genérica desse processo. Chamaremos então a

$$Z(t) = (X(t), Y(t)), t \ge 0$$

de "Processo Semi-Markoviano Generalizado com velocidades suplementado" (PSMGV suplementado).

Em palavras, podemos dizer que o processo começa num estado  $g_i$ , cujos "elementos ativos", ou "vivos" são os  $s_{ij}$  de  $g_i$ nS; os tempos residuais são dados em t = 0 por  $y_{ij}$  e são reduzidos à velocidade  $c(s_{ij},g_i)$ , até que ocorra a primeira morte de um componente ativo de  $g_i$ , digamos  $s_{ia}$ .

A morte de s $_{\mathrm{i}a}$  causa o "pulo" do sistema a um novo estado  $\mathrm{g}_{\mathrm{e}}.$ 

O novo estado, em conseqüência da restrição imposta a  $p(g,s,\cdot)$  pela definição, contém todos os componentes do estado anterior  $g_i$ , com a possível exceção de  $s_{ia}$ , que entretanto pode ser revivido em  $g_e$ , e possívelmente alguns elementos novos; os tempos residuais de vida dos elementos ativos de  $g_i$  não sofrem alteração na transição, mas ficam sujeitos a redução segundo velocidades eventualmente diferentes no novo estado, sendo essa a diferença fundamental para com os processos sem velocidades dependentes dos estado. Elemento de  $g_e$  que nasce com a transição tem seus tempos de vida determinados pelas correspondentes distribuições e são contados a partir da ocasião do pulo.

É importante estabelecer que as  $\zeta_s$  devem ser escolhidas de modo a não permitir mortes simultâneas.

A continuidade das  $\zeta_s$  garantem isso com probabilidade 1.

A componente X(t) de Z(t) é chamada sua "G-componente" e é o PSMGV, Y(t) será o seu "suplemento".

Se  $\zeta_s = E_{\lambda}$ , então a componente de Y(t) correspondente à vida residual de s pode ser eliminada como consequência da ausência de memória da exponencial.

O par  $(\Sigma,C)$  será chamado "Esquema Semi-Markoviano Generalizado com velocidades" (ESMGV).

( $\Sigma$ ,C) será dito irredutível se para todo par g,g'GG, existe s<sub>0</sub>GGnS e uma seqüência finita  $\{(g_j,s_j)\}_{j=1}^n$  tal que  $g_j$ GG e  $s_j$ Gg<sub>j</sub>nS e:

$$p(g,s_{0},g_{1})c(s_{0},g)\binom{n-1}{1}p(g_{j},s_{j},g_{j+1})c(s_{j}g_{j}).$$

$$p(g_{n},s_{n},g')c(s_{n},g_{n})>0$$

Z(t) é um processo de Markov.

Para processos como esse só há resultados gerais a respeito da existência e unicidade de Distribuições Estacionárias (DE) para G finito. Para G infinito a questão é muito mais difícil e não conhecemos resultados gerais.

(1.4) Isso posto dizemos que um PSMGV suplementado será chamado "simples" de (Σ,C) é irredutível, se não termina em tempo finito com probabilidade 1 e se tem uma DE (única). Esse trabalho trata de DE's de PSMGV suplementados simples com base em um ESMGV ( $\Sigma$ ,C) fixado em coleções  $\Phi$  cuja variabilidade motiva o conceito principal nesse trabalho: a insensibilidade.

(1.5) Um ESMGV ( $\Sigma$ ,C) é dito  $\Phi$ -insensível onde  $\Phi$  é uma co-leção de famílias  $\Phi$  = { $\zeta$ <sub>S</sub>,ses}

(ver (1.2)) se todo PSMGV com base em ( $\Sigma$ ,C) e  $\phi$ E $\Phi$  é simples e tem uma DE que é a mesma para todo  $\phi$ E $\Phi$ .

A cada  $\phi$  está associada uma família  $\{\lambda_s^{-1}, s \in S\}$  ou simplesmente  $\{\lambda_s^{-1}\}$  onde  $\lambda_s^{-1} = E\zeta_s$  ( $\lambda > 0$ )

(1.6) O protótipo de Φ para a qual a insensibilidade será estudada é

$$\Phi = \Phi_{S}, \{\lambda_{s}^{-1}\} = \{\phi = \{\zeta_{s}, s \in S\}\}$$

onde  $E\phi_S = \lambda_S^{-1}$  e se s¢S' então  $\phi_S = E_{\lambda}$  (•) e  $\phi$  produz com ( $\Sigma$ ,C) um PSMGV suplementado simples}

onde

$$E_{\lambda_s}(t) = (1-e^{-\lambda_s t}) I_{K_+}(t), \quad S' \in S, S' \neq \emptyset.$$

Para S' =  $\{s'\}$  serã usada a notação  $\Phi_{s'}\{\lambda_s\}$ .

Se  $\Phi_s$ ,  $\{\lambda_s\}$ -insensibilidade prevalece então a DE  $\{p_g, g \in G\}$ 

do PSMGV com base em  $(\Sigma,C)$  e  $\phi \in \Phi_S$ , não depende da exata forma das distribuições  $\zeta_S$ , s $\in S'$ , ou seja: só depende das S', s $\in S'$ , atravez das suas médias.

A abordagem usada nesse trabalho para se derivar alguns dos resultados aqui testados depende pesadamente do assim chamado "método de fases" (ou "estágios"), que consiste no seguinte:

Seja para todo sES:

(1.7) 
$$\phi' = \left\{ \zeta_s = \sum_{k=1}^{N} \pi_k \cdot (E_{\gamma k} * E_{\gamma k-1} * \dots * E_{\gamma 1}) (f) \right\}$$

onde  $E_{\gamma 1}^{*}E_{\gamma 2}^{*}\cdots^{*}E_{\gamma k}$  significa a convolução dessas distribuições e  $\{\pi_k\colon 1\le k\le N\}$  é uma distribuição de probabilidade discreta e N pode ser finito ou infinito, e  $\gamma_k$  e  $\pi_k$  em geral dependem de s.

Nessas condições uma cadeia de Markov chamada "Cadeia de fases", ou "Cadeia de Estágios" pode ser considerada com base em  $(\Sigma,C)$  e  $\phi$  como se segue:

Quando construímos (uma realização do) o PSMGV com base em  $(\Sigma,C)$  e  $\phi$ ' e precisamos estabelecer um novo tempo de vida segundo alguma  $\zeta_S \in \Phi$ ', em lugar disso na correspondente cadeia de fases realizamos um experimento segundo

$$\left\{\pi_{k}\right\}_{k=1}^{N}$$
,

e se o resultado é k, fazemos s "viver" k fases consecutivas independentes, numeradas  $\{k, k-1, \ldots, 1\}$  onde a fase i tem distribuição exponencial com média  $\mathring{\gamma}_i^{-1}$ .

Isso significa que a duração total do tempo de vida de s teria duração segundo  $\phi_s$  sob velocidade unitária e se o estado prevalente é g a velocidade c(s,g) é aplicada independente da prevalente fase.

Sabendo do estado g e suplementando isso com a fase que cada um dos seus elementos ativos se encontra significa conhecer a variável aleatória a qual flutuará em tempo contínuo à maneira Markoviana. Esta cadeia de Markov é a "cadeia das fases" com base em  $(\Sigma,C)$  e  $\phi$ '.

Ela tem uma distribuição estacionária única — e então é chamada Simples — se e só se o correspondente PSMGV (a "cadeia quociente de que falaremos adiante) for simples.

A vantagem no uso de tais cadeias é ser possível uso de técnicas algébricas simples, com a desvantagem das provas correspondentes serem menos gerais. Como as distribuições de VA's tipo estágios (fases) (1.7) são, na topologia da convergência fraca densas no conjunto das Distribuições (ver Apêndice 1) e há resultados à respeito da convergência das correspondentes distribuições estacionárias dos processos (I-[3]), julgamos poder usar o método de fases sem perdas significativa da generalidade e aplicabilidade dos resultados.

Lembramos que as VA's com distribuição com (1.7) incluem as exponenciais, inclusive em casos não óbvios (ver hipótese do Teorema (3.1)).

#### CAPITULO 2

#### BALANÇO LOCAL

Este é um conceito que se mostrará fortemente relacionado com insensibilidade.

Se o PSMGV com base em  $(\Sigma,C)$  (irredutivel) e  $\Phi'=\{\zeta_s=E_{\lambda_s},s\in S\}$  é Simples.  $(\Phi')$  para nos sempre será essa família só de exponenciais) então sua única DE é a única solução probabilística do sistema de equações:

(2.1) 
$$\Lambda_{g} x_{g} = \sum_{g' \in G} x_{g', S} \sum_{s \in g', s} p(g', s, g) \lambda_{sg'}, g \in G$$

onde

(2.2) 
$$\lambda_{sg} = \lambda_{s}c(s,g) e$$

$$\Lambda_{g} = \sum_{s \in g \cap S} \lambda_{sg}$$

Este é o chamado Sistema de Equações de Balanço Global (SEBG).

O sistema acima e às vezes compativel com:

$$(2.4) x_g \lambda_{s_0 g} = \sum_{g' \notin G_0} x_{g', s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{s, g'} +$$

para  $s_0$  fixo e todo  $g \in G_0 = \{g \in G, s_0 \in g\}$ .

Nesse caso se diz que  $(\Sigma,C)$  é "Localmente Balanceado com respeito a s $_0$ " ou "Satisfaz as Equações de Balanço Local para s $_0$ " ou simplesmente " $(\Sigma,C)$  é s $_0$ -BL", como usaremos de agora em diante. Devemos nos lembrar sempre que há um conjunto  $\{\lambda_s^{-1}\}$  de médias subjacente quando dizemos "s-BL".

Em palavras (2.4) significa:

"o fluxo para fora de gatribuido à morte de so iguala o fluxo para gatribuido ao nascimento de so" (incluindo renascimentos).

Nessa secção, Balanço Local (BL) será investigado sem referência a insenbilidade.

Se (Σ,C) for s-BL para todo s de S' subconjunto deS, resumiremos isso com a notação S'-BL.

