

**Refinamento de propriedades assintóticas  
do estimador de máxima verossimilhança**

Tiago Maia Magalhães

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Denise Aparecida Botter

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mônica Carneiro Sandoval

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES (04/2011 até 06/2012) e CNPq (07/2012 até 03/2015)

São Paulo, 14 de fevereiro de 2016

# Refinamento de propriedades assintóticas do estimador de máxima verossimilhança

Esta é a versão original da tese elaborada pelo  
Tiago Maia Magalhães, tal como  
submetida à Comissão Julgadora.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos	2
1.2	Considerações preliminares	3
1.2.1	Modelo de regressão beta não linear heterocedástico	3
1.2.2	Modelos de dispersão	5
1.3	Organização do trabalho	7
<b>2</b>	<b>Coefficiente de assimetria nos modelos de regressão beta</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução	9
2.2	Coefficiente de assimetria	10
2.3	Casos especiais	12
2.3.1	Modelo de regressão beta linear heterocedástico	12
2.3.2	Modelo de regressão beta homocedástico	13
2.4	Resultados numéricos	14
2.5	Aplicação	16
2.6	Conclusões	18
<b>3</b>	<b>Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés</b>	<b>19</b>
3.1	Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV	20
3.1.1	Forma alternativa da matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV	22
3.1.2	Resultados numéricos	23
3.2	Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés	24
3.3	Considerações	25
<b>4</b>	<b>Matriz de covariâncias de segunda ordem nos modelos de dispersão</b>	<b>27</b>
4.1	Matriz de covariâncias de segunda ordem	27
4.1.1	Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\beta}$	28
4.1.2	Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\lambda}$	34
4.1.3	Cálculo da matriz $\Delta_{\lambda\beta}$	34
4.1.4	Cálculo da matriz $\Delta_{\lambda\lambda}$	35
4.1.5	Resultados numéricos	36
4.2	Testes de Wald modificados	42
4.2.1	Ordem do teste	43
4.2.2	Resultados numéricos	43
4.3	Considerações	73

<b>5</b>	<b>Matriz de covariâncias de segunda ordem no modelo de regressão beta</b>	<b>75</b>
5.1	Modelo de regressão beta linear homocedástico . . . . .	75
5.2	Matriz de covariâncias de segunda ordem . . . . .	76
5.2.1	Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\beta}$ . . . . .	76
5.2.2	Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\phi}$ . . . . .	78
5.2.3	Cálculo da matriz $\Delta_{\phi\beta}$ . . . . .	80
5.2.4	Cálculo da matriz $\Delta_{\phi\phi}$ . . . . .	82
5.3	Resultados numéricos . . . . .	83
5.4	Considerações . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Cumulantes dos modelos de dispersão</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Cumulantes do modelo de regressão beta</b>	<b>103</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>109</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Modelos de regressão são modelos matemáticos que tentam explicar o comportamento de uma variável de interesse (ou resposta) a partir de covariáveis. De maneira geral, uma função da média da variável resposta é construída como uma função das covariáveis. Os modelos de regressão são muito utilizados nas diversas áreas do conhecimento, como, por exemplo, agronomia, área de saúde, economia e engenharia.

Os primeiros modelos de regressão foram construídos assumindo-se que a variável resposta em estudo seguia distribuição normal. Caso a suposição de normalidade não fosse satisfeita, tentava-se alguma transformação para garantir isso. O problema é que em alguns casos a transformação utilizada complicava a interpretação do modelo final. [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#) quando propuseram a classe dos modelos lineares generalizados (MLG), deram uma grande contribuição, pois estenderam a teoria da regressão normal para os casos em que a distribuição da variável resposta pertence à família exponencial. Entre as distribuições que pertencem à família exponencial, temos a binomial, a gama, a normal, a normal inversa e a Poisson. Dessa forma, o MLG tem flexibilidade para modelar dados binários, de contagem, positivos assimétricos e simétricos.

Uma extensão do MLG, proposta por [Cordeiro e Paula \(1989\)](#), foi denominada modelos não lineares da família exponencial (MNLFE). Com o MNLFE, os resultados do MLG foram estendidos para situações em que a relação da média da variável resposta com as covariáveis é não linear. O modelo de regressão normal não linear é um exemplo de um modelo de regressão tradicional englobado pelo MNLFE.

A classe dos modelos de dispersão (MD; [Jørgensen, 1987b](#)), inicialmente denominada classe estendida de MLG ([Jørgensen, 1983](#)), é ainda mais geral que o MNLFE, pois além de modelar variáveis pertencentes a família exponencial, ela também modela distribuições pertencentes à classe dos modelos exponenciais de dispersão (MED; [Jørgensen, 1987a](#)) e pertencentes aos modelos próprios de dispersão (MPD; [Jørgensen, 1997b](#)).

Uma alternativa para a modelagem de taxas ou proporções é a utilização dos modelos de regressão beta ([Ferrari e Cribari-Neto, 2004](#)). A vantagem em utilizar estes modelos é que a distribuição beta é bastante flexível, dependendo da escolha dos valores de seus parâmetros.

Em geral, utiliza-se o método da máxima verossimilhança para obter os estimadores dos parâmetros do modelo de regressão. Inferências em modelos de regressão dependem fortemente de propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV).

Vários trabalhos têm sido desenvolvidos com o objetivo de melhorar os procedimentos de inferência por verossimilhança quando as amostras são de tamanho moderado ou pequeno. Entre os principais resultados, podemos mencionar [Cox e Snell \(1968\)](#) que obtiveram o viés do EMV

de ordem  $n^{-1}$ , a função de geradora de cumulantes de Peers e Iqbal (1985) e a expressão de Shenton e Bowman (1977), que permitem encontrar a matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do EMV e Bowman e Shenton (1998) que obtiveram uma aproximação de ordem  $\mathcal{O}(n^{-2})$  para o terceiro momento central da distribuição do EMV.

A partir de Cox e Snell (1968), o viés de primeira ordem foi encontrado para vários modelos de regressão. Simas *et al.* (2011) encontraram o EMV corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$  nos modelos de dispersão, estendendo os resultados de Cordeiro e McCullagh (1991), Botter e Cordeiro (1998), Paula (1992) e Cordeiro e Vasconcellos (1999), que fizeram o mesmo, respectivamente, para o MLG, MLG duplo, MNLFE e para os modelos de regressão von Mises. Barreto-Souza e Vasconcellos (2011) encontraram o viés de primeira ordem para os modelos de regressão do valor extremo, Simas *et al.* (2010a) fizeram o mesmo para o modelo de regressão beta não linear heterocedástico, generalizando o resultado de Ospina *et al.* (2006) e Lemonte *et al.* (2007) encontraram o viés de primeira ordem nos modelos regressão Birnbaum-Saunders.

A partir de Bowman e Shenton (1998), trabalhos têm sido desenvolvidos para se obter o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  ( $\gamma_1$ ) da distribuição do EMV. Cordeiro e Cordeiro (2001) encontraram o coeficiente  $\gamma_1$  para a classe dos modelos lineares generalizados, Cavalcanti *et al.* (2009) estenderam este resultado para o caso dos modelos não lineares da família exponencial, Simas *et al.* (2010b) generalizaram para os modelos de dispersão, Lemonte e Cordeiro (2010) encontraram o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  para os modelos de regressão não linear Birnbaum-Saunders e Barreto-Souza e Vasconcellos (2011) para os modelos de regressão do valor extremo.

A partir de Peers e Iqbal (1985), foi possível obter a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV dos parâmetros de um modelo de regressão. Cordeiro (2004) obteve a matriz de covariâncias de segunda ordem para o EMV ( $\text{Cov}_2$ ) para os MLG. Ele mostrou que, para amostras pequenas, as covariâncias até ordem  $n^{-2}$  se aproximam das covariâncias amostrais, justificando sua utilização. Resultados semelhantes foram obtidos por Cordeiro *et al.* (2006). Mais recentemente, Barroso *et al.* (2013) estenderam este resultado para o caso heterocedástico e Cordeiro *et al.* (2014) obtiveram a expressão da matriz de covariâncias de segunda ordem para o estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés. Com a expressão obtida, os autores propuseram uma modificação no teste de Wald que melhorou o seu desempenho. A expressão da matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  também foi encontrada para outras classes de modelos de regressão. Para os modelos não lineares da família exponencial, Cordeiro e Santana (2008) encontraram a  $\text{Cov}_2$ . Simas *et al.* (2010b) encontraram a expressão de  $\text{Cov}_2$  para os modelos de dispersão. Lemonte (2011) encontrou a matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  para o modelo de regressão linear Birnbaum-Saunders.

## 1.1 Objetivos

Os objetivos desta tese são:

- Encontrar o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão beta não linear heterocedástico.
- Encontrar a matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$  no modelo de regressão beta linear homocedástico.
- Encontrar a matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$  nos modelos de dispersão.

## 1.2 Considerações preliminares

A seguir, apresentamos o modelo de dispersão e os modelos de regressão beta não linear e linear heterocedásticos e linear homocedástico.

### 1.2.1 Modelo de regressão beta não linear heterocedástico

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $Y$  com distribuição beta pode ser escrita como

$$f(y; \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi-1} (1-y)^{(1-\mu)\phi-1}, \quad 0 < y < 1, \quad (1.1)$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama ( $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ),  $\mu \in (0, 1)$  e  $\phi > 0$ . A média e a variância de  $Y$  são dadas, respectivamente, por  $\mathbb{E}(Y) = \mu$  e  $\text{Var}(Y) = \mu(1-\mu)/(1+\phi)$ , sendo que  $\phi$  pode ser interpretado como o parâmetro de precisão, pois, para um valor fixo de  $\mu$ , quanto maior for o valor de  $\phi$ , menor será a variância de  $Y$ . Ferrari e Cribari-Neto (2004) observaram que o modelo de regressão beta pode ser generalizado para os casos em que a resposta pertence ao intervalo  $(a, b)$ , em que  $a$  e  $b$  são escalares conhecidos,  $a < b$ . Neste caso, modelamos  $(Y - a)/(b - a)$  ao invés de  $Y$  diretamente.

Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  variáveis aleatórias independentes, em que cada  $Y_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, n$ , tem densidade dada por (1.1), com média  $\mu_\ell$  e parâmetro de dispersão  $\phi_\ell$ . No modelo de regressão beta não linear heterocedástico (MBNH), generalização proposta por Simas *et al.* (2010a), assumimos que a média e a precisão de  $Y_\ell$  podem escritas, respectivamente, como

$$\eta_{1\ell} = g_1(\mu_\ell) = f_1(x_\ell, \beta) \text{ e } \eta_{2\ell} = g_2(\phi_\ell) = f_2(z_\ell, \lambda), \quad (1.2)$$

em que  $\eta_{1\ell}$  e  $\eta_{2\ell}$  são chamados, respectivamente, de componente sistemática de  $\mu_\ell$  e  $\phi_\ell$ ,  $\beta^\top = (\beta_1, \dots, \beta_{k_1})$  e  $\lambda^\top = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k_2})$  são vetores de parâmetros desconhecidos a serem estimados, considerados funcionalmente independentes,  $\beta \in \mathfrak{R}^{k_1}$  e  $\lambda \in \mathfrak{R}^{k_2}$ ,  $k_1 + k_2 < n$ ,  $x_\ell^\top = (x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell q_1})$ ,  $z_\ell^\top = (z_{\ell 1}, \dots, z_{\ell q_2})$  são observações de  $q_1$  e  $q_2$  covariáveis conhecidas, não necessariamente exclusivas. As matrizes de derivadas  $\mathcal{X} = \partial\eta_1/\partial\beta$  e  $\mathcal{Z} = \partial\eta_2/\partial\lambda$  têm posto  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. As funções  $g_1 : (0, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$  e  $g_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ , funções de ligação, são estritamente monótonas e duplamente diferenciáveis.

Considere o vetor paramétrico  $\theta^\top = (\beta^\top, \lambda^\top)$ . O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$l(\theta) = l(\beta, \lambda) = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \log \Gamma(\phi_\ell) - \log \Gamma(\mu_\ell \phi_\ell) - \log \Gamma((1-\mu_\ell)\phi_\ell) + (\mu_\ell \phi_\ell - 1) \log y_\ell + [(1-\mu_\ell)\phi_\ell - 1] \log(1-y_\ell) \right\}.$$

Definindo  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ , com  $y_\ell^* = \log[y_\ell/(1-y_\ell)]$  e  $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$  com  $\mu_\ell^* = \psi(\mu_\ell \phi_\ell) - \psi((1-\mu_\ell)\phi_\ell)$ , sendo  $\psi(\cdot)$  a função digama ( $d\{\log \Gamma(x)\}/dx$ ), o vetor escore, obtido pela diferenciação do logaritmo da função de verossimilhança em relação a  $\theta$ , é dado por

$$U_\theta = (U_\beta(\beta, \lambda)^\top, U_\lambda(\beta, \lambda)^\top)^\top, \quad (1.3)$$

em que  $U_\beta(\beta, \lambda)$  é um vetor de dimensão  $k_1$  e  $U_\lambda(\beta, \lambda)$  é um vetor de dimensão  $k_2$ , dados, respectivamente, por

$$U_\beta(\beta, \lambda) = \mathcal{X}^\top \Phi T_1 (y^* - \mu^*) \text{ e } U_\lambda(\beta, \lambda) = \mathcal{Z}^\top T_2 \nu, \quad (1.4)$$

sendo  $T_1 = \text{diag}(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})$ ,  $T_2 = \text{diag}(d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})$ ,  $\Phi = \text{diag}(\phi_\ell)$  e  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^\top$ ,  $\nu_\ell = \mu_\ell (y_\ell^* -$

$$\mu_\ell^*) + \log(1 - y_\ell) - \psi((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) + \psi(\phi_\ell).$$

A matriz de informação de Fisher é definida como

$$K_{\theta,\theta} = P^\top W P, \quad (1.5)$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{X} & 0 \\ 0 & \mathcal{Z} \end{pmatrix} \text{ e } W = \begin{pmatrix} W_{\beta\beta} & W_{\beta\lambda} \\ W_{\lambda\beta} & W_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

sendo  $W_{\beta\beta} = \text{diag}\{\phi_\ell^2 a_\ell (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})^2\}$ ,  $W_{\beta\lambda} = \text{diag}\{\phi_\ell [\mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)](d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})(d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})\}$ ,  $W_{\lambda\lambda} = \text{diag}\{b_\ell (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})^2\}$ ,  $a_\ell = \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) + \psi'(\mu_\ell\phi_\ell)$ ,  $b_\ell = \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)(1 - \mu_\ell)^2 + \psi'(\mu_\ell\phi_\ell)\mu_\ell^2 - \psi'(\phi_\ell)$ , em que  $\psi'(\cdot)$  é a função trigama ( $d^2\{\log \Gamma(x)\}/dx^2$ ).

Note que  $W_{\beta\lambda} = W_{\lambda\beta}^\top \neq 0$ , isto é, os parâmetros  $\beta$  e  $\lambda$  não são ortogonais, como acontece, por exemplo, na classe dos modelos lineares generalizados (McCullagh e Nelder, 1989).

Sob condições de regularidades usuais para os estimadores de máxima verossimilhança (ver, por exemplo, Sen *et al.*, 2010, p. 245), temos, quando o tamanho amostral é grande, que

$$\hat{\theta} \sim N_{k_1+k_2}(\theta, K_{\theta,\theta}^{-1}) \quad (1.6)$$

aproximadamente, em que  $\hat{\theta}$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$ . O EMV de  $\theta$  é obtido a partir da solução do sistema  $U(\theta) = 0$ . Na prática, para se obter o EMV de  $\theta$  é necessário recorrer a processos iterativos, como o método quasi-Newton BFGS com derivadas analíticas (ver Nocedal e Wright, 2006). Para o valor inicial de  $\theta$ ,  $\theta^{(0)}$ , podemos utilizar a sugestão apresentada por Simas *et al.* (2010a, Seção 2, p. 350–351).

O modelo de regressão beta linear heterocedástico (MBLH) é definido por (1.1) e por (1.2) escrito da seguinte forma:

$$\eta_{1\ell} = g_1(\mu_\ell) = x_\ell^\top \beta \text{ e } \eta_{2\ell} = g_2(\phi_\ell) = z_\ell^\top \lambda. \quad (1.7)$$

A função escore para o vetor  $\theta$  é dada por (1.3), em que

$$U_\beta(\beta, \lambda) = X^\top \Phi T_1(y^* - \mu^*) \text{ e } U_\lambda(\beta, \lambda) = Z^\top T_2\nu, \quad (1.8)$$

$X$  e  $Z$  são, respectivamente, matrizes  $n \times k_1$  com a  $\ell$ -ésima linha igual a  $x_\ell^\top$  e  $n \times k_2$  com a  $\ell$ -ésima linha igual a  $z_\ell^\top$ . A matriz de informação de Fisher é definida por (1.5), sendo

$$P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}.$$

O modelo de regressão beta linear homocedástico (MBL) com transformação no parâmetro de precisão é definido por (1.1) e por (1.7) escrito como:

$$\eta_{1\ell} = g_1(\mu_\ell) = x_\ell^\top \beta \text{ e } \eta_{2\ell} = g_2(\phi) = \lambda. \quad (1.9)$$

Alguns exemplos de transformações são  $\phi = \lambda$ ,  $\log(\phi) = \lambda$  e  $\sqrt{\phi} = \lambda$ .

Definimos o vetor de parâmetros  $\theta^\top = (\beta^\top, \lambda)$ . O vetor escore, obtido pela diferenciação do logaritmo da função de verossimilhança em relação a  $\theta$ , é dado por

$$U_\theta = (U_\beta(\beta, \lambda)^\top, U_\lambda(\beta, \lambda)^\top)^\top,$$



em que  $U_\beta(\beta, \lambda)$  é um vetor de dimensão  $k_1$  e  $U_\lambda(\beta, \lambda)$  é um escalar, dados, respectivamente, por

$$U_\beta(\beta, \lambda) = X^\top \Phi T_1(y^* - \mu^*) \text{ e } U_\lambda(\beta, \lambda) = \mathbf{1}_n^\top T_2 \nu, \quad (1.10)$$

sendo  $\mathbf{1}_n^\top = (1, \dots, 1)$ , um vetor de dimensão  $n$ .

A matriz de informação de Fisher é dada por (1.5), em que

$$P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O modelo de regressão beta linear homocedástico proposto por Ferrari e Cribari-Neto (2004), é definido por (1.1) e (1.9) sendo  $\lambda = \phi$ .

### 1.2.2 Modelos de dispersão

Uma variável aleatória  $Y$  pertence à classe dos modelos de dispersão (Jørgensen, 1997a) se sua função densidade de probabilidade ou distribuição de probabilidades pode ser escrita da seguinte forma:

$$\pi(y; \mu, \phi) = \exp \{ \phi t(y, \mu) + a(y, \phi) \}, \quad y \in \mathfrak{R}, \quad (1.11)$$

em que  $t(\cdot, \cdot)$  e  $a(\cdot, \cdot)$  são funções conhecidas,  $\phi > 0$  e  $\mu$  varia em um subconjunto da reta. Se  $Y$  é contínua,  $\pi(\cdot)$  é assumida ser uma densidade com respeito à medida de Lebesgue, enquanto que se  $Y$  é discreta,  $\pi(\cdot)$  é assumida ser uma densidade com respeito a uma medida de contagem. Denominamos  $\phi > 0$  em (1.11) como parâmetro de precisão e o inverso de  $\phi$  como parâmetro de dispersão. O parâmetro  $\mu$  pode ser interpretado como um parâmetro de posição. Em alguns casos, ele é a média da distribuição.

Se  $t(\cdot, \cdot) = \gamma y - b(\gamma)$ , em que  $\mu = b'(\gamma)$ ,  $\gamma \in \mathfrak{R}$ , denominamos (1.11) como modelo exponencial de dispersão (Jørgensen, 1987a). Além das distribuições pertencentes à família exponencial, a secante hiperbólica generalizada, a binomial negativa e a classe de distribuições Tweedie são exemplos de distribuições que pertencem à classe de modelos exponenciais de dispersão. Se em (1.11) escrevemos  $a(y, \phi) = d_1(\phi) + d_2(y)$ , em que  $d_1(\cdot)$  e  $d_2(\cdot)$  são funções conhecidas, (1.11) é denominado modelo próprio de dispersão (Jørgensen, 1997b). A simplex e a von Mises são exemplos de distribuições pertencentes a esta classe.

Considere observações  $Y_1, \dots, Y_n$  com distribuição pertencente à classe dos modelos de dispersão com parâmetros  $(\mu_\ell, \phi)$ , sendo  $\phi$  desconhecido mas igual para todas as observações. Os modelos dispersão com covariáveis regressoras (Jørgensen, 1987b) assumem que  $\mu_\ell$  satisfaz

$$\eta_\ell = g(\mu_\ell) = f(x_\ell; \beta), \quad (1.12)$$

em que  $g(\cdot)$  é uma função de ligação biunívoca, diferenciável e conhecida,  $f(x_\ell; \beta)$  é uma função conhecida, contínua e diferenciável com respeito a  $\beta$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ ,  $p < n$ , é um vetor de parâmetros desconhecidos a ser estimado e  $x_\ell$  é um vetor  $q \times 1$  de variáveis explanatórias conhecidas associadas com a  $\ell$ -ésima resposta observada. Consideramos que diferentes valores de  $\beta$  implicam em diferentes valores de  $\eta$ . Isso garante que a matriz de derivadas  $\mathcal{X} = \partial \eta / \partial \beta$  tenha posto  $p$  para todo  $\beta$ .

Consideramos uma transformação no parâmetro de precisão  $\phi$ , isto é,  $h(\phi) = \lambda$ , em que a transformação  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  é estritamente monótona e duas vezes diferenciável. Alguns exemplos de transformação são  $\lambda = \phi$ ,  $\lambda = \log \phi$  e  $\lambda = \sqrt{\phi}$ .

O logaritmo da função de verossimilhança para  $\theta$ ,  $\theta = (\beta^\top, \lambda)^\top$ , denotado por  $l(\theta)$ , é dado por

$$l(\theta) = \sum_{\ell=1}^n \{\phi t(y_\ell, \mu_\ell) + a(y_\ell, \phi)\}. \quad (1.13)$$

A função escore de  $\beta$ , obtida derivando-se (1.13) em relação a  $\beta$ , é dada por

$$U_\beta = \phi \mathcal{X}^\top t'(y, \mu),$$

em que  $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ ,  $t'(y, \mu) = \partial t(y, \mu) / \partial \mu$  e  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ . Derivando (1.13) em relação a  $\lambda$ , obtemos a função escore de  $\lambda$ , dada por

$$U_\lambda = \phi' \sum_{\ell=1}^n \{t(y_\ell, \mu_\ell) + a'(y_\ell, \phi)\},$$

em que  $a'(\phi, y_\ell) = \partial a(\phi, y_\ell) / \partial \phi$  e  $\phi' = d\phi / d\lambda$ .

O EMV de  $\beta$ , que não depende do parâmetro de precisão  $\phi$ , é obtido de  $U_\beta = 0$ . As equações não lineares obtidas têm a mesma forma que as equações utilizadas na estimação de um MLG e assim podem ser resolvidas por métodos iterativos.

Dada a estimativa de  $\beta$ , o EMV de  $\lambda$  pode ser calculado como a solução da equação

$$\sum_{\ell=1}^n a'(\phi, y_\ell) = - \sum_{\ell=1}^n t(y_\ell, \mu_\ell).$$

Definimos  $d_r = d_r(\mu, \phi) = \mathbb{E}\{\partial^r t(Y, \mu) / \partial \mu^r\}$  para  $r = 1, 2, 3$ . Sob condições de regularidade segue que  $d_1 = 0$  e  $d_2 = -\phi \mathbb{E}\{[\partial t(Y, \mu) / \partial \mu]^2\}$ . A matriz de informação conjunta para  $\theta$  é

$$K_{\theta, \theta} = \begin{pmatrix} \phi \mathcal{X}^\top W \mathcal{X} & \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times p} & n \phi'^2 a^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

em que  $W = \text{diag}\{w_1, \dots, w_n\}$ ,  $w_\ell = -d_2(d\mu_\ell / d\eta_\ell)^2$  e  $a^{(2)} = a^{(2)}(\mu, \phi) = \mathbb{E}\{\partial^2 a(\phi, y) / \partial \phi^2\}$ .

Temos que, sob condições de regularidades usuais para os estimadores de máxima verossimilhança, quando o tamanho amostral é grande,

$$\hat{\theta} \sim N_{p+1}(\theta, K_{\theta, \theta}^{-1}). \quad (1.15)$$

Note que, diferentemente do modelo de regressão beta, os EMV de  $\beta$  e  $\phi$  são assintoticamente independentes.

Os modelos próprios de dispersão são definidos por (1.11) e (1.12), com  $a(y_\ell, \phi) = d_1(\phi) + d_2(y_\ell)$ , em que  $d_1(\cdot)$  e  $d_2(\cdot)$  são funções conhecidas. Esta classe de modelos de regressão é bastante interessante pois possibilita a modelagem de proporções utilizando a distribuição simplex, e a modelagem de dados circulares, com a distribuição de von Mises.

Se a distribuição da variável resposta é da forma apresentada em (1.11), com  $t(\cdot, \cdot) = \gamma_\ell y_\ell - b(\gamma_\ell)$ , o MD é um modelo não linear da família exponencial. Se, adicionalmente, temos (1.12) escrito como  $g(\mu_\ell) = x_\ell^\top \beta$ , o MD se reduz ao caso dos conhecidos modelos lineares generalizados.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos e dois apêndices, da seguinte forma:

No Capítulo 2, obtemos o coeficiente de assimetria da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de modelos de regressão beta. Por meio de estudo de simulação, discutimos a aproximação normal para a distribuição do EMV dos parâmetros dos modelos. Por fim, fazemos uma aplicação em um conjunto de dados reais.

