

# Comparação de intervalos de confiança para funções de probabilidades de sucesso

Tuany de Paula Castro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Orientador: Julio da Motta Singer

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2015



# Comparação de intervalos de confiança para funções de probabilidades de sucesso.

Esta é a versão original da dissertação elaborada por  
Tuany de Paula Castro  
submetida à Comissão Julgadora.



# Resumo

Nesse trabalho, intervalos de confiança e de credibilidade para a probabilidade de sucesso e para funções de probabilidades de sucesso de tabelas de contingência  $2 \times 2$  (diferença de probabilidades, risco relativo e razão de chances) são comparados sob os enfoques clássico e bayesiano. Uma revisão sobre a construção dos intervalos de confiança usuais (Wald, Wald ajustado, Wilson e score) e também dos intervalos de credibilidade obtidos adotando-se função de distribuição beta como distribuição *a priori* é apresentada para esses parâmetros. Os intervalos são então comparados por meio de estudos de simulação quanto à probabilidade de cobertura, variabilidade e tamanho esperado sob o enfoque clássico e quanto ao tamanho mínimo sob o enfoque bayesiano. Os resultados da comparação mostram um melhor desempenho dos intervalos de Wilson e score dentre os intervalos clássicos e certas vantagens dos intervalos bayesianos em termos de tamanho quando se tem conhecimento prévio sobre o estudo.

**Palavras-chave:** Distribuição Binomial, intervalos de maior densidade a posteriori (HPD), probabilidade de cobertura, razão de chances, risco relativo, tamanho do intervalo.



# Abstract

Confidence intervals and Bayesian confidence intervals for a binomial proportion and for success probabilities functions of  $2 \times 2$  contingency tables (difference of proportions, relative risk, and odds ratio) are compared under classical and Bayesian approaches. We present a literature review of the construction of the usual confidence intervals and of the Bayesian confidence intervals with beta priors for those parameters. The intervals are compared through simulation studies as to the coverage probability, variability and expected length under classical approach and as to the minimum size under Bayesian approach. The comparison results show a better performance of Wilson and score intervals among the classical intervals and some advantages of Bayesian intervals when you have prior knowledge about the study.

**Keywords:** Binomial distribution, coverage probability, Highest posterior density intervals (HPD), odds ratio, relative risk.





# Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu orientador, Julio da Motta Singer, que me acompanha desde 2010 quando eu ainda estava na graduação. Desde esse período o professor Julio vem, não só me encaminhando, mas também me orientando em trabalhos acadêmicos e não acadêmicos, os quais me trouxeram grandes aprendizados. Sou grata à atenção que ele me dá em todas as minhas dúvidas, sempre disposto a ouvir e ajudar com seus ensinamentos e também à sua dedicação, lendo essa dissertação diversas vezes e sempre retornando com sugestões e críticas construtivas. Sou grata ainda ao seu cuidado em se preocupar com a minha saúde e com meu bem-estar e ao seu otimismo e bom humor para me animar em momentos difíceis. Serei sempre muito grata por sua paciência, preocupação e disposição para me ajudar em quaisquer problemas, sejam eles profissionais ou pessoais.

Agradeço ao professor Carlos Daniel Mimoso Paulino pela orientação e incansáveis ensinamentos, mesmo com a dificuldade da distância e do tempo. Sou muito grata também ao seu cuidado em ler essa dissertação e às suas sugestões importantes para o meu amadurecimento acadêmico.

Gostaria de agradecer também aos professores Antonio Carlos Pedroso de Lima, Elisabeti Kira, Lucia Pereira Barroso e Luis Gustavo Esteves por terem me ajudado em momentos de dúvida, sempre com muita dedicação durante esses meus 7 anos no IME-USP.

Agradeço a todos que indiretamente contribuíram para a elaboração desse trabalho, especialmente aos funcionários da Secretaria do Departamento de Estatística do IME-USP.

Sou grata também aos amigos Aline, Priscilla, Erika e Derek por terem me apoiado e me levado para o forró em momentos de cansaço, contribuindo para que essa trajetória fosse mais agradável e para que meu trabalho fosse melhor. Sou muito grata ao meu amigo Rafael ("Coelho") pelos encorajamentos, pelas piadas e pelo apoio durante todo esse tempo.

Sou enormemente grata à minha amiga Tamy pelo companheirismo e ao meu amigo Victor pela paciência em me ajudar em todos os momentos difíceis com o R, com o Latex ou comigo mesma. Agradeço também ao amigo Julio Trecenti pela disposição e interesse em me ajudar nesse trabalho.

Agradeço imensamente aos meus pais por terem me garantido boas condições para meu desenvolvimento intelectual e profissional e agradeço ainda mais a eles e ao meu irmão pelo suporte emocional que foi substancial para que eu conseguisse completar essa etapa da minha vida.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

(CNPq) por prover suporte financeiro durante os dois anos de mestrado.

TUANY DE PAULA CASTRO  
São Paulo, fevereiro de 2015

# Sumário

<b>1</b>	<b>Intervalos de confiança para a probabilidade de sucesso</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Intervalos de credibilidade para a probabilidade de sucesso</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Comparação dos intervalos de confiança e credibilidade para a probabilidade de sucesso</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Comparação de intervalos de confiança e de credibilidade para parâmetros de tabelas 2x2</b>	<b>19</b>
4.1	Intervalos de confiança . . . . .	20
4.1.1	Diferença de probabilidades . . . . .	20
4.1.2	Risco relativo . . . . .	21
4.1.3	Razão de chances . . . . .	23
4.2	Intervalos de credibilidade . . . . .	25
4.3	Comparação dos intervalos . . . . .	27
4.3.1	Diferença de probabilidades . . . . .	28
4.3.2	Risco relativo e razão de chances . . . . .	29
4.3.3	Conclusões . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Discussão</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>Expressão 1.4</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Relação entre os intervalos (1.9) e (1.10)</b>	<b>39</b>
<b>C</b>	<b>Distribuições <i>a posteriori</i> para as funções paramétricas de tabelas 2x2</b>	<b>41</b>
<b>D</b>	<b>Gráficos</b>	<b>43</b>
<b>E</b>	<b>Tabelas</b>	<b>89</b>
	<b>Referências</b>	<b>101</b>



# Capítulo 1

## Intervalos de confiança para a probabilidade de sucesso

A construção de intervalos de confiança para a probabilidade de sucesso de uma distribuição binomial é um dos problemas mais básicos e importantes da inferência estatística. Existem, na literatura, inúmeras referências com diferentes abordagens desse tema, podendo ser citadas [Agresti & Coull \(1998\)](#), [Agresti & Caffo \(2000\)](#), [Brown et al. \(2001\)](#) e [Thulin \(2014\)](#).

Denotando por  $X$  uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $\theta$ , a verdadeira probabilidade de cobertura <sup>1</sup> de um intervalo de confiança  $[R(X)]$  com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  para  $\theta$  é:

$$\mathbb{P}[\theta \in R(X)|\theta] = C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \mathbb{I}_{R(k)}(\theta) \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, \quad (1.1)$$

em que  $\mathbb{I}_{R(k)}(\theta)$  é a variável que indica se o intervalo construído observando-se  $X = k$  contém o valor  $\theta$ .

Uma das primeiras propostas de estimativa intervalar para  $\theta$ , presente na maioria dos textos estatísticos introdutórios, é o intervalo de confiança resultante da inversão do teste de Wald ([Wald, 1943](#)). O intervalo de Wald com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  é o conjunto

---

<sup>1</sup>Para uma probabilidade de sucesso fixada, a verdadeira probabilidade de cobertura de um estimador intervalar é a probabilidade de ele conter o valor fixado.

de valores  $\theta_0$  para os quais o valor-p do teste da hipótese  $H_0 : \theta = \theta_0$  versus  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  é maior ou igual a  $\alpha$ . Esse intervalo aproximado é baseado na normalidade assintótica da proporção amostral de sucessos e na estimativa de seu erro padrão e é dado por

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})/n} \quad (1.2)$$

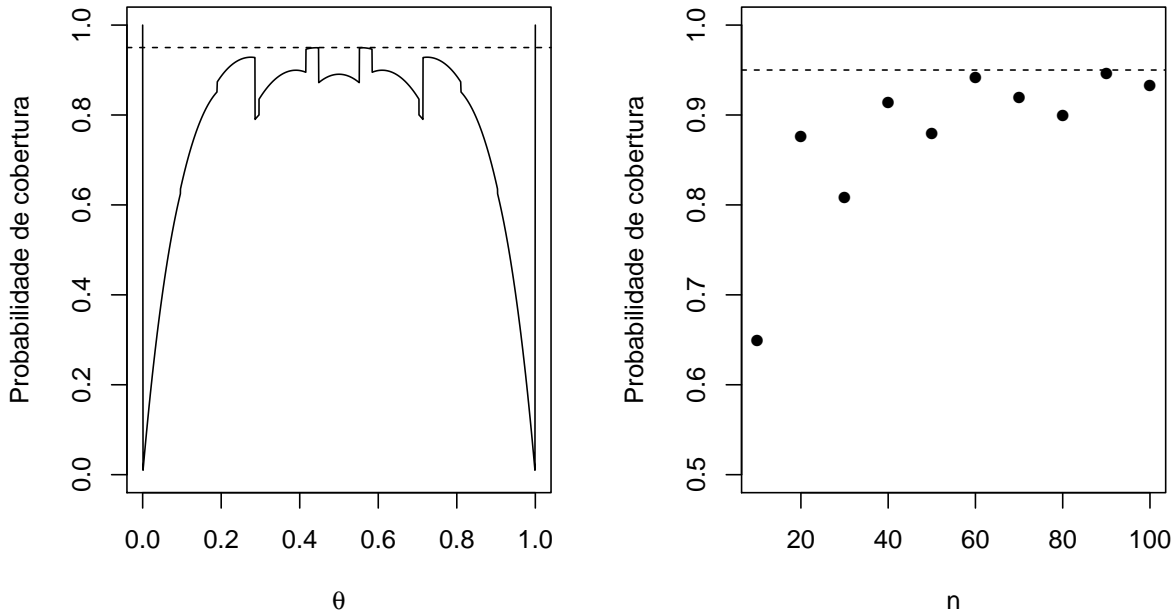
em que  $\hat{\theta} = X/n$  é a proporção amostral de sucessos e  $z_{\alpha/2}$  é o quantil de ordem  $1 - \alpha/2$  da distribuição normal padrão.

Devido à facilidade de uso, o intervalo de confiança de Wald é o mais comumente empregado. No entanto, sabe-se que a probabilidade de cobertura desse intervalo frequentemente fica abaixo do nível de confiança nominal, especialmente quando o tamanho amostral é pequeno ou quando o valor do parâmetro está próximo dos limites do espaço paramétrico, o que pode ser observado na Figura 1.1, que contém os gráficos da probabilidade de cobertura do intervalo de Wald em função da probabilidade de sucesso  $\theta$  para  $n = 10$  e em função de  $n$  para  $\theta = 0.10$ . [Brown et al. \(2001\)](#) mostraram que este problema da cobertura inadequada ocorre mesmo para tamanhos amostrais moderados, de forma que o intervalo de Wald não é o mais recomendado para a estimação da probabilidade de sucesso nesses casos.

[Clopper & Pearson \(1934\)](#) apresentaram uma estimativa intervalar “exata” para a probabilidade de sucesso  $\theta$  como alternativa aos intervalos aproximados. Esse intervalo se baseia na inversão do teste binomial de caudas iguais para  $H_0 : \theta = \theta_0$  e, portanto, contém todos os valores de  $\theta_0$  que levam à não rejeição da hipótese nula com um nível de significância  $\alpha$ . Para  $x = 1, \dots, n - 1$ , os limites inferior ( $\theta_I$ ) e superior ( $\theta_S$ ) desse intervalo são as soluções das equações:

$$\begin{aligned} \sum_{k=x}^n \binom{n}{k} \theta_I^k (1 - \theta_I)^{n-k} &= \alpha/2 \\ \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \theta_S^k (1 - \theta_S)^{n-k} &= \alpha/2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ao não se observarem sucessos ( $x = 0$ ), adota-se 0 como limite inferior e, ao se observarem



**Figura 1.1:** Probabilidade de cobertura do intervalo de Wald com coeficiente de confiança 95% versus  $\theta$  para  $n = 10$  e versus  $n$  para  $\theta = 0, 10$ .

apenas sucessos ( $x = n$ ), adota-se 1 como limite superior.

Pode-se também obter os limites do intervalo de Clopper-Pearson como:

$$\begin{aligned}\theta_I &= B(x, n - x + 1, \alpha/2) \\ \theta_S &= B(x + 1, n - x, 1 - \alpha/2)\end{aligned}\tag{1.4}$$

em que  $B(a, b, c)$  é o quantil de ordem  $c$  da distribuição Beta( $a, b$ ). Esse resultado é detalhado no Apêndice A.

O intervalo de Clopper-Pearson, dito “exato” por ser obtido a partir da distribuição binomial, garante probabilidade de cobertura de pelo menos  $1 - \alpha$  para todo valor de  $\theta$ . Sabe-se que para muitos valores de  $\theta$ , especialmente nas proximidades dos limites 0 e 1, esse intervalo é conservador, apresentando probabilidade de cobertura bem maior do que a cobertura nominal. Por essa razão, combinando conceitos bayesianos e frequentistas, [Thulin \(2014\)](#) propôs um intervalo de Clopper-Pearson com probabilidade de cobertura média ajustada.

A probabilidade de cobertura média de um intervalo ( $\bar{C}_n$ ) é obtida tomando uma média da probabilidade de cobertura para todos os valores de  $\theta$ , a saber,

$$\bar{C}_n = \int_0^1 C_n(\theta)g(\theta)d\theta, \quad (1.5)$$

em que a função  $g$  pode ser interpretada como uma função que distribui o peso do desempenho do intervalo ao longo do espaço paramétrico. Essa função pode representar, ainda, informações *a priori* ou *a posteriori* acerca de  $\theta$ , o que motivou Thulin (2014) a construir o intervalo de Clopper-Pearson de maneira que sua probabilidade de cobertura média fosse igual a  $1 - \alpha$  com respeito à distribuição *a priori* ou à distribuição *a posteriori* de  $\theta$ . O intervalo de Clopper-Pearson ajustado pela distribuição *a priori* Uniforme(0, 1) apresenta melhor desempenho do que o intervalo usual de Clopper-Pearson, sendo mais recomendado quando se sabe que a probabilidade  $\theta$  não está próxima dos limites 0 e 1; esse intervalo pode ser visto como um intervalo de Clopper-Pearson com continuidade corrigida. Thulin (2014) recomenda ainda o intervalo ajustado pela distribuição *a posteriori* considerando distribuição *a priori* Beta(1/2, 1/2) para os casos em que há forte convicção de que a probabilidade  $\theta$  está próxima dos limites do espaço paramétrico.

Clopper & Pearson (1934) construíram seu intervalo de maneira simétrica, ou seja, não consideraram o tamanho do intervalo como critério para sua construção. O tamanho esperado de um intervalo para  $\theta$  fixado é definido como

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [\theta_S(k) - \theta_I(k)] \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, \quad (1.6)$$

em que  $\theta_S(k)$  e  $\theta_I(k)$  são, respectivamente, os limites superior e inferior de um intervalo construído para  $\theta$  quando se observa  $X = k$ .

Por ser um intervalo conservador, o intervalo de Clopper-Pearson apresenta maior tamanho esperado quando comparado com a maioria dos intervalos de confiança propostos neste contexto. Por essa razão, Zieliński (2009) apresenta um método de obtenção do menor



intervalo Clopper-Pearson para a probabilidade  $\theta$ , sendo seu uso recomendado especialmente nos casos em que o tamanho amostral  $n$  é pequeno.

Um segundo intervalo aproximado, menos comum que o intervalo de confiança de Wald, é obtido a partir da inversão do teste escore (Rao, 1948). Essa estimativa intervalar para a probabilidade de sucesso foi apresentada em Wilson (1927) e é obtida a partir da solução da seguinte inequação quadrática em  $\theta_0$ :

$$Q_R(\theta_0) = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)^2}{\theta_0(1 - \theta_0)/n} < z_{\alpha/2}^2,$$

ou seja, o intervalo corresponde aos valores de  $\theta_0$  que levam à não rejeição da hipótese  $H_0 : \theta = \theta_0$  por meio da estatística escore  $Q_R(\theta_0)$  com um nível de significância  $\alpha$ . Explicitamente, o intervalo de confiança escore para  $\theta$  é dado por

$$\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)^{-1} \left[ \hat{\theta} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n} \left( \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n} \right)} \right]. \quad (1.7)$$

O ponto médio do intervalo de Wilson é uma média ponderada da proporção amostral de sucessos  $\hat{\theta}$  e de  $1/2$ , nomeadamente,

$$\frac{n}{n + z_{\alpha/2}^2} \times \hat{\theta} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n + z_{\alpha/2}^2} \times \frac{1}{2},$$

sendo que o peso atribuído a  $\hat{\theta}$  aproxima-se de 1 com o aumento do tamanho amostral  $n$ . Além disso, a variância utilizada para a construção desse intervalo pode ser interpretada como a média ponderada da variância de uma proporção amostral de sucessos quando  $\theta = \hat{\theta}$  e da variância de uma proporção amostral de sucessos quando  $\theta = 1/2$ , com  $n + z_{\alpha/2}^2$  no lugar do tamanho amostral usual  $n$ , ou seja

$$\frac{1}{n + z_{\alpha/2}^2} \left( \frac{n}{n + z_{\alpha/2}^2} \times \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n + z_{\alpha/2}^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right).$$

Como discutido em [Agresti \(2011\)](#), o intervalo de Wilson apresenta um desempenho melhor do que o intervalo de Wald com relação à probabilidade de cobertura, que fica mais próxima do nível de confiança nominal. Em [Agresti & Coull \(1998, Tabela 1\)](#), nota-se, por exemplo, que, para  $n = 5$ , a probabilidade de cobertura média dos intervalos de Wald e Wilson são, respectivamente, 0.641 e 0.955 e, embora ambas as probabilidades fiquem mais próximas do valor nominal 95% com o aumento do número de ensaios, verificamos que a variabilidade relativamente ao valor de 95%, raiz do erro quadrático médio, é cerca de 90% menor para o intervalo de Wilson. Essa medida é dada por

$$\sqrt{\int_0^1 [C_n(\theta) - 0.95]^2 g(\theta) d\theta} \quad (1.8)$$

em que  $g(\theta)$  é a função peso. Dessa forma, nos casos em que ou o tamanho da amostra é pequeno ou o valor do parâmetro está próximo dos limites do espaço paramétrico, o intervalo escore é mais recomendado comparativamente ao intervalo de Wald.

[Agresti & Coull \(1998\)](#) apresentaram um intervalo de Wald ajustado que, mesmo para amostras pequenas, tem um desempenho similar ao intervalo de Wilson. Esse intervalo é obtido do intervalo escore com nível de confiança 95%

$$\left(1 + \frac{1,96^2}{n}\right)^{-1} \left[ \hat{\theta} + \frac{1,96^2}{2n} \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{n} \left( \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{1,96^2}{4n} \right)} \right]$$

por meio da aproximação

$$\left[ \frac{X + 2}{n + 4} \pm 2 \sqrt{\frac{1}{n + 4} \left( \frac{n}{n + 4} \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{4}{n + 4} \right)} \right]. \quad (1.9)$$

O ponto médio do intervalo escore com coeficiente de confiança 95% é  $\tilde{\theta} = (X+2)/(n+4)$ , isto é, uma estimativa para a probabilidade  $\theta$  obtida de uma amostra fictícia em que quatro observações são adicionadas à amostra original, com duas delas correspondendo a sucessos e duas a fracassos. Considerando então a adição de dois sucessos e dois fracassos à amostra, obtém-se o intervalo de confiança de Wald ajustado:

$$\left[ \tilde{\theta} \pm 2\sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+4}} \right], \quad (1.10)$$

que apresenta o mesmo ponto médio que o intervalo escore, mas usa a variância  $\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})/(n+4)$  no lugar da média ponderada das variâncias da proporção amostral obtidas supondo-se  $\theta = \hat{\theta}$  e  $\theta = 1/2$ . Esse intervalo de Agresti-Coull contém o intervalo de Wilson (demonstração no Apêndice B).

Os intervalos de Agresti-Coull podem ser obtidos com outros níveis de confiança (Agresti & Caffo, 2000). Nesse sentido, seja  $I_t(n)$  o intervalo de Wald ajustado em que  $n$  é número de ensaios da distribuição binomial e  $t$  é o número de ensaios adicionados, tais que  $t/2$  são sucessos e  $t/2$  são fracassos. Para o nível de confiança  $1 - \alpha$ , toma-se  $t = z_{\alpha/2}^2$  e, então, obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \frac{X + t/2}{n + t} \text{ e} \\ I_t(n) &= \left[ \tilde{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+t}} \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Em particular, com o nível de confiança de 90%, o intervalo de confiança de Agresti-Coull é

$$I_{2.7}(n) = \left[ \tilde{\theta} \pm 1.64 \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+2.7}} \right],$$

com  $\tilde{\theta} = (X + 1.35)/(n + 2.7)$ . Para o nível de confiança de 99%, temos

$$I_{6.6}(n) = \left[ \tilde{\theta} \pm 2.57 \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1 - \tilde{\theta})}{n + 6.6}} \right]$$

com  $\tilde{\theta} = (X + 3.3)/(n + 6.6)$ .

O texto introdutório de [Samuels & Witmer \(1999\)](#) foi um dos primeiros a recomendar o uso do intervalo de Agresti-Coull como uma alternativa simples ao intervalo de Wald.

Há ainda vários intervalos apresentados na literatura que devem ser considerados no problema de estimação intervalar de uma probabilidade  $\theta$ . Entre eles, destacamos o intervalo arcsen proposto em [Anscombe \(1948\)](#), em que se mostra que o estimador  $\check{\theta} = (X + 3/8)/(n + 3/4)$  gera uma maior estabilidade para a sua variância. Em particular, [Anscombe \(1948\)](#) mostra que  $2\sqrt{n}[\arcsen(\sqrt{\check{\theta}}) - \arcsen(\sqrt{\theta})]$  converge, em distribuição, para uma normal(0, 1) quando  $n$  tende ao infinito, de forma que o intervalo de confiança arcsen aproximado com coeficiente de confiança  $100(1 - \alpha)\%$  para a probabilidade  $\theta$  é

$$\left[ \text{sen}^2(\arcsen(\sqrt{\check{\theta}})) \pm \frac{1}{2} z_{\alpha/2} \sqrt{n} \right].$$

Segundo [Brown et al. \(2001\)](#), o desempenho desse intervalo é razoavelmente bom quando  $\theta$  não está próximo dos limites do espaço paramétrico; para  $\theta$  suficientemente próximo dessas extremidades, a probabilidade de cobertura do intervalo arcsen converge para zero.

Podemos citar ainda o intervalo logito ([Stone, 1995](#)), obtido a partir da inversão do intervalo de Wald construído para o logaritmo da chance de sucesso  $\lambda = \log(\theta/(1 - \theta))$ . O estimador de máxima verossimilhança de  $\lambda$  é  $\hat{\lambda} = \log(\hat{\theta}/(1 - \hat{\theta}))$ , pela propriedade da invariância ([DeGroot et al., 1986](#)). Por meio do método delta, obtém-se a variância de  $\hat{\lambda}$  dada por  $\hat{V} = n/[X(n - X)]$ . Nesse contexto, o intervalo de confiança  $1 - \alpha$  para  $\lambda$  é

$$[\hat{\lambda}_I, \hat{\lambda}_S] = \left[ \hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}} \right].$$

A partir do intervalo para  $\lambda$ , obtém-se, por exponenciação, o intervalo logito para  $\theta$ , a saber

$$\left[ \frac{\exp\{\widehat{\lambda}_I\}}{1 + \exp\{\widehat{\lambda}_I\}}, \frac{\exp\{\widehat{\lambda}_S\}}{1 + \exp\{\widehat{\lambda}_S\}} \right].$$

Assim como o intervalo arcsen, o intervalo logito apresenta um bom desempenho em termos da probabilidade de cobertura para  $\theta$  distante das extremidades do espaço paramétrico (Brown et al., 2001). Entretanto, ele apresenta um tamanho esperado ainda maior que o tamanho esperado do intervalo de Clopper-Pearson.

Pode-se utilizar também o teste da razão de verossimilhanças para a construção de uma estimativa intervalar para a probabilidade  $\theta$ . Esse intervalo contém todos os valores  $\theta_0$  que levam à não-rejeição da hipótese  $H_0 : \theta = \theta_0$ , considerando a estatística de teste da razão de verossimilhanças. Embora Brown et al. (2002) tenham mostrado que esse intervalo é comparável ao intervalo de Wilson quanto à probabilidade de cobertura e tamanho esperado, ele é menos utilizado devido à maior facilidade de implementação do intervalo de Wald.

Além dos intervalos de confiança apresentados, há os intervalos de credibilidade construídos sob o enfoque bayesiano, que serão estudados no Capítulo 2. Esses intervalos possibilitam o uso de diferentes distribuições *a priori* para  $\theta$  e, ainda, podem ser construídos de maneira que todos os pontos em seu interior possuam densidade *a posteriori* maior do que os pontos externos (intervalo de credibilidade com densidade *a posteriori* máxima, ou abreviadamente, intervalo HPD). No Capítulo 3, comparamos os desempenhos dos intervalos clássicos de Wald, Clopper-Pearson, Wilson e Agresti-Coull com os intervalos bayesianos discutidos no segundo capítulo. No Capítulo 4, intervalos bayesianos são construídos para a diferença de probabilidades, para o risco relativo e para a razão de chances em tabelas  $2 \times 2$  e são comparados aos intervalos clássicos usuais para esses parâmetros.



# Capítulo 2

## Intervalos de credibilidade para a probabilidade de sucesso

Os intervalos de credibilidade para a probabilidade de sucesso  $\theta$  construídos sob o enfoque bayesiano também são frequentemente tratados na literatura, como em Agresti & Min (2005) e em Brown et al. (2001), em que se considera distribuição *a priori* de Jeffrey [Beta(1/2,1/2)]. É bastante comum usar distribuições *a priori* beta para  $\theta$ , já que essas são distribuições conjugadas naturais da distribuição binomial.

O ponto médio,  $\tilde{\theta}$ , do intervalo de Agresti-Coull com coeficiente de confiança de 95% (1.10) é igual à estimativa bayesiana de  $\theta$  com respeito à função perda quadrática quando se considera distribuição *a priori* Beta(2,2). Admitindo que  $X|\theta \sim \text{Bin}(n, \theta)$  e  $\theta \sim \text{Beta}(2, 2)$ , obtemos

$$(\theta|X = x) \sim \text{Beta}(x + 2, n - x + 2) \quad (2.1)$$

e, conseqüentemente, a estimativa por perda quadrática de  $\theta$  (esperança da distribuição *a posteriori*) é

$$\mathbb{E}[\theta|X = x] = \frac{x + 2}{(x + 2) + (n - x + 2)} = \frac{x + 2}{n + 4} = \tilde{\theta}.$$

A variância da distribuição *a posteriori* correspondente é

$$\text{Var}[\theta|X = x] = \frac{(x+2)(n-x+2)}{(n+4)^2(n+5)} = \frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+5}.$$

Para  $n$  suficientemente grande, pode-se aproximar a distribuição *a posteriori* de  $\theta$  por uma distribuição Normal $[\tilde{\theta}, \tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})/(n+5)]$  [Paulino et al. (2003)] e então um intervalo de credibilidade central aproximado para  $\theta$  com coeficiente de credibilidade 95% é

$$\left[ \tilde{\theta} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+5}} \right]. \quad (2.2)$$

Utilizando o valor 2 no lugar de 1.96, esse intervalo é semelhante ao intervalo de Agresti-Coull (1.10), a não ser por uma pequena diferença no denominador da variância. Os dois intervalos têm desempenhos idênticos para amostras moderadas.

Um ponto-chave da perspectiva bayesiana é a possibilidade de uso de diferentes distribuições *a priori* para  $\theta$ , variando conforme os graus de conhecimento sobre cada problema estudado. Neste trabalho, serão estudados intervalos de credibilidade obtidos ao adotarem-se diferentes distribuições *a priori* Beta( $a, b$ ), com  $a > 0$  e  $b > 0$ . Generalizando (2.1), se  $(X|\theta) \sim \text{Bin}(n, \theta)$  e  $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$ , obtém-se

$$(\theta|X = x) \sim \text{Beta}(x+a, n-x+b)$$

e, para  $n$  suficientemente grande, essa distribuição pode ser aproximada por uma distribuição normal $[\check{\theta}, \check{\theta}(1-\check{\theta})/(n+a+b+1)]$ , em que  $\check{\theta} = (x+a)/(n+a+b)$  é a esperança da correspondente distribuição *a posteriori*. A partir da distribuição normal aproximada, constrói-se o intervalo de credibilidade central aproximado com coeficiente de credibilidade  $1 - \alpha$ , nomeadamente

$$\left[ \check{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\check{\theta}(1-\check{\theta})}{(n+a+b+1)}} \right]. \quad (2.3)$$



Além dos intervalos de credibilidade centrais aproximados, outros intervalos que contenham uma parte substancial da massa probabilística da distribuição *a posteriori* podem ser obtidos. Dizemos que  $I(x)$  é um intervalo de credibilidade com coeficiente de credibilidade  $1 - \alpha$  para  $\theta$  obtido da distribuição *a posteriori*  $\pi(\theta|x)$  se

$$\mathbb{P}[\theta \in I(x)|x] = \int_{I(x)} \pi(\theta|x) d\theta \geq 1 - \alpha.$$

Em nossos exemplos, adotamos a função Beta( $a, b$ ) como densidade de probabilidade *a priori* de  $\theta$  e, conseqüentemente, temos como densidade de probabilidade *a posteriori* de  $\theta$  a função Beta( $x + a, n - x + b$ ).

Existe uma infinidade de intervalos de credibilidade com o mesmo coeficiente de credibilidade  $1 - \alpha$  para  $\theta$ . Em particular, o intervalo central é

$$[B(x + a, n - x + b, \alpha/2), B(x + a, n - x + b, 1 - \alpha/2)].$$

Os verdadeiros limites desse intervalo precisam ser calculados computacionalmente, o que é facilmente concretizado por meio de pacotes estatísticos como o R. Em particular, podem ser obtidos por meio da função `qbeta` da *library* Beta.

Não há dúvidas de que o intervalo mais interessante é o que engloba todos os valores de  $\theta$  mais plausíveis segundo a distribuição *a posteriori*. Esta é a chamada região de credibilidade com densidade *a posteriori* máxima (*highest posterior density*, abreviadamente, HPD). De acordo com [Paulino et al. \(2003\)](#), uma região  $R(x)$  é região HPD ( $1 - \alpha$ ) se

$$\sup_{\theta \notin R(x)} \pi(\theta|x) \leq c_{(1-\alpha)} \leq \inf_{\theta \in R(x)} \pi(\theta|x)$$

para algum  $c_{(1-\alpha)}$  tal que  $\mathbb{P}[\theta \in R(x)|x] \geq 1 - \alpha$ .

Assim todos os pontos dentro da região definida possuem densidade *a posteriori* maior em relação aos pontos fora da região. Se a função densidade de probabilidade *a posteriori*

for multimodal, a região de credibilidade HPD pode ser constituída por vários intervalos disjuntos.

Regiões HPD também precisam ser obtidas computacionalmente, embora com maior dificuldade. No pacote estatístico R, para distribuições unimodais, o intervalo HPD pode ser obtido por meio da função `hpd` da *library* `TeachingDemos`; já no caso de distribuições multimodais, pode-se utilizar a função `hdr` da *library* `hdrcde`.

No próximo capítulo, serão avaliados os desempenhos dos intervalos de credibilidade central e HPD considerando diferentes distribuições *a priori*  $\text{Beta}(a, b)$  para  $\theta$ , com  $a > 0$  e  $b > 0$ . Além disso, esses intervalos serão comparados com os intervalos clássicos de Wald, Clopper-Pearson, Wilson e Agresti-Coull.

# Capítulo 3

## Comparação dos intervalos de confiança e credibilidade para a probabilidade de sucesso

Neste capítulo, os intervalos de Wald, Clopper-Pearson, Wilson, Agresti-Coull e os intervalos de credibilidade HPD e central para distribuições *a priori* Beta(1/2,1/2) e Beta(2,2) são comparados sob critérios clássicos e bayesianos.

Para serem avaliados quanto à probabilidade de cobertura e ao tamanho esperado sob o enfoque clássico, os intervalos bayesianos, que são intervalos numéricos, são encarados como concretizações de intervalos aleatórios. Por sua vez os intervalos clássicos são tomados como intervalos numéricos quando analisados sob a perspectiva bayesiana de tamanho mínimo. Foram adotados coeficientes de confiança e de credibilidade iguais a 95%.

Para a construção dos gráficos, foram utilizadas a *library* `binom` e a *library* `binomSamSize` do pacote R, de maneira que os intervalos foram obtidos por meio da função `binom.confint`; a probabilidade de cobertura foi obtida por meio das funções `coverage` e `binom.coverage` e ainda por meio de uma rotina *ad hoc* desenvolvida em R; já o tamanho esperado foi calculado por meio da função `binom.length`.

