

**Bilhares estocásticos em domínios gerais**

**Paulo Henrique de Souza Lima**

TESE APRESENTADA  
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Serguei Popov**

São Paulo, janeiro de 2012.

*Apoio FAPESP (Processo N. 2007/50312-8).*

## Bilhares estocásticos em domínios gerais

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente corrigida  
e defendida por Paulo Henrique de Souza Lima  
e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, janeiro de 2012.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Serguei Popov - orientador (IME-USP).

Prof. Dr. Anatoli Iambartsev (IME-USP).

Prof. Dr. Élcio Lebensztayn (UNICAMP).

Prof. Dr. Christophe Frederic Gallesco (UNICAMP).

Prof. Dr. Alessandro Giacomo Grimbert Gallo (UFRJ).

*Para meus pais, por tudo.*

# Agradecimentos

Tenho muito a agradecer ao IME-USP, a todos os professores, funcionários e amigos que de uma forma ou de outra sempre me apoiaram. Por onde quer que eu passe, carregarei os exemplos, valores, ensinamentos e princípios que neste instituto aprendi.

Tenho um carinho especial pelo incondicional apoio de meus pais, dos meus brilhantes orientadores Serguei Popov, no doutorado, Luiz Renato, no mestrado, e de Jesus Diniz, Fabio Prates e Silvia Nagib Elian.

# Resumo

Nós apresentamos um modelo para o bilhar aleatório em domínios gerais com injeção e absorção de partículas, obtemos a medida invariante para este processo e aplicamos este resultado para derivar resultados para o caso particular de reflexão cosseno com regiões de pura absorção e injeção de partículas.

**Key words:** Processos Estocásticos, Passeios Aleatórios, Bilhares aleatórios, Regime de Knudsen.

# Abstract

We present a model for random billiards in general domains with injection and absorption of particles. We obtain an explicit expression the stationary measure for this process and apply this expression to derive results for the particular case of cosine reflection law in the case when the domain has regions of pure absorption/injection.

**Key words:** Stochastic Process, Random Walk, Random Billiard, Knudsen Regime.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.1.1	O Problema da Princesa e do Monstro . . . . .	2
1.1.2	A geração de Vetores Aleatórios em Domínios Gerais . . . . .	3
1.1.3	Medidas Invariantes e Outros Resultados . . . . .	5
1.2	Organização do Trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Bilhares Aleatórios</b>	<b>7</b>
2.1	Exemplo em um Domínio não lipschitziano . . . . .	9
2.2	Medida Invariante no caso geral . . . . .	11
2.3	Lei de reflexão cosseno . . . . .	13
2.4	Propriedades Geométricas da Corda . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Construção do Processo de partículas independentes</b>	<b>17</b>
3.1	Medida Invariante no sistema de partículas . . . . .	21
3.2	Velocidade de Convergência . . . . .	26
3.3	Caso Particular . . . . .	29
3.4	Simulação . . . . .	32

## Lista de Símbolos

$B(x, \epsilon)$	Bola aberta centrada em $x \in \mathbb{R}^d$ e raio $\epsilon > 0$ .
$\mathcal{D}$	Domínio conexo fechado limitado com fronteiras Lipschitzianas em $\mathbb{R}^d$ .
$\partial\mathcal{D}$	Fronteira do Domínio $\mathcal{D}$ .
$E$	Espaço de estados.
$\mathcal{L}$	Gerador infinitesimal.
$h_x(v)$	Ponto em $\partial\mathcal{D}$ visto de $x$ na direção de $v$ .
$l_{x,y}$	O vetor unitário com direção $y \in \mathcal{S}^{d-1}$ a partir de $x$ .
$\mathcal{R}$	Conjunto de pontos em que a fronteira $\partial\mathcal{D}$ é continuamente diferenciável.
$n(x)$	Vetor normal que aponta para o interior do domínio $\mathcal{D}$ .
$r_x(v)$	Distância de $x$ à fronteira do domínio na direção de $v$ .
$\mathcal{S}^{d-1}$	Esfera $d$ -dimensional unitária centrada na origem.
$\mathcal{S}_+^{d-1}$	Semi-esfera $d$ -dimensional com primeira coordenada positiva.
$\mathcal{S}_-^{d-1}$	Semi-esfera $d$ -dimensional com primeira coordenada negativa.
$U_x$	Operador rotação de $\mathcal{S}^{d-1}$ que envia o vetor unitário $e = (1, 0, \dots, 0)$ a $n(x)$ .
$\varphi_x(u)$	Arco entre a normal $n(x)$ e a direção $u$ ( $\arccos(x \cdot u)$ ).
$z = zx, v$	Ponto em $\partial\mathcal{D}$ visto de $x$ na direção de $-v$ .



## Lista de Figuras

1	Definições de $\varphi_x(v)$ , $r_x(v)$ , $h_x(v)$ . . . . .	8
2	Exemplo de domínio não lipschitziano . . . . .	10
3	Densidade de Transição. . . . .	14
4	Sistema de Injeção e Absorção de Partículas . . . . .	17
5	Partículas no Sistema no instante $t$ . . . . .	20
6	Cálculo da Medida Invariante . . . . .	21
7	Caso de Interesse . . . . .	30
8	Sistema de bilhar aleatório $X$ e $Y$ . . . . .	31
9	Estimativa de $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ em função da posição inicial $x$ . . . . .	33
10	Estimativa de $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ em função do comprimento $L$ do Domínio. . . . .	33

# 1 Introdução

Considere processos que têm a seguinte característica: uma partícula se move com velocidade constante dentro de um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  até mudar sua direção segundo uma lei de reflexão  $\gamma$  ao encontrar a fronteira do domínio  $\partial\mathcal{D}$ .

A motivação física para este estudo é o entendimento do movimento desenvolvido por uma partícula em um meio poroso a um nível microscópico. Dentro de um póro uma quantidade muito pequena de moléculas trafega de forma que as interações entre moléculas sejam negligenciáveis [19, 6], este é o chamado regime de Knudsen para a dinâmica gasosa. Em [14, 15], obtém-se evidências de que devido à microestrutura das paredes dos póros, o processo físico permanece um tempo aleatório preso na parede do póro e retorna ao domínio com lei de reflexão independente do ângulo de incidência da partícula. Recentemente esta dinâmica tem sido considerada de importância no desenvolvimento de zeolitos sintéticos para catálises [18] no qual, em um modelo computacional, o efeito do controle do tráfego molecular afeta a reatividade dos grãos catalíticos [6].

Os resultados em [10, 11, 24, 29] sobre o movimento difusivo da partícula são baseados em simulações numéricas para póros abertos onde partículas são injetadas e absorvidas. Estas evidências numéricas têm se mostrado insuficientes e ambíguas, muitas dependendo em detalhes das definições e quantidades consideradas.

A literatura probabilística relacionada versa sobre bilhares estocásticos. Em [21, 22] é considerado um domínio convexo do plano com lei de reflexão dada pela lei do cosseno, ou seja, a densidade de probabilidade em uma dada direção é proporcional ao cosseno do ângulo entre esta direção e o vetor normal à superfície da fronteira do domínio (chamaremos, a diante, apenas por Lei de reflexão cosseno). Mais tarde, o bilhar foi usado em algoritmos de cadeias de Monte Carlo por Borovkov em [4, 5] e Romeijn em [28]. S. Evans [12] considera o caso de uma lei de reflexão uniforme em um domínio com limite convexo de derivadas contínuas ou em um polígono. Em [1, 3], é considerado um domínio entre dois planos horizontais infinitos, onde a lei de reflexão é dada por um sistema dinâmico. Recentemente, em [7], são obtidos resultados mais abrangentes sob a lei de reflexão cosseno ao serem considerados domínios finitos com fronteira continuamente diferenciável e lipschitziana. Mostra-se, neste caso, que a medida invariante do bilhar aleatório é uniforme no volume do domínio e o processo induzido pelos toques à fronteira do domínio

também tem medida invariante uniforme na fronteira do domínio.

O presente trabalho estuda a situação de domínios gerais com fronteira continuamente diferenciável e lipschitziana, onde haja injeção de partículas pelas fronteiras do domínio desenvolvendo cada uma de forma independente um bilhar aleatório até a sua absorção na fronteira. No presente trabalho, obtemos a medida invariante no caso da lei de reflexão geral do processo de injeção e absorção de partículas e um resultado sobre a densidade de partículas da medida invariante do processo no caso em que a distribuição de reflexão do processo é dada pela lei cosseno e existe uma fronteira de pura absorção de partículas.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

No bilhar aleatório, uma partícula se move com velocidade 1 dentro de um domínio conexo  $d$ -dimensional. Quando a partícula chega na fronteira do domínio ela é refletida numa direção aleatória independentemente de toda sua trajetória passada, mantendo o valor absoluto da sua velocidade.

Este processo é a modelagem da dinâmica de uma partícula dentro de um domínio fechado. Desta forma, o processo surge na solução de diversos problemas desta natureza. A seguir, estão relacionados problemas que envolvem o uso do bilhar aleatório.

### 1.1.1 O Problema da Princesa e do Monstro

O jogo 'Princesa e o Monstro' [17] é jogado por dois jogadores que estão restritos a uma região bidimensional  $\mathcal{D}$  conectada e limitada. O monstro tem uma velocidade máxima 1, a princesa uma velocidade  $v < 1$ . Nenhum dos dois jogadores obtém informação sobre a posição de seu oponente até que a distância entre eles se torna menor do que  $\epsilon$ . Neste momento, o monstro captura a princesa e o jogo acaba. A princesa tem o objetivo de maximizar o tempo decorrido até a captura, enquanto que o monstro tem o objetivo de minimizar. Este jogo é um modelo para operações navais envolvendo um navio na tentativa de localizar um inimigo por meio de um sonar. Considera-se que o parâmetro  $\epsilon$  é relativamente pequeno em relação às dimensões do domínio  $\mathcal{D}$ .

Em [21], Lalley et al., propõe-se a seguinte estratégia para o monstro: sob certas condições de suavidade e convexidade para a borda do domínio finito, sorteie uniforme-

mente um ponto na borda deste domínio e a partir daí desenvolva um bilhar aleatório com lei de reflexão cosseno. Neste artigo, o processo desenvolvido pelo monstro não utiliza a nomenclatura 'bilhar aleatório', mas é descrito de forma construtiva.

Mostra-se que esta estratégia para o monstro é assintoticamente minimax em relação à estratégia da princesa, em outras palavras, seja  $\tau$  o tempo esperado até a captura, e  $\mathcal{F}$  o conjunto de estratégias determinísticas adotadas pela princesa ( $\mathcal{F}$  é o conjunto das funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}$ ), mostra-se que  $\sup_{\mathcal{F}} \epsilon \cdot \tau$  converge para  $|\mathcal{D}|$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . A prova envolve o estudo do tempo de primeira passagem às bordas do domínio pelo processo. Nota-se que é colocada a restrição de convexidade do domínio  $\mathcal{D}$ .

### 1.1.2 A geração de Vetores Aleatórios em Domínios Gerais

A geração de uma amostra de pontos de acordo a uma dada distribuição de probabilidade sobre uma dada região tem diversas aplicações.

O problema da identificação de restrições redundantes: Considere um domínio  $A \subset \mathbb{R}^d$  definido por um conjunto finito de desigualdades lineares. Uma restrição redundante é definida como uma desigualdade que pode ser retirada do sistema sem haver alterações na região  $A$ . Berbee et al. em [2] e Romeijn em [27] construíram algoritmos, envolvendo a geração de uma amostra aleatória de pontos no interior da região  $A$ , para identificar restrições redundantes.

O algoritmo de Monte Carlo pode ser utilizado como um método de integração numérica para calcular o volume de um componente [16]. Existe ainda uma variedade de algoritmos estocásticos para otimização que utilizam a geração de uma amostra aleatória de pontos [26].

