

FILAS COM REAPRESENTAÇÕES
ATRASADAS

MARIA CREUSA SALLES GALVÃO LEITE

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

ESTATÍSTICA

Orientador: Prof. Dr. CARLOS ALBERTO B. DANTAS

- SÃO PAULO, MARÇO DE 1986 -

ABSTRACT

A system of queue with delayed retrials consists in a primary server with exponential service time and nowaiting room, and a secondary server with exponential service time and infinite waiting room. Poisson arrivals to the primary server go to the secondary server if the primary one is occupied. Customers keep trying the primary server until they receive service, then leave the system. In this way secondary server acts as a delay mechanism in the overflow stream.

The main subject of this work is to analyse the system of queue with deleyed retrials and the flows of customers in it. A flow is a stochastic process formed by embedding the queue length process at transitions corresponding to: customers inputing the primary server, customers departing the system, customers overflowing the primary server and inputing the secondary one, and customers outputing the secondary server and retrialing.

We show that the queue length process is a Markov process not reversible and we also exhibit their steady state distribution. Furthermore, we show that all flow processes are Markov renewal processes, we calculate their semi-Markov kernel and we analyse the marginal embedded processes.

AGRADECIMENTOS

Quero externar meus agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Carlos Alberto B. Dantas, do IME-USP, meu orientador, pela realização deste trabalho, pelo tempo, amizade e paciência que me dispensou, além da análise crítica apresentada no desenvolvimento da tese.
- Ao Prof. Ralph L. Disney, da Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, USA, pela co-orientação, iniciada no primeiro semestre de 1984 em São Paulo, e durante os seis meses que permaneci em Blacksburg durante 1985; pelo calor humano que recebi dele e de sua família durante o forte inverno da Virginia; e principalmente pelos ensinamentos e firme direção que imprimiu ao meu trabalho o que me levou a vencer todos os desafios encontrados.
- Aos colegas e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, USP, por terem acreditado em mim e no meu trabalho.
- Aos colegas e funcionários do Departamento de Estatística do IME-USP, pelo apoio e estímulo que recebi.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo apoio financeiro recebido, tanto em São Paulo como no exterior.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo apoio recebido em todas as vezes que a ela recorri.
- À minha família, por não ter desistido e nem desanimado enquanto esperava por mim, durante o tempo que permaneci ocupada com esta tese.

ÍNDICE

ABSTRACT	i
AGRADECIMENTOS	ii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
1 - Introdução	01
2 - Propósito da Tese	04
3 - Resumo dos Resultados	07
4 - Pesquisa Futura	10
5 - Organização do Trabalho	11
CAPÍTULO II - RESULTADOS PRELIMINARES	12
1 - Reversibilidade	12
2 - Processos de Renovação Markoviano	15
2.1 - Resultados Gerais	15
2.2 - Processos Derivados do Processo de Re novação Markoviano	16
CAPÍTULO III - PROCESSO EM TEMPO CONTÍNUO	23
1 - Resultados Gerais	23
CAPÍTULO IV - PROCESSO DE PARTIDA	33
1 - Notação	35
2 - Processo Tridimensional (N_1^d, N_2^d, T^d)	36
3 - Cadeia Fundamental (N_1^d, N_2^d)	42
4 - Processo de Partida Associado (T^d)	46
5 - Conclusões	53

CAPÍTULO V	- PROCESSO DE ENTRADA	54
1	- Notação	56
2	- Processo Tridimensional (N_1^i, N_2^i, T^i) ..	57
3	- Cadeia Fundamental (N_1^i, N_2^i)	62
4	- Processo de Entrada Associado (T^i)	65
5	- Conclusões	72
CAPÍTULO VI	- OS PROCESSOS DE ENTRADA E SAÍDA DA FILA SE CUNDÁRIA	73
A	- Processo de Transbordamento	75
1	- Notação	75
2	- Processo Tridimensional $(N_1^{OV}, N_2^{OV}, T^{OV})$	75
B	- Processo de Saída	92
3	- Notação	93
4	- Processo Tridimensional (N_1^O, N_2^O, T^O) ..	94
BIBLIOGRAFIA	100

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é analisar os processos de fluxo de fregueses que ocorrem em um sistema de Filas com Reapresentações Atrasadas.

Um Sistema com Reapresentações é um problema básico em Comunicações, pois um usuário que ao tentar uma ligação não consegue, tenta novamente após um tempo aleatório, e assim repetidamente até conseguir completar a ligação, ou então desiste do chamado. Este problema é muito importante em Telefonia, pois um grande número de usuários que não conseguem completar a ligação, irá repetitivamente reiniciar sua chamada até obter sucesso, ocasionando um acúmulo extra de tráfego nas linhas telefônicas.

No nosso modelo de Filas com Reapresentações Atrasadas consideramos um sistema com dois servidores, um principal que efetivamente presta serviço, e outro secundário cuja função é atrasar o freguês, coordenando a sua volta ao servidor principal.

Um freguês que chega ao sistema, segundo um Processo de Poisson, imediatamente procura ser atendido pelo servidor principal, que não tem sala de espera. Se o servidor está

desocupado, inicia imediatamente o atendimento do freguês, por um tempo de serviço que tem distribuição exponencial e após ser servido o freguês deixa o sistema. Se o servidor está ocupado, o freguês dirige-se imediatamente à fila do serviço atrasador, que consiste de um servidor que tem uma sala de espera de tamanho infinito, e atende os fregueses de acordo com a ordem de chegada, e cada um por um tempo exponencial. Aí o freguês é atrasado e retorna ao servidor principal para novamente tentar ser atendido. O freguês deixa o sistema somente após ser atendido pelo servidor principal.

Esse problema de filas com retorno de fregueses que não conseguiram ser atendidos, tem sido amplamente estudado na teoria e na prática.

As mais antigas referências a um modelo com representações são encontrados nos trabalhos de Wilkinson (56) e Cohen (57). Eles consideram um modelo com vários servidores ($n > 1$), todos iguais e sem sala de espera, e um fluxo de fregueses procurando atendimento que chegam segundo um Processo de Poisson. Os servidores têm tempo de serviço exponencial, independentes entre si, e um freguês após ser atendido deixa o sistema. Porém Wilkinson e Cohen tratam o sistema atrasador de maneira distinta:

No modelo de Wilkinson, o sistema atrasador consiste de m servidores i.i.d., com tempo de serviço exponencial. Um freguês que não conseguiu atendimento no serviço principal, espera no sistema atrasador um tempo exponencial e retorna ao serviço principal; se porém encontrar os m servidores secundários ocupados, ele desiste e deixa o sistema. Wilkinson faz a análise do sistema, que foi estabelecido através de dados exper

rimentais, procurando descrever adequadamente as características da parcela de tráfego de fregueses que transbordam do serviço principal, indo para o sistema atrasador, através de valores médios e das variâncias.

Cohen considera para o sistema atrasador também m servidores i.i.d., com tempo de serviço exponencial. Considere também que o tempo durante o qual o freguês permanece no sistema fazendo sucessivas tentativas é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Baseando-se nessas hipóteses, Cohen deriva as equações de probabilidade que x servidores principais estejam ocupados e haja y chamadas simultâneas bloqueadas no sistema em equilíbrio. A partir daí, deduz a probabilidade de congestionamento do serviço principal, o número médio de servidores ocupados, o tempo médio que o sistema permanece congestionado, o número médio de chamadas bloqueadas, etc.

Esses artigos foram continuados por vários outros autores, introduzindo algumas modificações nos modelos iniciais e procurando desenvolver novos métodos para a determinação das medidas de desempenho da rede, isto é, da distribuição de equilíbrio do sistema, tempo médio de permanência de um freguês no sistema, número médio de fregueses no sistema, tempo médio que o sistema permanece congestionado, número médio de fregueses que deixam o sistema sem serem atendidos, etc.

Dentre as modificações introduzidas, as mais importantes foram as seguintes:

Uma alterando o modelo de Wilkinson, introduzindo no sistema atrasador infinitos servidores, o que faz com que os fregueses possam retornar ao serviço principal quantas vezes fo

rem necessárias até serem atendidos. Aqui podemos citar os trabalhos de Keilson, Cozzolino e Young (68), Kornyshev (69a) e (69b), Aleksandrov (72), Falin (78), (79), (80) e (84), Choo e Conolly (79), Stepanov(83) e de de Kok(84), que utilizam pequenas variações do modelo modificado de Wilkinson e introduzem diferentes métodos para a determinação das medidas de performance.

A outra modificação importante, agora sobre o modelo de Cohen, foi introduzida por Wilkinson e Radnik (67), que consideram uma sala de espera de tamanho infinito para os fregueses bloqueados e que decidem se retornam ao servidor principal ou não após a primeira, segunda, terceira etc tentativa frustrada segundo uma variável de Bernoulli, com parâmetro r_1 , r_2 , r_3 etc, respectivamente. Temos então os trabalhos de Gaver e Lehoczky (76), Frederiks e Reisner (79), Kulkarni (83), Ghahramani, Greenberg e Wolff (85) e Greenberg e Wolff (85) que utilizaram diferentes métodos para a análise de performance de variações do modelo de Wilkinson - Radnik.

E finalmente temos os trabalhos amostrais de Wilkinson e Radnik (68) e de Liu (80), corroborando com as hipóteses iniciais de Wilkinson e Cohen.

2. PROPÓSITO DA TESE

O objetivo de nossa tese é analisar um sistema de filas com reapresentações atrasadas, através da distribuição de equilíbrio do processo que indica o número de fregueses presentes no sistema e da análise dos processos pontuais marcados cor

respondentes aos diferentes processos de fluxos que ocorrem no sistema.

Um sistema de Filas com Reapresentações Atrasadas consiste, como já dissemos na Parte 1., de dois servidores (ver Figura 2.1):

- . um servidor principal, sem sala de espera ($L_1 = 0$), que atende os fregueses que chegam por um tempo de serviço i.i.d., com distribuição exponencial de parâmetro $\mu > 0$;
- . um serviço atrasador consistindo de um servidor secundário com sala de espera infinita ($L_2 = \infty$), que atende os fregueses de acordo com a ordem de chegada, e por um tempo de serviço i.i.d., com distribuição exponencial de parâmetro $\gamma > 0$.

Um freguês que chega, segundo um Processo de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$, dirige-se imediatamente ao servidor principal. Se este estiver ocupado, o freguês junta-se à fila do servidor secundário. Após ser aí atendido, o freguês retorna ao servidor principal, e assim sucessivamente, até que ele encontra o servidor principal desocupado. Aí então o freguês recebe o atendimento procurado e deixa o sistema.

Consideramos também que o Processo de Chegada e os Tempos de Serviço nos servidores principal e secundário são independentes entre si.

Definimos um processo em tempo contínuo $\{N_2(t), N_1(t), g(t) : t \geq 0\}$ que conta o número de fregueses presentes

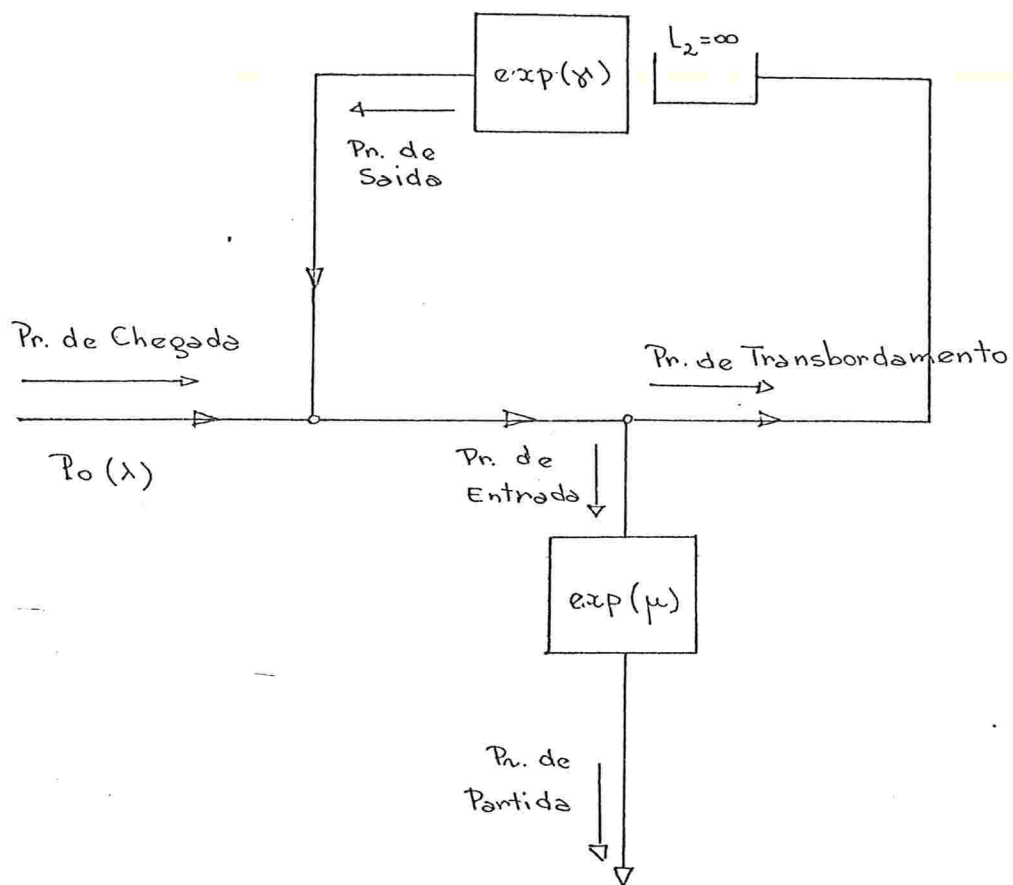


Figura 2.1: Filas com Reapresentações Atrasadas.

ao sistema no instante t , qualquer. Identificamos os instantes em que ocorrem os diferentes eventos no sistema, e definimos os processos de fluxos correspondentes (colocamos entre parênteses o nome correspondente em inglês):

- $\{N_{1,m}^d, N_{2,m}^d, T_m^d : m = 0, 1, 2, \dots\}$: Processo de Partida (Departure Process), imerso nos instantes em que ocorrem saídas de fregueses do sistema, após o atendimento pelo servidor principal;
- $\{N_{1,m}^i, N_{2,m}^i, T_m^i : m = 0, 1, 2, \dots\}$: Processo de Entrada (Input Process), imerso nos instantes em que ocorrem entradas de fregueses no servidor principal;
- $\{N_{1,m}^{OV}, N_{2,m}^{OV}, T_m^{OV} : m = 0, 1, 2, \dots\}$: Processo de Transbordamento (Overflow Process), imerso nos instantes em que fregueses procuram ser atendidos no servidor principal e o encontram ocupado;
- $\{N_{1,m}^O, N_{2,m}^O, T_m^O : m = 0, 1, 2, \dots\}$: Processo de Saída (Output Process), imerso nos instantes em que ocorre um fim de serviço no servidor secundário.

3. RESUMO DOS RESULTADOS

No Capítulo II citamos alguns resultados sobre Reversibilidade e Processos de Renovação Markoviano, que usaremos durante o trabalho.

No Capítulo III, analisamos as propriedades do Pro

cesso de Markov tri-dimensional $\{N_2(t), N_1(t), g(t): t \geq 0\}$ e mostramos que ele não é um processo reversível, calculando a distribuição de equilíbrio marginal do processo $\{N_2(t), N_1(t): t \geq 0\}$.

Nos Capítulos IV, V e VI passamos aos processos de fluxos, correspondendo aos Processos de Partida, de Entrada e Processos de entrada e saída no servidor secundário, respectivamente. Todos esses processos são Processos de Renovação Markoviano e derivamos seus núcleos de transição.

Para os Processos de Partida e de Entrada analisamos também os processos derivados do processo de renovação Markoviano, ou seja: a cadeia de Markov imersa (ou fundamental) $\{N_{1,m}^*, N_{2,m}^* : m = 0, 1, 2, \dots\}$, e o processo do intervalo de tempo entre os instantes de ocorrência dos eventos $\{T_{m+1}^* - T_m^* : m = 0, 1, 2, \dots\}$. Determinamos a distribuição estacionária da cadeia imersa e a distribuição do intervalo entre ocorrências, e também a distribuição conjunta de intervalos consecutivos e sua correlação.

Para o Processo de Transbordamento não nos foi possível calcular explicitamente esses resultados devido à extensão dos cálculos envolvidos na determinação do núcleo de transição. Como o Processo de Saída de fregueses do servidor secundário depende diretamente dos resultados do Processo de Transbordamento, não pudemos calcular explicitamente seu núcleo de transição, porém calculamos a distribuição condicional do intervalo entre duas saídas consecutivas, conhecido o número de fregueses no sistema no início do intervalo observado, $(T_{m+1}^O - T_m^O \mid N_{1,m}^O, N_{2,m}^O)$.

Temos também alguns resultados numéricos sobre a correlação entre intervalos consecutivos de eventos sucessivos, no caso do Processo de Partida e de Entrada, mostrando que essas correlações são bastante pequenas (da ordem de 10^{-3} e 10^{-4} respectivamente) e não obtivemos nenhuma correlação negativa..

Podemos analisar a taxa de ocupação do sistema

$$\rho = \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}$$

interpretando-a como o produto da taxa de ocupação do servidor principal, representada por $\frac{\lambda}{\mu}$ pois o intervalo entre entradas no servidor principal tem média $1/\lambda$, e da "taxa de ocupação" do servidor secundário $\frac{\lambda + \gamma}{\gamma}$, correspondendo à entrada de fregueses novos (λ) e de fregueses que retornam (γ).

Por outro lado, devido à complexidade nos cálculos, por envolverem os resultados do Processo de Transbordamento e de Saída, não obtivemos informações sobre o atraso que um freguês sofre no serviço atrasador, e sobre o Tempo de Permanência (Sojourn Time) de um freguês marcado no sistema. Porém podemos esclarecer que, através de conversas nossas com o Prof. Guy Fayolle, do INRIA, França, foi possível a ele determinar o Tempo de Permanência reduzindo o problema a uma equação funcional em várias variáveis complexas, que é resolvida por redução a um problema de contorno do tipo Riemann-Hilbert - Carleman no plano complexo, segundo nos notificou por telefone em fins de 1985.

4. PESQUISA FUTURA

Muitos problemas relacionados com o nosso sistema não foram resolvidos neste trabalho. Podemos tentar completar nossas informações sobre o modelo que analisamos, ou então generalizar o modelo. Listaremos alguns desses problemas porém acreditamos que a resolução é difícil, em vista da complexidade dos resultados analíticos que obtivemos para o Processo de Transformamento, e em vista da dependência entre os vários processos de fluxos que analisamos.

Destacamos os problemas de superposição e decomposição de processos que ocorrem no nosso sistema de filas com representações atrasadas, que não foram analisadas.