No Capítulo 3, discutimos a função geradora de cumulantes de Peers e Iqbal (1985), corrigindo-a. A função geradora de cumulantes corrigida permitirá a obtenção da matriz de covariâncias de EMV até ordem  $n^{-2}$ , em modelos de regressão lineares e não lineares. Reescrevemos a expressão de forma que ela possa ser utilizada para os estimadores corrigidos pelo viés de ordem  $n^{-1}$  e não corrigidos.

No Capítulo 4, obtemos a matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés nos modelos de dispersão. Com o auxílio da matriz obtida e do estimador corrigido pelo viés, propomos três modificações no teste de Wald.

No Capítulo 5, obtemos a matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés no modelo de regressão beta linear homocedástico.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos algumas considerações finais.

Apresentamos, nos Apêndices A e B, os cumulantes, respectivamente, dos modelos de dispersão e dos modelos de regressão beta.



## Capítulo 2

# Coeficiente de assimetria nos modelos de regressão beta

Neste capítulo, utilizando o resultado de [Patriota e Cordeiro \(2011\)](#), obtemos uma expressão matricial simples de ordem  $n^{-1/2}$ , em que  $n$  é tamanho da amostra, para o coeficiente de assimetria da distribuição do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros no modelo de regressão beta não linear heterocedástico. O resultado obtido é de fácil implementação, pois envolve somente operações matriciais. Realizamos um estudo de simulação para avaliar a assimetria da distribuição do EMV dos parâmetros no MBNH, definido em (1.2). Por fim, fazemos uma aplicação do resultado obtido a um conjunto de dados reais.

### 2.1 Introdução

Como discutido anteriormente, o resultado (1.6) é assintótico, sendo que inferências sobre  $\theta$ , quando o tamanho amostral é pequeno, podem não ser adequadas. Uma forma de verificar, em amostras finitas, se a distribuição do EMV está próxima da distribuição normal, é calcular o seu coeficiente de assimetria. Assim, um valor distante do zero nos dá indícios de que a distribuição do EMV está afastada da distribuição normal.

A utilização do coeficiente de assimetria para verificar a aproximação pela distribuição normal não é algo incomum na literatura estatística. Podemos citar como exemplo, o teste proposto por [Jarque e Bera \(1987\)](#). O coeficiente de assimetria mais conhecido é o terceiro cumulante padronizado de Pearson definido por  $\gamma = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$ , em que  $\kappa_r$  é o  $r$ -ésimo cumulante da distribuição. Quando  $\gamma > 0$  ( $\gamma < 0$ ) a distribuição é positivamente (negativamente) assimétrica e terá uma cauda longa (curta) à direita e curta (longa) à esquerda. Se a distribuição é simétrica  $\gamma = 0$ . Contudo  $\gamma = 0$  não implica que a distribuição é simétrica, pois existem distribuições assimétricas cujos respectivos momentos centrais ímpares são nulos (um exemplo deste tipo de distribuição pode ser visto em [Kendall e Stuart, 1977](#), Exercício 3.26). Por isso o valor de  $\gamma$  deve ser interpretado com um certo cuidado.

[Bowman e Shenton \(1998\)](#) expandiram o terceiro momento central da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança até ordem  $n^{-2}$  e, com esta expansão, obtiveram o coeficiente de assimetria até ordem  $n^{-1/2}$ ,  $\gamma_1$ , da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança. O objetivo deste capítulo é obter o coeficiente  $\gamma_1$  para o MBNH.

## 2.2 Coeficiente de assimetria

As derivadas do logaritmo da função de verossimilhança com respeito ao parâmetro desconhecido  $\theta$  no MBNH são indicadas por

$$U_r = \partial l(\theta)/\partial \theta_r, \quad U_{Rs} = \partial^2 l(\theta)/\partial \theta_R \partial \theta_s, \quad U_{rsT} = \partial^3 l(\theta)/\partial \theta_r \partial \theta_s \partial \theta_T,$$

em que os índices em minúsculo  $r, s, t$  servem para denotar os componentes do vetor  $\beta$  e os índices em maiúsculo  $R, S$  e  $T$  denotam os componentes do vetor  $\lambda$ . Temos, por exemplo,  $U_r = \partial l(\theta)/\partial \theta_r = \partial l(\theta)/\partial \beta_r$  e  $U_R = \partial l(\theta)/\partial \theta_R = \partial l(\theta)/\partial \lambda_R$ ,  $r, s, t = 1, \dots, k_1$  e  $R, S, T = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ .

Utilizamos a notação introduzida por Lawley (1956) para definir os cumulantes conjuntos, e as respectivas derivadas, do logaritmo da função de verossimilhança:

$$\kappa_{Rs} = \mathbb{E}(U_{Rs}), \quad \kappa_{rSt} = \mathbb{E}(U_{rSt}), \quad \kappa_{r,sT} = \mathbb{E}(U_r U_{sT}), \quad \kappa_{St}^{(R)} = \partial \kappa_{St} / \partial \theta_R.$$

Todos os  $\kappa$ 's referem-se a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem  $n$ . A matriz de informação de Fisher,  $K_{\theta,\theta}$ , tem elementos  $\kappa_{r,s} = -\kappa_{rs}$ ,  $\kappa_{r,S} = -\kappa_{rS}$  e  $\kappa_{R,S} = -\kappa_{RS}$ . Considere, também,  $\kappa^{r,s} = -\kappa^{rs}$ ,  $\kappa^{r,S} = -\kappa^{rS}$  e  $\kappa^{R,S} = -\kappa^{RS}$  como os correspondentes elementos de sua inversa,  $K_{\theta,\theta}^{-1}$ .

Usando expansão em série de Taylor, Bowman e Shenton (1998) encontraram uma aproximação de ordem  $\mathcal{O}(n^{-2})$  para o terceiro momento central,  $\kappa_3(\hat{\theta}_a) = \mathbb{E}[\{\hat{\theta}_a - \mathbb{E}[\hat{\theta}_a]\}^3]$ , do EMV de  $\theta_a$  ( $\hat{\theta}_a$ ) que, por identidades de Bartlett, pode ser escrita como

$$\kappa_3(\hat{\theta}_a) = \sum_{b,c,d=1}^{k_1+k_2} \kappa^{a,b} \kappa^{a,c} \kappa^{a,d} m_{bc}^{(d)}, \quad (2.1)$$

em que  $a$  é um valor fixado, pertencente ao conjunto  $\{1, \dots, k_1, k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2\}$  e  $m_{bc}^{(d)} = 5\kappa_{bc}^{(d)} - (\kappa_{cd}^{(b)} + \kappa_{bd}^{(c)} + \kappa_{bcd})$ . Observe que, para  $a = 1, \dots, k_1$ ,  $\hat{\theta}_a = \hat{\beta}_a$  e para  $a = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ ,  $\hat{\theta}_a = \hat{\lambda}_a$ . O terceiro cumulante padronizado  $\gamma_1(\hat{\theta}_a)$  é de ordem  $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ , pois as quantidades  $\kappa_3(\hat{\theta}_a)$  e  $(\kappa^{a,a})^{3/2}$  são de ordem  $\mathcal{O}(n^{-2})$  e  $\mathcal{O}(n^{-3/2})$ , respectivamente.

Patriota e Cordeiro (2011), com o objetivo de tornar a implementação de (2.1) computacionalmente mais rápida, encontraram a seguinte forma matricial:

$$\kappa_3(\hat{\theta}) = Q(K_{\theta,\theta}^{-1}) (Q(K_{\theta,\theta}^{-1}) \otimes I_{k_1+k_2}) \text{vec}(M^\top K_{\theta,\theta}^{-1}), \quad (2.2)$$

em que  $I_{k_1+k_2}$  é a matriz identidade de ordem  $k_1 + k_2$ ,  $Q(K_{\theta,\theta}^{-1})$  é uma matriz blocodiagonal de dimensão  $(k_1 + k_2) \times (k_1 + k_2)^2$ , dada por

$$Q(K_{\theta,\theta}^{-1}) = \begin{pmatrix} e_1^\top & \mathbf{0}^\top & \dots & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0}^\top & e_2^\top & \dots & \mathbf{0}^\top \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \dots & e_{k_1+k_2}^\top \end{pmatrix},$$

sendo  $e_j$  um vetor de dimensão  $k_1 + k_2$ , dado pela  $j$ -ésima coluna de  $K_{\theta,\theta}^{-1}$  e  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo de dimensão  $(k_1 + k_2)$ ,  $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(k_1)}, M^{(k_1+1)}, \dots, M^{(k_1+k_2)})$  é uma matriz de dimensão  $(k_1 + k_2) \times (k_1 + k_2)^2$ , tal que

$$M^{(t)} = \begin{pmatrix} M_{rs}^{(t)} & M_{rS}^{(t)} \\ M_{rS}^{(t)\top} & M_{RS}^{(t)} \end{pmatrix} \text{ e } M^{(T)} = \begin{pmatrix} M_{rs}^{(T)} & M_{rS}^{(T)} \\ M_{rS}^{(T)\top} & M_{RS}^{(T)} \end{pmatrix},$$

em que, sem perda de generalidade, o  $(r, S)$ -ésimo elemento da matriz  $M_{rS}^{(t)}$  é dado por  $m_{rS}^{(t)}$ ,  $r, s, t = 1, \dots, k_1$ ,  $R, S, T = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ , o símbolo “ $\otimes$ ” indica o produto de Kronecker e  $\text{vec}(\cdot)$  é o operador que transforma uma matriz em um vetor colocando a segunda coluna da matriz logo abaixo da primeira, a terceira logo abaixo da segunda e assim sucessivamente. Note que, mesmo envolvendo o produto de Kronecker, a expressão (2.2) é função somente de matrizes esparsas e simétricas, o que torna o tempo computacional mais rápido.

A partir de (2.2) podemos escrever o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição do vetor  $\hat{\theta}$  como

$$\gamma_1(\theta) = \left\{ Q(K_{\theta, \theta}^{-1}) \left( Q(K_{\theta, \theta}^{-1}) \otimes I_p \right) \text{vec}(M^\top K_{\theta, \theta}^{-1}) \right\}^\top \left\{ \text{diag}(K_{\theta, \theta}^{-1}) \right\}^{-3/2}. \quad (2.3)$$

Para se obter o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição do EMV no modelo de regressão beta não linear heterocedástico é necessário somente obter a matriz  $M$  da expressão (2.3), isto é, temos que calcular  $m_{rs}^{(t)}, \dots, m_{RS}^{(T)}$ . Utilizando os cumulantes que estão apresentados no apêndice de Simas *et al.* (2010a), temos

$$m_{rs}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{1\ell}(r, s, t)_\ell + h_{1\ell}\{(rs, t)_\ell - 2(r, st)_\ell\}, \quad m_{rs}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{1\ell}(r, s, T)_\ell - h_{2\ell}(rs, T)_\ell, \quad (2.4)$$

$$m_{rS}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{2\ell}(r, S, t)_\ell + h_{2\ell}(rt, S)_\ell, \quad m_{rS}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{2\ell}(r, S, T)_\ell + h_{2\ell}(r, ST)_\ell, \quad (2.5)$$

$$m_{RS}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{3\ell}(R, S, t)_\ell - h_{2\ell}(RS, t)_\ell, \quad m_{RS}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{3\ell}(R, S, T)_\ell + h_{3\ell}\{(RS, T)_\ell - 2(R, ST)_\ell\}, \quad (2.6)$$

em que

$$(r)_\ell = \partial\eta_{1\ell}/\partial\beta_r, \quad (r, S)_\ell = \partial\eta_{1\ell}/\partial\beta_r \partial\eta_{2\ell}/\partial\lambda_S, \quad (r, ST)_\ell = \partial\eta_{1\ell}/\partial\beta_r \partial^2\eta_{2\ell}/\partial\lambda_S\partial\lambda_T,$$

$$f_{1\ell} = \phi_\ell^2 \{ 2\phi_\ell c_\ell (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})^3 - 3a_\ell (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d^2\mu_\ell/d\eta_{1\ell}^2) \}, \quad (2.7)$$

$$f_{2\ell} = 2\phi_\ell \{ \mu_\ell \phi_\ell c_\ell - \phi_\ell \psi''((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) \} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})^2 (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}) - 3\phi_\ell \{ \mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) \} (d^2\mu_\ell/d\eta_{1\ell}^2) (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}), \quad (2.8)$$

$$f_{3\ell} = 2\{-3\mu_\ell a_\ell + \phi_\ell d_\ell + 3\psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)\} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})^2 + 3\phi_\ell \{ \mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) \} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d^2\phi_\ell/d\eta_{2\ell}^2), \quad (2.9)$$

$$g_{1\ell} = 2\phi_\ell \{ \mu_\ell \phi_\ell c_\ell - \phi_\ell \psi''((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) - 3a_\ell \} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})^2 (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}) + 3\phi_\ell \{ \mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) \} (d^2\mu_\ell/d\eta_{1\ell}^2) (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}), \quad (2.10)$$

$$g_{2\ell} = 2\phi_\ell d_\ell (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})^2 - 3\phi_\ell \{ \mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) \} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d^2\phi_\ell/d\eta_{2\ell}^2), \quad (2.11)$$

$$g_{3\ell} = 2e_\ell (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})^3 - 3b_\ell (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}) (d^2\phi_\ell/d\eta_{2\ell}^2), \quad (2.12)$$

$$h_{1\ell} = 3\phi_\ell^2 a_\ell (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}),$$

$$h_{2\ell} = 3\phi_\ell \{ \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) - a_\ell \mu_\ell \} (d\mu_\ell/d\eta_{1\ell}) (d\phi_\ell/d\eta_{2\ell}),$$

$$h_{3\ell} = 3b_\ell(d\phi_\ell/d\eta_{2\ell})^2,$$

$$a_\ell = \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) + \psi'(\mu_\ell\phi_\ell), \quad (2.13)$$

$$b_\ell = \psi'((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)(1 - \mu_\ell)^2 + \psi'(\mu_\ell\phi_\ell)\mu_\ell^2 - \psi'(\phi_\ell), \quad (2.14)$$

$$c_\ell = \psi''((1 - \mu_\ell)\phi_\ell) - \psi''(\mu_\ell\phi_\ell), \quad (2.15)$$

$$d_\ell = \psi''((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)(1 - \mu_\ell)^2 - \psi''(\mu_\ell\phi_\ell)\mu_\ell^2, \quad (2.16)$$

$$e_\ell = \psi''(\phi_\ell) - \psi''((1 - \mu_\ell)\phi_\ell)(1 - \mu_\ell)^3 - \psi''(\mu_\ell\phi_\ell)\mu_\ell^3. \quad (2.17)$$

De maneira geral, as expressões (2.4) a (2.6) podem ser escritas na seguinte notação matricial

$$M^{(u)} = P^\top H_{(u)}^* P + H_{(u)}^{**}, \quad u = t \text{ ou } T, \quad (2.18)$$

em que

$$H_{(t)}^* = \begin{pmatrix} F_1 \mathcal{X}_t & F_2 \mathcal{X}_t \\ \mathcal{X}_t^\top F_2 & F_3 \mathcal{X}_t \end{pmatrix} \text{ e } H_{(T)}^* = \begin{pmatrix} G_1 \mathcal{Z}_T & G_2 \mathcal{Z}_T \\ \mathcal{Z}_T^\top G_2 & G_3 \mathcal{Z}_T \end{pmatrix},$$

$$H_{(t)}^{**} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_t^* - 2\mathcal{X}_t^{**} & W_t^{**} \\ W_t^{**\top} & -W_t^* \end{pmatrix} \text{ e } H_{(T)}^{**} = \begin{pmatrix} -W_T^* & W_T^{**} \\ W_T^{**\top} & \mathcal{Z}_T^* - 2\mathcal{Z}_T^{**} \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \text{diag}(f_{1\ell}), \quad F_2 = \text{diag}(f_{2\ell}), \quad F_3 = \text{diag}(f_{3\ell}), \quad (2.19)$$

$$G_1 = \text{diag}(g_{1\ell}), \quad G_2 = \text{diag}(g_{2\ell}), \quad G_3 = \text{diag}(g_{3\ell}), \quad (2.20)$$

$\mathbf{1}_n^\top = (1, \dots, 1)$ ,  $\mathcal{X}_t = \text{diag}(\tilde{x}_t)$ , sendo  $\tilde{x}_t^\top = (\tilde{x}_{1t}, \dots, \tilde{x}_{nt})$ , a  $t$ -ésima coluna da matriz  $\mathcal{X}$ ,

$\mathcal{Z}_T = \text{diag}(\tilde{z}_T)$ , sendo  $\tilde{z}_T^\top = (\tilde{z}_{1T}, \dots, \tilde{z}_{nT})$ , a  $T$ -ésima coluna da matriz  $\mathcal{Z}$ ,

$\mathcal{X}_t^* = \{\tilde{x}_{t,rs}^*\}$ ,  $\tilde{x}_{t,rs}^* = \tilde{x}_t^\top H_1 \tilde{x}_{rs}$ ,  $H_1 = \text{diag}(h_{1\ell})$ ,  $\tilde{x}_{rs}^\top = (\partial^2 \eta_{11} / \partial \beta_r \partial \beta_s, \dots, \partial^2 \eta_{1n} / \partial \beta_r \partial \beta_s)$ ,

$\mathcal{X}_t^{**} = \{\tilde{x}_{t,rs}^{**}\}$ ,  $\tilde{x}_{t,rs}^{**} = \tilde{x}_r^\top H_1 \tilde{x}_{st}$ ,

$\mathcal{Z}_T^* = \{\tilde{z}_{T,RS}^*\}$ ,  $\tilde{z}_{T,RS}^* = \tilde{z}_T^\top H_3 \tilde{z}_{RS}$ ,  $H_3 = \text{diag}(h_{3\ell})$ ,  $\tilde{z}_{RS}^\top = (\partial^2 \eta_{21} / \partial \lambda_R \partial \lambda_S, \dots, \partial^2 \eta_{2n} / \partial \lambda_R \partial \lambda_S)$ ,

$\mathcal{Z}_T^{**} = \{\tilde{z}_{T,RS}^{**}\}$ ,  $\tilde{z}_{T,RS}^{**} = \tilde{z}_R^\top H_3 \tilde{z}_{ST}$ ,

$W_t^* = \{w_{t,RS}^*\}$ ,  $w_{t,RS}^* = \tilde{x}_t^\top H_2 \tilde{z}_{RS}$ ,  $W_t^{**} = \{w_{t,rs}^{**}\}$ ,  $w_{t,rs}^{**} = \tilde{z}_S^\top H_2 \tilde{x}_{rt}$ ,

$W_T^* = \{w_{T,rs}^*\}$ ,  $w_{T,rs}^* = \tilde{z}_T^\top H_2 \tilde{x}_{rs}$ ,  $W_T^{**} = \{w_{T,RS}^{**}\}$ ,  $w_{T,RS}^{**} = \tilde{x}_r^\top H_2 \tilde{z}_{ST}$ .

Portanto, o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança do modelo de regressão beta heterocedástico é dado pela expressão (2.3), em que  $K_{\theta,\theta}$  e  $M$  são dados, respectivamente, por (1.5) e (2.18).

## 2.3 Casos especiais

### 2.3.1 Modelo de regressão beta linear heterocedástico

No modelo de regressão beta linear heterocedástico, as expressões  $m_{rs}^{(t)}, \dots, m_{RS}^{(T)}$  são dadas por

$$m_{rs}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{1\ell}(r, s, t)_\ell, \quad m_{rs}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{1\ell}(r, s, T)_\ell, \quad (2.21)$$



$$m_{rS}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{2\ell}(r, S, t)_\ell, \quad m_{rS}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{2\ell}(r, S, T)_\ell, \quad (2.22)$$

$$m_{RS}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{3\ell}(R, S, t)_\ell, \quad m_{RS}^{(T)} = \sum_{\ell=1}^n g_{3\ell}(R, S, T)_\ell, \quad (2.23)$$

em que  $f_{1\ell}$  a  $f_{3\ell}$  estão dadas, respectivamente, em (2.7) a (2.9) e  $g_{1\ell}$  a  $g_{3\ell}$  estão dadas, respectivamente, em (2.10) a (2.12).

Em notação matricial, as expressões (2.21) a (2.23) são dadas por

$$M^{(u)} = P^\top H_{(u)}^* P, \quad u = t \text{ ou } T, \quad (2.24)$$

em que

$$H_{(t)}^* = \begin{pmatrix} F_1 X_t & F_2 X_t \\ X_t^\top F_2 & F_3 X_t \end{pmatrix} \text{ e } H_{(T)}^* = \begin{pmatrix} G_1 Z_T & G_2 Z_T \\ Z_T^\top G_2 & G_3 Z_T \end{pmatrix},$$

$F_1$  a  $F_3$  são dadas em (2.19),  $G_1$  a  $G_3$  são dadas em (2.20),  $X_t = \text{diag}(x_t)$  e  $Z_T = \text{diag}(z_T)$ .

### 2.3.2 Modelo de regressão beta homocedástico

No modelo de regressão beta homocedástico com transformação no parâmetro de precisão, a matriz  $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(k)}, M^{(\alpha)})$  passa a ter dimensão  $(k_1 + 1) \times (k_1 + 1)^2$ , com

$$M^{(t)} = \begin{pmatrix} M_{rs}^{(t)} & M_{r\lambda}^{(t)} \\ M_{r\lambda}^{(t)\top} & M_{\lambda\lambda}^{(t)} \end{pmatrix} \text{ e } M^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} M_{rs}^{(\lambda)} & M_{r\lambda}^{(\lambda)} \\ M_{r\lambda}^{(\lambda)\top} & M_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} \end{pmatrix},$$

sendo que, sem perda de generalidade, o  $(r, s)$ -ésimo elemento da matriz  $M_{rs}^{(\lambda)}$  é dado por  $m_{rs}^{(\lambda)}$ ,  $r, s, t = 1, \dots, k_1$ . Os respectivos elementos  $m_{rs}^{(t)}, \dots, m_{\lambda\lambda}^{(\lambda)}$  são dados por

$$m_{rs}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{1\ell}^* x_{lr} x_{ls} x_{t\ell}, \quad m_{rs}^{(\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n g_{1\ell}^* x_{lr} x_{ls}, \quad (2.25)$$

$$m_{r\lambda}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{2\ell}^* x_{lr} x_{t\ell}, \quad m_{r\lambda}^{(\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n g_{2\ell}^* x_{lr}, \quad (2.26)$$

$$m_{\lambda\lambda}^{(t)} = \sum_{\ell=1}^n f_{3\ell}^* x_{t\ell}, \quad m_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n g_{3\ell}^*, \quad (2.27)$$

em que

$$f_{1\ell}^* = \phi^2 \{ 2\phi c_\ell (d\mu_\ell / d\eta_{1\ell})^3 - 3a_\ell (d\mu_\ell / d\eta_{1\ell}) (d^2 \mu_\ell / d\eta_{1\ell}^2) \},$$

$$f_{2\ell}^* = 2\phi \{ \mu_\ell \phi c_\ell - \phi \psi''((1 - \mu_\ell)\phi) \} (d\mu_\ell / d\eta_{1\ell})^2 (d\phi / d\lambda) - 3\phi \{ \mu_\ell a_\ell - \psi'((1 - \mu_\ell)\phi) \} (d^2 \mu_\ell / d\eta_{1\ell}^2) (d\phi / d\lambda),$$

$$\begin{aligned}
f_{3\ell}^* &= 2\{-3\mu_\ell a_\ell + \phi d_\ell + 3\psi'((1-\mu_\ell)\phi)\}(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})(d\phi/d\lambda)^2 \\
&\quad + 3\phi\{\mu_\ell a_\ell - \psi'((1-\mu_\ell)\phi)\}(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})(d^2\phi/d\lambda^2), \\
g_{1\ell}^* &= 2\phi\{\mu_\ell \phi c_\ell - \phi\psi''((1-\mu_\ell)\phi) - 3a_\ell\}(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})^2(d\phi/d\lambda) \\
&\quad + 3\phi\{\mu_\ell a_\ell - \psi'((1-\mu_\ell)\phi)\}(d^2\mu_\ell/d\eta_{1\ell}^2)(d\phi/d\lambda), \\
g_{2\ell}^* &= 2\phi d_\ell(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})(d\phi/d\lambda)^2 - 3\phi\{\mu_\ell a_\ell - \psi'((1-\mu_\ell)\phi)\}(d\mu_\ell/d\eta_{1\ell})(d^2\phi/d\lambda^2), \\
g_{3\ell}^* &= 2e_\ell(d\phi/d\lambda)^3 - 3b_\ell(d\phi/d\lambda)(d^2\phi/d\lambda^2), \\
a_\ell &= \psi'((1-\mu_\ell)\phi) + \psi'(\mu_\ell\phi), \\
b_\ell &= \psi'((1-\mu_\ell)\phi)(1-\mu_\ell)^2 + \psi'(\mu_\ell\phi)\mu_\ell^2 - \psi'(\phi), \\
c_\ell &= \psi''((1-\mu_\ell)\phi) - \psi''(\mu_\ell\phi), \\
d_\ell &= \psi''((1-\mu_\ell)\phi)(1-\mu_\ell)^2 - \psi''(\mu_\ell\phi)\mu_\ell^2, \\
e_\ell &= \psi''(\phi) - \psi''((1-\mu_\ell)\phi)(1-\mu_\ell)^3 - \psi''(\mu_\ell\phi)\mu_\ell^3.
\end{aligned}$$

Escrevendo as expressões (2.25) a (2.27) em notação matricial, temos:

$$M^{(u)} = P^\top H_2^{(u)} P, \quad u = t \text{ ou } \lambda, \quad (2.28)$$

em que

$$H_2^{(t)} = \begin{pmatrix} F_1 X_t & F_2 x_t \\ x_t^\top F_2 & f_3^\top x_t \end{pmatrix} \text{ e } H_2^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} G_1 & g_2 \\ g_2^\top & g_3^\top \mathbf{1}_n \end{pmatrix},$$

$$F_1^* = \text{diag}(f_{1\ell}^*), \quad F_2^* = \text{diag}(f_{2\ell}^*), \quad f_3^{*\top} = (f_{31}^*, \dots, f_{3n}^*), \quad G_1^* = \text{diag}(g_{1\ell}^*), \quad g_2^{*\top} = (g_{21}^*, \dots, g_{2n}^*), \quad g_3^{*\top} = (g_{31}^*, \dots, g_{3n}^*).$$

A expressão (2.28), necessária para obtenção do coeficiente de assimetria da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança no modelo de regressão beta homocedástico, está publicada em Magalhães *et al.* (2013).