O primeiro conceito ao qual ligaremos BL será "desconectividade"

(2.5) DEFINIÇÃO: O esquema (Σ,C) será chamado S'-desconexo (S'CS, |S'| > 0), se no máximo 1 elemento de S' pode nascer de um pulo, ou seja:

$$p(g,s,g')c(s,g) = 0$$

para toda 3-upla (g,s,g') incluida em um dos casos

abaixo:

- a)  $|(g' \cap S') \setminus (g \cap S')| > 0$  e s $\in S'$ , s $\in g'$ .
- b)  $|(g'nS')\setminus(gnS')| > 1 e s \& S'$ .
- c)  $|(g'nS')\setminus(gnS')| > 1 e s \in S', s \notin g'$ .

A relação entre Balanço Local e S' desconectividade é a seguinte

(2.6) TEOREMA: Se para algum conjunto de médias associadas  $\{\lambda_s^{-1}, s \in S\}$ ,  $(\Sigma, C)$  satisfaz EBL para todo  $s \in S'$ , onde S' é subconjunto de S não vazio então  $(\Sigma, C)$  é S' desconexo.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos

$$\mathcal{H} = \{H: H \subset S', |H| = 2\}$$

Se  $(\Sigma,C)$  for não S'-desconexo, então, para alguma 3-upla (g', s,g) a morte de s ativa mais que um elemento de S' e portanto o conjunto dos elementos ativados por essa transição contém algum  $H\mathcal{EH}$ .

Por contraposição, se  $(\Sigma,C)$  for H-desconexo para todo  $He\mathcal{H}$ , então  $(\Sigma,C)$  será S'-desconexo. Basta portanto provar H-desconexidade para todo  $He\mathcal{H}$ .

Seja  $H = \{s_1, s_2\}$ .

Lembrando que  $G_s = \{g \in G: s \in g\}$  definimos

$$G_1 \stackrel{\bullet}{=} G_{s_1} G_{s_2}$$

$$G_{2} \stackrel{!}{=} G_{s_{2}} \stackrel{\backslash G}{\downarrow} G_{s_{1}}$$

$$G_{12} \stackrel{!}{=} G_{s_{1}} \stackrel{\backslash G}{\downarrow} G_{s_{2}}$$

$$\bar{G} \stackrel{!}{=} G \backslash (G_{s_{1}} \cup G_{s_{2}})$$

e notamos que

$$\mathsf{G} = \mathsf{G}_1 \sqcup \mathsf{G}_2 \sqcup \mathsf{G}_{12} \sqcup \bar{\mathsf{G}}$$

Assumimos que o processo em consideração tem DE única  $\{p_g\}$  e sabemos que  $\{p_g\}$  satisfaz S'-BL.

Tomemos g em  $G_{12}$  e escrevemos a correspondente EBG com suas parcelas convenientemente separadas:

$$\Lambda_{g}p_{g} = c_{g} + u_{g} + v_{g} + a_{1g} + a_{2g} + \sum_{g' \in G_{12}} p_{g'} \cdot \sum_{s \neq s_{1}, s_{2}} p(g', s, g) \lambda_{sg'}$$

onde

$$c_{g} \stackrel{:}{=} \sum_{g' \in \overline{G}} p_{g', s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{sg'} +$$

$$+ \sum_{g' \in G_{1}} p_{g', p}(g', s_{1}, g) \lambda_{sg'} + \sum_{g' \in G_{2}} p_{g', p}(g, s_{2}, g') \lambda_{sg'}$$

(O teorema estará demonstrado se mostrarmos que os  $c_g$  são nulos pois em  $c_g$  são somadas as parcelas em que nascem os 2 elementos de H).

$$u_g = \sum_{g' \in G_1} p_{g'} \sum_{s \neq s_1} p(g', s, g) \lambda_{sg'}$$

$$v_g = \sum_{g' \in G_2} p_{g'} \sum_{s \neq s_2} p(g', s, g) \lambda_{sg'}$$

$$a_{ig} = \sum_{g' \in G_{12}} p_{g'} p(g', s_{i}, g) \lambda_{s_{i}g}$$

Em  $u_g$ ,  $v_g$ ,  $a_{1g}$ ,  $a_{2g}$  são somadas as parcelas em que somente um elemento de H nasce; o outro já estava ativo (vivo).

Por hipótese  $\{p_g\}$  também satisfaz as EBL para séS' as quais para s $_1$  e s $_2$  e géG $_{12}$  tornam a forma respectivamente de:

$$\lambda_{s_1} g^p g = c_g + v_g + a_{1g}$$

е

$$\lambda_{s_2g}p_g = c_g + u_g + a_{2g}$$

que implicam em:

$$-(\lambda_{s_1g} + \lambda_{s_2g})p_g + (c_g + u_g + v_g + a_{1g} + a_{2g}) = -c_g$$

Somando e subtraindo ao primeiro membro: a parcela

$$g' \in G_{12} p_{g \sum_{s \neq s_{1}s_{2}} p(g',s,g) \lambda_{sg'}} p(g',s,g) \lambda_{sg'}$$

temos

$$(\Lambda_{g} - \lambda_{s_{1}g} - \lambda_{s_{2}g}) p_{g} - \sum_{g' \in G_{12}} p_{g',s\neq s_{1},s_{2}} p(g',s,g) \lambda_{sg'} = -c_{g}$$

Somando essa equação membro a membro para todo geG<sub>12</sub> te-

mos:

$$0 = -\sum_{g \in G_{12}} c_g$$

pois

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{g \in G_{12}} \sum\limits_{g' \in G_{12}} p_{g'} \sum\limits_{s \neq s_{1}, s_{2}} p(g', s, g) \lambda_{sg'} = \\ = \sum\limits_{g' \in G_{12}} p_{g'} \sum\limits_{s \neq s_{1}, s_{2}} \left( \sum\limits_{g \in G_{12}} p(g', s, g) \right) \lambda_{sg'} = \\ = \sum\limits_{g' \in G_{12}} p_{g'} \sum\limits_{s \neq s_{1}, s_{2}} (1) \lambda_{sg'} = \\ = \sum\limits_{g' \in G_{12}} p_{g'} (\Lambda_{g'} - \lambda_{s_{1}g'} - \lambda_{s_{2}g'}) . \end{array}$$

o que justifica o anulamento do primeiro membro.

Como  $c_g \ge 0$  para qualquer  $g \in G_{12}$  temos  $c_g = 0$ .

c.q.d.

Um outro conceito importante é apresentado:

- (2.7) DEFINIÇÃO: Dizemos que (Σ,C) tem a "Propriedade da atenção instantânea a s", (s-AI) se:
  - a) 0 < p(g',s',g)c(s'g')  $g' \in G_s$ ,  $s \in g \cap S$  implica em c(s,g) > 0, e
  - b) 0 < p(g',s,g)c(sg'),  $g' \in G_S$ ,  $s \in G \cap S$  implica em c(s,g) > 0.

Em palavras (Σ,C) tem s-AI se o tempo de vida de s passa

a ser reduzido a uma taxa positiva já a partir do instante em que nasce.

É imediata a seguinte conclusão:

(2.8) TEOREMA: Se  $(\Sigma,C)$  e s<sub>0</sub>-BL, então  $(\Sigma,C)$  possui s<sub>0</sub>-AI.

DEMONSTRAÇÃO: Olhando para (2.4) vemos que se  $p_g \cdot \lambda_{s_0 g} = 0$ , então  $c(s_0,g) = 0$  pois assumimos  $p_g > 0$  e  $s_0 g > 0$ .

Como cada EBL considera todos os pulos que acarretam o nascimento de  $s_0$  como elemento de um certo g d  $G_{s_0}$  e a soma do membro direito só tem parcelas positivas, então são todas elas nulas, o que prova o teorema por contraposição.

c.q.d.

Outro aspecto da questão BL é:

(2.9) TEOREMA: Se  $(\Sigma,C)$  é s<sub>0</sub>-BL para algum conjunto de médias associadas  $\{\lambda_0^{-1}\}$  então o será também para  $\{\mu_s^{-1}\}$  onde  $\mu_s$  é arbitrário e  $\mu_s$  =  $\lambda_s$  para s  $\neq$  s<sub>0</sub> e a > 0 arbitrário, contanto que haja uma solução probabilística para (2.1) com  $\{\mu_s^{-1}\}$  em lugar de  $\{\lambda_0^{-1}\}$ .

Assumimos que o sistema dado por (2.1) e (2.4) tem uma unica solução probabilística  $\{p_g\}$  geG.

Se substituirmos nesse sistema  $\lambda_{s_0}$  por  $\mu_{s_0}$  e  $\lambda_{s}$  por  $\lambda_{s}$ , ses\{s\_0}, o sistema resultante deve ter também uma única solução dizemos {q\_g}. Isto é de fato verdade e pode ser verificado fazendo

(2.10) 
$$\mu_{s_0} = aK\lambda_{s_0} e q_g = Ap_g se g \notin G_{s_0} e q_g = \frac{1}{K}Ap_g se g \in G_{s_0}$$

e A é uma constante normalizadora.

Vamos à verificação:

Para a verificação de BC basta a substituição e direta constatação.

Para BG e g $\in$ G separamos as parcelas de (2.1) em agrupamentos convenientes e fazemos direto as substituições indicadas:

$$\frac{A}{K} p_{g} \left( aK\lambda_{s_{0}g} + a \sum_{s \neq s_{0}} \lambda_{sg'} \right) =$$

$$s \in G \cap S$$

$$= g' \in G_{0} \frac{A}{K} p_{g'} \sum_{s \neq s_{0}} p(g', s, g) a\lambda_{sg'} +$$

$$s \in g' \cap S$$

$$+ g' \in G_{0} \frac{A}{K} p_{g'} p(g', s_{0}, g) aK\lambda_{s_{0}g'} +$$

$$+ g' \notin G_{0} Ap_{g'} s \in g' \cap S p(g', s, g) a\lambda_{sg}$$

Como já podemos assumir BL então podemos cancelar a primeira parcela do primeiro membro com as duas últimas do segundo membro restando

$$\frac{Aa}{K} p_{g} \sum_{s \neq s_{0}} \lambda_{sg} = segnS$$

$$= \sum_{g' \in S} \frac{A}{K} p_{g'} \sum_{s \neq s_{0}} p(g', s, g)a\lambda_{sg}$$

$$seg' \cap S$$

Simplificando o fator comum  $\frac{aA}{K}$  vemos que a igualdade resultante é (2.1) subtraída de (2.4) membro a membro aplicada a  $\{p_g\}$ , as quais sabemos válidas por assunção. Isto demonstra BG para  $g \in G_{S_0}$ .