Quanto às generalizações que possam ser introduzidas, podemos alterar o serviço principal introduzindo aí uma sala de espera maior ($0 < L_1 < \infty$), aumentando o número de servidores disponíveis ($m > 0$), ou modificando o tipo de atendimento do serviço principal (para uma distribuição de Erlang, por exemplo). Também podemos alterar o serviço secundário, como limitar o número de fregueses permitidos no segundo servidor ($L_2 < \infty$), o que nos aproximaria do modelo de Wilkinson.

Essas são algumas questões que pensamos ser interessante resolver, pois elas aproximariam nosso modelo de situações gerais facilmente encontradas em problemas de tráfego em sistemas com espaço de espera limitado mas com fregueses que se reapresentam até serem atendidos.

5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho contém seis capítulos, numerados de I a IV, cujos resultados foram resumidos acima. Cada capítulo é subdividido em seções, identificadas por números arábicos. Teoremas, definições, lemas e corolários são identificados pelo número da seção e pelo número na sequência em que ocorrem. As expressões também são identificadas por dois números entre parênteses, um referindo-se à seção e outro à sequência de expressões.

Quando referimo-nos a um resultado de outro capítulo, identificamo-lo por três números: o primeiro indicando o capítulo no qual ele se encontra, e os demais indicando a sua posição no capítulo, por exemplo: Teorema IV.2.1 refere-se ao Teorema 1 do Capítulo IV, seção 2.

RESULTADOS PRELIMINARES

O propósito deste Capítulo é introduzir alguns conceitos básicos em Processos Estocásticos, que serão amplamente utilizados durante o nosso trabalho.

1. REVERSIBILIDADE

Alguns processos estocásticos têm uma propriedade singular: quando observamos o processo com a direção do tempo decorrido invertida, seu comportamento estocástico permanece inalterado. Ou seja, é como se tomássemos uma fita de cinema e ao passá-la ao contrário, o filme resultante fosse estatisticamente indistinguível do filme original. Essa propriedade é chamada de reversibilidade.

Seja $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ um processo de Markov estacionário, com espaço de estados S enumerável, π sua distribuição de equilíbrio e $Q = (q(i, j))$ seu gerador infinitesimal.

Definição 1.1:

O processo X é dito *reversível* se $\forall t_1, t_2, \dots, t_n, \tau \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ tem a mesma distribuição conjunta de $(X(\tau - t_1), X(\tau - t_2), \dots, X(\tau - t_n))$.

$\hat{X} = \{ X(\tau - t) : t \in \mathbb{R} \}$ é dito o processo reverso de X.

Teorema 1.2:

Uma condição necessária e suficiente para que o processo X seja reversível, é que satisfaça as condições de balanço detalhado, ou seja:

$$\forall j, k \in S$$

$$\pi(j) q(j, k) = \pi(k) q(k, j).$$

Para uma demonstração ver, por exemplo, Kelly(79).

Porém, como a distribuição de equilíbrio π é determinada a partir das taxas de transição $q(i, j)$, é interessante estabelecer a reversibilidade diretamente através dessas taxas e esse resultado foi obtido por Kolmogorov:

Corolário 1.2: Critério de Kolmogorov:

O processo estocástico X é reversível se e somente se suas taxas de transição satisfazem

$$\begin{aligned} q(j_1, j_2) q(j_2, j_3) \dots q(j_{n-1}, j_n) q(j_n, j_1) &= \\ = q(j_1, j_n) q(j_n, j_{n-1}) \dots q(j_3, j_2) q(j_2, j_1) &\quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\forall j_1, j_2, \dots, j_n \in S, n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

O critério de Kolmogorov nos dá uma maneira mais fácil para estabelecer se o processo é ou não reversível. Basta olharmos cada caminho no espaço de estados que sai e volta ao mesmo estado. O processo será reversível se não apresentar preferências no sentido de circulação no espaço de estados.

Quando o processo é reversível, seu reverso \hat{X} tem a mesma taxa de transição, ou seja:

$$\hat{q}(i, j) = q(i, j) \quad \forall i, j \in S \quad (1.2)$$

onde $\hat{q}(i, j)$ é a taxa de transição de \hat{X} .

Porém existem casos em que o processo reverso \hat{X} não satisfaz (1.2). Neste caso, dizemos que X não é reversível, mas ainda assim podemos investigar seu processo reverso.

Em Kelly, encontramos condições para determinar as taxas de transição $\hat{q}(i, j)$ do processo reverso:

se determinarmos uma coleção de números $\hat{q}(j, k)$, $j, k \in S$ tal que

$$\hat{q}(j) = q(j) = \sum_{k \in S} q(j, k) \quad \forall j \in S$$

$$\hat{q}(i, j) = \frac{\pi(j)}{\pi(i)} q(j, i)$$

então dizemos que o processo reverso \hat{X} tem taxas de transição $\hat{q}(i, j)$, e que X e \hat{X} tem a mesma distribuição de equilíbrio π .

2. PROCESSOS DE RENOVAÇÃO MARKOVIANO

2.1 - Resultados Gerais

Definição 2.1:

Um processo $(X, T) = \{X_n, T_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$, com X_n tomando valores num espaço enumerável S , e T_n com valores em $[0, \infty)$ tal que $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq T_2 \dots$ é dito ser um Processo de Renovação Markoviano, se, $\forall j \in S, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Pr \left[X_{m+1} = j, T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_0, X_1, \dots \right. \\ \left. \dots X_m, T_0, T_1, \dots, T_m \right] = \\ = \Pr \left[X_{m+1} = j, T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m \right] \quad \square \end{aligned}$$

Se além da propriedade (2.1) tivermos

$$\begin{aligned} \Pr \left[X_{m+1} = j, T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m = i \right] = \\ = Q(i, j, t) \end{aligned}$$

$\forall i, j \in S, t \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{N}$, então o processo de renovação markoviano é dito *homogêneo*.

Algumas propriedades imediatas sobre os Processos de Renovação Markoviano serão apenas enunciadas, e para maiores detalhes e demonstrações, ver Çinlar (75) e Disney (84).

A matriz $Q(t) = (Q(i, j, t))_{i, j \in S}$

$$Q(i, j, t) = \Pr \left[X_{m+1} = j, T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m = i \right]$$

é chamada o *núcleo semi-markoviano de transição* do processo (X, T) .

É fácil mostrar que o núcleo de transição e a distribuição inicial β da cadeia

$$\beta(j) = \Pr \left[X(0) = j \right] \quad j \in S$$

especificam completamente o processo (X, T) .

Podemos também definir:

$$Q^n(i, j, t) = \Pr \left[X_n = j, T_n \leq t \mid X_0 = i \right]$$

$\forall i, j \in S, n \in \mathbb{N}$, com a convenção $T_0 = 0$

Como

$$Q^0(i, j, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

temos a relação recursiva:

$$Q^{n+1}(i, k, t) = \sum_{j \in S} \int_0^t Q(i, j, ds) Q^n(j, k, t-s)$$

2.2 - Processos Derivados do Processo de Renovação Markovia no

Para cada par (i, j) de estados, a função que as
socia

$$t \rightarrow Q(i, j, t)$$

possue todas as propriedades de uma função de distribuição, exce
to que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(i, j, t) = P(i, j)$$

não necessariamente vale 1.

Por outro lado

$$0 \leq P(i, j) \leq 1$$

$$\sum_{j \in S} P(i, j) = 1 \quad \forall i \in S.$$

e temos que:

Proposição 2.2:

A cadeia imersa $X = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ no Pro
cesso de Renovação Markoviano (X, T) , é uma Cadeia de Markov
com espaço de estados S e matriz de transição $P = (P(i, j))_{i, j \in S}$.

□

Vamos chamar de π a distribuição de equilíbrio da
cadeia imersa, quando existir

$$\pi = \pi P.$$

Por outro lado, é fácil verificar que o intervalo
de tempo entre transições sucessivas $[T_m, T_{m+1}]$ depende do esta

do ocupado no início do intervalo (X_m) e pode depender do estado ocupado no fim do intervalo (X_{m+1}). Porém, pode-se mostrar que os incrementos de tempo entre transições sucessivas são condicionalmente independentes, dada a cadeia de Markov X .

Definimos

$$G(i, j, t) = \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m = i, X_{m+1} = j \right] = \\ = \frac{Q(i, j, t)}{P(i, j)} \quad \text{se } P(i, j) > 0$$

com a convenção que se $P(i, j) = 0$, $G(i, j, t) = 1$.

Proposição 2.3:

Seja (X, T) um processo de renovação markoviano e a função G definida como acima. Então

$$\Pr \left[T_1 - T_0 \leq t_1, T_2 - T_1 \leq t_2, \dots, T_n - T_{n-1} \leq t_n \mid \right. \\ \left. X_0, X_1, \dots, X_n \right] = \\ = G(X_0, X_1, t_1) G(X_1, X_2, t_2) \dots G(X_{n-1}, X_n, t_n)$$

$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 2.4:

Em particular, se S consiste de um único ponto, então $\{T_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é um Processo de Renovação. □

Para cada estado $j \in S$, definimos T_0^j, T_1^j, \dots como os sucessivos instantes T_n tal que $X_n = j$.

Proposição 2.5:

Para cada $j \in S$, $T^j = \{T_n^j : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é um Processo de Renovação, possivelmente atrasado. \square

Teorema 2.6:

Seja $D \subset S$ fixado e N_0, N_1, N_2, \dots os sucessivos índices $n \geq 0$ tais que $X_n \in D$. Para cada $n \in N$ definimos

$$\hat{X}_n = X_{N_n}$$

$$\hat{T}_n = T_{N_n}$$

Então $(\hat{X}, \hat{T}) = \{\hat{X}_n, \hat{T}_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ é um Processo de Renovação Markoviano com espaço de estados $D \cup \{\Delta\}$, onde $\Delta = X_\infty(\omega)$, para todos $\omega \in \Omega$, espaço amostral. \square

Portanto, apesar de, para cada ponto $j \in S$, (T^j) ser um processo de renovação, a superposição de todos esses processos $(T^j)_{j \in S}$ que nos dá os pontos $\{T_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ não é um processo de renovação.

É importante notar que os Processos de Renovação Markoviano incluem os Processos de Renovação, os Processos e as Cadeias de Markov:

- . se S contém apenas um ponto, o processo (X, T) é um processo de renovação.
- . se os intervalos $(T_{m+1} - T_m)$, $m = 0, 1, \dots$ assumem o valor 1, com probabilidade 1, (X, T) é uma cadeia de Markov.

se $(T_{m+1} - T_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ tem distribuição exponencial com o parâmetro dependendo somente do estado sendo visitado, (X, T) é um processo de Markov.

Vamos então analisar o processo Tempo entre ocorrências.

Seja $F(t)$ a função de distribuição do intervalo entre transições sucessivas e seja π a distribuição de equilíbrio da Cadeia imersa no processo de renovação markoviano (X, T) .

$$F(t) = \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t \right] \quad \forall m \in \mathbb{N}, t > 0$$

Proposição 2.7:

O intervalo entre transições sucessivas, em equilíbrio, possui a seguinte distribuição:

$$F(t) = \pi Q(t) U$$

onde U é o vetor coluna de 1's, $\forall t \geq 0$.

Prova:

$$\begin{aligned} F(t) &= \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t \right] = \\ &= \sum_{i \in S} \Pr \left[X_m = i \right] \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m = i \right] = \\ &= \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \Pr \left[X_m = i \right] \Pr \left[X_{m+1} = j, \right. \\ &\quad \left. T_{m+1} - T_m \leq t \mid X_m = i \right] = \\ &= \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \pi(i) Q(i, j, t). \quad \square \end{aligned}$$

A distribuição conjunta de intervalos consecutivos entre transições sucessivas também pode ser calculada:

Corolário 2.8:

Para intervalos consecutivos entre ocorrências, em equilíbrio, a distribuição conjunta é dada por:

$$F(t_1, t_2) = \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t_1, T_{m+2} - T_{m+1} \leq t_2 \right] = \\ = \pi \cdot Q(t_1) Q(t_2) U$$

onde U é o vetor coluna de 1's, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$

Prova:

$$F(t_1, t_2) = \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t_1, T_{m+2} - T_{m+1} \leq t_2 \right] = \\ = \sum_{i \in S} \Pr \left[X_m = i \right] \Pr \left[T_{m+1} - T_m \leq t_1, T_{m+2} - T_{m+1} \leq t_2 \mid \right. \\ \left. X_m = i \right] = \\ = \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \Pr \left[X_m = i \right] \Pr \left[X_{m+1} = j, T_{m+1} - T_m \leq t_1 \mid \right. \\ \left. X_m = i \right] \cdot \Pr \left[T_{m+2} - T_{m+1} \leq t_2 \mid X_m = i, X_{m+1} = j, T_{m+1} - \right. \\ \left. - T_m \leq t_1 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in S} \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \Pr \left[X_m = i \right] \cdot \Pr \left[X_{m+1} = j, \right. \\
&T_{m+1} - T_m < t_1 \left. \mid X_m = i \right] \cdot \Pr \left[X_{m+2} = k, T_{m+2} - T_{m+1} < t_2 \mid \right. \\
&X_{m+1} = j \left. \right] = \\
&= \sum_{k \in S} \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \pi(i) Q(i, j, t_1) Q(j, k, t_2) \quad \square
\end{aligned}$$

Esse resultado pode ser estendido para qualquer número de intervalos consecutivos entre ocorrências sucessivas.

Como mostra o Corolário 2.8, os intervalos de tempo entre ocorrências sucessivas não são independentes, podemos então determinar a covariância e a correlação entre esses intervalos:

$$\begin{aligned}
\text{Corr} (T_{m+2} - T_{m+1}, T_{m+1} - T_m) &= \\
&= \frac{E \left[(T_{m+2} - T_{m+1}) (T_{m+1} - T_m) \right] - \left[E(T_{m+1} - T_m) \right]^2}{\text{Var} (T_{m+1} - T_m)}
\end{aligned}$$

PROCESSO EM TEMPO CONTÍNUO

Quando observamos um sistema de filas, várias questões são colocadas: sobre a viabilidade do sistema, seu desempenho, sua eficiência, sobre o tempo que um freguês gasta no sistema, por exemplo. Na procura de parâmetros que nos dêem condições de análise sobre essas questões, temos necessidade de conhecer o número de fregueses presentes no sistema em qualquer instante e seu comportamento probabilístico. E a medida que o interesse sobre o sistema se prolonga ao longo do tempo, é importante conhecermos seu equilíbrio estocástico.

Portanto, definimos o processo que conta o número de fregueses no sistema Fila com Re-Apresentações Atrasadas, de terminamos seu gerador e procuramos verificar se o processo (N_2, N_1, g) é reversível. Além disso determinamos sua distribuição estacionária, dando então subsídios para a determinação dos parâmetros desejados.

1. RESULTADOS GERAIS

Vamos considerar uma Fila com Re-Apresentações Atrasadas (Figura 1.1). Este é um sistema com dois servidores:

- . um principal, que realmente presta serviço, mas com sala de espera limitada, no nosso caso com $L_1 = 0$;

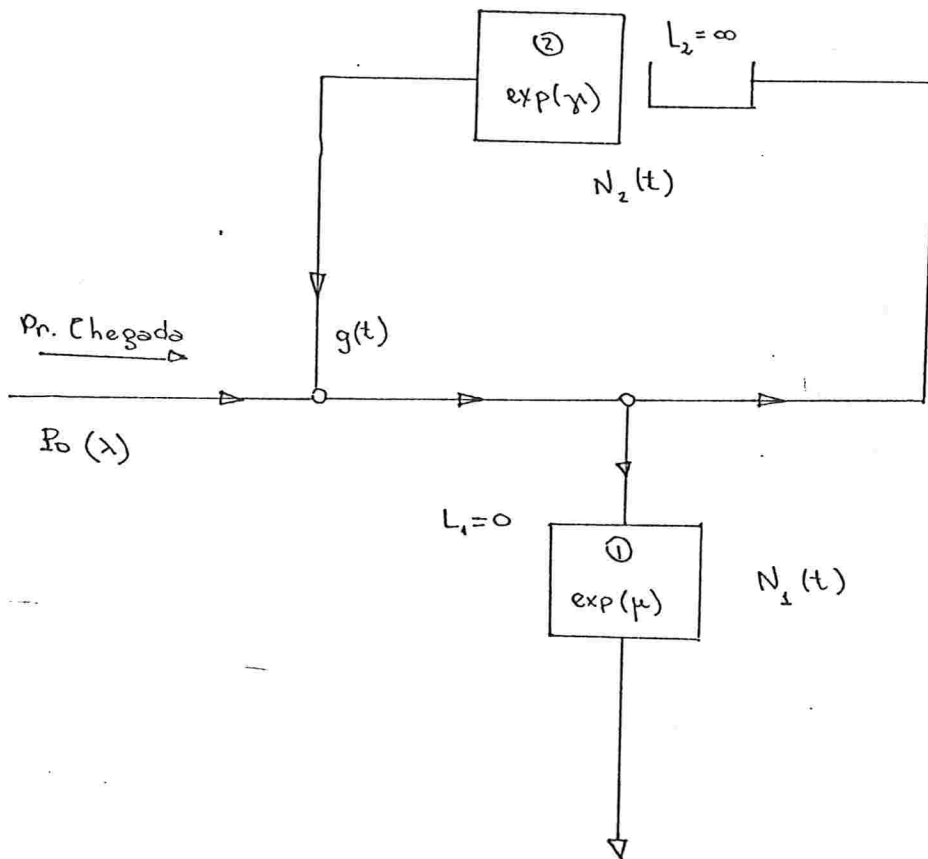


Figura 1.1: Processo (N_2, N_1, g)

- . outro secundário, cuja função é atrasar o freguês que, não tendo sido atendido pelo primeiro servidor, deve fazer uma nova tentativa, e que tem sala de espera ilimitada, $L_2 = \infty$.

Estamos considerando que novos fregueses chegam ao sistema segundo um Processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, e que os tempos de serviço nos dois servidores são independentes e identicamente distribuídos com distribuição exponencial com taxas $\mu > 0$ e $\gamma > 0$, respectivamente no primeiro e no segundo servidor.

Consideramos ainda que o Processo de Chegada e os processos Tempo de Serviço no primeiro e no segundo servidores são independentes entre si.

Podemos então descrever o comportamento do sistema:

Um freguês que chega procura imediatamente atendimento no servidor principal. Se este está ocupado, o nosso freguês imediatamente dirige-se para o segundo servidor. A disciplina de atendimento no segundo servidor é FIFO, ou seja obedece à ordem de chegada. O freguês após ser liberado pelo segundo servidor, imediatamente procura ser atendido pelo servidor principal. No momento em que, em alguma tentativa, o freguês encontra o servidor principal desocupado recebe atendimento e então sai do sistema.