## 2.4 Resultados numéricos

Nos dois estudos de simulação que seguem, utilizamos o método de Monte Carlo para comparar o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  com o coeficiente de assimetria amostral, definido pela razão de momentos amostrais.

No primeiro estudo, simulamos um modelo de regressão beta linear homocedástico com ligação logito e componente sistemática dada por  $\eta_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, n$ . Os valores verdadeiros para os parâmetros foram fixados em  $\beta_1 = 1, 5$ ,  $\beta_2 = 1, 8$ ,  $\phi = 10$  e  $25$ . Consideramos  $\lambda = \phi$ ,  $\lambda = \sqrt{\phi}$ ,  $\lambda = (1 + \phi)^{-1}$  e  $\lambda = \log \phi$ . No segundo estudo, definimos um modelo de regressão beta linear heterocedástico, com função de ligação logito para a média e ligação log para a precisão, ou seja,  $\eta_{1\ell} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell}$ ,  $\eta_{2\ell} = \lambda_1 + \lambda_2 z_{2\ell}$ . Os valores verdadeiros para  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os mesmos do primeiro estudo. Além disso, adotamos  $\lambda_1 = 1, 5$  e  $\lambda_2 = 2$ . A covariável  $x_2$  foi obtida de uma distribuição uniforme  $(0, 1)$ , sendo que nesta simulação  $x_{2\ell} = z_{2\ell}$ . Para cada  $n$ ,  $n = 10, 20, 40, 80$ , os valores de  $x_2$  e  $z_2$  foram mantidos constantes em todas as réplicas do modelo gerado.

O número total de réplicas foi 10.000. As simulações foram feitas utilizando o *software* Ox (Doornik, 2006). Em cada uma das réplicas o modelo foi ajustado e calculados, o EMV  $\hat{\theta}_j^\top =$

$(\hat{\beta}_{1j}, \hat{\beta}_{2j}, \hat{\lambda}_j)$ , no primeiro estudo,  $\hat{\theta}_j^\top = (\hat{\beta}_{1j}, \hat{\beta}_{2j}, \hat{\lambda}_{1j}, \hat{\lambda}_{2j})$  no segundo e o coeficiente  $\gamma_{1j} = \kappa_3(\hat{\theta}_j)/\kappa_2(\hat{\theta}_j)^{3/2}$ ,  $j = 1, \dots, 10.000$ . O coeficiente de assimetria amostral é definido por  $\rho = m_3/m_2^{3/2}$ , em que  $m_k = N^{-1} \sum_{j=1}^N (\hat{\theta}_j - \bar{\theta})^k$  para  $k = 2, 3$  e  $\bar{\theta} = N^{-1} \sum_{j=1}^N \hat{\theta}_j$  e  $N$  é número de réplicas, no caso,  $N = 10.000$ .

**Tabela 2.1:** Coeficiente de assimetria amostral e de ordem  $n^{-1/2}$  no MBL, com  $\lambda = \phi$ .

		$\phi = 10$			$\phi = 25$		
	$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$
$\rho$	10	0,119	0,158	4,849	0,077	0,151	3,722
$\gamma_1$		0,151	-0,014	1,889	0,068	0,078	1,800
$\rho$	20	0,072	0,115	1,772	0,095	0,071	1,614
$\gamma_1$		0,113	0,045	1,365	0,094	0,039	1,275
$\rho$	40	0,126	0,031	1,056	0,083	0,045	0,986
$\gamma_1$		0,089	0,033	0,952	0,070	0,032	0,900
$\rho$	80	0,034	0,044	0,762	0,076	0,020	0,667
$\gamma_1$		0,061	0,027	0,678	0,049	0,027	0,637

**Tabela 2.2:** Coeficiente de assimetria amostral e de ordem  $n^{-1/2}$  no MBL, com  $\lambda = \sqrt{\phi}$ .

		$\phi = 10$			$\phi = 25$		
	$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$
$\rho$	10	0,119	0,158	-1,381	0,077	0,151	1,300
$\gamma_1$		0,151	-0,014	1,054	0,068	0,078	1,109
$\rho$	20	0,072	0,115	-2,705	0,095	0,071	0,876
$\gamma_1$		0,113	0,045	0,813	0,094	0,039	0,784
$\rho$	40	0,126	0,031	-2,072	0,083	0,045	0,574
$\gamma_1$		0,089	0,033	0,583	0,070	0,032	0,554
$\rho$	80	0,034	0,044	0,461	0,076	0,020	0,403
$\gamma_1$		0,061	0,027	0,416	0,049	0,027	0,392

**Tabela 2.3:** Coeficiente de assimetria amostral e de ordem  $n^{-1/2}$  no MBL, com  $\lambda = (1 + \phi)^{-1}$ .

		$\phi = 10$			$\phi = 25$		
	$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$
$\rho$	10	0,119	0,158	0,814	0,077	0,151	0,968
$\gamma_1$		0,151	-0,014	0,820	0,068	0,078	0,873
$\rho$	20	0,072	0,115	0,620	0,095	0,071	0,652
$\gamma_1$		0,113	0,045	0,582	0,094	0,039	0,624
$\rho$	40	0,126	0,031	0,399	0,083	0,045	0,435
$\gamma_1$		0,089	0,033	0,392	0,070	0,032	0,431
$\rho$	80	0,034	0,044	0,274	0,076	0,020	0,306
$\gamma_1$		0,061	0,027	0,277	0,049	0,027	0,306

Pelas Tabelas 2.1 a 2.4, podemos fazer três comentários gerais: primeiro, à medida que o tamanho da amostra aumenta, o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição do EMV de  $\theta$  decresce, em acordo com a teoria assintótica; segundo, a diferença entre os valores dos coeficientes de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  e amostral é maior para tamanhos amostrais pequenos, por exemplo,  $n = 10$  e  $20$ ; e, terceiro, de maneira geral, a distribuição do parâmetro de precisão é consideravelmente assimétrica. Além disso, parece que, para um mesmo modelo, um parâmetro de precisão maior implica na diminuição do grau de assimetria da distribuição dos estimadores. A utilização de

**Tabela 2.4:** Coeficiente de assimetria amostral e de ordem  $n^{-1/2}$  no MBL, com  $\lambda = \log \phi$ .

		$\phi = 10$			$\phi = 25$		
	$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda$
$\rho$	10	0,119	0,158	0,514	0,077	0,151	0,429
$\gamma_1$		0,151	-0,014	0,428	0,068	0,078	0,421
$\rho$	20	0,072	0,115	0,317	0,095	0,071	0,292
$\gamma_1$		0,113	0,045	0,305	0,094	0,039	0,292
$\rho$	40	0,126	0,031	0,213	0,083	0,045	0,204
$\gamma_1$		0,089	0,033	0,217	0,070	0,032	0,209
$\rho$	80	0,034	0,044	0,176	0,076	0,020	0,150
$\gamma_1$		0,061	0,027	0,154	0,049	0,027	0,147

transformações no parâmetro de precisão interfere somente na distribuição dos estimadores de  $\alpha$  e podemos notar que o coeficiente de assimetria da distribuição de  $\hat{\lambda}$  foi menor nos modelos em que o parâmetro de precisão foi transformado. A transformação logarítmica parece ser a transformação mais interessante, uma vez que foi ela que deixou a distribuição de  $\hat{\alpha}$  menos assimétrica.

**Tabela 2.5:** Coeficiente de assimetria amostral e de ordem  $n^{-1/2}$  do MBLH.

	$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
$\rho$	10	0,394	-0,137	1,259	-0,780
$\gamma_1$		0,366	-0,113	0,701	-0,205
$\rho$	20	0,283	-0,085	0,563	-0,217
$\gamma_1$		0,294	-0,098	0,484	-0,139
$\rho$	40	0,213	-0,061	0,322	-0,114
$\gamma_1$		0,209	-0,066	0,331	-0,101
$\rho$	80	0,195	-0,082	0,223	-0,070
$\gamma_1$		0,158	-0,055	0,246	-0,081

Assim como anteriormente, a Tabela 2.5 nos permite fazer três observações: à medida que o tamanho da amostra aumenta, o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição do EMV  $\hat{\theta}$  decresce; a diferença entre os valores dos coeficientes de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  e amostral é maior para tamanhos amostrais pequenos; e, a distribuição dos estimadores para tamanho de amostras pequenos parece ser um pouco assimétrica. Entre os parâmetros que modelam a precisão, a distribuição de  $\alpha_1$  parece ser assimétrica mesmo para tamanhos de amostras grandes. A distribuição do estimador de  $\alpha_2$  parece se tornar menos assimétrica a partir de um tamanho de amostra maior que 20.

## 2.5 Aplicação

Como exemplo de aplicação, iremos utilizar o banco de dados apresentado em Prater (1956), cujo interesse é modelar a proporção de óleo cru convertido em gasolina depois da destilação e fracionamento. Este conjunto de dados foi bastante utilizado em trabalhos referentes ao modelo de regressão beta, como por exemplo, os trabalhos de Ferrari e Cribari-Neto (2004) e Simas *et al.* (2010a).

Nos dados de gasolina de Prater, a variável resposta ( $y$ ) é a proporção de óleo cru que é convertido em gasolina após a destilação e fragmentação; as potenciais covariáveis são: os tipos de petróleo (10 tipos) e a temperatura (graus F) em que toda gasolina é vaporizada. O conjunto de dados contém 32 observações da variável resposta e das covariáveis.

Para a resposta média, utilizamos um intercepto ( $x_1 = 1$ ), nove variáveis *dummy* para os nove primeiros tipos de petróleo ( $x_2, \dots, x_{10}$ ) e uma covariável que mede a temperatura em que toda a gasolina é vaporizada ( $x_{11}$ ). A função de ligação logito foi utilizada para relacionar a média da variável resposta com o preditor linear, isto é,

$$\eta_{1\ell} = \log \frac{\mu_\ell}{1 - \mu_\ell} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell} + \dots + \beta_{11} x_{11\ell}.$$

Assumimos que as observações ( $y_1, \dots, y_{32}$ ) são independentes com distribuição beta com média  $\mu_\ell$  e utilizamos a transformação logarítmica para o parâmetro de precisão  $\phi$ ,  $\ell = 1, \dots, 32$ .

Apresentamos na Tabela 2.6 as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\beta_1$  a  $\beta_{11}$  e  $\alpha$ , assim como suas assimetrias estimadas. Essa tabela mostra que as assimetrias estimadas para as distribuições dos EMV de  $\hat{\beta}_0$  a  $\hat{\beta}_{10}$  são pequenas, indicando que a aproximação pela distribuição normal está adequada. Por outro lado, para  $\hat{\lambda}$ , o valor do coeficiente de assimetria estimado indica alguma fuga da simetria.

**Tabela 2.6:** Estimativas dos parâmetros e dos coeficientes de assimetria no conjunto de dados de *Prater (1956)*.

Parâmetro	Estimativa	$\hat{\gamma}_1$
$\beta_1$	-6,160	-0,019
$\beta_2$	1,728	0,027
$\beta_3$	1,323	0,007
$\beta_4$	1,572	0,011
$\beta_5$	1,060	0,022
$\beta_6$	1,134	0,020
$\beta_7$	1,040	0,016
$\beta_8$	0,543	0,010
$\beta_9$	0,496	0,010
$\beta_{10}$	0,386	-0,003
$\beta_{11}$	0,011	0,017
$\log(\phi)$	6,087	0,250

Para ilustrar a aplicação do coeficiente de ordem  $n^{-1/2}$  no modelo de regressão beta heterocedástico, utilizaremos o banco de dados disponível em [Brownlee \(1965, p. 452\)](#). A variável resposta ( $Y$ ) é porcentagem de amônia que não oxidou em um processo de produção de ácido nítrico. As covariáveis são: a taxa de operação do processo ( $X_2$ ), a temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) da água utilizada no resfriamento ( $X_3$ ) e a terceira covariável é concentração do ácido ( $X_4$ ), além do intercepto ( $X_1 = 1$ ), em um total de 21 observações. Assumindo que as amostras são independentes e seguem uma distribuição beta de parâmetros  $\mu_\ell$  e  $\phi_\ell$ , o modelo final ajustado foi

$$\eta_{1\ell} = \log \frac{\mu_\ell}{1 - \mu_\ell} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell},$$

$$\eta_{2\ell} = \log \phi_\ell = \lambda_1 + \lambda_2 x_{2\ell},$$

isto é, para a resposta média, utilizamos um intercepto e as covariáveis  $X_2$  e  $X_3$ , com função de ligação logito e para a dispersão, utilizamos somente o intercepto e a covariável  $X_2$ , com função de ligação log.

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\beta_1$  a  $\beta_3$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , com as respectivos coeficiente de assimetria estimados estão apresentados na Tabela 2.7.

**Tabela 2.7:** *Estimativas dos parâmetros e dos coeficientes de assimetria no conjunto de dados de [Brownlee \(1965\)](#).*

Parâmetro	Estimativa	$\hat{\gamma}_1$
$\beta_1$	-8,671	0,030
$\beta_2$	0,058	-0,027
$\beta_3$	0,051	0,007
$\lambda_1$	21,070	-0,163
$\lambda_2$	-0,217	0,317

Pelos valores apresentados, o coeficiente de assimetria para os parâmetros que modelam a média estão muito próximos de zero, enquanto que para os que modelam a precisão, estão ligeiramente afastados.

## 2.6 Conclusões

Os modelos de regressão beta vêm sendo bastante difundidos nos últimos anos e esforços para melhorar a inferência nesses modelos são de grande importância. Neste capítulo contribuimos com a obtenção do coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros no modelo de regressão beta heterocedástico, que pode ser utilizado como um critério de avaliação do ajuste do modelo. O coeficiente obtido tem uma expressão simples e de fácil implementação em *softwares* estatísticos como o Ox e o R ([R Core Team, 2012](#)).

## Capítulo 3

# Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés

Neste capítulo apresentamos a expressão para se obter a matriz de covariâncias de segunda ordem de um estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de primeira ordem.

Sejam  $\theta$  um vetor paramétrico qualquer, de dimensão  $q \times 1$ ,  $\hat{\theta}$  o seu estimador de máxima verossimilhança e  $d(\theta)$  o viés até ordem  $n^{-1}$  de  $\hat{\theta}$ . O EMV de  $\theta$  corrigido pelo viés até ordem  $n^{-1}$  é dado por

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - d(\hat{\theta}), \quad (3.1)$$

em que  $d(\hat{\theta})$  é o viés  $d(\theta)$  avaliado em  $\hat{\theta}$ . O  $i$ -ésimo elemento de  $\tilde{\theta}$  é dado por  $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - d_i(\hat{\theta})$ , em que  $\hat{\theta}_i$  e  $d_i(\hat{\theta})$  são, respectivamente, os  $i$ -ésimos elementos dos vetores  $\hat{\theta}$  e  $d(\hat{\theta})$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

As derivadas do logaritmo da função de verossimilhança  $l(\theta)$  com respeito ao parâmetro desconhecido  $\theta$  são indicadas por

$$U_a = \partial l(\theta) / \partial \theta_a, \quad U_{ab} = \partial^2 l(\theta) / \partial \theta_a \partial \theta_b, \quad U_{abc} = \partial^3 l(\theta) / \partial \theta_a \partial \theta_b \partial \theta_c, \quad \dots$$

em que os índices  $a, b, c$  servem para denotar os componentes do vetor  $\theta$ .

Utilizamos a notação introduzida por [Lawley \(1956\)](#) para definir os cumulantes conjuntos, e as respectivas derivadas, do logaritmo da função de verossimilhança:

$$\kappa_{ab} = \mathbb{E}(U_{ab}), \quad \kappa_{abc} = \mathbb{E}(U_{abc}), \quad \kappa_{a,bc} = \mathbb{E}(U_a U_{bc}), \quad \kappa_{bc}^{(a)} = \partial \kappa_{bc} / \partial \theta_a.$$

Todos os  $\kappa$ 's referem-se a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem  $n$ . A matriz de informação de Fisher,  $K_{\theta, \theta}$ , tem elementos  $\kappa_{a,b} = -\kappa_{ab}$ . Considere, também,  $\kappa^{a,b} = -\kappa^{ab}$  como os correspondentes elementos de sua inversa,  $K_{\theta, \theta}^{-1}$ .

De [Cordeiro et al. \(2014\)](#), a expressão do elemento  $(i, j)$  da matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigida pelo viés é dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}_2(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j) &= \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i (\hat{\theta} - \theta)_j] - d_i(\theta) d_j(\theta) \\ &+ \sum_{a=1}^q \kappa^{ia} d_a^j + \sum_{a=1}^q \kappa^{ja} d_a^i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que a diferença entre o primeiro e o segundo termos no lado direito de (3.2) é a matriz de covariâncias de segunda ordem de  $\hat{\theta}$ ,  $\sum_{a=1}^q \kappa^{ia} d_a^j = \psi_{ij}^{(1)} + \psi_{ij}^{(2)}$ , com (ver também [Pace e Salvan](#),

1997, p. 360)

$$\psi_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{a,b,c,d=1}^q \kappa^{ia} \kappa^{jb} \kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\psi_{ij}^{(2)} = - \sum_{a,b,c=1}^q \sum_{r,s,t=1}^q \kappa^{ia} \kappa^{jb} \kappa^{rs} \kappa^{ct} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left( \kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st} \right) \right\}. \quad (3.4)$$

A partir de agora, para que a notação não fique carregada, iremos omitir o símbolo  $\sum$  das expressões que seguem.

### 3.1 Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV

Para obtermos a expressão da matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do EMV  $\hat{\theta}$  precisamos primeiramente lembrar que

$$\text{Cov}_{\theta}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i (\hat{\theta} - \theta)_j] - \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i] \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_j]. \quad (3.5)$$

Na equação (9.61) de [Pace e Salvan \(1997, p. 358–359\)](#) temos a expressão de  $(\hat{\theta} - \theta)_i$  até ordem  $\mathcal{O}_p(n^{-2})$ , dada por

$$\begin{aligned} (\hat{\theta} - \theta)_i &= U^i + \frac{1}{2} \kappa_{ab}^i U^{ab} + H_a^i U^a + \frac{1}{6} \left( \kappa_{abc}^i + 3\kappa_{ad}^i \kappa_{bc}^d \right) U^{abc} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( H_{ab}^i + 2\kappa_{ad}^i H_b^d + H_d^i \kappa_{ab}^d \right) U^{ab} + H_d^i H_a^d U^a + \mathcal{O}_p(n^{-2}), \end{aligned}$$

em que  $U^i = -\kappa^{ir} U_r$ ,  $U^{ab} = U^a U^b$ ,  $H_r = U_r - \kappa_r$ ,  $H_r^i = -\kappa^{it} H_{rt}$ ,  $H_{rs}^i = -\kappa^{it} H_{rst}$ ,  $\kappa_r^i = -\kappa^{it} \kappa_{rt}$ ,  $\kappa_{rs}^i = -\kappa^{it} \kappa_{rst}$  e o símbolo  $\dot{+}$  significa que o termo que segue é assintoticamente menor que  $\mathcal{O}_p(n^{-1/2})$ .

**Tabela 3.1:** Ordem de quantidades relacionadas à verossimilhança.

Quantidade	Ordem
$U_r$	$\mathcal{O}_p(n^{1/2})$
$\kappa^{rs}$	$\mathcal{O}(n^{-1})$
$U_{r_1, \dots, r_p}$ ( $p \geq 2$ )	$\mathcal{O}_p(n)$
$\kappa_{r_1, \dots, r_p}$ ( $p \geq 2$ )	$\mathcal{O}(n)$
$\kappa_{rs,t}$	$\mathcal{O}(n)$
$H_{r_1, \dots, r_p}$	$\mathcal{O}_p(n^{1/2})$
$\mathbb{E}[U_r U_s H_{tu}]$	$\mathcal{O}(n)$
$\mathbb{E}[U_r U_s U_t H_{uv}]$	$\mathcal{O}(n^2)$

Inicialmente, multiplicamos  $(\hat{\theta} - \theta)_i$  por  $(\hat{\theta} - \theta)_j$ , desconsiderando os termos cujas ordens são menores do que  $\mathcal{O}_p(n^{-2})$  (ver Tabela 3.1). A multiplicação resulta em



$$\begin{aligned}
(\hat{\theta} - \theta)_i(\hat{\theta} - \theta)_j &= \kappa^{ia}\kappa^{jb} U_a U_b \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \{U_a H_{bc} U_d + H_{ac} U_b U_d\} \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cs}\kappa^{dt} \left\{ \frac{1}{2} U_a \kappa_{bcd} U_s U_t + \frac{1}{2} \kappa_{acd} U_b U_s U_t \right. \\
&+ \frac{1}{2} U_a H_{bcd} U_s U_t + \frac{1}{2} H_{acd} U_b U_s U_t + U_a H_{bc} H_{sd} U_t + H_{ac} U_b H_{sd} U_t \\
&+ \left. H_{ac} H_{bd} U_s U_t \right\} \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cs}\kappa^{dt}\kappa^{eu} \left\{ \frac{1}{6} U_a \kappa_{bcde} U_s U_t U_u + \frac{1}{6} \kappa_{acde} U_b U_s U_t \right. \\
&+ U_a \kappa_{bcd} U_s H_{te} U_u + \kappa_{acd} U_b U_s H_{te} U_u \\
&+ \frac{1}{2} U_a H_{bc} \kappa_{sde} U_t U_u + \frac{1}{2} H_{ac} U_b \kappa_{sde} U_t U_u \\
&+ \left. \frac{1}{2} \kappa_{acd} H_{bc} U_s U_t U_u + \frac{1}{2} H_{ac} \kappa_{bcd} U_s U_t U_u \right\} \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cs}\kappa^{dt}\kappa^{eu}\kappa^{fv} \left\{ \frac{1}{2} U_a \kappa_{bcd} U_s \kappa_{tef} U_u U_v + \frac{1}{2} \kappa_{acd} U_b U_s \kappa_{tef} U_u U_v \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4} \kappa_{acd} \kappa_{bef} U_s U_t U_u U_v \right\} + \mathcal{O}_p(n^{-5/2}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sejam as seguintes relações:

$$\mathbb{E}[U_r U_s U_t H_{uv}] = \mathcal{O}(n^2) = \kappa_{r,uv} \kappa_{st} + \kappa_{s,uv} \kappa_{rt} + \kappa_{t,uv} \kappa_{rs} + \mathcal{O}(n), \tag{3.7}$$

$$\mathbb{E}[U_r U_s U_t H_{uvw}] = \mathcal{O}(n^2) = \kappa_{r,uvw} \kappa_{st} + \kappa_{s,uvw} \kappa_{rt} + \kappa_{t,uvw} \kappa_{rs} + \mathcal{O}(n), \tag{3.8}$$

$$\mathbb{E}[U_r U_s U_t U_u] = \kappa_{rs} \kappa_{tu} + \kappa_{rt} \kappa_{su} + \kappa_{ru} \kappa_{st} + \mathcal{O}(n), \tag{3.9}$$

$$\mathbb{E}[U_r U_s H_{tu} H_{vw}] = \kappa_{r,tu} \kappa_{s,vw} + \kappa_{r,vw} \kappa_{s,tu} + \kappa_{rs} (\kappa_{tu,vw} - \kappa_{tu} \kappa_{vw}) + \mathcal{O}(n). \tag{3.10}$$

Calculando o valor esperado da expressão em (3.6) e utilizando as relações (3.7) a (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i(\hat{\theta} - \theta)_j] &= \kappa^{ij} - \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \{ \kappa_{abcd} + (1/2)\kappa_{a,bcd} + (1/2)\kappa_{acd,b} + 2\kappa_{abc,d} \\
&+ \kappa_{a,bc,d} + \kappa_{ac,b,d} + 3\kappa_{ac,bd} \} \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \{ (3/2)\kappa_{abc}\kappa_{rst} + (1/4)\kappa_{abs}\kappa_{rct} \\
&+ 2\kappa_{ab,c}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{rs,t} + (1/2)\kappa_{s,ab}\kappa_{rct} + (1/2)\kappa_{act}\kappa_{s,rb} \\
&+ (1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + (1/2)\kappa_{abc}\kappa_{r,st} + \kappa_{ab,c}\kappa_{r,st} + \kappa_{a,bc}\kappa_{rs,t} \\
&+ \kappa_{ab,s}\kappa_{rc,t} + \kappa_{ac,b}\kappa_{rs,t} \} \\
&+ \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct} \{ \kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} + \kappa_{ac,b}\kappa_{r,st} + (1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} \\
&+ (1/2)\kappa_{ac,b}\kappa_{rst} + \kappa_{abc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{r,st} \} + \mathcal{O}_p(n^{-3}).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por outro lado, da expressão (9.62) de Pace e Salvan (1997, p. 359) vem que

$$\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i] = (1/2)\kappa^{ia}\kappa^{bs}(\kappa_{abs} + 2\kappa_{ab,s}) \ddot{+} \mathcal{O}_p(n^{-2}),$$

em que o símbolo  $\ddot{+}$  significa que o termo que segue é assintoticamente menor que  $\mathcal{O}_p(n^{-1})$ .