Ainda, o problema de geração de variáveis aleatórias em  $\mathbb{R}^n$  de distribuição  $F$  tem um papel importante em sistemas de simulação estocástica. Entretanto, os algoritmos existentes sofrem com o problema de eficiência em problemas de caso geral. O problema básico é gerar um vetor aleatório  $X$  em  $\mathbb{R}^n$  com distribuição uniforme em uma região  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Na geração de vetores aleatórios em superfícies, a geração não se torna tarefa fácil nos casos em que é impossível encontrar uma boa parametrização da superfície, de forma a tornar possível a seleção de uma amostra de pontos uniformemente distribuídos em um conjunto  $A$  a tornar eficiente o método de Monte Carlo por rejeição [30].

Uma alternativa ao método de rejeição é o chamado método de Monte Carlo dinâmico. A idéia é construir uma cadeia de Markov ergódica com um kernel suficientemente simples (que possa ser simulada) e com a medida invariante que coincida com a distribuição desejada. O resultado é obtido realizando a simulação da cadeia de Markov a partir de um ponto arbitrário do domínio. Pelo fato de a convergência à medida invariante ser exponencialmente rápida à medida invariante, para um tempo de simulação suficientemente grande a distância da distribuição da amostra obtida estará suficientemente perto da medida desejada. O problema então se torna em construir uma cadeia de Markov ergódica que realize o serviço desejado.

Em [28], o problema da geração de vetores aleatórios de acordo com uma dada distribuição de probabilidade sobre uma região convexa é tratado pela construção de uma classe de algoritmos chamada 'Shake-and-Bake', que utiliza uma cadeia de Markov em que para parâmetros particulares torna-se o bilhar aleatório.

Em [4], observa-se que o processo aleatório desenvolvido pelo monstro em [17], o bilhar aleatório, tem distribuição estacionária uniforme no domínio convexo  $\mathcal{D}$ . Neste artigo, é proposto uma generalização deste processo para o caso multidimensional. Desta forma, é sugerida uma variante da integração multidimensional do método de Monte Carlo. Pelo fato da distribuição estacionária da sequência dos pontos de toque à superfície do domínio ser uniforme, observa-se que este processo permite a avaliação da integral de superfície.

No caso multidimensional, o método de rejeição de Monte Carlo, onde se emerge o domínio em um cubo para então tomar uma amostra aleatória com distribuição uniforme neste cubo, mostra-se inviável em altas dimensões, pois a eficiência de tal amostra se mostra pequena em domínios de baixo volume [30]. Por meio de simulações, é observado, neste artigo, que em casos de altas dimensões, o método proposto utilizando o bilhar aleatório tem uma eficiência superior ao método da rejeição de Monte Carlo. Em [5], é proposto o uso do bilhar aleatório no caso de um domínio conectado com fronteiras formadas por uma quantidade finita de superfícies de classe  $C^1$ . No entanto, como observado em [7], o bilhar aleatório pode não estar bem definido para qualquer superfície desta natureza. Veja mais detalhes na Seção 'Exemplo em um Domínio não Lipchitziano'.

### 1.1.3 Medidas Invariantes e Outros Resultados

Em [12], é considerado uma região  $d$ -dimensional com fronteiras continuamente diferenciáveis. Obtém-se o resultado da medida invariante. Também são considerados resultados em regiões poligonais no plano com lei de reflexão uniforme. Apesar de este artigo não considerar a condição de Lipschitz para a fronteira do domínio, em [7], mostra a necessidade desta suposição.

Em [7], é considerado o bilhar aleatório em um domínio geral, cuja fronteira satisfaz a condição de Lipschitz e tem derivada contínua exceto, talvez, em um conjunto de pontos de medida  $((d - 1)$ -dimensional de Hausdorff) nula. Mostra-se que o processo é bem definido e que existe a medida reversível para o processo a tempo discreto (considerando os momentos de colisão com a fronteira), e que existe a medida invariante para o par {posição, vetor da velocidade} para o processo a tempo contínuo. No caso da lei de reflexão cosseno (regime de Knudsen), mostra-se que estas medidas são uniformes, e a posição e velocidade são independentes.

Em [25] foi estudado este processo num domínio infinito, na forma  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq x^\gamma\}$ , onde  $0 < \gamma < 1$  ou  $\gamma < 0$  e lei da reflexão arbitrária.

Em [8], estuda-se o bilhar aleatório no regime de Knudsen num domínio tubular 'estacionário'. Prova-se, o Teorema Central de Limite ('quenched'). Em [9], obtém-se a igualdade de coeficientes de autodifusão e difusão de transporte para certos modelos de difusões de Knudsen em nanotubos.

## 1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, é definido o bilhar aleatório a partir de seu gerador infinitesimal. São colocadas e discutidas as principais suposições do modelo. Neste sentido, é apresentado na Seção 2.1 um exemplo, extraído de [7], da dinâmica do bilhar aleatório em uma fronteira que não satisfaça a condição de Lipschitz. Na Seção 2.2 é colocada a prova do resultado da medida invariante do bilhar aleatório e em seguida discutido o caso da lei de reflexão cosseno e suas particularidades. Na sequência ainda é descrito algumas propriedades geométricas da corda do bilhar aleatório.

No Capítulo 3, definiremos o sistema de partículas obtido por partículas injetadas no domínio a partir de suas fronteiras de acordo com um Processo Pontual de Poisson. A

cada toque das partículas à  $x$  na fronteira do domínio, as partículas podem ser absorvidas, independentemente de outras partículas ou do passado de suas trajetórias, com probabilidade  $1 - r(x)$  e refletidas com probabilidade  $r(x)$ . Obtemos, então, a medida invariante do sistema de partículas e na seção seguinte, obtemos condições para a velocidade de convergência à medida invariante. Na sequência estudamos o caso em que em uma parte da fronteira existe pura absorção de partículas (não há reflexão ou injeção) e em outra, injeção de partículas. Supomos ainda que a lei de reflexão seja a lei cosseno. Obtivemos que, neste caso, a densidade de partículas na posição  $x$  e direção  $v$  na medida invariante deste processo é proporcional à probabilidade de uma partícula em  $x$ , com direção  $-v$  atingir a fronteira de nascimento de partículas, antes de atingir a fronteira de absorção. Este resultado permite obter o perfil da densidade de partículas da medida invariante a partir de simulações de trajetórias que tenham como origem a região de interesse. Na seção seguinte, é realizada uma simulação de Monte-Carlo.

## 2 Bilhares Aleatórios

A seguir transcorreremos por definições, notações e suposições que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As suposições a respeito do domínio e dinâmica do bilhar aleatório se estenderão ao processo com injeção e absorção de partículas.

Dizemos que uma superfície  $\partial\mathcal{D}$   $(d-1)$ -dimensional satisfaz a condição de Lipschitz se para qualquer  $x \in \partial\mathcal{D}$ , existe  $\epsilon_x > 0$ , uma isometria afim  $\tau_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , uma função  $f_x : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

- $f_x$  satisfaz a condição de Lipschitz, isto é,  $\exists$  uma constante  $L_x > 0$  tal que  $|f_x(z)f_x(z')| < L_x|z - z'|$  para todo  $z, z'$ ;
- $\tau_x x = 0$ ,  $f_x(x) = 0$ , e

$$\tau_x(\mathcal{D} \cap B(x, \epsilon_x)) = \{z \in B(0, \epsilon_x) : z^{(d)} > f_x(z^{(1)}, \dots, z^{(d-1)})\},$$

onde  $B(x, \epsilon) = \{z \in \mathbb{R}^d : |x - z| < \epsilon\}$  é a bola aberta centrada em  $x \in \mathbb{R}^d$  e raio  $\epsilon$ .

Pelo Teorema de Rademacher ([13], Teorema 3.1.6), a condição de Lipschitz implica que a fronteira  $\partial\mathcal{D}$  é quase certamente diferenciável. Assumiremos, ainda, que a fronteira  $\partial\mathcal{D}$  é continuamente diferenciável quase certamente, isto é, para todos os pontos em que a fronteira  $\partial\mathcal{D}$  é continuamente diferenciável (chamaremos este conjunto por  $\mathcal{R}$ ), existe uma parametrização localmente  $\mathcal{C}^1$  de  $\partial\mathcal{D}$ , ainda,  $\mathcal{R}$  é aberto, e sob a medida de Hausdorff  $(d-1)$ -dimensional,  $\partial\mathcal{D} - \mathcal{R}$  tem medida nula.

Para todos os pontos  $x \in \partial\mathcal{D}$  em que a fronteira  $\partial\mathcal{D}$  é continuamente diferenciável, definimos o vetor  $n(x)$  como o vetor normal que aponta para o interior do domínio  $\mathcal{D}$ . Desta forma, o operador  $x \rightarrow n(x)$  é contínuo para todo  $x \in \mathcal{R}$ .

Sejam  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  um domínio conexo fechado limitado com fronteiras Lipschitzianas  $\partial\mathcal{D}$ , denotamos por  $\mathcal{S}^{d-1}$  a esfera  $d$ -dimensional unitária centrada na origem,  $\mathcal{S}_+^{d-1}$  a semi-esfera  $d$ -dimensional com primeira coordenada positiva,  $\mathcal{S}_-^{d-1}$  a semi-esfera  $d$ -dimensional com primeira coordenada negativa,  $\mathbb{E} = \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  o espaço de estados, onde para para elemento  $(x, v) \in \mathbb{E}$ ,  $x$  descreve a posição e  $v$  a direção de uma partícula em  $\mathcal{D}$ ,  $\gamma$  uma medida em  $\mathcal{S}_+^{d-1}$  que descreve a lei de reflexão.

Dada uma partícula  $(x, v) \in \mathbb{E}$ , definimos por  $r_x(v)$  a distância de  $x$  à fronteira do domínio na direção de  $v$ . Caso a partícula esteja na fronteira e aponte para fora do



domínio, ou seja,  $x \in \partial\mathcal{D}$  e  $v \notin \mathcal{S}_+^{d-1}$ , então definimos  $r_x(v) = 0$ , caso contrário,  $r_x(v) = \inf\{t > 0 : x + tv \in \partial\mathcal{D}\}$ . Definimos  $h_x(v)$  o ponto em  $\partial\mathcal{D}$  visto de  $x$  na direção de  $v$ . Para  $x \in \partial\mathcal{D}$ , e  $u \in \mathcal{S}^{d-1}$  chamamos de  $\varphi_x(u) = \arccos(x \cdot u)$  o arco entre a normal  $n(x)$  e a direção  $u$ .

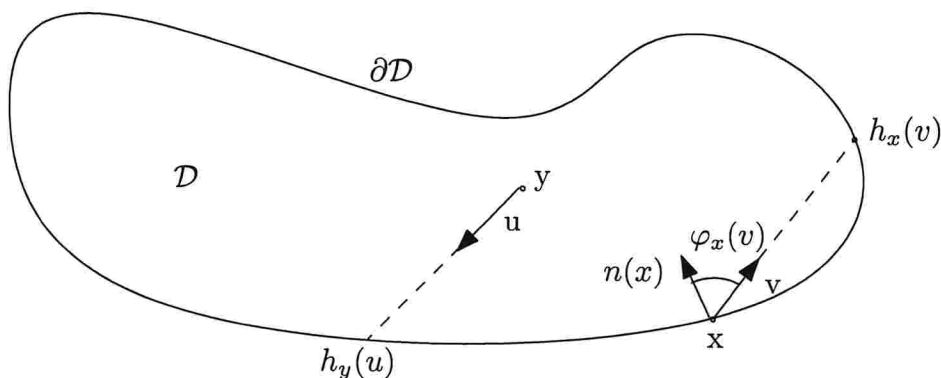


Figura 1: Definições de  $\varphi_x(v)$ ,  $r_x(v)$ ,  $h_x(v)$ .

Considere  $\mathcal{H}$  o conjunto das funções contínuas  $H : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall(x, v) \in \partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ ,  $v \cdot n(x) \leq 0$  seja satisfeito

$$H(x, v) = \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} H(x, u) \gamma(u) du. \quad (1)$$

O processo estocástico chamado de bilhar aleatório no domínio  $\mathcal{D}$ , com medida de reflexão  $\gamma$  é um processo com espaço de estados dado por  $\mathbb{E} = \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ , onde para para elemento  $(x, v) \in \mathbb{E}$ ,  $x$  descreve a posição e  $v$  a direção da partícula, e é caracterizado pelo gerador infinitesimal  $\mathcal{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\mathcal{L}(H)(x, v) = \nabla_x H \cdot v$ .