Nas Figuras D.1 a D.12 no Apêndice D, apresentamos gráficos da probabilidade de cobertura (1.1) em função de  $\theta$  para os intervalos em estudo. O intervalo de Wald não apresenta um bom desempenho, uma vez que sua probabilidade de cobertura nunca atinge o valor

nominal de 95%. O intervalo de Clopper-Pearson, por outro lado, apresenta-se conservador, com a probabilidade sempre acima dos 95%. Os intervalos de Wilson e Agresti-Coull têm um desempenho mais razoável, uma vez que atingem o valor nominal de 95% mais vezes. Os intervalos HPD e central obtidos a partir de uma distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) têm probabilidade de cobertura mais próxima do valor nominal para  $\theta$  próximo dos extremos do espaço paramétrico, o que era esperado, pois essa distribuição *a priori* atribui maior probabilidade aos extremos. Já os intervalos HPD e central obtidos sob uma distribuição *a priori* Beta(2,2) apresentam um melhor desempenho para valores de  $\theta$  mais afastados dos limites do espaço paramétrico. O aumento do tamanho amostral leva a desempenhos melhores de todos os intervalos, especialmente para  $\theta$  afastado dos limites do espaço paramétrico, sendo que nesses extremos o intervalo de Wilson mostra um melhor desempenho.

Os intervalos são comparados também com relação à probabilidade de cobertura média (1.5), adotando-se como função peso uma das seguintes densidades beta: (a) Beta(1,1), ou seja, distribuição uniforme, atribuindo pesos iguais dentro do intervalo (0,1); (b) Beta(12,12), em que se atribuem pesos maiores para valores relativamente próximos da média 0.5; (c) Beta(0.26,2.34), em que se atribuem pesos maiores para valores relativamente próximos de 0 e (d) Beta(2.34,0.26), em que se atribuem pesos maiores para valores relativamente próximos de 1. Por meio das Figuras de D.13 a D.20 no Apêndice D, notamos, mais uma vez, que a cobertura média para o intervalo de Wald é baixa para valores pequenos de  $n$ , em geral para  $n < 20$  e, embora se aproxime do valor nominal com o aumento de  $n$ , fica sempre abaixo de 95%. O intervalo de Clopper-Pearson, por sua vez, apresenta cobertura média sempre acima do valor nominal. O intervalo de Agresti-Coull mostra um bom desempenho quando se considera a distribuição uniforme como função atribuidora de peso e, com função Beta(12,12), apresenta cobertura média um pouco acima do valor nominal para valores de  $n$  menores que 20. Todos os intervalos clássicos apresentaram uma piora no desempenho com as funções peso Beta(0.26,2.34) e Beta(2.34,0.26), à exceção apenas do intervalo de Wilson que exibe um ótimo desempenho para todas as funções peso consideradas. Sob o enfoque bayesiano, observamos um desempenho razoável apenas para o intervalo HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2) e função peso Beta(12,12).

Para descrever quão distantes as probabilidades de cobertura ficam em relação ao nível

de confiança nominal, apresentamos nas Tabelas E.1, E.2, E.3 e E.4 do Apêndice E, além das probabilidades de cobertura média dos intervalos, a raiz quadrada do erro quadrático médio ponderado pelas distribuições Beta(1,1), Beta(12,12), Beta(0.26,2.34) e Beta(2.34,0.26), respectivamente. Com função peso Beta(1,1), os intervalos de Wilson e Agresti-Coull apresentam menor variabilidade relativamente ao valor nominal de 95%. Com as funções peso Beta(0.26,2.34) e Beta(2.34, 0.26), os intervalos de Wilson, Agresti-Coull, Clopper-Pearson e o intervalo de credibilidade central obtido com distribuição *a priori* Beta(1/2, 1/2) apresentam os menores valores da raiz do erro quadrático médio. Já com função peso Beta(12,12), notamos que os intervalos de Wilson, Agresti-Coull, HPD e central obtidos com distribuição *a priori* Beta(2,2) têm variabilidades próximas e menores do que os valores de erro quadrático médio dos demais intervalos.

Comparamos ainda os intervalos em estudo com respeito ao tamanho esperado do intervalo (expressão 1.6). Nas Figuras de D.21 a D.26 do Apêndice D, exibimos os gráficos do tamanho esperado dos intervalos em função de  $\theta$  para  $n = 15$  e  $n = 50$ . Notamos que, em geral, o intervalo de Clopper-Pearson apresenta o maior tamanho esperado, o que já era previsto por se tratar de um intervalo conservador. Para  $\theta$  próximo dos limites do espaço paramétrico, constatamos que o intervalo de Agresti-Coull possui o maior tamanho esperado, enquanto os intervalos de credibilidade HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) possuem os menores tamanhos depois do intervalo de Wald. É importante salientar que o intervalo de Wald fica mais estreito conforme  $\theta$  se aproxima de 0 ou 1, pois esse intervalo é degenerado em 0 ou em 1 quando  $x = 0$  ou  $x = n$ , respectivamente. Para  $\theta$  não muito próximo dos extremos, podemos observar que os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(2,2) têm o menor tamanho esperado.

Os intervalos bayesianos, especialmente os intervalos HPD, apresentam os menores tamanhos quando comparados quanto ao critério bayesiano de tamanho mínimo (Tabelas E.5, E.6, E.7 e E.8 do Apêndice E). Quando o valor observado está próximo dos extremos 0 e  $n$ , o intervalo de credibilidade HPD obtido sob a distribuição *a priori* Beta(1/2, 1/2) é o de tamanho mínimo. Já para valores observados afastados dos extremos, o menor intervalo é o HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2). É importante notar que os intervalos de credibilidade central e HPD possuem tamanhos iguais quando a função densidade de probabilidade

*a posteriori* é simétrica. Ressaltamos também que, ao observar  $x = 0$  ou  $x = n$ , o intervalo de Wald obtido é  $[0; 0]$  e  $[1; 1]$ , respectivamente, e, assim, apresenta tamanho nulo nesses casos. Notamos ainda que a diferença de tamanho entre os intervalos é maior para amostras pequenas.

De maneira geral, vemos que os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(2,2) apresentam melhor desempenho para valores de  $\theta$  mais afastados dos limites do espaço paramétrico, pois observamos que sua curva da probabilidade de cobertura está mais próxima de 95% para valores de  $\theta$  entre 0.2 e 0.8. Além disso, quando sabemos previamente que a probabilidade de sucesso está nesse intervalo, podemos calcular os valores de cobertura média e variabilidade relativamente ao valor nominal adotando a função peso Beta(12,12) e, assim, verificamos que os intervalos de Wilson, Agresti-Coull, HPD e central com distribuição *a priori* Beta(2,2) possuem valores de erro quadrático médio próximos (diferença máxima de 0.006) e menores do que os valores dos demais intervalos estudados para os diferentes tamanhos amostrais considerados. Quando comparados quanto à cobertura média, notamos que os intervalos de Wilson e Agresti-Coull estão mais próximos de 95%, no entanto os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(2,2) têm como vantagem menores tamanhos esperados e, sob o ponto de vista bayesiano, são intervalos de tamanho mínimo, ficando esta diferença de tamanho mais evidente conforme diminui o valor de  $n$ . Para  $\theta$  mais próximo dos limites do espaço paramétrico ( $\theta < 0.2$  ou  $\theta > 0.8$ ), os intervalos de Wilson e Agresti-Coull apresentam menor variabilidade relativamente ao valor nominal de 95% para as diferentes funções peso consideradas, sobressaindo-se o intervalo de Wilson com cobertura média mais próxima de 95%. Entretanto, os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) têm menor tamanho esperado quando são observados valores mais próximos dos limites 0 e  $n$ .

# Capítulo 4

## Comparação de intervalos de confiança e de credibilidade para parâmetros de tabelas 2x2

A comparação de duas probabilidades de sucesso é um problema muito comum na estatística, principalmente em estudos médicos, em que se analisam tabelas  $2 \times 2$ . Nesse contexto, são definidas duas variáveis aleatórias independentes:  $X_1 \sim \text{Binomial}(n_1, \theta_1)$  e  $X_2 \sim \text{Binomial}(n_2, \theta_2)$  e o objetivo é comparar  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Três funções desses parâmetros são particularmente importantes, a saber a diferença de probabilidades ( $\Delta$ ), o risco relativo ( $\rho$ ) e a razão de chances ( $\psi$ ), dadas por

$$\Delta = \theta_1 - \theta_2 \quad (4.1)$$

$$\rho = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (4.2)$$

$$\psi = \frac{\theta_1(1 - \theta_2)}{\theta_2(1 - \theta_1)} \quad (4.3)$$

Neste capítulo, estudaremos os intervalos de confiança usuais para essas três funções, assim como os intervalos de credibilidade construídos adotando-se como distribuições *a priori* distribuições beta para as probabilidades de sucesso  $\theta_1$  e  $\theta_2$ .

## 4.1 Intervalos de confiança

### 4.1.1 Diferença de probabilidades

Para a diferença de probabilidades ( $\Delta$ ), também chamada risco atribuível em Epidemiologia, o intervalo de confiança com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  usualmente empregado tem a seguinte forma (Agresti & Caffo, 2000)

$$\left[ (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_1)}{n_1} + \frac{\hat{\theta}_2(1 - \hat{\theta}_2)}{n_2}} \right], \quad (4.4)$$

em que  $\hat{\theta}_i$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Esse intervalo é chamado intervalo de Wald por resultar da inversão do teste de Wald para  $H_0 : \Delta = \Delta_0$ . Assim como no caso de uma única probabilidade de sucesso, embora esse intervalo tenha uma construção simples, sua performance é frequentemente ruim em termos da probabilidade de cobertura.

Por essa razão, Mee (1984) e Miettinen & Nurminen (1985) apresentaram o intervalo de confiança escore para  $\Delta$ , obtido a partir da inversão do teste escore para  $H_0 : \Delta = \Delta_0$  usando a estatística:

$$Q_{\Delta} = \frac{(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 - \Delta_0)^2}{\bar{V}_{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}}, \quad (4.5)$$

em que  $\bar{V}_{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1} \left[ \frac{\bar{\theta}_1(1 - \bar{\theta}_1)}{n_1} + \frac{\bar{\theta}_2(1 - \bar{\theta}_2)}{n_2} \right]$  e  $\bar{\theta}_i$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta_i$  restrito à  $\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = \Delta_0$ . Dessa forma, o intervalo de confiança escore para  $\Delta$  com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  é o conjunto de valores de  $\Delta_0$  que levam à não rejeição da hipótese  $H_0 : \Delta = \Delta_0$  com estatística de teste  $Q_{\Delta}$ . Esse intervalo precisa ser determinado iterativamente.

Um terceiro intervalo para a diferença de probabilidades foi apresentado por Agresti & Caffo (2000), em que são adicionadas  $t/2$  pseudo-observações a cada uma das duas amostras, sendo  $t/4$  sucessos e  $t/4$  fracassos, de maneira que  $\tilde{\theta}_i = (X_i + t/4)/(n_i + t/2)$ . Para o nível de confiança  $1 - \alpha$ , o intervalo de Wald ajustado para  $\Delta$  é



$$\left[ \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{\theta}_1(1-\tilde{\theta}_1)}{n_1+t/2} + \frac{\tilde{\theta}_2(1-\tilde{\theta}_2)}{n_2+t/2}} \right] \quad (4.6)$$

Em seu artigo, [Agresti & Caffo \(2000\)](#) investigaram se há um valor para  $t$  que faça a distância entre a probabilidade de cobertura e o nível de confiança nominal ser pequena, mesmo para valores pequenos de  $n_1$  e  $n_2$ .

A probabilidade de cobertura de uma estimativa intervalar para um parâmetro  $\nu$  de uma tabela  $2 \times 2$  é

$$C_\nu(n_1, \theta_1; n_2, \theta_2) = C_\nu = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \mathbb{I}_\nu(k_1, \theta_1; k_2, \theta_2) \binom{n_1}{k_1} \theta_1^{k_1} (1-\theta_1)^{n_1-k_1} \binom{n_2}{k_2} \theta_2^{k_2} (1-\theta_2)^{n_2-k_2}, \quad (4.7)$$

em que  $\mathbb{I}_\nu(k_1, \theta_1; k_2, \theta_2)$  é a variável que indica se o intervalo construído observando-se  $X_1 = k_1$  e  $X_2 = k_2$  contém o valor  $\nu$ .

[Agresti & Caffo \(2000\)](#) geraram 10000 valores de  $(n_1, \theta_1; n_2, \theta_2)$  tomando  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , independentemente, de uma distribuição uniforme em  $(0, 1)$  e tomando  $n_1$  e  $n_2$ , independentemente, de uma distribuição uniforme discreta em  $\{10, 11, \dots, 30\}$ . Para cada realização, obtiveram a probabilidade de cobertura  $C_\Delta(n_1, \theta_1; n_2, \theta_2)$  considerando  $t = 0, 2, 4, 6, 8$  e nível de confiança de 95%. Comparando a proporção de casos em que  $C_\Delta(n_1, \theta_1; n_2, \theta_2) < 0,93$ , o intervalo de Wald ajustado recomendado para  $\Delta$  é aquele obtido com  $t = 4$ .

### 4.1.2 Risco relativo

Na construção de uma estimativa intervalar para o risco relativo, o intervalo usualmente empregado envolve uma transformação logarítmica de  $\hat{\theta}_1/\hat{\theta}_2$  e uma aproximação em séries de Taylor de primeira ordem para a variância de  $\log(\hat{\theta}_1/\hat{\theta}_2)$ , utilizando o método Delta. Conforme descrito em [Katz et al. \(1978\)](#), esse intervalo com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  é

$$\exp \left\{ \log(\widehat{\theta}_1/\widehat{\theta}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\left[ \frac{1}{x_1} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{n_2} \right]} \right\}. \quad (4.8)$$

O procedimento adotado para os casos em que  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = n_1$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_2 = n_2$  é o mesmo de [Koopman \(1984\)](#), descrito em 4.1. Nesse trabalho, esse intervalo será denominado “intervalo do método log para o risco relativo”.

**Tabela 4.1:** Procedimento para lidar com valores extremos de  $x_1$  e  $x_2$  no intervalo do método log para o risco relativo.

Valores de $x_1$ e $x_2$	Limite inferior	Limite superior
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	0	$\infty$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$	0	Cálculo fazendo $x_2 = 1/2$
$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	Cálculo fazendo $x_1 = 1/2$	$\infty$
$\begin{cases} x_1 = n_1 \\ x_2 = n_2 \end{cases}$	Cálculo fazendo $x_1 = n_1 - 1/2$ $x_2 = n_2 - 1/2$	Cálculo fazendo $x_1 = n_1 - 1/2$ $x_2 = n_2 - 1/2$

O intervalo de confiança score para o risco relativo foi apresentado em [Koopman \(1984\)](#) e, adotando um coeficiente de confiança  $1 - \alpha$ , consiste no conjunto de valores de  $\rho_0$  que levam à não rejeição da hipótese  $H_0 : \rho = \rho_0$  com um nível de significância  $\alpha$  usando a estatística de teste

$$Q_\rho = \frac{(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 \rho_0)^2}{\bar{V}_{\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 \rho_0}},$$

em que  $\bar{V}_{\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 \rho_0} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1} \left[ \frac{\bar{\theta}_1(1 - \bar{\theta}_1)}{n_1} + \rho_0^2 \frac{\bar{\theta}_2(1 - \bar{\theta}_2)}{n_2} \right]$  e  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$  são os estimadores de máxima verossimilhança de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente, restritos à  $\bar{\theta}_1/\bar{\theta}_2 = \rho_0$ , dados por

$$\bar{\theta}_1 = \rho_0 \bar{\theta}_2$$

$$\bar{\theta}_2 = [-B - (B^2 - 4AC)]^{1/2} / 2A$$

com  $A = (n_1 + n_2)\rho_0$ ,  $B = -[n_1\rho_0 + x_1 + n_2 + x_2\rho_0]$  e  $C = x_1 + x_2$ . A obtenção desse intervalo também depende de processo iterativo.

### 4.1.3 Razão de chances

Para a obtenção de uma estimativa intervalar para a razão de chances, [Woolf et al. \(1955\)](#) utilizam a aproximação normal para a distribuição do logaritmo de  $\psi$  e o método Delta. Esse intervalo, aqui denominado “intervalo do método log para a razão de chances”, com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  é dado por

$$\exp \left\{ \log \left( \frac{\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_2)}{\hat{\theta}_2(1 - \hat{\theta}_1)} \right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\left[ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{n_1 - x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{n_2 - x_2} \right]} \right\}. \quad (4.9)$$

Alguns procedimentos devem ser adotados para que se obtenha esse intervalo em casos de  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = n_1$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_2 = n_2$ . Esses procedimentos estão descritos na Tabela 4.2.

Em [Cornfield \(1956\)](#), um intervalo de confiança score foi desenvolvido para a razão de chances fixando as marginais totais da tabela pela condição  $X_1 + X_2 = m$ . [Miettinen & Nurminen \(1985\)](#) apresentaram, por sua vez, um intervalo de confiança score para a razão de chances que corresponde a uma derivação do intervalo de [Cornfield \(1956\)](#), com a diferença de não ser condicionado ao total marginal e, ainda, com a omissão do fator de correção de continuidade e utilização de um estimador não enviesado para a variância. Esse intervalo é constituído por todos os valores de  $\psi_0$  que levam à não rejeição da hipótese  $H_0 : \psi = \psi_0$  com um nível de significância  $\alpha$  com a estatística de teste

$$Q_\psi = \frac{n_1 + n_2 - 1}{n_1 + n_2} [n_1(\hat{\theta}_1 - \bar{\theta}_1)]^2 \left[ \frac{1}{n_1\bar{\theta}_1(1 - \bar{\theta}_1)} + \frac{1}{n_2\bar{\theta}_2(1 - \bar{\theta}_2)} \right], \quad (4.10)$$

em que  $\bar{\theta}_1$  e  $\bar{\theta}_2$  são os estimadores de máxima verossimilhança de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente, condicionados a  $(\bar{\theta}_1(1 - \bar{\theta}_2))/(\bar{\theta}_2(1 - \bar{\theta}_1)) = \psi_0$ , dados por

**Tabela 4.2:** Procedimento para lidar com valores extremos de  $x_1$  e  $x_2$  no intervalo do método log para a razão de chances.

Valores de $x_1$ e $x_2$	Limite inferior	Limite superior
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = n_2 \end{cases}$	0	Calcular fazendo $x_1 = 1/2$ e $x_2 = n_2 - 1/2$
$\begin{cases} x_1 = n_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	Calcular fazendo $x_1 = n_1 - 1/2$ e $x_2 = 1/2$	$\infty$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \neq 0 \\ x_2 \neq n_2 \end{cases}$	0	Calcular fazendo $x_1 = 1/2$
$\begin{cases} x_1 = n_1 \\ x_2 \neq 0 \\ x_2 \neq n_2 \end{cases}$	Calcular fazendo $x_1 = n_1 - 1/2$	$\infty$
$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_1 \neq n_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	Calcular fazendo $x_2 = 1/2$	$\infty$
$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_1 \neq n_1 \\ x_2 = n_2 \end{cases}$	0	Calcular fazendo $x_2 = n_2 - 1/2$
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	0	$\infty$
$\begin{cases} x_1 = n_1 \\ x_2 = n_2 \end{cases}$	0	$\infty$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\bar{\theta}_2 \psi_0}{1 + \bar{\theta}_2 (\psi_0 - 1)} \quad (4.11)$$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.12)$$

com  $A = n_2(\psi_0 - 1)$ ,  $B = n_1\psi_0 + n_2 - (x_1 + x_2)(\psi_0 - 1)$  e  $C = -(x_1 + x_2)$ . Assim como nos outros intervalos escore apresentados nesse capítulo, este também é obtido via processo iterativo.

## 4.2 Intervalos de credibilidade

Além dos intervalos de confiança descritos, podem ser obtidos também intervalos de credibilidade para os parâmetros  $\Delta$ ,  $\rho$  e  $\psi$  adotando-se distribuições *a priori* para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Nesse trabalho,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  serão considerados independentes com distribuições *a priori* Beta( $a_1, b_1$ ) e Beta( $a_2, b_2$ ), respectivamente, com  $a_i > 0$  e  $b_i > 0$ , para  $i = 1, 2$ . Assim, suas distribuições *a posteriori* são Beta( $A_1, B_1$ ) e Beta( $A_2, B_2$ ), respectivamente, com  $A_i = a_i + x_i$  e  $B_i = b_i + n_i - x_i$ ,  $i = 1, 2$ .

O intervalo central com coeficiente de credibilidade  $\gamma = 1 - \alpha$  para uma função paramétrica  $\nu$  da tabela de contingência  $2 \times 2$  é definido como

$$R_c(\gamma) = \left[ \nu_{\frac{\alpha}{2}}, \nu_{\frac{1-\alpha}{2}} \right],$$

sendo os limites os quantis de probabilidade *a posteriori*  $\alpha/2$  e  $(1-\alpha)/2$ , respectivamente. Um intervalo central aproximado por Monte Carlo é obtido ordenando uma amostra aleatória  $(\nu_i, 1 \leq i \leq n)$  e usando os quantis empíricos. Representando a amostra ordenada por  $(\nu_{(i)}, 1 \leq i \leq n)$ , o intervalo central aproximado é

$$\widehat{R}_c(\gamma) = \left[ \nu_{(\lceil n \frac{\alpha}{2} \rceil)}, \nu_{(\lceil n \frac{1-\alpha}{2} \rceil)} \right],$$

em que  $[a]$  denota a parte inteira de  $a$ .

Sabemos que, para distribuições unimodais não simétricas, o intervalo de credibilidade HPD é um melhor resumo intervalar do que o intervalo de credibilidade central e é definido como  $R_0(\gamma) = \{\nu : \pi(\nu|x) \geq k_\gamma\}$ , em que  $\pi(\nu|x)$  é a função densidade *a posteriori* e  $k_\gamma$  é a maior constante para a qual a probabilidade *a posteriori* do intervalo é no mínimo  $\gamma = 1 - \alpha$ . Por sua definição, o intervalo HPD é mais difícil de ser obtido, mesmo quando dispomos das formas fechadas das funções densidade e de distribuição *a posteriori*. Nesse trabalho, obtemos uma aproximação para o intervalo HPD por meio do método proposto por [Chen & Shao \(1999\)](#). Considerando a amostra ordenada  $(\nu_{(i)}, 1 \leq i \leq n)$ , determinamos os intervalos de credibilidade  $\gamma = 1 - \alpha$

$$\widehat{R}_i(\gamma) = (\nu_{(i)}, \nu_{(i+[n\gamma])}), i = 1, \dots, n - [n\gamma].$$

Segundo o método de [Chen & Shao \(1999\)](#), o intervalo HPD aproximado é o intervalo  $\widehat{R}_0(\gamma) = \widehat{R}_{i_0}(\gamma)$  tal que  $\nu_{(i_0+[n\gamma])} - \nu_{(i_0)} = \min[\nu_{(i+[n\gamma])} - \nu_{(i)}], 1 \leq i \leq n - [n\gamma]$ .

Para obtenção dos intervalos bayesianos central e HPD aproximados apresentados acima, consideramos amostras aleatórias das distribuições *a posteriori* de  $\Delta, \rho$  e  $\psi$  obtidas pelo método de Monte Carlo ordinário ([Paulino et al., 2003](#)).

Com distribuições *a priori* beta, as distribuições *a posteriori* de  $\Delta, \rho$  e  $\psi$  induzidas pelas distribuições *a posteriori* de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  foram dadas em forma de integrais por [Hashemi et al. \(1997\)](#) e [Nurminen & Mutanen \(1987\)](#). Expressões equivalentes usando somas finitas foram apresentadas em [Latorre \(1982\)](#) para a razão de chances, [Hora & Kelley \(1983\)](#) para a razão de chances e para o risco relativo, [Weisberg \(1972\)](#), [Aitchison & Bacon-Shone \(1981\)](#) e [Gupta et al. \(1997\)](#) para o risco relativo e [Pham-Gia et al. \(1993\)](#) para a diferença de probabilidades. As distribuições *a posteriori* em forma de integrais obtidas por [Hashemi et al. \(1997\)](#) podem ser visualizadas no Apêndice C.

### 4.3 Comparação dos intervalos

Os diferentes intervalos apresentados para a diferença de probabilidades, risco relativo e razão de chances com nível de confiança e de credibilidade de 95% serão comparados quanto à probabilidade de cobertura, encarando nesse caso os intervalos bayesianos como intervalos aleatórios. Além disso, serão comparados também quanto ao critério bayesiano de tamanho mínimo, nesse caso encarando os intervalos clássicos como intervalos numéricos. A obtenção dos intervalos clássicos de Wald e Wald ajustado para as três medidas foi implementada no pacote estatístico R; já o intervalo score foi obtido por meio da *library* PropCIs. Para obtenção dos intervalos bayesianos, foram simulados 100000 valores das distribuições *a posteriori* de  $\Delta$ ,  $\rho$  e  $\psi$  pelo método de Monte Carlo ordinário (Paulino et al., 2003). Os intervalos centrais aproximados foram obtidos ordenando as amostras aleatórias e usando os quantis empíricos, enquanto os intervalos HPD foram obtidos por meio do método proposto por Chen & Shao (1999), implementado na função `boa.hp` da *library* `boa` do pacote estatístico R.

Os intervalos bayesianos avaliados nesse trabalho foram restringidos aos casos em que as distribuições *a priori* de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são iguais com as seguintes especificações Beta(1/2,1/2), Beta(1,1) e Beta(2,2). É importante salientar que adotar distribuições *a priori* não informativas para  $\theta_1$  e  $\theta_2$  não garante distribuições *a priori* também não informativas para as medidas de risco. No entanto, é computacionalmente mais simples modelar as probabilidades de sucesso do que as medidas de risco diretamente.

Para os três parâmetros de interesse, foram construídos gráficos da probabilidade de cobertura *versus*  $\theta_1$  fixando os valores 0.1, 0.3 e 0.5 para  $\theta_2$  e considerando os tamanhos amostrais  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $n_1 = n_2 = 20$  e  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ . A fim de melhorar a avaliação desses gráficos, foram calculadas as raízes dos erros quadráticos médios dos intervalos da seguinte forma:

$$\sqrt{\int_0^1 [C_\nu(n_1, \theta_1; n_2, \theta_2^*) - 0.95]^2 g(\theta_1) d\theta_1},$$

sendo os valores de  $n_1$  e  $n_2$  conhecidos, o valor  $\theta_2^*$  fixado e  $g(\theta_1)$  uma função peso. Para

compararmos os gráficos apresentados, fixamos os valores de  $n_1$ ,  $n_2$  e  $\theta_2^*$  como feito para a construção dos gráficos e consideramos como função peso a distribuição uniforme no intervalo  $[0; 1]$ .

Os intervalos são comparados também quanto ao critério bayesiano de tamanho mínimo. Com esse objetivo, foram calculados os tamanhos dos intervalos para os mesmos valores de  $n_1$  e  $n_2$  e pares de observações  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ,  $(x_1, x_2) = (0, n_2/2)$  e  $(x_1, x_2) = (n_1/2, n_2/2)$ .

### 4.3.1 Diferença de probabilidades

Nas Figuras D.27 a D.35 do Apêndice D, pode-se observar a probabilidade de cobertura *versus*  $\theta_1$  dos intervalos para a diferença de probabilidades. Os valores das raízes dos erros quadráticos médios são apresentados nas Tabelas E.9, E.10 e E.11 do Apêndice E. Notamos que os intervalos de Wald ajustado e score estão próximos do nível nominal de 95% e apresentam desempenho semelhante, ligeiramente conservadores, especialmente quando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão ambos próximos dos extremos, assim como já observado em Agresti & Caffo (2000) e Newcombe (1998). Os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) mostram também um bom desempenho, sendo que o intervalo central apresenta os menores valores da raiz do erro quadrático médio quando  $\theta_2 = 0.1$  para todos os tamanhos amostrais considerados. Assim como visto em Agresti & Min (2005), observamos que os intervalos bayesianos com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) tendem a ser melhores do que os intervalos com distribuição *a priori* uniforme, porém para  $\theta_2 = 0.5$  esses intervalos também se destacam com desempenho próximo dos desempenhos dos intervalos de Wald ajustado, score, HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2). O intervalo de Wald mostra sempre os piores resultados, juntamente com os intervalos central e HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2).

Nas Tabelas E.12, E.13 e E.14 do Apêndice E, verificamos que de maneira geral, para os diferentes tamanhos amostrais  $(n_1, n_2)$ , os intervalos de credibilidade HPD apresentam os menores tamanhos, com uma diferença pequena em relação aos intervalos de credibilidade centrais. Para valores observados mais próximos dos extremos, destacam-se os intervalos com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) e Beta(1,1); já para valores observados mais distantes dos extremos, os intervalos com distribuição *a priori* Beta(2,2) têm os menores tamanhos.



É importante salientar que o intervalo de Wald tem tamanho nulo quando observamos  $x_1 = x_2 = 0$  ou  $x_1 = n_1$  e  $x_2 = n_2$ , pois a variância em (4.4) fica igual a zero.

### 4.3.2 Risco relativo e razão de chances

Analisando os Gráficos D.36 a D.44 no Apêndice D, notamos que os intervalos de método log, escore, central e HPD com distribuição *a priori* Beta(1/2, 1/2) apresentam valores da probabilidade de cobertura mais próximos do valor nominal de 95% para os diferentes tamanhos amostrais e valores de  $\theta_2$  considerados. Observando as Tabelas E.15, E.16 e E.17 no Apêndice E, notamos que o intervalo escore apresenta o menor erro quadrático médio, ou seja, tende a ser melhor do que os intervalos bayesianos quanto à proximidade ao valor nominal de 95%, resultado já observado em Agresti & Min (2005); além disso, o intervalo escore mostra-se também melhor do que o intervalo de método log, conforme analisado em Miettinen & Nurminen (1985). Em concordância com outros estudos, como em Agresti & Min (2005), podemos observar que os intervalos bayesianos têm um desempenho melhor usando a distribuição *a priori* não-informativa Beta(1/2,1/2), ao invés de outras distribuições beta. Para alguns casos do intervalo central com distribuição *a priori* Beta(1,1), houve divergência no cálculo da integral do erro quadrático médio, dificultando sua comparação com os demais intervalos quanto a essa medida; no entanto, por meio dos gráficos, notamos que esse intervalo apresenta desempenho semelhante ao intervalo HPD com mesma distribuição *a priori*, principalmente para  $\theta_2 = 0.3$  e  $\theta_2 = 0.5$ . Notamos que os intervalos bayesianos têm probabilidade de cobertura nula para  $\theta_1 = 0$  porque não contêm o valor  $\rho = 0$ .

Nos gráficos de D.45 a D.53 no Apêndice D para a razão de chances, observamos que os intervalos de método log, escore, central e HPD com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) parecem estar mais próximos da curva nominal de 95%. Assim como para a diferença de probabilidades e para o risco relativo, os intervalos bayesianos com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) têm desempenho melhor do que os intervalos com outras distribuições *a priori*, mais uma vez de acordo com os resultados de Agresti & Min (2005) e de Nurminen & Mutanen (1987). Esses resultados podem ser confirmados nas Tabelas E.21, E.22 e E.23 do Apêndice E, onde vemos que os intervalos de método log, escore, HPD e central com distribuição *a priori*

Beta(1/2,1/2) possuem valores de erro quadrático médio próximos e pequenos em relação aos demais intervalos considerados, de maneira que esses valores diminuem conforme aumentam os valores de  $n_1$  e  $n_2$ . É importante notar que os intervalos bayesianos têm probabilidade de cobertura nula para  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_1 = 1$  porque não contêm os valores de  $\psi = 0$  e  $\psi = \infty$ , respectivamente.

Os tamanhos dos intervalos construídos para o risco relativo e para a razão de chances estão nas Tabelas E.18, E.19, E.20, E.24, E.25 e E.26 do Apêndice E. Observamos que, em geral, os intervalos bayesianos possuem os menores tamanhos, sendo que para  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  os intervalos central e HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2) são os de menor tamanho, seguidos pelos central e HPD com distribuição *a priori* Beta(1,1). Já para  $(x_1, x_2) = (0, n_2/2)$ , o intervalo HPD com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) é o intervalo de tamanho mínimo, sendo que sua diferença em relação ao central com mesma distribuição *a priori* diminui conforme aumentam  $n_1$  e  $n_2$ . Com  $(x_1, x_2) = (n_1/2, n_2/2)$ , o intervalo de tamanho mínimo é o HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2), seguido pelos intervalos central e HPD com distribuição *a priori* Beta(2,2) e Beta(1,1), respectivamente. Os intervalos de método log e escore têm tamanho infinito para  $(0, 0)$  por apresentarem limite superior igual a infinito quando  $x_2 = 0$ . Notamos ainda que a diferença entre os tamanhos dos intervalos é maior quando  $x_1$  e  $x_2$  estão próximos dos extremos.