Para g $\notin G_{s_0}$  a substituição leva a verificação direta. c.q.d.

#### CAPITULO 3

#### INSENSIBILIDADE IMPLICA BALANÇO LOCAL

Parte das relações entre balanço local e insensibilidade é contida no seguinte resultado:

(3.1) TEOREMA: Seja ( $\Sigma$ ,C) irredutivel e s<sub>0</sub>-PAI, s<sub>0</sub> fixo, s<sub>0</sub>  $\in$ S e c(s,g) > 0 para todo s e todo g.

$$\phi' = \{\zeta''_S, s \in S, \zeta'_S \sim E_{\lambda_S}\}$$
 e

$$\phi'' = \{\zeta''_s; \zeta''_s = \zeta'_s \text{ para } s \neq s_0, e$$

$$\zeta_{s_0}^{"} \sim \pi_1 E_{\lambda_1}^{(\bullet)} + \pi_2 E_{\lambda_1}^{*} E_{\lambda_2}^{(\bullet)}$$

=  $e \pi_1, \pi_2, \lambda_1, \lambda_2$  obedecem a

(3.2) 
$$\pi_2 > 0, \ \pi_1 \lambda_1^{-1} + \pi_2 (\lambda_2^{-1} + \lambda_1^{-1}) = \lambda_{s_0}^{-1} = E(\zeta_{s_0}'')$$

$$e^{\lambda_1 \pi_1 \neq \lambda_s}$$

Denotaremos  $\lambda_{s_0}$  por  $\lambda_0$ .

Se  $(\Sigma,C)$  é  $\{\phi',\phi''\}$ -insensível, e se a cadeia de saltos imersa do PSMCV baseado em  $(\Sigma,C)$  por meio de  $\phi'$  é recorrente

positiva, então (Σ,C) é s<sub>O</sub>-BL.

PROVA - Por assunção, o PSMVG -  $\phi'$  é um processo de Markov com distribuição estacionária (única)  $\{p_g\}_{g \in G}$  satisfazendo EBG.

Seja  $G_0 = \{g \in G; s_0 \in g\}$  e usando a enumeração:

$$G_0 = \{g_1, g_2, ...\}$$

(não confundir com a enumeração de G do Capítulo 1), podemos escrever as equações de balanço Global, com as parcelas convenientemente arrumadas como

$$(3.3) p_{i}(\Lambda_{i}^{-\lambda_{0i}}) - \sum_{j} p_{i} \sum_{s \neq s_{0}} p(g_{j}, s, g_{i}) \lambda_{sj} + \lambda_{0i} p_{i} =$$

$$= \sum_{g \notin G_{0}} p_{g} \sum_{s \in nS} p(g, s, g_{i}) \lambda_{sg} +$$

$$+ \sum_{j} p_{j} p(g_{j}, s_{0}, g_{i}) \lambda_{0i}$$

onde  $p_i = p_{gi}$   $\lambda_{0i} = \lambda_{0i} \cdot c(s_0, g_i)$ .

Estas equações formam em conjunto um sistema que pode ser escrito em forma matricial como:

$$-A^{T}p + \lambda_{0}c \cdot p = d + \lambda_{1}P^{T}(c \cdot p)$$

onde

$$p = (p_1, p_2, ...), p_i = p_{gi}, c = (c_1, c_2, ...), c_i = c(s_0, g_i),$$

$$d = (d_1, d_2, ...) com$$

$$d_{i} = \sum_{g \notin G_{0}} p_{g} \sum_{s \in g \cap S} p(g, s, g_{i}) \lambda_{s, i}$$

$$c \cdot p \doteq (c_{1} \cdot p_{1}, c_{2} \cdot p_{2}, \dots)$$

onde

$$a_{ij} \doteq \begin{cases} \sum_{s \neq s_0} p(g_i, s, g_j) \lambda_{s,i} & (i \neq j) \\ \\ -\Lambda_i + \lambda_{0i} + \sum_{s \neq s_0} p(g_i, s_0, g_j) & (i = j) \end{cases}$$

$$P \doteq [p_{ij}] \qquad p_{ij} = p(g_i, s_0, g_j)$$

e  $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$  é a transposta da matriz  $\mathbf{M}$ .

Consideremos agora a Cadeia de Fases com base em (Σ,C)
por meio de φ" a qual tem o espaço de Estados

$$\{(g,0); g \notin G_0\} \cup \{(g,i), g \in G_0, i=1,2\}$$

A cadeia de Fase possui uma distribuição estacionária única  $\{p_{g,0}; g \notin G_0\} \cup \{p_{gi}, g \in G_0, i = 1, 2\}.$ 

Essa cadeia de fase pode ser reduzida a uma cadeia em G quando abstraimos de (g,i) o estágio em que se encontra só,ou seja: consideramos (g,1) e (g,2), identificados a g. A distribuição estacionária da cadeia de Fase pode também sofrer uma transformação correspondente, transformando-se em  $\tilde{p}_g$ ,{gEG} da seguinte forma

$$\tilde{p}_g = p_{g0} \text{ para } g \notin G_0$$

$$\tilde{p}_g = p_{g,1} + p_{g,2}$$
 para  $g \in G_0$ 

Acontece que, por construção, o conjunto das médias associadas à cadeia de saltos por  $\phi'$  é o mesmo conjunto de médias que temos por redução da cadeia de fase por  $\phi''$ .

Como estamos assumindo  $\{\phi',\phi''\}$  insensibilidade do ESMGV podemos considerar

$$(3.5_1)$$
  $\{P_g\} \equiv \{\tilde{p}_g\}$ 

e ·

$$(3.5_2)$$
  $p_{g1} + p_{g2} = p_g$ 

As equações de balanço Global para a Cadeia de Fases para os elementos de  $G_0$  no estágio  $\underline{1}$  podem ser escritas como:

$$(3.6_{1}) \quad P_{g,1}(\Lambda_{i}^{-\lambda_{0}i}) - \sum_{j} P_{g_{j},i} \sum_{s \neq s_{0}} P(g_{j}^{-},s,g_{i}^{-})\lambda_{sj} + \\ + \lambda_{1}c(s_{0}^{-},g_{i}^{-})P_{g_{i},1} = \lambda_{2}c(s_{0}^{-},g_{i}^{-})P_{g_{i},2} + \\ + \pi_{1} \sum_{g \notin G_{0}} P_{g_{s}} \sum_{s \in g \cap S} P(g,s,g_{i}^{-})\lambda_{sg} +$$

+ 
$$\pi_{1} \lambda_{1} \sum_{j}^{p} p_{yj1} p(g_{j}, s_{0}, g_{i}) c(s_{0}, g_{j})$$

o que, em linguagem matricial dá

(3.6<sub>2</sub>) 
$$-A^{T}(x) + \lambda_{1}c \cdot x = \lambda_{2}c \cdot y + \pi_{1}d + \pi_{1}\lambda_{1}P^{T}(c \cdot x)$$

onde

$$x = (p_{g_1,1}, p_{g_2,1}, ...),$$
  
 $y = (p_{g_1,2}, p_{g_2,2}, ...)$ 

e

$$x + y = p = (p_1, p_2...).$$

e para os elementos de G<sub>0</sub> no estágio 2, temos:

que fica, em linguagem matricial:

(3.7<sub>2</sub>) 
$$-A^{T}(y) + \lambda_{2}c \circ y = \pi_{2}d + \pi_{2}P^{T}(c \circ x)$$

Lembramos que

$$(3.8) x+y = p$$

Deduzimos aqui três equações importantes nessa demonstração:

Somando membro a membro (3.6) e (3.7) e subtraindo (3,4) temos:

$$(3.9) P^{T}(c \circ (\lambda, x - \lambda_{0}p)) = c \circ (\lambda_{1}x - \lambda_{0}p)$$

Somando (3.6) e (3.7) membro a membro e transportando alguns termos, temos:

$$\lambda_1 P^T(c \circ x) = -A^T p + \lambda, c \circ x - d$$

Substituindo em (3.6), temos:

$$-A^{T}(x) + \lambda_{1}c \circ x = \lambda_{2}c \circ y + \pi_{1}d + \pi_{1}(-A^{T}p + \lambda_{1}c \circ x - d)$$

o que resulta em

$$A^{T}(x-\pi_{1}p) = \pi_{2} \cdot \lambda_{1}c \cdot x - \lambda_{2}c \cdot y.$$

Usando

$$\pi_2 = \lambda_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)}{\lambda_0 \lambda_1}$$

Chegamos a

(3.10) 
$$A^{T}(x-\pi_{1}p) = \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{0}} c \circ (\lambda_{1}x-\lambda_{0}p)$$

Finalmente, multiplicando (3.6) por  $\lambda_1$  e a soma de (3.6) e (3.7) por  $\lambda_0$  e subtraindo as equações resultantes, temos:

$$-\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\lambda_{1}\mathbf{x}-\lambda_{0}\mathbf{p}) + \lambda_{1}^{2}\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} - \lambda_{1}\lambda_{0}\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \lambda_{1}\lambda_{2}\mathbf{c} \cdot \mathbf{y} + \lambda_{1}\mathbf{x}_{1}\mathbf{d} - \lambda_{0}\mathbf{d} + (\pi_{1}\lambda_{1}^{2}-\lambda_{1}\lambda_{0})\mathbf{p}^{\mathsf{T}}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})$$

Fazendo y = p-x (3.8) e algumas transposições:

$$-A^{T}(\lambda_{1}x-\lambda_{0}p) + (\lambda_{1}-\pi_{1}\lambda_{1}+\lambda_{2})\lambda_{1}c \circ x$$

$$\frac{\lambda_{1}\lambda_{2}}{\lambda_{0}} \lambda_{0}c \circ p = (\lambda_{1}\pi_{1}-\lambda_{0})(d+\lambda_{1}(p^{T}-I)(c \circ x)$$

Como

$$\lambda_1 - \pi_1 \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 \pi_2 + \lambda_2$$
 usando 
$$\pi_2 = \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_0) / \lambda_0 \lambda_1$$
 temos 
$$\lambda_1 \pi_2 + \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_0}$$

resultando

$$(3.11) -A^{T}(\lambda_{1}x-\lambda_{0}p) + \frac{\lambda_{1}\lambda_{2}}{\lambda_{0}} \cdot c(\lambda_{1}x-\lambda_{0}p) =$$

$$= (\lambda_{1}\pi_{1}-\lambda_{0})(d+\lambda_{1}(p^{T}-I)(c \cdot x))$$

onde I é a matriz identidade.