Dados quaisquer pontos  $x, y \in \mathcal{D}$ , definimos por  $l_{x,y} = \frac{y-x}{|y-x|}$  o vetor unitário com direção  $y \in \mathcal{S}^{d-1}$  a partir de  $x$ . Dizemos que  $y$  é visto de  $x$ , e representamos por  $x \leftrightarrow y$ , se existe  $u \in \mathcal{S}^{d-1}$  e  $s > 0$  talque  $x + tu \in \mathcal{D}$  para todo  $t \in (0, s)$  e  $y = x + su$ . Para  $x \in \partial\mathcal{D}$ , definimos o operador  $U_x$  como a rotação de  $\mathcal{S}^{d-1}$  que envia o vetor unitário  $e = (1, 0, \dots, 0)$  a  $n(x)$ .

Em [7], é descrita são discutidos em maiores detalhes as suposições que colocaremos a seguir.

A medida de reflexão  $\gamma$  poderia ter um carater geral como um suporte sem ser restrito a todo  $\mathcal{S}_+^{d-1}$ , ou assimétricas, ou com uma lei discreta ou ainda com componentes singulares.

No entanto, medidas com estas naturezas poderiam trazer dificuldades técnicas que estão fora de nossos objetivos. No caso de a medida de reflexão não ter suporte em toda semi-esfera, poderia ocorrer partes do domínio que não seriam vistas por outras partes do domínio. Por exemplo, suponha que a fronteira do domínio pudesse ser particionada nos conjuntos  $A, B, C$  e  $D$  de forma que há visitas apenas entre os conjuntos  $A, B$  e entre os conjuntos  $C, D$ . Isto levaria à possibilidade de o processo possuir mais de uma medida invariante. Desta forma, suporemos no decorrer do trabalho que a medida de reflexão  $\gamma$  tem suporte em  $\mathcal{S}_+^{d-1}$ .

Ainda, no caso de não se supor que a fronteira do domínio é de Lipschitz e continuamente diferenciável a condição de Doeblin (existe  $n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$  tal que para todo  $x, y \in \partial\mathcal{D}$ , a probabilidade de o passeio a partir de  $x$  visitar  $y$  em menos de  $n$  toques na fronteira é maior que  $\epsilon$ ) pode não ser satisfeita. Desta forma, não é garantida a ergodicidade do bilhar aleatório. Sem a condição de Lipschitz não é claro que o processo pode ser bem definido para todo  $t \geq 0$ . Quando a medida de reflexão  $\gamma$  é assimétrica o processo pode convergir para um ponto singular do domínio, como no exemplo a seguir. Desta forma, para o restante deste trabalho, iremos supor que a medida de reflexão é simétrica.

## 2.1 Exemplo em um Domínio não lipschitziano

No caso em que a lei de reflexão não é simétrica e a fronteira do domínio não é de Lipschitz, é possível que o bilhar aleatório venha a convergir para um ponto singular do domínio. Veremos a seguir um exemplo descrito em [7].

Considere um domínio dado por  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < 1; -x < y < x\}$ . Denotaremos por

$$\begin{aligned} G1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1; y = x^2\}, \\ G2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1; y = -x^2\}, \\ G3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1; -1 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Desta forma,  $\{G1, G2, G3\}$  forma uma partição da fronteira do domínio  $\mathcal{D}$ , conforme a figura 2.1.

Considere a densidade de reflexão em  $\mathcal{S}_+^{d-1}$  com a seguinte característica: Seja  $\beta$  o ângulo entre o elemento de  $\mathcal{S}_+^{d-1}$  e o vetor unitário  $(0, 1)$ , a densidade é dada por  $\gamma(\beta) =$

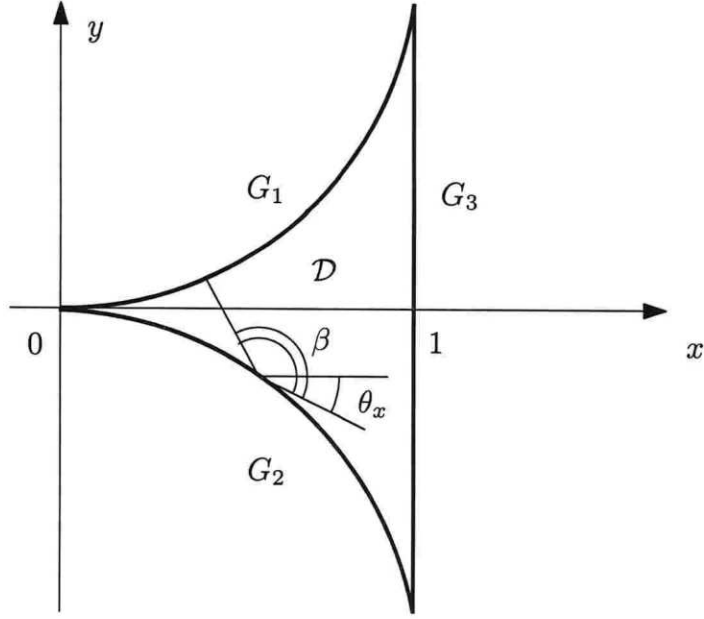


Figura 2: Exemplo de domínio não lipschtziano

$\frac{4}{\pi^4}\beta^3$ , para  $\beta \in (0, \pi)$ , quando a partícula está em  $G_1$ , e é dada por  $\gamma(\beta) = \frac{4}{\pi^4}(\pi - \beta)^3$ , para  $\beta \in (0, \pi)$ , quando a partícula está em  $G_2$ . Desta forma, a lei de reflexão tem uma assimetria.

Dado um ângulo  $\beta$ , denotaremos por  $h_x(\beta)$  o ponto destino da partícula ao partir de  $x$  com um ângulo de reflexão  $\beta$ , e por  $\theta_x$  o ângulo entre a tangente à fronteira do domínio em  $x$  e o vetor unitário  $(1, 0)$ . Seja  $g(x)$ , ou  $x_1$  a primeira coordenada de  $x \in \mathbb{R}^2$ . Defina

$$D_x(\beta) = g(h_x(\beta)) - g(x).$$

Verifica-se que

- $D_x(\beta) \leq 1$ , para  $\beta < 8x_1$ ,
- $D_x(\beta) \leq 8x_1^2/\beta$ , para  $\beta \in [8x_1; \pi/2 + \theta_x]$ ,
- $D_x(\beta) \leq 0$ , para  $\beta \in [\pi/2 + \theta_x; 3\pi/4 + \theta_x]$ ,
- $D_x(\beta) \leq -2x_1^2/3$ , para  $\beta > 3\pi/4 + \theta_x$ .

Ao denotar por  $(\xi_n), n \geq 0$ , o passeio aleatório dado pelos toques do bilhar aleatório na fronteira do domínio, com estado inicial  $\xi_0$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(\xi_{n+1}) - g(\xi_n)|\xi_n] &= \frac{4}{\pi^4} \int_0^\pi D_x(\beta)\beta^3 d\beta, \\ &\leq 0,\end{aligned}\tag{2}$$

para  $x$  suficientemente pequeno. Defina por  $\sigma(y_0)$  o primeiro instante em que a primeira coordenada do passeio  $\xi_n$  seja maior que  $y_0$ . Por (2), para  $y_0$  suficientemente pequeno, o processo  $g(\xi_{n \wedge \sigma(y_0)})$  é um supermartingal. Então existe  $g_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_{n \wedge \sigma(y_0)})$ , e pelo Lema de Fatou,  $\mathbb{E}[g_\infty] \leq \mathbb{E}[g(\xi_0)]$ . Se  $\xi_0 < y_0$ , isto implica que com probabilidade positiva  $\sigma(y_0) = \infty$ , e que quase certamente,

$$\xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, este bilhar aleatório, em um domínio que não satisfaz a condição de Lipschitz, converge para o ponto  $(0, 0)$ .

Em [7], ainda é colocada como uma questão a existência de algum exemplo de domínio em que o bilhar aleatório tenha este tipo de comportamento sem que seja necessário o uso de uma lei de reflexão que seja assimétrica. Diante, ou não, da existência de tais exemplos, pelo resultado de [7], em um domínio cuja fronteira seja de Lipschitz e continuamente diferenciável, garante-se que a condição de Doeblin (existe  $n, \epsilon > 0$  tal que para todo  $x, y \in \partial\mathcal{D}$ , a probabilidade de o passeio a partir de  $x$  visitar  $y$  em menos de  $n$  toques na fronteira é maior que  $\epsilon$ ) seja satisfeita e que, portanto, o bilhar aleatório esteja bem definido para todo  $t > 0$ .

## 2.2 Medida Invariante no caso geral

Nesta seção consideraremos um bilhar aleatório de lei de reflexão  $\gamma$  em um domínio conexo fechado limitado  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}$  com fronteira  $\partial\mathcal{D}$  de Lipschitz continuamente diferenciável. Obteremos uma expressão para a medida invariante em  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  deste processo.

Considere a medida  $\mu$  no espaço de estados  $\mathbb{E}$  tal que

$$\mu(dx, dv) = \psi(z_{x,v}) \frac{\gamma(\varphi_z(v))}{n(z_{x,v}) \cdot v},$$

onde  $z_{x,v} = h_x(-v)$ ,  $\varphi_x(v) = \arccos(x \cdot v)$  e  $z = h_x(-v)$ .

$\psi : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é tal que

$$\psi(x) = \int_{\partial\mathcal{D}} \psi(y) K(y, x) dy \tag{3}$$

onde  $K : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é dada por

$$K(x, y) = \frac{\gamma(U_x l_{x,y}) \cos \varphi_y(l_{y,x}) \cdot 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}}}{\|x - y\|^{d-1}}. \quad (4)$$

**Proposição 1** *A medida  $\mu$  em  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  é invariante para o bilhar aleatório.*

Denotaremos por  $E_\mu[\mathcal{L}h]$  o valor esperado de  $\mathcal{L}(h)(X)$ , onde  $X$  segue a lei  $\mu$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} E_\mu[\mathcal{L}h] &= \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_{\mathcal{D}} \nabla_x H(x, v) \cdot (v, 0) \mu(dx, dv) \\ &= \int_{\mathcal{S}^{d-1}} dv \int_{\mathcal{D}} dx \nabla_x H(x, v) \cdot (v, 0) \left[ \psi(z_{x,v}) \frac{\gamma(\varphi_z(v))}{n(z) \cdot v} \right]. \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned} E_\mu[\mathcal{L}h] &= - \int_{\mathcal{S}^{d-1}} dv \int_{\partial \mathcal{D}} dx \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x, v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \\ &= - \int_{\partial \mathcal{D}} dx \left[ \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x, v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{S}_-^{d-1}} dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x, v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

No caso de  $(x, v) \in \partial \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  tal que  $v \cdot n(x) > 0$ , temos que  $z = x$ , então,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \mathcal{D}} \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} dx dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x, v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} dx dv H(x, v) \psi(x) \gamma(\varphi_x(v)) \quad (6) \end{aligned}$$

Para todo  $(x, v) \in \partial \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ , tal que  $v \cdot n(x) < 0$ , devido a (1),  $H(x, v)$  não depende de  $v$ , definimos então  $\hat{H}(x) := H(x, v)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{S}_-^{d-1}} dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x, v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \\ &= \hat{H}(x) \int_{\mathcal{S}_-^{d-1}} dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição na variável  $v$  para  $y = h_x(-v) (= z_{x,v})$ , a região de integração passa do domínio  $\mathcal{S}_-^{d-1}$  para  $\{y \in \partial \mathcal{D} : y \leftrightarrow x\}$ . Temos que  $dv = dy \frac{\cos \beta}{\|x-y\|^{d-1}}$ , onde  $\beta = n(x) \cdot y$ . Como  $n(x) \cdot y = \cos \varphi_x(l_{x,y})$ , temos que:

$$\hat{H}(x) \int_{S_-^{d-1}} dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \quad (7)$$

$$= \hat{H}(x) \int_{\partial \mathcal{D}} dy \frac{\cos \varphi_x(l_{x,y})}{|x-y|} \psi(y) \gamma(\varphi_z(v)) \frac{n(z) \cdot v}{n(z) \cdot v} 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}}. \quad (8)$$

Pela equação (4), temos que

$$\begin{aligned} & \hat{H}(x) \int_{\partial \mathcal{D}} dy \frac{\cos \varphi_x(l_{x,y})}{|x-y|} \psi(y) \gamma(\varphi_z(v)) 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}} \\ &= \hat{H}(x) \int_{\partial \mathcal{D}} dy K(x,y) \psi(y). \end{aligned}$$

Pela igualdade (3),

$$\begin{aligned} & \hat{H}(x) \int_{\partial \mathcal{D}} dy K(x,y) \psi(y) \\ &= \hat{H}(x) \psi(x). \end{aligned}$$

Pela definição de  $\hat{H}(x)$ ,

$$\hat{H}(x) \psi(x) = \int_{S_+^{d-1}} du H(x,u) \gamma(u) \psi(x).$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{D}} \int_{S_-^{d-1}} dx dv \frac{n(x) \cdot v}{n(z) \cdot v} H(x,v) \psi(z_{x,v}) \gamma(\varphi_z(v)) \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \int_{S_+^{d-1}} dx du H(x,u) \gamma(u) \psi(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Por (9),(6),(5), obtemos

$$E_\mu[\mathcal{L}h] = 0,$$

Pela Proposição 2.13 de [23], obtemos o que precisávamos.