Para um fixado instante t , vamos considerar o estado do sistema como sendo um vetor aleatório tri-dimensional: um elemento descrevendo o número de fregueses presentes no servidor principal (N_1), outro descrevendo o número de fregueses presentes no sistema atrasador (N_2) e um terceiro elemento valendo 0 ou 1 e que muda de valor a cada instante que termina o

atendimento de um freguês pelo servidor secundário. No número de fregueses em cada fila incluímos o freguês que está sendo atendido no instante t , e o número de fregueses na fila 2 inclui aquele freguês que tentou ser atendido no primeiro servidor e, não conseguindo se junta à fila do segundo servidor, se eventualmente t é o instante dessa tentativa.

Sejam então:

$N_i(t)$: número de fregueses presentes na fila i , $i = 1, 2$, no instante t ;

$g(t)$: a variável "flip-flop" que assume os valores 0 ou 1, e que muda de valor a cada instante em que termina o atendimento de um freguês no servidor secundário.

Teorema 1.1:

O processo $(N_2, N_1, g) = \{N_2(t), N_1(t), g(t) : t > 0\}$, definido no espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, é um Processo de Markov com gerador infinitesimal $Q(t)$, apresentado na ordem lexicográfica na Tabela 1.1, onde λ é a taxa do processo de chegada, $1/\mu$ é o tempo médio de serviço no servidor principal e $1/\gamma$ é o tempo médio de serviço no servidor secundário.

Prova:

Vamos supor conhecido o processo até o instante t : $N_2(u), N_1(u), g(u) : u \leq t$. Para qualquer valor de $h > 0$:

$N_2(t+h)$: conhecido o número de fregueses na segunda fila no instante t , $N_2(t), N_2(t+h)$ depende do

número de chegadas externas durante $(t, t+h]$ (segundo um Processo de Poisson) e do número de fregueses da fila do segundo servidor que conseguiram ser atendidos no servidor principal durante este intervalo de tempo;

$N_1(t+h)$: sabendo-se se o servidor principal estava ou não ocupado no instante t , $N_1(t+h)$ depende dos tempos de serviço no servidor principal, dos instantes de chegada e dos instantes de fim de serviço no segundo servidor, durante o intervalo $(t, t+h]$;

$g(t+h)$: conhecendo-se $g(t)$, $g(t+h)$ depende do número de fregueses que foram atendidos no segundo servidor no intervalo $(t, t+h]$ se $N_2(t) > 0$, e depende da chegada de fregueses que encontram o servidor principal ocupado e aí também do número de atendimentos no servidor secundário, se $N_2(t) = 0$.

Então, dados $N_2(u), N_1(u), g(u) : u \leq t$, o estado do sistema após ter passado um intervalo de tempo de comprimento h , depende do estado do sistema no instante t , e da ocorrência de eventos que têm distribuição exponencial e que são independentes entre si.

Portanto, $\forall (k, \ell, m) \in E, \forall h > 0, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Pr \left[N_2(t+h) = k, N_1(t+h) = \ell, g(t+h) = m \right] \\ \left[N_2(u), N_1(u), g(u) : u \leq t \right] = \\ = \Pr \left[N_2(t+h) = k, N_1(t+h) = \ell, g(t+h) = m \right] \end{aligned}$$

$$Q(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & 0 & -\lambda-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & 0 & -\lambda-\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 100 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & -\lambda-\gamma & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 101 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-\gamma & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 110 & \mu & 0 & -\lambda-\mu-\gamma & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\lambda-\mu-\gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots \\ 111 & 0 & 0 & \mu & \gamma & 0 & 0 & \mu & \gamma & -\lambda-\mu-\gamma & 0 & \lambda & \dots \\ 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-\gamma & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 201 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-\gamma & 0 & \lambda & \dots \\ 210 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & -\lambda-\mu-\gamma & \gamma & \dots \\ 211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \gamma & -\lambda-\mu-\gamma & \dots & \dots & \dots \\ 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & \dots \\ 301 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

Tabela 1.1.: Gerador do Processo (N_2, N_1, g)

$$[N_2(t), N_1(t), g(t)]$$

O gerador infinitesimal é apresentado na Tabela 1.1 \square

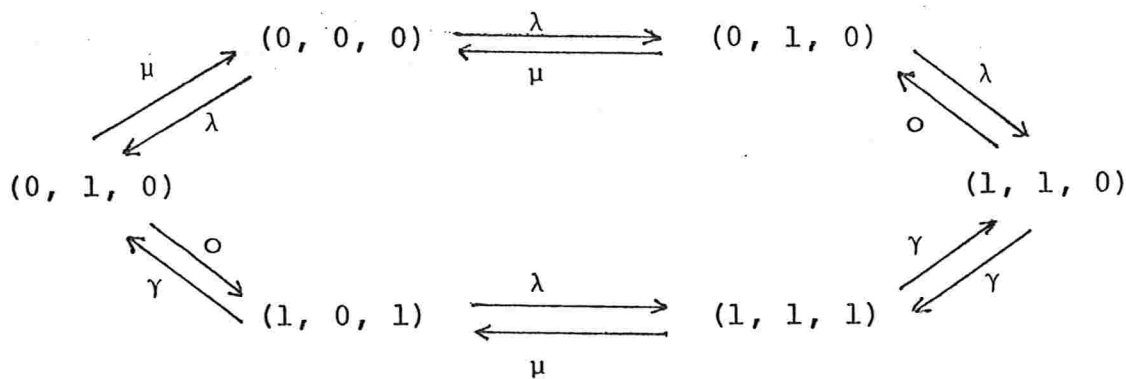
Seria desejável que o processo (N_2, N_1, g) fosse reversível, pelos resultados que poderíamos obter com a reversibilidade em relação aos vários fluxos de fregueses imersos nos instantes de entrada no servidor principal, de transbordamento para o servidor secundário, etc (ver Kiessler (83)).

Teorema 1.2:

O processo (N_2, N_1, g) , com espaço de estados E e gerador infinitesimal $Q(t)$ não é um processo reversível.

Prova:

Podemos mostrar que existe pelo menos um conjunto de estados para o qual não vale o Critério de Kolmogorov, enunciado no Corolário 1.2, Capítulo II. Basta tomarmos o conjunto de estados:



$$\Rightarrow \lambda^2 \mu^2 \gamma^2 \neq 0$$

\square

E finalmente determinamos a distribuição estacionária do processo (N_2, N_1, g) , quando ela existe.

Seja v a distribuição de equilíbrio do processo (N_2, N_1, g) satisfazendo as equações de balanço

$$v_Q = 0$$

e vamos chamar de ϕ a distribuição de equilíbrio da marginal (N_2, N_1) .

Teorema 1.3:

A distribuição de equilíbrio da variável marginal (N_2, N_1) do processo $\{N_2(t), N_1(t), g(t) : t \geq 0\}$ é dada por:

$$\begin{cases} \phi(n, 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma} \left[\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right]^n \phi(0, 0) \\ \phi(n, 1) = \frac{\lambda}{\mu} \left[\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right]^n \phi(0, 0) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

com condições iniciais:

$$\begin{cases} \phi(0, 1) = \frac{\lambda}{\mu} \phi(0, 0) \\ \phi(0, 0) = 1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \end{cases}$$

se temos $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

Desenvolvendo as equações de balanço para o processo $\{N_2(t), N_1(t), g(t) : t \geq 0\}$

$$v_Q = 0$$

obtemos os seguintes sistemas de equações:

$$\begin{cases} -\lambda v(0, 0, 0) + \mu v(0, 1, 0) = 0 \\ -\lambda v(0, 0, 1) + \mu v(0, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda v(0, 0, 0) - (\lambda + \mu) v(0, 1, 0) + \gamma v(1, 0, 1) = 0 \\ \lambda v(0, 0, 1) - (\lambda + \mu) v(0, 1, 1) + \gamma v(1, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

e para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma) v(n, 0, 0) + \mu v(n, 1, 0) = 0 \\ -(\lambda + \gamma) v(n, 0, 1) + \mu v(n, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

e para $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{cases} \lambda v(n-1, 1, 0) + \lambda v(n, 0, 0) - (\lambda + \mu + \gamma) v(n, 1, 0) + \\ \quad + \gamma v(n, 1, 1) + \gamma v(n+1, 0, 1) = 0 \\ \lambda v(n-1, 1, 1) + \lambda v(n, 0, 1) - (\lambda + \mu + \gamma) v(n, 1, 1) + \\ \quad + \gamma v(n, 1, 0) + \gamma v(n+1, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

Usando a notação:

$$p(i, j) = v(i, j, 0)$$

$$q(i, j) = v(i, j, 1) \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1:$$

obtemos por substituições:

$$(1) \begin{cases} p(0, 1) = \frac{\lambda}{\mu} p(0, 0) \\ q(0, 1) = \frac{\lambda}{\mu} q(0, 0) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} q(1, 0) = \frac{\lambda}{\gamma} p(0, 1) = \frac{\lambda^2}{\mu\gamma} p(0, 0) \\ p(1, 0) = \frac{\lambda}{\gamma} q(0, 1) = \frac{\lambda^2}{\mu\gamma} q(0, 0) \end{cases}$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(3) \begin{cases} p(n, 1) = \frac{\lambda + \gamma}{\mu} p(n, 0) \\ q(n, 1) = \frac{\lambda + \gamma}{\mu} q(n, 0) \end{cases}$$

e para $n = 2, 3, 4, \dots$

$$(4) \begin{cases} \lambda p(n-1, 1) + \lambda p(n, 0) - (\lambda + \mu + \gamma) p(n, 1) + \\ \quad + \gamma q(n, 1) + \gamma q(n+1, 0) = 0 \\ \lambda q(n-1, 1) + \lambda q(n, 0) - (\lambda + \mu + \gamma) q(n, 1) + \\ \quad + \gamma p(n, 1) + \gamma p(n+1, 0) = 0 \end{cases}$$

Substituindo (3) em (4) de modo a obtermos as equações de (4) com o primeiro servidor desocupado e posteriormente com o primeiro servidor ocupado, e somando termo a termo as equações resultantes obtemos, com a notação:

$$\phi(n, j) = p(n, j) + q(n, j) = v(n, j, 0) + v(n, j, 1)$$

$n = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1:$

$$(5) \begin{cases} \lambda(\lambda + \gamma) \phi(n-1, 0) + \lambda \mu \phi(n, 0) - (\lambda + \mu + \gamma)(\lambda + \gamma) \phi(n, 0) + \\ \quad + \gamma(\lambda + \gamma) \phi(n, 0) + \gamma \mu \phi(n+1, 0) = 0 \\ \lambda(\lambda + \gamma) \phi(n-1, 1) + \lambda \mu \phi(n, 1) - (\lambda + \mu + \gamma)(\lambda + \gamma) \phi(n, 1) \\ \quad + \gamma(\lambda + \gamma) \phi(n, 1) + \gamma \mu \phi(n+1, 1) = 0 \end{cases}$$

que é um sistema de equações de um Processo de Nascimento e Mor_{te} com condições iniciais dadas pelas equações (1) e (2).

É fácil ver que o resultado enunciado satisfaz às equações (5). □

PROCESSO DE PARTIDA

Dentre os vários processos imersos nos instantes de ocorrência de eventos nas Filas com Re-Apresentações Atrasadas, o Processo de Partida reveste-se de especial importância pois, se considerarmos o nosso sistema como um nó em um sistema mais complexo, a partida do nosso nó será a chegada ao nó seguinte em alguma rota considerada pelos usuários.

Analisamos então o processo que conta o número de fregueses presentes no sistema nos instantes de saída de fregueses do servidor principal e, conseqüentemente, do sistema. (Figura 1.1). Foi-nos possível mostrar que o processo tri-dimensional é um Processo de Renovação Markoviano, determinamos seu núcleo de transição, a probabilidade de transição em uma etapa da cadeia fundamental imersa e sua distribuição estacionária, e mostramos que os instantes em que ocorrem sucessivas partidas de fregueses não formam um Processo de Renovação, determinando então a correlação entre intervalos sucessivos de partidas consecutivas.

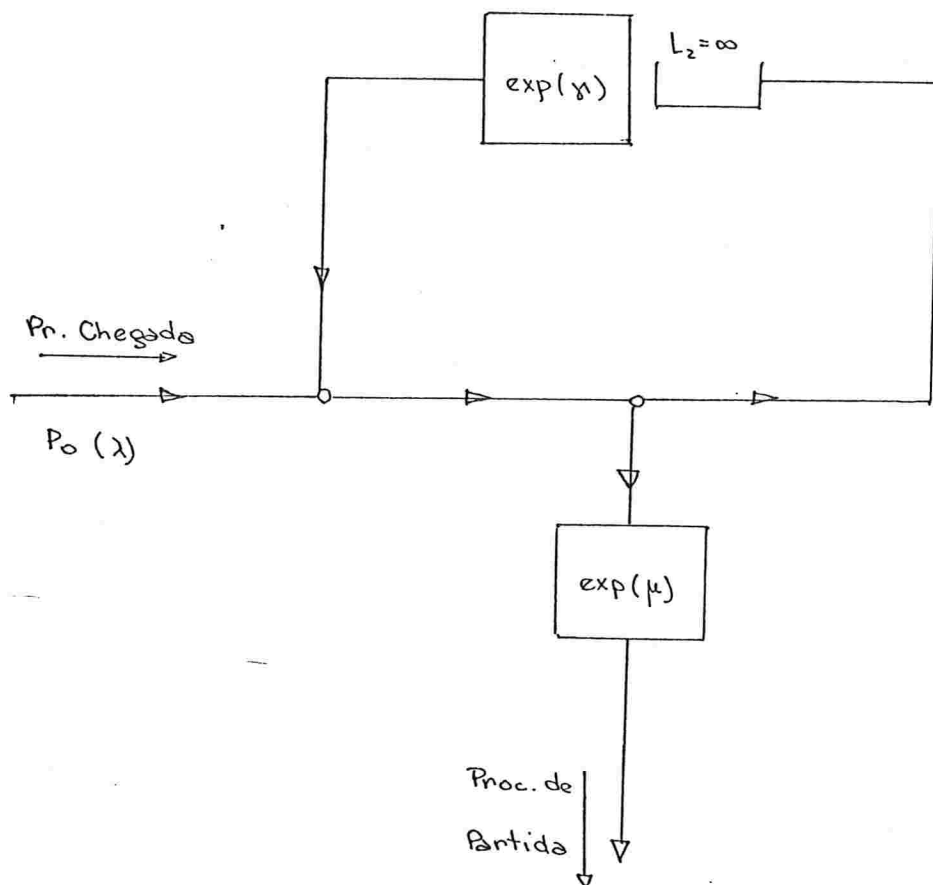


Figura 1.1: Processo de Partida (N_1^d, N_2^d, T^d)

1. NOTAÇÃO

Sejam:

$N_{j,m}^d = N_j(T_m^d)$: número de fregueses na fila j , $j = 1, 2$, observado imediatamente após a m -ésima partida que ocorre no sistema.

T_m^d : instante em que ocorre a m -ésima partida do sistema.

X_j : tempo de serviço gasto com um fregues no servidor j , $j = 1, 2$.

$A(t)$: número de novas chegadas que ocorrem no sistema durante o intervalo $(0, t]$.

$U_{1,m} = U_1$: tempo que decorre entre o m -ésimo fim de serviço no servidor principal e a próxima chegada externa.

$U_{2,m} = U_2$: tempo que decorre entre o m -ésimo fim de serviço no servidor principal e o próximo fim de serviço no servidor secundário, gerando uma re-apresentação.

T_k^a : instante em que ocorre a k -ésima chegada externa.

Vamos então analisar o processo $\{N_{1,m}^d, N_{2,m}^d, T_m^d : m = 0, 1, 2, \dots\} = (N_1^d, N_2^d, T^d)$.

2. PROCESSO TRIDIMENSIONAL (N_1^d, N_2^d, T^d)

Considerando que

$$N_{1,m}^d = 0 \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

podemos escrever

$$N_{2,m+1}^d = \begin{cases} N_{2,m}^d - 1_{\{U_2 < U_1\}} + A(t^* + X_1) - A(t^*) & \text{se } N_{2,m}^d > 0 \\ A(t^* + X_1) - A(t^*) & \text{se } N_{2,m}^d = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

e também

$$T_{m+1}^d - T_m^d = \begin{cases} \min(U_1, U_2) + X_1 & \text{se } N_{2,m}^d > 0 \\ U_1 + X_1 & \text{se } N_{2,m}^d = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $t^* = \min \{T_k^a : k = 0, 1, 2, \dots\}$ tal que $T_m^d < t^* < T_{m+1}^d$

Teorema 2.1:

O processo $\{N_{1,m}^d, N_{2,m}^d, T_m^d : m = 0, 1, 2, \dots\}$, imerso nos instantes de partidas de fregueses do sistema, é um

Processo de Renovação Markoviano, com espaço de estados $E^d = \{0\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$ e núcleo transição $Q^d(t) = (Q^d(i, j, t))$ dado por:

$$Q^d(j, j+n, t) =$$

$$(i) \quad = 0 \text{ se } j > 0, n < -1$$

$$(ii) \quad = \int_0^t \mu \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-(\lambda + \mu)x} (1 - e^{-\lambda(t-x)}) dx$$

$$\text{se } j = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(iii) \quad = \frac{\mu\gamma}{\lambda + \gamma} \int_0^t e^{-(\lambda + \mu)x} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t-x)}) dx =$$

$$= \frac{\mu\gamma}{\lambda + \gamma} \left[\frac{1}{\lambda + \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) - \frac{1}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) \right]$$

$$\text{se } j > 0, \quad n = -1$$

$$iv) \quad = \frac{\mu\gamma}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-(\lambda + \mu)x} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t-x)}) dx +$$

$$+ \frac{\mu\lambda}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-(\lambda + \mu)x} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t-x)}) dx$$

$$\text{se } j > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$ são respectivamente os parâmetros de serviço no 1º servidor, no 2º servidor e a taxa de chegada.