Estas equações serão usadas para mostrar que

$$c \circ (\lambda_1 x - \lambda_0 p) = 0$$

o que por sua vez resultará em

$$A^{T}(p) = 0.$$

o que demonstra o teorema pois anulando  $A^{T}(p)$ , o que resta em (3.4) é exatamente o sistema EBC na forma matricial

Procedendo: O sistema de EBG (2.1) pode ser escrito como;

(3.12) 
$$Q^{T}(p) = 0 \text{ onde } p = \{p_{g}, g \in G\}$$

e

$$[q_{g'g}] = Q = \left[\sum_{s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{s,g'} - S_{g',g} \Lambda_g\right]_{(g',g)}$$

Assumimos aqui um resultado geral da teoria dos Processos de Markov:

A cadeia de saltos imersa no processo de Markov  $(\Sigma, C), \phi'$  é recorrente positiva se e só se

$$(3.13) \qquad \qquad \sum_{g \in G} p_g |q_{gg}| < \infty$$

Usando isso: Se  $Q^{T}(p) = 0$ , temos

$$\sum_{g' \in G} p_{g'} \sum_{s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{sg'} - \Lambda_g p_g = 0$$

Somando essas equações para todo gEG temos

$$\sum_{g \in G} \sum_{g' \neq g} p_{g'} \sum_{s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{sg'} + \left[ \sum_{g \in G} \phi_{g} \sum_{s \in g \cap S} p(g, s, g) \lambda_{sg} - \Lambda_{g} \right] = 0$$

Usando o teorema assumido para a parte entre colchetes decorre que a primeira soma da equação acima também é finita e invertendo a ordem dos somatórios temos:

(3.14) 
$$\sum_{g'\neq g} p_{g'} \Lambda_{g'} = \sum_{g'\neq g} p_{g'} \sum_{s \in g' \cap S} \lambda_{sg'} < \infty$$

o que implica em

$$g' \neq g p_g, \lambda_{s_0} < (s_0, g') < \infty$$

$$g' \in G_0$$

o que na notação assumida logo acima é expresso com

$$(3.15) \qquad \sum_{i} c_{i} p_{i} < \infty$$

em seqüência, usando (3.8), temos

$$(3.16) \qquad \qquad \sum_{i} c_{i} |\lambda_{1} x_{i} - \lambda_{0} p_{i}| < \infty$$

Uma outra conseqüência a ser usada mais tarde é

$$(3.17) \qquad \qquad \sum |a_{ii}| p_i < \infty$$

que decorre de

$$\begin{split} & \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} | \mathbf{a}_{\mathbf{i}\mathbf{i}} | = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} (\Lambda_{\mathbf{g}_{\mathbf{i}}} - \lambda_{\mathbf{0}} \mathbf{c}_{\mathbf{i}} - \sum_{\mathbf{s}} \mathbf{p}(\mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{s}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) \lambda_{\mathbf{s}}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) = \\ & = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} \left( \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \sum_{\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_{\mathbf{0}}} \mathbf{p}(\mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{s}, \mathbf{g}) \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) - \\ & - \sum_{\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_{\mathbf{0}}} \mathbf{p}(\mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{s}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) \lambda_{\mathbf{i}} \mathbf{g}_{\mathbf{i}} \right) = \\ & = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} \left( \sum_{\mathbf{g} \neq \mathbf{g}_{\mathbf{i}}} \sum_{\mathbf{s} \neq \mathbf{s}_{\mathbf{0}}} \mathbf{p}(\mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{s}, \mathbf{g}) \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) \right) \leq \\ & \leq \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} \left( \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{g}_{\mathbf{i}} \cap \mathbf{S}} \mathbf{p}(\mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{s}, \mathbf{g}) \lambda_{\mathbf{s}} \mathbf{c}(\mathbf{s}, \mathbf{g}_{\mathbf{i}}) \right) = \\ & = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} \Lambda_{\mathbf{g}_{\mathbf{i}}} < \infty \end{split}$$

sendo que a última desigualdade decorre de (3.14)

Em geral P é uma matriz subestocástica e como tal determina uma participação em seu conjunto de índices em um conjunto K de elementos transientes e em classes  $K_1, K_2, \ldots$  recorrentes.

Fazendo

$$z \doteq c \circ (\lambda_1 x - \lambda_0 p)$$

o sub-sitema (3.9) correspondente a K se escreve como:

$$P_K^T z_K = z_K$$

Desde que o conjunto de componentes de z<sub>K</sub> é limitado e

como

$$\left(P_{K}^{T}\right)^{n} \xrightarrow{a \times \infty} 0$$

segue que  $z_K = 0$ .

Isto implica que os subsistemas de (3.9) correspondentes as classes recorrentes K<sub>i</sub> se escrevem como

$$P_{K_{i}}^{T}z_{K_{i}} = z_{K_{i}}$$

As matrizes  $P_{K_i}$  são irredutíveis. Se  $P_{K_i}$  é genuinamente subestocástica, então  $z_{K_i}$  = 0 como consequência de ser limitado.

De  $P_{K_i}$  é estocástica então corresponde a uma cadeia de Markov recorrente positiva e  $z_{K_i}$  tem então apenas componentes estritamente positivas ou apenas estritamente negativas, contanto que não sejam todas nulas (aqui é citada a demonstração do teorema (Capitulo IV 31 de Karlin [3]. Note-se que a soma das componentes de  $z_{K_i}$  são absolutamente convergentes. Sendo assim P determina uma partição em seus índices em conjuntos  $K^{\dagger}$ ,  $K^-$  e  $K^0$ , correspondentes aos elementos de coordenadas estritamente positivas, estritamente negativas e nulas, respectivamente e as transições de  $K^+$  a  $K^-$  e vice versa por P são impossíveis.

(3.18) Suponhamos A,  $\pi_i - \lambda_0 < 0$  e i $\in K^+$ ; então implica em

$$-\sum_{j \in K} (\lambda_1 x_j - \lambda_0 p_j) a_{ji} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_0} c_i (\lambda_1 x_i - \lambda_0 p_i) =$$

$$\stackrel{=}{=} \sum_{j \in K_0^-} (\lambda_1 x_j - \lambda_0 p_j) a_{ji} + (\lambda_1 \pi_1 - \lambda_0) (d_i + \mu_1 x_j) (d_i + \mu_2 x_j)$$

$$+ \lambda_{1} \sum_{j \in K} c_{j} x_{j} p_{ji} + (\lambda_{1} \pi_{1} - \lambda_{0}) \left[ \lambda_{i} \sum_{j \in K} c_{j} x_{j} p_{ji} - \lambda_{i} c_{i} x_{i} \right]$$

Onde a primeira parcela de cada membro corresponde a

respectivamente, que em conjunto correspondem a

e as duas últimas parcelas do segundo membro se restrigem a K° K<sup>+</sup> respectivamente pela incomunicabilidade de K<sup>+</sup> com K<sup>-</sup> por P o que implica em as parcelas referentes a K<sup>-</sup> serem nulas.

Somando a última equação membro a membro para todo iGK teremos:

$$- \sum_{j \in K^{+}} (\lambda_{1} x_{j} - \lambda_{0} p_{j}) \cdot \left( \sum_{i \in K^{+}} a_{ji} \right) + \frac{\lambda_{1} \lambda_{2}}{\lambda_{0}} \Big|_{i \in K^{+}} c_{i} (\lambda_{1} x_{i} - \lambda_{0} p_{i}) =$$

$$= \sum_{j \in K^{-}} (\lambda_{1} x_{j} - \lambda_{0} p_{j}) \cdot \left( \sum_{i \in K^{+}} a_{ij} \right) +$$

$$+ (\lambda_{1} \pi_{1} - \lambda_{0}) \left( \lambda_{i} \sum_{j \in K^{0}} c_{j} x_{j} \sum_{i \in K^{+}} p_{ji} + \frac{\lambda_{1} \lambda_{2}}{\lambda_{0}} \right)$$

$$+ \lambda_{1} \sum_{j \in K^{+}} c_{j} x_{j} \sum_{i \in K^{+}} p_{ji} - \lambda_{i} \sum_{i \in K^{+}} c_{i} x_{i} + \sum_{i \in K^{+}} d_{i}$$

Usando o fato de  $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} = 0$  e a definição dos  $a_{ij}$  vemos que para  $j \in K^+$ :  $\sum_{i \in K^+} a_{ji} < 0 \iff \sum_{i \in K^+} a_{ji} > 0$  para  $j \in K^-$ 

e daí temos que o primeiro membro so tem parcelas positivas e o segundo soma negativo, pois

$$\sum_{j \in K^+} c_j x_j \sum_{i \in K^+} p_{ji} - \sum_{i \in K^+} c_i x_i = 0$$

Com o membro esquerdo positivo (estritamente) e o memb<mark>ro</mark> finito negativo, temos que

$$K^+ = \phi$$

no caso de  $(\pi_1 \lambda_1 - \lambda_0) < 0$ .

Acontece que nessas condições

$$K^- = \phi$$

pois por (3.10) temos

$$\sum_{j} a_{ji}(x_j - \pi_i p_j) = \frac{\lambda_2}{\lambda_0} c_i(\lambda_1 x_i - \lambda_0 p_i).$$

Somando membro a membro para todo i, temos

$$\sum_{j} (x_{j} - \pi_{1} p_{j}) \cdot \sum_{j} a_{ji} = \frac{\lambda_{2}}{\lambda_{0}} \sum_{i} c_{i} (\lambda_{1} x_{i} + \lambda_{0} p_{i})$$

como  $\sum_{i} a_{ji} = 0$ , e lembrando que  $\sum_{i} |a_{ii}| p_i < \infty$  segue que:

$$\sum_{i} c_{i} (\lambda_{i} x_{i} - \lambda_{0} p_{i}) = 0$$

Como já sabemos que nesta soma não há parcelas positivas

 $(K^{+} = \phi)$  também não há negativas, e temos

(3.19) 
$$c \circ (\lambda_1 x - \lambda_0 p) = 0$$
, para  $\lambda_1 \pi_1 - \lambda_0 < 0$ .