### 2.3 Lei de reflexão cosseno

Existe um caso especial de lei de reflexão dada por

$$\gamma(\beta) = \cos(\beta) \gamma_d, \quad \beta \in (0, \pi),$$

chamada por lei de reflexão cosseno, onde  $\gamma_d$  é a constante de normalização dada por

$$\gamma_d = \left( \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} \cos \varphi(e, u) du \right)^{-1}.$$

Sob esta lei de reflexão, o bilhar aleatório é chamado de Bilhar Estocástico de Knudsen e o passeio aleatório dado pelos toques na fronteira pelo bilhar aleatório chamado de Passeio Aleatório de Knudsen, com densidade de transição  $\tilde{K}(x, y)$  dada por

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, y) &= \frac{\gamma(U_x l_{x,y}) \cos \varphi_y(l_{y,x}) \cdot 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}}}{\|x - y\|^{d-1}}, \\ &= \frac{\gamma_d \cos \varphi_x(l_{x,y}) \cos \varphi_y(l_{y,x}) \cdot 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}}}{\|x - y\|^{d-1}}, \\ &= \frac{\gamma_d ((y - x) \cdot n(x)) ((x - y) \cdot n(y))}{\|x - y\|^{d-1}} \cdot 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \leftrightarrow y\}}. \end{aligned}$$

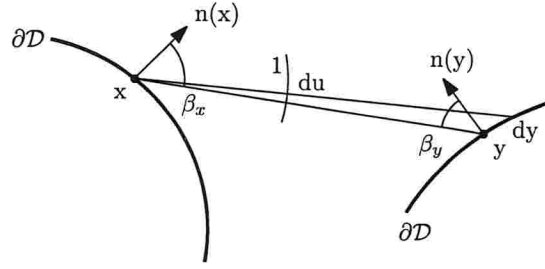


Figura 3: Densidade de Transição.

Definindo-se  $\hat{\mu}_0$  a medida de probabilidade uniforme em  $\partial \mathcal{D}$ , note que a densidade de transição  $\tilde{K}(x, y)$  para o Passeio Aleatório de Knudsen é simétrica e reversível pela medida  $\hat{\mu}_0$ . Portanto, invariante. Em [7], Teorema 2.1, é provada a unicidade desta medida invariante, a convergência exponencialmente rápida pela distância de variação total e o teorema central do limite.

No caso do Bilhar Estocástico de Knudsen, pela Proposição 1, a medida invariante  $\mu(dx, dv)$  é constante em  $x \in \mathcal{D}$  e  $v \in \mathcal{S}^{d-1}$ . De fato, pela simetria de  $K(x, y)$ , a função  $\psi(x)$  é constante. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mu(dx, dy) &= c_0 \frac{\gamma(\varphi_z(v))}{n(z_{x,v}) \cdot v} \\
&= c_0 \frac{\cos \varphi_z(v)}{n(z_{x,v}) \cdot v} \\
&= c_0 \frac{n(z_{x,v}) \cdot v}{n(z_{x,v}) \cdot v},
\end{aligned}$$

para alguma constante  $c_0 \in \mathbb{R}$ .

Concluimos que sob a lei de reflexão cosseno, a medida invariante para o bilhar aleatório é uniforme tanto na localização da partícula no domínio, quanto em sua direção. Ainda, pelo Teorema 2.5 de [7] seja  $(X_t, V_t)_{t \in \mathbb{R}}$  um Bilhar Estocástico de Knudsen estacionário, isto é,  $(X_t, V_t)$  é uniformemente distribuído em  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ , então,

$$(X_t, V_t)_{t \in \mathbb{R}} = (X_{-t}, -V_{-t})_{t \in \mathbb{R}}, \quad \text{em lei.} \quad (10)$$

Desta forma, a medida invariante uniforme não apenas é invariante, mas reversível a menos de uma mudança de sinal no vetor velocidade do processo.

## 2.4 Propriedades Geométricas da Corda

Nesta seção iremos discorrer sobre as propriedades geométricas de uma corda aleatória definida no bilhar aleatório no regime de Knudsen, ou seja, sob lei de reflexão cosseno. As definições e resultados aqui relatados são obtidos em [7].

Chamamos de uma corda aleatória para um domínio conexo limitado de Lipschitz  $\mathcal{D}$ , um par de variáveis aleatórias  $(\Xi_1, \Xi_2)$  em  $\partial\mathcal{D}$ , com densidade conjunta dada por  $|\partial\mathcal{D}|^{-1} \tilde{K}(x, y)$ . Pela simetria da função  $\tilde{K}$  no caso da reflexão cosseno, a construção define uma corda não orientada. É possível interpretar a construção desta corda da seguinte forma: tome uniformemente um ponto em  $\partial\mathcal{D}$  e trace uma corda a partir de um ângulo dado pela lei cosseno.

Se  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  é um conjunto convexo, a corda em  $\mathcal{D}$  que intersecta  $\mathcal{D}'$  define uma única corda em  $\mathcal{D}'$  por esta intersecção. Ao se gerar cordas aleatórias  $(\Xi_1, \Xi_2)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , até que a corda tenha intersecção com  $\mathcal{D}'$ , define-se esta intersecção como a corda induzida em  $\mathcal{D}'$ . Em [7], mostra-se que a corda induzida em  $\mathcal{D}'$  pela corda de  $\mathcal{D}$ , também é uma corda aleatória para o domínio  $\mathcal{D}'$  com densidade  $|\partial\mathcal{D}'|^{-1} \tilde{K}(x, y)$ .



Para qualquer conjunto mensurável  $A \subset \mathcal{D}$ , definimos por  $m(A)$  o tempo médio em que um bilhar aleatório no regime de Knudsen, passa em  $A$  até atingir a fronteira ao ser selecionado de maneira uniforme o estado inicial do processo.

Em [7], mostra-se que  $m(A) = k_d \frac{|A|}{|\mathcal{D}|}$ , onde  $k_d$  é uma constante dada por  $k_d := d\pi^{1/2} \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2+1)}$ . Ainda, definindo por  $\bar{m} = \mathbb{E}[|\Xi_1 - \Xi_2|]$  o tempo médio entre consecutivos toques à fronteira, tem-se que  $\bar{m} = k_d \frac{|\mathcal{D}|}{|\partial\mathcal{D}|}$ . A quantidade  $\bar{m}$  também pode ser interpretada como o tamanho médio de uma corda aleatória no domínio  $\mathcal{D}$ . Este resultado mostra que é possível obter a quantidade  $|\mathcal{D}|/|\partial\mathcal{D}|$ , sem necessidade de se obter  $|\mathcal{D}|$  e  $|\partial\mathcal{D}|$  separadamente, ao simular o bilhar aleatório no regime de Knudsen.

### 3 Construção do Processo de partículas independentes

Nesta seção, consideramos que partículas evoluem independentemente no domínio  $\mathcal{D}$  de acordo com o bilhar aleatório, novas partículas são injetadas pela fronteira do domínio de acordo com um Processo de Poisson, e que a cada toque da partícula à fronteira do domínio  $\mathcal{D}$ , a partícula pode ser absorvida. Neste momento, com probabilidade  $1 - r(x)$   $x \in \partial\mathcal{D}$ , a partícula  $(x, v)$  é absorvida e com probabilidade complementar  $r(x)$  a partícula reflete com um vetor de velocidade dada pela lei de reflexão  $\gamma(x)$ . Novas partículas  $(x, v) \in \partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ ,  $v \cdot n(x) > 0$  são injetadas com taxa  $\nu(x, v)$ .

Para garantir a ergodicidade do sistema de partículas e para que o conjunto da fronteira do domínio que não seja visitado pelas partículas seja nulo na medida (d-1)-dimensional de Hausdorff da fronteira, supomos que, assim como a medida de reflexão  $\gamma(x)$  tenha suporte em  $\mathcal{S}_+^{d-1}$ , a medida de injeção de partículas, em cada ponto  $x \in \partial\mathcal{D}$  em que  $n(x)$  esteja definido também tenha suporte em  $\mathcal{S}_+^{d-1}$ .

Seja  $X_t(\gamma, r, \nu)$   $t \geq 0$  um processo Markoviano de partículas em um domínio conexo limitado  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  com fronteiras Lipschitzianas  $\partial\mathcal{D}$ . O espaço de estados  $E$  é o conjunto de medidas de contagem em  $\bar{\mathcal{D}} \times \mathcal{S}^{d-1}$ . Note que para todo  $\eta \in E$ ,  $\eta$  é caracterizado por  $\{(x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_n, v_n)\}$ , o conjunto de pares de posições e vetores de velocidade de uma quantidade finita de partículas em  $\mathcal{D}$ . Desta forma, o processo será denotado por  $\underline{X}(t) = \{(x_i, v_i)(t), i = 1, \dots, N(t)\}$ , onde  $(x_i, v_i)(t)$  denota a posição e o vetor velocidade da partícula  $i$  da configuração  $\underline{X}(t)$ .

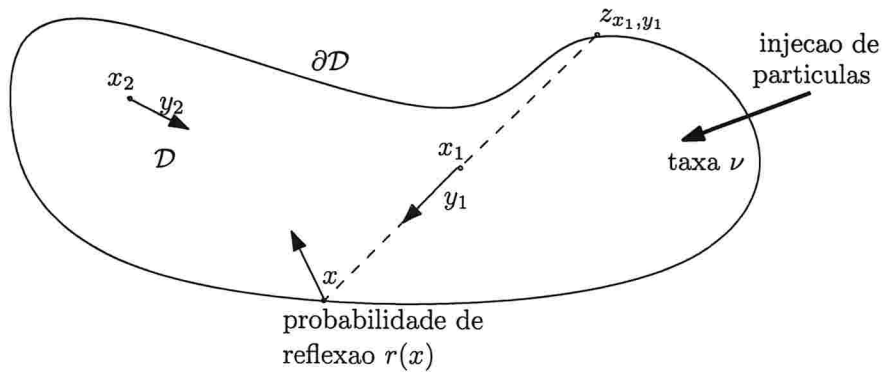


Figura 4: Sistema de Injeção e Absorção de Partículas

Note que, sem criar ambiguidades, denotaremos uma configuração  $\eta$  por  $(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_j, v_j)$ , onde  $j$  é o número de partículas da configuração  $\eta$ .