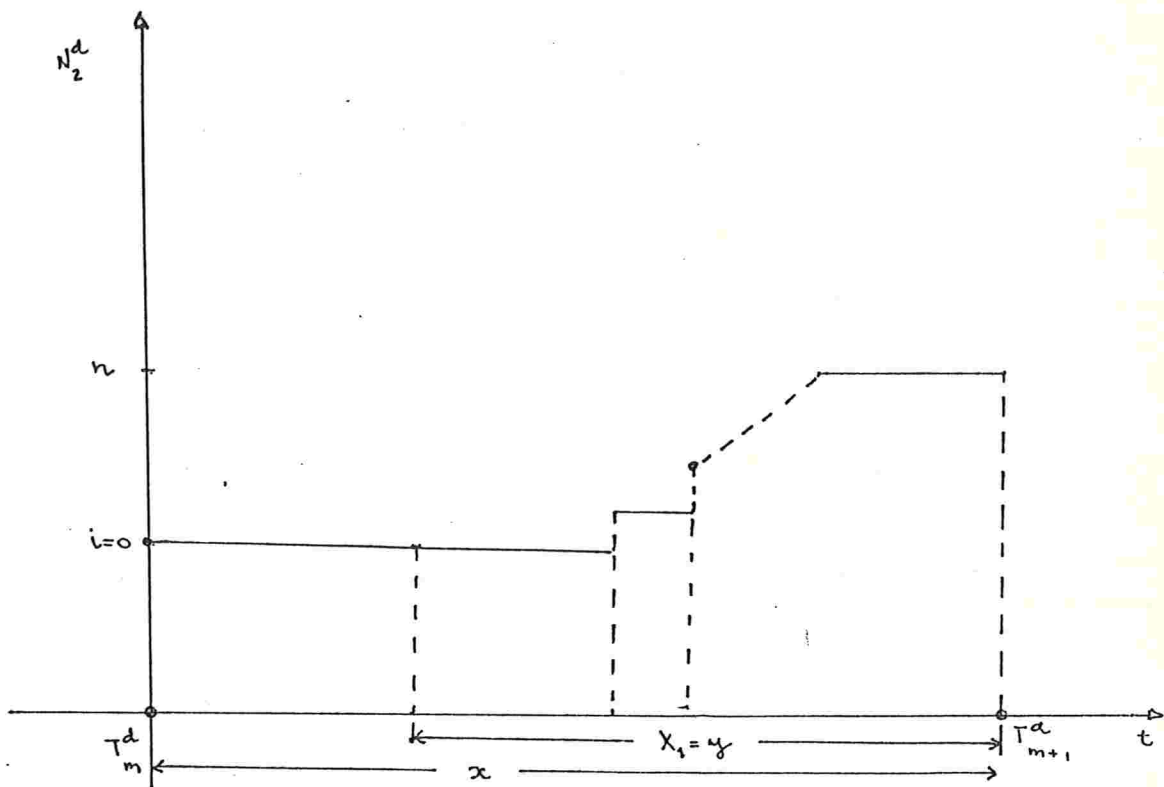
Prova:

Considerando as definições dadas em (2.1), (2.2), e (2.3) é fácil mostrar que:

$$\begin{aligned}
& \Pr \left[N_{1, m+1}^d = 0, N_{2, m+1}^d = j, T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \mid N_{1,0}^d = \dots \right. \\
& \quad \left. \dots = N_{1,m}^d = 0, N_{2,0}^d, N_{2,1}^d, \dots, N_{2,m}^d = i, T_0^d, \dots, T_m^d \right] = \\
& = \int_0^t \Pr \left[N_{1, m+1}^d = 0, N_{2, m+1}^d = j \mid N_{1,0}^d = \dots = \right. \\
& \quad \left. = N_{1,m}^d = 0, N_{2,0}^d, \dots, N_{2,m}^d = i, T_0^d, \dots, T_m^d, T_{m+1}^d - \right. \\
& \quad \left. - T_m^d = x \right] \cdot \\
& \quad \cdot \frac{d}{dx} \Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq x \mid N_{1,0}^d = \dots = N_{1,m}^d = 0, N_{2,0}^d, \right. \\
& \quad \left. \dots, N_{2,m}^d = i, T_0^d, \dots, T_m^d \right] = \\
& = \int_0^t \Pr \left[N_{1, m+1}^d = 0, N_{2, m+1}^d = j \mid N_{1,m}^d = 0, N_{2,m}^d = i, \right. \\
& \quad \left. T_{m+1}^d - T_m^d = x \right] \frac{d}{dx} \Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq x \mid N_{1,m}^d = 0, \right. \\
& \quad \left. N_{2,m}^d = i \right] = \\
& = \Pr \left[N_{1, m+1}^d = 0, N_{2, m+1}^d = j, T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \mid \right. \\
& \quad \left. N_{1,m}^d = 0, N_{2,m}^d = i \right] = Q^d(i, j, t)
\end{aligned}$$

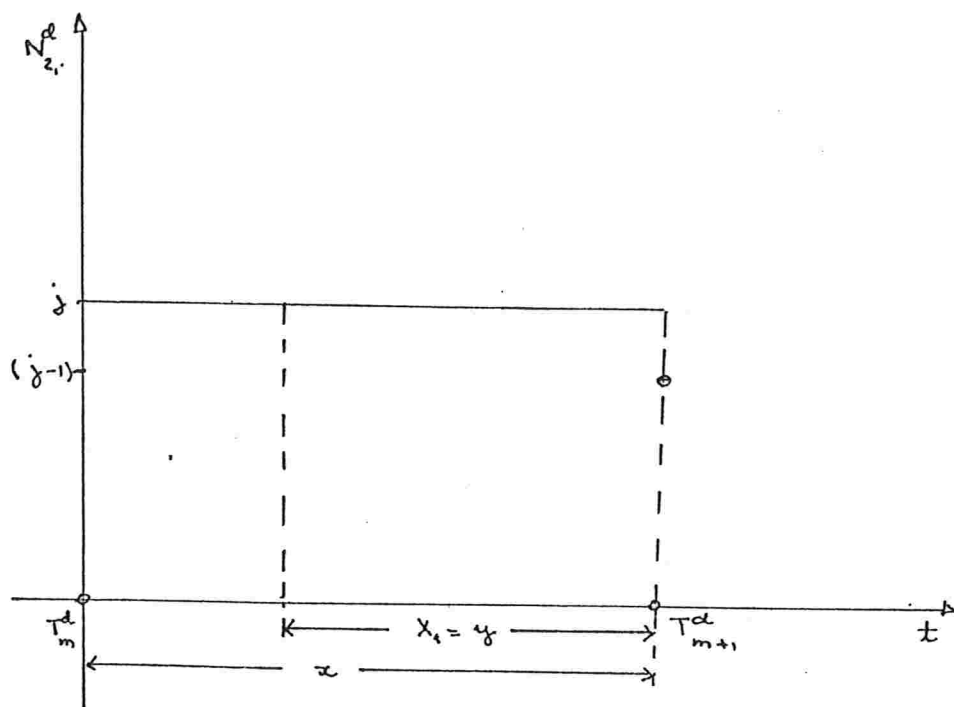
Para obtermos os valores do núcleo de transição, desenvolvemos, os cálculos indicados por (2.1), (2.2) e (2.3), caso a caso:

$$(ii) \quad N_{1,m}^d = 0 ; \quad N_{2,m}^d = 0 ; \quad N_{2,m+1}^d = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



$$\begin{aligned} & \Pr \left[N_{2,m+1}^d = n, T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \mid N_{2,m}^d = 0 \right] = \\ & = \int_0^t \Pr \left[N_{2,m+1}^d = n \mid T_{m+1}^d - T_m^d = x, N_{2,m}^d = 0 \right] \cdot \\ & \quad \cdot \frac{d}{dx} \Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq x \mid N_{2,m}^d = 0 \right] dx = \\ & = \int_0^t \int_0^x \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \cdot \mu e^{-\mu y} \cdot \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy dx = \\ & = \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} \lambda e^{-\lambda y} \left[\int_y^t e^{-\lambda x} dx \right] dy = \\ & = \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} \mu e^{-(\lambda + \mu)y} (1 - e^{-\lambda(t-y)}) dy = \\ & = Q^d(0, n, t) \end{aligned}$$

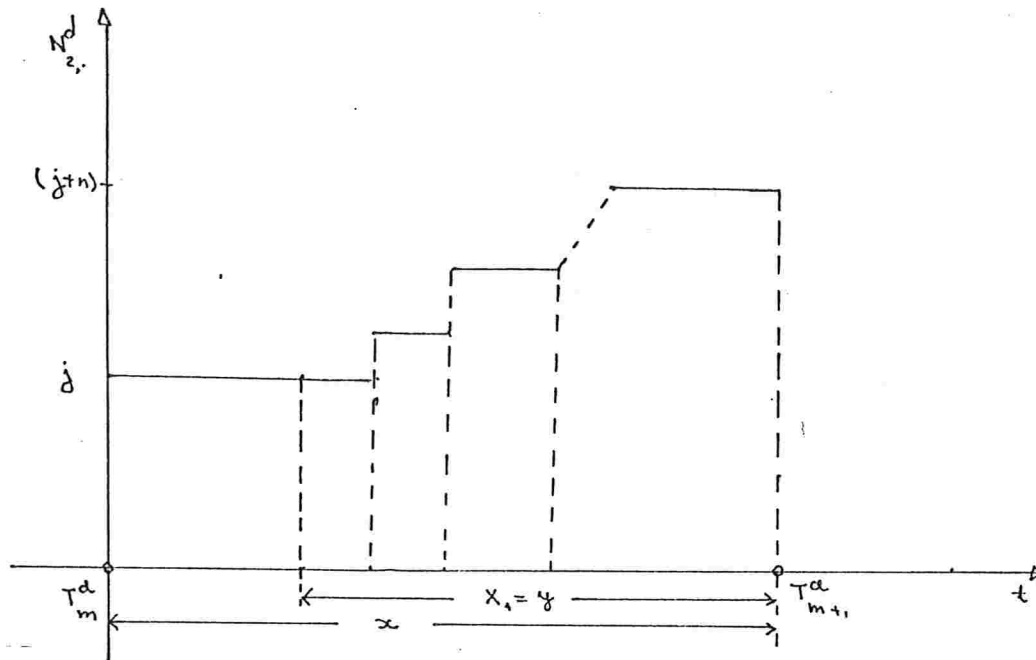
$$(iii) \quad N_{1,m}^d = 0; \quad N_{2,m}^d = j; \quad N_{2,m+1}^d = j-1, \quad j > 0$$



$$\begin{aligned} \Pr \left[N_{2,m+1}^d = j-1, \quad T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \mid N_{2,m}^d = j \right] &= \\ &= \int_0^t \int_0^x e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda(x-y)} \gamma e^{-\gamma(x-y)} dy dx = \\ &= \int_0^t \mu \gamma e^{-\lambda y} e^{-\mu y} e^{(\lambda+\gamma)y} \left[\int_y^t e^{-(\lambda+\gamma)x} dx \right] dy = \\ &= \int_0^t \mu \gamma e^{-(\lambda+\mu)y} \frac{e^{(\lambda+\gamma)y}}{\lambda+\gamma} \left[e^{-(\lambda+\gamma)y} - e^{-(\lambda+\gamma)t} \right] dy = \\ &= \frac{\mu \gamma}{\lambda+\gamma} \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)y} \left[1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)} \right] dy = \\ &= \frac{\mu \gamma}{\mu-\gamma} \left[\frac{1}{\lambda+\gamma} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)t}) - \frac{1}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \right] = \\ &= Q^d(j, j-1, t). \end{aligned}$$

$$(iv) N_{2,m}^d = j; N_{2,m+1}^d = j + n, \quad j > 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso precisamos considerar quando a entrada no servidor principal corresponde a um freguês que está fazendo uma nova tentativa ou a um novo freguês.



$$\begin{aligned} & \Pr \left[N_{2,m+1}^d = j + n, T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \mid N_{2,m}^d = j \right] = \\ & = \int_0^t \int_0^x \frac{(\lambda y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda(x-y)} \gamma e^{-\gamma(x-y)} dy dx + \\ & + \int_0^t \int_0^x \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} \lambda e^{-\lambda(x-y)} e^{-\gamma(x-y)} dy dx = \\ & = \int_0^t \frac{(\lambda y)^{n+1}}{(n+1)!} \mu \gamma e^{-(\lambda+\mu)y} e^{(\lambda+\gamma)y} \left[\int_y^t e^{-(\lambda+\gamma)x} dx \right] dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} \mu \lambda e^{-(\lambda + \mu)y} e^{(\lambda + \gamma)y} \left[\int_0^t e^{-(\lambda + \gamma)x} dx \right] dy = \\
& = \frac{\mu \gamma}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-(\lambda + \mu)y} \left[1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t-y)} \right] dy + \\
& + \frac{\lambda \mu}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^n}{n!} e^{-(\lambda + \mu)y} \left[1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t-y)} \right] dy = \\
& = Q^d(j, j+n, t)
\end{aligned}$$

Pode-se ainda mostrar que efetivamente $Q^d(t)$ é núcleo de transição, ou seja: $Q^d(i, j, t) \geq 0 \quad \forall i, j \in E^d, t \geq 0$.

$$\sum_{j \in E^d} Q^d(i, j, t) \leq 1 \quad \forall i \in E^d; t \geq 0$$

e $\sum_{j \in E^d} Q^d(i, j, t)$ é função crescente em t . □

3. CADEIA FUNDAMENTAL (N_1^d, N_2^d)

Vamos agora considerar a cadeia imersa no processo de renovação Markoviano, $(N_1^d, N_2^d) = \{ N_{1,m}^d, N_{2,m}^d; m = 0, 1, 2, \dots \}$, que conta o número de fregueses no sistema, imediatamente após uma partida.

Teorema 3.1:

A cadeia imersa nos instantes de partida $\{ N_{1,m}^d, N_{2,m}^d; m = 0, 1, 2, \dots \}$ é uma Cadeia de Markov, com espaço de estados $E^d = \{0\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$, e matriz de transição em uma etapa P^d dada por

$$P^d(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > 0, j < i - 1 \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^j & \text{se } i = 0, j = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\mu\gamma}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)} & \text{se } i > 0, j = i - 1 \\ \frac{\lambda(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k & \text{se } i > 0, j = i + k \\ & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Prova:

Que a cadeia imersa é uma cadeia de Markov, segue da definição de Processo de Renovação Markoviano, conforme o Capítulo II, Proposição 2.2.

Para determinarmos a matriz de transição em uma etapa, tomamos o limite do núcleo de transição $Q^d(t)$, quando $t \rightarrow \infty$, e temos

$$P^d(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q^d(i, j, t)$$

e então obtemos a matriz P^d . □

Usando a notação simplificada:

$$C = \frac{\lambda(\lambda + \mu + \gamma)}{(\mu + \gamma)(\lambda + \mu)}$$

$$p_k = P^d(0, k) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P^d(i, i + k) = p_k \cdot C \quad \text{se } i > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_{-1} = P^d(i, i-1) \cdot C^{-1} = \frac{\mu\gamma}{\lambda(\lambda + \mu + \gamma)} \quad i > 0$$

a matriz de transição P^d pode ser reescrita como:

$$P^d = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & \dots & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 & \dots \\ P_{-1} \cdot C & P_0 \cdot C & P_1 \cdot C & \dots \\ & P_{-1} \cdot C & P_0 \cdot C & \dots \\ & & P_{-1} \cdot C & \dots \\ & & & \ddots \\ & 0 & & \dots \end{array} \right] \end{matrix}$$

Proposição 3.2:

A distribuição de equilíbrio π^d para a cadeia de Markov básica (N_1^d, N_2^d) existe e é dada por

$$\pi^d = \pi^d P^d \quad \text{onde}$$

$$\pi_j^d = \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}\right) \left[\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}\right]^j \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

se está satisfeita a condição $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

Da equação de equilíbrio

$$\pi_j^d = \sum_{i \in E^d} \pi_i^d P^d(i, j) \quad \forall j \in E^d$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi_0^d = p_0 \pi_0^d + c_{p-1} \pi_1^d \\ \pi_j^d = p_j \pi_0^d + c \sum_{i=1}^j p_{j-i} \pi_i^d + c \pi_{j+1}^d p_{-1} \end{cases}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

Multiplicando π_j^d por z^j , $0 < |z| < 1$, desenvolvendo os resultados e somando-os termo a termo, obtemos a função geradora

$$G(z) = \pi_0^d \frac{(B(z) - C \cdot B(z) - C \cdot p_{-1} z^{-1})}{1 - CB(z) - C p_{-1} z^{-1}}$$

onde

$$B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda z}$$

Logo, para $z \neq 1$:

$$G(z) = \pi_0^d \frac{\mu \gamma}{\mu \gamma - z \lambda (\lambda + \gamma)}$$

Como $G(z)$ é função geradora da probabilidade estacionária, utilizando os procedimentos habituais obtemos a distribuição estacionária:

$$\pi_0^d = 1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu \gamma}$$

$$\pi_j^d = \pi_0^d \left[\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu \gamma} \right]^j \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\text{se } 0 < \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu \gamma} < 1 .$$

□

4. PROCESSO DE PARTIDA ASSOCIADO (T^d)

Dos resultados obtidos podemos mostrar que os incrementos no Processo de Partida Associado $\{T_m^d : m = 0, 1, 2, \dots\}$ não são independentes. Então os incrementos são correlacionadas e determinamos a expressão da correlação entre dois intervalos sucessivos. Como essa expressão é complexa e não permite uma interpretação direta, obtivemos também alguns resultados numéricos da correlação para então termos idéia sobre o seu comportamento.

Teorema 4.1:

A distribuição de probabilidade do intervalo entre partidas consecutivas, em equilíbrio, dada por

$$\text{Pr} \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \right] = \pi^d Q^d(t) U, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.1)$$

onde U é o vetor coluna de 1's, vale:

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \right] = & \frac{\mu\gamma - \lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \gamma)} (1 - e^{-\lambda t}) + \\ & + \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \lambda - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) - \\ & - \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda - \gamma)(\mu - \lambda)} (1 - e^{-\mu t}) . \end{aligned}$$

Prova:

A primeira parte do teorema segue da definição de Processo de Renovação Markoviano, conforme Capítulo II, Proposição 2.7.