### 4.3.3 Conclusões

Os intervalos escore, HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) apresentam bom desempenho quanto à probabilidade de cobertura e erro quadrático médio para a diferença de probabilidades, o risco relativo e a razão de chances; destaca-se também o intervalo de Wald ajustado para a diferença de probabilidades. Intervalos bayesianos com distribuições *a priori* mais informativas, incluindo até mesmo a distribuição uniforme, não mostram um bom desempenho da probabilidade de cobertura sobre todo o espaço paramétrico. No entanto, notamos que os intervalos bayesianos têm tamanhos menores quando adotamos distribuições *a priori* mais informativas. Por fim, podemos ver que, para todas as funções de probabilidades de sucesso estudadas, o intervalo de confiança escore parece mais adequado dentre os intervalos clássicos e, no contexto bayesiano, possíveis conhecimentos prévios po-

dem ser considerados na construção dos intervalos por meio da escolha da distribuição *a priori*, levando a intervalos mais precisos, como mostramos nas Tabelas E.12 a E.14, E.18 a E.20 e E.24 a E.26.



# Capítulo 5

## Discussão

Usualmente empregado na construção de uma estimativa intervalar para a probabilidade de sucesso, o intervalo de Wald apresenta vários problemas em seu desempenho, levando-nos a buscar intervalos alternativos melhores. No contexto clássico, os intervalos de Wilson e Agresti-Coull destacam-se quanto à probabilidade de cobertura, sendo o desempenho deste último melhor para valores do parâmetro próximos dos extremos. Os intervalos de credibilidade HPD e central com distribuição *a priori* Beta(2,2) apresentam um desempenho próximo dos intervalos de Wilson e de Agresti-Coull quando sabemos previamente que a probabilidade de sucesso está mais afastada dos limites do espaço paramétrico (entre 0.2 e 0.8), tendo como vantagem menores tamanhos.

Em tabelas de contingência  $2 \times 2$ , na construção de estimativas intervalares para a diferença de probabilidades, o risco relativo e a razão de chances, o intervalo de confiança escore mostra-se mais adequado dentre os intervalos clássicos usuais. Os intervalos bayesianos destacam-se por terem tamanhos menores, sendo que os intervalos HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) têm desempenhos da probabilidade de cobertura comparáveis ao intervalo escore para as três funções paramétricas estudadas. Intervalos bayesianos construídos com distribuições *a priori* mais informativas não possuem bom desempenho quanto à probabilidade de cobertura sobre todo o espaço paramétrico, pois esta se afasta do valor nominal conforme o valor do parâmetro se distancia dos locais onde há a maior parte da massa da densidade da distribuição *a priori*. Dessa maneira, se houver uma preocupação maior quanto ao bom desempenho da probabilidade de cobertura sobre todo o espaço pa-

ramétrico, os intervalos escore, HPD e central com distribuição *a priori* Beta(1/2,1/2) são igualmente indicados, mas se esse não for o maior interesse, intervalos bayesianos com distribuições *a priori* mais informativas têm tamanhos menores quando temos uma informação prévia da localização do parâmetro.

Seria interessante estender as investigações desse estudo para intervalos de confiança e de credibilidade construídos para a probabilidade de sucesso e parâmetros de tabelas  $2 \times 2$  na presença de covariáveis.

# Apêndice A

## Expressão 1.4

De acordo com [Askey & Roy \(2010\)](#), a função beta incompleta  $B(x, \alpha, \beta)$ , uma generalização da função beta:

$$B(x, \alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

Para  $x = 1$ , obtém-se a função beta (também chamada integral de Euler):

$$B(1, \alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

em que  $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t} dt$  é a função gama.

Seja  $Y$  uma variável aleatória com distribuição **Beta**( $\alpha, \beta$ ). Sabe-se que sua função de distribuição acumulada tem a forma de uma função beta incompleta regularizada  $\mathbb{I}_y(\alpha, \beta)$ , a saber:

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{I}_y(\alpha, \beta) = \frac{B(y, \alpha, \beta)}{B(1, \alpha, \beta)}.$$

Para valores inteiros de  $\alpha$  e  $\beta$ , pode-se trabalhar a expressão acima por meio de integração por partes e, então, obtém-se:

$$\mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{I}_y(\alpha, \beta) = \sum_{j=\alpha}^{\infty} \binom{\alpha + \beta - 1}{j} y^j (1 - y)^{\alpha + \beta - 1 - j}$$

Seja agora  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $\mathbf{Bin}(n, \theta)$ , cuja função distribuição acumulada é

$$\mathbb{P}[X \leq x] = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

Fazendo  $j = n - k$  e sabendo que  $\binom{n}{m} = 0$  para  $m > n$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq x] &= \sum_{j=n-x}^n \binom{n}{j} (1 - \theta)^j \theta^{n-j} = \sum_{j=n-x}^{\infty} \binom{n}{j} (1 - \theta)^j \theta^{n-j} \\ &= \mathbb{I}_{1-\theta}(n - x, x + 1) = 1 - \mathbb{I}_{\theta}(x + 1, n - x) \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\sum_{k=x}^n \binom{n}{k} \theta_i^k (1 - \theta_i)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{x-1} \theta_i^k (1 - \theta_i)^{n-k} = 1 - \mathbb{P}[X' \leq x - 1],$$

em que  $X' \sim \mathbf{Bin}(n, \theta_i)$ . Portanto:

$$\sum_{k=x}^n \binom{n}{k} \theta_i^k (1 - \theta_i)^{n-k} = \mathbb{I}_{\theta_i}(x, n - x + 1) = \alpha/2.$$

Logo,  $\theta_i$  é o quantil de ordem  $\alpha/2$  da distribuição  $\mathbf{Beta}(x, n - x + 1)$ .

Analogamente, para o limite superior do intervalo de Clopper-Pearson, temos



$$\sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \theta_s^k (1 - \theta_s)^{n-k} = \mathbb{P}[X'' \leq x],$$

em que  $X'' \sim \mathbf{Bin}(n, \theta_s)$ . Então:

$$\sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \theta_s^k (1 - \theta_s)^{n-k} = 1 - \mathbb{I}_{\theta_s}(x + 1, n - x) = \alpha/2$$

e portanto,  $\theta_s$  é o quantil de ordem  $1 - \alpha/2$  da distribuição  $\mathbf{Beta}(x + 1, n - x)$ .



## Apêndice B

### Relação entre os intervalos (1.9) e (1.10)

Os intervalos de Wilson e Agresti-Coull com coeficiente de confiança de 95% são, respectivamente:

$$\left[ \tilde{\theta} \pm 2 \sqrt{\frac{1}{n+4} \left( \frac{n}{n+4} \hat{\theta}(1-\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{n+4} \right)} \right]$$
$$\left[ \tilde{\theta} \pm 2 \sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1-\tilde{\theta})}{n+4}} \right],$$

Vejam os:

$$\begin{aligned} \Delta &= \tilde{\theta}(1-\tilde{\theta}) - \frac{n}{n+4} \hat{\theta}(1-\hat{\theta}) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{n+4} \\ &= \frac{X+2}{n+4} \left( 1 - \frac{X+2}{n+4} \right) - \frac{n}{n+4} \frac{X}{n} \left( 1 - \frac{X}{n} \right) - \frac{1}{n+4} \\ &= \frac{(X+2)(n-X+2)}{(n+4)^2} - \frac{X(n-X)+n}{n(n+4)} \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\Delta = n^2 - 4nX + 4X^2 = (n - 2X)^2 \geq 0$$

Portanto:

$$\tilde{\theta}(1 - \tilde{\theta}) \geq \frac{n}{n+4} \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{n+4}$$

e então

$$\sqrt{\frac{\tilde{\theta}(1 - \tilde{\theta})}{n+4}} \geq \sqrt{\frac{1}{n+4} \left( \frac{n}{n+4} \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{n+4} \right)}$$

Logo, o intervalo de Agresti-Coull (1.10) contém o intervalo de Wilson (1.9).

# Apêndice C

## Distribuições *a posteriori* para as funções paramétricas de tabelas 2x2

Em Hashemi et al. (1997), são apresentadas as distribuições *a posteriori* de  $\Delta$ ,  $\rho$  e  $\psi$  em forma de integrais, considerando distribuições *a priori* independentes  $\text{Beta}(a_i, b_i)$  para  $\theta_i, i = 1, 2$ . Sendo  $\text{Beta}(A_i, B_i)$  com  $A_i = a_i + x_i$  e  $B_i = b_i + n_i - x_i$  a distribuição *a posteriori* de  $\theta_i, i = 1, 2$ , temos a seguinte distribuição *a posteriori* para a diferença de probabilidades:

$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} \int_{-t}^0 \frac{(\theta_2+t)^{A_1-1}(1-\theta_2-t)^{B_1-1}}{B(A_1, B_1)} \frac{\theta_2^{A_2-1}(1-\theta_2)^{B_2-1}}{B(A_2, B_2)} d\theta_2, t \leq 0 \\ \int_0^{1-t} \frac{(\theta_2+t)^{A_1-1}(1-\theta_2-t)^{B_1-1}}{B(A_1, B_1)} \frac{\theta_2^{A_2-1}(1-\theta_2)^{B_2-1}}{B(A_2, B_2)} d\theta_2, t > 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

em que  $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a + b)$ . Já para o risco relativo:

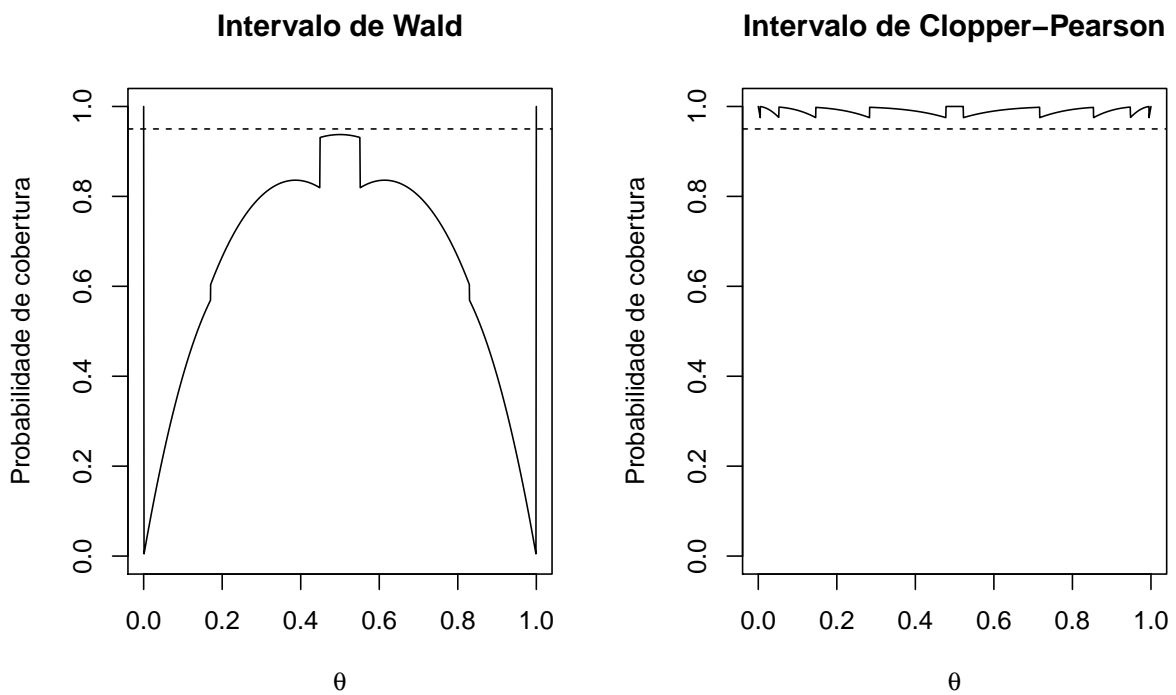
$$f_{\rho}(t) = \begin{cases} \int_0^1 \frac{\theta_2(t\theta_2)^{A_1-1}(1-t\theta_2)^{B_1-1}}{B(A_1, B_1)} \frac{\theta_2^{A_2-1}(1-\theta_2)^{B_2-1}}{B(A_2, B_2)} d\theta_2, 0 < t \leq 1 \\ \int_0^{1/t} \frac{\theta_2(t\theta_2)^{A_1-1}(1-t\theta_2)^{B_1-1}}{B(A_1, B_1)} \frac{\theta_2^{A_2-1}(1-\theta_2)^{B_2-1}}{B(A_2, B_2)} d\theta_2, t > 1 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Para a razão de chances, Hashemi et al. (1997) usam que  $\psi = c(\lambda_1/\lambda_2)$ , com  $\lambda_i = (B_i/A_i)(\theta_i/(1-\theta_i))$ ,  $i = 1, 2$  e  $c = (B_2/A_2)/(B_1/A_1)$ , pois demonstram que  $\lambda_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} F_{(2A_i, 2B_i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Então pela lei da probabilidade total, chegam à seguinte distribuição *a posteriori*:

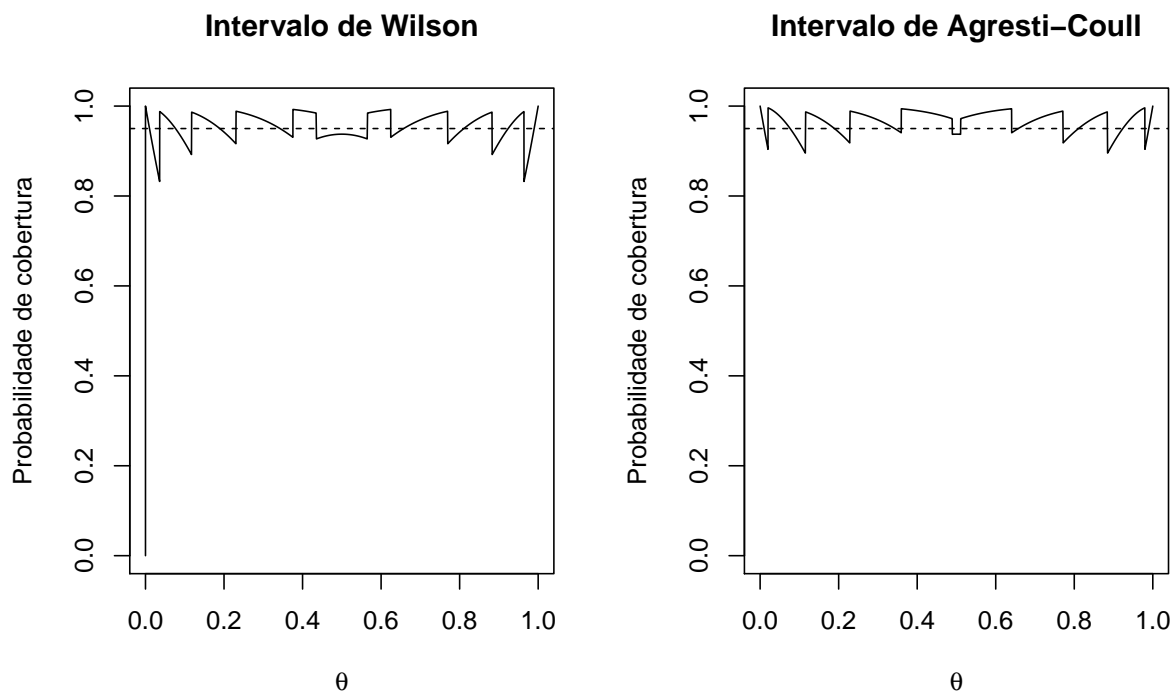
$$f_{\psi}(t) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda_2}{c} \frac{A_1^{A_1} B_1^{B_1}}{B(A_1, B_1)} \frac{(t\lambda_2/c)^{A_1-1}}{(B_1 + A_1 t\lambda_2/c)^{(A_1+B_1)}} \frac{A_2^{A_2} B_2^{B_2}}{B(A_2, B_2)} \frac{\lambda_2^{A_2-2}}{(B_2 + A_2 \lambda_2)^{(A_2+B_2)}} d\lambda_2 \quad (\text{C.3})$$

# Apêndice D

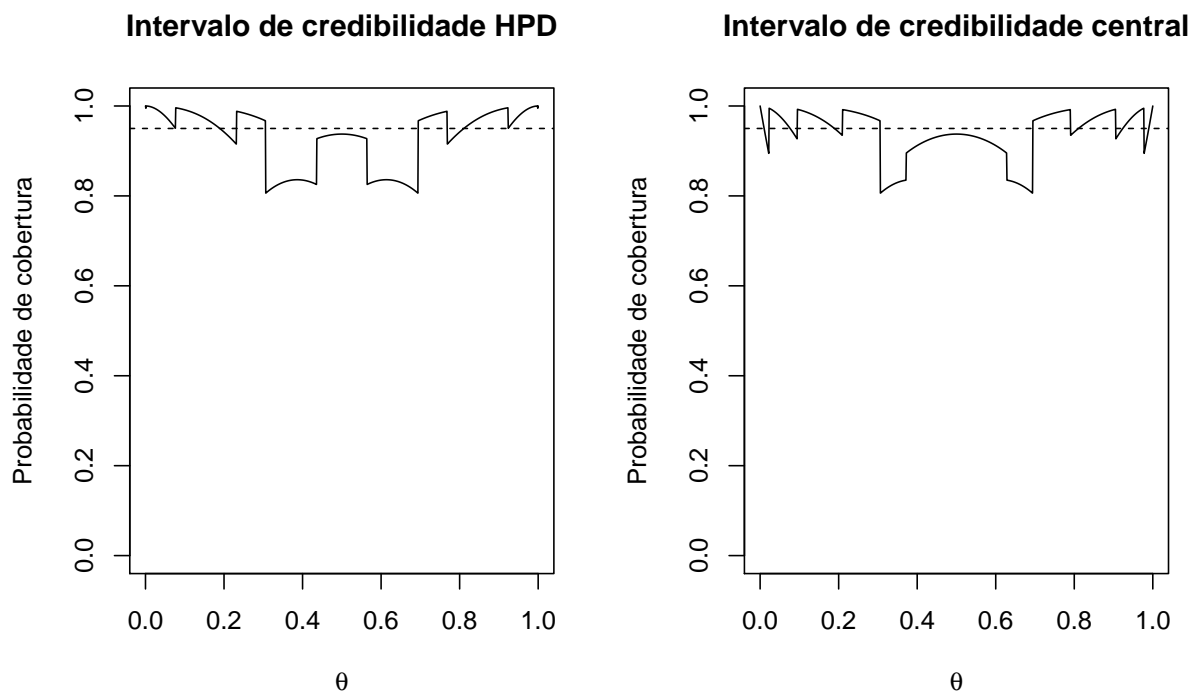
## Gráficos



**Figura D.1:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 5$  para os intervalos de Wald e Clopper-Pearson.

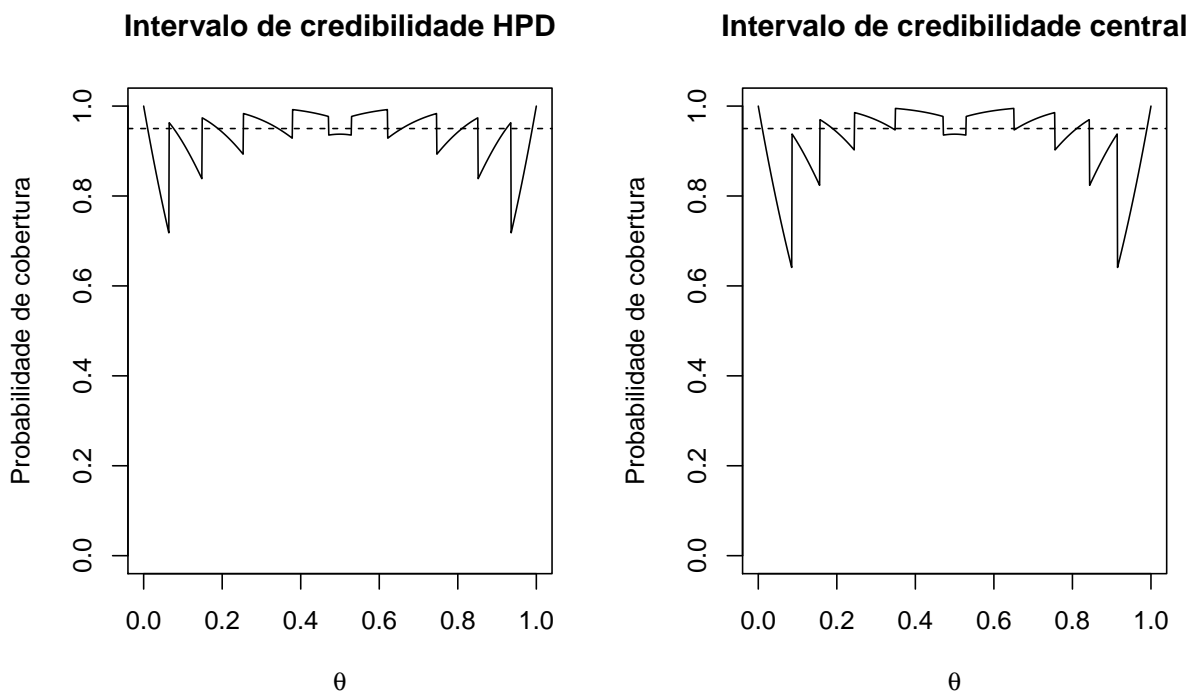


**Figura D.2:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 5$  para os intervalos de Wilson e Agresti-Coull.

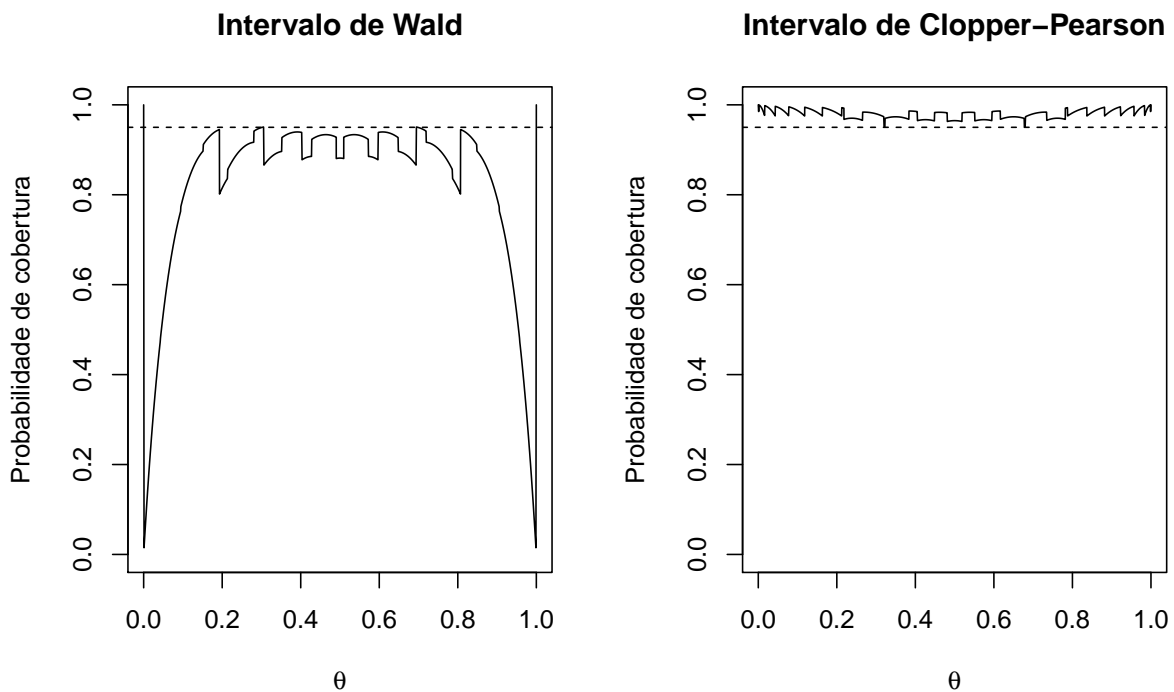


**Figura D.3:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 5$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(1/2, 1/2)$ .

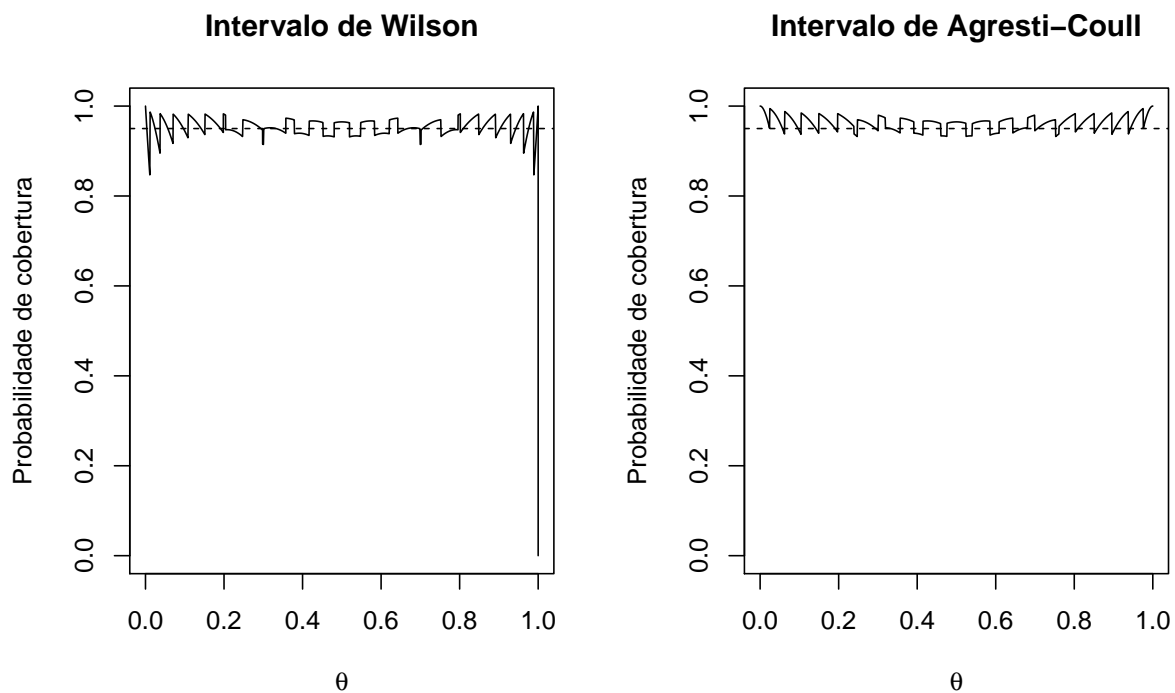




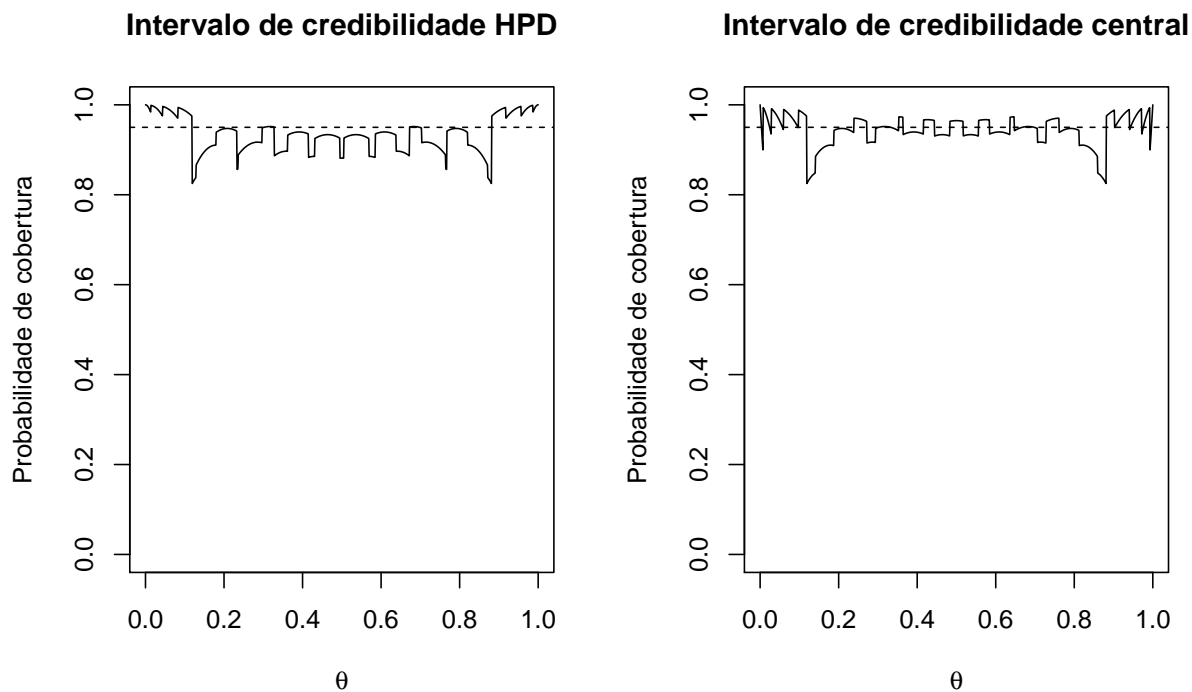
**Figura D.4:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 5$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(2,2)$ .



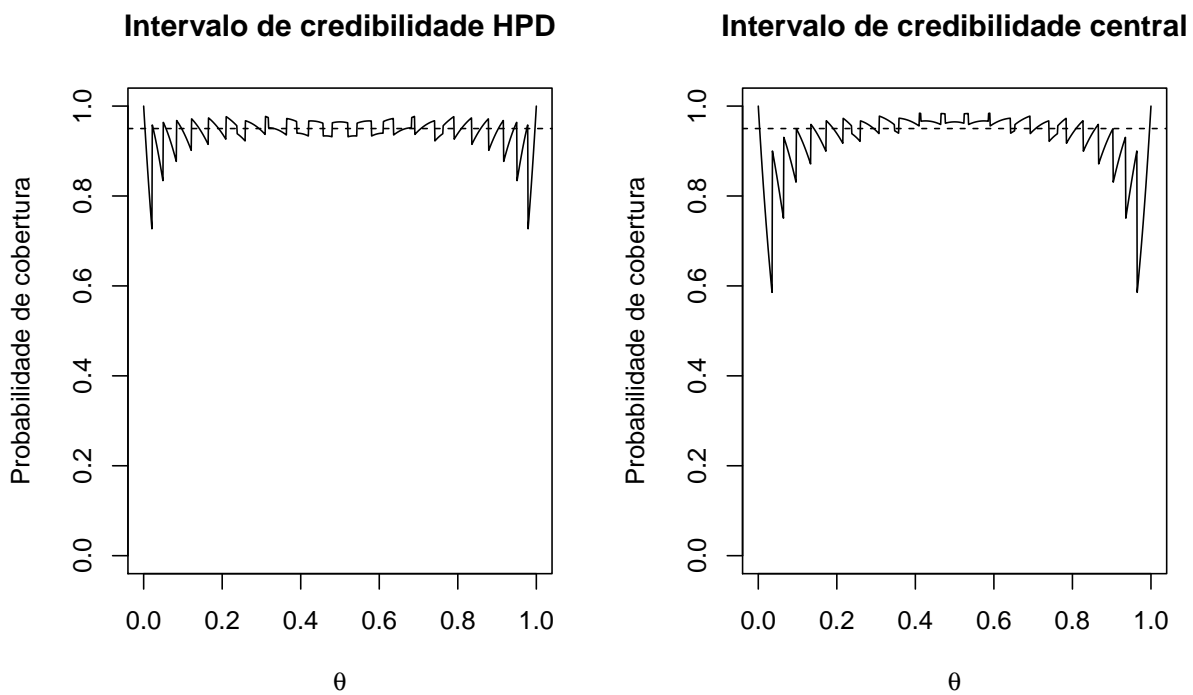
**Figura D.5:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 15$  para os intervalos de Wald e Clopper-Pearson.