Seja  $H : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$H(\eta) = \begin{cases} c, & \text{se } \eta = \emptyset \\ h_j(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_j, v_j), & \text{se } |\eta| = j, j \geq 1. \end{cases}$$

para alguma função  $h_j : (\bar{\mathcal{D}} \times \mathcal{S}^{d-1})^j \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todas as permutações  $\sigma_j : \{1, 2, \dots, j\} \rightarrow \{1, 2, \dots, j\}$ , vale

$$h_j(x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_i, v_i) = h_j(x_{\sigma_j(1)}, v_{\sigma_j(1)}, x_{\sigma_j(2)}, v_{\sigma_j(2)}, \dots, x_{\sigma_j(j)}, v_{\sigma_j(j)}). \quad (11)$$

Seja  $\mathcal{H}$  o conjunto das funções contínuas  $H$  em  $E$  que satisfaça (11) e  $\forall (x_1, v_1) \in \partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}, v_1 \cdot n(x_1) \leq 0$  satisfaz

$$\begin{aligned} h_j(x_1, v_1, \dots, x_j, v_j) &= r(x_1) \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} h_j(x_1, v_1, \dots, x_j, v_j) \gamma(\varphi_{x_1}(v_1)) dv_1 \\ &+ (1 - r(x_1)) h_{j-1}(x_2, v_2, \dots, x_j, v_j). \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\bar{\nu} = \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}} \nu(x, v) dx dv$  é a taxa total de nascimento.

Considere o gerador infinitesimal a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(H)(\eta) &= \sum_{k=1}^j (\nabla_{x_k} \cdot v_k) H(\eta) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} [H(\eta \cup (x, v)) - H(\eta)] \nu(x, v) dx dv, \forall \eta \in E, h \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Dizemos que um processo  $X_t(\gamma, r, \nu)^\eta, t \geq 0$  com gerador infinitesimal dado por  $\mathcal{L}(H)$  é um **sistema de bilhares aleatórios** com injeção de partículas à taxa  $\nu$  no domínio  $\mathcal{D}$  e taxa de reflexão  $r$  e estado inicial  $\eta \in E$ .

Pelo fato de o sistema permitir a injeção de partículas, caso não haja absorção, a quantidade de partículas no sistema poderia explodir e desta forma não ter definida uma medida invariante. Veremos pela Proposição 3 que a condição abaixo é uma condição suficiente para que o número de partículas no sistema não exploda:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (1 - r(x)) dx > 0. \quad (13)$$

**Proposição 2** *Se a probabilidade de absorção  $1 - r(x)$  satisfaz (13), então a distribuição do tempo de permanência das partículas em  $\mathcal{D}$  tem decaimento exponencial.*

*Prova*

Pelo fato de o suporte da medida de reflexão  $\gamma$  ser  $\mathcal{S}_+^{d-1}$ , o passeio aleatório  $\xi_n$  dado pela dinâmica da visita à fronteira do bilhar aleatório tem, quase certamente, suporte em  $\partial\mathcal{D}$ .

Por (13), existe  $\epsilon > 0$  e um conjunto aberto  $A \subset \partial\mathcal{D}$  talque  $(1 - r(x)) > \epsilon, \forall x \in A$ . Por (i) do Teorema 2.1 de [7], a densidade  $\psi$  em (3) pode ser escolhida de forma que  $\psi(x) > 0$ , ou seja, dado o aberto  $A$ , a medida invariante do passeio aleatório  $\xi_n$  dado pelas visitas do bilhar aleatório à fronteira tem medida positiva em  $A$ , portanto, visita infinitas vezes o conjunto  $A$ .

Note que o tempo médio de permanência de partículas em  $\mathcal{D}$  é dominado pelo tempo médio de absorção da partícula dada pela dinâmica onde a partícula é absorvida apenas no conjunto  $A$  com probabilidade  $\epsilon$ , pois pelo fato de  $(1 - r(x)) > \epsilon > 0, \forall x \in A$ , a cada visita do passeio aleatório em  $A$ , existe probabilidade maior que  $\epsilon$  de absorção.

Como os eventos de absorção de partículas são independentes, a cada visita do passeio ao conjunto  $A$ , a variável dada pelo número de visitas ao conjunto  $A$  até que a partícula seja absorvida é dominada por uma variável aleatória geométrica com probabilidade de sucesso  $\epsilon$ .

Como o domínio é finito, o tempo médio entre visitas ao conjunto  $A$  é finito. Desta forma, o tempo médio de permanência de partículas em  $\mathcal{D}$  é dominado por uma soma geométrica de variáveis aleatórias de média finita, portanto, com decaimento exponencial, como precisávamos.

□

A Proposição 3, a seguir, mostra que o resultado acima é suficiente para que o sistema não venha a explodir. Este resultado é equivalente ao conhecido como fórmula de Little para um sistema de filas onde a chegada de partículas ocorre por um processo pontual de poisson com taxa  $\lambda$  e  $T$  é o tempo médio das partículas no sistema. O Teorema de Little estabelece que o número médio de partículas no sistema é dado por  $\lambda.T$ .

**Proposição 3** *Caso a probabilidade de reflexão satisfaça (13), sob o regime estacionário, o número médio de partículas no sistema é dado por  $\mathbb{E}[T] \cdot \bar{\nu}$ .*

Seja  $(B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  os instantes de nascimento entre partículas e  $(T_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  o tempo de permanência das partículas em  $\mathcal{D}$  até sua absorção.

Então, pela definição do processo de injeção de partículas,  $(B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  são marcas de um Processo Pontual de Poisson de taxa  $\nu$ .

Seja  $\tau$  a distribuição do tempo de permanência das partículas em  $\mathcal{D}$ . Como a trajetória das partículas são independentes uma das outras,  $(T_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência de v.a.i.i.d. com distribuição  $\tau$ .

Desta forma,  $(B_i, T_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  tem a distribuição de um Processo Pontual de Poisson em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  de intensidade dada por  $\gamma(dx, dy) = \bar{\nu} \cdot \tau(dy)$ .

Dado  $t > 0$ , o número de partículas no sistema no instante  $t$  é dado pela região de pontos na região  $A_t := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : t - y < x < t\}$ .

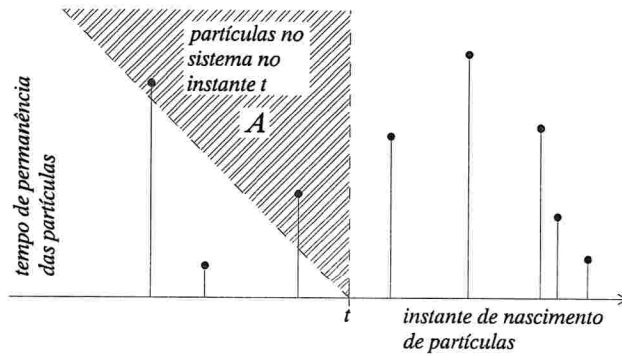


Figura 5: Partículas no Sistema no instante  $t$ .

Portanto o número médio de partículas do sistema em equilíbrio é dado por

$$\begin{aligned} \int_{A_t} dx \bar{\nu} \cdot d\tau(y) &= \int_{-\infty}^t \int_{t-y}^t dx \bar{\nu} \cdot d\tau(y) \\ &= \bar{\nu} \int_0^\infty \int_x^\infty dx d\tau(y) = \bar{\nu} \int_0^\infty \mathbb{P}[T_1 > x] dx \\ &= \bar{\nu} \cdot \mathbb{E}[T_1], \end{aligned}$$

Como a taxa de reflexão satisfaz (13), pela Proposição 2,  $\mathbb{E}[T_1] < \infty$ , portanto, o número médio de partículas no sistema em equilíbrio é finito, como precisávamos.

□

### 3.1 Medida Invariante no sistema de partículas

Nesta seção consideraremos o caso em que a fronteira do domínio  $\partial\mathcal{D}$  possa ser particionada em uma região de pura reflexão de partículas  $\mathcal{D}_r \subset \partial\mathcal{D}$  e em uma região de pura absorção de partículas  $\mathcal{D}_a \subset \partial\mathcal{D}$ . Neste caso, a probabilidade de reflexão é dada por

$$r(x) = 1_{\{x \notin \mathcal{D}_a\}}, x \in \partial\mathcal{D}.$$

Note que para que seja satisfeita a condição (13), basta que o conjunto  $\partial\mathcal{D} - \mathcal{D}_r$  tenha medida positiva com relação à medida (d-1)-dimensional de Hausdorff da fronteira.

Neste caso a Proposição 1 a seguir estabelece uma medida invariante para o sistema de partículas.

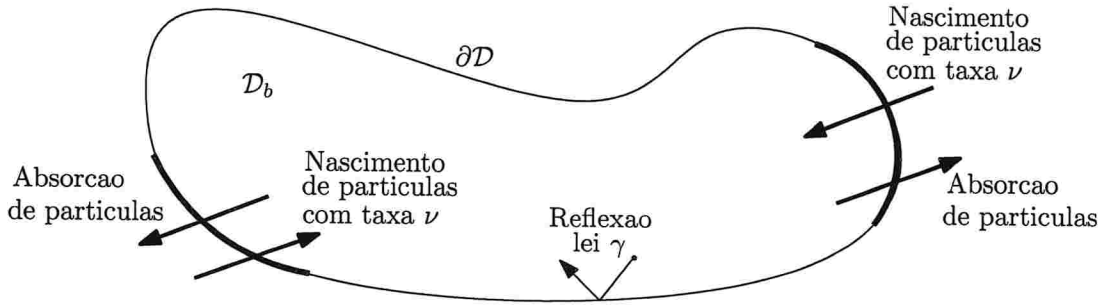


Figura 6: Cálculo da Medida Invariante

**Teorema 1** *Se a região de absorção  $\mathcal{D}_a \subset \partial\mathcal{D}$  é igual à região de nascimento  $\mathcal{D}_b \subset \partial\mathcal{D}$ ,  $r(x) = 1_{\{x \notin \mathcal{D}_a\}}$  e  $\nu(x, v) = \psi(x)\gamma(\varphi_x(v))\lambda$ , então o Processo Pontual de Poisson (PPP) com intensidade  $\mu$  em  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  é invariante para o sistema de bilhares aleatórios  $X_t(\gamma, r, \nu)^\eta$ ,  $t > 0$ , se  $\mu$  satisfaz*

$$\mu(dx, dy) = \psi(z) \frac{\gamma(U_z^{-1}v)}{\cos \varphi_z(v)} dx dv, \quad z = h_x(-v), \quad (14)$$

$\psi : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é tal que

$$\psi(x) = \int_{\partial\mathcal{D}} \psi(y) K(y, x) dy \quad (15)$$

onde  $K : \bar{\mathcal{D}} \times \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é dada por

$$K(x, y) = \frac{\bar{\gamma}(U_x l_{x,y}) \cos \varphi_y(l_{y,x}) \cdot 1_{\{x,y \in \partial \mathcal{D}, x \rightarrow y\}}}{|x - y|^{d-1}} \quad (16)$$

onde  $x \rightarrow y$  se  $x \in h_y^{-1}(U_y^{-1}(\mathcal{S}_+^{d-1}))$  e  $x \notin \mathcal{D}_a$ .

*Prova*

Pela propriedade de simetria (11) da função  $H$ , temos que

$$\sum_{k=1}^j (\nabla_{x_k} \cdot v_k) H = j (\nabla_{x_1} \cdot v_1) H.$$

Para  $1 \leq k \leq l$ , denotaremos por  $\underline{x}_{k,l}$  o vetor  $(x_k, x_{k+1}, \dots, x_l)$  e por  $\underline{v}_{k,l}$  o vetor  $(v_k, v_{k+1}, \dots, v_l)$ . Ao tomar a esperança em relação à medida  $\mu$ , da quantidade acima, obtemos

$$\mathbb{E}_\mu \left[ \sum_{k=1}^j (\nabla_{x_k} \cdot v_k) H \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}} \hat{\mu}^j}{j!} j \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} \mu(d\eta \mid |\eta| = j) (\nabla_{x_1} \cdot v_1) H(\eta)$$

Pelo Teorema da Divergência, e pelas propriedades da medida  $\mu$ , (14),

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}} \hat{\mu}^j}{j!} j \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} \mu(d\eta \mid |\eta| = j) (\nabla_{x_1} \cdot v_1) H(\eta) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}} \hat{\mu}^j}{j!} j \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^{j-1}} d\mu(d\underline{x}_{2,j} d\underline{v}_{2,j} \mid |\eta| = j-1) \\ & \quad \cdot \int_{\partial \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) d\mu(x_1, v_1 \mid |\eta| = 1) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}} \hat{\mu}^j}{(j-1)! \hat{\mu}^j} \frac{1}{j} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^{j-1}} \left( \prod_{l=2}^j \psi(z_l) \frac{\gamma(U_{z_l}^{-1} v_l)}{\cos \varphi_{z_l}(v_l)} \right) \\ & \quad \cdot \int_{\partial \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $z_l = h_{x_l}(-v_l)$ ,  $l \geq 1$ .