Por outro lado, sendo π^d a distribuição estacionária da Cadeia Imersa (Proposição 3.2), e $Q^d(t)$ o núcleo de tran

sição do processo (Teorema 2.1), podemos determinar o valor da função de distribuição a partir da equação (4.1).

$$\begin{aligned}
 F^d(t) &= \Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq t \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^d Q^d(0, j, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^d Q^d(i, i-1, t) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_i^d Q^d(i, i+k, t) = \\
 &= \pi_0^d \left[\frac{\mu}{\mu-\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) - \frac{\lambda}{\mu-\lambda} (1 - e^{-\mu t}) \right] + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0^d \left[\frac{\lambda(\lambda+\gamma)}{\mu\gamma} \right]^i \cdot \left[\frac{\mu\gamma}{\lambda+\gamma} \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)y} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)}) dy \right] + \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0^d \left[\frac{\lambda(\lambda+\gamma)}{\mu\gamma} \right]^i \cdot \\
 &\cdot \left[\frac{\mu\gamma}{\lambda+\gamma} \int_0^t \frac{(\lambda\gamma)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-(\lambda+\mu)y} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)}) dy + \right. \\
 &\left. + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\gamma} \int_0^t \frac{(\lambda\gamma)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)y} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)}) dy \right] =
 \end{aligned}$$

Invertendo-se a ordem da soma e da integral, e desenvolvendo os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned}
 &= \pi_0^d \left\{ \frac{\mu}{\mu-\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) - \frac{\lambda}{\mu-\lambda} (1 - e^{-\mu t}) + \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda(\lambda+\gamma)}{\mu\gamma} \right]^i \left[\frac{\mu}{\mu-\lambda-\gamma} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)t}) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\lambda + \gamma}{\mu - \lambda - \gamma} (1 - e^{-\mu t}) \right] \} = \\
 = \frac{\mu\gamma - \lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \lambda)} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \lambda - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) - \\
 - \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda - \gamma)(\mu - \lambda)} (1 - e^{-\mu t})$$

E sujeito às condições de equilíbrio $0 < \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$, podemos mostrar que $F^d(\cdot)$ satisfaz as condições de função de distribuição. □

Corolário 4.2:

O intervalo entre partidas sucessivas tem esperança e variância dadas por:

$$E \left[T_{m+1}^d - T_m^d \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var} \left[T_{m+1}^d - T_m^d \right] = \frac{\mu\gamma + \lambda\mu - 2\lambda^2}{\mu\lambda^2(\lambda + \gamma)}$$

se está satisfeita a condição de equilíbrio $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

O cálculo da esperança segue da definição:

$$E \left[T_{m+1}^d - T_m^d \right] = \int_0^{\infty} \left[1 - F^d(t) \right] dt = \frac{1}{\lambda} .$$

$$\text{Var} \left[T_{m+1}^d - T_m^d \right] = E \left[T_{m+1}^d - T_m^d \right]^2 - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu\gamma - \lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \lambda)} \cdot \frac{2}{\lambda^2} - \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda - \gamma)} \cdot \frac{2}{\mu^2} + \\
&+ \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\gamma(\mu - \lambda - \gamma)} \cdot \frac{2}{(\lambda + \gamma)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \\
&= \frac{\mu\gamma + \lambda\mu - 2\lambda^2}{\mu\lambda^2(\lambda + \gamma)}
\end{aligned}$$

Sob as condições de equilíbrio, verificamos de fato que a variância é positiva:

$$\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \mu > \lambda$$

e
$$\mu\gamma > \lambda(\lambda + \gamma)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mu\gamma + \lambda\mu &> \lambda^2 + \lambda\gamma + \lambda\mu > \lambda^2 + \lambda\gamma + \lambda^2 = \\
&= 2\lambda^2 + \lambda\gamma > 2\lambda^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposição 4.3:

A distribuição conjunta para intervalos consecutivos entre partidas, em equilíbrio, dada por: $\forall t_1, t_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
\Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq t_1, T_{m+2}^d - T_{m+1}^d \leq t_2 \right] &= \\
= \pi^d Q^d(t_1) Q^d(t_2) U
\end{aligned}$$

onde U é o vetor coluna de 1's, vale:

$$\begin{aligned}
F^d(t_1, t_2) &= \Pr \left[T_{m+1}^d - T_m^d \leq t_1, T_{m+2}^d - T_{m+1}^d \leq t_1 \right] = \\
&= \left[1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right] \cdot \left[(1 - e^{-\lambda t_1}) - \frac{\lambda}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) + \frac{\lambda}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) \right] \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\mu}{\mu - \lambda} (1 - e^{-\lambda t_2}) - \frac{\lambda}{\mu - \lambda} (1 - e^{-\mu t_2}) \right] + \\
&+ \left[\frac{\lambda}{\mu - \lambda} (1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}) (1 - e^{-\lambda t_1}) - \right. \\
&- \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda - \gamma)} (1 - e^{-\mu t_1}) + \frac{\lambda}{\mu - \gamma} (1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}) \cdot \\
&\cdot (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) + \frac{\lambda^2(\lambda\mu + \mu^2 + \mu\gamma - (\lambda + \gamma)^2)}{\mu\gamma(\mu - \lambda - \gamma)(\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) \left. \right] \cdot \left[\frac{\mu}{\mu - \lambda - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) - \right. \\
&- \frac{\lambda + \gamma}{\mu - \lambda - \gamma} (1 - e^{-\mu t_2}) \left. \right] \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Prova:

A primeira parte do teorema segue do Capítulo II, Corolário 2.8.

Executando as operações indicadas, substituindo os valores da distribuição estacionária π^d e do núcleo de transição Q^d , obtemos a expressão para $F^d(t_1, t_2)$. □

Corolário 4.4:

A correlação entre intervalos sucessivos entre partidas consecutivas é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Corr} \left[T_{m+1}^d - T_m^d, T_{m+2}^d - T_{m+1}^d \right] &= \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma)} \right] \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right] + \right. \\ &+ \left[\frac{1}{\mu - \lambda} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) - \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)(\mu - \lambda - \gamma)} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)(\mu - \gamma)} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) + \frac{\lambda^2}{\mu\gamma(\mu - \gamma)} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\lambda^2 \mu}{\gamma(\mu - \lambda - \gamma)(\mu - \gamma)(\lambda + \gamma)} \right] \cdot \left[\frac{1}{\lambda + \gamma} + \frac{1}{\mu} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\lambda^2} \right\} \times \left\{ \frac{\mu\lambda + \mu\gamma - 2\lambda^2}{\mu\lambda^2(\lambda + \gamma)} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

se está satisfeita a desigualdade $0 < \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

A função covariância para intervalos consecutivos pode ser encontrada a partir da Proposição 4.3. □

Na tabela 4.1 damos alguns resultados computacionais para a função de correlação, para alguns valores de λ , μ e γ .

λ	μ	γ	ρ	Var	Corr x 10^{-3}
0.2	10.0	0.1	0.060	24.33	4.21
1.0	10.0	82.0	0.101	1.00	0.97
1.0	10.0	5.1	0.120	0.97	11.34
0.2	2.0	1.0	0.120	24.17	11.49
0.2	1.0	10.0	0.204	24.80	2.57
0.2	1.0	1.1	0.236	23.46	17.65
0.2	2.0	0.1	0.300	21.67	16.32
1.0	10.0	0.5	0.300	0.87	16.32
3.0	10.0	17.0	0.353	0.10	20.92
3.0	10.0	5.1	0.476	0.09	36.22
5.0	10.0	82.0	0.530	0.11	8.99
5.0	10.0	50.0	0.550	0.11	13.64
1.0	20.0	0.1	0.550	0.91	1.95
0.2	2.0	0.03	0.767	20.65	2.91
0.2	0.3	1.0	0.800	19.44	14.29
9.0	10.0	300.0	0.927	0.01	1.03
7.0	10.0	17.0	0.988	0.01	1.69
5.0	5.1	500.0	0.990	0.04	5.11×10^{-2}
3.0	10.0	1.3	0.992	0.06	0.64
5.0	5.1	300.0	0.997	0.04	2.96×10^{-2}

Tabela 4.1: Alguns resultados sobre a Var $\left[T_{m+1}^d - T_m^d \right]$ e a

$$\text{Corr} \left[T_{m+1}^d - T_m^d, T_{m+2}^d - T_{m+1}^d \right] \text{ onde } \rho = \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma}.$$

5. CONCLUSÕES

Considerando que o nosso sistema de Filas com Re-Apresentações Atrasadas é um sistema sem perdas, temos a solução clássica para a probabilidade de equilíbrio do processo Comprimento Conjunto de Filas, imerso nos instantes de partida (secção 3). Também são dadas as condições para esses resultados de equilíbrio.

É de interesse para nós notar que a fila atrasadora pode ser interpretada de dois modos: como um gerador do processo de chegada ao servidor principal através do termo $(\lambda + \gamma)$ na equação (3.1), e como um gerador do tempo de serviço, com o termo $\frac{\lambda}{\gamma}$ na mesma equação.

Temos ainda a estrutura probabilística para o comprimento de fila conjunta, e para o processo de intervalo entre partidas. A partir daqui, todas as questões concernentes a cada um desses processos podem ser determinadas considerando os processos marginais desses processos conjuntos. Em particular, vemos como informações a respeito da marginal $\{N_{2,m}^d : m = 0, 1, 2, \dots\}$ são obtidas na equação (3.1), e como são encontradas informações a respeito de $\{T_m^d : m = 0, 1, 2, \dots\}$ na secção 4.

Da análise numérica, observamos que a correlação entre intervalos entre partidas consecutivas é bastante pequena, da ordem de 4×10^{-2} . Muito interessante foi não termos encontrado nenhuma correlação negativa nas várias centenas de resultados numéricos analisados.

PROCESSO DE ENTRADA

Um freguês que entra no sistema só sairá dele depois de atendido pelo servidor principal. Se ele não consegue ser atendido logo que chega, deverá se re-apresentar ao servidor principal tantas vezes quantas forem necessárias até encontrá-lo desocupado e então ser servido. Podemos então analisar o fluxo de entrada dos fregueses no servidor principal, notando que corresponde à uma parcela da superposição do Processo de Chegada e do processo imerso nos instantes de saída de fregueses do segundo servidor, que não são independentes entre si (Figura 1.1).

Da análise do processo tridimensional (N_1^i, N_2^i, T^i) imerso nos instantes de entrada de fregueses no servidor principal, temos que o Processo de Entrada é um processo de renovação Markoviano, determinamos seu núcleo de transição e obtivemos os resultados sobre os processos derivados: da cadeia de Markov fundamental, a sua probabilidade de transição e a distribuição de equilíbrio; e mostramos que os instantes em que ocorrem entradas sucessivas não formam um processo de renovação, determinando a correlação entre intervalos sucessivos.

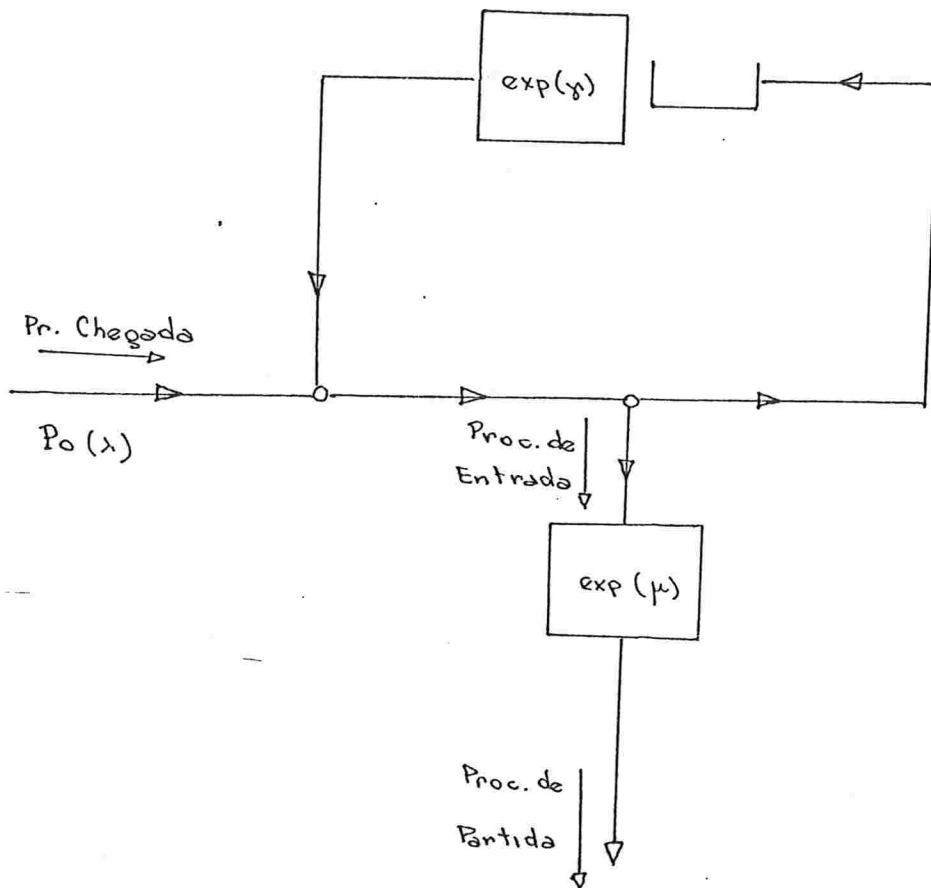


Figura 1.1: Processo de Entrada (N_1^i, N_2^i, T^i)

1. NOTAÇÃO

Sejam

$N_{j,m}^i = N_j(T_m^i)$: número de fregueses presentes na fila $j = 1, 2$, imediatamente após a m -ésima entrada no servidor principal.

T_m^i : instante em que ocorre a m -ésima entrada no servidor principal.

X_j : tempo de serviço gasto com um freguês no servidor j , $j = 1, 2$.

$A(t)$: número de novas chegadas que ocorrem durante o intervalo de tempo $(0, t]$.

$U_{1,m} = U_1$: tempo que decorre entre o m -ésimo fim de serviço no servidor principal e a próxima chegada externa.

$U_{2,m} = U_2$: tempo que decorre entre o m -ésimo fim de serviço no servidor principal e o próximo fim de serviço no segundo servidor, gerando uma re-apresentação.

2. O PROCESSO TRIDIMENSIONAL (N_1^i, N_2^i, T^i)

Considerando que

$$N_{1,m}^i = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$N_{2,m+1}^i = \begin{cases} N_{2,m}^i + A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i) - 1_{\{U_1 > U_2\}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{se } N_{2,m}^i > 0 \\ \\ A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i) - 1_{\{U_1 > U_2\}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{se } N_{2,m}^i = 0, \quad [A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i)] > 0 \\ \\ N_{2,m}^i \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{se } N_{2,m}^i + [A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i)] = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$T_{m+1}^i - T_m^i = \begin{cases} X_1 + \min(U_1, U_2) & \text{se } N_{2,m}^i + A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i) > 0 \\ \\ X_1 + U_1 & \text{se } N_{2,m}^i + A(T_m^i + X_1) - A(T_m^i) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

obtemos os seguintes resultados

Teorema 2.1:

O processo $\{N_{1,m}^i, N_{2,m}^i, T_m^i : m = 0, 1, 2, \dots\}$ imerso nos instantes de entrada de fregueses no servidor principal é um Processo de Renovação Markoviano, com espaço de estado $E^i = \{1\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$ e núcleo de transição $Q^i(t) = (Q^i(j, k, t))$ dado por

$$Q^i(j, j+k, t) =$$

- (i) para $j = 0, 1, 2, 3, \dots ; k = 0, 1, 2, \dots ,$
 $(j, k) \neq (0, 0), t \geq 0$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)y} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)}) dy +$$

$$+ \frac{\gamma\mu}{\lambda+\gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-(\lambda+\mu)y} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)(t-y)}) dy.$$

- (ii) para $j = 0, k = 0, t \geq 0$

$$= \frac{\lambda^2\gamma(\mu-\gamma) - \lambda\mu^2(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2(\mu-\gamma)^2} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) +$$

$$+ (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\lambda\mu\gamma}{(\lambda+\gamma)(\mu-\gamma)^2} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)t}) +$$

$$+ t \cdot \frac{\lambda\mu\gamma}{(\lambda+\mu)(\mu-\gamma)} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

- (iii) para $j = 1, 2, 3, \dots ; k = -1, t \geq 0$

$$= \frac{\mu\gamma}{\mu-\gamma} \left[\frac{1}{\lambda+\gamma} (1 - e^{-(\lambda+\gamma)t}) - \frac{1}{\lambda+\mu} (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \right]$$

$$(iv) = 0 \quad \text{para } j > 1, \quad k < -1.$$

onde $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\gamma > 0$ são os parâmetros de chegada de novos fregueses, de serviço no servidor principal e no servidor secundário, respectivamente.

Prova:

Considerando-se as equações (2.1), (2.2) e (2.3), é fácil mostrar que

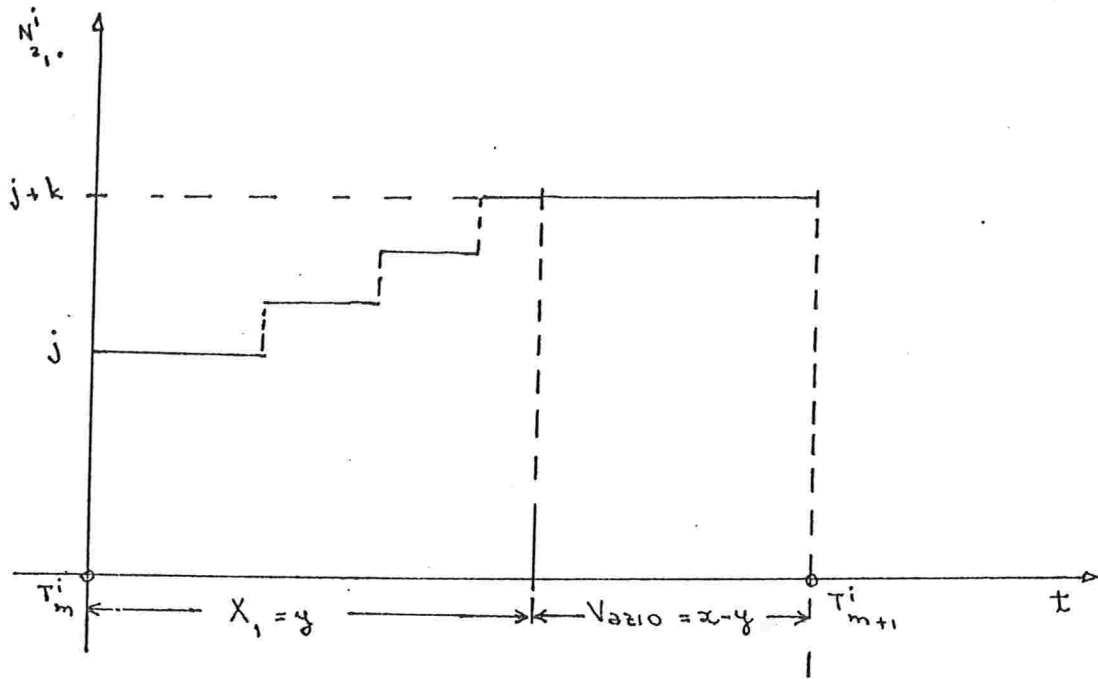
$$\begin{aligned} & \Pr \left[N_{1,m+1}^i = 1, N_{2,m+1}^i = k, T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \mid N_{1,0}^i = \dots \right. \\ & \quad \dots = N_{1,m}^i = 1, N_{2,0}^i, N_{2,1}^i, \dots, N_{2,m}^i = j, T_0^i, \dots, \\ & \quad \left. \dots, T_m^i \right] = \\ & = \Pr \left[N_{1,m+1}^i = 1, N_{2,m+1}^i = k, T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \mid \right. \\ & \quad \left. N_{1,m}^i = 1, N_{2,m}^i = j \right] = \\ & = Q^i(j, k, t) \end{aligned}$$