Para  $\lambda_1 \pi_1 - \lambda_0 > 0$ , o argumento é similar e portanto,(3.19) vale para qualquer caso admitido na hipótese.

Como, também por hipótese, c(s,g) > 0,  $\lambda_1$  > 0,  $\lambda_0$  > 0

$$\lambda_1 x = \lambda_0 p \iff \lambda_i x_i = \lambda_0 p_i$$
, para todo i.

Usando isso em (3.10), temos

$$\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \pi_i\right] A^{T}(p) = 0$$

ou simplesmente

$$A^{T}(p) = 0$$

pois  $\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \pi_i \neq 0$  por hipótese e isso demonstra o teorema.

c.q.d.

# CAPITULO 4

# BALANÇO LOCAL IMPLICA INSENSIBILIDADE

Pelos títulos deste capítulo e do anterior poderíamos pensar que para os processos aqui considerados insensibilidade equivale a balanço local. Pela hipótese que formos forçados a fazer no capítulo anterior (c(s,g) < 0 para todo s e todo g (3.1)) chegamos a esta equivalência apenas aceitando esta restrição, a qual nas aplicações se mostra uma restrição significativa se quizermos caracterização.

Para este capítulo, entretanto, não precisamos fazer tal restrição.

(4.1) TEOREMA. Se existe uma distribuição estacionária  $\{p_g\}$  de  $(\Sigma,C)$  satisfazendo balanço global e só Balanço Local  $(s_0 \in S)$  então  $(\Sigma,C)$  é  $\phi_{S_0}$ -insensível onde:

$$\Phi_{s_0} = \{\phi'\} \cup \{\phi_0\}$$

$$\phi' = \{\zeta_s \sim \exp(\lambda_s), s \in S\}$$

$$\phi'' = \{\zeta_s \sim \exp(\lambda_s) \text{ para ses, s} \neq s_0\}$$

e

$$\zeta_{s_0}(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i E_{\gamma}^i(\cdot) \}, \text{ (ver (1.7)}$$

$$E\zeta_{s_0} = \lambda_0^{-1} = \lambda_{s_0}^{-1}$$

(Notamos que todos os estágios tem a mesma média  $\gamma$ ).

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a cadeia de fases (ver 3.5) cujos estados, além de especificarem em que elemento de G está o processo, também indicam em que estágio se encontra o tempo de vida de  $S_0$  quando  $S_0$  é elemento de G.

A esta cadeia estão associadas suas peculiares equações de Balanço global:

com  $geG_0$ ,  $i = 1, 2, ..., k e <math>\tilde{p}_{g,k+1} = 0$ .

Para  $g \not\in G_0$  as equações se tornam:

$$(4.2_2) \qquad \Lambda_{g} \tilde{p}_{g} = \sum_{g' \in G_{0}} \tilde{p}_{g'1} p(g', s_{0}, g) \gamma_{g} + \sum_{g' \notin G_{0}} \tilde{p}_{g's \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{sg}$$

Propomos como solução para esse sistema a Distribuição  $\{\tilde{p}_g, g \not\in G_0\} \cup \{\tilde{p}_{g,i}, i=1,2,\ldots,k, g \in G_0\}$ 

$$(4.3_1) \tilde{p}_g = p_g \text{ se } g \notin G_0$$

е

(4.3<sub>2</sub>) 
$$\tilde{p}_{g,i} = \frac{\lambda_0}{\gamma} (\pi_i + \pi_{i+1} + \dots + \pi_k) p_g \text{ se geG}_0,$$

(ver (4.11) adiante).

Os p<sub>g</sub> são valores da DE da hipótese.

Primeiro verificamos que (4.3) é uma solução para (4.2).

Usando (4.3) em (4.2 $_2$ ) a verificação é imediata pela hipótese sobre {p $_g$ }.

Se usamos (4.3) em  $(4.2_1)$ , obtemos:

$$(\Lambda_{g}^{-\lambda_{0}}) \frac{\lambda_{0}}{\gamma} (\pi_{1}^{+}\pi_{i+1}^{+}+\cdots+\pi_{k}^{+}) p_{g} =$$

$$= \frac{\lambda_{0}}{\gamma} (\pi_{i}^{+}\cdots+\pi_{k}^{+}) \sum_{g' \in G_{0}} p_{g'} \sum_{\substack{s \neq s \\ s \in g' \cap S}} p(g', s, g) \lambda_{sg'} +$$

$$+ \pi_{i} \sum_{g' \in G_{0}} p_{g'} p(g', s, g) \lambda_{sg'}^{+}\pi_{i} \sum_{g \notin G_{0}} p_{g'} \sum_{s \in g' \cap S} p(g', s, g) \lambda_{sg'} +$$

$$- \lambda_{0}\pi_{i}p_{g'},$$

onde geG<sub>0</sub>.

As três últimas parcelas do membro direito somam zero pela hipótese de  $\{p_g\}$  satisfazer  $s_0$ -BL.

O remanescente é equivalente à equação resultante da subtração da  $(g,s_0)$ -Equação de Balanço local da g-Equação de Balanço Global referentes ao  $\phi$ '-PMSGV da hipótese, as quais sa-

bemos satisfeitas pela hipótese sobre {pg} é uma distribuição estacionária para a cadeia de fases construída acima.

Acontece que podemos reduzir esta cadeia de fases ao  $\phi$ "-PSMGV inicial pela identificação de (g,1),(g,2),...,(g,k) a g se g $\in G_0$ .

Como

$$p_{g} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_{g,i}$$

se g $\in G_0$  (ver (4.11) e por (4.3 $_1$ ) é imediato que  $\{p_g\}$  é uma distribuição estacionária para o  $\phi_0$ -PSMGV.

Como  $\{\tilde{p}_{g,i}\}_{U}\{\tilde{p}_{g}\}$  é a única DE para a cadeia de fases e  $\{p_{g}\}$  é DE (única) do  $\phi$ -PSMGV por hipótese, então ( $\Sigma$ ,C) é

$$\Phi_{s_0}$$
-insensível.

s.q.d.

Fica assim provada a insensibilidade às mudanças das distribuições dos tempos de vida de  $\mathbf{s}_0$  se nos restringirmos as distribuições do tipo estágio (que incluem as exponenciais com média  $\mathbf{8}_0^{-1}$ .

Esta restrição ao tipo estágio pode ser levantada da seguinte maneira:

Se  $F_{s_0}$  é continua, então existe (ver Apêndice 1) uma sequiência de distribuições do tipo Estágios  $\{F_{0,n}, n>1\}$  tais que

$$F_{0,n}(t) \xrightarrow{n \not x.\infty} F_0(t)$$
, para todo t.

Foi demobstrado em I-[3] que as distribuições estacionã-

rias correspondentes a cada  $F_{0,n}$  convergem francamente à correspondente a  $F_0$  contando que

$$\lambda_{0,n} \int_0^x (1-F_{0,n}(t)) dt \xrightarrow{n \neq \infty} \lambda_0 \int_0^x (1-F_0(t)) dt,$$

para  $x \ge 0$ . Isso pode ser arranjado, o que nos permite assumir a  $\Phi_{s_0}$ -insensibilidade para  $\zeta_{s_0}$  sendo qualquer distribuição contínua.

Uma importante generalização em outro sentido é:

(4.4) TEOREMA: Se  $(\Sigma, C)$  é  $\Phi_S$ -insensível para todo s de S' onde S' é subconjunto de S não vazio, então  $(\Sigma, C)$  é  $\Phi_S$ -insensível.

DEMONSTRAÇÃO: Usaremos mais uma vez o método de estágios. Assumiremos que o tempo de vida de um elemento s de S' tem distribuição

(4.5) 
$$\zeta_{s}(\cdot) = \sum_{i=1}^{k(s)} {}_{s}\pi_{i}E_{s}^{i}(\cdot),$$

onde k(s) é o número máximo de estágios que s pode viver, ou seja:  $\Phi_s$ , = { $\phi'$ } $_{0}$ { $\phi''$ } sendo  $\phi'$  o usual e  $\phi''$  tem  $\zeta_s \sim \exp(\lambda_s)$  para s£S' e se s£S',  $\zeta_s$  é dado por (4.5).

Consideramos mais uma vez a cadeia de Fases associada a  $(\Sigma,C)$  e  $\phi$  sendo que agora é necessário que cada estado especifique além de gEG, qual a fase do tempo de vida de cada elemento de gnS'.

Seja g€G. Se g∩S' ≠ φ usaremos, quando conveniente a enumeração:

$$gnS' = \{s_1, s_2, ..., s_n\}, onde n = |gnS'|$$

Precisaremos de notações especiais que passamos a definir:

(4.6) 
$$\{I_g\} \doteq \mathcal{J}_{g \cap S}, \doteq \{(e_1, e_2, \dots, e_n), 1 \leq e_i < k(s_i)\}$$

Podemos agora descrever G que é o espaço de estados da cadeia de fases

$$\tilde{\mathbf{G}} \doteq \{(\mathbf{g}, \mathbf{I}_{\mathbf{g}}) : \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \ \mathbf{g} \cap \mathbf{S}' \neq \emptyset, \ \mathbf{I}_{\mathbf{g}} \in \mathcal{J}_{\mathbf{g} \cap \mathbf{S}'} \} \cup \{\mathbf{g} : \mathbf{g} \in \mathbf{G}, \ \mathbf{g} \cap \mathbf{S}' = \emptyset\}.$$

 $I_g$  denota a fase prevalmente para cada siegnS'.

Um DE da cadeia de fases terá seus elementos denotados por:

(4.7)  $\tilde{p}_{g,I_g}$  correspondendo a  $(g,I_g)$  e  $\tilde{p}_g$  para g disjunto de S'. (A partir de agora não usaremos o índice g para  $I_g$ ).