Denotaremos

$$\begin{aligned}
R_+^a &:= \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} \\
R_-^a &:= \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_-^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} \\
R_+^r &:= \int_{\partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} \\
R_-^r &:= \int_{\partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}_-^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)}.
\end{aligned}$$

Note que para todo  $(x_1, v_1) \in \partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}$ ,  $z_1 = x_1$ , portanto

$$\begin{aligned}
R_+^r &= \int_{\partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \frac{\gamma(U_{x_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{x_1}(v_1)} \\
&= \int_{\partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \gamma(U_{x_1}^{-1} v_1).
\end{aligned}$$

Note também que, na fronteira de reflexão, ou seja, para  $(x_1, v_1) \in \partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}^{d-1}$ ,  $r(x_1) = 1$  e que pela restrição (12),  $H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j})$  não depende de  $v_1$ , definimos então  $\hat{H}(\underline{x}_{1,j}, \underline{x}_{2,j}) := H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j})$ . Então

$$R_-^r = \int_{\partial\mathcal{D}_r} dx_1 \hat{H}(\underline{x}_{2,j}, \underline{v}_{1,j}) \int_{\mathcal{S}_-^{d-1}} dv_1 \psi(x_1) \gamma(U_{x_1}^{-1} v_1).$$

Realizando uma substituição de variáveis de forma análoga à adotada em (7) e pelos argumentos análogos subsequentes utilizando (15) e (16), obtém-se que

$$\begin{aligned}
R_-^r &= - \int_{\partial\mathcal{D}_r \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \gamma(U_{x_1}^{-1} v_1) \\
&= -R_+^r
\end{aligned} \tag{18}$$

Note que para  $(x_1, v_1) \in \partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_-^{d-1}$ ,  $r(x_1) = 0$  e que pela restrição (12),

$$H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) = H(\underline{x}_{2,j}, \underline{v}_{2,j}).$$

Portanto,

$$R_-^a = H(\underline{x}_{2,j}, \underline{v}_{2,j}) \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_-^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1} v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)}.$$



Efetuada uma substituição de variáveis de forma análoga à adotada em (7) e e pelos argumentos análogos subsequentes utilizando (15) e (16), obtém-se que

$$\int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_-^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1}v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} = \int_{\partial\mathcal{D}_a} \psi(x_1) dx_1,$$

e portanto,

$$R_-^a = H(\underline{x}_{2,j}, \underline{v}_{2,j}) \int_{\partial\mathcal{D}_a} \psi(x_1) dx_1. \quad (19)$$

Note que para  $(x_1, v_1) \in \partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_+^{d-1}$ ,  $x_1 = z_1$ , então,

$$\begin{aligned} R_+^a &= \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \frac{\gamma(U_{x_1}^{-1}v_1)}{\cos \varphi_{x_1}(v_1)} \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \gamma(U_{x_1}^{-1}v_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Por (17), (18),(19),(20),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[ \sum_{k=1}^j (\nabla_{x_k} \cdot v_k) H \right] &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}} \hat{\mu}^j}{(j-1)! \hat{\mu}^j} \frac{1}{j} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^{j-1}} \left( \prod_{l=2}^j \psi(z_l) \frac{\gamma(U_{z_l}^{-1}v_l)}{\cos \varphi_{z_l}(v_l)} \right) \\ &\quad \cdot \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}} dx_1 dv_1 \ n(x_1) \cdot v_1 H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(z_1) \frac{\gamma(U_{z_1}^{-1}v_1)}{\cos \varphi_{z_1}(v_1)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}}}{(j-1)!} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^{j-1}} \left( \prod_{l=2}^j \psi(z_l) \frac{\gamma(U_{z_l}^{-1}v_l)}{\cos \varphi_{z_l}(v_l)} \right) \\ &\quad \left[ H(\underline{x}_{2,j}, \underline{v}_{2,j}) \int_{\partial\mathcal{D}_a} \psi(x_1) dx_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\mathcal{D}_a \times \mathcal{S}_+^{d-1}} dx_1 dv_1 \ H(\underline{x}_{1,j}, \underline{v}_{1,j}) \psi(x_1) \gamma(U_{x_1}^{-1}v_1) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

A seguir, consideremos a quantidade

$$\int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} [H(\eta \cup (x, v)) - H(\eta)] \nu(x, v) dx dv.$$

Ao tomarmos a esperança, em relação à medida  $\mu$ , da integral referente ao termo  $H(\eta)$

da quantidade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\mu \left[ \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} H(\eta) \nu(s, u) ds du \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[ H(\eta) \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} \nu(s, u) ds du \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[ H(\eta) \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s) \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} du \gamma(\varphi_s(u)) \right] \\
&= \mathbb{E}_\mu [H(\eta) \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s)] \\
&= \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s) \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}}}{j!} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} H(\underline{x}_j, \underline{v}_j) \left( \prod_{k=1}^j \psi(z_k) \frac{\gamma(U_{z_k}^{-1} v_k)}{\cos \varphi_{z_k}(v_k)} \right) \right]. \quad (22)
\end{aligned}$$

Ao tomarmos a esperança em relação à medida  $\mu$ , da integral referente ao termo  $H(\eta \cup (x, v))$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\mu \left[ \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} H(\eta \cup (s, u)) ds du \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}}}{j!} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} d\underline{x}_{1,j} d\underline{v}_{1,j} \left( \prod_{k=1}^j \psi(z_k) \frac{\gamma(U_{z_k}^{-1} v_k)}{\cos \varphi_{z_k}(v_k)} \right) \\
&\quad \cdot \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s) \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} du H(s, u, \underline{x}_j, \underline{v}_j) \gamma(\varphi_s(u)). \quad (23)
\end{aligned}$$

De (22) e (23), temos que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\mu \left[ \int_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}_+^{d-1}} [H(\eta \cup (x, v)) - H(\eta)] \nu(x, v) dx dv \right] = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}}}{j!} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} d\underline{x}_{1,j} d\underline{v}_{1,j} \left( \prod_{k=1}^j \psi(z_k) \frac{\gamma(U_{z_k}^{-1} v_k)}{\cos \varphi_{z_k}(v_k)} \right) \\
&\quad \cdot \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s) \int_{\mathcal{S}_+^{d-1}} du H(s, u, \underline{x}_j, \underline{v}_j) \gamma(\varphi_s(u)) \\
&\quad - \int_{\partial\mathcal{D}_a} ds \psi(s) \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\hat{\mu}}}{j!} \int_{(\mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1})^j} H(\underline{x}_j, \underline{v}_j) \left( \prod_{k=1}^j \psi(z_k) \frac{\gamma(U_{z_k}^{-1} v_k)}{\cos \varphi_{z_k}(v_k)} \right) \right] \quad (24)
\end{aligned}$$

De (21) e (24), temos que

$$\mathbb{E}_\mu \mathcal{L}H = 0.$$

Pela Proposição 2.13 de [23], obtemos o que precisávamos.

## 3.2 Velocidade de Convergência

Nesta seção é mostrado que a velocidade de convergência em relação à distância total de variação do bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas decai exponencialmente.

Dada uma medida  $\kappa$  sobre o espaço de estados  $E$ , denotaremos por  $\kappa^t$ ,  $t > 0$ , a medida no instante  $t$  da dinâmica do bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas com medida inicial  $\kappa$ . Dadas duas medidas  $\kappa$  e  $\theta$  com espaço de estados  $\Omega$  e sigma-algebra  $\mathcal{F}$ , denotamos por  $\|\kappa - \theta\|$  a distância total de variação entre estas medidas com definida por:

$$\|\kappa - \theta\| = \sup\{|\kappa(A) - \theta(A)| : A \in \mathcal{F}\}.$$

Dada uma filtração  $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ , isto é, uma família de  $\sigma$ -algebras  $F_t \subset F, \forall t$ , tal que,  $s \leq t \Rightarrow F_s \subset F_t$ , um tempo de parada  $T$  é uma variável aleatória tal que  $[T > t] \in F_t, \forall t$ .

Seja  $Z$  e  $Z'$  um processo estocástico com espaço geral  $(E, \mathcal{E})$  e um espaço de trajetórias  $(H, \mathcal{H}, P)$ .

Seja  $Q$  uma medida conjunta dos processos  $Z$  e  $Z'$ . Dizemos que  $Q$  é um acoplamento exato de  $Z$  e  $Z'$ , se,  $Q$ -quase certamente, para todo  $t > 0$  tal que  $Z_t = Z'_t$ , tem-se  $Z_s = Z'_s$ , para todo  $s > t$ . Dizemos que  $T = \inf\{t > 0 : Z_t = Z'_t\}$  é o tempo de acoplamento. Note que para a filtração  $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$  dada pelo conjunto de eventos observados até o instante  $t$  pelo sistema,  $T$  é um tempo de parada.

**Lema 1** (Teorema 5.1 de Thorisson [31]) *Sejam  $Z$  e  $Z'$  processos estocásticos em tempo contínuo, com distribuições iniciais  $\kappa$  e  $\theta$ , respectivamente. Se existe um acoplamento exato de  $Z$  e  $Z'$  com tempo de acoplamento  $T$ , então para  $0 \leq t < \infty$ ,*

$$\|\kappa^t - \theta^t\| \leq 2\mathbb{P}[T > t].$$

Seja  $T_1$  o tempo que uma partícula permanece no domínio  $\mathcal{D}$ . Pela Proposição 2, considere a constante  $c > 0$  tal que  $\mathbb{P}[T_1 > t] \approx e^{-ct}$ ,  $t > 0$ .

**Teorema 2** (Velocidade de Convergência) *Seja  $\mu$  a medida invariante do bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas e dada uma medida inicial  $\kappa$  para o bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas tal que  $N(\kappa)$  seja o número de partículas no estado inicial. Então no caso em que:*

- $\mathbb{P}[N(\kappa) > t] \approx e^{-c_1 t}$ , para algum  $c_1 > 0$ ,

$$\|\kappa^t - \mu\| \leq c_0 e^{-ct},$$

para algum  $c_0 > 0$ .

- $\mathbb{P}[N(\kappa) > t] \approx n^{-\alpha t}$ , para algum  $\alpha \in (1, 2)$ ,

$$\|\kappa^t - \mu\| \leq c_0 e^{-c(\alpha-1)t},$$

para algum  $c_0 > 0$ .

*Prova.*

Dada uma medida inicial  $\kappa$  para o bilhar aleatório, seja  $N(\kappa)$  a variável aleatória dada pela quantidade inicial de partículas da medida  $\kappa$  e por  $N(\mu)$  a variável aleatória dada pela quantidade inicial de partículas da medida  $N(\mu)$ .

Sejam  $(X_{1,t})_{t>0}, (X_{2,t})_{t>0}, \dots, (Y_{1,t})_{t>0}, (Y_{2,t})_{t>0}, (W_{1,s})_{s>0}, (W_{2,s})_{s>0}$  as dinâmicas de bilhares aleatórios independentes, tal que a medida de  $(X_{1,0})_{t>0}, \dots, (X_{N(\kappa),0})_{t>0}$  seja  $\kappa$ , que a medida de  $(Y_{1,0})_{t>0}, \dots, (Y_{N(\mu),0})_{t>0}$  seja  $\mu$ , e que a medida inicial de  $(W_{i,s})_{s>0}$ ,  $i \geq 1$ , seja dada pela medida de injeção de partículas no domínio  $\mathcal{D}$ .