Da multiplicação de  $\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i]$  por  $\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_j]$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_i]\mathbb{E}[(\hat{\theta} - \theta)_j] &= (1/4)\kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \{ \kappa_{abs}\kappa_{rct} + 2\kappa_{ab,s}\kappa_{rct} \\ &\quad + 2\kappa_{abs}\kappa_{rc,t} + 4\kappa_{ab,s}\kappa_{rc,t} \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente, substituindo (3.11) e (3.12) em (3.5) e simplificando os cumulantes iguais, temos que a covariância de segunda ordem entre  $\hat{\theta}_i$  e  $\hat{\theta}_j$  é dada por

$$\text{Cov}_2(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = -\kappa^{ij} + \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)} + \mathcal{O}(n^{-3}), \quad (3.13)$$

em que  $\sigma_{ij}^{(1)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(2)}$  e  $\sigma_{ij}^{(3)}$  são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= -\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \{ \kappa_{abcd} + (1/2)\kappa_{a,bcd} + (1/2)\kappa_{acd,b} + 2\kappa_{abc,d} \\ &\quad + \kappa_{a,bc,d} + \kappa_{ac,b,d} + 3\kappa_{ac,bd} \}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \kappa^{ia}\kappa^{jr}\kappa^{bs}\kappa^{ct} \{ (3/2)\kappa_{abc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{ab,c}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{rs,t} \\ &\quad + (1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} + (1/2)\kappa_{abc}\kappa_{r,st} + \kappa_{ab,c}\kappa_{r,st} + \kappa_{a,bc}\kappa_{rs,t} \\ &\quad + (1/2)\kappa_{ab,c}\kappa_{rt,s} + (1/2)\kappa_{ac,b}\kappa_{rs,t} \}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(3)} &= \kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct} \{ \kappa_{a,bc}\kappa_{r,st} + \kappa_{ac,b}\kappa_{r,st} + (1/2)\kappa_{a,bc}\kappa_{rst} \\ &\quad + (1/2)\kappa_{ac,b}\kappa_{rst} + \kappa_{abc}\kappa_{rst} + 2\kappa_{abc}\kappa_{r,st} \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

As expressões (3.14) a (3.16) são as mesmas obtidas por Shenton e Bowman (1977) mas diferem das obtidas por Peers e Iqbal (1985). Comparando a expressão de Peers e Iqbal com a de Shenton e Bowman podemos verificar que o engano dos dois primeiros autores foi causado porque estes admitiram, por exemplo, que os cumulantes  $\kappa_{a,bcd}$  e  $\kappa_{acd,b}$  eram iguais, quando nem sempre isso é verdadeiro.

Na literatura, entretanto, os trabalhos em que as matrizes de covariâncias de segunda ordem foram obtidas, basearam-se no resultado de Peers e Iqbal (1985). Podemos citar, por exemplo, os artigos de Cordeiro (2004), Cordeiro *et al.* (2006), Cordeiro e Santana (2008), Rocha *et al.* (2010) e Barroso *et al.* (2013).

Excetuando o trabalho de Cordeiro (2004), que trata dos modelos lineares generalizados com parâmetro de dispersão conhecido, nos demais, as matrizes de covariâncias obtidas são assimétricas. No caso dos MLG com parâmetro de dispersão conhecido, a matriz resultante é simétrica, pois os termos que implicam na assimetria se anulam.

### 3.1.1 Forma alternativa da matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV

Utilizando o mesmo tipo de notação apresentada na segunda linha do lado direito da equação (3.2), podemos escrever a expressão (3.13) da seguinte forma

$$\text{Cov}_2(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = -\kappa^{ij} + \kappa^{ia}\gamma_a^j + \kappa^{ja}\gamma_a^i + \mathcal{O}(n^{-3}), \quad (3.17)$$

em que  $\kappa^{ia}\gamma_a^j = \gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(3)}$  e

$$\gamma_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} \right\}, \quad (3.18)$$

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4} \kappa^{ia} \kappa^{jb} \kappa^{rs} \kappa^{ct} \left\{ \kappa_{arc} [3\kappa_{bst} + 2\kappa_{b,st} + 8\kappa_{bs,t}] + 2\kappa_{ar,c} [2\kappa_{b,st} + \kappa_{bt,s}] \right\}, \quad (3.19)$$

$$\gamma_{ij}^{(3)} = \frac{1}{2} \kappa^{ia} \kappa^{jb} \kappa^{rs} \kappa^{ct} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left( \kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st} \right) \right\}. \quad (3.20)$$

A expressão da covariância de segunda ordem do EMV na forma (3.17) é interessante pois diminui as contas pela metade e nos permite, seguindo as ideias de Cordeiro e Klein (1994) e Patriota e Cordeiro (2011), pensar em uma forma matricial alternativa, dada por

$$\text{Cov}_2(\hat{\theta}) = K_{\theta,\theta}^{-1} + K_{\theta,\theta}^{-1} \left\{ \Gamma + \Gamma^\top \right\} K_{\theta,\theta}^{-1} + \mathcal{O}(n^{-3}), \quad (3.21)$$

em que o elemento  $(a, b)$  de  $\Gamma$  é dado por  $\gamma_{ab}$ , com  $\gamma_{ab} = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\gamma_{ab}^{(2)} + \frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(3)}$  e

$$\gamma_{ab}^{(1)} = \kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} \right\}, \quad (3.22)$$

$$\gamma_{ab}^{(2)} = \kappa^{rs} \kappa^{ct} \left\{ \kappa_{arc} [3\kappa_{bst} + 2\kappa_{b,st} + 8\kappa_{bs,t}] + 2\kappa_{ar,c} [2\kappa_{b,st} + \kappa_{bt,s}] \right\}, \quad (3.23)$$

$$\gamma_{ab}^{(3)} = \kappa^{rs} \kappa^{ct} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left( \kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st} \right) \right\}. \quad (3.24)$$

### 3.1.2 Resultados numéricos

Para ilustrarmos os resultados obtidos via expressão de Peers e Iqbal (1985) e Shenton e Bowman (1977), simulamos um modelo não linear da família exponencial gama com ligação log e componente sistemática dada por  $\eta_\ell = \beta_1 x_{1\ell} + \beta_2 x_{2\ell} + x_{3\ell}^{\beta_3}$ ,  $\ell = 1, \dots, n$ . Os valores verdadeiros para os parâmetros foram fixados em  $\beta_1 = 1/2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 2$  e  $\phi = 1$ , admitimos que  $\phi$  é um parâmetro conhecido ou que pode ser substituído por uma estimativa consistente,  $\hat{\phi}$ . A covariável  $x_1 = 1$ , a covariável  $x_2$  foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo  $(0, 1)$  e a covariável  $x_3$  foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo  $(1, 2)$ . Para uma amostra de tamanho  $n = 20$ , os valores de  $x_2$  e  $x_3$  foram mantidos constantes em todas as 10000 réplicas do modelo gerado. As Tabelas 3.2 e 3.3 apresentam os resultados obtido, em que os valores apresentando são  $\hat{\text{Cov}}_2(\hat{\beta}) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} [\hat{\text{Cov}}_2(\hat{\beta})]_i$ .

**Tabela 3.2:**  $\hat{\text{Cov}}_2(\hat{\beta})$  para o modelo gama, com  $n = 20$ .

	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
$\hat{\beta}_1$	0,29927	-0,36180	-0,06478
$\hat{\beta}_2$	-0,34020	0,68500	-0,01605
$\hat{\beta}_3$	-0,10464	-0,01062	0,11669

Pela Tabela 3.2, em que utilizamos a expressão de Peers e Iqbal, observamos que a matriz de covariâncias de segunda ordem nos modelos não lineares é assimétrica. Usando a expressão de Shenton e Bowman (1977), a matriz é, de fato, simétrica, como mostra a Tabela 3.3.

**Tabela 3.3:**  $\hat{\text{Cov}}_2(\hat{\beta})$  para o modelo gama, com  $n = 20$ .

	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$
$\hat{\beta}_1$	0,29927	-0,35100	-0,08468
$\hat{\beta}_2$		0,68500	-0,00271
$\hat{\beta}_3$			0,11669

### 3.2 Matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés

Note que, pelas equações (3.3) e (3.4) e (3.18) a (3.20), temos as seguintes relações:

$$\psi_{ij}^{(1)} = -\gamma_{ij}^{(1)} - \kappa_{ac,bd} \text{ e } \psi_{ij}^{(2)} = -2\gamma_{ij}^{(3)},$$

isto é, podemos escrever (3.2) de uma forma simplificada:

$$\text{Cov}_2(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j) = -\kappa^{ij} + \kappa^{ia}\delta_a^j + \kappa^{ja}\delta_a^i + \mathcal{O}(n^{-3}), \quad (3.25)$$

em que  $\kappa^{ia}\delta_a^j = \delta_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}^{(2)} + \delta_{ij}^{(3)}$  e

$$\delta_{ij}^{(1)} = -\frac{1}{2}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{cd}\{\kappa_{ac,bd}\}, \quad (3.26)$$

$$\delta_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{arc}[3\kappa_{bst} + 2\kappa_{b,st} + 8\kappa_{bs,t}] + 2\kappa_{ar,c}[2\kappa_{b,st} + \kappa_{bt,s}]\}, \quad (3.27)$$

$$\delta_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{2}\kappa^{ia}\kappa^{jb}\kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{bc}^{(a)}(\kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st})\}. \quad (3.28)$$

Reescrevendo (3.25) da mesma forma que em (3.21), temos

$$\text{Cov}_2(\tilde{\theta}) = K_{\theta,\theta}^{-1} + K_{\theta,\theta}^{-1}\{\Delta + \Delta^\top\}K_{\theta,\theta}^{-1}, \quad (3.29)$$

em que o elemento  $(a, b)$  de  $\Delta$  é dado por  $\delta_{ab}$ , com  $\delta_{ab} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\delta_{ab}^{(2)} - \frac{\tau_2}{2}\delta_{ab}^{(3)}$  e

$$\delta_{ab}^{(1)} = \kappa^{cd}\{\kappa_{ac,bd}\}, \quad (3.30)$$

$$\delta_{ab}^{(2)} = \kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{arc}[3\kappa_{bst} + 2\kappa_{b,st} + 8\kappa_{bs,t}] + 2\kappa_{ar,c}[2\kappa_{b,st} + \kappa_{bt,s}]\}, \quad (3.31)$$

$$\delta_{ab}^{(3)} = \kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{bc}^{(a)}(\kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st})\}. \quad (3.32)$$

Observando as expressões (3.21) a (3.24) e (3.29) a (3.32), podemos definir uma expressão geral para as matrizes de covariâncias de segunda ordem, dada por

$$\text{Cov}_2(\theta, \tau) = K_{\theta,\theta}^{-1} + K_{\theta,\theta}^{-1}\{\Delta + \Delta^\top\}K_{\theta,\theta}^{-1}, \quad (3.33)$$

em que o elemento  $(a, b)$  de  $\Delta$  é dado por  $\delta_{ab}$ , com  $\delta_{ab} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\delta_{ab}^{(2)} + \frac{\tau_2}{2}\delta_{ab}^{(3)}$  e

$$\delta_{ab}^{(1)} = \kappa^{cd}\{\tau_1[2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)}] + \kappa_{ac,bd}\}, \quad (3.34)$$

$$\delta_{ab}^{(2)} = \kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{arc}[3\kappa_{bst} + 2\kappa_{b,st} + 8\kappa_{bs,t}] + 2\kappa_{ar,c}[2\kappa_{b,st} + \kappa_{bt,s}]\}, \quad (3.35)$$

$$\delta_{ab}^{(3)} = \kappa^{rs}\kappa^{ct}\{\kappa_{bc}^{(a)}(\kappa_{st}^{(r)} + \kappa_{r,st})\}, \quad (3.36)$$

com  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^\top = (1, 1)^\top$  indicando a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV,  $\text{Cov}_2(\hat{\theta})$ ,

dada em (3.21) a (3.24), e  $\tau = (0, -1)^\top$ , indicando a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido pelo viés,  $\text{Cov}_2(\tilde{\theta})$  dada em (3.29) a (3.32). Observe que, para a matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de primeira ordem não precisamos das derivadas de quarta ordem do logaritmo da função de verossimilhança de  $\theta$ , o que torna esta matriz mais fácil de se calcular.

### 3.3 Considerações

Com a expressão apresentada em (3.33), esperamos que a obtenção das matrizes de covariâncias de segunda ordem para o EMV corrigido ou não pelo viés de primeira ordem para um modelo específico fique menos trabalhosa, pois a expressão foi reescrita com menos cumulantes para serem calculados.



## Capítulo 4

# Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança nos modelos de dispersão

Neste capítulo obtemos a matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV corrigido ou não pelo viés de primeira ordem, nos modelos de dispersão. Realizamos estudos de simulação de Monte Carlo para avaliar o desempenho das matrizes obtidas. A partir das matrizes obtidas, propomos modificações no teste de Wald.

### 4.1 Matriz de covariâncias de segunda ordem

Nos modelos de dispersão, o vetor de parâmetros é dado por  $\theta = (\beta^\top, \lambda)^\top$ , de dimensão  $(p+1) \times 1$ , em que  $\beta$  é um vetor de dimensão  $p \times 1$  e  $\lambda$  um escalar. Neste capítulo, reservamos os índices  $a, b, c$  e  $d$  para os elementos do vetor  $\beta$ .

Para obtermos a expressão da matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido ou não pelo viés de primeira ordem, dada na expressão (3.33) a (3.36), precisamos de  $K_{\theta, \theta}$ , definida em (1.14), e da matriz  $\Delta$ , de dimensão  $(p+1) \times (p+1)$ . Baseados em  $\theta$ , podemos particionar a matriz  $\Delta$  da seguinte forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta} & \Delta_{\beta\lambda} \\ \Delta_{\lambda\beta} & \Delta_{\lambda\lambda} \end{pmatrix},$$

em que a submatriz  $\Delta_{\beta\beta}$  tem dimensão  $p \times p$ , com elementos dados por  $\delta_{ab}$ , a submatriz  $\Delta_{\beta\lambda}$  tem dimensão  $p \times 1$ , com elementos  $\delta_{a\lambda}$ , a submatriz  $\Delta_{\lambda\beta}$  tem dimensão  $1 \times p$ , com elementos  $\delta_{\lambda b}$  e  $\Delta_{\lambda\lambda}$  é um escalar.

De (3.33), temos que  $\delta_{ab} = -\frac{1}{2}\delta_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\delta_{ab}^{(2)} + \frac{\tau_2}{2}\delta_{ab}^{(3)}$ . Da mesma forma escrevemos  $\delta_{a\lambda}$ ,  $\delta_{\lambda b}$  e  $\Delta_{\lambda\lambda}$ . A partir dessa definição reescrevemos  $\Delta$  da seguinte forma

$$\Delta = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(1)} & \Delta_{\beta\lambda}^{(1)} \\ \Delta_{\lambda\beta}^{(1)} & \Delta_{\lambda\lambda}^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(2)} & \Delta_{\beta\lambda}^{(2)} \\ \Delta_{\lambda\beta}^{(2)} & \Delta_{\lambda\lambda}^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\tau_2}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(3)} & \Delta_{\beta\lambda}^{(3)} \\ \Delta_{\lambda\beta}^{(3)} & \Delta_{\lambda\lambda}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

### 4.1.1 Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\beta}$

Os elementos da matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(1)}$ , dados por (3.34), são os seguintes

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(1)} &= \kappa^{cd} \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ [\tau_1(2g_{1\ell} - g_{3\ell}) + g_{2\ell}] (a, b, c, d)_\ell - (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})(a, b, cd)_\ell \right. \\ &\quad - 2[(2\tau_1 + 1)f_{1\ell} - (\tau_1 + 1)f_{2\ell} + 2\tau_1 f_{3\ell}] (a, bc, d)_\ell \\ &\quad \left. - \tau_1(2f_{1\ell} - f_{2\ell} + 2f_{3\ell})(ab, c, d)_\ell - w_\ell [\tau_1(ab, cd)_\ell - (ac, bd)_\ell + \tau_1(acd, b)_\ell] \right\} \\ &\quad + \kappa^{\lambda\lambda} \phi^{-1} \phi'^2 \sum_{\ell=1}^n w_\ell (a, b)_\ell. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Os cumulantes necessários para obter as expressões de  $\delta_{ab}^{(1)}$  estão apresentados em (A.1), (A.5), (A.10) e (A.13), no Apêndice A.

Podemos reescrever a expressão (4.1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(1)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (a)_\ell [\tau_1(2g_{1\ell} - g_{3\ell}) + g_{2\ell}] \left( \sum_{c,d=1}^p (c)_\ell \kappa^{cd} (d)_\ell \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad - \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{c,d=1}^p (dc)_\ell \kappa^{cd} \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad - 2\phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (a)_\ell [(2\tau_1 + 1)f_{1\ell} - (\tau_1 + 1)f_{2\ell} + 2\tau_1 f_{3\ell}] \left( \sum_{c,d=1}^p (d)_\ell \kappa^{dc} (cb)_\ell \right) \right\} \\ &\quad - \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (ab)_\ell (2f_{1\ell} - f_{2\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{c,d=1}^p (c)_\ell \kappa^{cd} (d)_\ell \right) \right\} \\ &\quad - \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (ab)_\ell w_\ell \left( \sum_{c,d=1}^p (dc)_\ell \kappa^{cd} \right) \right\} \\ &\quad + \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ \left( \sum_{c,d=1}^p (ac)_\ell \kappa^{cd} (db)_\ell \right) w_\ell \right\} \\ &\quad - \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ \left( \sum_{c,d=1}^p (acd)_\ell \kappa^{dc} \right) w_\ell (b)_\ell \right\} \\ &\quad + \phi^{-1} \phi'^2 \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \{ (a)_\ell w_\ell (b)_\ell \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Denotando por

$$\tilde{x}_{a,\ell} = (a)_\ell, \quad \tilde{x}_{\ell,b} = (b)_\ell, \quad (4.3)$$

$$z_{\ell\ell} = - \sum_{c,d=1}^p (c)_\ell \kappa^{cd} (d)_\ell, \quad d_{\ell\ell} = - \sum_{c,d=1}^p (dc)_\ell \kappa^{cd}, \quad (4.4)$$

$$e_{\ell,b} = - \sum_{c,d=1}^p (d)_\ell \kappa^{dc} (cb)_\ell, \quad \delta_{a,\ell} = - \sum_{c,d=1}^p (acd)_\ell \kappa^{dc}, \quad (4.5)$$



$$s_{ab,\ell} = (ab)_\ell, \quad t_{ab,\ell} = - \sum_{c,d=1}^p (ac)_\ell \kappa^{cd} (db)_\ell, \quad (4.6)$$

reescrevemos (4.2) como:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(1)} &= -\phi \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} [\tau_1(2g_{1\ell} - g_{3\ell}) + g_{2\ell}] z_{\ell\ell} \tilde{x}_{\ell,b} \} + \phi \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_1 + 2f_3)_\ell d_{\ell\ell} \tilde{x}_{\ell,b} \} \\ &+ 2\phi \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} [(2\tau_1 + 1)f_{1\ell} - (\tau_1 + 1)f_{2\ell} + 2\tau_1 f_{3\ell}] e_{\ell,b} \} \\ &+ \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \{ s_{ab,\ell} (2f_{1\ell} - f_{2\ell} + 2f_{3\ell}) z_{\ell\ell} \} + \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \{ s_{ab,\ell} w_\ell d_{\ell\ell} \} - \phi \sum_{\ell=1}^n \{ t_{ab,\ell} w_\ell \} \\ &+ \tau_1 \phi \sum_{\ell=1}^n \{ \delta_{a,\ell} w_\ell \tilde{x}_{\ell,b} \} + \phi^{-1} \phi'^2 \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} w_\ell \tilde{x}_{\ell,b} \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

E de (4.7), chegamos à expressão matricial  $\Delta_{\beta\beta}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta\beta}^{(1)} &= -\mathcal{X}^\top [\tau_1(2G_1 - G_3) + G_2] Z_d \mathcal{X} + \mathcal{X}^\top (F_1 + 2F_3) D \mathcal{X} \\ &+ 2\mathcal{X}^\top [(2\tau_1 + 1)F_1 - (\tau_1 + 1)F_2 + 2\tau_1 F_3] E \\ &+ \tau_1 S\{[(2F_1 - F_2 + 2F_3)Z_d] \otimes I_p\} + \tau_1 S[(WD1) \otimes I_p] \\ &- T[(W1) \otimes I_p] + \tau_1 \Delta W \mathcal{X} + \phi^{-1} \phi'^2 \kappa^{\lambda\lambda} \mathcal{X}^\top W \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que

$$F_1 = \text{diag}\{f_{11}, \dots, f_{1n}\}, \quad F_2 = \text{diag}\{f_{21}, \dots, f_{2n}\}, \quad F_3 = \text{diag}\{f_{31}, \dots, f_{3n}\}, \quad (4.9)$$

$$G_1 = \text{diag}\{g_{11}, \dots, g_{1n}\}, \quad G_2 = \text{diag}\{g_{21}, \dots, g_{2n}\}, \quad G_3 = \text{diag}\{g_{31}, \dots, g_{3n}\}, \quad (4.10)$$

$$Z = \{z_{ij}\} = \mathcal{X}(\mathcal{X}^\top W \mathcal{X})^{-1} \mathcal{X}^\top, \quad Z_d = \text{diag}\{z_{11}, \dots, z_{nn}\}, \quad (4.11)$$

$$K = \{-k_{ij}/\phi\} = \phi^{-1} K_{\beta,\beta} = (\mathcal{X}^\top W \mathcal{X}), \quad (4.12)$$

$$D = \text{diag}\{d_{11}, \dots, d_{nn}\}, \quad d_{\ell\ell} = \text{tr}(\mathcal{X}_\ell K^{-1}), \quad \mathcal{X}_\ell = \{\tilde{x}_{\ell,rs}\}, \quad \tilde{x}_{\ell,rs} = \partial^2 \eta_\ell / \partial \beta_r \partial \beta_s, \quad (4.13)$$

$$\Delta = \{\delta_{\ell,a}\}, \quad \delta_{\ell,a} = \text{tr}(\mathcal{X}_{\ell,a} K^{-1}), \quad \mathcal{X}_{\ell,a} = \{\tilde{x}_{\ell,a;rs}\}, \quad \tilde{x}_{\ell,a;rs} = \partial^3 \eta_\ell / \partial \beta_a \partial \beta_r \partial \beta_s, \quad (4.14)$$

$$1 = (1 \dots 1)_{1 \times n}^\top, \quad S_{p \times np} = (\mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n), \quad T_{p \times np} = (\mathcal{X}_1 K^{-1} \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_n K^{-1} \mathcal{X}_n), \quad (4.15)$$

e

$$E \text{ é uma matriz tal que sua } \ell\text{-ésima linha é a } \ell\text{-ésima linha de } \mathcal{X} K^{-1} \mathcal{X}_\ell. \quad (4.16)$$

A partir de (3.35) e dos cumulantes (A.16), (A.17), (A.23) e (A.25), temos os seguintes elementos

da matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(2)}$  nos modelos de dispersão

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}^{(2)} &= \kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ (f_{2\ell} + 2f_{3\ell})(10f_{1m} - 7f_{2m} + 6f_{3m})(a, r, c)_\ell(b, s, t)_m \right. \\
&\quad + 6(f_{2\ell} - f_{1\ell})(f_{2m} - f_{1m})(a, r, c)_\ell(b, s, t)_m \\
&\quad + 2(3f_{1\ell} - f_{2\ell} + 4f_{3\ell})w_m(a, r, c)_\ell(b, st)_m \\
&\quad - 2(f_{1\ell} + 2f_{3\ell})w_m(a, r, c)_\ell(bt, s) \\
&\quad \left. + w_\ell w_m [(a, rc)_\ell(b, st)_m + 4(a, rc)_\ell(bs, t)_m - 2(ar, c)_\ell(bs, t)_m] \right\} \\
&\quad - 2\kappa^{\lambda\lambda} \kappa^{ct} \phi'^2 \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n w_\ell w_m(a, c)_\ell(b, t)_m.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Podemos reescrever (4.17) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}^{(2)} &= \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{2\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs}(s)_m \right) \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) (10f_{1m} - 7f_{2m} + 6f_{3m})(b)_m \right\} \\
&\quad + 6\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{2\ell} - f_{1\ell}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs}(s)_m \right) \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) (f_{2m} - f_{1m})(b)_m \right\} \\
&\quad + 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (3f_{1\ell} - f_{2\ell} + 4f_{3\ell}) \left( \sum_{r, c, s, t=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs}(st)_m \kappa^{tc}(c)_\ell \right) w_m(b)_m \right\} \\
&\quad - 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs}(s)_m \right) w_m \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(tb)_m \right) \right\} \\
&\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell w_\ell \left( \sum_{r, c, s, t=1}^p (rc)_\ell \kappa^{ct}(ts)_m \kappa^{sr} \right) w_m(b)_m \right\} \\
&\quad + 4\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell w_\ell w_m \left( \sum_{r, c, s, t=1}^p (t)_m \kappa^{tc}(cr)_\ell \kappa^{rs}(sb)_m \right) \right\} \\
&\quad - 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ \left( \sum_{r, s=1}^p (ar)_\ell \kappa^{rs}(sb)_m \right) w_\ell w_m \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) \right\} \\
&\quad - 2\kappa^{\lambda\lambda} \phi'^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell w_\ell \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_m(b)_m \right\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Ainda podemos reescrever (4.18) como:

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}^{(2)} &= \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} [(f_{2\ell} + 2f_{3\ell}) z_{\ell m}^2 (10f_{1m} - 7f_{2m} + 6f_{3m}) + 6(f_{2\ell} - f_{1\ell}) z_{\ell m}^2 (f_{2m} - f_{1m})] \tilde{x}_{m,b} \} \\
&+ 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (3f_{1\ell} - f_{2\ell} + 4f_{3\ell}) \theta_{\ell m}^1 w_m \tilde{x}_{m,b} \} \\
&- 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) z_{\ell m} w_m \delta_{m\ell,b}^1 \} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} w_\ell \theta_{\ell m}^2 w_m \tilde{x}_{m,b} \} \\
&+ 4\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} w_\ell w_m \delta_{m\ell,b}^2 \} \\
&- 2\phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ t_{ab,m\ell}^* w_\ell z_{\ell m} w_m \} \\
&- 2\kappa^{\lambda\lambda} \phi'^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} w_\ell z_{\ell m} w_m \tilde{x}_{m,b} \},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

em que

$$\theta_{\ell m}^1 = \sum_{r,c,s,t=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs} (st)_m \kappa^{tc} (c)_\ell, \quad \theta_{\ell m}^2 = \sum_{r,c,s,t=1}^p (rc)_\ell \kappa^{ct} (ts)_m \kappa^{sr}, \tag{4.20}$$

$$\delta_{m\ell,b}^1 = - \sum_{c,t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct} (tb)_m, \quad \delta_{m\ell,b}^2 = \sum_{r,c,s,t=1}^p (t)_m \kappa^{tc} (cr)_\ell \kappa^{rs} (sb)_m, \tag{4.21}$$

$$z_{\ell m} = - \sum_{r,s=1}^p (r)_\ell \kappa^{rs} (s)_m, \quad t_{ab,m\ell}^* = - \sum_{r,s=1}^p (ar)_\ell \kappa^{rs} (sb)_m. \tag{4.22}$$

E, finalmente, chegamos à seguinte expressão matricial de  $\Delta_{\beta\beta}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\beta\beta}^{(2)} &= \mathcal{X}^\top \left[ (F_2 + 2F_3) Z^{(2)} (10F_1 - 7F_2 + 6F_3) + 6(F_2 - F_1) Z^{(2)} (F_2 - F_1) \right] \mathcal{X} \\
&+ 2\mathcal{X}^\top (3F_1 - F_2 + 4F_3) \Theta_1 W \mathcal{X} - 2\mathcal{X}^\top (F_1 + 2F_3) \Delta_1 \mathcal{X} \\
&+ \mathcal{X}^\top W \Theta_2 W \mathcal{X} + 4\mathcal{X}^\top W \Delta_2 - 2T^* W^* - 2\kappa^{\lambda\lambda} \phi'^2 \mathcal{X}^\top W Z W \mathcal{X},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

em que

$$Z^{(2)} = Z \odot Z \text{ é o produto direto entre matrizes (produto de Hadamard)}, \tag{4.24}$$

$$\Theta_1 = \{ \theta_{\ell m}^1 \}, \quad \theta_{\ell m}^1 = \tilde{x}_\ell^\top K^{-1} \mathcal{X}_m K^{-1} \tilde{x}_\ell \text{ e } \tilde{x}_\ell \text{ é a } \ell\text{-ésima linha de } \mathcal{X}, \tag{4.25}$$

$$\Theta_2 = \{ \theta_{\ell m}^2 \}, \quad \theta_{\ell m}^2 = \text{tr}(\mathcal{X}_\ell^\top K^{-1} \mathcal{X}_m K^{-1}), \tag{4.26}$$

$$T^* = (T_{11}^* T_{12}^* \cdots T_{\ell m}^* \cdots T_{nn}^*), \quad T_{\ell m}^* = \{ t_{\ell m}^* \}, \quad t_{\ell m}^* = K^{-1} \mathcal{X}_\ell K^{-1} \mathcal{X}_m K^{-1}, \tag{4.27}$$

$$W^* = (W_{11}^* W_{12}^* \cdots W_{\ell m}^* \cdots W_{nn}^*)^\top, \quad W_{\ell m}^* = \text{diag}(w_m z_{m\ell} w_\ell), \tag{4.28}$$

$$\Delta_1 = \{ \delta_{\ell r}^1 \}, \text{ sendo } \delta_{\ell r}^1 = 1^\top [V_{\ell r}^1 z_\ell (W1)], \quad V_{\ell r}^1 \text{ um vetor coluna cujo } m\text{-ésimo elemento é igual a } \tilde{x}_\ell^\top K^{-1} \tilde{x}_{mr} \text{ e } \tilde{x}_{mr} \text{ um vetor coluna cujos elementos são os elementos da } r\text{-ésima linha de } \mathcal{X}_m, \tag{4.29}$$

$$\Delta_2 = \{ \delta_{\ell r}^2 \}, \text{ sendo } \delta_{\ell r}^2 = (V_{\ell r}^2)^\top W1, \quad V_{\ell r}^2, \quad V_{\ell r}^2 \text{ um vetor coluna cujo } m\text{-ésimo elemento é igual a } \tilde{x}_m^\top K^{-1} \mathcal{X}_\ell K^{-1} \tilde{x}_{mr} \tag{4.30}$$

e as matrizes restantes estão definidas em (4.9), (4.11), (4.12) e (4.15).

Com os cumulantes de terceira ordem dados em (A.20), (A.23) e a expressão (3.36), nos modelos de dispersão temos os seguintes elementos da matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(3)} &= \kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})(2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m})(a, b, c)_\ell(r, s, t)_m \right. \\ &\quad + (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})w_m(a, b, c)_\ell(rs, t)_m \\ &\quad + w_\ell(2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m})[(ac, b)_\ell + (ab, c)_\ell](r, s, t)_m \\ &\quad \left. + w_\ell w_m[(ac, b)_\ell + (ab, c)_\ell](rs, t)_m \right\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Podemos reescrever (4.31) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (a)_\ell (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_m \left( \sum_{r, s=1}^p (rs)_m \kappa^{rs} \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ \left( \sum_{c, t=1}^p (ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (ab)_\ell w_\ell \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) \left( \sum_{r, s=1}^p (r)_m \kappa^{rs}(s)_m \right) \right\} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ \left( \sum_{c, t=1}^p (ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_\ell w_m \left( \sum_{r, s=1}^p (rs)_m \kappa^{rs} \right) (b)_\ell \right\} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \left\{ (ab)_\ell w_\ell \left( \sum_{c, t=1}^p (c)_\ell \kappa^{ct}(t)_m \right) w_m \left( \sum_{r, s=1}^p (rs)_m \kappa^{rs} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Podemos reescrever (4.32) como:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) z_{\ell m} (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \tilde{x}_{\ell, b} \} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) z_{\ell m} w_m d_{mm} \tilde{x}_{\ell, b} \} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \alpha_{a,m\ell}^* w_\ell (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \tilde{x}_{\ell, b} \} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ s_{ab,\ell} w_\ell z_{\ell m} (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ \alpha_{a,m\ell}^* w_\ell w_m d_{mm} \tilde{x}_{\ell, b} \} \\ &\quad + \phi^2 \sum_{\ell, m=1}^n \{ s_{ab,\ell} w_\ell z_{\ell m} w_m d_{mm} \}, \end{aligned}$$

que ainda pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{m=1}^n z_{\ell m} (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \right) \tilde{x}_{\ell,b} \right\} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) \left( \sum_{m=1}^n z_{\ell m} w_m d_{mm} \right) \tilde{x}_{\ell,b} \right\} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \left( \sum_{m=1}^n \alpha_{a,m\ell}^* (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \right) w_\ell \tilde{x}_{\ell,b} \right\} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ s_{ab,\ell} w_\ell \left( \sum_{m=1}^n z_{\ell m} (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm} \right) \right\} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \left( \sum_{m=1}^n \alpha_{a,m\ell}^* w_m d_{mm} \right) w_\ell \tilde{x}_{\ell,b} \right\} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ s_{ab,\ell} w_\ell \left( \sum_{m=1}^n z_{\ell m} w_m d_{mm} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

em que

$$\alpha_{a,m\ell}^* = - \sum_{c,t=1}^p (ac)_\ell \kappa^{ct}(t)_m. \tag{4.34}$$

Agora, usando a notação

$$c_{\ell\ell} = \sum_{m=1}^n z_{\ell m} (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm}, \quad b_{\ell\ell} = \sum_{m=1}^n z_{\ell m} w_m d_{mm}, \tag{4.35}$$

$$\alpha_{a,\ell}^1 = \sum_{m=1}^n \alpha_{a,m\ell}^* (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_{3m}) z_{mm}, \quad \alpha_{a,\ell}^2 = \sum_{m=1}^n \alpha_{a,m\ell}^* w_m d_{mm}, \tag{4.36}$$

(4.33) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}^{(3)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) c_{\ell\ell} \tilde{x}_{\ell,b} \} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \{ \tilde{x}_{a,\ell} (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) b_{\ell\ell} \tilde{x}_{\ell,b} \} \\
&+ \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \{ \alpha_{a,\ell}^1 w_\ell \tilde{x}_{\ell,b} \} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \{ s_{ab,\ell} w_\ell c_{\ell\ell} \} \\
&+ \sum_{\ell=1}^n \{ \alpha_{a,\ell}^2 w_\ell p_{\ell,j} \} + \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \{ s_{ab,\ell} w_\ell b_{\ell\ell} \}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Finalmente, chegamos à expressão matricial de  $\Delta_{\beta\beta}^{(3)}$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\beta\beta}^{(3)} &= \mathcal{X}^\top (F_1 + 2F_3) C \mathcal{X} + \mathcal{X}^\top (F_1 + 2F_3) B \mathcal{X} \\
&+ A_1 W \mathcal{X} + S [(WC1) \otimes I_p] \\
&+ A_2 W \mathcal{X} + S [(WB1) \otimes I_p],
\end{aligned} \tag{4.38}$$

em que

$$C = \text{diag} \{ Z(2F_1 - F_2 + 2F_3)Z_d 1 \}, \quad B = \text{diag} \{ ZWD1 \}, \tag{4.39}$$

$$A_1 = \{\alpha_{a\ell}^1\}, \quad \alpha_{a\ell}^1 = (V_{\ell a}^3)^\top (2F_1 - F_2 + 2F_3)Z_d 1, \\ V_{\ell a}^3 \text{ um vetor coluna com o } m\text{-ésimo elemento igual a } \tilde{x}_{\ell a}^\top K^{-1} \tilde{x}_m, \quad (4.40)$$

$\tilde{x}_{\ell a}$  um vetor coluna cujos elementos são os elementos da  $a$ -ésima linha de  $\tilde{X}_\ell$   
e  $\tilde{x}_m$  um vetor coluna cujos elementos são os elementos da  $m$ -ésima linha de  $\tilde{X}$ ,

$$A_2 = \{\alpha_{a\ell}^2\}, \quad \alpha_{a\ell}^2 = (V_{\ell a}^3)^\top W D 1 \quad (4.41)$$

e as matrizes restantes estão definidas em (4.9), (4.11) e (4.15).

#### 4.1.2 Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\lambda}$

Os elementos do vetor  $\Delta_{\beta\lambda}$ , obtidos de (3.34) a (3.36), são dados por

$$\delta_{a\lambda}^{(1)} = \kappa^{cd} \phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ [(\tau_1 - 1)f_{1\ell} + f_{2\ell} + 2\tau_1 f_{3\ell}] (a, c, d)_\ell + (2\tau_1 + 1)w_\ell(ac, d)_\ell \right\}, \quad (4.42)$$

$$\delta_{a\lambda}^{(2)} = -\kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi \phi' \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ (2f_{1\ell} + 3f_{2\ell} + 10f_{3\ell})w_m(a, r, c)_\ell(s, t)_m \right. \\ \left. + w_\ell w_m [5(a, rc)_\ell + 8(ar, c)_\ell] (s, t)_m \right\}, \quad (4.43)$$

$$\delta_{a\lambda}^{(3)} = 0. \quad (4.44)$$

De maneira análoga à obtenção da matriz  $\Delta_{\beta\beta}$ , as formas matriciais de (4.42) a (4.44) são dadas, respectivamente, por

$$\Delta_{\beta\lambda}^{(1)} = -\phi' \mathcal{X}^\top [(\tau_1 - 1)F_1 + F_2 + 2\tau_1 F_3] Z_d 1 - (2\tau_1 + 1)\phi' E^\top W 1, \quad (4.45)$$

$$\Delta_{\beta\lambda}^{(2)} = -\phi^{-1} \phi' \mathcal{X}^\top (2F_1 + 3F_2 + 10F_3) Z^{(2)} W 1 - 5\phi^{-1} \phi' \mathcal{X}^\top W \Theta_1 W 1 - 8\phi^{-1} \phi' \Delta_1^\top W 1, \quad (4.46)$$

$$\Delta_{\beta\lambda}^{(3)} = 0. \quad (4.47)$$

#### 4.1.3 Cálculo da matriz $\Delta_{\lambda\beta}$

Os elementos do vetor  $\Delta_{\lambda\beta}$ , obtidos de (3.34) a (3.36), são dados por

$$\delta_{\lambda b}^{(1)} = -\kappa^{cd} \phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ [(2\tau_1 + 1)f_{1\ell} - (\tau_1 + 1)f_{2\ell} + 2\tau_1 f_{3\ell}] (b, c, d)_\ell \right. \\ \left. + w_\ell [\tau_1(b, cd)_\ell - (bc, d)_\ell] \right\}, \quad (4.48)$$

$$\delta_{\lambda b}^{(2)} = \kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi \phi' \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ w_\ell (4f_{1m} - f_{2m} + 6f_{3m})(r, c)_\ell(b, s, t)_m + 5w_\ell w_m(r, c)_\ell(b, st)_m \right\}, \quad (4.49)$$

$$\delta_{\lambda b}^{(3)} = \kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi \phi' \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ w_\ell (2f_{1m} - f_{2m} + 2f_3)(b, c)_\ell(r, s, t)_m + w_\ell w_m(b, c)_\ell(rt, s)_m \right\}. \quad (4.50)$$

As formas matriciais de (4.48) a (4.50) são dadas, respectivamente, por

$$\Delta_{\lambda\beta}^{(1)} = \phi'1^\top Z_d [\tau_1(2F_1 - F_2 + 2F_3) + (F_1 - F_2)] \mathcal{X} + \tau_1 \phi'1^\top DW \mathcal{X} - \phi'1^\top WE, \quad (4.51)$$

$$\Delta_{\lambda\beta}^{(2)} = \phi^{-1} \phi'1^\top W Z^{(2)} (4F_1 - F_2 + 6F_3) \mathcal{X} + 5\phi^{-1} \phi'1^\top \Theta_1^\top W \mathcal{X}, \quad (4.52)$$

$$\Delta_{\lambda\beta}^{(3)} = \phi^{-1} \phi'1^\top WC \mathcal{X} + \phi^{-1} \phi'1^\top WB \mathcal{X}. \quad (4.53)$$

Por (4.45) a (4.47) e (4.51) a (4.53) podemos perceber que  $\Delta_{\beta\lambda} \neq \Delta_{\lambda\beta}^\top$ , isto é, a matriz  $\Delta$  não é simétrica.

#### 4.1.4 Cálculo da matriz $\Delta_{\lambda\lambda}$

Os elementos de  $\Delta_{\lambda\lambda}$ , obtidos de (3.34) a (3.36), são os seguintes

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda\lambda}^{(1)} &= \kappa^{cd} \sum_{\ell=1}^n \left( \phi^{-1} \phi'^2 + \tau_1 \phi'' \right) w_\ell(c, d)_\ell \\ &+ \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \left\{ \left[ (\alpha_{2\ell}^{(2)} - \alpha_{2\ell}^2) + \tau_1(2\alpha_{2\ell}'' - \alpha'_{3\ell}) \right] \phi'^4 + \tau_1(7\alpha'_{2\ell} - 3\alpha_{3\ell}) \phi'^2 \phi'' \right. \\ &\left. + \tau_1 \alpha_{2\ell} \phi' \phi''' + (\tau_1 - 1) \alpha_{2\ell} \phi''^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda\lambda}^{(2)} &= -3\kappa^{rs} \kappa^{ct} \phi'^2 \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n w_\ell w_m(r, c)_\ell(s, t)_m \\ &+ \kappa^{\lambda\lambda} \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left\{ \left[ \alpha_{3\ell} \phi'^3 + 3\alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right] \left[ (10\alpha'_{2m} - 7\alpha_{3m}) \phi'^3 - \alpha_{2m} \phi' \phi'' \right] \right. \\ &\left. + 6 \left[ (\alpha'_{2\ell} - \alpha_{3\ell}) \phi'^3 - \alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right] \left[ (\alpha'_{2m} - \alpha_{3m}) \phi'^3 - \alpha_{2m} \phi' \phi'' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda\lambda}^{(3)} &= \kappa^{rs} \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left( \alpha'_{2\ell} \phi'^4 + 2\alpha_{2\ell} \phi'^2 \phi'' \right) w_m(r, s)_m \\ &+ \kappa^{\lambda\lambda} \kappa^{\lambda\lambda} \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n \left[ \alpha'_{2\ell} \phi'^3 + 2\alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right] \left[ (2\alpha'_{2m} - \alpha_{3m}) \phi'^3 + \alpha_{2m} \phi' \phi'' \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

As expressões (4.54) a (4.56) podem ser escritas da seguinte forma

$$\Delta_{\lambda\lambda}^{(1)} = - \left( \phi^{-1} \phi'^2 + \tau_1 \phi'' \right) 1^\top W Z_d 1 + \kappa^{\lambda\lambda} 1^\top H 1, \quad (4.57)$$

$$\Delta_{\lambda\lambda}^{(2)} = -3\phi^{-1} \phi'^2 1^\top W Z^{(2)} W 1 + \kappa^{\lambda\lambda} \kappa^{\lambda\lambda} 1^\top H^{(2)} 1, \quad (4.58)$$

$$\Delta_{\lambda\lambda}^{(3)} = \phi^{-1} \kappa^{\lambda\lambda} 1^\top H^{(3.1)} 1 + \kappa^{\lambda\lambda} \kappa^{\lambda\lambda} 1^\top H^{(3.2)} 1, \quad (4.59)$$

em que em que  $H = \text{diag}\{h_1, \dots, h_n\}$ ,  $h_\ell = \left[ (\alpha_{2\ell}^{(2)} - \alpha_{2\ell}^2) + \tau_1(2\alpha_{2\ell}'' - \alpha'_{3\ell}) \right] \phi'^4 + \tau_1(7\alpha'_{2\ell} - 3\alpha_{3\ell}) \phi'^2 \phi'' + \tau_1 \alpha_{2\ell} \phi' \phi''' + (\tau_1 - 1) \alpha_{2\ell} \phi''^2$ ,  $H^{(2)} = \left\{ h_{\ell m}^{(2)} \right\}$ ,  $h_{\ell m}^{(2)} = \left[ \alpha_{3\ell} \phi'^3 + 3\alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right] \left[ (10\alpha'_{2m} - 7\alpha_{3m}) \phi'^3 - \alpha_{2m} \phi' \phi'' \right] +$

$$6 \left[ (\alpha'_{2\ell} - \alpha_{3\ell})\phi'^3 - \alpha_{2\ell}\phi'\phi'' \right] \left[ (\alpha'_{2m} - \alpha_{3m})\phi'^3 - \alpha_{2m}\phi'\phi'' \right], 0 \text{ é um vetor de zeros de dimensão } p \times 1, \\ H^{(3.1)} = \text{diag}\{h_1^{(3.1)}, \dots, h_n^{(3.1)}\}, h_\ell^{(3.1)} = \left( \phi'^4 \alpha'_{2\ell} + 2\phi'^2 \phi'' \alpha_{2\ell} \right) 1^\top Z1 \text{ e } H^{(3.2)} = \text{diag}\{h_1^{(3.2)}, \dots, h_n^{(3.2)}\}, \\ h_\ell^{(3.2)} = \left( \phi'^3 \alpha'_{2\ell} + 2\phi'\phi'' \alpha_{2\ell} \right) \sum_{m=1}^n \left[ (2\alpha'_{2m} - \alpha_{3m})\phi'^3 + \alpha_{2m}\phi'\phi'' \right].$$

#### 4.1.5 Resultados numéricos

Para estudarmos o desempenho da matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de primeira ordem,  $\text{Cov}_2(\tilde{\theta})$ , foram ajustados cinco modelos de dispersão com três covariáveis  $(x_1, x_2, x_3)$ . A covariável  $x_1$  é constante e igual a 1, a covariável  $x_2$  foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo  $(0, 1)$  e a covariável  $x_3$  foi obtida de uma distribuição uniforme no intervalo  $(1, 2)$ . Para cada  $n$  ( $n = 10, 20, 30, 40$ ), os valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  foram mantidos constantes em todas as 5.000 réplicas dos modelos gerados.

Os modelos gerados foram: modelo de dispersão linear Poisson ( $\phi = 1$ ), com  $\log \mu_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell}$ , em que  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = -1$  e  $\beta_3 = -2$ ; modelo de dispersão linear normal inversa, com  $\mu_\ell^{-1} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell}$ , em que  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = -1$  e  $\phi = 2, 5$ ; modelo de dispersão não linear gama, com  $\log \mu_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + x_{3\ell}^{\beta_3}$ , em que  $\beta_1 = 1/2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 2$  e  $\phi = 2$ . Os modelos de dispersão linear normal inversa e não linear gama foram ajustados com  $\lambda = \phi$  e  $\lambda = \log \phi$ .

Comparamos a matriz  $\tilde{\text{Cov}}_2(\tilde{\theta})$  e a inversa da matriz da informação de Fisher aplicada na estimativa  $\tilde{\theta}$  do parâmetro  $\theta$ ,  $\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1}$ , com a matriz de covariâncias amostral. As primeiras duas entradas das Tabelas 4.1 a 4.5 são  $\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} [\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1}]_i$  e  $\tilde{\text{Cov}}_2(\tilde{\theta}) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} [\tilde{\text{Cov}}_2(\tilde{\theta})]_i$ . A terceira entrada é a matriz de covariâncias amostral de  $\tilde{\theta}^{(1)}, \dots, \tilde{\theta}^{(5000)}$ .

Pelas Tabelas 4.1 a 4.5, notamos, para todo valor de  $n$ , que, em geral, as covariâncias amostrais são maiores, em valor absoluto, do que as covariâncias de ordens  $n^{-1}$  e  $n^{-2}$ . Observamos também que, em geral, as covariâncias de segunda ordem são mais próximas das covariâncias amostrais do que as covariâncias de primeira ordem. Além disso, a diferença entre as covariâncias de primeira e segunda ordens é menor do que a diferença entre as covariâncias de segunda ordem e as amostrais.

No modelo de dispersão linear Poisson (Tabela 4.1) a partir de  $n = 20$ , as três covariâncias assumem valores muito próximos. Para o modelo linear normal inversa (Tabelas 4.2 e 4.3), observamos que a transformação no parâmetro  $\phi$  não parece afetar as relações observadas entre as três covariâncias. Para o modelo de dispersão não linear gama, no entanto, notamos que para a situação em que  $\lambda = \phi$  (Tabela 4.4), a variância amostral de  $\hat{\lambda}$  é menor do que a variância de segunda ordem.

Pelas Tabelas 4.2 a 4.5, notamos, também, que para os modelos de dispersão linear normal inversa e não linear gama, as covariâncias de primeira segunda ordens entre os componentes do vetor  $\beta$  e  $\lambda$  são nulas e as respectivas covariâncias amostrais são bem pequenas.

Comparando as Tabelas 4.2 e 4.3, para o modelo de dispersão normal inversa, podemos perceber que, enquanto os elementos da matriz de covariâncias do vetor  $\hat{\beta}$  são maiores em valor absoluto para  $\lambda = \log \phi$  do que para  $\lambda = \phi$ , a variância de  $\hat{\lambda}$  é menor. Este mesmo comportamento é observado no modelo de dispersão gama, Tabelas 4.4 e 4.5.



**Tabela 4.1:**  $\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e a matriz de covariâncias amostral, no MD-Poisson.

	$n = 10$			$n = 20$		
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\beta_1$	0,194	-0,222	-0,146	0,071	-0,070	-0,072
	0,189	-0,216	-0,142	0,070	-0,069	-0,071
	0,184	-0,209	-0,137	0,070	-0,069	-0,071
$\beta_2$		0,461	-0,027		0,156	-0,008
		0,448	-0,027		0,154	-0,008
		0,436	-0,033		0,153	-0,008
$\beta_3$			0,402			0,200
			0,390			0,198
			0,379			0,197
	$n = 30$			$n = 40$		
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$\beta_1$	0,030	-0,025	-0,037	0,017	-0,015	-0,023
	0,030	-0,025	-0,037	0,017	-0,015	-0,023
	0,030	-0,025	-0,037	0,017	-0,015	-0,023
$\beta_2$		0,089	-0,029		0,056	-0,017
		0,088	-0,028		0,056	-0,017
		0,088	-0,028		0,055	-0,017
$\beta_3$			0,132			0,091
			0,131			0,090
			0,131			0,090

**Tabela 4.2:**  $\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e a matriz de covariâncias amostral, no MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .

	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,963	-0,714	-0,947	0,000	0,450	-0,392	-0,423	0,000
	1,012	-0,758	-0,979	0,000	0,460	-0,400	-0,429	0,000
	1,382	-1,030	-1,343	-0,034	0,525	-0,448	-0,501	0,001
$\beta_2$		1,737	0,085	0,000		0,893	0,056	0,000
		1,817	0,102	0,000		0,906	0,060	0,000
		2,576	0,072	-0,123		1,017	0,070	0,008
$\beta_3$			1,442	0,000			0,718	0,000
			1,470	0,000			0,724	0,000
			2,067	0,090			0,847	-0,008
$\lambda$				8,888				1,281
				13,332				1,601
				18,739				1,794
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,224	-0,188	-0,209	0,000	0,174	-0,148	-0,164	0,000
	0,227	-0,190	-0,210	0,000	0,176	-0,149	-0,164	0,000
	0,257	-0,201	-0,248	0,001	0,189	-0,162	-0,176	-0,002
$\beta_2$		0,564	-0,076	0,000		0,361	-0,010	0,000
		0,567	-0,076	0,000		0,363	-0,010	0,000
		0,606	-0,087	0,000		0,391	-0,010	-0,001
$\beta_3$			0,460	0,000			0,341	0,000
			0,463	0,000			0,342	0,000
			0,539	0,002			0,368	0,007
$\lambda$				0,653				0,432
				0,762				0,486
				0,795				0,488

**Tabela 4.3:**  $\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e a matriz de covariâncias amostral, no MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .

	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	1,449	-1,548	-1,516	0,000	0,541	-0,439	-0,591	0,000
	1,467	-1,580	-1,524	0,000	0,544	-0,442	-0,592	0,000
	2,047	-2,192	-2,135	0,010	0,639	-0,552	-0,698	-0,007
$\beta_2$		2,095	1,454	0,000		0,695	0,336	0,000
		2,161	1,469	0,000		0,703	0,337	0,000
		2,994	2,041	-0,001		0,831	0,402	0,005
$\beta_3$			1,948	0,000			0,852	0,000
			1,971	0,000			0,856	0,000
			2,755	-0,012			1,008	0,007
$\lambda$				0,200				0,100
				0,280				0,120
				0,337				0,122
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,331	-0,235	-0,346	0,000	0,257	-0,201	-0,265	0,000
	0,312	-0,237	-0,346	0,000	0,257	-0,202	-0,265	0,000
	0,342	-0,256	-0,382	0,000	0,276	-0,216	-0,284	-0,002
$\beta_2$		0,427	0,134	0,000		0,339	0,101	0,000
		0,431	0,134	0,000		0,340	0,100	0,000
		0,459	0,145	-0,001		0,368	0,108	0,001
$\beta_3$			0,565	0,000			0,426	0,000
			0,567	0,000			0,427	0,000
			0,631	0,001			0,458	0,001
$\lambda$				0,067				0,050
				0,076				0,055
				0,074				0,056

**Tabela 4.4:**  $\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e a matriz de covariâncias amostral, no MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,276	-0,308	-0,080	0,000	0,115	-0,090	-0,043	0,000
	0,311	-0,351	-0,091	0,000	0,122	-0,096	-0,046	0,000
	0,419	-0,479	-0,121	-0,026	0,133	-0,105	-0,050	-0,005
$\beta_2$		0,469	0,037	0,000		0,237	-0,022	0,000
		0,536	0,042	0,000		0,253	-0,024	0,000
		0,729	0,060	0,047		0,296	-0,032	0,011
$\beta_3$			0,089	0,000			0,048	0,000
			0,104	0,000			0,051	0,000
			0,137	0,031			0,058	0,001
$\lambda$				4,130				0,679
				11,070				1,242
				8,083				0,883
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,106	-0,121	-0,027	0,000	0,060	-0,068	-0,013	0,000
	0,111	-0,127	-0,028	0,000	0,061	-0,070	-0,014	0,000
	0,123	-0,143	-0,031	-0,001	0,066	-0,077	-0,014	-0,002
$\beta_2$		0,200	0,011	0,000		0,138	-0,003	0,000
		0,209	0,012	0,000		0,142	-0,003	0,000
		0,232	0,014	0,002		0,155	-0,004	-0,001
$\beta_3$			0,024	0,000			0,016	0,000
			0,025	0,000			0,017	0,000
			0,027	0,000			0,018	0,000
$\lambda$				0,350				0,233
				0,542				0,328
				0,411				0,253

**Tabela 4.5:**  $\tilde{K}_{\theta, \theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e a matriz de covariâncias amostral, no MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .

	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,459	-0,483	-0,464	0,000	0,198	-0,165	-0,207	0,000
	0,526	-0,561	-0,537	0,000	0,210	-0,176	-0,221	0,000
	0,745	-0,795	-0,765	-0,005	0,246	-0,205	-0,262	-0,001
$\beta_2$		0,646	0,415	0,000		0,245	0,115	0,000
		0,747	0,493	0,000		0,261	0,123	0,000
		1,060	0,703	0,003		0,303	0,147	0,004
$\beta_3$			0,649	0,000			0,313	0,000
			0,743	0,000			0,333	0,000
			1,068	0,005			0,397	-0,003
$\lambda$				0,180				0,088
				0,257				0,107
				0,295				0,109
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\lambda$
$\beta_1$	0,113	-0,088	-0,118	0,000	0,093	-0,076	-0,090	0,000
	0,118	-0,092	-0,124	0,000	0,097	-0,079	-0,093	0,000
	0,131	-0,102	-0,140	0,000	0,105	-0,087	-0,101	-0,001
$\beta_2$		0,151	0,041	0,000		0,123	0,030	0,000
		0,157	0,044	0,000		0,127	0,032	0,000
		0,173	0,049	-0,001		0,137	0,036	0,000
$\beta_3$			0,207	0,000			0,154	0,000
			0,216	0,000			0,160	0,000
			0,243	0,002			0,172	-0,001
$\lambda$				0,058				0,044
				0,067				0,048
				0,067				0,050

## 4.2 Testes de Wald modificados

Nesta seção, apresentamos três versões alternativas ao teste de Wald usando o estimador  $\hat{\theta}$ , o estimador corrigido  $\tilde{\theta}$ , e suas respectivas matrizes de covariâncias de segunda ordem.

Considere o vetor de parâmetros  $\theta = (\theta_1^\top, \theta_2^\top)^\top$  de dimensão  $(p+1) \times 1$ . Queremos testar as hipóteses

$$\mathcal{H} : \theta_1 = \theta_1^{(0)} \text{ vs } \mathcal{A} : \theta_1 \neq \theta_1^{(0)}, \quad (4.60)$$

em que  $\theta_1 = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$  é um vetor  $q$ -dimensional de parâmetros de interesse e  $\theta_2 = (\theta_{q+1}, \dots, \theta_{p+1})^\top$ , um vetor de parâmetros de perturbação  $(p+1-q)$ -dimensional, sendo  $\theta_1^{(0)}$  um vetor especificado. Sejam  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1^\top, \hat{\theta}_2^\top)^\top$  e  $\check{\theta} = (\theta_1^{(0)\top}, \check{\theta}_2^\top)^\top$ , as estimativas de máxima verossimilhança irrestrita de  $\theta$  e restrita de  $\theta$  a  $\mathcal{H}$ , respectivamente.

A partição  $\theta = (\theta_1^\top, \theta_2^\top)^\top$  conduz às correspondentes partições na matriz de informação de Fisher,  $K = K_{\theta, \theta}$ , e na sua inversa  $K^{-1} = K_{\theta, \theta}^{-1}$ , dadas por

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \text{ e } K^{-1} = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

A estatística clássica do teste de Wald é

$$W_0 = (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \{ \hat{K}^{11} \}^{-1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}), \quad (4.62)$$

em que  $\hat{K}^{11}$  é a matriz  $K^{11}$  avaliada em  $\hat{\theta}$ .

Na primeira modificação, substituímos  $\hat{K}^{11}$  pela matriz de covariâncias de segunda ordem  $\hat{\text{Cov}}_2^{11}(\hat{\theta}_1)$ , obtida de

$$\text{Cov}_2(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}_2(\hat{\theta})_{11} & \text{Cov}_2(\hat{\theta})_{12} \\ \text{Cov}_2(\hat{\theta})_{21} & \text{Cov}_2(\hat{\theta})_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \text{Cov}_2^{-1}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}_2^{11}(\hat{\theta}) & \text{Cov}_2^{12}(\hat{\theta}) \\ \text{Cov}_2^{21}(\hat{\theta}) & \text{Cov}_2^{22}(\hat{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

o que implica

$$W_1 = (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \{ \hat{\text{Cov}}_2^{11}(\hat{\theta}_1) \}^{-1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}). \quad (4.64)$$

Na segunda modificação, substituímos o estimador  $\hat{\theta}_1$  pelo estimador corrigido pelo viés  $\tilde{\theta}_1$  e avaliamos a matriz  $K^{11}$  em  $\tilde{\theta}$ , que denotamos por  $\tilde{K}^{11}$ , resultando em

$$W_2 = (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \{ \tilde{K}^{11} \}^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}). \quad (4.65)$$

A última modificação é feita quando substituímos  $\hat{\theta}_1$  por  $\tilde{\theta}_1$  e  $\hat{K}^{11}$  pela estimativa da matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador corrigido pelo viés,  $\tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1)$ , obtida das partições

$$\text{Cov}_2(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}_2(\tilde{\theta})_{11} & \text{Cov}_2(\tilde{\theta})_{12} \\ \text{Cov}_2(\tilde{\theta})_{21} & \text{Cov}_2(\tilde{\theta})_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \text{Cov}_2^{-1}(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}_2^{11}(\tilde{\theta}) & \text{Cov}_2^{12}(\tilde{\theta}) \\ \text{Cov}_2^{21}(\tilde{\theta}) & \text{Cov}_2^{22}(\tilde{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

resultando em

$$W_3 = (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \}^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}). \quad (4.67)$$

### 4.2.1 Ordem do teste

Podemos reescrever a estatística (4.67) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
W_3 &= (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} (\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}) \\
&= \left[ (\hat{\theta}_1 - d(\hat{\theta})) - \theta_1^{(0)} \right]^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} \left[ (\hat{\theta}_1 - d(\hat{\theta})) - \theta_1^{(0)} \right] \\
&= \left[ (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}) - d(\hat{\theta}) \right]^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} \left[ (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}) - d(\hat{\theta}) \right] \\
&= (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}) \\
&\quad - 2 (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} d(\hat{\theta}) + d(\hat{\theta})^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} d(\hat{\theta}).
\end{aligned}$$

O viés  $d(\hat{\theta})$  e a diferença  $\tilde{\theta}_1 - \theta_1^{(0)}$  são de ordem  $n^{-1}$ . Pela definição (3.25), podemos ver que  $\text{Cov}_2(\tilde{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{P}} K_{\theta, \theta}$ , o que implica que a matriz  $\left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1}$  é de ordem  $n$ . Além disso, provar que

$$(\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})^\top \left\{ \tilde{\text{Cov}}_2^{11}(\tilde{\theta}_1) \right\}^{-1} (\hat{\theta}_1 - \theta_1^{(0)})$$

converge em distribuição para uma distribuição qui-quadrado com  $p - q$  graus de liberdade é equivalente a provar que a estatística (4.62) converge em distribuição para uma distribuição qui-quadrado com  $p - q$  graus de liberdade, o que já está provado na literatura. Então,

$$W_3 \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_{p-q}^2 + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Diferentemente ao que acontece com as correções de Bartlett e tipo-Bartlett a estatística (4.67) não altera a ordem de convergência da estatística do teste de Wald.

### 4.2.2 Resultados numéricos

Nos estudos de simulação que seguem, comparamos as estatísticas (4.62) a (4.67) por meio do tamanho empírico dos testes da hipótese  $\mathcal{H} : \theta_1 = \theta_1^{(0)}$  contra  $\mathcal{A} : \text{pelo menos uma das igualdades em } \mathcal{H} \text{ não é verificada}$ . Assumindo  $\mathcal{H}$  verdadeira, o tamanho empírico do teste é calculado para cada estatística como a proporção de vezes em que  $\mathcal{H}$  é rejeitada, fixado um nível nominal  $\alpha$  e um tamanho de amostra  $n$ . Foram utilizados os seguintes níveis nominais:  $\alpha = 1\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 10\%$ .

No primeiro estudo de simulação, geramos um MD-Poisson com  $\log \mu_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell}$ , em que  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = -1$  e  $\beta_3 = -2$ . Definimos três hipóteses nula a serem testadas:  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ ,  $\mathcal{H} : \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$  e  $\mathcal{H} : \beta_3 = -2$ .

No segundo estudo de simulação, geramos um MD-normal inversa com  $\mu_\ell^{-1} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell}$ , em que  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = -1$  e  $\phi = 2, 5$ . Ajustamos o modelo de duas formas, assumindo  $\lambda = \phi$  e  $\lambda = \log \phi$ . Definimos as seguintes hipóteses nula a serem testadas:  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ ,  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ ,  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$  e  $\mathcal{H} : \phi = 2, 5$ .

Para o terceiro estudo, geramos um MD-gama com  $\log \mu_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + x_{3\ell}^{\beta_3}$ , em que  $\beta_1 = 1/2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 2$  e  $\phi = 2$ . Como no modelo anterior, ajustamos o modelo de duas formas, com  $\lambda = \phi$  e  $\lambda = \log \phi$ . As hipóteses nula foram:  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ ,  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ ,  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$  e  $\mathcal{H} : \phi = 2$ .

No último estudo de simulação, geramos um MD-gama inversa com  $\log \mu_\ell = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + x_{3\ell}^{\beta_3}$ , em que  $\beta_1 = 1/2$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 2$  e  $\phi = 2$ . Neste estudo admitimos que o parâmetro de precisão  $\phi$

é conhecido e as hipóteses nulas testadas foram:  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ ,  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$  e  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ . Os resultados estão apresentados nas Tabelas 4.6 a 4.13 e nas Figuras 4.1 a 4.60.

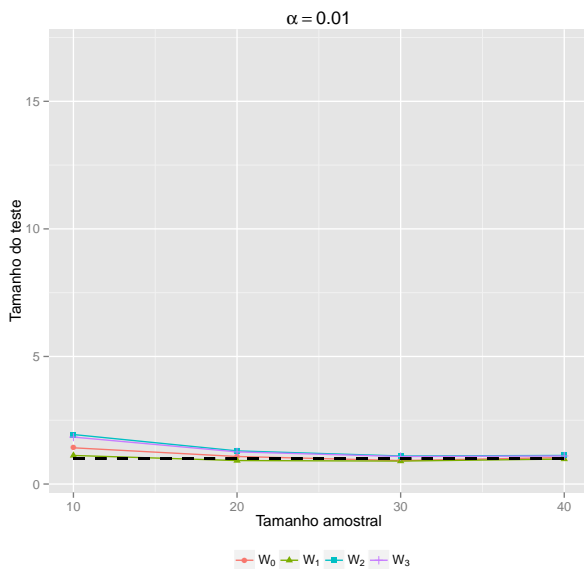
Como podemos ver na Tabela 4.6 e nas Figuras 4.1 a 4.9, parece não haver uma estatística que apresente sempre um desempenho melhor em relação às demais no modelo Poisson. Observamos também que, os tamanhos empíricos dos testes já estão bem próximos dos níveis nominais.

Para a normal inversa, Tabelas 4.7 e 4.8 e Figuras 4.10 a 4.27, os resultados foram mais interessantes. Tanto para  $\lambda = \phi$  quanto para  $\lambda = \log \phi$ , em geral, os tamanhos empíricos dos testes baseados em  $W_3$  estão sempre mais próximos dos níveis nominais, seguidos dos tamanhos empíricos dos testes baseados em  $W_2$ . Quando testamos  $\mathcal{H} : \phi = 2, 5$ , Tabela 4.9 e Figuras 4.28 a 4.30, podemos perceber que o teste de Wald original apresenta melhores resultados, ou seja, os tamanhos empíricos de  $W_0$  estão mais próximos dos níveis nominais, principalmente para  $\alpha = 5\%$  e  $10\%$ .

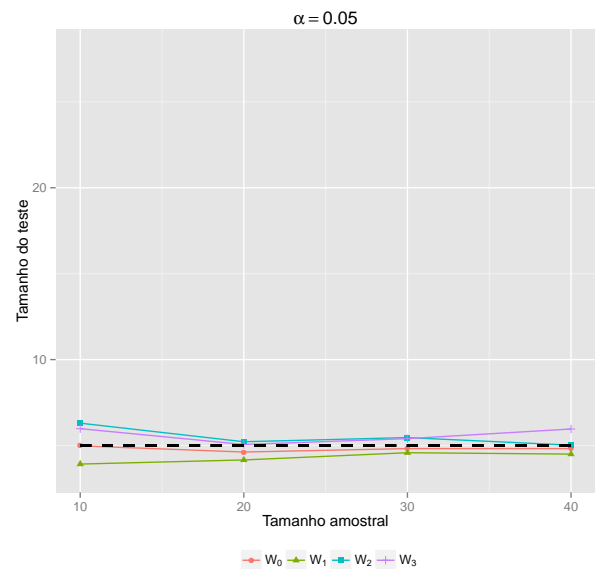
Os resultados no modelo gama são parecidos com os do modelo normal inversa (Tabelas 4.10 e 4.11 e Figuras 4.31 a 4.48). Assim como no modelo anterior, quando testamos  $\mathcal{H} : \phi = 2$ , Tabela 4.12 e Figuras 4.49 a 4.51, a estatística  $W_0$  apresentou tamanhos empíricos mais próximos dos níveis nominais.

Por fim, no modelo de dispersão não linear gama inversa, Tabela 4.13 e Figuras 4.52 a 4.60, temos que os tamanhos empíricos associados à estatística  $W_3$  estão mais próximos do níveis nominais, seguida da estatística  $W_1$ . Neste caso, apenas a adoção da matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV já melhora o teste de Wald.

Quando o número de parâmetros testados em  $\mathcal{H}$  diminui, os tamanhos empíricos de todos os testes aproximam-se dos correspondentes níveis nominais. Percebe-se também, que o desempenho das quatro estatísticas é melhor para  $\lambda = \phi$ .

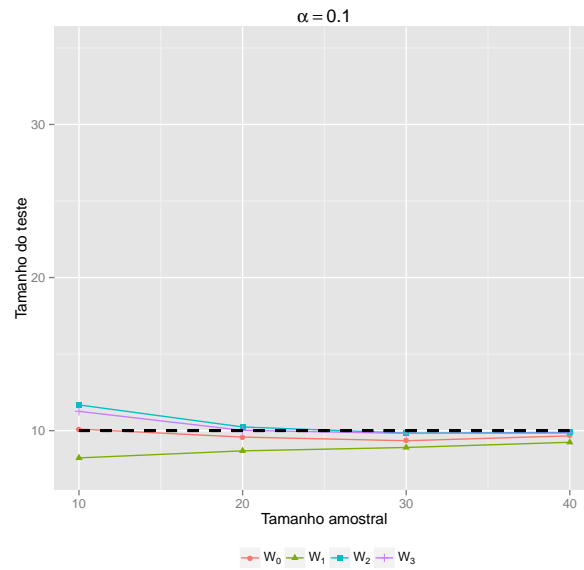


**Figura 4.1:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-Poisson.

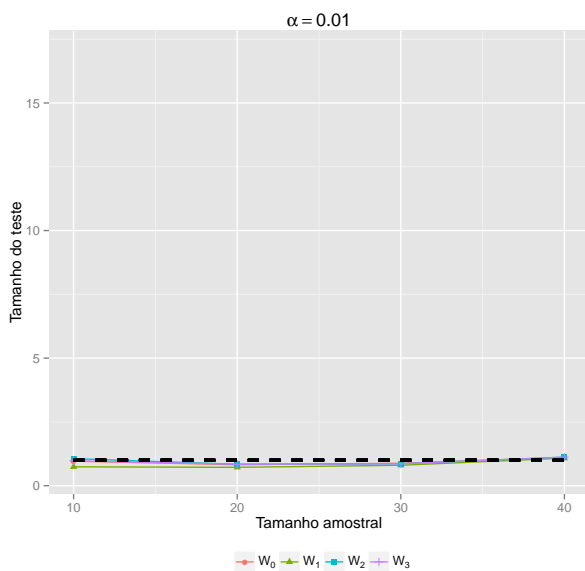


**Figura 4.2:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-Poisson.

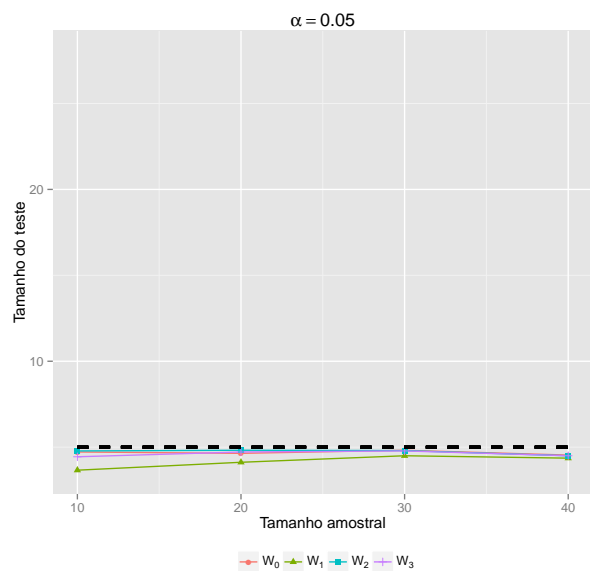




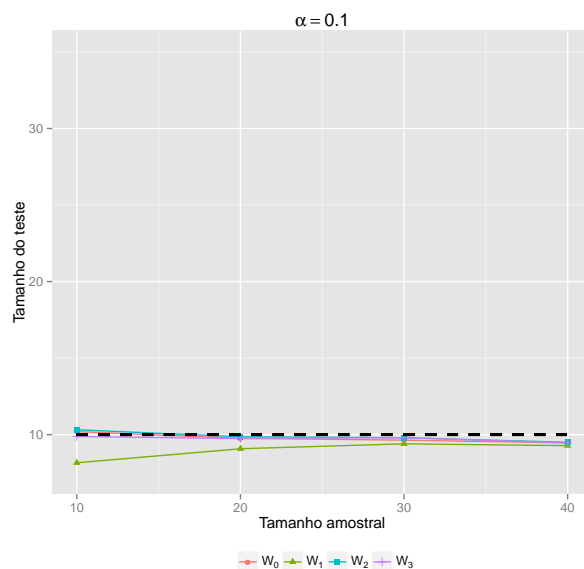
**Figura 4.3:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0, 10$ , MD-Poisson.*



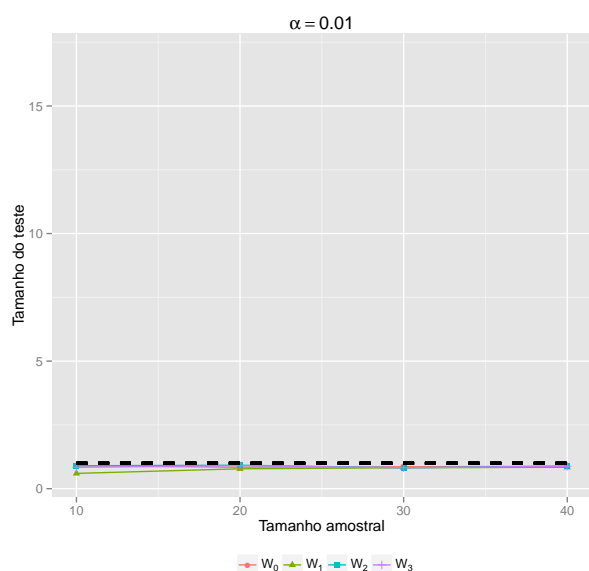
**Figura 4.4:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0, 01$ , MD-Poisson.*



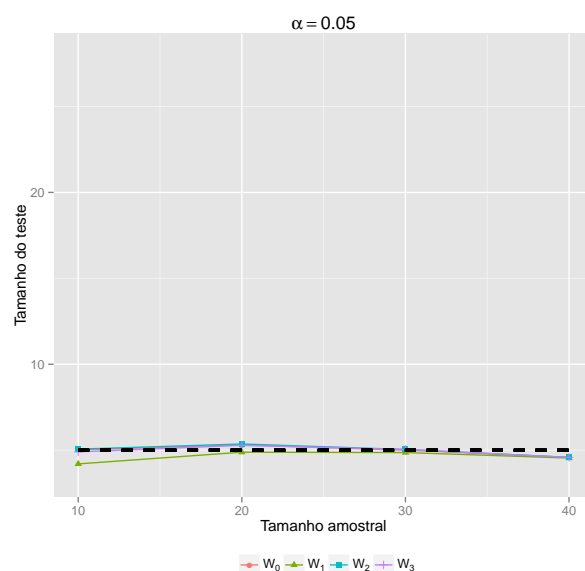
**Figura 4.5:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0, 05$ , MD-Poisson.*



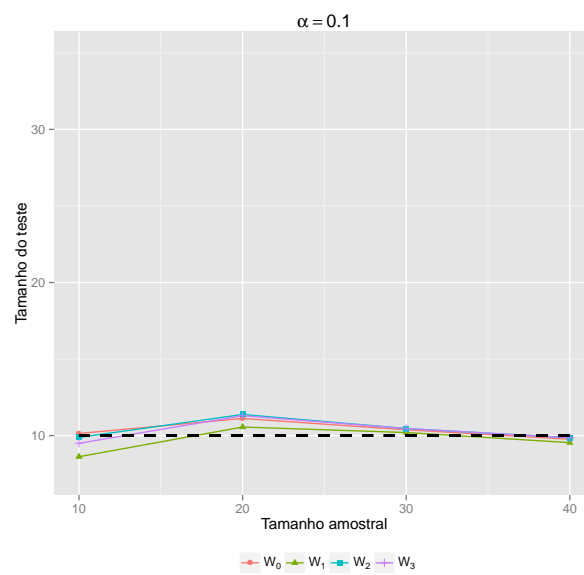
**Figura 4.6:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-Poisson.