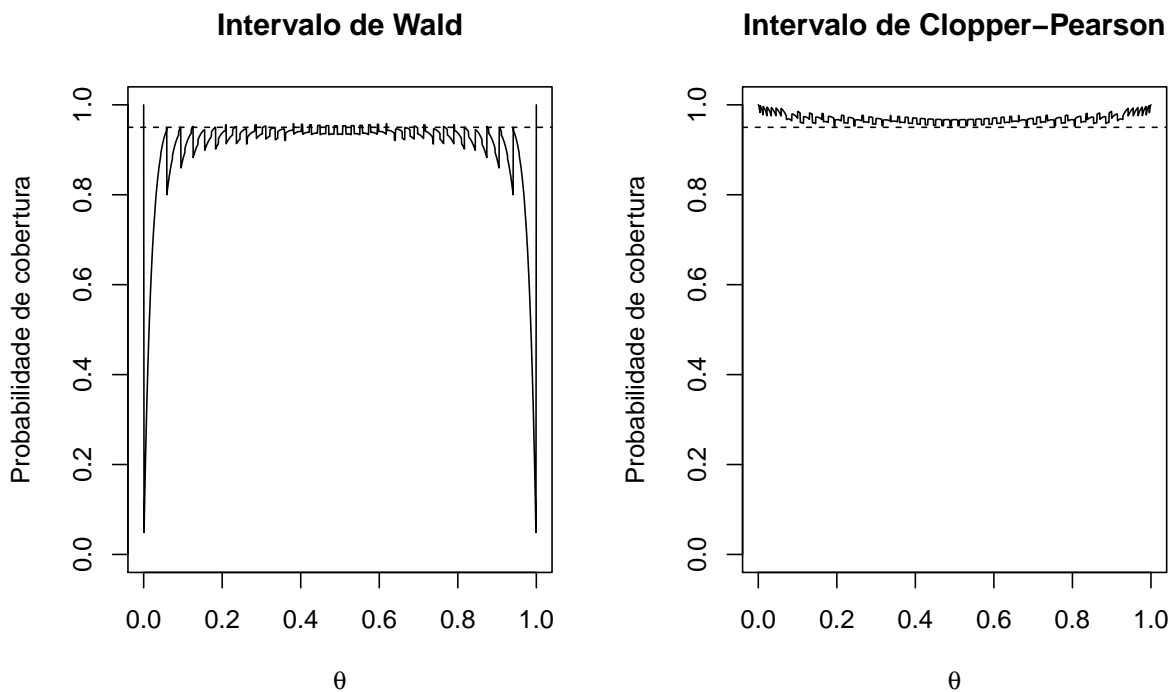
**Figura D.6:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 15$  para os intervalos de Wilson e Agresti-Coull.



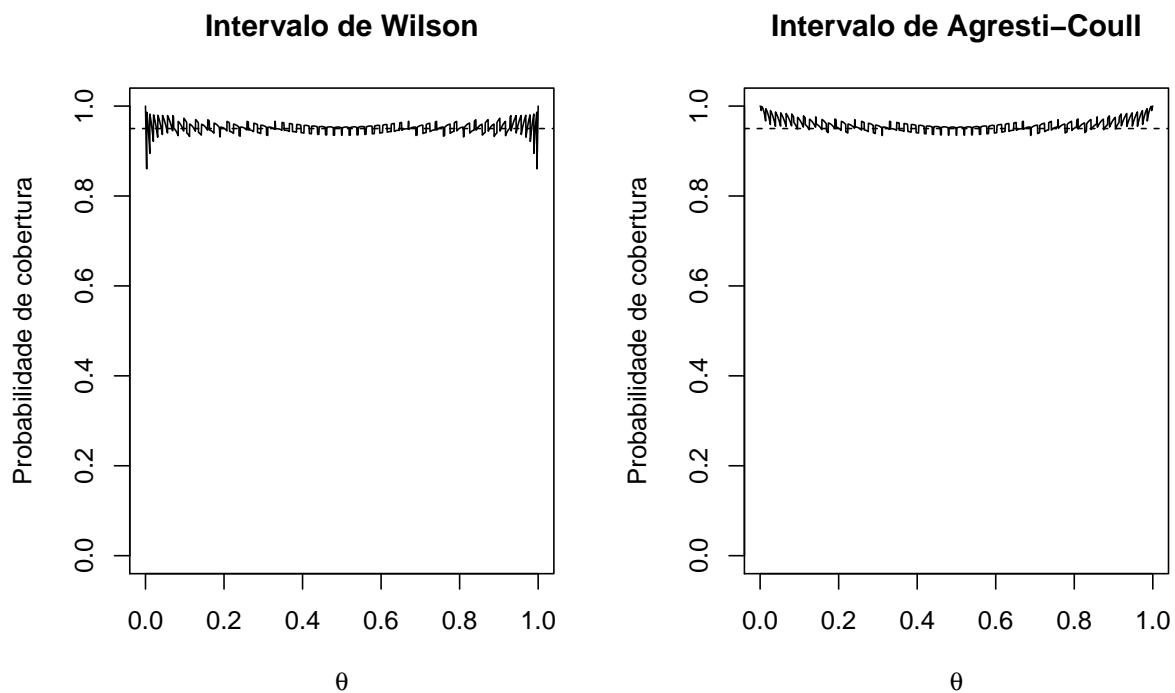
**Figura D.7:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 15$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(1/2, 1/2)$ .



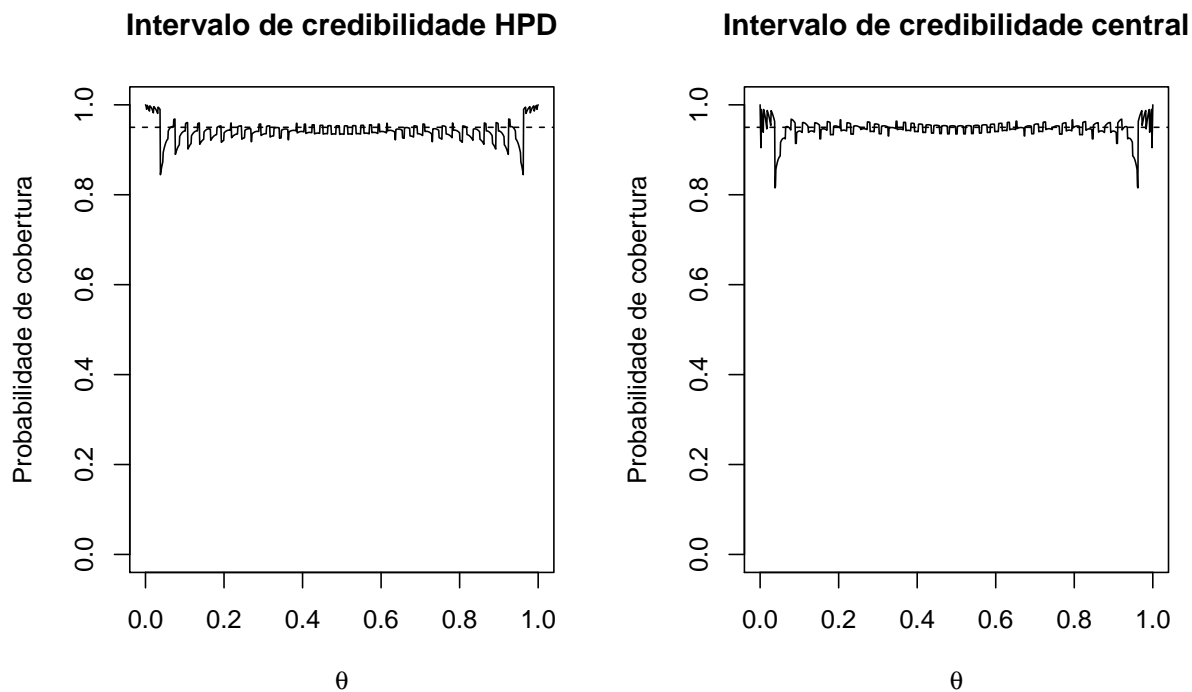
**Figura D.8:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 15$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(2,2)$ .



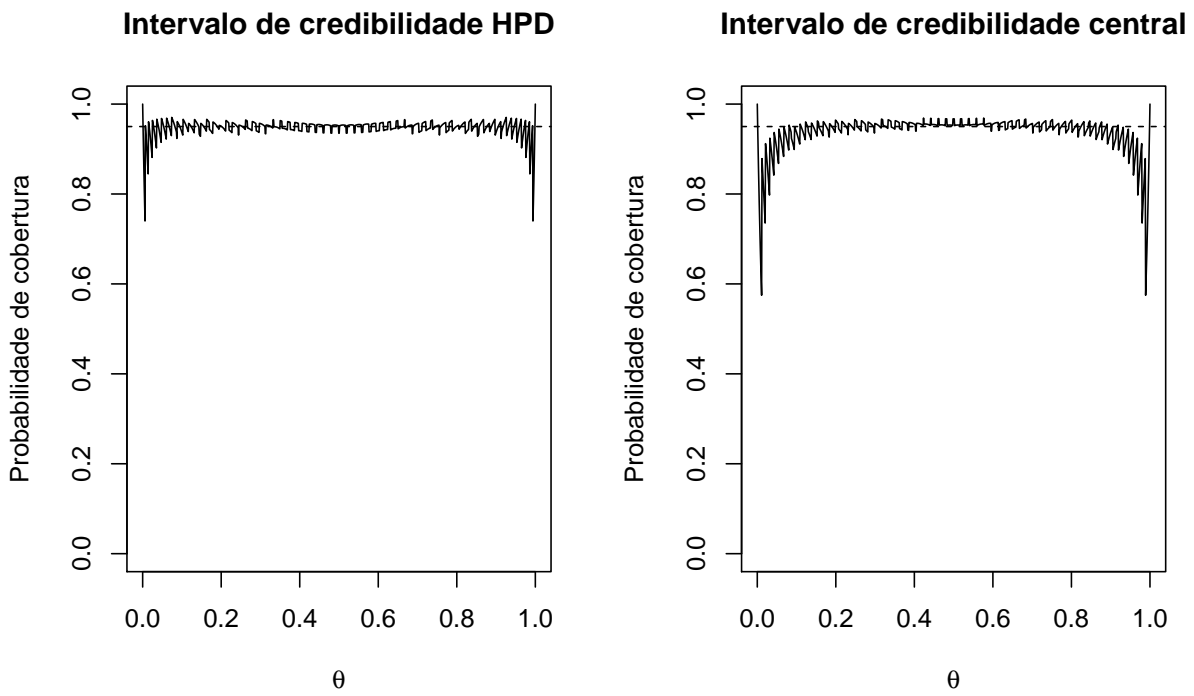
**Figura D.9:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 50$  para os intervalos de Wald e Clopper-Pearson.



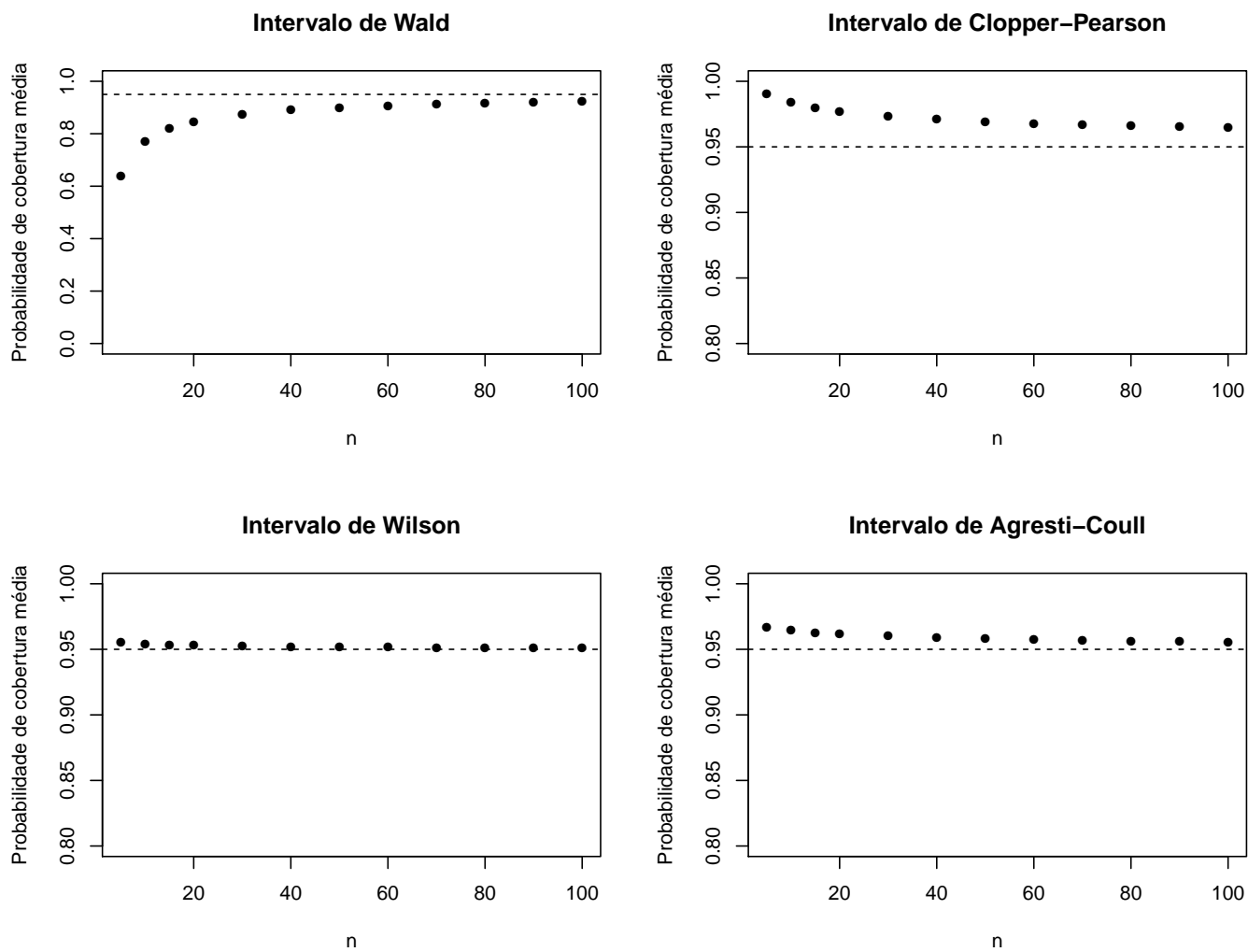
**Figura D.10:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 50$  para os intervalos de Wilson e Agresti-Coull.



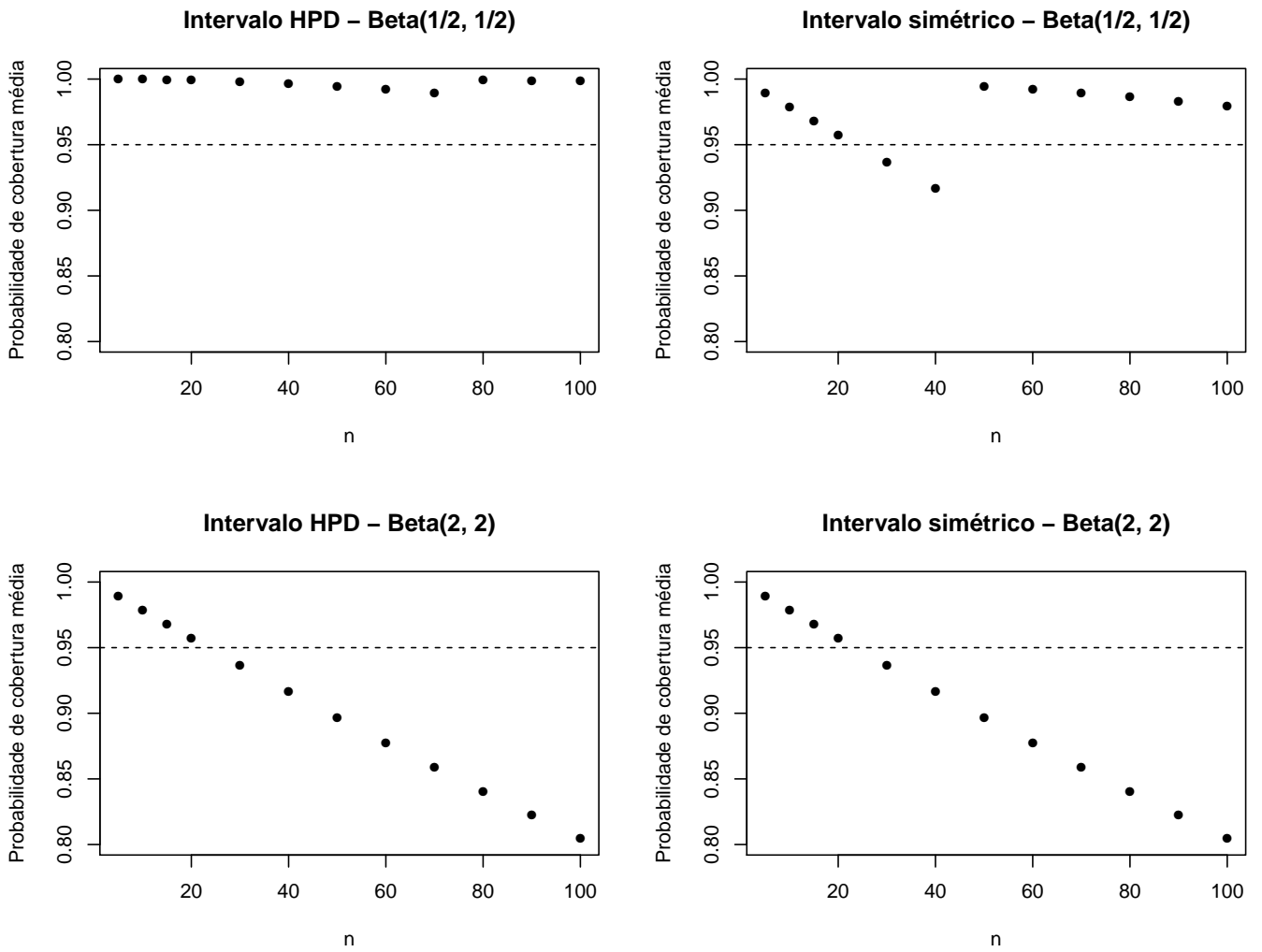
**Figura D.11:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 50$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(1/2, 1/2)$ .



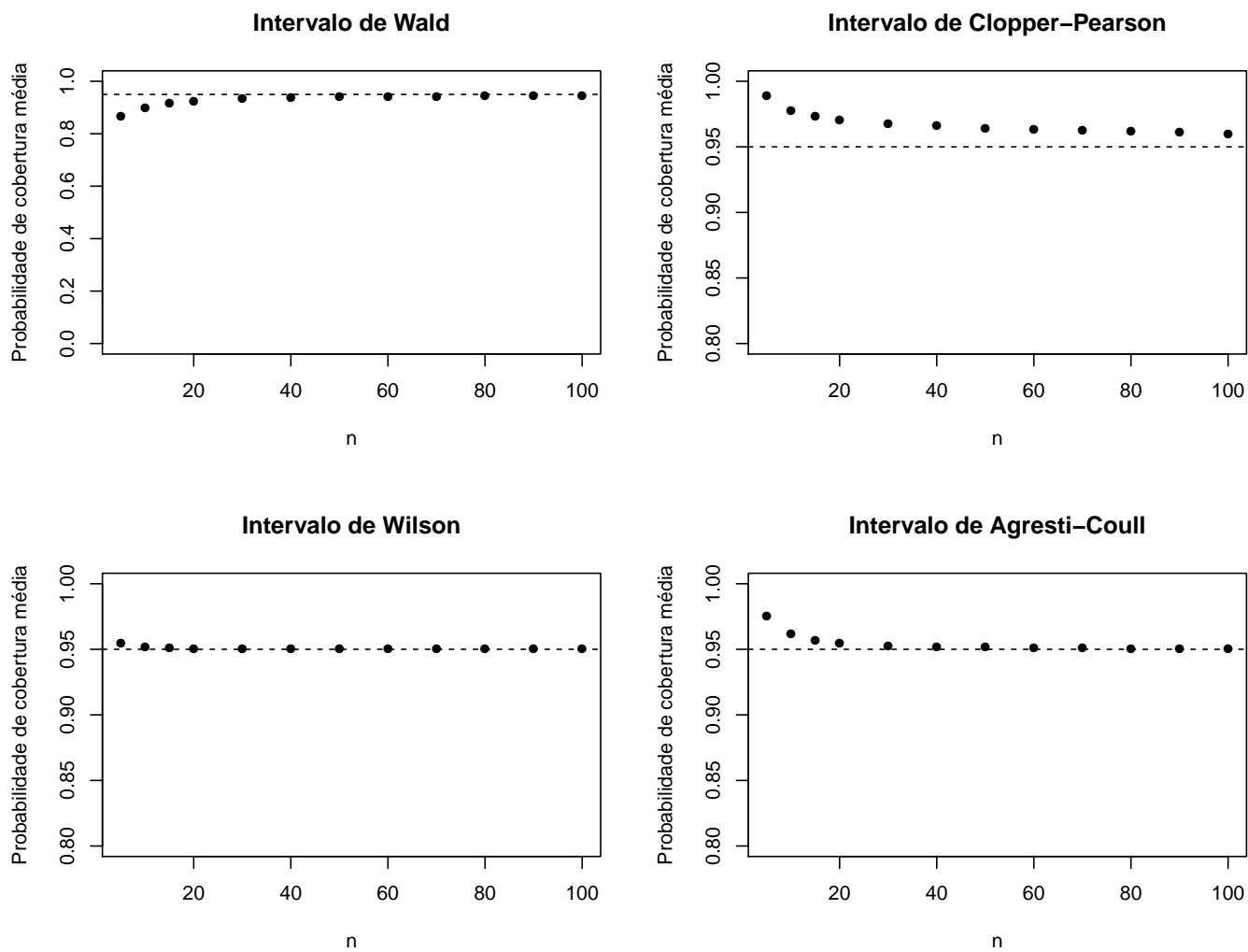
**Figura D.12:** Probabilidade de cobertura versus  $\theta$  para  $n = 50$  para os intervalos HPD e central com distribuição a priori  $Beta(2,2)$ .



**Figura D.13:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos clássicos com função peso  $Beta(1,1)$ .

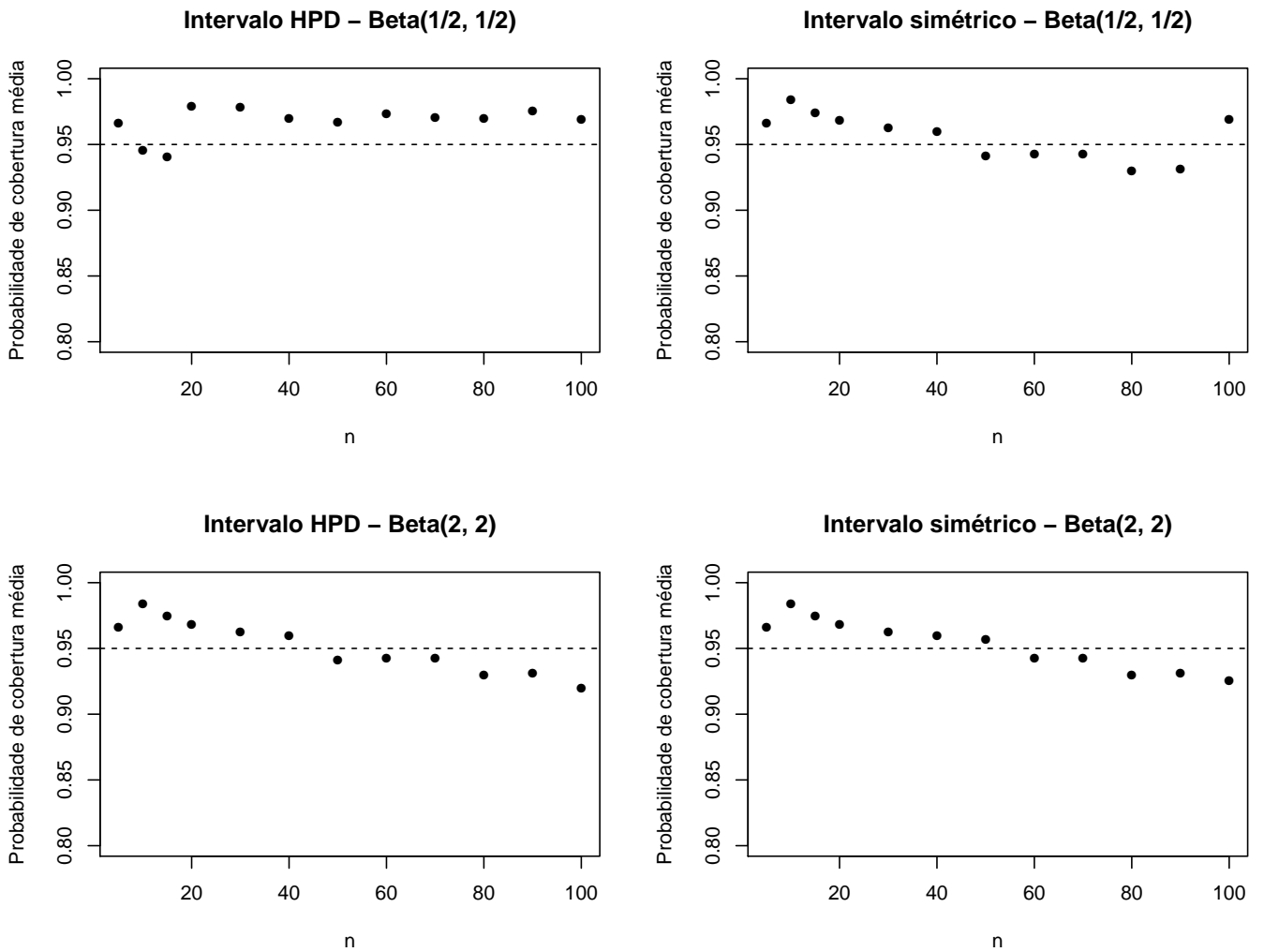


**Figura D.14:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos bayesianos com função peso  $Beta(1,1)$ .

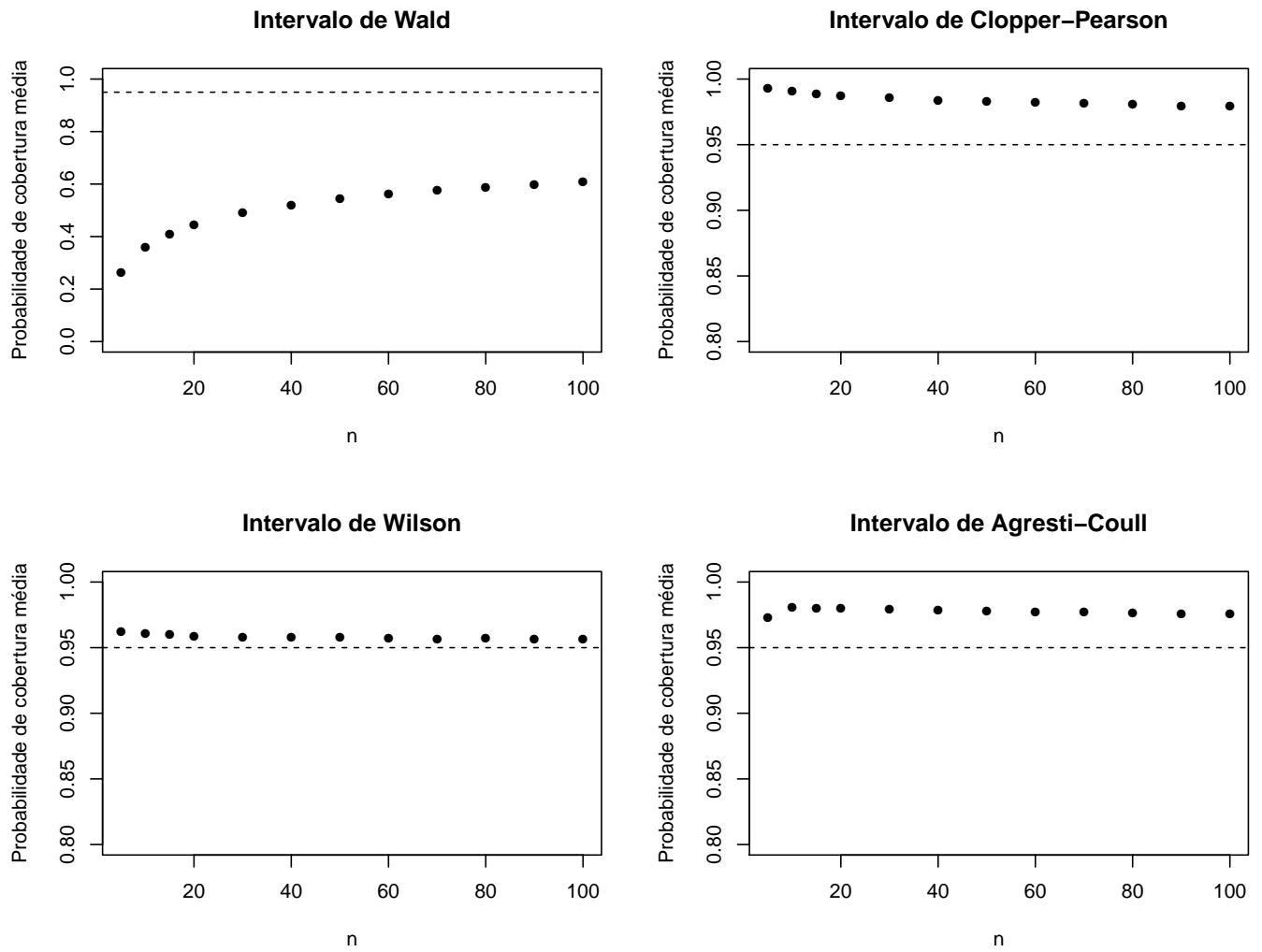


**Figura D.15:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos clássicos com função peso  $Beta(12,12)$ .

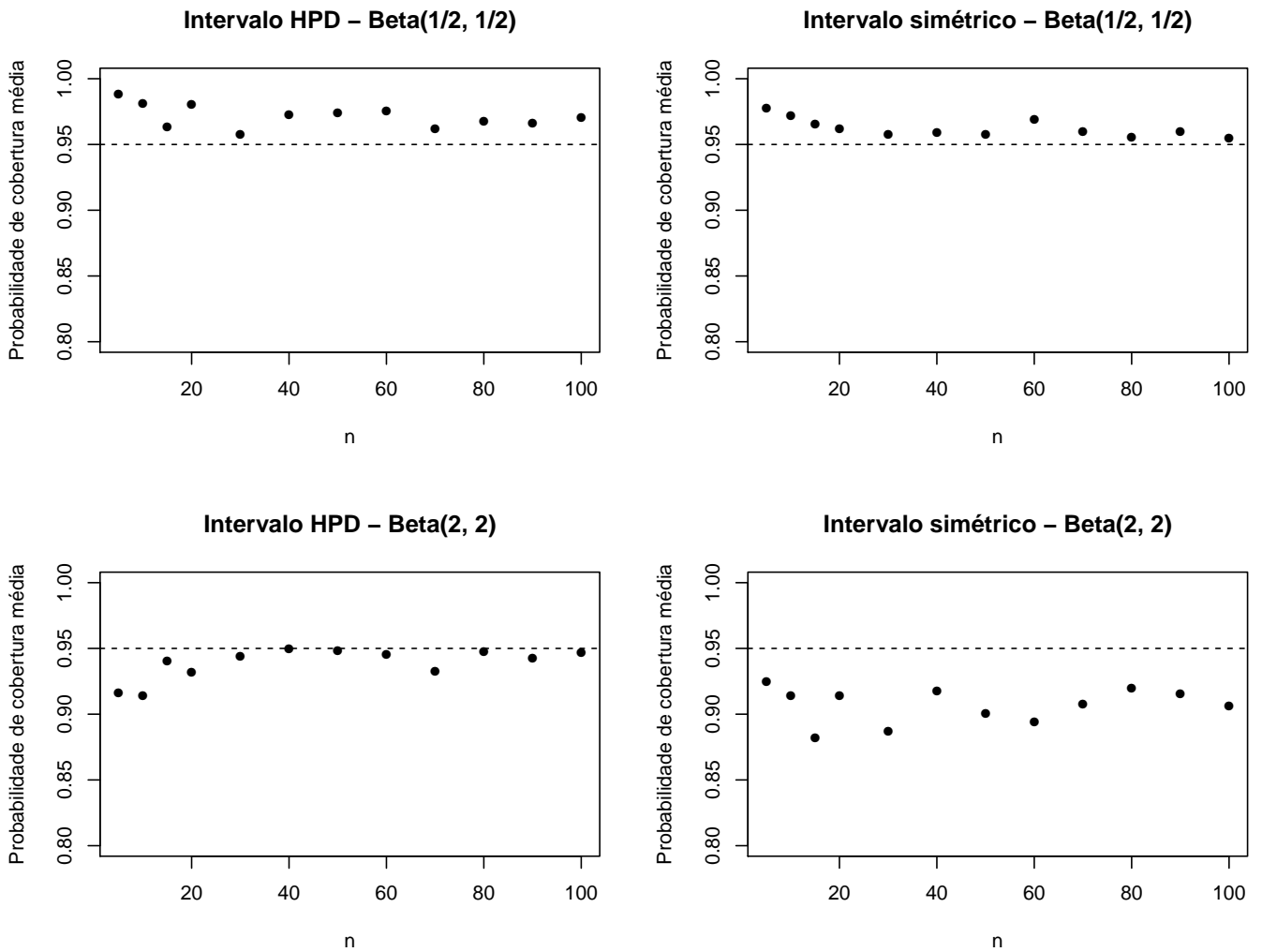




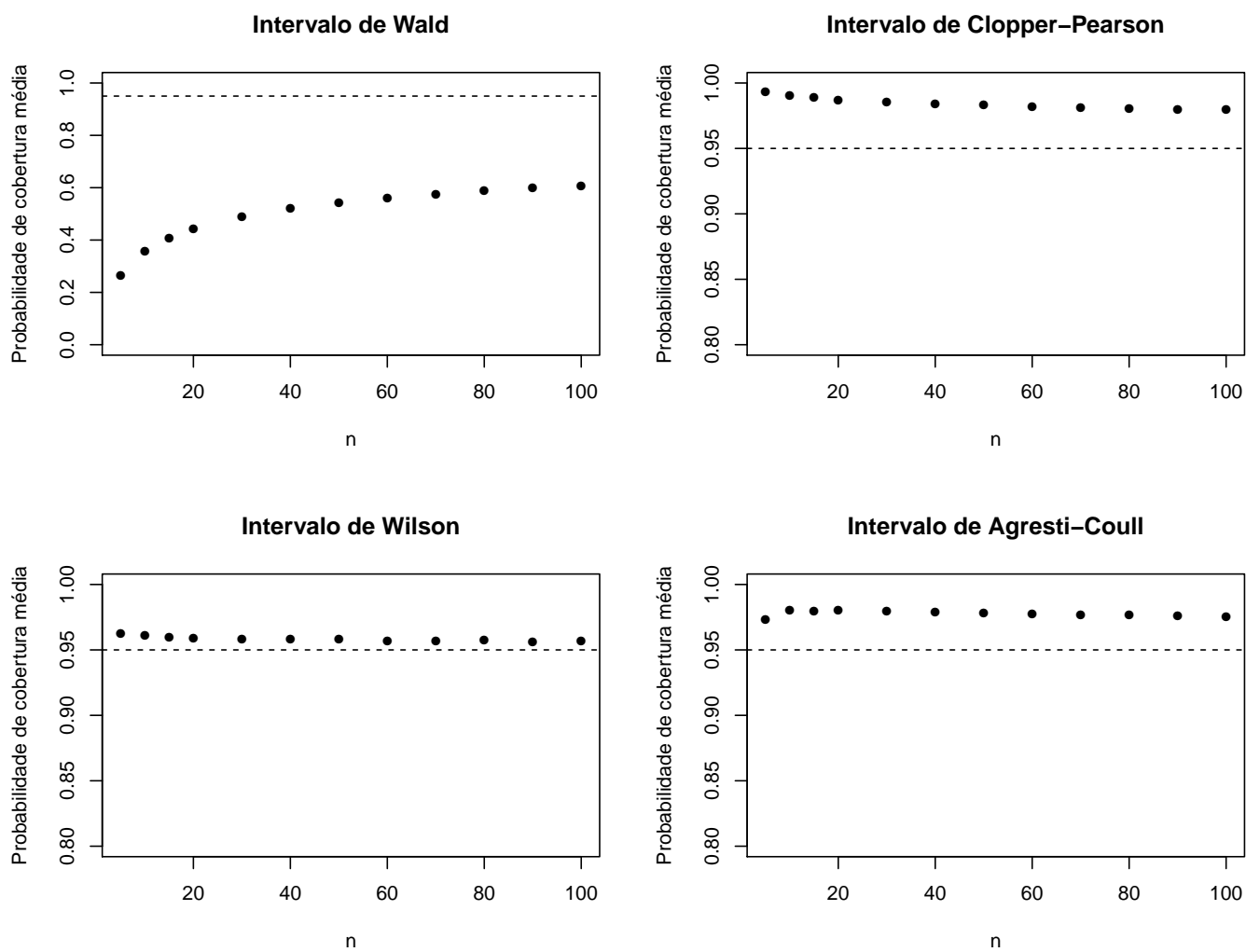
**Figura D.16:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos bayesianos com função peso  $Beta(12,12)$ .