Para termos os valores de $Q^i(j, k, t)$ desenvolve-mos os cálculos indicados em (2.1), (2.2) e (2.3) caso a caso:

$$(i) \quad N_{1,m}^i = 1; \quad N_{2,m}^i = j, \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad N_{2,m+1}^i = j+k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, (j, k) \neq (0, 0); \quad t \geq 0 :$$

$$\Pr \left[N_{2,m+1}^i = j+k, \quad T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \mid N_{2,m}^i = j \right] =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t \int_0^x \mu e^{-\mu y} \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-\lambda y} \lambda e^{-(\lambda + \gamma)(x - y)} dy dx + \\
 &+ \int_0^t \int_0^x \mu e^{-\mu y} \frac{(\lambda y)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda y} \gamma e^{-(\lambda + \gamma)(x - y)} dy dx = \\
 &= \frac{\lambda \mu}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^k}{k!} e^{-(\lambda + \mu)y} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t - y)}) dy + \\
 &+ \frac{\gamma \mu}{\lambda + \gamma} \int_0^t \frac{(\lambda y)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-(\lambda + \mu)y} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)(t - y)}) dy = \\
 &= Q^i(j, j + k, t)
 \end{aligned}$$

$$(ii) \quad N_{2,m}^i = 0, \quad N_{2,m+1}^i = 0, \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[N_{2,m+1}^i = 0, T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \mid N_{2,m}^i = 0 \right] &= \\ &= \int_0^t \int_0^x \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy dx + \\ &+ \int_0^t \int_0^x \mu e^{-\mu y} \lambda y e^{-\lambda y} \gamma e^{-(\lambda+\gamma)(x-y)} dy dx = \end{aligned}$$

invertendo a ordem das integrais e resolvendo-as:

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda^2 \gamma (\mu - \gamma) - \lambda \mu^2 (\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)^2 (\mu - \gamma)^2} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \\ &+ (1 - e^{\lambda t}) + \frac{\lambda \mu \gamma}{(\lambda + \gamma) (\mu - \gamma)^2} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) + \\ &+ t \cdot \frac{\lambda \mu \gamma}{(\lambda + \mu) (\mu - \gamma)} e^{-(\lambda + \mu)t} = \\ &= Q^i(0, 0, t) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad N_{2,m}^i = j, \quad N_{2,m+1}^i = j - 1, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[N_{2,m+1}^i = j - 1, T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \mid N_{2,m}^i = j \right] &= \\ &= \int_0^t \int_0^x \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y} \gamma e^{-(\lambda + \gamma)(x-y)} dy dx = \\ &= \frac{\mu \gamma}{\mu - \gamma} \left[\frac{1}{\lambda + \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) - \frac{1}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) \right] = \\ &= Q^i(j, j - 1, t) \end{aligned}$$

(iv) Nos casos complementares

$$Q^i(j, j+k, t) = 0.$$

Pode-se ainda mostrar que $Q^i(j, j+k, t)$ é efetivamente núcleo de transição. □

3. CADEIA FUNDAMENTAL (N_1^i, N_2^i)

Vamos então considerar a cadeia imersa no Processo de Entrada (N_1^i, N_2^i, T^i) :

Teorema 3.1:

A cadeia imersa nos instantes de entrada no servidor principal $\{N_{1,m}^i, N_{2,m}^i : m = 0, 1, 2, \dots\}$, é uma Cadeia de Markov, com espaço de estados $E^i = \{1\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$, e matriz de transição em uma etapa P^i dada por:

$$P^i(j, j+k) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k & j = 0, 1, 2, \dots; \\ & k = 0, 1, 2, \dots \\ & (j, k) \neq (0, 0) \\ \frac{\lambda\mu\gamma}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} & j = 0, \quad k = 0 \\ \frac{\mu\gamma}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)} & j = 1, 2, 3, \dots; \\ & k = -1 \end{cases}$$

Prova:

Que a cadeia imersa é de Markov, segue da defini

ção do Processo de Renovação Markoviano, dado na Proposição II.3.3.

A matriz de transição em uma etapa é obtida a partir do núcleo de transição. Fazendo-se o limite quando $t \rightarrow \infty$:

$$P^i(j, j+k) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q^i(j, j+k, t)$$

obtemos a matriz P^i .



Com a notação simplificada

$$A = \frac{\mu(\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma)}$$

$$\bar{q}_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\gamma}{\lambda + \mu + \gamma} = P^i(0, 0) \cdot A^{-1}$$

$$q_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{k+1} = P^i(j, j+k) A^{-1},$$

$$j = 0, 1, \dots, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(j, k) \neq (0, 0)$$

$$q_{-1} = \frac{\gamma}{\lambda + \mu + \gamma} = P^i(j, j-1) A^{-1}, j = 1, 2, 3, \dots$$

a matriz de transição P^i pode ser reescrita como:

$$P^i = A \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & q_2 & \dots \\ & q_{-1} & q_0 & q_1 & \dots \\ & & q_{-1} & q_0 & \dots \\ & & & q_{-1} & q_0 \\ & & & & \dots \\ & & & & \dots \\ & & & & \dots \end{bmatrix}$$

Proposição 3.2:

A distribuição de equilíbrio π^i para a Cadeia de Markov fundamental (N_1^i, N_2^i) existe e é dada por

$$\pi^i = \pi^i P^i \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \pi_0^i = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) \\ \pi_j^i = \frac{\lambda^2(\lambda + \mu + \gamma)}{\mu^2\gamma} \left(\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right)^{j-1} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

se está satisfeita a condição $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

Da equação de equilíbrio

$$\pi_j^i = \sum_{k \in E^i} \pi_k^i P^i(k, j)$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi_0^i = A \left[\pi_0^i \bar{q}_0 + \pi_1^i q_{-1} \right] \\ \pi_j^i = A \cdot \left[\sum_{k=0}^{j+1} \pi_k^i q_{j-k} \right] \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Multiplicando as equações de (3.2) por z^j , $0 < |z| < 1$, $j = 0, 1, 2, \dots$ e somando-se os resultados termo a termo, obtemos a função geradora.

$$G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^i z^j = \pi_0^i \frac{A \cdot (\bar{q}_0 - q_0 - q_{-1} z^{-1})}{1 - A \cdot B(z)}$$

onde

$$B(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} q_k z^k = \frac{(\gamma + \lambda z)(\lambda + \mu)}{z(\lambda + \mu + \gamma)(\lambda + \mu - \lambda z)}$$

Então, para $z \neq 1$:

$$G(z) = \pi_0^i \frac{\mu\gamma(\lambda + \mu - \lambda z)}{(\lambda + \mu) [\mu\gamma - \lambda z(\lambda + \gamma)]}$$

Como $G(z)$ é a função geradora da probabilidade estacionária, utilizando-se os procedimentos habituais obtemos a distribuição π^i , dada por (3.1). \square

4. PROCESSO DE ENTRADA ASSOCIADO (T^i)

Dos resultados obtidos podemos mostrar que os intervalos entre entradas sucessivas são homogêneas, mas não são independentes entre si. Então esses incrementos são correlacionados. Devido à complexidade da função de correlação, analisamos também alguns resultados numéricos para melhor entendimento da função.

Teorema 4.1:

A distribuição do intervalo entre entradas suces
sivas, em equilíbrio, dada por

$$\text{Pr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \right] = \pi^i Q^i(t) U \quad (4.1)$$

onde U é o vetor coluna de 1's, vale:

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \leq t \right] &= F^i(t) = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} \right) \left[(1 - e^{-\lambda t}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) \right] - \frac{\lambda + \gamma}{\mu - \lambda - \gamma} (1 - e^{-\mu t}) + \\ &+ \frac{\lambda(\lambda + \gamma)(\mu^2 - \lambda(\lambda + \gamma))}{\mu\gamma(\mu - \gamma)(\mu - \lambda - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t}) . \end{aligned}$$

Prova:

A equação (4.1) segue da definição de Processo de Renovação Markoviano, conforme a Proposição II.3.8.

Por outro lado, sendo π^i a distribuição estacionária da cadeia fundamental (Proposição 3.2) e $Q^i(t)$ o núcleo de transição do Processo de Entrada (Teorema 2.1), podemos determinar o valor da função de distribuição $F^i(t)$ a partir da equação (4.1):

$$\begin{aligned} F^i(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{\infty} \pi_j^i Q^i(j, j+k, t) = \\ &= \pi_0^i \left[Q^i(0, 0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} Q^i(0, k, t) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^i \left[Q^i(j, j-1, t) + \sum_{k=0}^{\infty} Q^i(j, j+k, t) \right]$$

Substituindo os valores de π_j^i e $Q^i(j, j+k, t)$ e resolvendo as integrais, obtemos o resultado apresentado no enunciado.

Podemos ainda mostrar que sujeito à condição de equilíbrio $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$, $F^i(t)$ satisfaz às condições de função de distribuição.

□

Corolário 4.2:

O intervalo entre entradas sucessivas tem esperança e variância dadas por:

$$E \left[T_{m+1}^i - T_m^i \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \right] = \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{\lambda^2\mu} + \frac{\lambda\gamma}{\mu^2(\lambda + \mu)} +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{\lambda(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma)}$$

se está satisfeita a condição $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

O cálculo da esperança segue da definição

$$E \left[T_{m+1}^i - T_m^i \right] = \int_0^{\infty} \left[1 - F^i(t) \right] dt = \frac{1}{\lambda}$$

e o valor da variância é encontrado a partir de:

$$\text{Var} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \right] = \mathbf{E} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \right]^2 - \frac{1}{\lambda^2} \quad \square$$

Proposição 4.3:

A distribuição conjunta de intervalos consecutivos entre entradas, em equilíbrio, é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \leq t_1, T_{m+2}^i - T_{m+1}^i \leq t_2 \right] &= (4.2) \\ &= \pi^i Q^i(t_1) Q^i(t_2) U \end{aligned}$$

onde U é o vetor coluna de 1's, $\forall t_1, t_2 \geq 0$, e vale:

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i \leq t_1, T_{m+2}^i - T_{m+1}^i \leq t_2 \right] &= F^i(t_1, t_2) = \\ &= \frac{\mu^2 \gamma - \lambda^2 (\lambda + \mu + \gamma)}{\gamma (\mu - \lambda - \gamma)} \left[\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\lambda t_1}) - \frac{1}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{\mu (\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) \right] \cdot \left[(1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda + \gamma}{\mu} (1 - e^{-\mu t_2}) \right] + \\ &\quad + \frac{\mu^2 \gamma - \lambda^2 (\lambda + \mu + \gamma)}{(\lambda + \gamma) (\mu - \gamma)} \left[\frac{\lambda + \gamma}{\lambda + \mu} t_1 e^{-(\lambda + \mu)t_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda + \gamma) (\gamma - \lambda - 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2 (\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) \right] \cdot \left[\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\lambda t_2}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) + \frac{\gamma}{\mu(\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_2}) \Big] + \\
& + \frac{\lambda^2(\mu\gamma - \lambda^2 - \lambda\gamma)(\lambda + \mu + \gamma)}{\mu\gamma(\lambda + \gamma)(\mu - \gamma)} \left[(1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) - \right. \\
& - \left. \frac{\lambda + \gamma}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) \right] \cdot \left[\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\lambda t_2}) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) + \frac{\gamma}{\mu(\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_2}) \right] + \\
& + \frac{\mu^2}{(\mu - \lambda - \gamma)^2} \left[(1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_1}) - \frac{\lambda + \gamma}{\mu} (1 - e^{-\mu t_1}) \right] \cdot \\
& \cdot \left[(1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) - \frac{\lambda + \gamma}{\mu} (1 - e^{-\mu t_2}) \right] + \\
& + \frac{\mu^2\gamma - \lambda^2(\lambda + \mu + \gamma)}{\mu\gamma} \left[(1 - e^{-\lambda t_1}) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_1}) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\frac{1}{\mu} (1 - e^{-\lambda t_2}) - \frac{1}{\mu - \gamma} (1 - e^{-(\lambda + \gamma)t_2}) + \right. \\
& + \left. \frac{\gamma}{\mu(\mu - \gamma)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t_2}) \right].
\end{aligned}$$

Prova:

A equação (4.2) segue diretamente do Corolário II.

3.9.

Executando as operações indicadas na equação (4.2), substituindo a distribuição π^i e o núcleo de transição $Q^i(t)$ por

seus valores, obtemos a expressão para $F^i(t_1, t_2)$.



Corolário 4.4:

A correlação entre intervalos sucessivos de entradas consecutivas é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Corr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i, T_{m+2}^i - T_{m+1}^i \right] &= \\ &= \left\{ \frac{\mu\gamma - \lambda(\lambda + \gamma)}{\mu^2(\lambda + \gamma)} \left[\frac{\mu}{\lambda(\lambda + \gamma)} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda^2} + \frac{\mu}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\mu^2\gamma}{(\lambda + \gamma)(\lambda + \mu)^3} + \frac{(\lambda + \mu + \gamma)^2}{\left[\mu\gamma - \lambda(\lambda + \gamma) \right](\lambda + \gamma)} \right] - \frac{1}{\lambda^2} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{\lambda^2\mu} + \frac{\lambda\gamma}{\mu^2(\lambda + \mu)} + \frac{\gamma^2}{\lambda(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma)} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

se está satisfeita a condição $\frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Prova:

A função de correlação pode ser calculada a partir da Proposição 4.3.



Na Tabela 4.1 damos alguns resultados numéricos para a função de correlação, para alguns valores de λ , μ e γ . A fim de compararmos com o Processo de Partida, utilizamos os mesmos valores de λ , μ e γ da Tabela IV.4.1.

λ	μ	γ	ρ	Var.	Corr x 10^{-3}
0.2	10.0	0.1	0.060	2.47	41.92
1.0	10.0	82.0	0.101	81.24	0.093
1.0	10.0	5.1	0.120	4.98	3.13
0.2	2.0	1.0	0.120	24.42	16.08
0.2	1.0	10.0	0.204	242.52	2.09
0.2	1.0	1.1	0.236	26.06	28.03
0.2	2.0	0.1	0.300	2.33	158.13
1.0	10.0	0.5	0.300	0.47	31.63
3.0	10.0	17.0	0.353	1.73	2.45
3.0	10.0	5.1	0.476	0.49	8.30
5.0	10.0	82.0	0,530	8.60	0.53
5.0	10.0	50.0	0.550	5.21	0.90
1.0	20.0	0.1	0.550	0.09	18.64
0.2	2.0	0.03	0.767	0.68	88.95
0.2	0.3	1,0	0.800	21.11	28.95
9.0	10.0	300.0	0.927	3.49	0.032
7.0	10.0	17.0	0.988	0.28	0.12
5.0	5.1	500.0	0.990	19.71	2.52×10^{-3}
3.0	10.0	1.3	0.992	0.11	0,39
5,0	5,1	300.0	0.997	11.79	1.45×10^{-3}

Tabela 4.1 - Alguns Resultados Sobre a Var $\left[T_{m+1}^i - T_m^i \right]$ e a

$$\text{Corr} \left[T_{m+1}^i - T_m^i, T_{m+2}^i - T_{m+1}^i \right] \text{ onde } \rho = \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} .$$

5. CONCLUSÕES

O fluxo de fregueses que procuram atendimento no servidor principal é uma parcela de superposição do Processo de Chegada e do Processo de Saída, o processo formado pelo fluxo de fregueses provenientes do segundo servidor. A cada instante, o Processo de Entrada é apenas uma parcela desse processo superposto, mas não devemos esquecer que todos os fregueses, mais cedo ou mais tarde, serão atendidos pelo servidor principal, se o sistema estiver em equilíbrio.

Podemos então notar que o tempo médio entre entradas sucessivas é $\frac{1}{\lambda}$ (Corolário 4.2), e coincide com o tempo médio entre chegadas, indicando que, apesar da presença de fregueses na fila atrasadora, o fluxo de fregueses que se apresentam ao servidor principal em média não se altera, se $\rho = \frac{\lambda(\lambda + \gamma)}{\mu\gamma} < 1$.

Obtivemos também a estrutura probabilística para o comprimento de fila conjunta (seção 3) e para o processo de entradas associado (seção 4). Sobre o processo $\{T_m^i : m = 0, 1, 2, \dots\}$ concluímos que os intervalos entre entradas são homogêneos. A correlação entre intervalos sucessivos de entradas foi determinada (Corolário 4.4) e podemos verificar que ela é sempre positiva. O comportamento amostral da correlação apresenta-se de acordo com os resultados gerais, sendo muito pequenos, da ordem de 2×10^{-3} .

As correlações entre entradas consecutivas e as correlações entre partidas consecutivas têm o mesmo comportamento com a variação de ρ , taxa de ocupação do sistema.

OS PROCESSOS DE ENTRADA E SAÍDA DA FILA SECUNDÁRIA

Neste capítulo analisamos os processos de fluxo de fregueses que entram e saem do servidor secundário (Figura 1.1). O processo de entrada no servidor secundário é identificado como o Processo de Transbordamento ao servidor principal, imerso nos instantes em que fregueses procuram atendimento no servidor principal e o encontram ocupado; e o processo imerso nos instantes de saída de fregueses do servidor secundário é o Processo de Saída, e que se compõe com os fregueses que chegam de fora para formar o fluxo total de fregueses que procuram ser atendidos no servidor principal.

Mostramos que o Processo de Transbordamento $(N_1^{OV}, N_2^{OV}, T^{OV})$ é um processo de renovação Markoviano. Determinamos o núcleo de transição do processo e a probabilidade de transição em uma etapa da cadeia imersa. Porém não determinamos a expressão analítica da distribuição de probabilidade da cadeia imersa e nem dos intervalos entre transbordamentos consecutivos, porque os cálculos envolvidos são muito longos (Parte A).