As equações de BG para a cadeia de fases serão:

$$(4,8_{1}) \quad \left[ \Lambda_{g} + \frac{(1')}{s \in g \cap S'} \gamma_{qg} - \sum_{s \in g \cap S'} \lambda_{sg} \right] \tilde{p}_{g,1} =$$

$$= \frac{(1)}{s \in G \cap S'} \tilde{p}_{g}, I + q_{s} \gamma_{sg} +$$

$$+ \frac{(2)}{g' \in G_{g}} \tilde{p}_{g'}, I \quad s \in (g' \cap S) - S'$$

$$p(g', s, g) \lambda_{s,g'} +$$

$$\begin{array}{l} + & g' \in G_g \\ + & g' \in G_g$$

Entre as transições aqui consideradas só se incluem as que acarretam o nascimento de um único elemento de S',isso em decorrência de S'-desconectividade de  $(\Sigma,C)$  nas condições desse lema em conseqüência de (3.1) e (2.6) que combinados dizem que s'-balanço local para todo s' de S' implica em S'-desconectividade.

Isso também influirá na construção das equações correspondentes aos estados g disjuntos de S':

$$(4.8_{2}) \quad \Lambda_{g} \tilde{p}_{g} = \sum_{s \in S'} \sum_{g':g' \cap S' = \{s\}} \tilde{p}_{g'} i_{s} p(g',s,g) \gamma_{sg'} + \sum_{g':g' \cap S = 0} \tilde{p}_{g'} \sum_{s \in g' \cap S} p(g',s,g) \lambda_{sg}$$

Nessas condições simplificamos notações como nos casos: usamos I em lugar de  $I_g$ , usamos  $\gamma_{ig}$  em lugar de  $\gamma_{s_ig}$  e etc. Usamos também o seguinte:

significando que

- i) se s pertence ao dominio de I então somamos a a a
   e<sub>s</sub> = I(s).
- ii) Se s não pertence ao domínio de I então

e

$$I+a_s = \{Iu\{a_s\}\} = \{e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_n}, a_s\}.$$

Também usamos:

 $I-i_{s}$  que é entendido como:

$$I-i_{s_{j}} \in \mathcal{I}_{DomI-\{s_{j}\}}$$
 se  $s_{j}$  pertence ao domínio de  $I$  e
$$I(s) = e_{s_{j}} = i_{s_{j}}.$$

Se 0 < i < e então:

$$I - i_{s_j} = (e_{s_1}, \dots, e_{s_j} - i_{s_j}, \dots, e_{s_n}).$$

Estando isso definido, consideremos agora o PSMGV com base em  $(\Sigma,C)$  e  $\phi$ ' o qual assumiremos no início desse trabalho ter uma DE única que também é a única solução probabilística da EBG (31).

Esta distribuição estacionária será denotada por

ou simplesmente  $\{p_g\}$ .

Acontece que podemos considerar mais uma vez "cadeia quociente", agora para o caso |S'| > 1 a qual é a componente X(t)do PSMGV suplementado  $Z(t) = \{X(t), Y(t)\}$  com base em  $(\Sigma, C)$  e  $\phi$ ', a qual, de maneira semelhante ao teorema anterior propomos ser:

(4.9) 
$$\tilde{p}_{g,I} = p_g \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\gamma_i} (i^{\pi} e_i^{+} i^{\pi} e_i^{+} 1^{+} \cdots + i^{\pi} k(i))$$

se gnS' φ, e se gnS' = φ, então

$$\tilde{p}_{g} = p_{g}.$$

Aqui passamos a usar a notação

$$S'ng = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$$

e

e similarmente em outros casos.

A verificação das equações  $(4.8_2)$  pelos valores (4.9) e (4.10) é imediata.

Para (4.8<sub>1</sub>) 0 uso de (4.9) e (4.10) leva a:

Essa última parcela foi calculada da seguinte maneira:

$$(1)-(1') = \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{g,i+1} \gamma_{jg} - \sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_{g,i} \gamma_{sg} =$$

$$= p_{g} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jg} \frac{\lambda_{j}}{\gamma_{j}} (_{j}^{\pi} e_{j}^{+1} + \cdots + _{j}^{\pi} k(j)) \prod_{\substack{i=1 \ i \neq j}}^{n} \frac{\lambda_{i}}{\lambda_{i}} (_{i}^{\pi} e_{i}^{+\cdots + _{i}^{\pi} k(i)}) -$$

$$- p_{g} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jg} \frac{\lambda_{j}}{\gamma_{j}} (_{k}^{\pi} e_{j}^{+\cdots + _{j}^{\pi} k(j)}) \prod_{\substack{i=1 \ i \neq j}}^{n} \frac{\lambda_{i}}{\gamma_{i}} (_{i}^{\pi} e_{i}^{+\cdots + _{i}^{\pi} k(i)}) =$$

$$= p_{g} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jg} j^{\pi} e_{j} \sum_{\substack{i=1 \ i \neq j}}^{n} \frac{\lambda_{i}}{\gamma_{i}} (i^{\pi} e_{i}^{+\cdots+\pi} k(i)).$$

Se somarmos membro a membro as equações  $(s_i,g)$ -Balanço Local para  $s_i \in g \cap S'$  vemos que as 4 últimas parcelas ((4),(5),(6),(1-1')) se anulam sendo que as parcelas restantes formam a equação resultante da diferença entre a equação g-Balanço Global e a soma das (s,g)-Balanço Local é a igualdade resultante é satisfeita pela hipótese feita sobre  $\{p_g\}$ .

Acontece que:

$$\begin{split} \text{IE}\zeta_{\text{gnS}}^{\sum}, \tilde{p}_{\text{g}} & \text{I} = p_{\text{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i}}{\gamma_{i}} \left( _{i}\pi_{e_{i}}^{+} \cdots + _{i}\pi_{k(i)} \right) \Big] = \\ & = p_{\text{g}} \Big\{ \sum_{e_{i}=1}^{k(1)} \sum_{e_{2}=1}^{k(2)} \cdots \sum_{e_{n}=1}^{k(n)} \Big[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i}}{\gamma_{i}} \left( _{i}\pi_{e_{i}}^{+} \cdots + _{i}\pi_{k(i)} \right) \Big] \Big\} = \\ & = p_{\text{g}} \Big\{ \sum_{e_{i}=1}^{k(1)} \cdots \sum_{e_{n-1}=1}^{k(n-1)} \Big[ \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{i}}{\gamma_{i}} \left( _{i}\pi_{e_{i}}^{+} + _{i}\pi_{k(i)} \right) \cdot \\ & \cdot \sum_{c_{n}=1}^{k(n)} \frac{\lambda_{n}}{\gamma_{n}} \left( _{n}\pi_{e_{n}}^{+} \cdots + _{n}\pi_{k(n)} \right) \Big] \Big\}. \end{split}$$

Esse último somatório vale 1, pois

(4.11) 
$$\sum_{e_{i}=1}^{k(i)} \frac{1}{\gamma_{i}} (i^{\pi}e_{i}^{+}i e_{i}^{+}1^{+}\cdots + i^{\pi}k(i)) = E(\zeta_{s_{i}})$$

e  $E(\zeta_{s_i}) = 1/\lambda_i$  por definição.

Repetindo esse processo n-1 vezes mais chegamos a

(4.12) 
$$\sum_{I} \tilde{p}_{g,I} = p_{g}, \qquad g \cap S' \neq \phi.$$

Como ha apenas uma solução para (4.8), no caso é (4.9) e

(4.10), por (4.12) fica demonstrada a  $\Phi_s$ , insensibilidade (caso de estágios).

Usando o mesmo argumento de convergência fraca do Teorema anterior, fazemos a necessária generalização.

c.q.d.

CAPITULO 5

### **EXEMPLOS**

Começamos este capítulo pelo exemplo mais trivial possível. Esse exemplo não ilustra a riqueza da teoria nem os recursos da linguagem aqui usada mas, sendo famíliar a todos, ajuda o processo de familiarização na sua aplicação em caso concreto.

(5.1) EXEMPLO: Uma cadeia de Markov comum a tempo continuo, finita, em nosso esquema se exprime assim:

$$G = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$$

е

$$S = \left\{1, 2, \ldots, n\right\}$$

Os elementos da habitual matriz de transição [p(i,j)]seriam designados como

$$p(\{i\},\ell,\{j\}) = \delta_{i\ell}p(i,j).$$

As velocidades

$$c(i,{j}) = \delta_{ij}.$$

Os tempos de vida dos elementos i tem média  $1/\lambda_i$ . Nessas condições, as EBG coincidem com as EBL e são:

$$\lambda_{i} p_{i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j} p_{j} p(j,i)$$

e vemos que todos os elementos de S são insensíveis se fizermos a cadeia irredutível.

Se fizermos G=N, ou seja: tornamos a cadeia infinita, e- la pode ser recorrente positiva dependendo dos  $\lambda_i$  e p(i,j) e satisfazer as EBL apesar de a correspondente cadeia de saltos ser eventualmente recorrente nula. Isso mostra que a hipótese sobre a cadeia de saltos feita no Teorema 3.1 (recorrência positiva) não é de fato essencial, apesar de não se ter encontrado maneira de dispensá-la na demonstração.

Concretamente: seja

com

$$p(i,i+1) = (1 - \frac{1}{i})$$

$$p(i,1) = 1/i$$

para i > 1 e, para i = 1 fazemos p(1,2) = 1.

Fazemos também  $\lambda_i = i$ .

Nestas condições temos que a cadeia de saltos (tempo discreto) é recorrente nula e irredutível

$$\sum_{i\geq 2} p(i,1) = \sum_{i\geq 2} 1/i = \infty.$$

Por outro lado, com tempo contínuo e as médias fixadas acima, temos as EBL = EBL com a forma:

$$\lambda_{i}p_{i} = \sum_{j} \lambda_{j}p_{j}p(j,i)$$

o que, para i = 1 se torna

$$\mathbf{p}_1 = \sum_{j \ge 2} \mathbf{j} \ \mathbf{p}_j \ \frac{1}{\mathbf{j}} = \sum_{j \ge 2} \mathbf{p}_j$$

e decorre que, se há solução probabilistica  $p_1 = 1/2$ .para i > 2 as EBG tomam a forma

(5.2) 
$$ip_{i} = (i-1) p_{i-1} \left(1 - \frac{1}{(i-1)}\right)$$

e para i = 2

$$p_2 = p_1 \implies p_2 = \frac{1}{4}$$
.