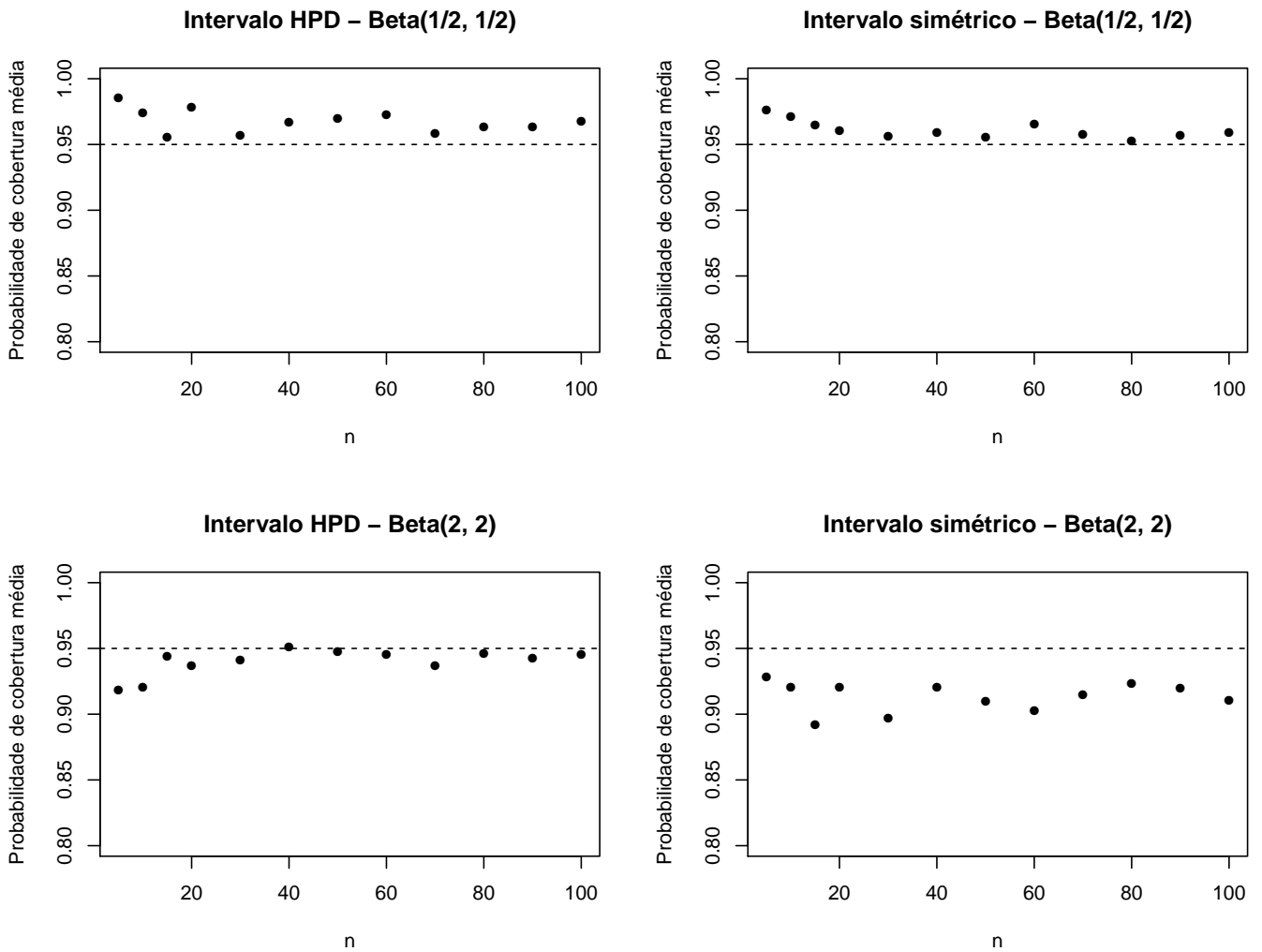
**Figura D.17:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos clássicos com função peso  $Beta(0.26, 2.34)$ .



**Figura D.18:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos bayesianos com função peso Beta(0.26,2.34).



**Figura D.19:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos clássicos com função peso  $Beta(2.34, 0.26)$ .



**Figura D.20:** Probabilidade de cobertura média versus  $n$  para os intervalos bayesianos com função peso Beta(2.34, 0.26).

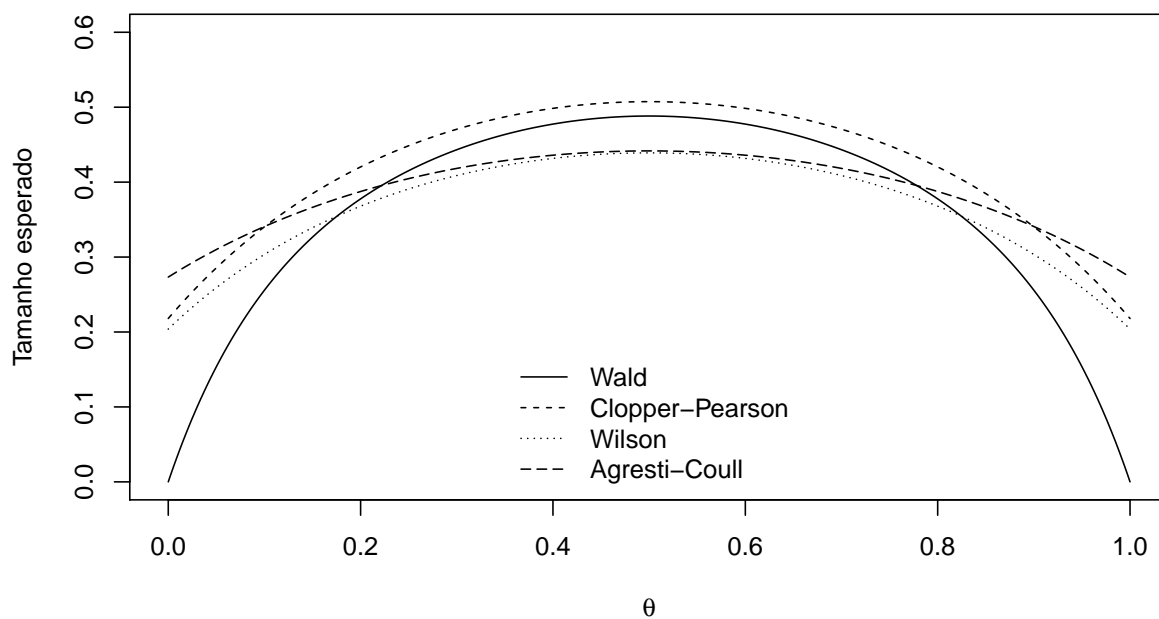


Figura D.21: Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos clássicos para  $n = 15$ .

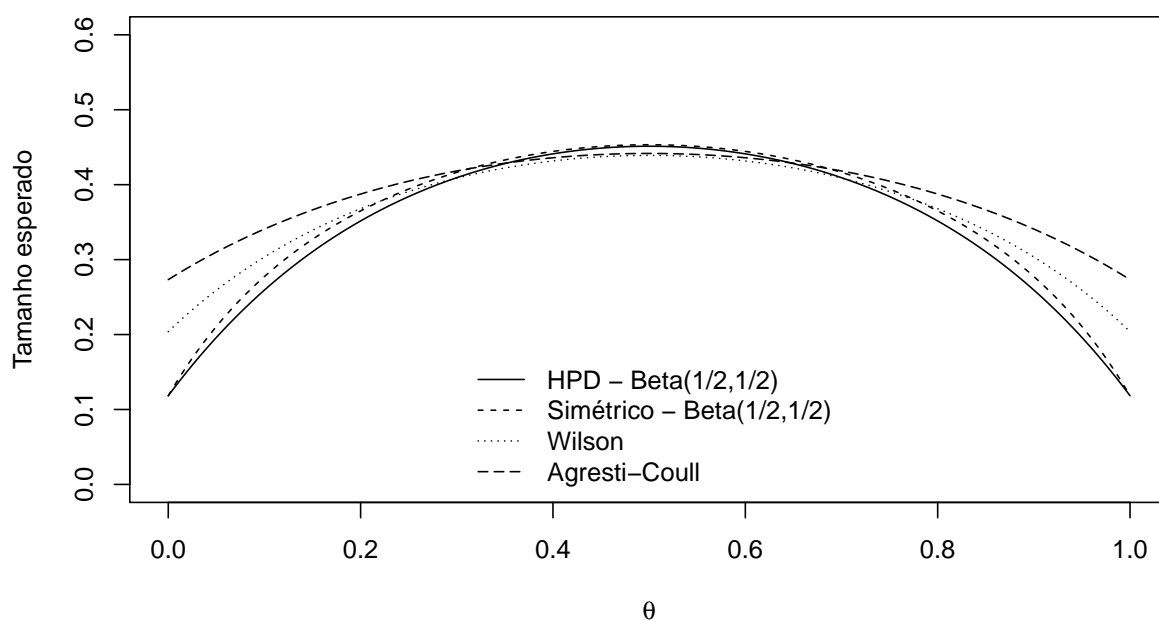
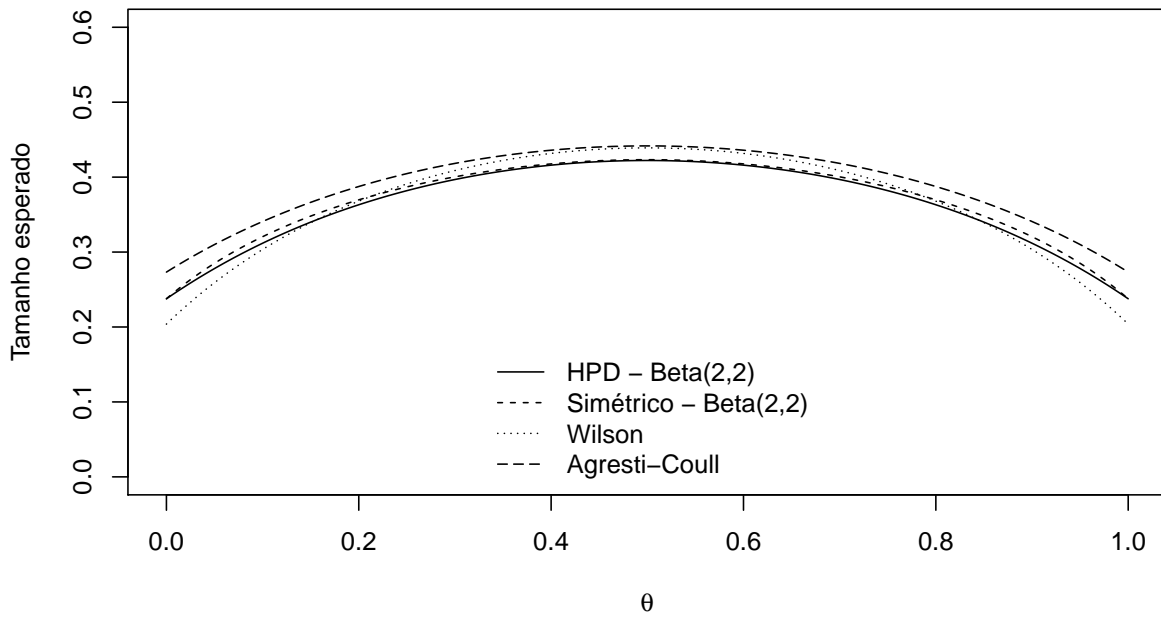
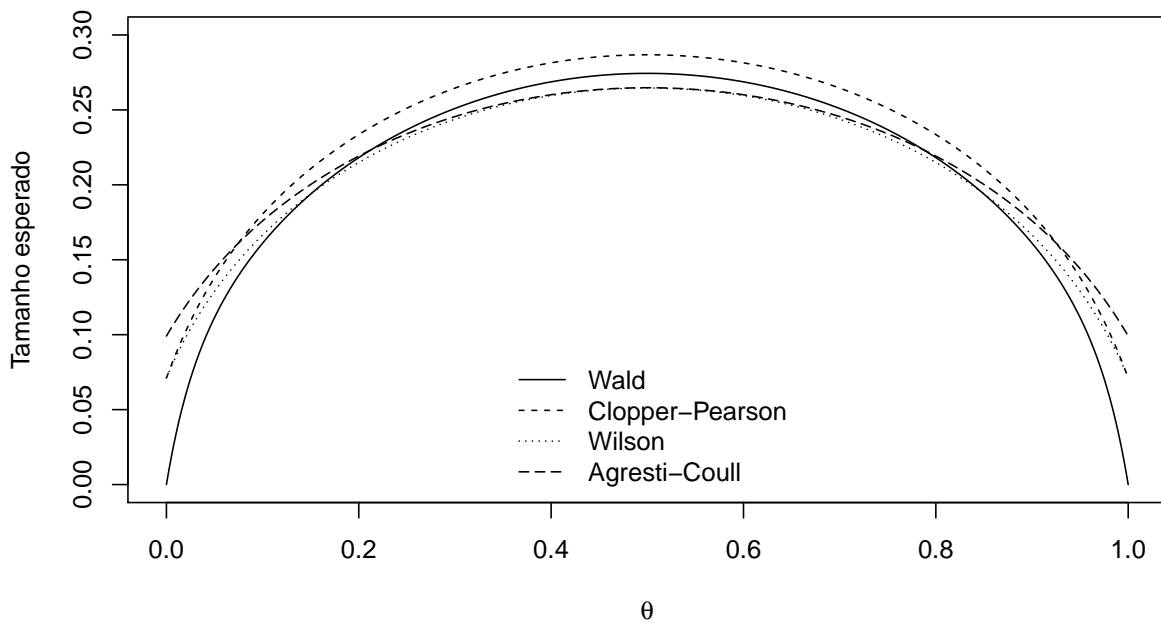


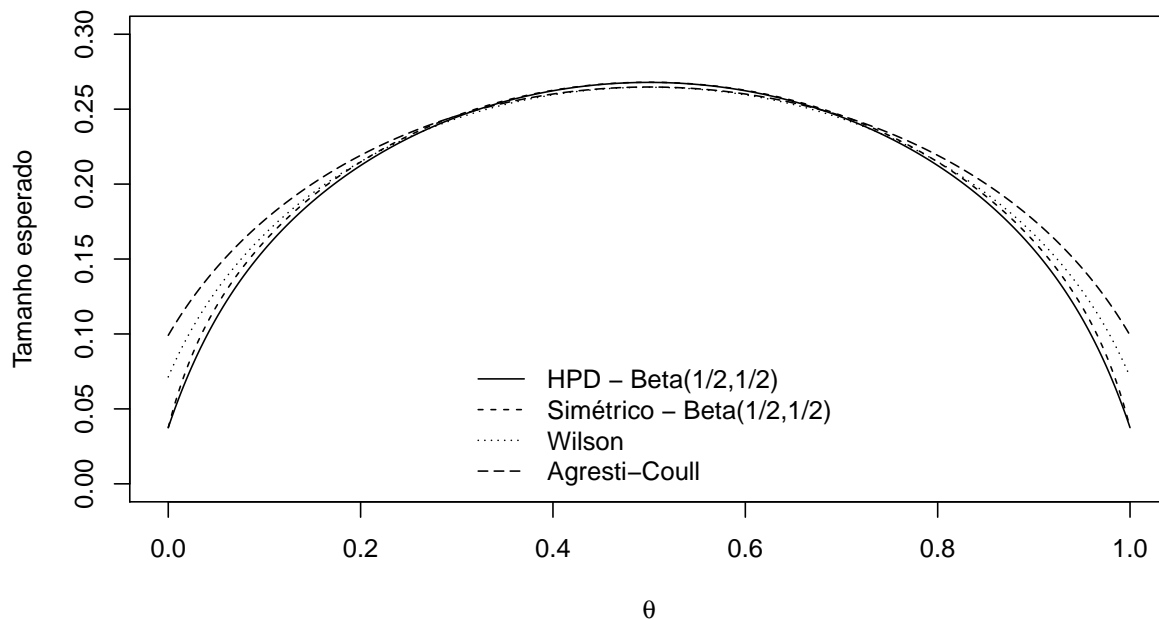
Figura D.22: Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos de Wilson, Agresti-Coull e HPD e central com distribuição a priori  $Beta(1/2, 1/2)$  para  $n = 15$ .



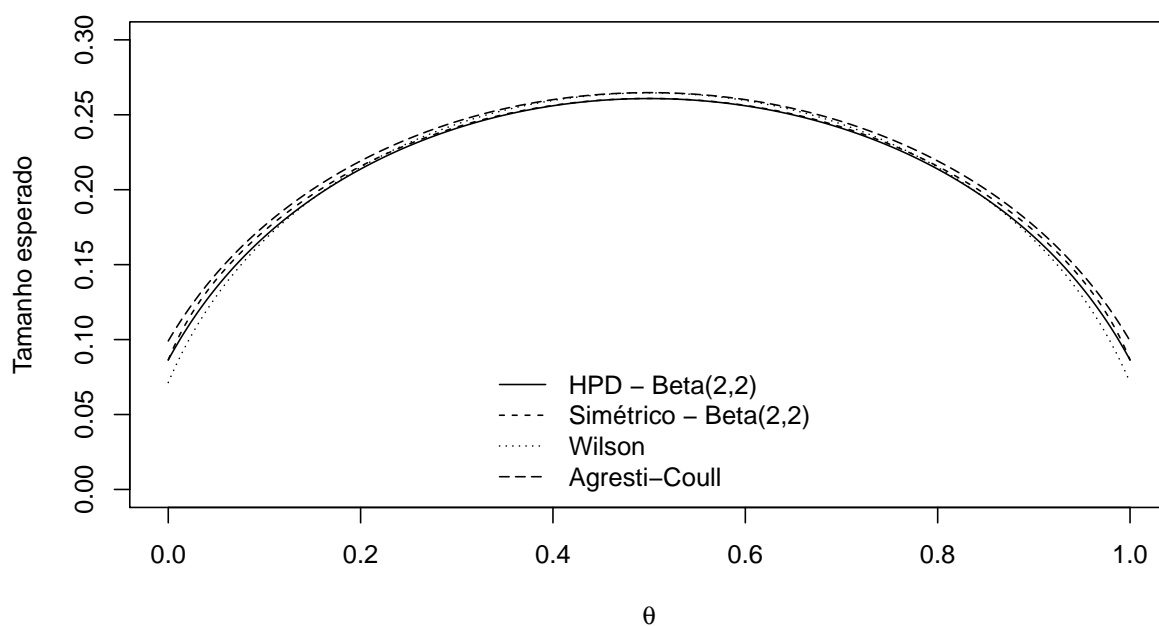
**Figura D.23:** Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos de Wilson, Agresti-Coull e HPD e central com distribuição a priori  $Beta(2,2)$  para  $n = 15$ .



**Figura D.24:** Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos clássicos para  $n = 50$ .



**Figura D.25:** Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos de Wilson, Agresti-Coull e HPD e central com distribuição a priori  $Beta(1/2, 1/2)$  para  $n = 50$ .



**Figura D.26:** Tamanho esperado versus  $\theta$  para os intervalos de Wilson, Agresti-Coull e HPD e central com distribuição a priori  $Beta(2, 2)$  para  $n = 50$ .



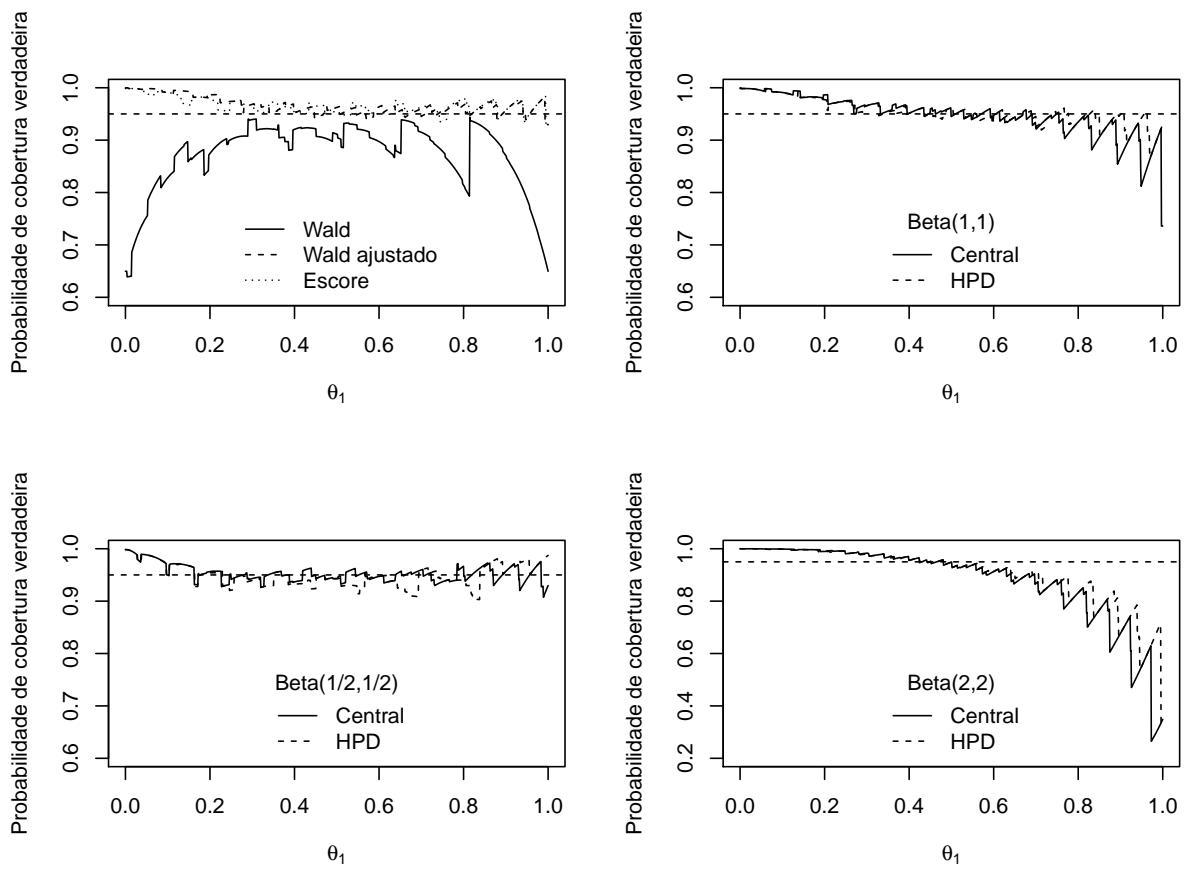


Figura D.27: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

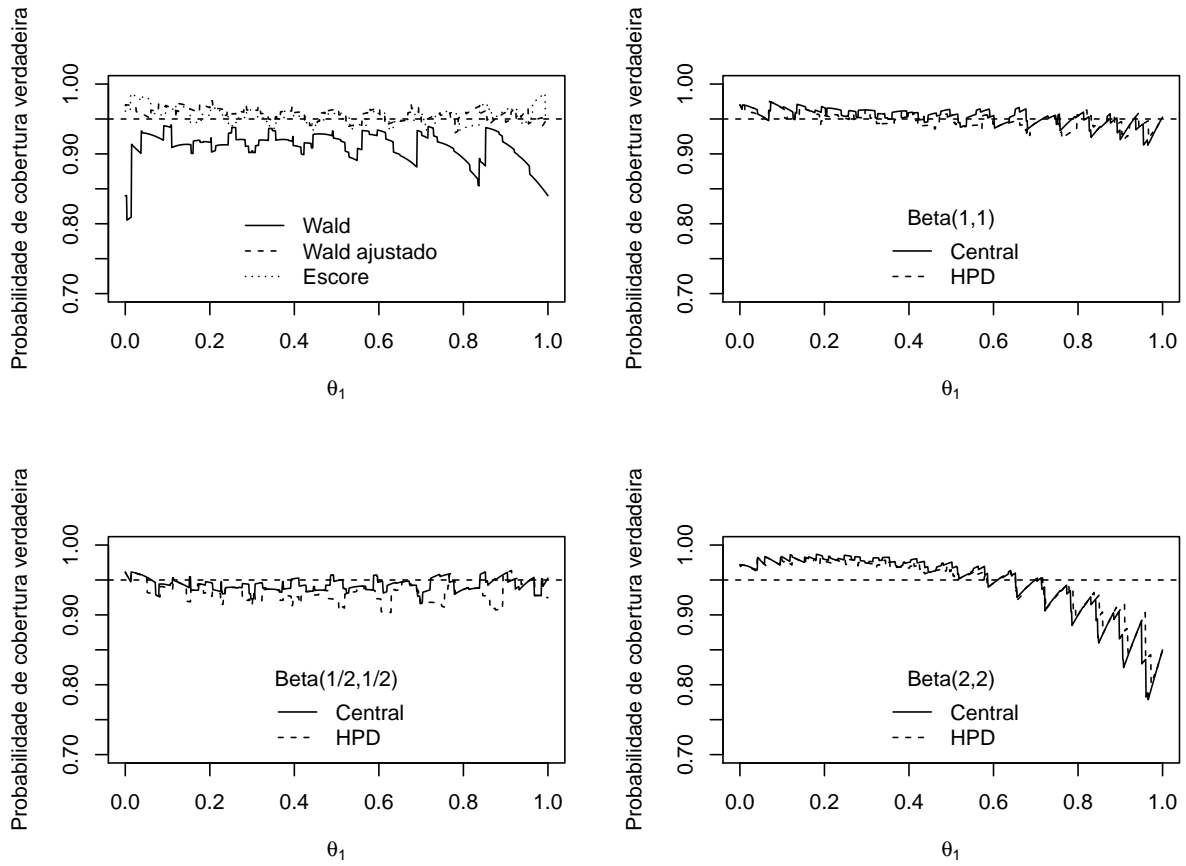


Figura D.28: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .

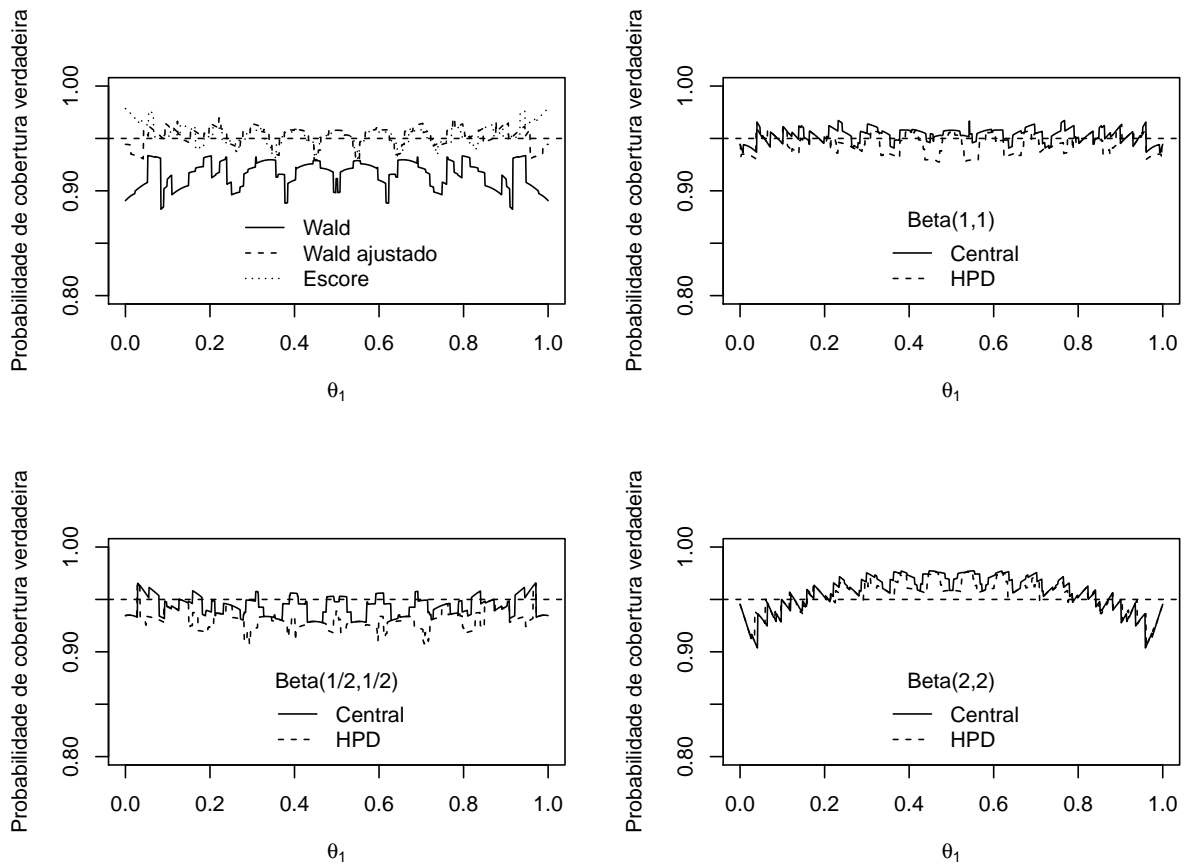


Figura D.29: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .

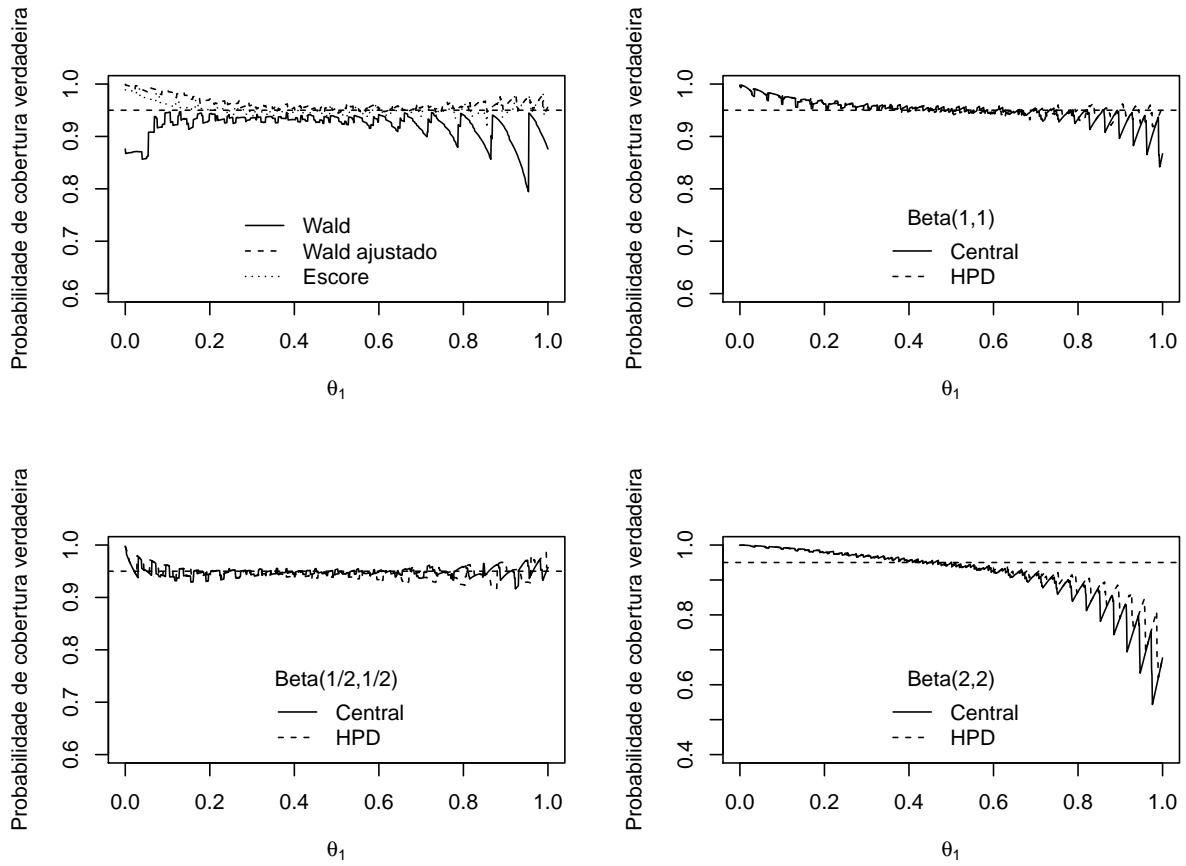


Figura D.30: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

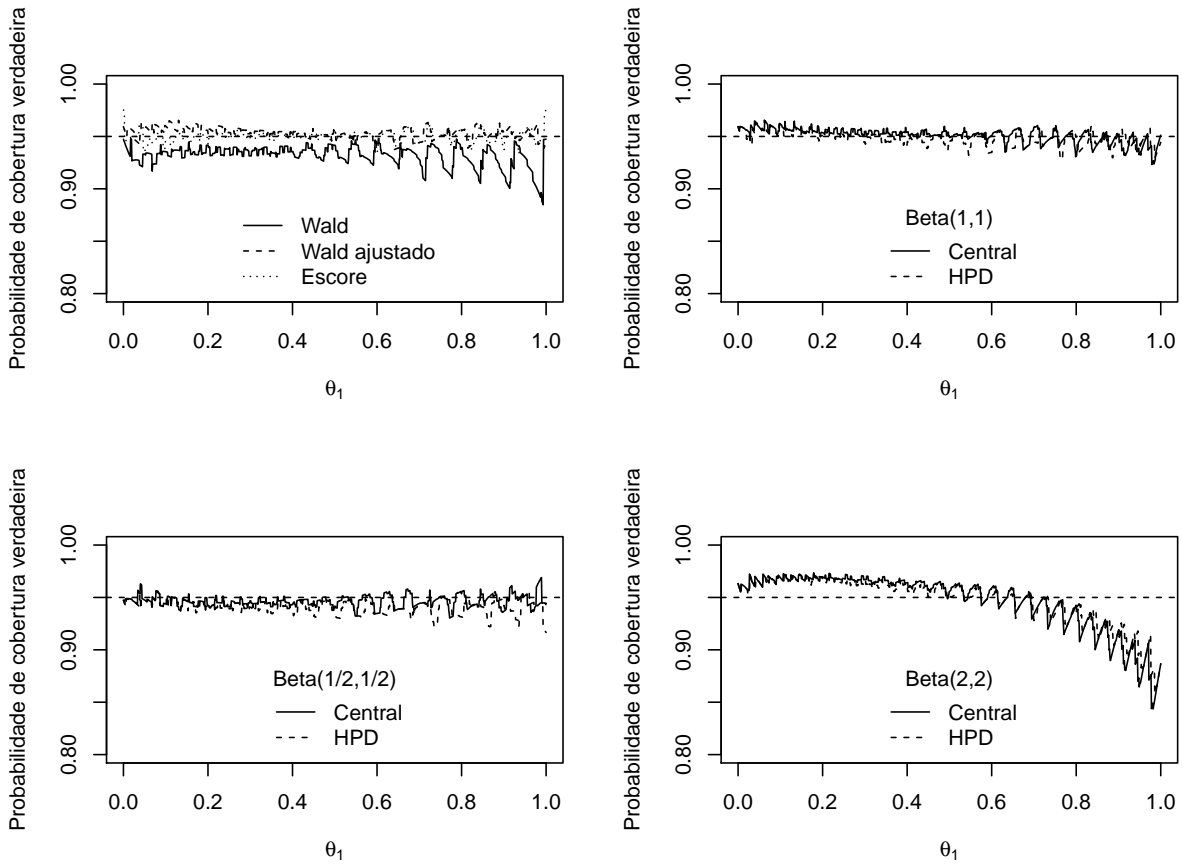
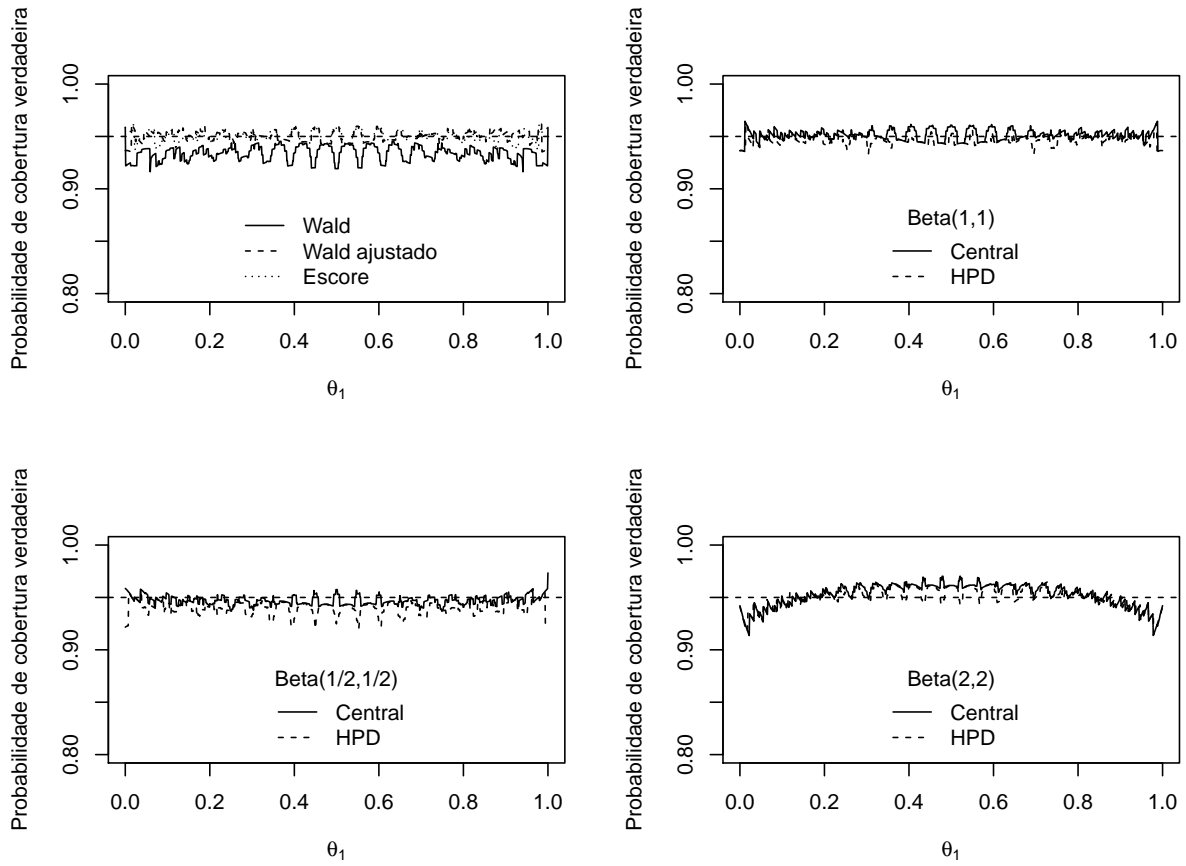
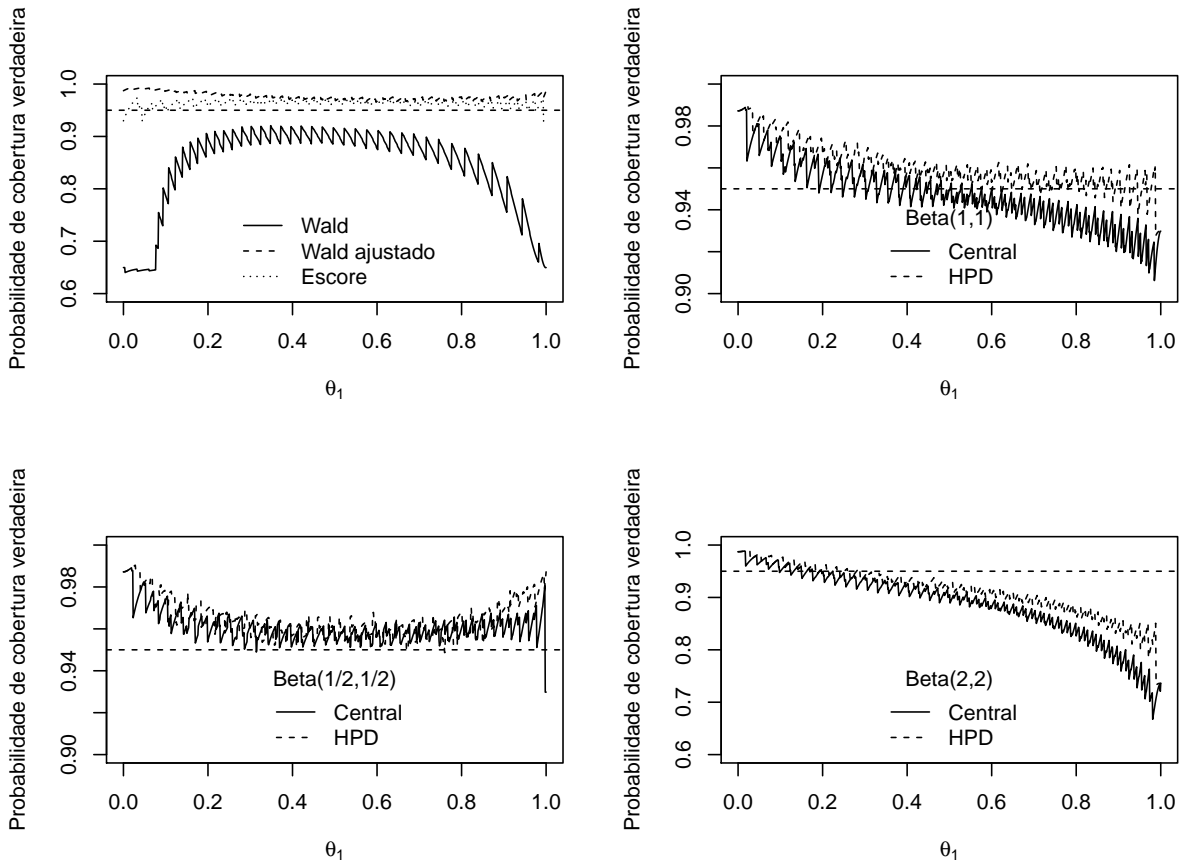


Figura D.31: Probabilidade de cobertura  $C_{\Delta}$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



**Figura D.32:** Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.5$ .



**Figura D.33:** Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

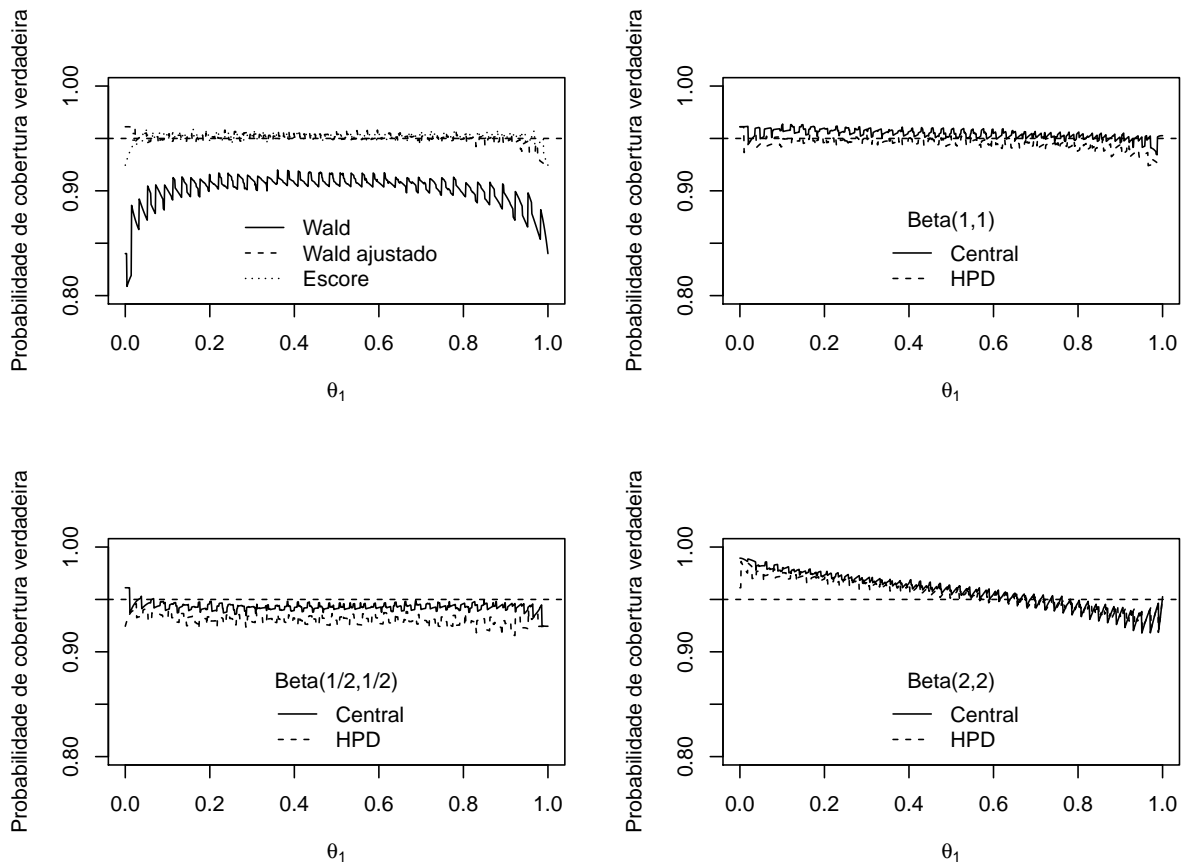


Figura D.34: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



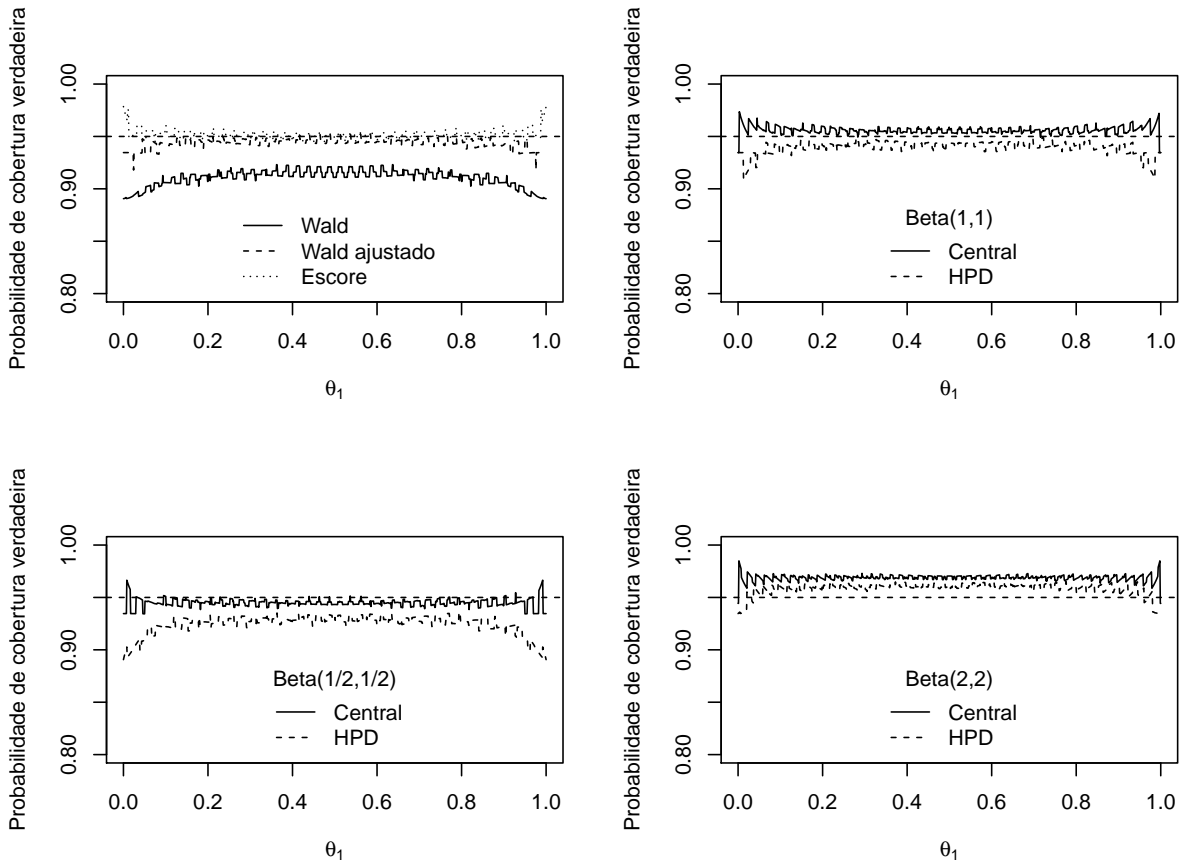


Figura D.35: Probabilidade de cobertura  $C_\Delta$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$ ,  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .

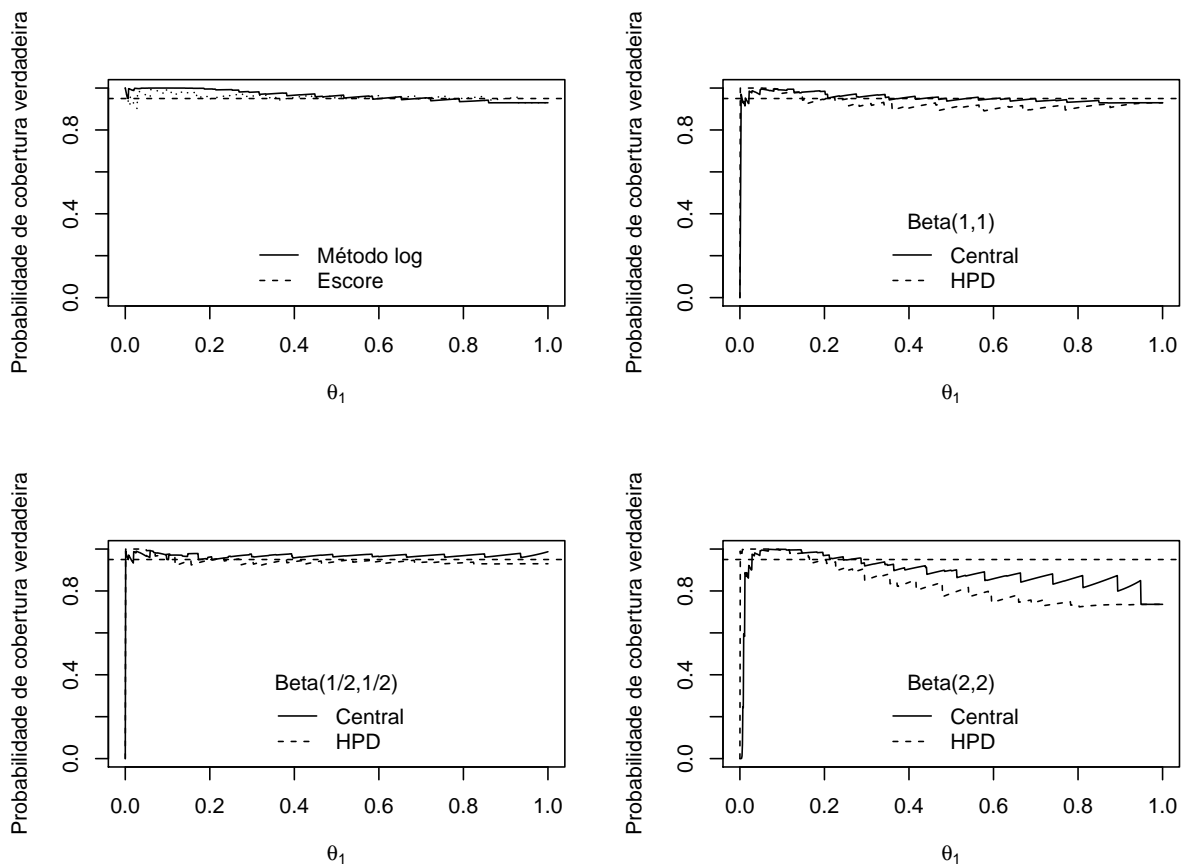


Figura D.36: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

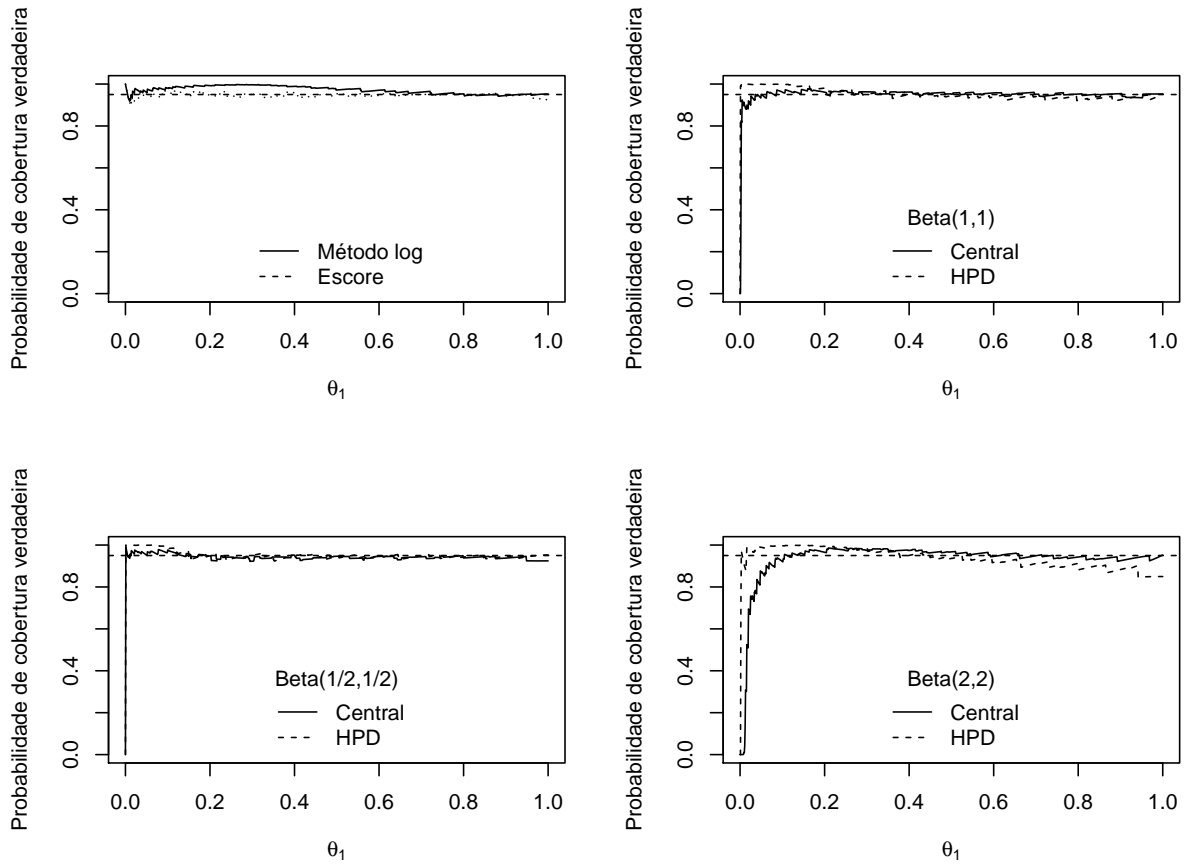


Figura D.37: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .

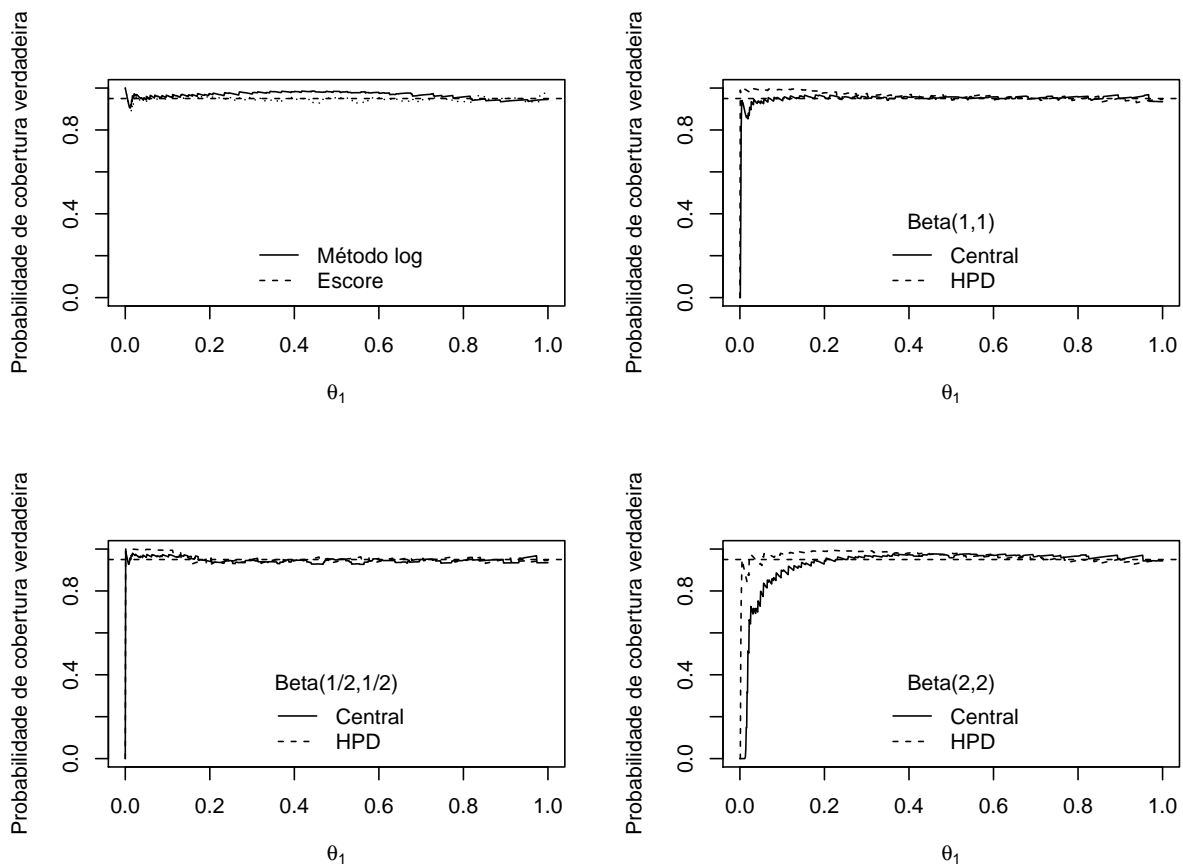
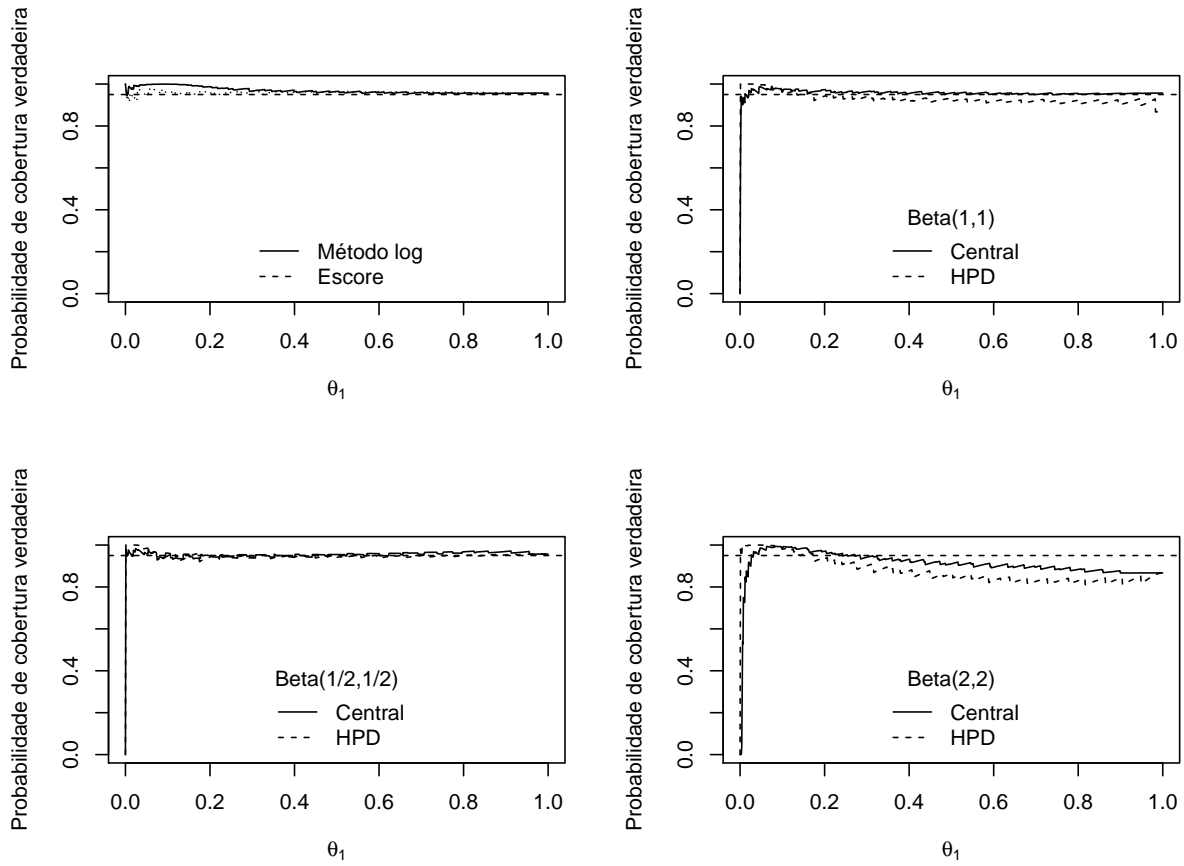


Figura D.38: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .



**Figura D.39:** Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

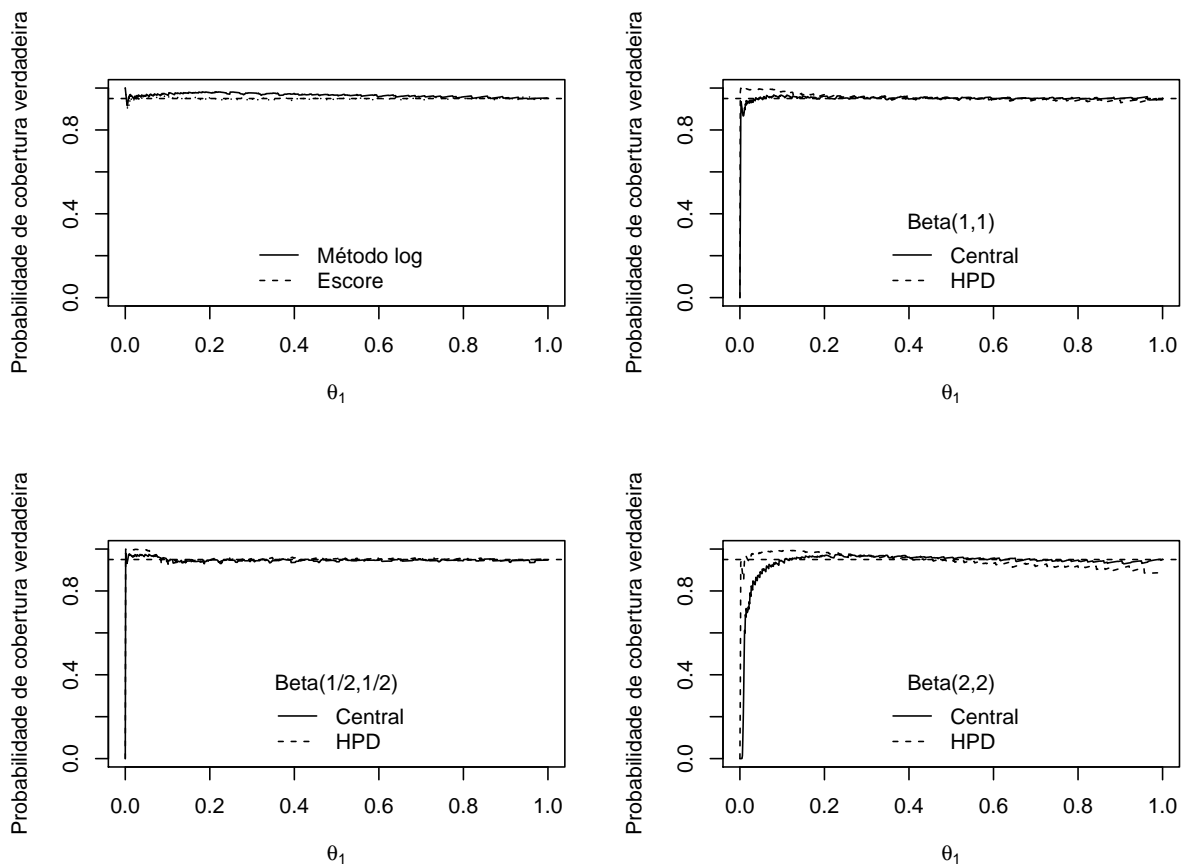
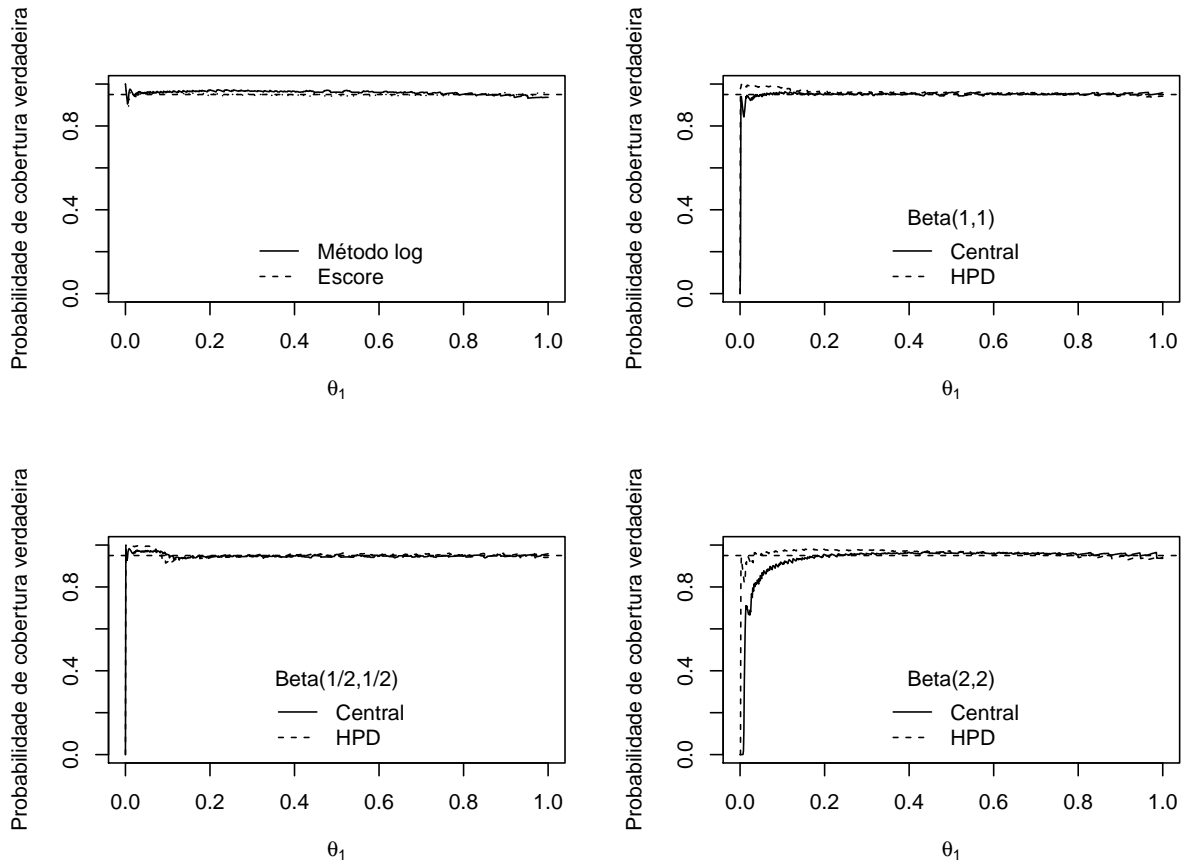


Figura D.40: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



**Figura D.41:** Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.5$ .

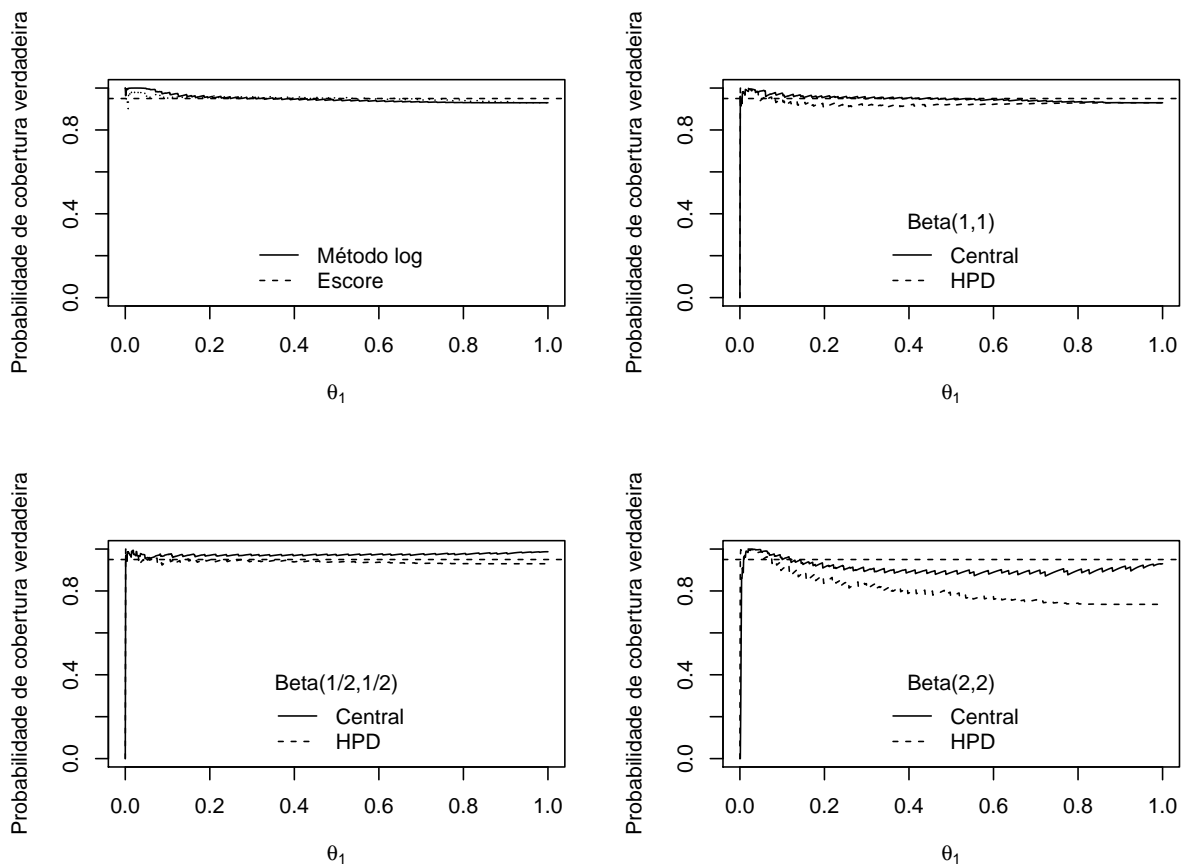


Figura D.42: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .



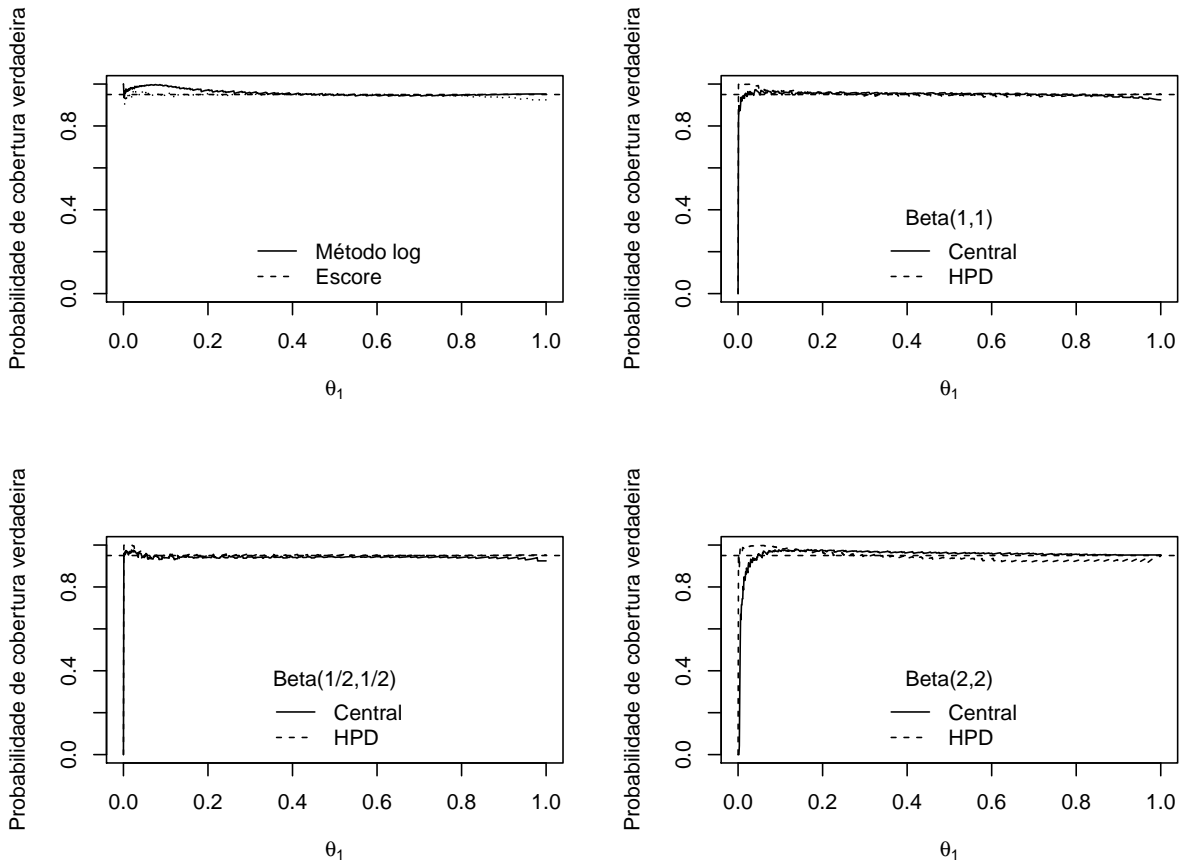


Figura D.43: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .

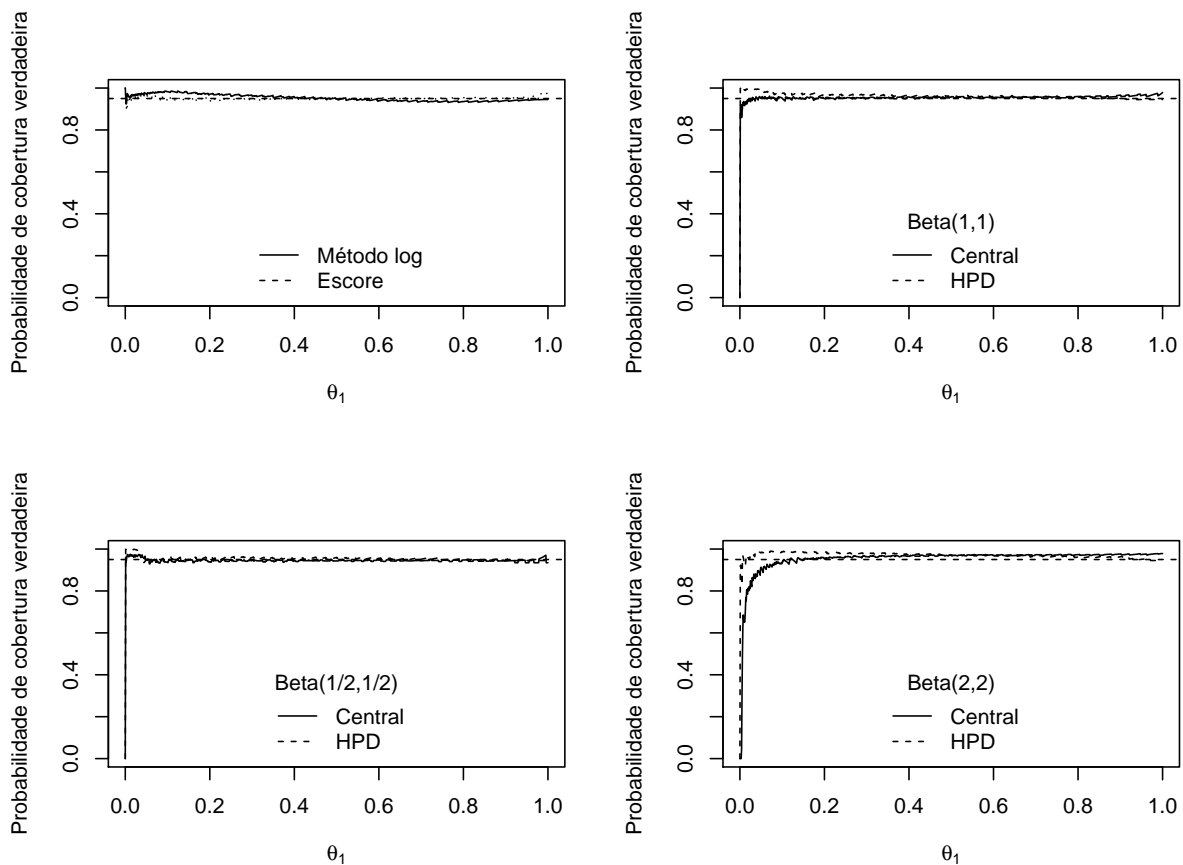
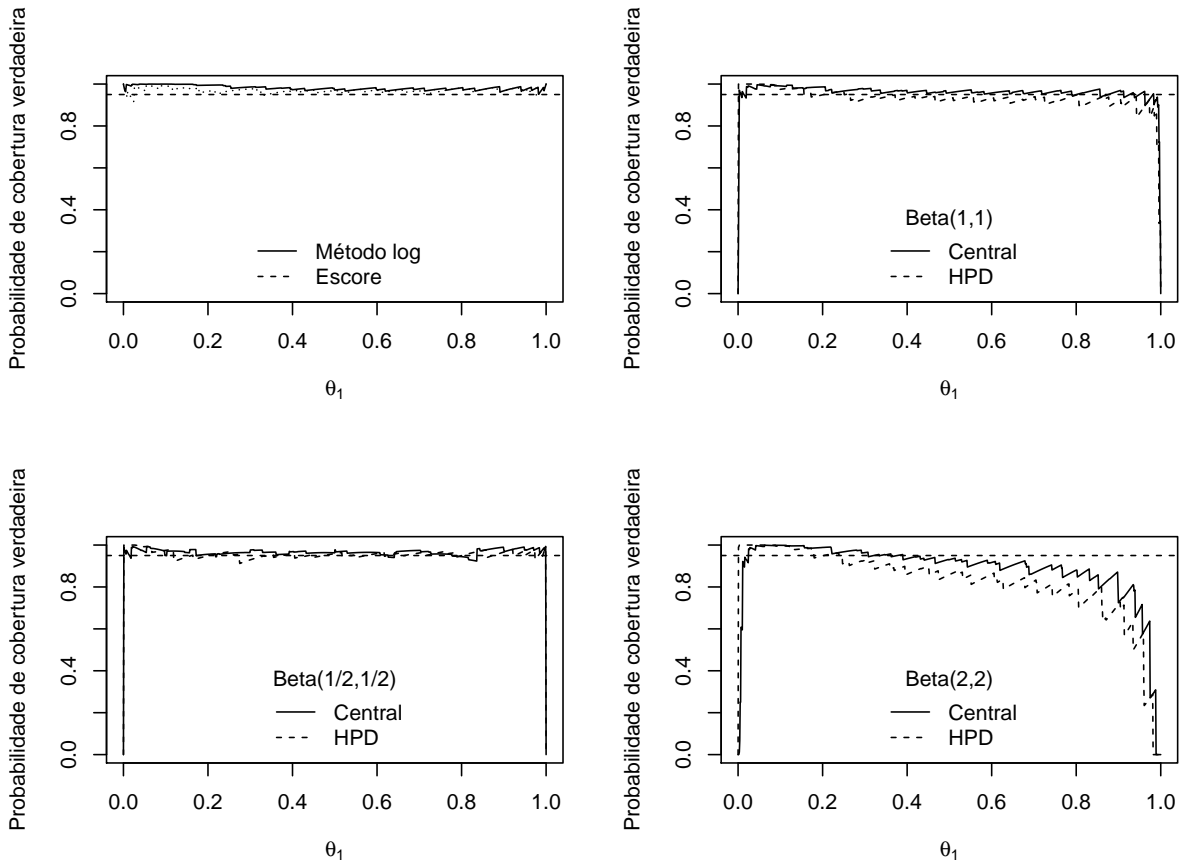
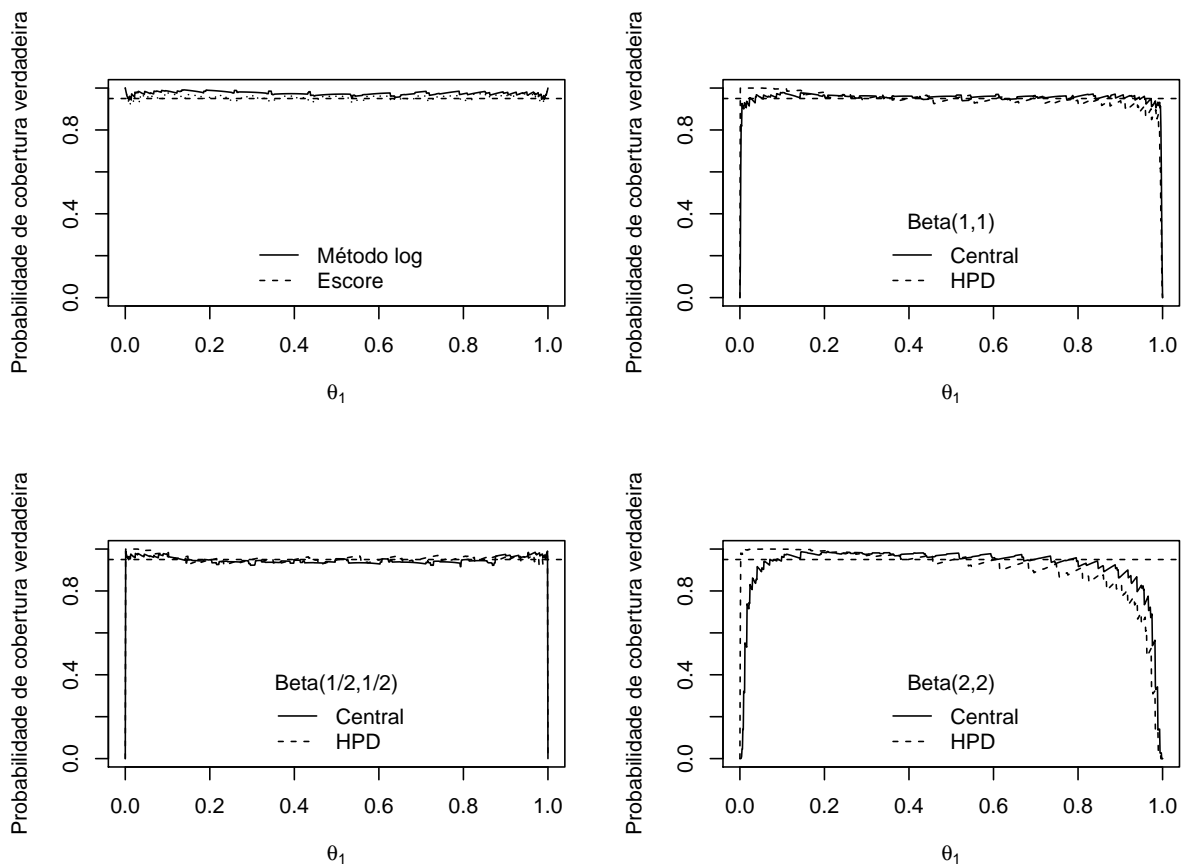


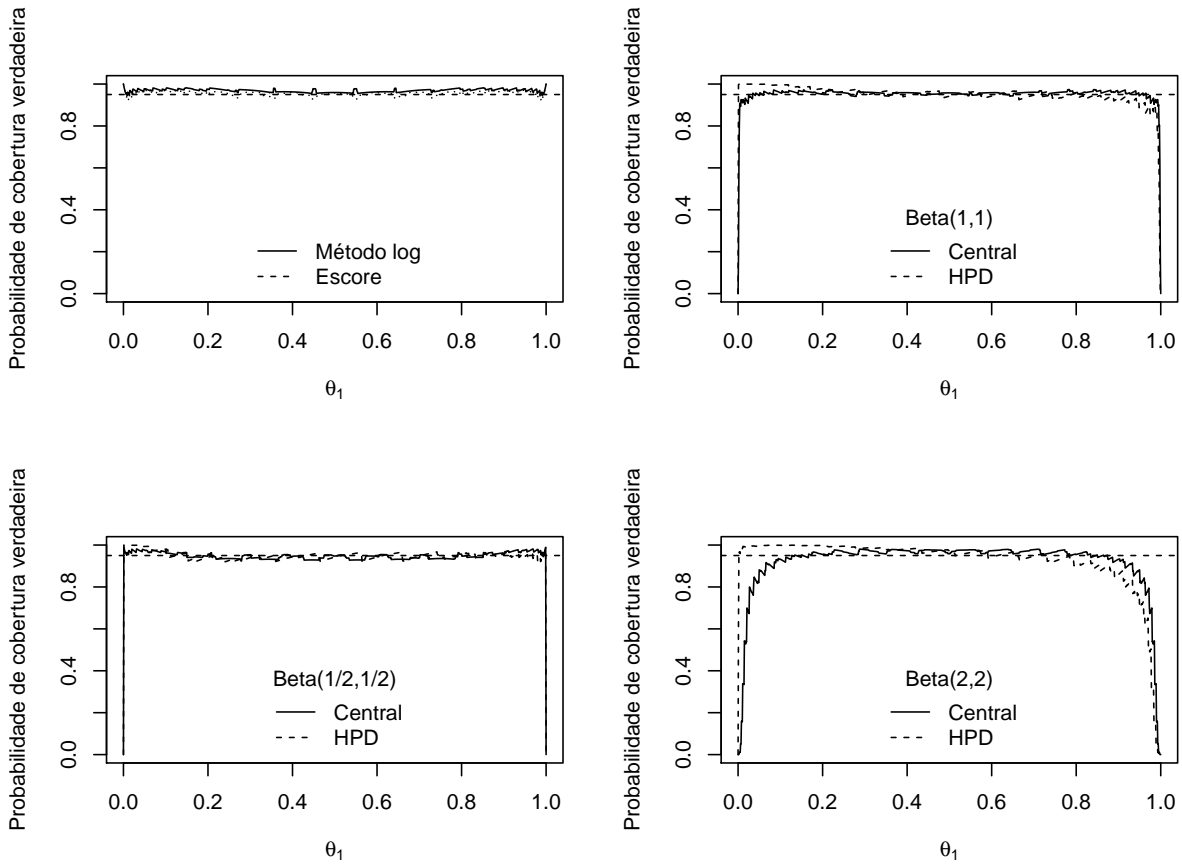
Figura D.44: Probabilidade de cobertura  $C_\rho$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .



**Figura D.45:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .



**Figura D.46:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



**Figura D.47:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .

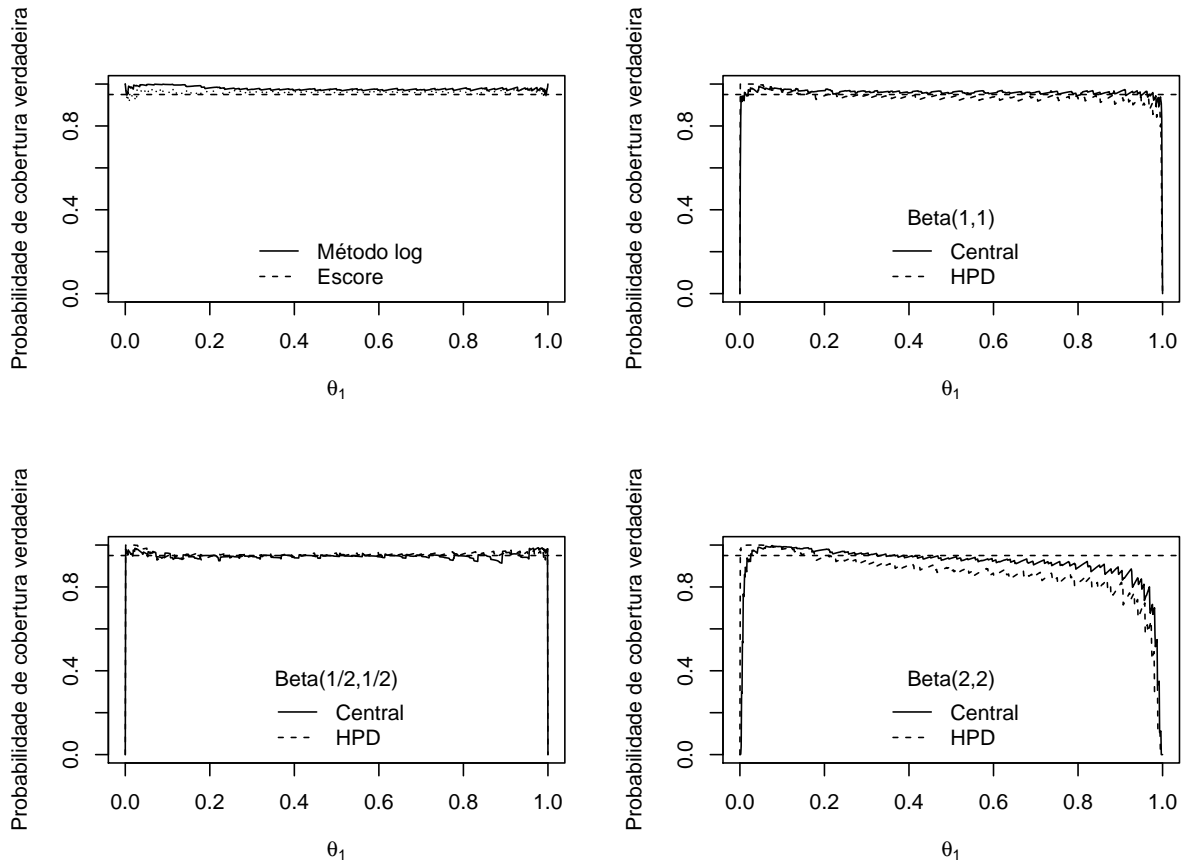
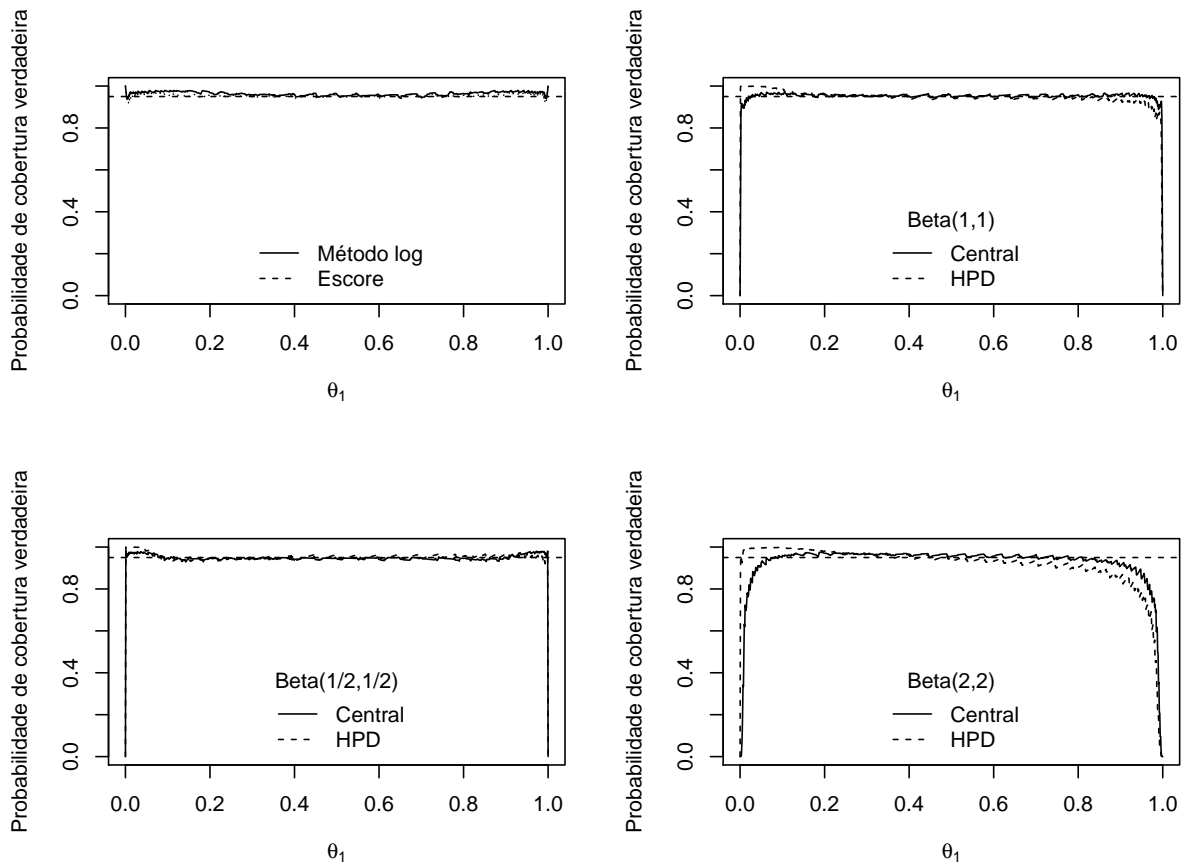
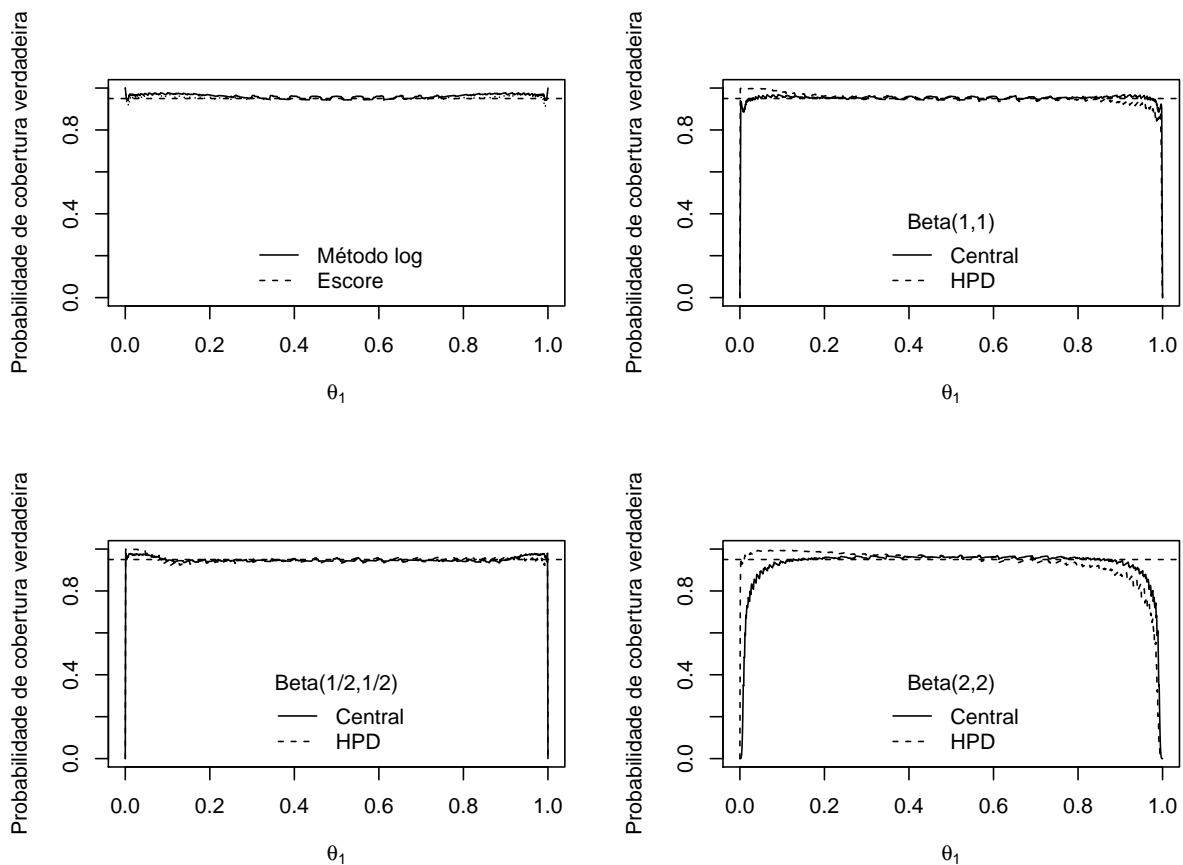


Figura D.48: Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.1$ .