Chamamos por  $\mathcal{D}_a$  a região de absorção de partículas. Sejam  $t_{X_k} = \inf\{t > 0 : X_{1,t} \in \mathcal{D}_a\}$ , para  $j \geq 1$ , e analogamente  $t_{Y_k} = \inf\{t > 0 : Y_{1,t} \in \mathcal{D}_a\}$ , os instantes em que os bilhares aleatórios sejam absorvidos.

Seja  $(M_t)_{t>0}$ ,  $M_0 = 0$ , um Processo Pontual de Poisson com taxa de nascimento dada pela taxa de nascimento das partículas no bilhar aleatório e defina  $s_i = \inf\{t > 0 : M_t = i\}$ ,  $i \geq 1$ , o instante de nascimento da  $i$ -ésima partícula.

Defina os processos:

$$P_{1,t} = \bigcup_{n=0}^{N(\kappa)} X_{n,t} \cdot 1\{t < t_{X_n}\} \bigcup_{i=0}^{\infty} 1\{M_t < t\} W_{i,t-s_i}$$

$$P_{2,t} = \bigcup_{n=0}^{N(\mu)} Y_{n,t} \cdot 1\{t < t_{Y_n}\} \bigcup_{i=0}^{\infty} 1\{M_t < t\} W_{i,t-s_i}.$$

Então,  $(P_{1,t})_{t>0}$  é um bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas com medida inicial dada pela medida  $\kappa$  e  $(P_{2,t})_{t>0}$  é um bilhar aleatório com injeção e absorção de partículas com medida inicial dada pela medida invariante  $\mu$ .

Seja  $T = \sup\{t_{X_1}, \dots, t_{X_{N(\kappa)}}, t_{Y_1}, \dots, t_{Y_{N(\mu)}}\}$ , o instante em que todas as partículas iniciais, tanto do processo  $(P_{1,t})$ , quanto do processo  $(P_{2,t})$  são absorvidas. Então, temos que após o instante  $T$ , os processos  $(P_{1,t})$  e  $(P_{2,t})$  são formados pelas mesmas partículas, e portanto,

$$(P_{1,t}) = (P_{2,t}), \quad \forall t > T, \quad \text{quase certamente,}$$

ou seja,  $T$  é um tempo de acoplamento entre os dois processos.

A seguir calcularemos a cauda da distribuição da variável  $T$ .

$$\mathbb{P}[T > t] = \sum_{n,k \geq 0} \mathbb{P}[T > t | N(\kappa) = n, N(\mu) = k] \cdot \mathbb{P}[N(\kappa) = n] \cdot \mathbb{P}[N(\mu) = k].$$

Como  $N(\mu)$  tem distribuição Poisson,  $\mathbb{E}[N(\mu)] < \infty$ . Para o caso em que  $\mathbb{E}[N(\kappa)] < \infty$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > t] &= \sum_{n,k \geq 0} \mathbb{P}[\max\{T_{X_1}, \dots, T_{X_k}, T_{Y_1}, \dots, T_{Y_k}\} > t] \cdot \mathbb{P}[N(\kappa) = n] \cdot \mathbb{P}[N(\mu) = k] \\ &\leq \sum_{n,k \geq 0} (n+k) \mathbb{P}[T > t] \cdot \mathbb{P}[N(\kappa) = n] \cdot \mathbb{P}[N(\mu) = k] \\ &= \mathbb{P}[T_1 > t] \cdot \mathbb{E}[N(\kappa) + N(\mu)], \end{aligned}$$

onde  $T_1 := T_{X_1}$  é o tempo até uma partícula ser absorvida. Pela Proposição 2,  $\mathbb{P}[T_1 > t] \approx e^{-c_0 t}$  para algum  $c_0 \in \mathbb{R}$ , como precisávamos.

Considere o caso em que  $\mathbb{P}[N(\kappa) = n] \approx n^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ . Denotaremos por  $p_n := \mathbb{P}[N(\kappa) = n]$  e por  $q_k := \mathbb{P}[N(\mu) = k]$ . Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > t] &= \sum_{n,k \geq 0} (1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \cdot p_n \cdot q_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}, n > f(t)} (1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \cdot p_n \cdot q_k + \sum_{k \in \mathbb{N}, n \leq f(t)} (1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \cdot p_n \cdot q_k. \end{aligned}$$

Como  $1 - (1 - e^{ct})^{n+k} \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}, n > f(t)} (1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \cdot p_n \cdot q_k &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}, n > f(t)} p_n \cdot q_k \\ &\leq \mathbb{P}[N(\kappa) > f(t)]. \end{aligned}$$

Como  $(1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \leq (n+k)e^{-ct}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}, n \leq f(t)} (1 - (1 - e^{ct})^{n+k}) \cdot p_n \cdot q_k &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}, n \leq f(t)} (n+k)e^{-ct} p_n \cdot q_k \\ &\leq \mathbb{E}[N(\mu)] \mathbb{P}[N(\kappa) < f(t)] + \sum_{k \in \mathbb{N}, n \leq f(t)} n p_n e^{-ct}. \end{aligned}$$

Tome  $f(t) = e^{c_0 t}$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > t] &\leq \mathbb{P}[N(\kappa) > e^{c_0 t}] + \mathbb{E}[N(\mu)] \mathbb{P}[N(\kappa) < e^{c_0 t}] + \sum_{k \in \mathbb{N}, n \leq e^{c_0 t}} n p_n e^{-ct} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} e^{-ct(\alpha-1)} + \frac{1}{2 - \alpha} e^{-ct(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\mathbb{P}[T > t] \approx e^{-ct(\alpha-1)}$ .

□

### 3.3 Caso Particular

Suponha que haja o interesse da obtenção da densidade de partículas da medida invariante do sistema de bilhares aleatórios com injeção e absorção de partículas apenas em uma região limitada do domínio. O resultado obtido nesta seção permite a obtenção aproximada do perfil desta densidade pelo método de monte carlo utilizando-se apenas trajetórias que tenham como origem a região de interesse para um caso de reflexão dada pela lei cosseno. Uma aplicação deste resultado, com a simulação de monte carlo é realizada na próxima seção.

Tratamos o caso no qual em um subconjunto da fronteira existe injeção de partículas, em um subconjunto da fronteira existe apenas absorção de partículas e em um subconjunto reflexão pura com lei cosseno. Veremos que neste caso a densidade de partículas em  $(x, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  é proporcional à probabilidade de uma partícula iniciando um bilhar aleatório em  $(x, -v)$  tocar a fronteira de injeção antes de tocar a fronteira de absorção.

Sejam  $Y_t^{(x,v)}$ ,  $t \geq 0$  um bilhar aleatório iniciando em  $(x, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$ ,  $A, B \subset \partial\mathcal{D}$ . Definimos  $\tau_{(x,v)}(A) := \inf\{t > 0 : Y_t^{(x,v)} \in A\}$  o instante em que o bilhar aleatório iniciando em  $(x, v)$  toca a fronteira no conjunto  $A$  e  $p(x, v, A, B) := \mathbb{P}[Y_{\tau_{(x,v)}(A)}^{(x,v)}(A) < Y_{\tau_{(x,v)}(B)}^{(x,v)}(B)]$  a probabilidade de um bilhar aleatório iniciando em  $(x, -v)$  tocar a fronteira no conjunto  $A$  antes de tocar o conjunto  $B$ .

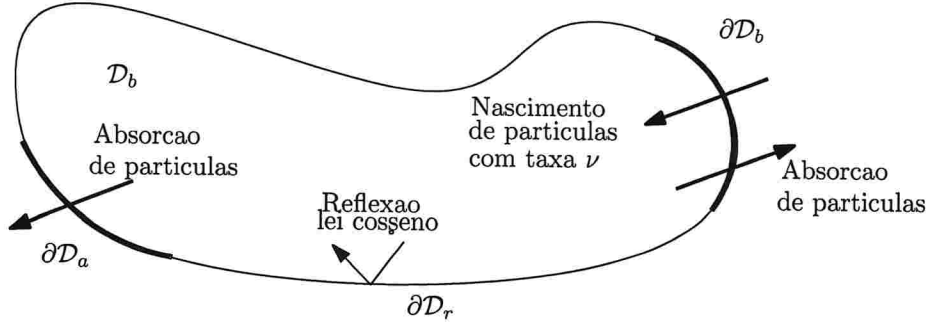


Figura 7: Caso de Interesse

**Teorema 3** Considere um sistema de injeção e absorção de partículas com lei de reflexão  $\gamma$  dada pela lei cosseno. Sejam  $\mathcal{D}_a \subset \partial\mathcal{D}$  a fronteira de absorção com medida de Hausdorff  $(d-1)$ -dimensional na fronteira positiva,  $\mathcal{D}_b \subset \partial\mathcal{D}$  a fronteira de nascimento e  $\mathcal{D}_r \subset \partial\mathcal{D}$  a fronteira de reflexão de tal forma que  $\mathcal{D}_a \subset \mathcal{D}_b$  e  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D}_r \cup \mathcal{D}_a$ , ou seja,  $r(x) = \mathcal{I}_{\{x \in \mathcal{D}_r\}}$ . Considere ainda que a taxa de injeção de partículas dada por  $\nu(x, v) = \lambda \mathcal{I}_{\{x \in \mathcal{D}_b\}} \otimes \gamma(\varphi_x(v))$ , com  $\gamma(v)$  dada pela lei cosseno.

Então, a medida invariante para este processo é dada por um Processo Pontual de Poisson com densidade proporcional a  $p(x, v, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ .

*Prova.*

Denotaremos por  $X$  o sistema de bilhares aleatórios citado no enunciado da proposição. Este sistema tem absorção em  $\mathcal{D}_a$  e nascimento em  $\mathcal{D}_b$ .

Seja  $V$  o sistema de bilhares aleatórios com injeção e absorção de partículas, com as mesmas suposições do sistema  $X$ , mas com absorção também em  $\mathcal{D}_a$  e com injeção em  $\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_b$ .

Dadas duas evoluções independentes de  $X$  e  $V$ , definimos o acoplamento  $W := X \cup V$ . Note que  $W$  evolui como um sistema de bilhares aleatórios com injeção e absorção de partículas com lei de reflexão cosseno, com probabilidade reflexão  $r_w$  e injeção de partículas  $\nu_w$  tais que

$$r_w(x) = \mathcal{I}_{\{x \notin \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b\}} \quad x \in \partial\mathcal{D}$$

$$\nu_w(x, v) = \gamma(\varphi_x(v)) \mathcal{I}_{\{x \in \mathcal{D}_a \cup \mathcal{D}_b\}} \quad x \in \partial\mathcal{D}.$$

Note que pela Proposição 1, como a lei de reflexão é cosseno, pela simetria da função  $K(x, y)$  a função  $\psi(x)$  é constante, assim como a medida  $\mu(dx, dy)$ . Desta forma, o sistema

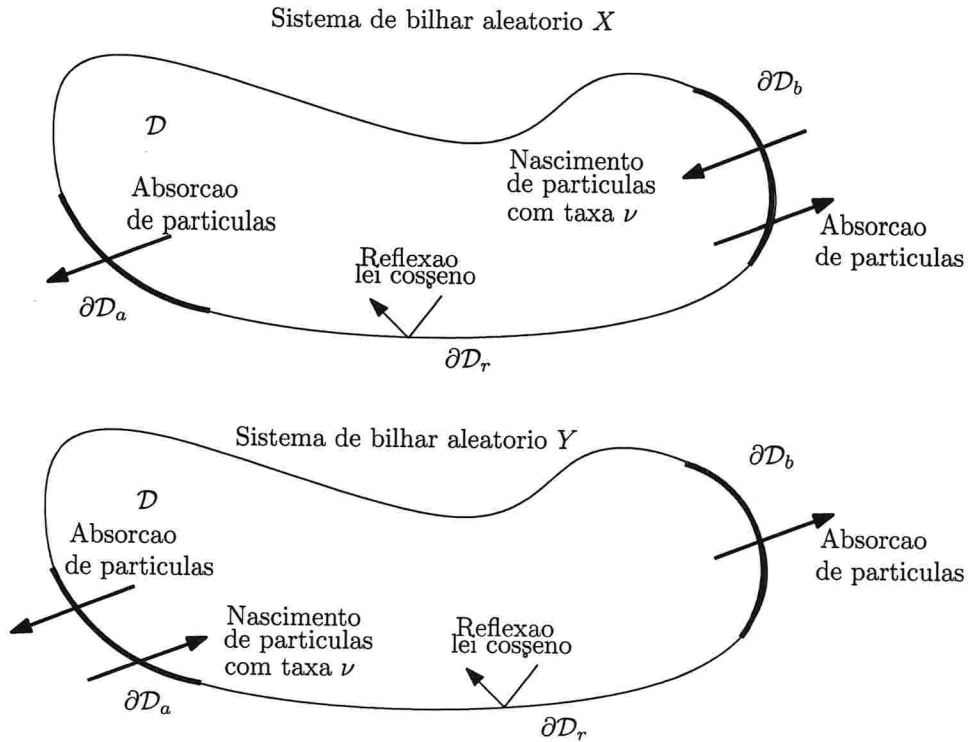


Figura 8: Sistema de bilhar aleatório X e Y

$W$  tem distribuição invariante dada por um Processo Pontual de Poisson de densidade constante.