Para i > 2, temos por (5.2)

$$p_{i} = p_{i-1} = \frac{i-2}{i}$$

que equivale a

$$p_{j+1} = p_j \frac{j-1}{j+1}$$

o que indutivamente leva a

$$p_k = \frac{(k-2)!}{k! \cdot 2} p_2$$

as quais satisfazem (5.2).

Como

$$\sum_{k>2} p_k = p_2 \sum_{k>2} \frac{(k-2)!}{k! \cdot 2} < \infty$$

o sistema tem uma solução probabilística, e ficam ilustradas nossas afirmações acima.

(5.3) EXEMPLO: A fila G/G/1/∞ com a disciplina "Último a chegar, primeiro servido" (preemptive).

Essa é uma fila que aceita todos os clientes que chegam, e o servidor emprega toda sua capacidade de trabalho em servir o último cliente a chegar, interrompendo o serviço a um cliente no instante da chegada de um outro. Nosso esquema será apresentada como:

$$G = \{\{0,1,2,\ldots,n\}, n \in \mathbb{N}\}, S = \mathbb{N}$$

$$\{0,1,2,\ldots,n\} \doteq g_n$$

$$c(0,g_n) = c(n,g_n) = 1$$

$$c(i,g_n) = 0$$
, para  $0 < i < n$ 

O elemento O deve ser interpretado como uma fonte; cada "morte" de zero causa o nascimento de um outro elemento, além do renascimento de si próprio; conseqüentemente temos:

$$g_n \xrightarrow{0} g_{n+1}$$

(lê-se: o sistema salta de  $g_n$  a  $g_{n+1}$  pela morte de 0) e também

$$p(g_n, 0, g_{n+1}) = 1.$$

A taxa de nascimentos ou mortes de 0  $\in$   $\lambda$ . As outras únicas transições possíveis são:

$$g_{n+1} \xrightarrow{n+1} g_n$$

Os dois tipos de transição possível são respectivamente, a "chegada de um cliente" e a "partida de um cliente" em linguagem de filas. Referente ao segundo tipo temos para j > o:

$$p(g_i,j,g_l) = \delta_{i,j} \cdot \delta_{l+1,i}$$

Salientamos que esse é um caso em que  $c(i,g_n) = 0$  para alguns elementos de  $g_n$  (n>1, 0<i<n) e portanto não satisfaz a hipótese do Teorema (3.1)).

11

Pela chegada de um novo cliente, toda a capacidade de trabalho do servidor (único) será imediatamente empregada neste, até a chegada de um novo cliente ou até a sua partida. sendo isso definido pela disciplina mencionada e pela determinação das velocidades. Fica assim definido também que a partida de um cliente renova o atendimento ao agora último, antes penúltimo elemento, até a partida desse ou a chegada de um novo...

As EBG se escrevem para este sistema como:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda + \mu) p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1}, & (n \ge 1) \end{cases}$$

onde  $\lambda^{-1} = E(\zeta_0)$  e  $\mu^{-1} = E(\zeta_1)$ , i > 1. Se  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , o sistema será ergódico com solução única probabilística:

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \quad n \ge 0$$

Esta solução satisfaz as 1-EBL para i > 0, que são:

$$\lambda p_i = \mu p_{i+1}$$

As 0-EBL são:

$$\lambda p_i = \lambda p_{i-1}, \quad i \ge 1$$

e não são satisfeitas pela DE acima e concluímos que o ESMVG.  $\text{M/G/1/$\infty$ $\vec{e}$ $\Phi_{N^+}$-insensivel. }$ 

(5.4) EXEMPLO: A Fila G/G/k/0 com k servidores, sem capacidade de espera: o cliente que encontra todos os servidores ocupados é perdido.

Em nossa linguagem esse esquema é descrito como:

$$S = \{0,1,...,k\}$$

$$G = \{g \in S \mid 0 \in g\}$$

Outra vez o elemento 0 é a "fonte" de clientes de todas as demais posições (elementos i de g,  $i \neq 0$ ) as quais tem cada uma um servidor exclusivo. A fonte estará sempre ativa e com velocidade 1 a menos em  $g_k \doteq \{0,1,2,\ldots,k\}$ , ou seja:

$$c(0,g) = 1 \text{ se } g \neq g_k \text{ e } c(0,g_k) = 0.$$

Usamos  $g_0 = \{0\}$  e temos:

a) 
$$g \xrightarrow{i} g - \{i\}$$
 se  $g \neq g_0$ ,  $i \in g$ ,  $i \neq 0$ 

b) 
$$g \xrightarrow{0} g \cup \{j\}$$
 se  $g \neq g_k$ ,  $j \notin g$ ,  $j \neq 0$ 

c) 
$$g_k \xrightarrow{0} g_k$$

e interpretamos, respectivamente, assim:

- a) o cliente i parte;
- b) a fonte envia um cliente ao qual se atribui o servidor j com probabilidade  $\pi(g,j)$ ;
- c) a fonte envia um cliente que é rejeitado, o que é equivalente a dizer que a fonte está inativa em g<sub>k</sub> se,

como suporemos adiante, a fonte é markoviana.

Usaremos as intensidades:

$$\lambda_0 = \lambda e \lambda_i = \mu_i, \qquad 1 \le i \le k$$

As EBG são:

$$\begin{split} p_{g} \left( \lambda + \sum_{\substack{i=1 \\ g \in G}}^{k} \mu_{i} \right) &= \sum_{\substack{i=1 \\ j \notin g}}^{k} p_{g \cup \{i\}} \mu_{i} + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \in G}}^{k} p_{g - \{j\}} \lambda \pi (g - \{j\}, j) + p_{g} \cdot \lambda \cdot \delta_{g, g_{k}} \end{split}$$

aqui usamos:

$$p(g,0,g\cup\{j\}) = \pi(g,j), p(g\cup\{i\},i,g) = 1$$

е

$$p(g_k, 0, g_k) = 1.$$

As i-EBL são:

$$p_{g}\mu_{i} = p_{g-\{i\}}\lambda\pi(g-\{i\},i)$$

e para 0 e g,  $g \neq g_k$ 

$$\lambda p_g = 0$$
.

Se o sistema satisfizesse 0-BL, então por esta equação

 $p_g = 0$  para  $g \neq g_k$  e portanto teríamos  $p_{g_k} = 1$ .

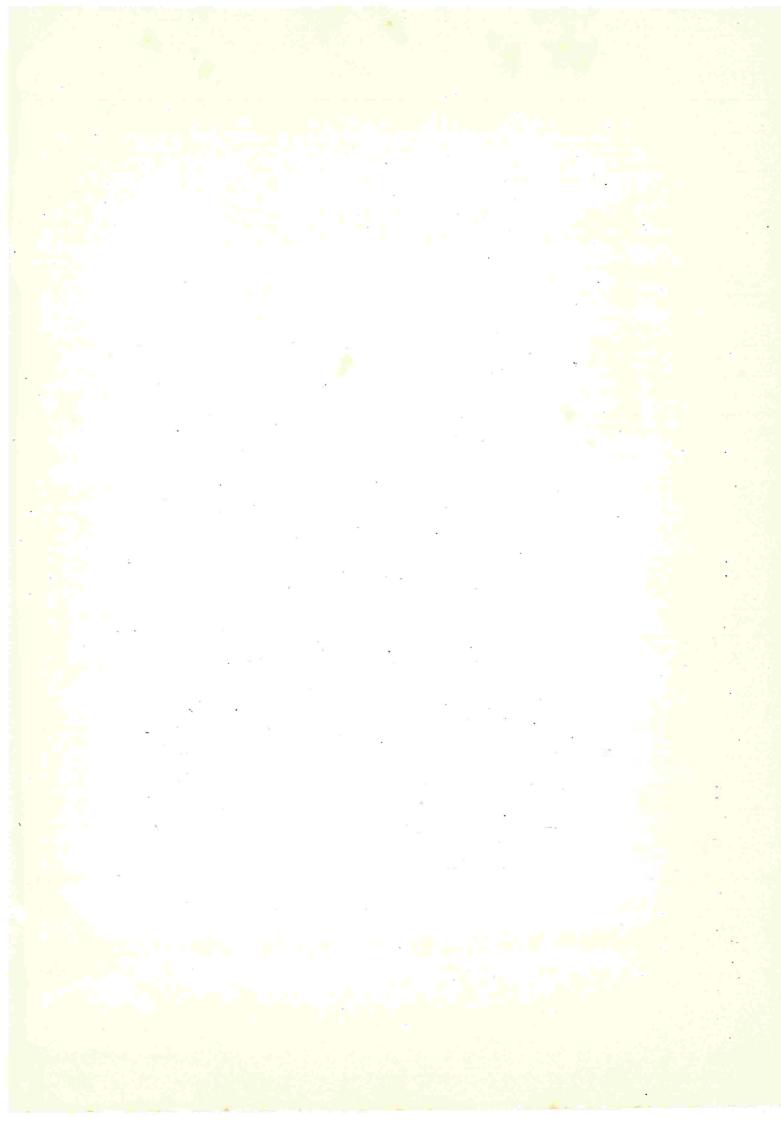
Vamos considerar

$$\pi(g,i) = \frac{1}{k+1-|g|}$$

A DE do sistema será, então:

$$p_{g} = p_{g_{0}} \frac{\lambda^{|g|-1}}{\prod_{\substack{i \leq 1 \leq k \\ i \in g}} \cdot \frac{(k-1)!}{(k-2-|g|)!}$$

Em particular  $p_{g_k} \neq 1$  e, portanto o sistema não satisfaz 0-BL e se tivéssemos uma versão mais forte do Teorema (3.1)  $(c(i,g) \geq 0$  e não c(i,g) > 0) poderíamos concluir por ele que 0 não é um elemento insensível, como o são todos os outros.



# APÊNDICE 1

# CONSTRUÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATORIAS QUE SÃO MISTURAS DE EXPONENCIAIS E CONVERGEM EM DISTRIBUIÇÃO PARA UMA V.A.