**Figura D.49:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



**Figura D.50:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = n_2 = 20$  e  $\theta_2 = 0.5$ .



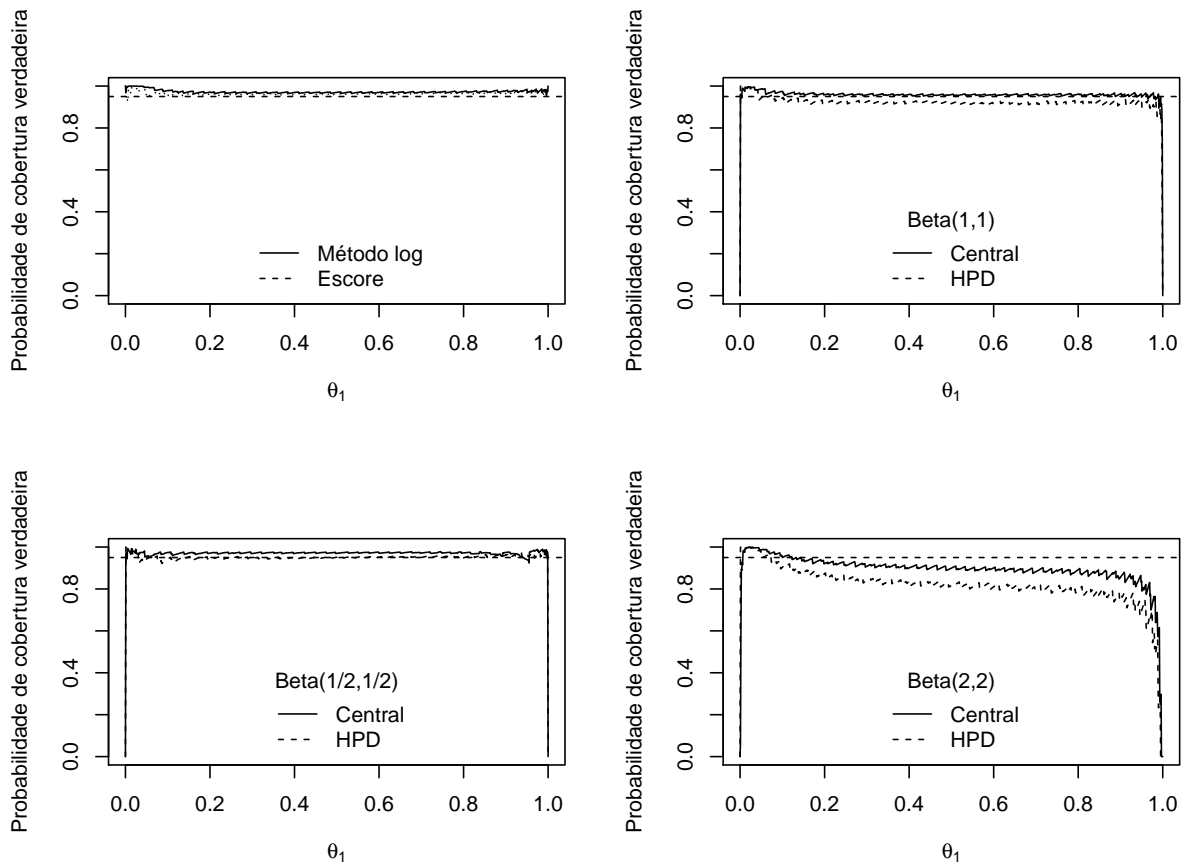


Figura D.51: Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.1$ .

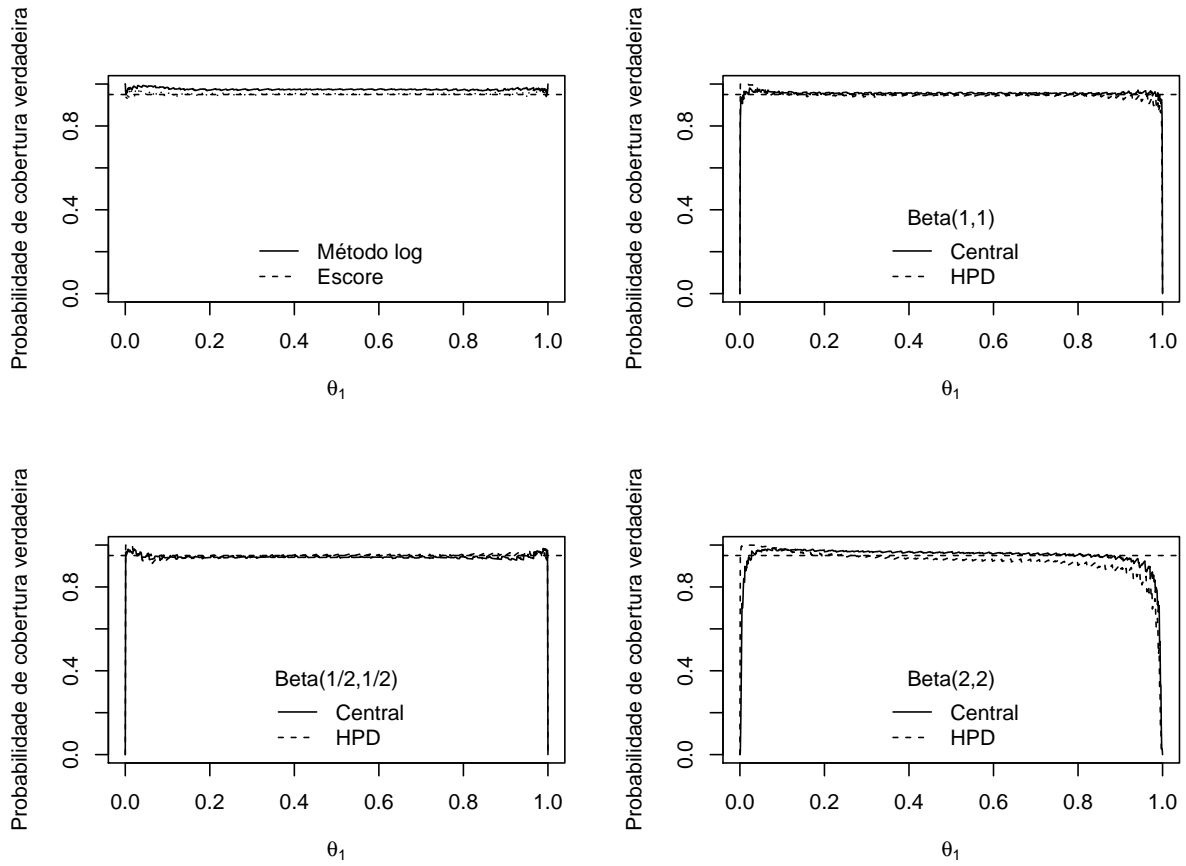
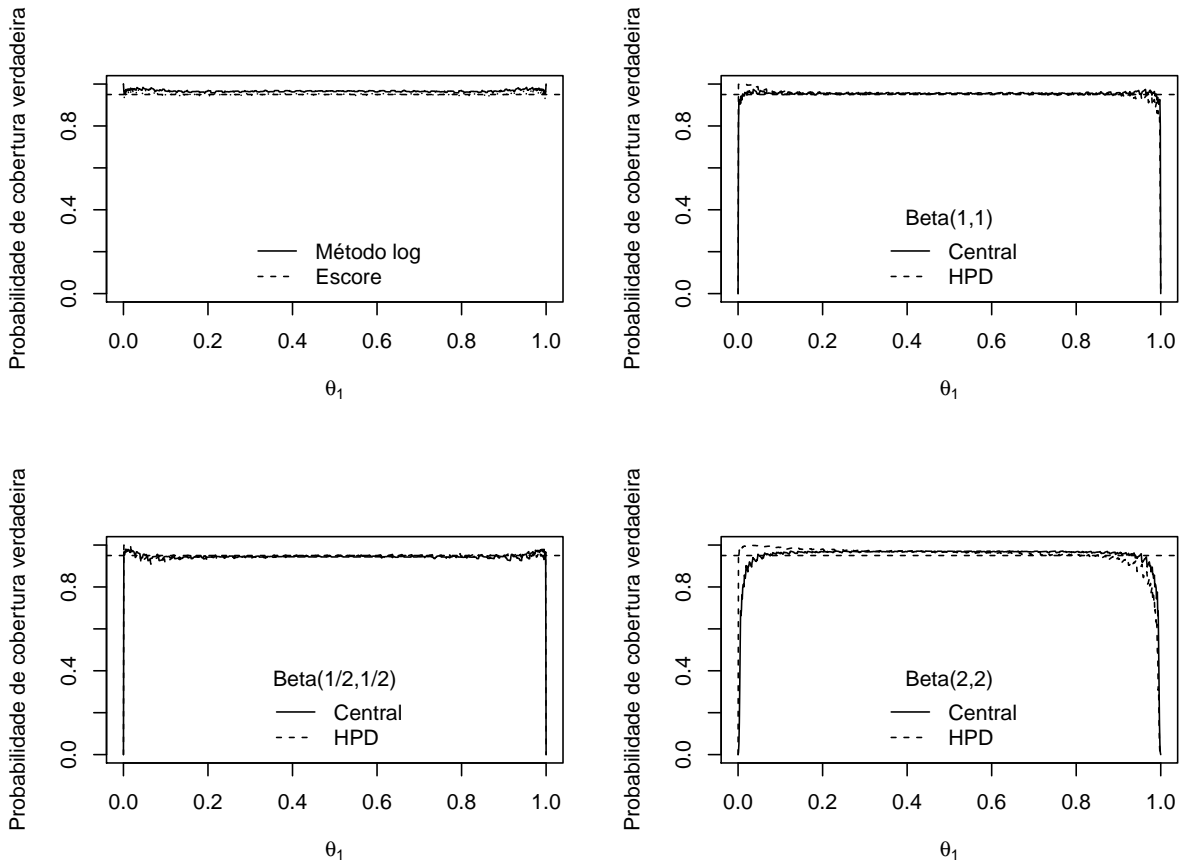


Figura D.52: Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.3$ .



**Figura D.53:** Probabilidade de cobertura  $C_\psi$  versus  $\theta_1$  para  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$  e  $\theta_2 = 0.5$ .



# Apêndice E

## Tabelas

Tabela E.1: Probabilidade de cobertura média (CM) e raiz do erro quadrático médio (EQM) considerando função peso Beta(1,1).

Intervalo	n = 5		n = 15		n = 30		n = 50		n = 100	
	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM
HPD - Beta(1/2,1/2)	1.00	0.07	1.00	0.04	1.00	0.03	1.00	0.02	1.00	0.01
Clopper-Pearson	0.99	0.04	0.98	0.03	0.97	0.02	0.97	0.02	0.96	0.02
Central - Beta(1/2,1/2)	0.99	0.05	0.97	0.03	0.94	0.02	1.00	0.01	0.98	0.01
HPD - Beta(2,2)	0.99	0.06	0.97	0.03	0.94	0.02	0.90	*	0.80	0.01
Central - Beta(2,2)	0.99	0.08	0.97	0.07	0.94	0.06	0.90	0.05	0.80	0.04
Agresti-Coull	0.97	0.03	0.96	0.02	0.96	0.02	0.96	0.01	0.95	0.01
Wilson	0.95	0.03	0.95	0.02	0.95	0.02	0.95	0.01	0.95	0.01
Wald	0.64	0.40	0.82	0.24	0.87	0.17	0.90	0.13	0.92	0.09

\* Integral divergente

**Tabela E.2:** Probabilidade de cobertura média (CM) e raiz do erro quadrático médio (EQM) considerando função peso Beta(12,12).

Intervalo	n = 5		n = 15		n = 30		n = 50		n = 100	
	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM
Clopper-Pearson	0.99	0.04	0.97	0.02	0.97	0.02	0.96	0.01	0.96	0.01
Agresti-Coull	0.98	0.03	0.96	0.01	0.95	0.01	0.95	0.01	0.95	0.004
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.97	0.08	0.94	0.03	0.98	0.02	0.97	0.01	0.97	0.01
Central - Beta(1/2,1/2)	0.97	0.05	0.97	0.01	0.96	0.01	0.94	0.01	0.97	0.01
HPD - Beta(2,2)	0.97	0.03	0.97	0.02	0.96	0.01	0.94	0.01	0.92	0.005
Central - Beta(2,2)	0.97	0.03	0.97	0.02	0.96	0.01	0.96	0.01	0.93	0.01
Wilson	0.95	0.02	0.95	0.01	0.95	0.01	0.95	0.01	0.95	0.004
Wald	0.87	0.10	0.92	0.04	0.93	0.02	0.94	0.01	0.94	0.01

Tabela E.3: Probabilidade de cobertura média (CM) e raiz do erro quadrático médio (EQM) considerando função peso Beta(0.26, 2.34).

Intervalo	n = 5		n = 15		n = 30		n = 50		n = 100	
	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM
Clopper-Pearson	0.99	0.04	0.99	0.04	0.99	0.04	0.98	0.03	0.98	0.03
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.99	0.05	0.96	0.05	0.96	0.04	0.97	0.04	0.97	0.04
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.98	0.04	0.96	0.04	0.96	0.03	0.96	0.03	0.95	0.01
Agresti-Coull	0.97	0.03	0.98	0.04	0.98	0.03	0.98	*	0.98	0.03
Wilson	0.96	0.04	0.96	0.034	0.96	0.03	0.96	0.01	0.96	0.01
Central - Beta(2,2)	0.92	0.09	0.88	0.10	0.89	0.11	0.90	0.10	0.91	0.10
HPD - Beta(2,2)	0.92	0.07	0.94	0.06	0.94	0.05	0.95	0.05	0.95	*
Wald	0.26	0.75	0.41	0.66	0.49	0.60	0.54	0.56	0.61	0.52

\* Integral divergente



**Tabela E.4:** Probabilidade de cobertura média (CM) e raiz do erro quadrático médio (EQM) considerando função peso  $Beta(2,34,0,26)$ .

Intervalo	n = 5		n = 15		n = 30		n = 50		n = 100	
	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM	CM	EQM
Clopper-Pearson	0.99	0.04	0.99	0.04	0.99	0.04	0.98	0.03	0.98	0.03
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.98	0.05	0.96	0.05	0.96	0.04	0.97	0.04	0.97	0.03
Central - Beta(1/2,1/2)	0.98	0.03	0.96	0.03	0.96	0.03	0.95	0.03	0.96	0.03
Agresti-Coull	0.97	0.03	0.98	0.04	0.98	0.03	0.98	*	0.98	0.03
Wilson	0.96	0.04	0.96	0.03	0.96	0.03	0.96	0.01	0.96	0.01
Central - Beta(2,2)	0.93	0.09	0.89	0.10	0.90	0.10	0.91	0.10	0.91	0.10
HPD - Beta(2,2)	0.92	0.07	0.94	0.06	0.94	0.05	0.95	0.01	0.94	0.01
Wald	0.26	0.75	0.41	0.66	0.49	0.60	0.54	0.56	0.61	0.52

\* Integral divergente

**Tabela E.5:** *Tamanhos dos intervalos para  $n = 5$ .*

Intervalo	Valor observado		
	0	2	4
Wald	0.00	0.86	0.70
Clopper-Pearson	0.52	0.80	0.71
Wilson	0.43	0.65	0.59
Agresti-Coull	0.54	0.65	0.62
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.31	0.70	0.61
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.31	0.69	0.56
Central - Beta(2,2)	0.47	0.60	0.57
HPD - Beta(2,2)	0.47	0.60	0.56

**Tabela E.6:** *Tamanhos dos intervalos para  $n = 10$ .*

Intervalo	Valor observado				
	0	2	5	7	9
Wald	0.00	0.50	0.62	0.57	0.37
Clopper-Pearson	0.31	0.53	0.63	0.59	0.44
Wilson	0.28	0.45	0.53	0.49	0.39
Agresti-Coull	0.36	0.47	0.53	0.50	0.43
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.17	0.46	0.55	0.51	0.37
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.17	0.44	0.55	0.50	0.33
Central - Beta(2,2)	0.32	0.45	0.50	0.48	0.40
HPD - Beta(2,2)	0.32	0.44	0.50	0.47	0.39

**Tabela E.7:** *Tamanhos dos intervalos para  $n = 50$ .*

Intervalo	Valor observado				
	0	10	25	35	49
Wald	0.00	0.22	0.28	0.25	0.08
Clopper-Pearson	0.07	0.24	0.29	0.27	0.11
Wilson	0.07	0.22	0.27	0.25	0.10
Agresti-Coull	0.10	0.22	0.27	0.25	0.12
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.04	0.22	0.27	0.25	0.09
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.04	0.22	0.27	0.25	0.08
Central - Beta(2,2)	0.09	0.22	0.26	0.24	0.12
HPD - Beta(2,2)	0.09	0.22	0.26	0.24	0.11

**Tabela E.8:** *Tamanhos dos intervalos para  $n = 100$ .*

Intervalo	Valor observado				
	0	25	50	65	99
Wald	0.00	0.17	0.20	0.19	0.04
Clopper-Pearson	0.04	0.18	0.20	0.19	0.05
Wilson	0.04	0.17	0.19	0.18	0.05
Agresti-Coull	0.05	0.17	0.19	0.18	0.06
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.17	0.19	0.18	0.04
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.02	0.17	0.19	0.18	0.04
Central - Beta(2,2)	0.04	0.17	0.19	0.18	0.06
HPD - Beta(2,2)	0.04	0.17	0.19	0.18	0.06

**Tabela E.9:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = n_2 = 10$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.02	0.02
Escore	0.02	0.01	0.01
Wald ajustado	0.02	0.01	0.01
HPD - Beta(1, 1)	0.02	0.01	0.01
Central - Beta(1, 1)	0.04	0.01	0.01
Wald	0.10	0.04	0.04
HPD - Beta(2, 2)	0.12	0.04	0.01
Central - Beta(2, 2)	0.17	0.05	0.02

**Tabela E.10:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = n_2 = 20$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
Escore	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1, 1)	0.02	0.01	0.01
Wald ajustado	0.02	0.01	0.01
Central - Beta(1, 1)	0.02	0.01	0.01
Wald	0.04	0.02	0.02
HPD - Beta(2, 2)	0.07	0.02	0.01
Central - Beta(2, 2)	0.10	0.03	0.01

**Tabela E.11:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1, 1)	0.01	0.01	0.01
Escore	0.01	0.004	0.01
Central - Beta(1, 1)	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.02	0.03
Wald ajustado	0.03	0.01	0.01
HPD - Beta(2, 2)	0.06	0.02	0.01
Central - Beta(2, 2)	0.09	0.02	0.02
Wald	0.13	0.05	0.04

Tabela E.12: Tamanhos dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 5$ e $x_2 = 5$
Wald	0.00	0.62	0.88
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.37	0.60	0.79
Central - Beta(1/2,1/2)	0.37	0.60	0.79
Wald ajustado	0.44	0.65	0.80
HPD - Beta(1,1)	0.45	0.61	0.76
Central - Beta(1,1)	0.46	0.62	0.76
HPD - Beta(2,2)	0.52	0.60	0.71
Central - Beta(2,2)	0.52	0.62	0.71
Escore	0.58	0.62	0.82

Tabela E.13: Tamanhos dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = n_2 = 20$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 10$	$x_1 = 10$ e $x_2 = 10$
Wald	0.00	0.44	0.62
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.20	0.43	0.59
Central - Beta(1/2,1/2)	0.20	0.43	0.59
Wald ajustado	0.25	0.45	0.59
HPD - Beta(1,1)	0.26	0.44	0.57
Central - Beta(1,1)	0.26	0.44	0.57
HPD - Beta(2,2)	0.32	0.45	0.55
Central - Beta(2,2)	0.32	0.45	0.55
Escore	0.33	0.41	0.60

Tabela E.14: Tamanhos dos intervalos para a diferença de probabilidades com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 20$ e $x_2 = 5$
Wald	0.00	0.62	0.69
HPD - Beta(1/2,1/2)	0.24	0.55	0.63
Central - Beta(1/2,1/2)	0.25	0.56	0.63
HPD - Beta(1,1)	0.30	0.54	0.61
Central - Beta(1,1)	0.31	0.54	0.61
Wald ajustado	0.33	0.57	0.64
HPD - Beta(2,2)	0.36	0.51	0.58
Central - Beta(2,2)	0.37	0.51	0.58
Escore	0.37	0.53	0.63

**Tabela E.15:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = n_2 = 10$ .

<b>Intervalo</b>	<b><math>\theta_2</math></b>		
	<b>0.1</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>
Escore	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.02	0.02
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
Método log	0.03	0.03	0.02
HPD - Beta(1, 1)	0.04	0.02	0.02
Central - Beta(1, 1)	*	0.04	0.04
Central - Beta(2, 2)	0.12	0.12	0.14
HPD - Beta(2, 2)	0.15	0.06	0.06

\*Integral divergente

**Tabela E.16:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = n_2 = 20$ .

<b>Intervalo</b>	<b><math>\theta_2</math></b>		
	<b>0.1</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>
Escore	0.01	0.01	0.01
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
Método log	0.02	0.02	0.01
HPD - Beta(1, 1)	0.03	0.02	0.01
Central - Beta(1, 1)	*	*	*
Central - Beta(2, 2)	0.09	0.09	0.10
HPD - Beta(2, 2)	0.09	0.04	0.04

\*Integral divergente

**Tabela E.17:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

<b>Intervalo</b>	<b><math>\theta_2</math></b>		
	<b>0.1</b>	<b>0.3</b>	<b>0.5</b>
Escore	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
Método log	0.02	0.02	0.02
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
HPD - Beta(1, 1)	0.03	0.01	0.02
Central - Beta(1, 1)	*	*	0.01
Central - Beta(2, 2)	0.07	0.07	0.08
HPD - Beta(2, 2)	0.16	0.03	0.03

\*Integral divergente

Tabela E.18: Tamanhos dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 5$ e $x_2 = 5$
HPD - Beta(2,2)	5.67	0.74	1.62
Central - Beta(2,2)	8.43	0.85	1.75
HPD - Beta(1,1)	17.06	0.55	1.79
Central - Beta(1,1)	36.92	0.68	1.95
HPD - Beta(1/2,1/2)	162.44	0.39	1.88
Central - Beta(1/2,1/2)	637.32	0.51	2.10
Escore	$\infty$	0.61	2.05
Método log	$\infty$	1.60	1.99

Tabela E.19: Tamanhos dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = n_2 = 20$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 10$	$x_1 = 10$ e $x_2 = 10$
HPD - Beta(2,2)	5.90	0.41	1.20
Central - Beta(2,2)	8.90	0.47	1.24
HPD - Beta(1,1)	18.07	0.29	1.26
Central - Beta(1,1)	36.84	0.35	1.32
HPD - Beta(1/2,1/2)	154.59	0.19	1.28
Central - Beta(1/2,1/2)	643.11	0.25	1.35
Escore	$\infty$	0.33	1.35
Método log	$\infty$	0.80	1.32

Tabela E.20: Tamanhos dos intervalos para o risco relativo com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 20$ e $x_2 = 5$
HPD - Beta(2,2)	1.83	0.24	1.34
Central - Beta(2,2)	2.65	0.29	1.49
HPD - Beta(1,1)	5.01	0.16	1.46
Central - Beta(1,1)	9.85	0.21	1.66
HPD - Beta(1/2,1/2)	40.11	0.11	1.55
Central - Beta(1/2,1/2)	169.66	0.14	1.77
Escore	$\infty$	0.18	1.66
Método log	$\infty$	0.42	1.50

**Tabela E.21:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = n_2 = 10$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.02	0.02
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
Escore	0.02	0.01	0.01
Método log	0.03	0.03	0.02
Central - Beta(1, 1)	0.05	0.05	0.05
HPD - Beta(1, 1)	0.06	0.06	0.06
Central - Beta(2, 2)	0.17	0.16	0.16
HPD - Beta(2, 2)	0.22	0.16	0.15

**Tabela E.22:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = n_2 = 20$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
Escore	0.01	0.01	0.01
Método log	0.03	0.02	0.01
Central - Beta(1, 1)	0.04	0.04	0.04
HPD - Beta(1, 1)	0.04	0.05	0.05
Central - Beta(2, 2)	0.13	0.13	0.13
HPD - Beta(2, 2)	0.16	0.13	0.12

**Tabela E.23:** Raiz do erro quadrático médio dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

Intervalo	$\theta_2$		
	0.1	0.3	0.5
HPD - Beta(1/2, 1/2)	0.01	0.01	0.01
Escore	0.02	0.01	0.01
Central - Beta(1/2, 1/2)	0.02	0.01	0.01
Método log	0.02	0.03	0.02
Central - Beta(1, 1)	*	0.03	*
HPD - Beta(1, 1)	0.04	0.03	*
Central - Beta(2, 2)	0.11	0.09	0.09
HPD - Beta(2, 2)	0.17	0.09	0.08

\*Integral divergente

Tabela E.24: Tamanhos dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 5$ e $x_2 = 5$
HPD - Beta(2,2)	7.22	0.64	3.59
Central - Beta(2,2)	10.90	0.81	4.41
HPD - Beta(1,1)	20.62	0.42	4.04
Central - Beta(1,1)	43.88	0.59	5.14
HPD - Beta(1/2,1/2)	170.03	0.27	4.31
Central - Beta(1/2,1/2)	640.87	0.39	5.61
Escore	$\infty$	0.52	5.54
Método log	$\infty$	1.17	5.60

Tabela E.25: Tamanhos dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = n_2 = 20$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 10$	$x_1 = 10$ e $x_2 = 10$
HPD - Beta(2,2)	6.82	0.29	2.49
Central - Beta(2,2)	10.44	0.35	2.84
HPD - Beta(1,1)	19.41	0.18	2.63
Central - Beta(1,1)	39.30	0.24	3.05
HPD - Beta(1/2,1/2)	164.32	0.11	2.71
Central - Beta(1/2,1/2)	692.09	0.16	3.15
Escore	$\infty$	0.22	3.15
Método log	$\infty$	0.48	3.16

Tabela E.26: Tamanhos dos intervalos para a razão de chances com  $n_1 = 40$  e  $n_2 = 10$ .

Intervalo	$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ e $x_2 = 5$	$x_1 = 20$ e $x_2 = 5$
HPD - Beta(2,2)	1.91	0.16	2.71
Central - Beta(2,2)	2.87	0.21	3.17
HPD - Beta(1,1)	5.28	0.10	2.96
Central - Beta(1,1)	10.49	0.14	3.51
HPD - Beta(1/2,1/2)	41.68	0.06	3.12
Central - Beta(1/2,1/2)	157.97	0.09	3.77
Escore	$\infty$	0.12	3.57
Método log	$\infty$	0.27	3.75



# Referências

- AGRESTI, A. (2011). Score and pseudo-score confidence intervals for categorical data analysis. *Statistics in Biopharmaceutical Research* **3**, 163–172. [6](#)
- AGRESTI, A. & CAFFO, B. (2000). Simple and effective confidence intervals for proportions and differences of proportions result from adding two successes and two failures. *The American Statistician* **54**, 280–288. [1](#), [7](#), [20](#), [21](#), [28](#)
- AGRESTI, A. & COULL, B. A. (1998). Approximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions. *The American Statistician* **52**, 119–126. [1](#), [6](#)
- AGRESTI, A. & MIN, Y. (2005). Frequentist performance of bayesian confidence intervals for comparing proportions in  $2 \times 2$  contingency tables. *Biometrics* **61**, 515–523. [11](#), [28](#), [29](#)
- AITCHISON, J. & BACON-SHONE, J. (1981). Bayesian relative risk analysis. *American Statistician* **35**, 254–257. [26](#)
- ANSCOMBE, F. J. (1948). The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika* **35**, 246–254. [8](#)
- ASKEY, R. A. & ROY, R. (2010). Beta function. *NIST digital library of mathematical functions* . [35](#)
- BROWN, L. D., CAI, T. T. & DASGUPTA, A. (2001). Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science* **16**, 101–117. [1](#), [2](#), [8](#), [9](#), [11](#)
- BROWN, L. D., CAI, T. T. & DASGUPTA, A. (2002). Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *Annals of Statistics* **30**, 160–201. [9](#)

- CHEN, M.-H. & SHAO, Q.-M. (1999). Monte carlo estimation of bayesian credible and hpd intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **8**, 69–92. 26, 27
- CLOPPER, C. & PEARSON, E. S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrika* **26**, 404–413. 2, 4
- CORNFIELD, J. (1956). A statistical problem arising from retrospective studies. In *Proceedings of the third Berkeley symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol. 4. University of California Press, Berkeley, CA. 23
- DEGROOT, M. H., SCHERVISH, M. J., FANG, X., LU, L. & LI, D. (1986). *Probability and Statistics*, vol. 2. Addison-Wesley Reading, MA. 8
- GUPTA, R., ALBANESE, R., PENN, J. & WHITE, T. (1997). Bayesian estimation of relative risk in biomedical research. *Environmetrics* **8**, 133–143. 26
- HASHEMI, L., NANDRAM, B. & GOLDBERG, R. (1997). Bayesian analysis for a single  $2 \times 2$  table. *Statistics in Medicine* **16**, 1311–1328. 26, 41
- HORA, S. C. & KELLEY, G. D. (1983). Bayesian inference on the odds and risk ratios. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **12**, 681–692. 26
- KATZ, D., BAPTISTA, J., AZEN, S. & PIKE, M. (1978). Obtaining confidence intervals for the risk ratio in cohort studies. *Biometrics* **34**, 469–474. 21
- KOOPMAN, P. (1984). Confidence intervals for the ratio of two binomial proportions. *Biometrics* **40**, 513–517. 22
- LATORRE, G. (1982). The exact posterior distribution of the cross-ratio of a  $2 \times 2$  contingency table. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **16**, 19–24. 26
- MEE, R. W. (1984). Confidence bounds for the difference between two probabilities. 20
- MIETTINEN, O. & NURMINEN, M. (1985). Comparative analysis of two rates. *Statistics in Medicine* **4**, 213–226. 20, 23, 29
- NEWCOMBE, R. G. (1998). Interval estimation for the difference between independent proportions: comparison of eleven methods. *Statistics in medicine* **17**, 873–890. 28

- NURMINEN, M. & MUTANEN, P. (1987). Exact bayesian analysis of two proportions. *Scandinavian Journal of Statistics* **14**, 67–77. 26, 29
- PAULINO, C. D. M., TURKMAN, M. A. A. & MURTEIRA, B. (2003). *Estatística bayesiana*. Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian. 12, 13, 26, 27
- PHAM-GIA, T., TURKKAN, N. & ENG, P. (1993). Bayesian analysis of the difference of two proportions. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **22**, 1755–1771. 26
- RAO, C. R. (1948). Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 44. Cambridge Univ Press. 5
- SAMUELS, M. L. & WITMER, J. A. (1999). *Statistics for the Life Sciences*. New Jersey. Prentice Hall. 8
- STONE, C. J. (1995). *A course in probability and statistics*. California. Duxbury Press Belmont. 8
- THULIN, M. (2014). Coverage-adjusted confidence intervals for a binomial proportion. *Scandinavian Journal of Statistics* **41**, 291–300. 1, 3, 4
- WALD, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical Society* **54**, 426–482. 1
- WEISBERG, H. I. (1972). Bayesian comparison of two ordered multinomial populations. *Biometrics* **28**, 859–867. 26
- WILSON, E. B. (1927). Probable inference, the law of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association* **22**, 209–212. 5
- WOOLF, B. et al. (1955). On estimating the relation between blood group and disease. *Annals of Human Genetics* **19**, 251–253. 23
- ZIELIŃSKI, W. (2009). The shortest clopper–pearson confidence interval for binomial probability. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* **39**, 188–193. 4