Note que tanto em  $X$ , como em  $V$ , antes de a partícula atingir  $\mathcal{D}_a$ , ela realiza um bilhar aleatório. Por (10), o bilhar aleatório é reversível, a menos de um sinal negativo no vetor direcional. Note também que uma partícula de  $W$  pertence à  $X$ , se e somente se, ela nasceu em  $\mathcal{D}_b$  e pertence à  $Y$ , se e somente se, ela nasceu em  $\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_b$ .

Portanto, a probabilidade de uma partícula  $(x, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}^{d-1}$  de  $W$  pertencer à  $X$  é dada por  $p(x, v, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ , isto é, a probabilidade de um bilhar aleatório começando em  $(x, -v)$  tocar  $\mathcal{D}_b$  antes de  $\mathcal{D}_a - \mathcal{D}_b$ .

Como cada partícula tem uma vida independente de qualquer outra partícula, a medida invariante de  $X$  é um emagrecimento da medida invariante de  $W$  com probabilidade  $p(x, v, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ . Como a densidade da medida invariante de  $W$  é constante, concluímos que a densidade da medida invariante de  $X$  é proporcional a  $p(x, v, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ , como precisávamos.



□

### 3.4 Simulação

Esta seção é dedicada à uma aplicação direta do Teorema 3. Realizaremos uma simulação de Monte Carlo do sistema de injeção e absorção de partículas com lei de reflexão cosseno em um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $\mathcal{D}_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $L > 0$ . Denotaremos por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = L, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \mathcal{D}_b &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \mathcal{D}_r &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, 0 \leq y \leq 1\} \cup \mathcal{D}_b.\end{aligned}$$

A região de absorção de partículas é dada por  $\mathcal{D}_a$ , a região de nascimento de partículas por  $\mathcal{D}_b$  e a região de reflexão de partículas por  $\mathcal{D}_r$ .

Pelo Teorema 3, a densidade de partículas na fronteira  $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L\}$  e com direção  $(0, 1)$  é proporcional à  $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ , probabilidade de um bilhar aleatório iniciando com direção  $(0, -1)$  tocar a fronteira no conjunto  $\mathcal{D}_b$  antes de tocar o conjunto  $\mathcal{D}_a$ .

Fixado  $L = 1$ , foi realizado para cada uma das 19 posições  $\{0.05, 0.10, 0.15, \dots, 0.95\}$  1000(mil) simulações de trajetórias de um bilhar aleatório até que se fosse tocada a fronteira  $\mathcal{D}_a$ , ou  $\mathcal{D}_b$ . A partir da contagem da quantidade de trajetórias que tocou  $\mathcal{D}_b$  antes de tocar o conjunto  $\mathcal{D}_a$ , estimou-se  $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ .

Abaixo, apresenta-se o resultado obtido pela uma simulação de monte-carlo utilizando-se o programa R-project.

Nota-se um decaimento da densidade de forma linear.

Ainda, com o intuito de obter a variação da densidade de probabilidade da medida invariante de acordo com a variação do comprimento  $L$  do domínio, foi realizada a seguinte simulação de monte-carlo: Fixada a posição inicial 0.025, para cada um dos 40 domínios de comprimento  $\{0.025, 0.050, 0.075, \dots, 0.975, 1.000\}$ , simulou-se 1000(mil) trajetórias de um bilhar aleatório iniciando com direção  $(0, -1)$  até que se fosse tocada a fronteira  $\mathcal{D}_a$ , ou  $\mathcal{D}_b$ . A partir da contagem da quantidade de trajetórias que tocou  $\mathcal{D}_b$  antes de tocar o conjunto  $\mathcal{D}_a$ , estimou-se  $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$ . Abaixo, apresenta-se o resultado obtido pela uma simulação utilizando-se o programa R-project.

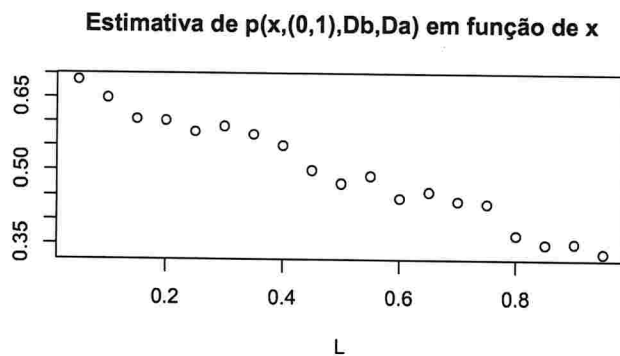


Figura 9: Estimativa de  $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$  em função da posição inicial  $x$ .

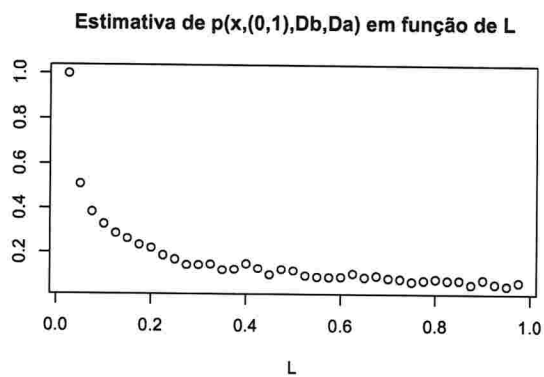


Figura 10: Estimativa de  $p(x, (0, 1), \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_a)$  em função do comprimento  $L$  do Domínio.

Verifica-se que para a simulação realizada, utilizando o método de mínimo quadrados para a família de funções  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \alpha x^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , que a função dada por  $f(x) = 0.644x^{-0.623x}$  é a que melhor se ajusta aos dados obtidos pela simulação.

## Referências

- [1] C. Bardos, F. Golse, J.-F. Colonna (1997) Diffusion approximation and hyperbolic automorphisms of the torus, *Phys. D* **104** (1), 32-60.
- [2] Berbee, H. C. P.; Boender, C. G. E.; Rinnooy Kan, A. H. G.; Scheffer, R. L.; Telgen, J. (1987), Hit-and-run algorithms for the identification of nonredundant linear inequalities, *Mathematical Programming*, **37**, 184-207.
- [3] S. Boatto, F. Golse (2002) Diffusion approximation of a Knudsen gas model: dependence of the diffusion constant upon the boundary condition, *Asymptot. Anal.* **31** (2), 93-111.
- [4] K.A. Borovkov (1991) On a new variant of the Monte Carlo method. *Theory Probab. Appl.* **36**, 355-360.
- [5] K.A. Borovkov (1994) On simulation of random vectors with given densities in regions and on their boundaries. *J. Appl. Probab.* **31** (1), 205-220.
- [6] A. Brzank, G.M. Schütz (2006) Application of Molecular Traffic Control in catalytic grains with novel channel topology design. *J. Chem. Phys.* **124**, 214701.
- [7] COMETS, F., POPOV, S., SCHULTZ, G., VACHKOVSKAIA, M. (2009) Billiards in a general domain with random reflections. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **191**, 497-537.
- [8] COMETS, F., POPOV, S., SCHULTZ, G., VACHKOVSKAIA, M. (2010) Quenched invariance principle for the Knudsen stochastic billiard in a random tube. *Annals of Probability* **38**, No. 3, 1019-1061.
- [9] COMETS, F., POPOV, S., SCHULTZ, G., VACHKOVSKAIA, M. (2010) Knudsen gas in a finite random tube: transport diffusion and first passage properties. *Journal of Statistical Physics* **140**, 948-984.
- [10] M.-O. Coppens, A.J. Dammers (2006) Effects of heterogeneity on diffusion in nanopores. From inorganic materials to protein crystals and ion channels. *Fluid Phase Equilibria* **241** (1-2), 308-316.
- [11] M.-O. Coppens, K. Malek (2003) Dynamic Monte-Carlo simulations of diffusion limited reactions in rough nanopores. *Chem. Engineering Sci.* **58** (21), 4787-4795.
- [12] S.N. Evans (2001) Stochastic billiards on general tables. *Ann. Appl. Probab.* **11** (2), 419-437.
- [13] H. Federer (1969) Geometric measure theory. Springer-Verlag, New York.
- [14] R. Feres, G. Yablonsky (2004) Knudsen's cosine law and random billiards. *Chem. Engineering Sci.* **59**, 1541-1556.
- [15] R. Feres (2006) Random walks derived from billiards. Preprint.
- [16] Hammersley, J.M; Handscomb, D. C. (1964) Monte Carlo methods, Methuen Co. Ltd., London, United Kingdom.

- [17] Isaacs, R. (1967) Differential games. Wiley, New York.
- [18] F.J. Keil, R. Krishna, M.-O. Coppens (2000) Modeling of diffusion in zeolites. *Rev. Chem. Eng.* **16**, 71,
- [19] M. Knudsen (1952) *Kinetic Theory of Gases - Some Modern Aspects*. Methuen's Monographs on Physical Subjects, London
- [20] T. Komorowski, C Landim, S. Olla (2008) *Fluctuations in Markov Processes*. Disponível em <http://w3.impa.br/~landim/notas.html>
- [21] S. Lalley, H. Robbins (1988) Stochastic search in a convex region. *Probab. Theory Relat. Fields* **77**, 99-116.
- [22] S. Lalley, H. Robbins (1987) Asymptotically minimax stochastic search strategies in the plane. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **84**, 2111-2112.
- [23] Liggett, T. M (1985) Interacting particle systems. Springer, New York.
- [24] K. Malek, M.-O. Coppens (2001) Effects of surface roughness on self- and transport diffusion in porous media in the Knudsen regime. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 125505.
- [25] M. MENSHIKOV, M. VACHKOVSKAIA, A. WADE (2008) Asymptotic behaviour of randomly reflecting billiards in unbounded tubular domains. *J. Statist. Phys.* **132**, 1097-1133.
- [26] Rinnooy Kan, A. H. G; Timmer, G. T. (1987) Stochastic global optimization methods; part I: clustering methods, *Mathematical Programming*, **39**, 27-56.
- [27] Romeijn, H. E. (1992), Global optimization by random walk sampling methods, Thesis Publishers, Amsterdam, The Netherlands.
- [28] Romeijn, H.E. (1998) A general framework for approximate sampling with an application to generating points on the boundary of bounded convex regions. *Statistica Neerlandica* **52** (1), 42-59.
- [29] S. Russ, S. Zschiegner, A. Bunde, J. Kärger (2005) Lambert diffusion in porous media in the Knudsen regime: equivalence of self- and transport diffusion. *Phys. Rev. E* **72** 030101(R).
- [30] Smith, R. L. (1984) Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions. *Operat. Res.*, **32**, 1296-1308.
- [31] Thorisson, H. (2000) Coupling, Stationarity, and Regeneration. Springer, New York.