## CONTINUA POSITIVA DADA

Seja T uma V.A. Contínua, positiva. Fixado um número natural não zero n definimos:

$$i > 0$$
  $a_{i} = P\left(T > \frac{i}{n} \middle| T > \frac{i-1}{n}\right), \quad a_{0} = 1$ 

$$i > 0 \quad b_{i} = 1 - a_{i} = P\left(T \le \frac{1}{n} \middle| T > \frac{i-1}{n}\right), \quad b_{0} = 0$$

É claro que estas sequências dependem de n, mas serão usadas de modo a não levantarem dúvidas razoáveis.

Seja J uma V.A. discreta com a seguinte distribuição:

$$P(J=k) = b_k \prod_{i=0}^{k-1} a_i$$

J também depende de n. Interpretando J:

$$P(J=k) = P\left(T \le \frac{k}{n} \middle| T > \frac{k-1}{n}\right) \prod_{i=1}^{k-1} P\left(T > \frac{i}{n} \middle| \frac{i-1}{n} < T\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} k-1 & P\left(T > \frac{\mathbf{i}}{n}\right) \\ II & P\left(T > \frac{\mathbf{i}}{n}\right) \end{pmatrix} \cdot \frac{P\left(\frac{k-1}{n} \le T < \frac{k}{n}\right)}{P\left(T < \frac{k}{n}\right)}$$

Cancelando o numerador de cada fator com o denominador do fator seguinte, temos:

(1) 
$$P(J=k) = P\left(\frac{k-1}{n} \le T \le \frac{k}{n}\right)$$

Definimos também

(i > 0) 
$$\chi \sim \exp(n), \chi_0 \stackrel{\cdot}{=} 0$$

ou seja: são exponenciais com média 1/n e variância  $1/n^2$  para i>0, e  $X_0$  é 0 com probabilidade 1.

Podemos então definir

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$$

Como o contexto permite, usaremos  $X_i$  em lugar de  $X_i$ .

Uma figura ilustrativa é:

que pode ser interpretada como:

Um dispositivo pode cumprir uma seqüência de tarefas cujas durações são respectivamente X<sub>1</sub>,X<sub>2</sub>,... Após o cumprimento

de uma tarefa (i) o dispositivo é submetido a uma inspeção instantânea e será aprovado para a tarefa seguinte (i+1) com probabilidade a e reprovado com probabilidade b, nesse caso encerrando então sua carreira. O número de tarefas cumpridas é dada por J e o tempo em que são cumpridas é dado por Yn.

Queremos mostrar que a seqüência das distribuições de T. Seja ε > 0 arbitrário

$$P(Y_{n} \leq t) = P\left(\sum_{i=0}^{J} X_{i} \leq t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=0}^{k} X_{i} \leq t \mid J=k\right) P(j=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^{k} X_{i} \leq t\right) P(J=k) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{k} =$$

$$= \sum_{0 \leq k < \lfloor n(t-\epsilon) \rfloor}^{n} Z_{k} + \sum_{0 \leq k \leq \lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}^{n} Z_{k} +$$

$$+ \sum_{k \geq \lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}^{n} Z_{k}.$$

onde [t] indica o maior inteiro menor que t.

Trabalhando (a),(b) e (c) separadamente:

a) para  $0 \le k < [n(t-\epsilon)]$ 

$$1 \ge P\left(\sum_{i=0}^{k} X_{i} < t\right) \ge P\left(\sum_{i=0}^{\lfloor n(t-\epsilon)\rfloor} X_{i} < t\right) =$$

$$= P\left(\sum_{i=0}^{\lfloor n(t-\epsilon)\rfloor} X_{i} - \frac{\lfloor n(t-\epsilon)\rfloor}{n} < \tilde{\epsilon}\right) \ge$$

<sup>(\*) -</sup> Sendo  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + (t - \varepsilon) - \frac{[n(t - \varepsilon)]}{n} \ge \varepsilon$ .

$$\geq P\left(\left| \begin{array}{c} \left[n\left(t-\varepsilon\right)\right] \\ \sum_{i=0}^{n} X_{i} - \frac{\left[n\left(t-\varepsilon\right)\right]}{n} \right| < \tilde{\varepsilon} \end{array}\right)$$

$$= 1 - P\left(\left| \begin{array}{c} \left[n\left(t-\varepsilon\right)\right] \\ \sum_{i=0}^{n} X_{i} - \frac{\left[n\left(t-\varepsilon\right)\right]}{n} \right| > \varepsilon \right) \geq \frac{1}{n} + \frac{\left[n\left(t-\varepsilon\right)\right]}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\left[n\left(t-\varepsilon\right)\right]}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n$$

b) para  $[n(t-\epsilon)] \le k \le [n(t+\epsilon)]$ :

$$\begin{split} 0 &\leq \frac{\left\lceil n\left(t+\epsilon\right)\right\rceil}{\left\lceil n\left(t-\epsilon\right)\right\rceil = k} P\left(\sum_{i=0}^{k} X_{i} < t\right) P\left(J=k\right) &= \frac{\left\lceil n\left(t+\epsilon\right)\right\rceil}{\sum_{i=0}^{k} X_{i}} \leq \\ &\leq \frac{\left\lceil n\left(t+\epsilon\right)\right\rceil}{\sum_{i=0}^{k} P\left(J=k\right)} &= P\left(\frac{\left\lceil n\left(t-\epsilon\right)\right\rceil}{n} \leq T \leq \frac{\left\lceil n\left(t+\epsilon\right)\right\rceil}{n}\right). \end{split}$$

c) para  $k > [n(t+\epsilon)]$ :

$$0 \le P\left(\sum_{i=0}^{k} X_{i} < t\right) \le P\left(\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} X_{i} < t\right) = P\left(\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} X_{i} - (t+\epsilon) < -\epsilon\right) = P\left(-\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} X_{i} + \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n} > \hat{\epsilon}\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor} - \frac{\lfloor n(t+\epsilon) \rfloor}{n}\right| > \epsilon\right)$$

onde

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - (t + \varepsilon) + \frac{[n(t + \varepsilon)]}{n} < \varepsilon$$

Tomando  $\delta > 0$  e para n suficientemente grande temos por (1) e por (a):

<sup>(\*\*) -</sup> Chebishev.

$$(I-\delta)P\left(T < \frac{[n(t-\epsilon)]}{n}\right) = \sum_{k=0}^{[n(t-\epsilon)]-1} (1-\delta)P(J=k) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{[n(t-\epsilon)]-1} \sum_{k=0}^{n} (1-\delta)P(J=k) .$$

Similarmente, por (1) e por (c), temos:

$$0 \leq \sum_{k> \lceil n \, (t+\varepsilon) \rceil}^{n} \overset{n}{Z}_{k} \leq \sum_{k> \lceil n \, (t+\varepsilon) \rceil}^{} \delta P \, (\mathtt{J} = \mathtt{k}) \; = \; \delta P \left( T > \frac{\lceil n \, (t+\varepsilon) \rceil}{n} \right).$$

Concluindo: usando as desigualdades acima e mais a conseguida com (b), temos:

$$\begin{split} & [n(t-\epsilon)]^{-1} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} (1-\delta) P(J=k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \leq \sum_{k=0}^{n} [n(t-\epsilon)]^{-1} \\ & + P\left[\frac{[n(t-\epsilon)]}{n} \leq T \leq \frac{[n(t-\epsilon)]}{n}\right] + \sum_{k>[n(t+\epsilon)]} \delta P(J=k) \; . \end{split}$$

o que é equivalente a

$$(1-\delta)P\left(T < \frac{\lceil n(t-\epsilon) \rceil}{n}\right) \le P(Y_n < t) \le P\left(T < \frac{\lceil n(t-\epsilon) \rceil}{n}\right) + P\left(\frac{\lceil n(t-\epsilon) \rceil}{n} \le T \le \frac{\lceil n(t+\epsilon) \rceil}{n}\right) + \delta P\left(T > \frac{\lceil n(t+\epsilon) \rceil}{n}\right).$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$(1-\delta)P(T < t-\epsilon) \le \lim_{n} \inf P(Y_n < t) \le$$

$$\le \lim_{n} \sup P(Y_n < t) \le P(T < t-\epsilon) +$$

$$+ P(t-\epsilon \le T \le t+\epsilon) + \delta P(T > t+\epsilon).$$

Fazendo agora  $\varepsilon \to 0$  e  $\delta \to 0$  e lembrando que T é suposta contínua chegamos a:

$$P(T < t) \le \lim_{n} \sup P(Y_n < t) \le \lim_{n} \sup P(Y_n < t) \le$$
  
 $\le P(T < t) + 0 + 0,$ 

ou seja:

$$\lim P(Y_n < t) = P(T < t)$$

para todo t real.

c.q.d.

### **BIBLIOGRAFIA**

- I SCHASSBERGER,R. (1977), Insensivity of steady atate distributions of generalized semi-Markov processes, Part I, Ann. Probability 5,87--99.
- II SCHASSBERGER,R. (1978), Insensivity of steady state-distributions of generalized semi-Markov processes, Part II, Ann. Probability 6,85--93.
- III SCHASSBERGER,R. (1977), Insensivity of steady-state distributions of generalized semi-Markov processes with speeds. Res. Paper nº 329 Dept. of Mathematics and Statistics, Univ. of Calgary.
  - IV SCHASSBERGER,R. (1977), Insensitivity of stationary probabilities in networks of queues, Res. Paper nº 332, Dept. of Mathematics and Statistics, Univ. of Calgary.
- [1] BARBOUR, A.O. (1976), Networks of queues and the method of stages, Advances in Appl. Probability 8, 584-591.
- [2] BASKETT, F., CHANDY, K.M., MUNTS, R.R. & PALACIOS, F. G., (1975), Open, closed and mixed networks of queues with different classes of costumers, J. Assoc. Comput. Mach 22, 248-260.
- [3] KARLIN,S. (1966), A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York.
- [4] KELLY, F.P. (1976), Networks of queues, Advances in Appl. Probability 8, 416-432.
- [5] P.BREMAUD, Theorie des Files d'attente et leurs reseaux, edição preliminar, (1984), Universidade Paris IV.