Na Parte B, mostramos que o Processo de Saída (N_1^O, N_2^O, T^O) é também um processo de renovação Markoviano. Determinamos a distribuição do tempo entre saída consecutivas, conhecido o número de fregueses no sistema no início do intervalo. Entretanto a probabilidade de transição da cadeia imersa, conhecido o tempo gasto entre as transições consecutivas observadas,

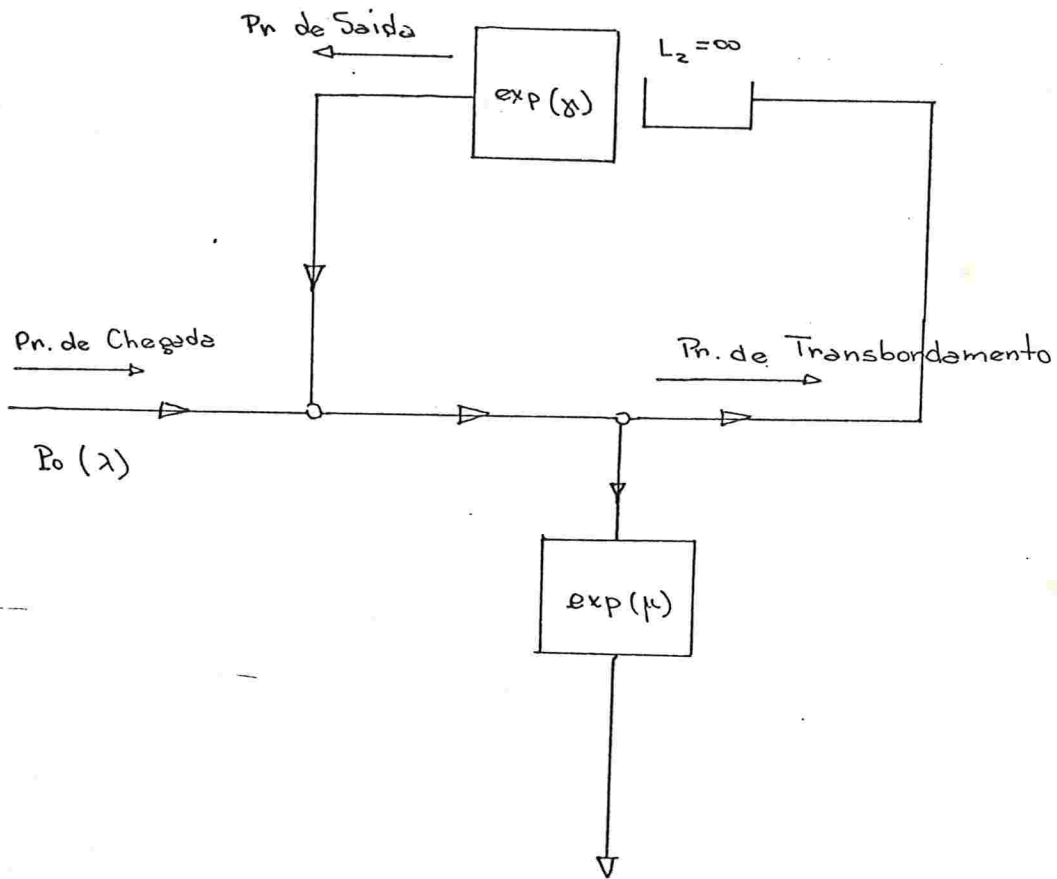


Figura 1.1: Processos de Transbordamento ($N_1^{ov}, N_2^{ov}, T^{ov}$) e de Saída (N_1^o, N_2^o, T^o)

não pode ser calculada pois depende do Processo de Transbordamento, e da distribuição conjunta dos Processos de Entrada e de Partida do servidor principal, que não foi determinada por nós.

Por isso deixamos de determinar o núcleo de transição do processo, e conseqüentemente apenas nomeamos os resultados sobre os processos marginais do Processo de Saída.

PARTE A: Processo de Transbordamento

1. NOTAÇÃO

T_m^{OV} : instante em que ocorre o m-ésimo transbordamento do servidor principal, $m = 0, 1, 2, \dots$

$N_{j,m}^{OV} = N_j(T_m^{OV} -)$: número de fregueses presentes na fila j , $j = 1, 2$, imediatamente antes da ocorrência do m-ésimo transbordamento.

Definimos também o processo $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$ que conta o número de serviços completados no segundo servidor durante o intervalo $[0, t)$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. O PROCESSO TRIDIMENSIONAL $(N_1^{OV}, N_2^{OV}, T^{OV})$

Temos que

$$\begin{cases} N_{1,m}^{OV} = 1 & m = 0, 1, 2, \dots \\ N_{2,m+1}^{OV} = N_{2,m}^{OV} - \left[Z(T_{m+1}^{OV}) - Z(T_m^{OV}) \right] + 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

para $N_{2,m}^{OV} \geq 0$

$T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV}$: é o tempo decorrido entre T_m^{OV} e a próxima tentativa de um freguês, ou de fora ou que terminou de ser atendido no servidor secundário, que procura ser atendido no servidor principal e não consegue por o encontrar ocupado. (2.2)

Teorema 2.1:

O processo $\{N_{1,m}^{OV}, N_{2,m}^{OV}, T_m^{OV} : m = 0, 1, 2, \dots\}$ imerso nos instantes em que ocorrem transbordamentos ao servidor principal, é um Processo de Renovação Markoviano, com espaço de estados $E^{OV} = \{1\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.

Prova:

Considerando as definições (2.1) e (2.2), a demonstração segue da mesma maneira que o Teorema IV-2.1, no Processo de Partida.



Para determinar o núcleo de transição do processo precisaremos determinar a probabilidade de transição da cadeia imersa, conhecido o tempo decorrido entre os transbordamentos, e também precisaremos determinar a distribuição do intervalo entre transbordamentos, conhecido o número de fregueses no sistema imediatamente antes do início do intervalo.

Faremos isso através dos seguintes dois lemas:

Lema 2.2:

A probabilidade de transição da cadeia imersa (N_1^{OV}, N_2^{OV}) , dado que conhecemos o tempo decorrido entre os transbordamentos considerados, é dada por:

$$\Pr \left[N_{2,m+1}^{OV} = j \mid N_{2,m}^{OV} = k, T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} = x \right] =$$

(i) para $0 < j \leq k + 1$, $k \geq 0$:

$$= \frac{(\gamma x)^{k-j+1}}{(k-j+1)!} e^{-\gamma x}$$

(ii) para $j = 0$, $k \geq 0$:

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(\gamma x)^n}{n!} e^{-\gamma x}$$

(iii) = 0 nos demais casos.

Prova:

A parte (i) corresponde à conclusão de $(k - j + 1)$ serviços na segunda fila, já que no intervalo observado não é possível a entrada de fregueses nessa fila, e lembrando ainda que os tempos de serviço no servidor secundário são independentes e com distribuição exponencial, com parâmetro γ .

Já para a transição de $k \geq 0$ para $j = 0$ vale (ii), pois durante o intervalo observado temos todos os k fregueses anteriormente presentes à segunda fila atendidos, além de todos os virtuais fregueses que poderiam ser atendidos durante o período, se fosse possível que eles entrassem na fila do segundo servidor.



Para calcular a distribuição condicionada do intervalo entre transbordamentos consecutivos, $T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, conhecido o número de fregueses na segunda fila $N_{2,m}^{OV}$ imediatamente antes do m -ésimo transbordamento, precisamos primeiramente determinar a distribuição do intervalo $T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV}$, porém sendo conhecido o número de fregueses na segunda fila imediatamente após o m -ésimo transbordamento, $N_2(T_m^{OV})$.

Neste caso, levamos em consideração que durante o intervalo, a cada instante que o servidor principal inicia um novo serviço, a distribuição do intervalo remanescente até T_{m+1}^{OV} é a mesma do intervalo total $T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV}$, com o mesmo número de fregueses na segunda fila, observado logo após esses instantes.

Seja então o intervalo $[T_m^{OV}, T_{m+1}^{OV}]$

Definimos aí a seguinte sequência de instantes:

$$T_0 = T_m^{OV} \tag{2.3}$$

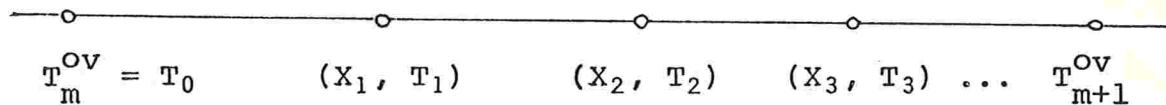
$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \min \left\{ T_k^i, k \in N \mid T_m^{OV} < T_k^i < T_{m+1}^{OV} \right\} \\ \text{e para } n = 2, 3, \dots \\ T_n = \min \left\{ T_k^i, k \in N \mid T_{n-1} < T_k^i < T_{m+1}^{OV} \right\} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

também definimos

$$X_0 = N_1(T_m^{OV}) = N_2(T_0) : \text{número de fregueses no segundo servidor logo após o } m\text{-ésimo transbordamento.} \tag{2.5}$$

$$X_n = N_2(T_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Por exemplo, temos:



Fato 2.3:

O tempo entre dois transbordamentos consecutivos, dado o número de fregueses na fila secundária no início do intervalo $X_0 = N_2(T_m^{OV})$, tem a mesma distribuição condicional do intervalo entre T_1 , instante do primeiro início do serviço no servidor principal após T_m^{OV} , e T_{m+1}^{OV} dado o número de fregueses na fila secundária neste instante, X_1 , isto é:

$$\begin{aligned} \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] &= \\ = \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_1 \leq t \mid N_2(T_1) = k \right] & \end{aligned}$$

Justificação:

No instante T_m^{OV} , o primeiro servidor está ocupado e $(T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV})$ representa o tempo necessário até que um freguês procure ser atendido no primeiro servidor e o encontre ocupado.

O intervalo $T_{m+1}^{OV} - T_1$ representa a mesma situação, pois no instante T_1 o servidor principal começa um atendimento, que tem a mesma distribuição exponencial que o tempo remanes

cente de serviço no primeiro servidor no instante T_m^{OV} , e o número de fregueses na fila secundária neste momento é $N_2(T_1) = X_1$.

São essenciais as hipóteses que os intervalos entre chegadas externas e o tempo de serviço no servidor principal e no segundo servidor são exponencialmente distribuídos e, independentes entre si.

Por outro lado, se no instante T_n a segunda fila se esvazia, para algum $n = 1, 2, \dots$, ainda assim o intervalo $T_{m+1}^{OV} - T_n$ tem a mesma distribuição dos intervalos $T_{m+1}^{OV} - T_p, p \geq n$, pelas mesmas razões acima, porém com distribuição diferente do caso em que a segunda fila não está vazia.

Este argumento pode ser repetido para todos os T_n , $T_m^{OV} < T_m < T_{m+1}^{OV}$. □

A partir deste Fato, podemos escrever as seguintes equações de recorrência que nos permite determinar a distribuição condicionada do intervalo entre dois transbordamentos, conhecido o número de fregueses no segundo servidor logo após o início do intervalo:

$$\begin{aligned}
 F_k(t) &= \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] = \quad (2.8) \\
 &= \frac{\lambda + \gamma}{\lambda + \mu + \gamma} \left(1 - e^{-(\lambda + \mu + \gamma)t} \right) + \\
 &+ \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-(\lambda + \gamma)s} F_k(t - s) ds + \\
 &+ \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \gamma e^{-(\lambda + \gamma)s} F_{k-1}(t - s) ds
 \end{aligned}$$

E se para algum $n = 1, 2, 3, \dots, X_n = 0$ com $X_{n-1} = 1$,

temos:

$$\Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_n \leq t \mid X_n = 0 \right] =$$

que por analogia vamos denotar por $F_0(t)$

$$= F_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \quad (2.9)$$

$$+ \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-\lambda s} F_0(t - s) ds.$$

A equação (2.8) pode ser interpretada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] = \\ & = \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t, T_1 > T_{m+1}^{OV} \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] + \\ & + \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t, T_1 \leq T_{m+1}^{OV} \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] \end{aligned}$$

A primeira parcela do lado direito significa que o $(m + 1)$ -ésimo transbordamento ocorreu antes que terminasse o serviço que estava em andamento no instante T_m^{OV} . Então o valor da primeira parcela é

$$\begin{aligned} & \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t, T_1 > T_{m+1}^{OV} \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] = \\ & = \frac{\lambda + \gamma}{\lambda + \mu + \gamma} \left(1 - e^{-(\lambda + \mu + \gamma)t} \right) \end{aligned}$$

Para a segunda parcela temos:

$$\begin{aligned} & \Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_m^{\text{OV}} \leq t, T_1 \leq T_{m+1}^{\text{OV}} \mid N_2(T_m^{\text{OV}}) = k \right] = \\ & = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \frac{d}{ds} \Pr \left[T_1 - T_m^{\text{OV}} \leq s, X_1 = j \mid N_2(T_m^{\text{OV}}) = k \right] \cdot \\ & \cdot \Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_m^{\text{OV}} \leq t \mid N_2(T_m^{\text{OV}}) = k, X_1 = j, T_1 - T_m^{\text{OV}} = s \right] = * \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \Pr \left[T_1 - T_m^{\text{OV}} \leq s, X_1 = j \mid N_2(T_m^{\text{OV}}) = k \right] = \\ & = \int_0^s \mu e^{-(\lambda + \mu + \gamma)x} \left[\lambda 1_{\{j=k\}} + \gamma 1_{\{j=k-1\}} \right] e^{-(\lambda + \gamma)(s-x)} dx = \\ & = (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-(\lambda + \gamma)s} 1_{\{j=k\}} + (1 - e^{-\mu s}) \gamma e^{-(\lambda + \gamma)s} 1_{\{j=k-1\}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} * & = \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-(\lambda + \gamma)s} \Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_1 \leq t - s \mid X_1 = k, \right. \\ & \left. T_1 - T_m^{\text{OV}} = s \right] ds + \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \gamma e^{-(\lambda + \gamma)s} \cdot \\ & \cdot \Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_1 \leq t - s \mid X_1 = k - 1, T_1 - T_m^{\text{OV}} = s \right] ds = \end{aligned}$$

Dévido à observação feita anteriormente em (2.7):

$$= \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-(\lambda + \gamma)s} \Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_m^{\text{OV}} \leq t - s \mid \dots \right] ds$$

$$\begin{aligned}
& N_2(T_m^{OV}) = k \Big] ds + \\
& + \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \gamma e^{-(\lambda + \gamma)s} \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t - s \mid \right. \\
& \left. N_2(T_m^{OV}) = k - 1 \right] ds
\end{aligned}$$

e temos então a equação (2.8).

No caso da equação (2.9), temos que se em algum instante T_n a segunda fila se esvazia, ela permanecerá vazia até o instante do próximo transbordamento T_{m+1}^{OV} . Neste caso, usando os mesmos argumentos do Fato 2.3 temos que, para $p \geq n$:

$$\begin{aligned}
\Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_n \leq t \mid X_n = 0 \right] &= \quad (2.10) \\
&= \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_p \leq t \mid X_p = 0 \right]
\end{aligned}$$

Considerando a seguinte decomposição do intervalo

$$\begin{aligned}
T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} &= (T_{m+1}^{OV} - T_n, T_{n+1} > T_{m+1}^{OV}) \cup (T_{m+1}^{OV} - T_n, T_{n+1} \leq \\
&< T_{m+1}^{OV})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_n \leq t \mid X_n = 0 \right] &= F_0(t) = \\
&= \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_n \leq t, T_{n+1} > T_{m+1}^{OV} \mid X_n = 0 \right] + \\
&+ \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_n \leq t, T_{n+1} \leq T_{m+1}^{OV} \mid X_n = 0 \right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \int_0^t \frac{d}{ds} \Pr \left[T_{n+1} - T_n \leq s, \right.$$

$$\left. X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0 \right] \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_{n+1} + T_{n+1} - T_n \leq t \mid \right.$$

$$\left. T_{n+1} - T_n = s, X_{n+1} = 0, X_n = 0 \right] =$$

usando os mesmos argumentos utilizados na interpretação da equação (2.8); considerando que durante o intervalo $T_{m+1}^{OV} - T_n$ temos a segunda fila vazia:

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-\lambda s} \cdot$$

$$\cdot \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_{n+1} \leq t - s \mid X_{n+1} = 0 \right] ds =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-\lambda s} F_0(t-s) ds.$$

e assim obtemos a equação (2.9).

A fim de determinarmos a solução das equações (2.8) e (2.9), seja a transformada de Laplace-Stieltjes de $F_k(t)$:

$$F_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dF_k(t)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, \alpha > 0$, e que vale:

a) para $k \geq 1$:

$$F_k^*(\alpha) = \frac{(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma + \alpha)}{\alpha^2 + (2\lambda + 2\gamma + \mu)\alpha + (\lambda + \gamma)^2 + \mu\gamma} +$$

$$+ \frac{\mu\gamma}{\alpha^2 + (2\lambda + 2\gamma + \mu)\alpha + (\lambda + \gamma)^2 + \mu\gamma} F_{k-1}^*(\alpha)$$

b) para $k = 0$:

$$F_0^*(\alpha) = \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\alpha^2 + (2\lambda + \mu)\alpha + \lambda^2}$$

que por sua vez corresponde à transformada de Laplace-Stieltjes do intervalo $(T_{m+1}^{OV} - T_n)$ obtida em (2.11).

Denominando as funções

$$h(\alpha) = \frac{(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma + \alpha)}{\alpha^2 + (2\lambda + 2\gamma + \mu)\alpha + (\lambda + \gamma)^2 + \mu\gamma}$$

$$g(\alpha) = \frac{\mu\gamma}{\alpha^2 + (2\lambda + 2\gamma + \mu)\alpha + (\lambda + \gamma)^2 + \mu\gamma}$$

e
$$g^n(\alpha) = [g(\alpha)]^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

podemos reescrever a transformada $F_k^*(\alpha)$, $k \geq 1$, como:

$$F_k^*(\alpha) = h(\alpha) + g(\alpha) F_{k-1}^*(\alpha) = \dots$$

$$\dots = h(\alpha) + \sum_{n=1}^{k-1} h(\alpha) g^n(\alpha) + g^k(\alpha) F_0^*(\alpha).$$

Calculando a inversa da transformada, obtemos o valor de $F_k(t)$ nas equações (2.8) e (2.9), com a seguinte notação:

$$a_1 = \frac{2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2}$$

$$a_2 = \frac{2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2}$$

$$b_1 = \frac{2\lambda + 2\gamma + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2}$$

$$b_2 = \frac{2\lambda + 2\gamma + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2}$$

temos então:

a) Para $k \geq 1$:

$$\Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t \mid N_2(T_m^{OV}) = k \right] = F_k(t) = \quad (2.12)$$

$$= \frac{(\lambda + \gamma)(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{2 b_1 \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-b_1 t}) -$$

$$- \frac{(\lambda + \gamma)(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{2 b_2 \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-b_2 t}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k-1} \int_0^t \left\{ \left[\frac{(\mu\gamma)^n e^{-b_2 s}}{(n-1)!(n-1)!} \int_0^s y^{n-1} (s-y)^{n-1} \cdot e^{-\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu} y} dy \right] \right\}$$

$$\cdot \frac{(\lambda + \gamma)(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{2 b_1 \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} \left\{ 1 - e^{-b_1(t-s)} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left. \frac{(\lambda + \gamma) (\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{2b_2 \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-b_2(t-s)}) \right\} ds + \\
& + \int_0^t \frac{(\mu\gamma)^k e^{-b_2 s}}{(k-1)! (k-1)!} \left[\int_0^s y^{k-1} (s-y)^{k-1} e^{-\sqrt{\mu^2+4\lambda\mu} y} dy \right]. \\
& \cdot \left[\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-a_2(t-s)}) - \right. \\
& \left. - \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-a_1(t-s)}) \right] ds.
\end{aligned}$$

b) Para $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\Pr \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_n \leq t \mid N(T_n) = 0 \right] &= F_0(t) = \quad (2.13) \\
&= \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-a_2 t}) - \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} (1 - e^{-a_1 t}).
\end{aligned}$$

Podemos então mostrar o seguinte lema, referindo-se novamente ao Processo de Transbordamento $\{N_{1,m}^{\text{OV}}, N_{2,m}^{\text{OV}}, T_m^{\text{OV}} : m = 0, 1, 2, \dots\}$:

Lema 2.4:

A distribuição de probabilidade do intervalo entre dois transbordamentos consecutivos $\{T_{m+1}^{\text{OV}} - T_m^{\text{OV}} : m = 0, 1, 2, \dots\}$, dado que conhecemos o número de fregueses na fila secundária imediatamente antes do início do intervalo, $N_{2,m}^{\text{OV}}$, é a seguinte:

$$\text{Pr} \left[T_{m+1}^{\text{OV}} - T_m^{\text{OV}} \leq t \mid N_{2,m}^{\text{OV}} = k \right] =$$

(i) para $k = 0$:

$$= F_1(t)$$

(ii) para $k \geq 1$:

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \gamma} F_{k+1}(t) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} F_k(t)$$

onde $F_k(t)$ é a distribuição de probabilidade dada nas equações (2.12) e (2.13).

Prova:

(ii) Se o m -ésimo transbordamento ocorreu devido à chegada de um novo freguês no sistema, o número de fregueses no segundo servidor é imediatamente acrescido de 1, e temos $N_2(T_m^{\text{OV}}) = k + 1$; mas se o transbordamento foi devido a um freguês fazendo uma nova tentativa para ser atendido no servidor principal, então o número de fregueses no segundo servidor não se altera e $N_2(T_m^{\text{OV}}) = k$.

Aí então, podemos usar os resultados $F_k(t)$ obtidos em (2.8) a (2.13).

(i) A primeira parte do Lema segue-se do fato que, se $N_{2,m}^{\text{OV}} = 0$, o m -ésimo transbordamento ocorre com a chegada de um novo freguês ao sistema e que encontra o servidor principal ocupado. □

Temos então condições de enunciar o seguinte corolário ao Teorema 2.1:

Corolário 2.5:

O núcleo de transição do Processo de Transbordamento $\{ N_{1,m}^{OV}, T_{2,m}^{OV}, T_m^{OV} : m = 0, 1, 2, \dots \}$, $Q^{OV}(t)$, é dado por:

$$Q^{OV}(k, j, t) = \Pr \left[N_{1,m+1}^{OV} = 1, N_{2,m+1}^{OV} = j, T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} < t \mid \right. \\ \left. N_{1,m}^{OV} = 1, N_{2,m}^{OV} = k \right] =$$

(i) para $k = 0, j = 1$:

$$= \int_0^t e^{-\gamma x} dF_1(x)$$

(ii) para $k = 0, j = 0$:

$$= \int_0^t (1 - e^{-\gamma x}) dF_1(x)$$

(iii) para $k \geq 1, j = 0$:

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_0^t \frac{(\gamma x)^n}{n!} e^{-\gamma x} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \gamma} dF_{k+1}(x) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} dF_k(x) \right]$$

(iv) para $k \geq 1, 0 < j \leq k + 1$:

$$= \int_0^t \frac{(\gamma x)^{k-j+1}}{(k-j+1)!} e^{-\gamma x} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \gamma} dF_{k+1}(x) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} dF_k(x) \right]$$

Prova:

Substituímos na expressão

$$Q^{OV}(k, j, t) = \int_0^t \Pr \left[N_{2,m+1}^{OV} = j \mid N_{2,m}^{OV} = k, T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} = x \right].$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq x \mid N_{2,m}^{OV} = k \right]$$

as probabilidades condicionadas encontradas nos Lemas 2.2 e 2.4.

Os valores de $Q^{OV}(t)$ ficam explicitados quando substituimos $F_k(x)$ por seu valor determinado na equação (2.12). \square

Com os valores explícitos de $Q^{OV}(t)$ são muito longos, a partir daqui até o fim do trabalho vamos apenas deixar indicados todos os resultados que dependam, direta ou indiretamente, do núcleo de transição do Processo de Transbordamento, assim como a distribuição de equilíbrio da cadeia imersa e a distribuição do intervalo entre transbordamentos consecutivos em equilíbrio.

Proposição 2.6:

A cadeia imersa nos instantes imediatamente anteriores à ocorrência de transbordamentos (N_1^{OV}, N_2^{OV}) , é uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E^{OV} = \{1\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$ e com matriz de transição P^{OV} dada por:

$$(i) P^{OV}(0, 1) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dF_1(x)$$

$$(ii) P^{OV}(0, 0) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\gamma x}) dF_1(x)$$

(iii) para $k \geq 1, j = 0$:

$$P^{OV}(k, 0) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\gamma x)^n}{n!} e^{-\gamma x} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \gamma} dF_{k+1}(x) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} dF_k(x) \right]$$

(iv) para $k > 1, 0 < j < k + 1$:

$$P^{OV}(k, j) = \int_0^{\infty} \frac{(x)^{k+j+1}}{(k-j+1)!} e^{-\gamma x} \left[\frac{\lambda}{\lambda + \gamma} dF_{k+1}(x) + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} dF_k(x) \right]$$

Prova:

Que a cadeia é de Markov, segue da definição de Processo de Renovação Markoviano.

A matriz de transição P^{OV} é obtida passando ao limite, o núcleo de transição $Q^{OV}(k, j, t)$, quando $t \rightarrow \infty$.

Os valores explícitos da matriz de transição são obtidos quando substituímos $F_k(x)$ pelo resultado apresentado na equação (2.12). □

A distribuição de equilíbrio da cadeia imersa (N_1^{OV}, N_2^{OV}) é determinada a partir da equação matricial

$$\pi^{OV} = \pi^{OV} P^{OV} \quad (2.14)$$

sujeita às condições que tornam o vetor π^{OV} um vetor de probabilidade, com a probabilidade de transição P^{OV} dada na Proposição 2.6.

Proposição 2.7:

A distribuição do intervalo entre transbordamentos sucessivos, em equilíbrio, é dada por:

$$\begin{aligned} \Pr \left[T_{m+1}^{OV} - T_m^{OV} \leq t \right] &= F^{OV}(t) = \\ &= \pi^{OV}(0) F_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{OV}(k) \left[\frac{\lambda}{\lambda + \gamma} F_{k+1}(t) + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma} F_k(t) \right]. \end{aligned}$$

PARTE B: Processo de Saída

Mostramos que o Processo de Saída (N_1^{OV}, N_2^O, T^O) é um Processo de Renovação Markoviano. Pudemos também determinar a distribuição do tempo entre saídas consecutivas, conhecido o número de fregueses no sistema no início do intervalo. Entretanto a probabilidade de transição da cadeia imersa, conhecido o tempo gasto entre as saídas consecutivas consideradas, não pode ser calculada pois depende do Processo de Transbordamento e da distribuição conjunta dos Processos de Entrada e de Partida do Servidor principal, que não foi determinada.

Por isso deixamos de determinar o núcleo de transição do processo.

3. NOTAÇÃO

Sejam

T_r^0 : instante em que ocorre o m -ésimo fim de serviço no servidor secundário, $m = 0, 1, 2, \dots$.

$N_{j,m}^0 = N_j(T_m^0 -)$: número de fregueses presentes na fila j , $j = 1, 2$, imediatamente antes do m -ésimo fim de serviço no servidor secundário.

X_2 : tempo de atendimento de um freguês no servidor secundário.

I_2 : tempo que o segundo servidor permanece desocupado, quando a fila se esvazia.

Definimos ainda os seguintes processos:

$\tilde{Z} = \{\tilde{Z}(t) : t \geq 0\}$: que conta o número de transbordamentos que ocorrem durante o intervalo $[0, t)$:

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{T_n^{OV} < t\}}$$

$I = \{I(t) : t \geq 0\}$: que conta o número de fregueses que são atendidos no servidor principal durante o intervalo $[0, t)$:

$$I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{T_n^i < t\}}$$

$L = \{L(t) : t \geq 0\}$: que conta o número de fregueses que deixam o sistema, depois de atendidos no servidor principal, durante o intervalo $[0, t)$:

$$L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{T_n^d < t\}}$$

4. O PROCESSO TRIDIMENSIONAL (N_1^0, N_2^0, T^0)

Temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{1,m+1}^0 = N_{1,m}^0 + \left[I(T_{m+1}^0) - I(T_m^0) \right] - \\ \quad - \left[L(T_{m+1}^0) - L(T_m^0) \right] \\ N_{2,m+1}^0 = N_{2,m}^0 + \left[\tilde{Z}(T_{m+1}^0) - \tilde{Z}(T_m^0) \right] - 1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

e também

$$T_{m+1}^0 - T_m^0 = \begin{cases} X_2 & \text{se } N_{1,m}^0 + N_{2,m}^0 \geq 2 \\ I_2 + X_2 & \text{se } N_{1,m}^0 + N_{2,m}^0 = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

lembrando que $N_{2,m}^0 = 1, 2, 3, \dots$

Teorema 4.1:

O processo $\{N_{1,m}^O, N_{2,m}^O, T_m^O : m = 0, 1, 2, \dots\}$ imerso nos instantes imediatamente anteriores à saída de fregueses do servidor secundário é um Processo de Renovação Markoviano, com espaço de estados $E^O = \{0, 1\} \times \{1, 2, 3, \dots\}$.

Prova:

Considerando as definições (4.1) e (4.2), a demonstração segue da mesma maneira que o Teorema IV.2.1, no Processo de Partida. □

O núcleo de transição pode ser indicado a partir da probabilidade condicionada do intervalo entre saídas, e da probabilidade condicionada de transição da cadeia imersa.

Primeiro vamos determinar a distribuição do intervalo entre saídas consecutivas, $T_{m+1}^O - T_m^O$, $m = 0, 1, 2, \dots$, condicionada à presença de (j_1, j_2) fregueses no sistema imediatamente antes da m -ésima saída. Nos casos em que $j_1 + j_2 > 1$, a distribuição é imediata. No caso $(j_1, j_2) = (0, 1)$ precisamos determinar a distribuição de I_2 , intervalo de tempo que o segundo servidor fica desocupado.

Vamos então calcular a distribuição de I_2 , condicionada ao evento $\{N_{1,m}^O = 0, N_{2,m}^O = 1\}$.

Sejam

$$S = \min \{T_k^{OV}; k \in \mathbb{N} \mid T_m^O < T_k^{OV} < T_{m+1}^O\}$$

$$\text{Então } C_m = [T_m^O, S) \neq \emptyset.$$

Definimos em C_m a sequência de instantes:

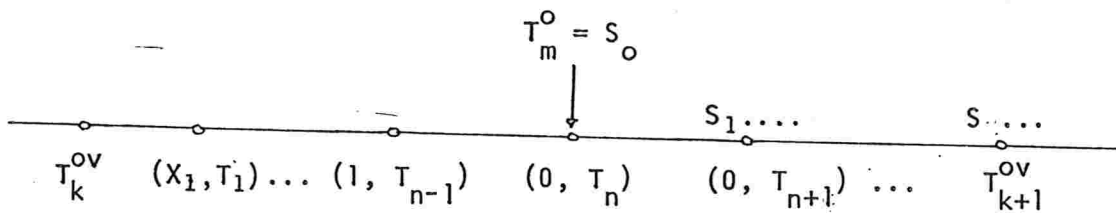
$$S_0 = T_m^O$$

$$S_1 = \min \{T_k^i, k \in N \mid T_m^O < T_k^i < S\}$$

e para $n = 2, 3, 4, \dots$

$$S_n = \min \{T_k^i, k \in N \mid S_{n-1} < T_k^i < S\}$$

Pela definição dos instantes S e $S_n, n = 0, 1, 2, \dots$, e pelas definições (2.3) e (2.4) dos instantes $T_n, n = 0, 1, 2, \dots$, no Processo de Transbordamento, Parte A, podemos observar que o intervalo $[T_m^O, S)$ coincide com o



intervalo $[T_n, T_{k+1}^{OV})$ para algum $k = 0, 1, 2, \dots$ onde T_n é o instante em que a segunda fila fica vazia até T_{k+1}^{OV} , instante do próximo transbordamento.

Nestas condições, temos, de acordo com os resultados que obtivemos no Processo de Transbordamento, no Fato 2.3, e equações (2.9) a (2.13):

$$\Pr \left[I_2 \leq t \mid N_{1,m}^O = 0, N_{2,m}^O = 1 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr \left[T_k^{ov} - T_n \leq t \mid X_n = 0 \right] = F_0(t) = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) + \\
&+ \int_0^t (1 - e^{-\mu s}) \lambda e^{-\lambda s} F_0(t - s) ds
\end{aligned}$$

e tem por solução:

$$\Pr \left[I_2 \leq t \mid N_{1,m}^0 = 0, N_{2,m}^0 = 1 \right] = \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} \left(1 - \exp \left(- \frac{2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2} t \right) \right) - \\
&- \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} \left(1 - \exp \left(- \frac{2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2} t \right) \right)
\end{aligned}$$

Podemos então mostrar o seguinte Lema:

Lema 4.2:

A distribuição de probabilidade condicionada do intervalo entre duas saídas consecutivas do servidor secundário, $\{T_{m+1}^0 - T_m^0 : m = 0, 1, 2, \dots\}$ dado que conhecemos o número de fregueses presentes às filas no instante imediatamente anterior ao início do intervalo, é a seguinte:

$$\Pr \left[T_{m+1}^0 - T_m^0 < t \mid N_{1,m}^0 = j_1, N_{2,m}^0 = j_2 \right] =$$

(i) para $j_1 + j_2 = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda(\lambda - \gamma)}{(\lambda - \gamma)^2 - \mu\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) - \\
&- \frac{\gamma(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{(2\lambda - 2\gamma + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2} t\right) \right) + \\
&+ \frac{\gamma(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})}{(2\lambda - 2\gamma + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu})\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2} t\right) \right)
\end{aligned}$$

(ii) para $j_1 + j_2 \geq 2$:

$$= (1 - e^{-\gamma t})$$

Prova:

A partir da definição (4.2), podemos calcular a distribuição condicional do intervalo.

Para o caso $j_1 + j_2 = 1$, quando a segunda fila fica vazia, as variáveis X_2 e I_2 são independentes, pois em I_2 estamos considerando o tempo entre chegadas externas e o trabalho do servidor principal, e X_2 é o tempo de serviço do servidor secundário.

Portanto, a distribuição do intervalo entre saídas é a convolução de $F_0(t)$, dada na equação (2.18), Parte A, com a distribuição exponencial com parâmetro γ .

Quando $j_1 + j_2 \geq 2$, o intervalo $T_{m+1}^0 - T_m^0$ corresponde ao tempo gasto em um atendimento no servidor secundário.



Quanto a probabilidade de transição condicionada da cadeia imersa os resultados dependem da distribuição conjunta dos processos de Entrada e Partida do servidor principal e do Transbordamento, que não são independentes, e não foi nosso objetivo neste momento a sua determinação.

BIBLIOGRAFIA

- ALEKSANDROV, A.M. (1972): "A Queueing System with Repeated Orders", Engng Cybern. Rev., 12 (3), 1-4.
- ÇINLAR, E. (1975): Introduction to Stochastic Processes, Prentice-Hall, Inc.. Englewood Cliffs, N.J.
- CHOO, Qui Hoon & CONOLLY, B. (1979): "New Results in the Theory of Repeated Orders Queueing Systems", J. Appl. Prob., 16, 631-640.
- COHEN, J.W. (1957): "Basic Problems of Telephone Traffic Theory and the influence of Repeated Calls", Philips Telecomm. Rev., 18 (2), 49-100.
- DISNEY, R.L. (1984): Notas de Aulas do Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- FALIN, G.I. (1978): "The Exit Flow of a Single-Line Queueing System when there are Secondary Orders", Engng. Cybern. Rev., 16(5), 64-67.
- FALIN, G.I. (1979): "A Single-Line System with Secondary Orders", Engng Cybern. Rev., 17 (2), 76-83.
- FALIN, G.I. (1980): "M/G/1 Queue with Repeated Calls in Heavy Traffic", Moscow Univ. Math. Bull., 35 (6), 48-51.
- FALIN, G.I. (1984): "On Sufficient Conditions for Ergodicity of Multichannel Queueing Systems with Repeated Calls", Adv. Appl. Prob., 16 (2), 447-448.

- FREDERICKS, A.A. & REISNER, G.A. (1979): "Approximations to Stochastic Service Systems, with an Application to a Retrieval Model", Bell System Tech. J., 58 (3), 557-576.
- GAVER, D. & LEHOCZKY, J.P. (1976): "Gaussian Approximations to Service Problems: A Communication System Example", J. Appl. Prob., 13, 768-780.
- GHARAMANI, S.; GREENBERG, B.S.; WOLFF, R.W. (1985): "An Approximation and Bound for Queues with Returning Customers", submetido.
- GREENBERG, B.S. & WOLFF, R.W. (1985): "An upper Bound on the Performance of Queues with Returning Customers", apresentada na ORSA/TIMS Conference, Atlanta, Georgia, USA, Nov 4-6, 1985.
- KEILSON, J.; COZZOLINO, J.; YOUNG, H. (1968) : "A Services System with Unfilled Requests Repeated", Op. Res.; 16, 1126-1137.
- KELLY, F.P. (1979): Reversibility and Stochastic Networks, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- KIESSLER, P. (1983): "Reversibility and Flows in Queueing Networks". Tese de Doutorado, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA.
- de KOK, A.G. (1984): "Algorithmic Methods for Single Server Systems with Repeated Attempts", Stat. Neerlandica, 38(1), 23-32.

- KORNISHEV, Yu. N. (1969a): "Theory of Shared Lines", Telecomm. Radio Engng., 23 (7), 24-31.
- KORNISHEV, Yu. N. (1969b): "Design of a Fully Accessible Switching System with Repeated Calls", Telecomm. Radio Engng., 23 (11), 46-52.
- KULKARNI, V.G. (1983): "On Queueing Systems with Retrials", J. Appl. Prob., 20, 380-389.
- LIU, K.S. (1980): "Direct Distance Dialing: Call Completion and Customer Retrieval Behavior", Bell System Tech. J., 59 (3), 295-311.
- STEPANOV, S.N. (1983): "Properties of Probability Characteristics of A Communications Network with Repeat Calls", Probl. of Inf. Transm. 19, 69-76.
- WILKINSON, R.I. (1956): "Theories of Toll Traffic Engineering in the U.S.A.", Bell Syst. Tech. J., 35, 421-514.
- WILKINSON, R.I. & RADNIK, R.C. (1967): "The Character and Effect of Customer Retrials in Intertoll Circuit Operation", 5th International Teletraffic Congress Conference, New York.
- WILKINSON, R.I. & RADNIK, R.C. (1968): "Customer Retrials in Toll Circuit Operation", Conference Records, IEEE International Conference on Communication.