**Figura 4.7:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-Poisson.



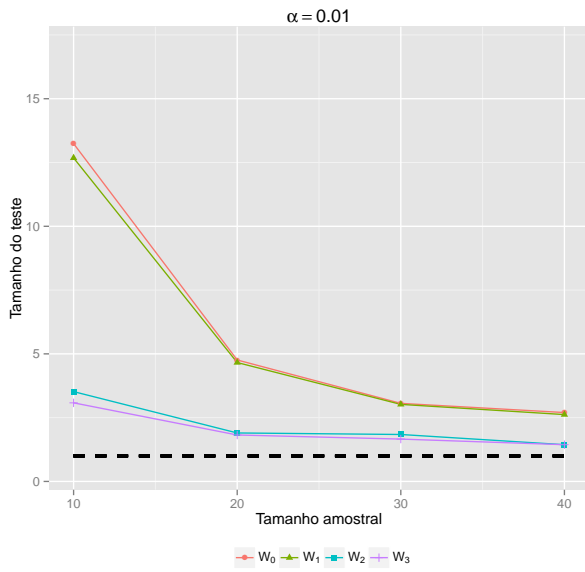
**Figura 4.8:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-Poisson.



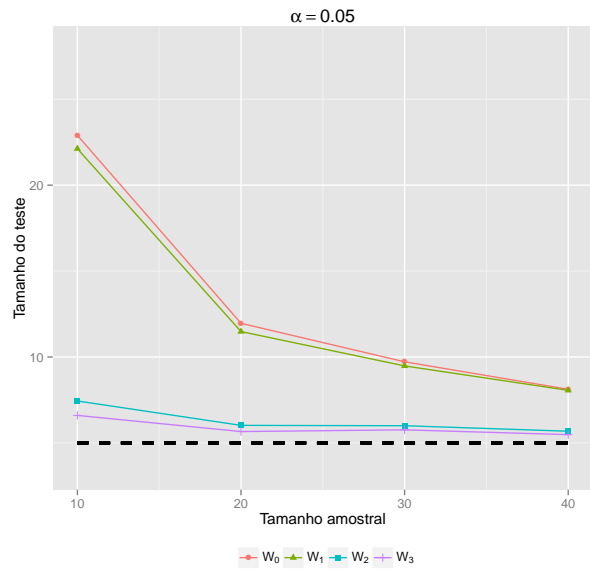
**Figura 4.9:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-Poisson.*

**Tabela 4.6:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MD-Poisson.*

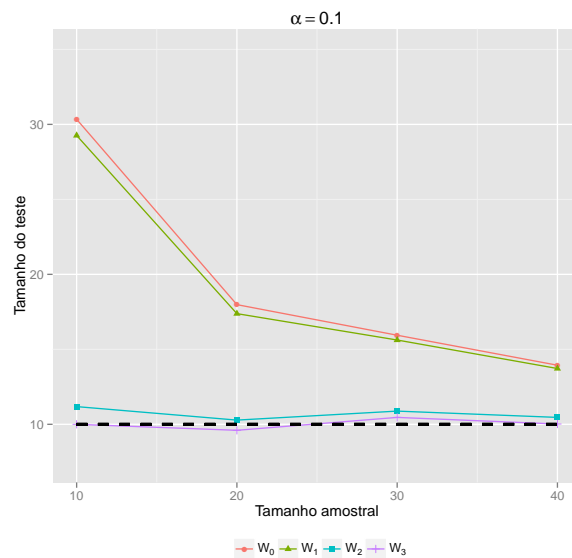
$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$					
10	1,0	1,42	1,12	1,94	1,84
	5,0	4,98	3,92	6,30	5,98
	10,0	10,10	8,22	11,68	11,26
20	1,0	1,08	0,92	1,30	1,26
	5,0	4,62	4,16	5,22	5,06
	10,0	9,58	8,68	10,24	10,02
30	1,0	0,92	0,90	1,10	1,08
	5,0	4,82	4,58	5,46	5,40
	10,0	9,34	8,90	9,84	9,82
40	1,0	1,04	0,98	1,12	1,10
	5,0	4,82	4,50	5,02	4,96
	10,0	9,66	9,24	9,88	9,84
$\mathcal{H} : \beta_2 = -1, \beta_3 = -2$					
10	1,0	0,96	0,74	1,06	0,98
	5,0	4,72	3,66	4,78	4,44
	10,0	10,20	8,16	10,32	9,88
20	1,0	0,82	0,72	0,84	0,84
	5,0	4,64	4,12	4,82	4,72
	10,0	9,76	9,08	9,86	9,74
30	1,0	0,88	0,80	0,86	0,86
	5,0	4,82	4,50	4,80	4,78
	10,0	9,64	9,40	9,80	9,80
40	1,0	1,10	1,08	1,12	1,12
	5,0	4,54	4,36	4,50	4,50
	10,0	9,46	9,28	9,50	9,46
$\mathcal{H} : \beta_3 = -2$					
10	1,0	0,90	0,60	0,90	0,84
	5,0	5,02	4,20	5,06	4,90
	10,0	10,14	8,62	9,88	9,50
20	1,0	0,84	0,78	0,92	0,90
	5,0	5,30	4,88	5,36	5,28
	10,0	11,12	10,56	11,38	11,30
30	1,0	0,86	0,82	0,82	0,82
	5,0	5,00	4,86	5,04	5,04
	10,0	10,38	10,20	10,46	10,46
40	1,0	0,88	0,84	0,88	0,88
	5,0	4,58	4,54	4,58	4,58
	10,0	9,76	9,54	9,86	9,86



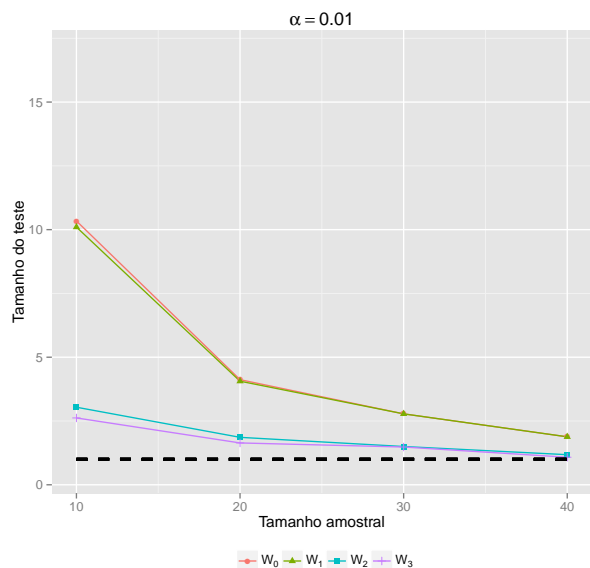
**Figura 4.10:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .*



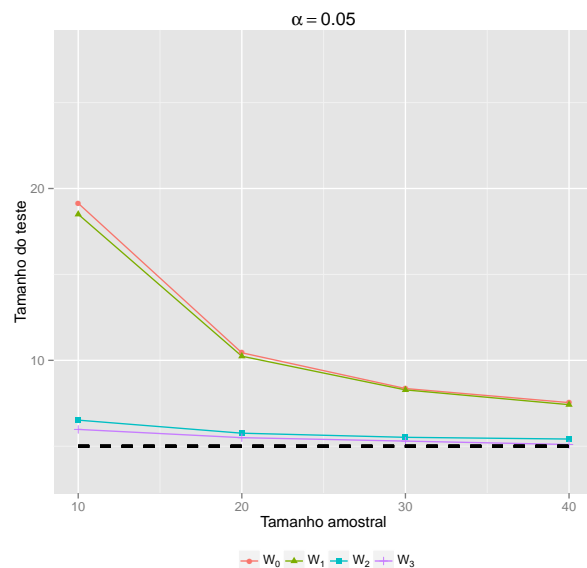
**Figura 4.11:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .*



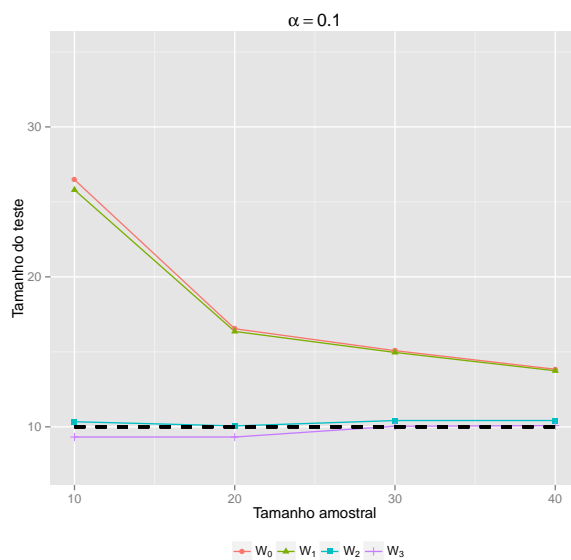
**Figura 4.12:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .*



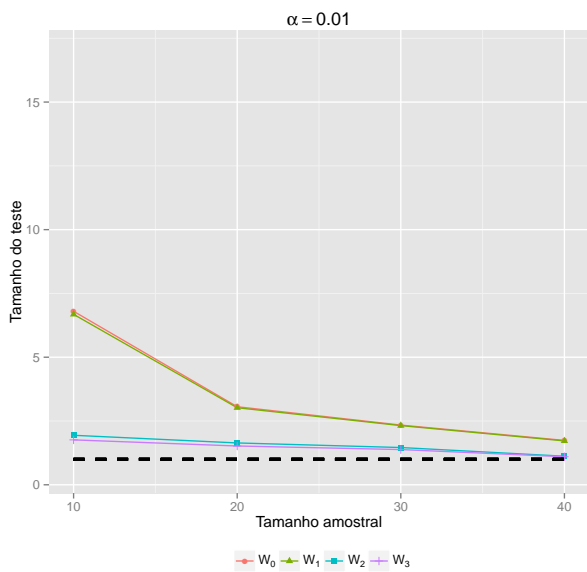
**Figura 4.13:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .



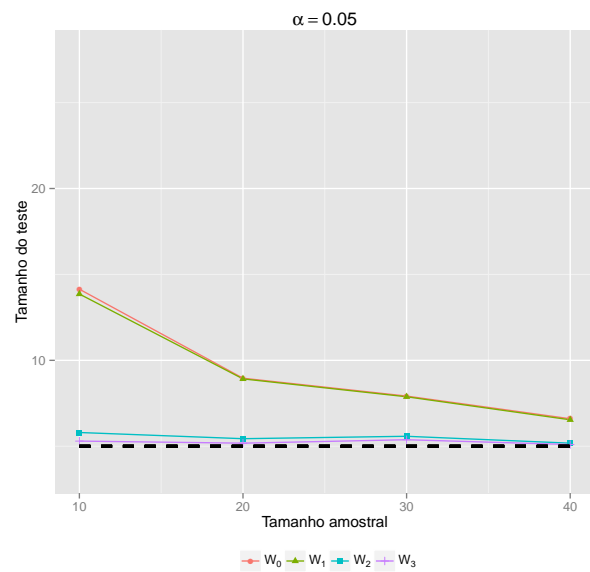
**Figura 4.14:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .



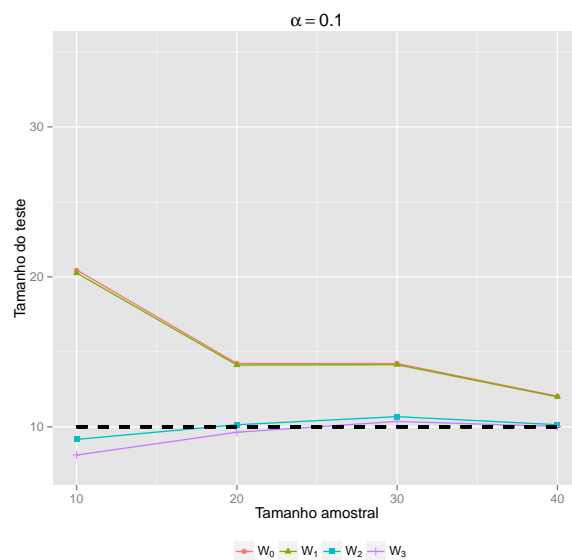
**Figura 4.15:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .



**Figura 4.16:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .



**Figura 4.17:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .

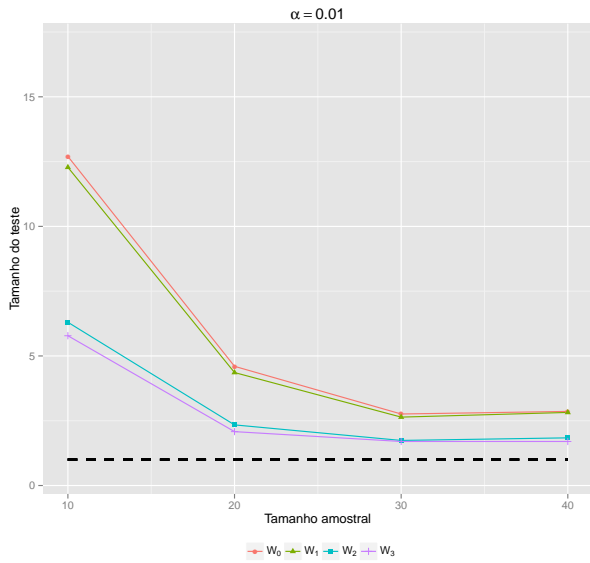


**Figura 4.18:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .

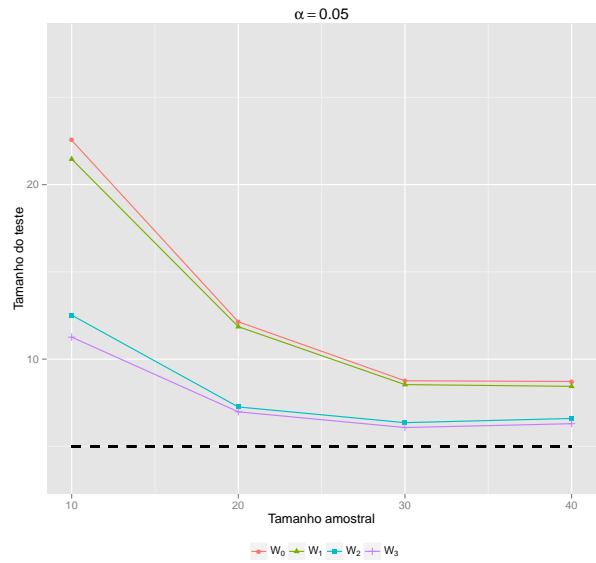
**Tabela 4.7:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \phi$ .*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$					
10	1,0	13,24	12,68	3,52	3,08
	5,0	22,90	22,12	7,44	6,60
	10,0	30,34	29,26	11,18	10,00
20	1,0	4,76	4,66	1,90	1,82
	5,0	11,96	11,48	6,02	5,66
	10,0	17,98	17,38	10,28	9,60
30	1,0	3,06	3,02	1,84	1,66
	5,0	9,72	9,48	6,00	5,76
	10,0	15,94	15,62	10,88	10,46
40	1,0	2,70	2,62	1,44	1,44
	5,0	8,12	8,06	5,68	5,48
	10,0	13,94	13,72	10,46	10,02
$\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$					
10	1,0	10,34	10,10	3,04	2,62
	5,0	19,14	18,50	6,52	5,98
	10,0	26,48	25,80	10,34	9,32
20	1,0	4,12	4,06	1,86	1,64
	5,0	10,44	10,24	5,76	5,50
	10,0	16,54	16,36	10,06	9,32
30	1,0	2,78	2,78	1,50	1,48
	5,0	8,36	8,28	5,52	5,30
	10,0	15,08	14,96	10,42	10,04
40	1,0	1,88	1,88	1,18	1,08
	5,0	7,54	7,42	5,42	5,10
	10,0	13,84	13,74	10,42	10,08
$\mathcal{H} : \beta_3 = -1$					
10	1,0	6,80	6,68	1,94	1,76
	5,0	14,14	13,86	5,80	5,30
	10,0	20,46	20,26	9,16	8,12
20	1,0	3,06	3,02	1,64	1,52
	5,0	8,96	8,92	5,44	5,18
	10,0	14,22	14,12	10,14	9,64
30	1,0	2,34	2,32	1,46	1,38
	5,0	7,92	7,88	5,58	5,38
	10,0	14,22	14,14	10,68	10,36
40	1,0	1,74	1,72	1,12	1,10
	5,0	6,60	6,54	5,18	5,10
	10,0	12,04	12,00	10,14	10,02

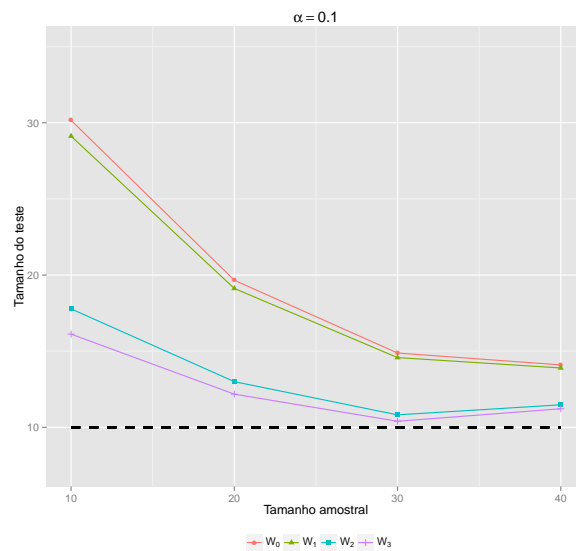




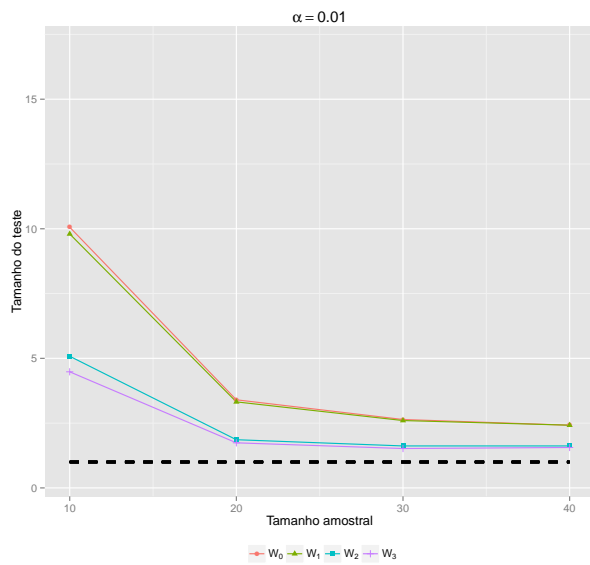
**Figura 4.19:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



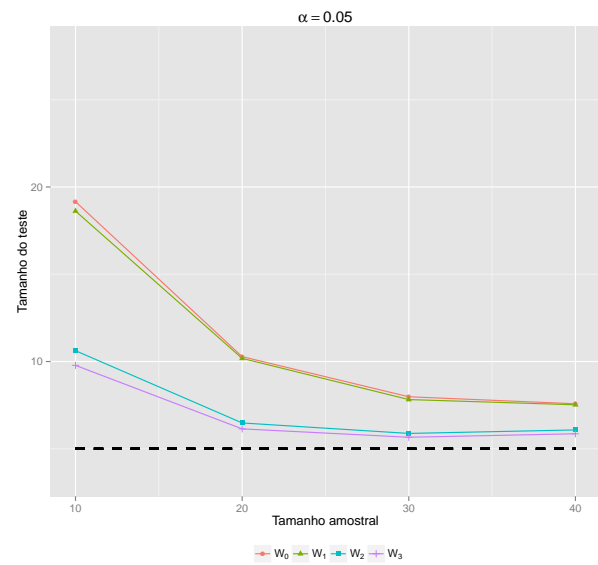
**Figura 4.20:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



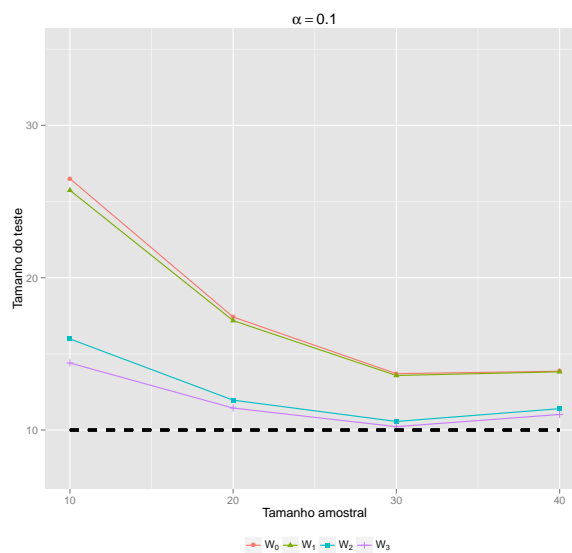
**Figura 4.21:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



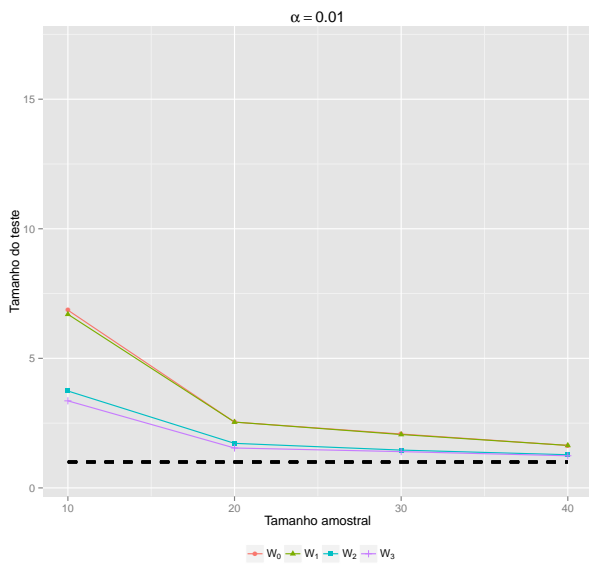
**Figura 4.22:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



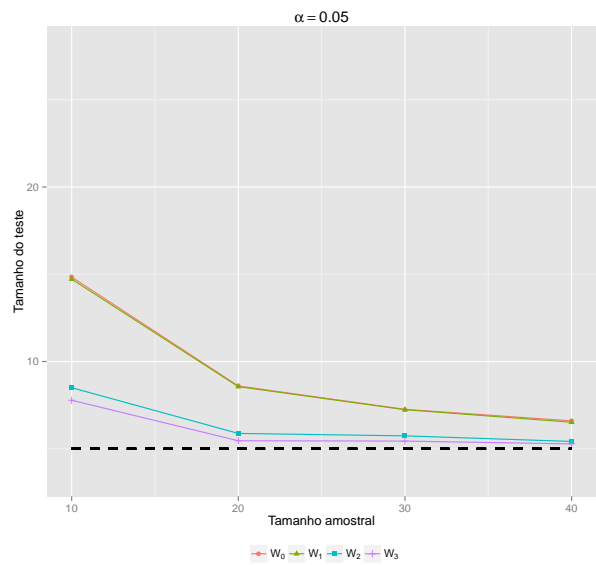
**Figura 4.23:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



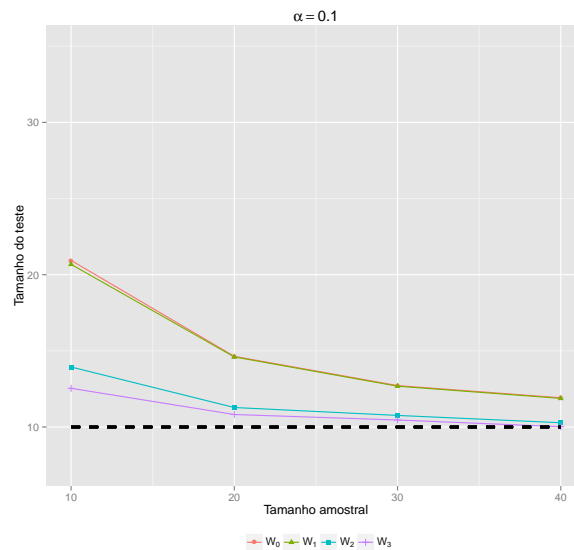
**Figura 4.24:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .



**Figura 4.25:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .*



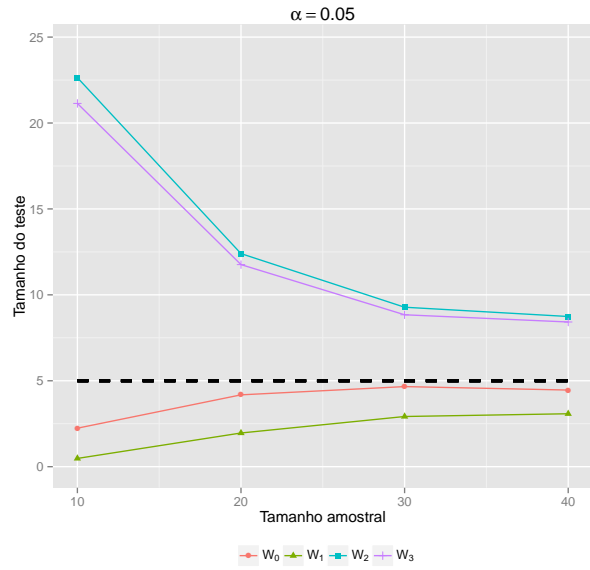
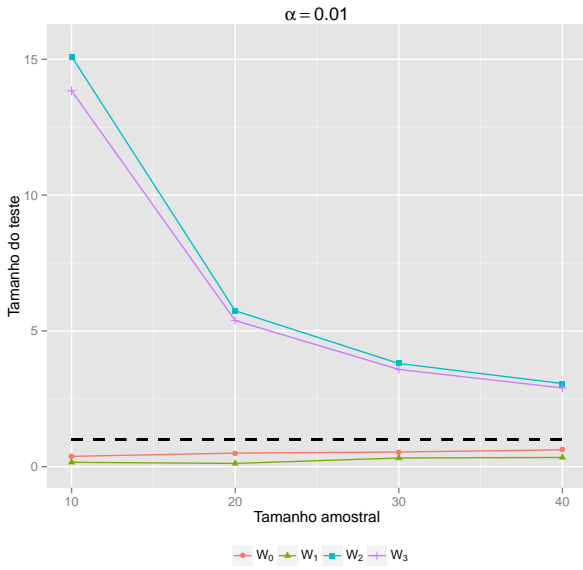
**Figura 4.26:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .*



**Figura 4.27:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = -1$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .*

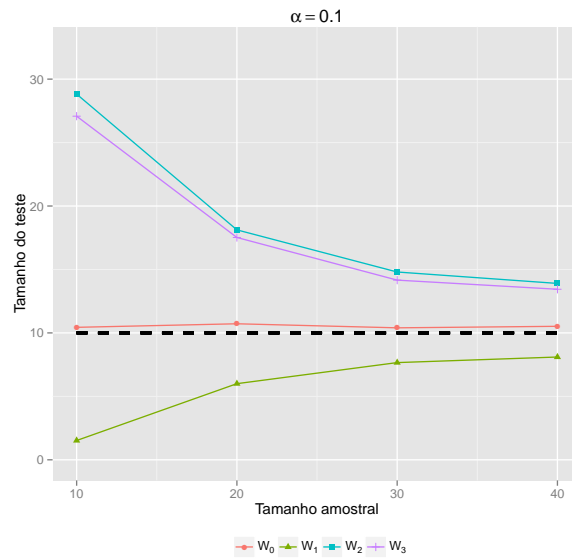
**Tabela 4.8:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0, W_1, W_2$  e  $W_3$ , MD-normal inversa, com  $\lambda = \log \phi$ .*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 3, \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$					
10	1,0	12,70	12,28	6,30	5,78
	5,0	22,54	21,46	12,52	11,26
	10,0	30,16	29,12	17,78	16,12
20	1,0	4,60	4,36	2,34	2,08
	5,0	12,14	11,86	7,26	6,98
	10,0	19,66	19,12	13,00	12,18
30	1,0	2,76	2,64	1,74	1,70
	5,0	8,76	8,54	6,36	6,08
	10,0	14,88	14,58	10,82	10,40
40	1,0	2,86	2,82	1,84	1,70
	5,0	8,72	8,44	6,60	6,30
	10,0	14,10	13,90	11,48	11,22
$\mathcal{H} : \beta_2 = 2, \beta_3 = -1$					
10	1,0	10,06	9,80	5,08	4,48
	5,0	19,16	18,62	10,62	9,78
	10,0	26,50	25,74	15,98	14,40
20	1,0	3,40	3,32	1,86	1,74
	5,0	10,28	10,18	6,48	6,14
	10,0	17,42	17,18	11,96	11,44
30	1,0	2,64	2,60	1,62	1,52
	5,0	7,98	7,82	5,88	5,66
	10,0	13,70	13,58	10,56	10,22
40	1,0	2,42	2,42	1,62	1,56
	5,0	7,58	7,52	6,08	5,86
	10,0	13,86	13,82	11,40	11,02
$\mathcal{H} : \beta_3 = -1$					
10	1,0	6,86	6,70	3,74	3,36
	5,0	14,84	14,72	8,50	7,78
	10,0	20,94	20,68	13,94	12,54
20	1,0	2,54	2,54	1,72	1,54
	5,0	8,60	8,56	5,88	5,46
	10,0	14,64	14,60	11,28	10,82
30	1,0	2,08	2,06	1,46	1,40
	5,0	7,26	7,24	5,74	5,44
	10,0	12,72	12,68	10,76	10,46
40	1,0	1,64	1,64	1,28	1,24
	5,0	6,60	6,52	5,42	5,28
	10,0	11,92	11,88	10,28	10,02



**Figura 4.28:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2,5$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-normal inversa.

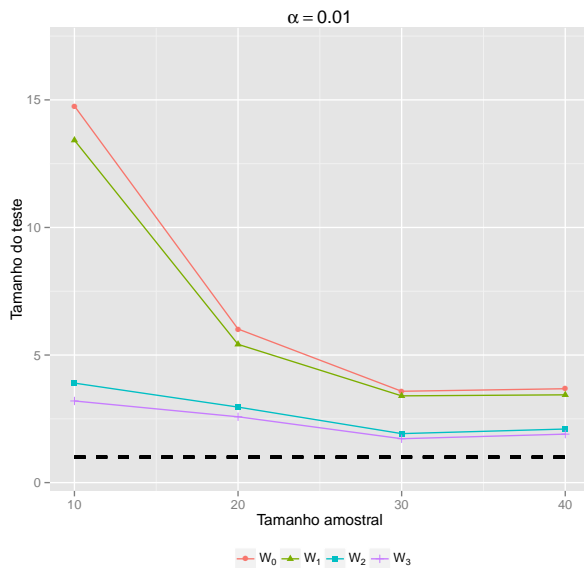
**Figura 4.29:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2,5$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-normal inversa.



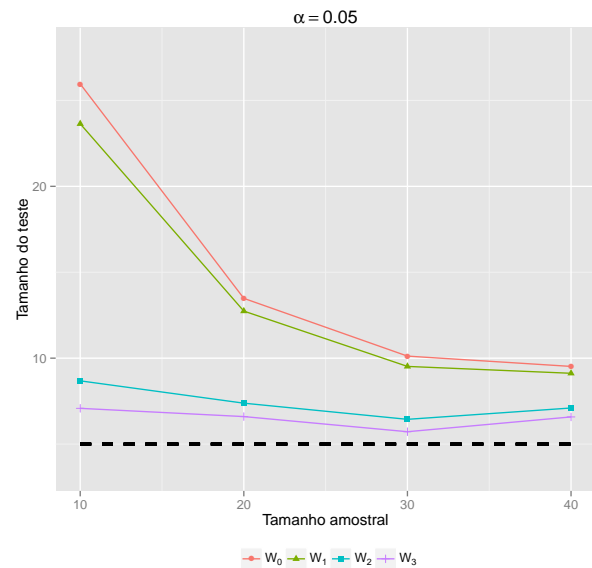
**Figura 4.30:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2,5$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-normal inversa.

**Tabela 4.9:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2, 5$ , MD-normal inversa.

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
10	1,0	0,38	0,16	15,10	13,84
	5,0	2,24	0,48	22,64	21,14
	10,0	10,44	1,52	28,82	27,08
20	1,0	0,50	0,12	5,74	5,38
	5,0	4,18	1,96	12,40	11,76
	10,0	10,72	6,00	18,12	17,52
30	1,0	0,54	0,32	3,80	3,58
	5,0	4,66	2,92	9,28	8,84
	10,0	10,40	7,66	14,80	14,16
40	1,0	0,62	0,34	3,06	2,90
	5,0	4,46	3,08	8,74	8,42
	10,0	10,52	8,10	13,90	13,44



**Figura 4.31:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .



**Figura 4.32:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

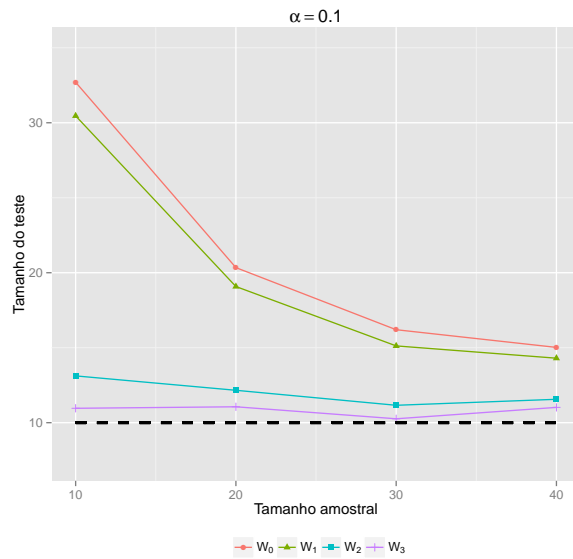


Figura 4.33: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

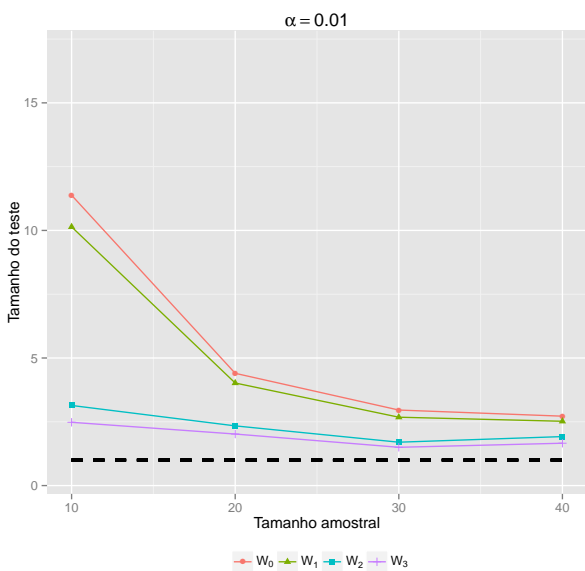


Figura 4.34: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

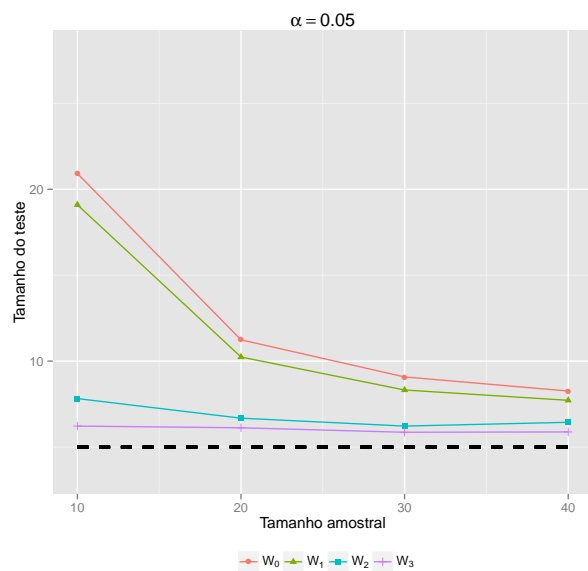
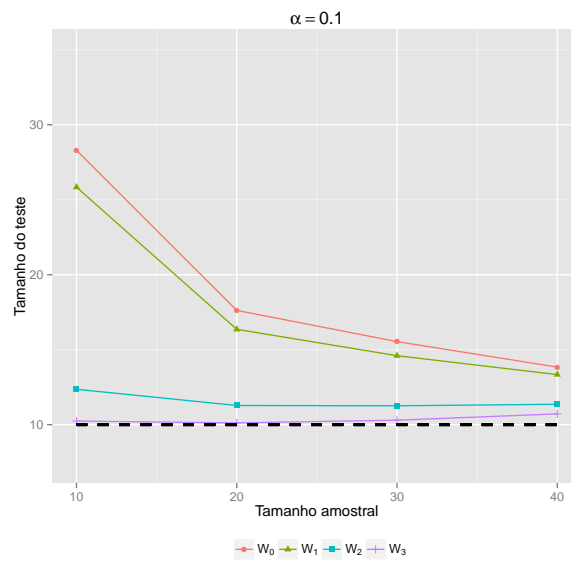
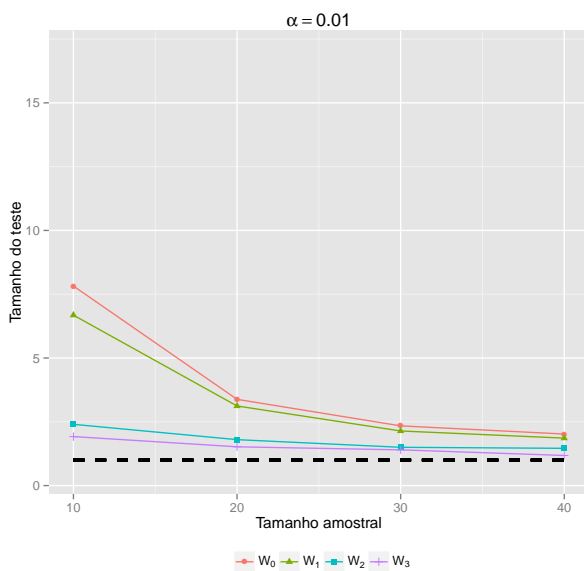


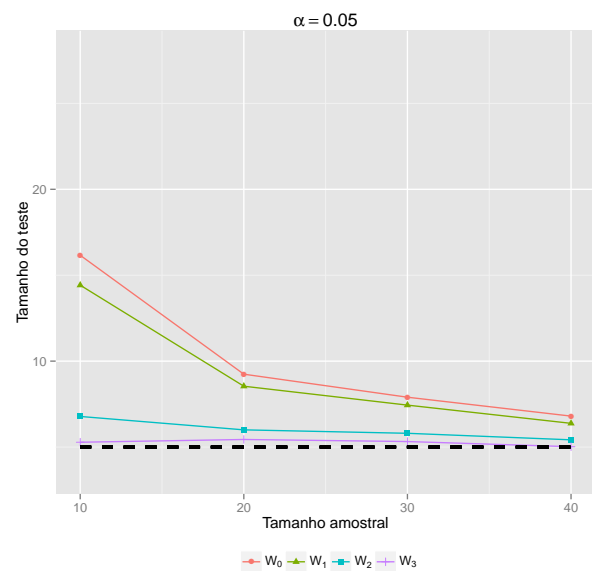
Figura 4.35: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .



**Figura 4.36:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

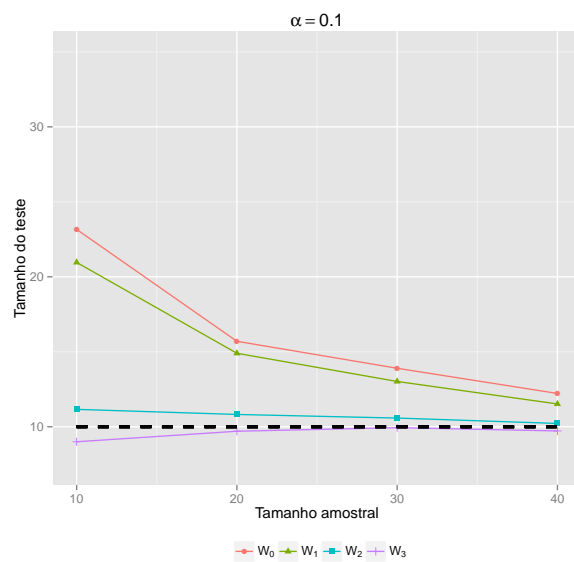


**Figura 4.37:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .



**Figura 4.38:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .

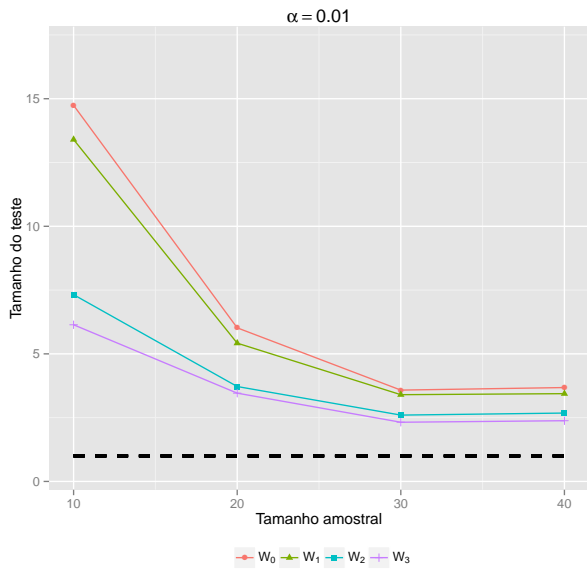




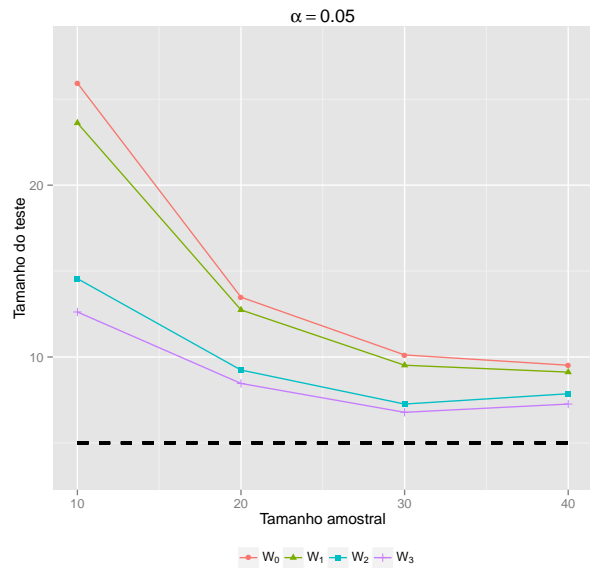
**Figura 4.39:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0, 10$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .*

**Tabela 4.10:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MD-gama, com  $\lambda = \phi$ .*

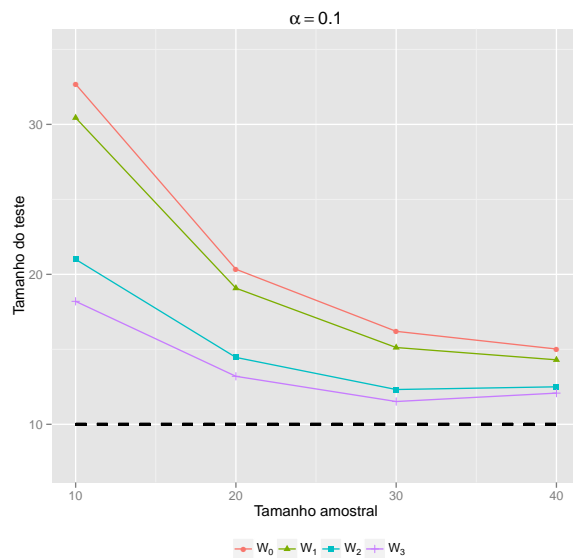
$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
10	1,0	14,76	13,42	3,90	3,20
	5,0	25,96	23,64	8,68	7,08
	10,0	32,70	30,46	13,12	10,96
20	1,0	6,02	5,42	2,96	2,58
	5,0	13,48	12,74	7,38	6,60
	10,0	20,34	19,08	12,16	11,06
30	1,0	3,58	3,40	1,92	1,72
	5,0	10,12	9,52	6,44	5,72
	10,0	16,20	15,12	11,16	10,26
40	1,0	3,68	3,44	2,10	1,90
	5,0	9,52	9,12	7,10	6,58
	10,0	15,02	14,30	11,56	11,02
$\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
10	1,0	11,38	10,14	3,14	2,48
	5,0	20,92	19,10	7,82	6,22
	10,0	28,30	25,84	12,36	10,24
20	1,0	4,40	4,02	2,34	2,02
	5,0	11,24	10,24	6,68	6,12
	10,0	17,62	16,36	11,28	10,12
30	1,0	2,96	2,68	1,70	1,50
	5,0	9,08	8,32	6,22	5,86
	10,0	15,54	14,60	11,26	10,30
40	1,0	2,72	2,52	1,92	1,66
	5,0	8,26	7,72	6,44	5,88
	10,0	13,84	13,34	11,36	10,72
$\mathcal{H} : \beta_3 = 2$					
10	1,0	7,82	6,68	2,40	1,92
	5,0	16,16	14,42	6,78	5,28
	10,0	23,16	20,96	11,16	9,00
20	1,0	3,38	3,12	1,80	1,52
	5,0	9,24	8,54	6,00	5,44
	10,0	15,70	14,90	10,82	9,70
30	1,0	2,34	2,14	1,50	1,40
	5,0	7,90	7,44	5,80	5,32
	10,0	13,90	13,02	10,58	9,94
40	1,0	2,02	1,86	1,46	1,18
	5,0	6,80	6,38	5,42	5,02
	10,0	12,22	11,52	10,22	9,72



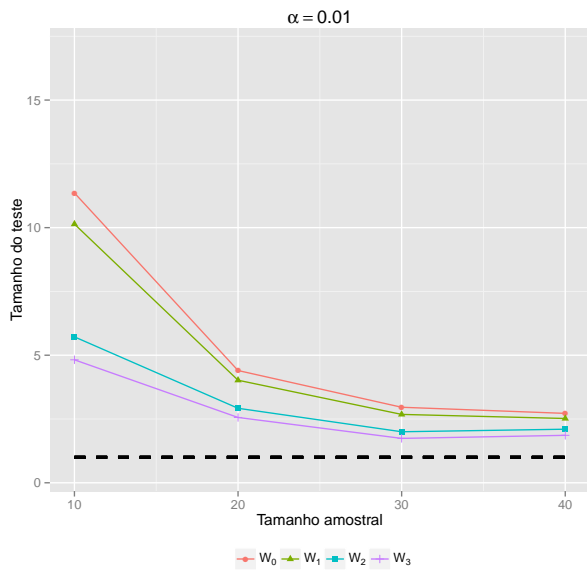
**Figura 4.40:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*



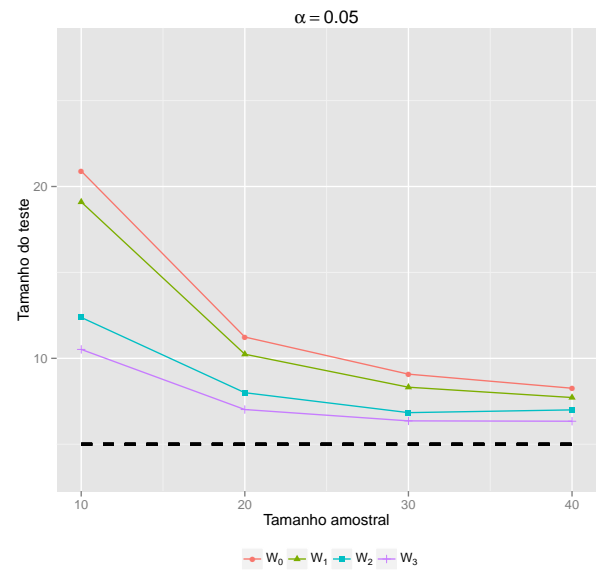
**Figura 4.41:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*



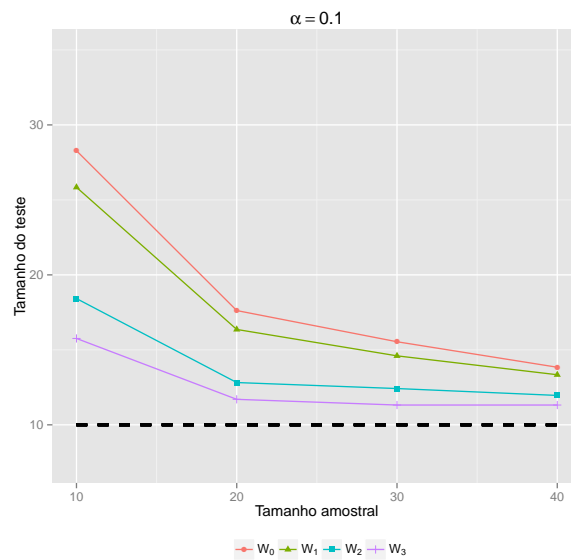
**Figura 4.42:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*



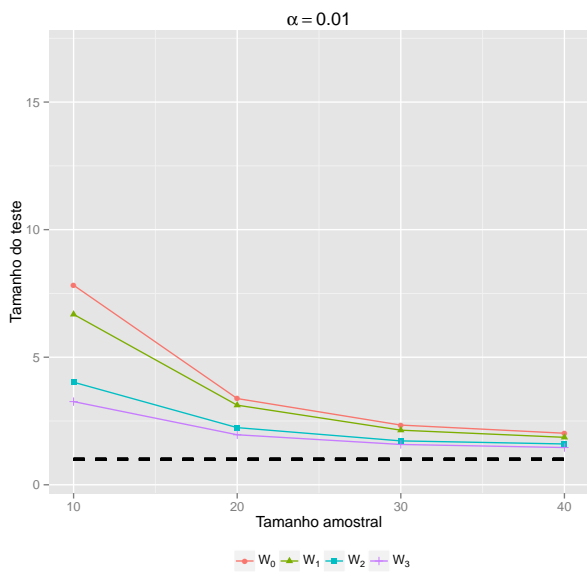
**Figura 4.43:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .



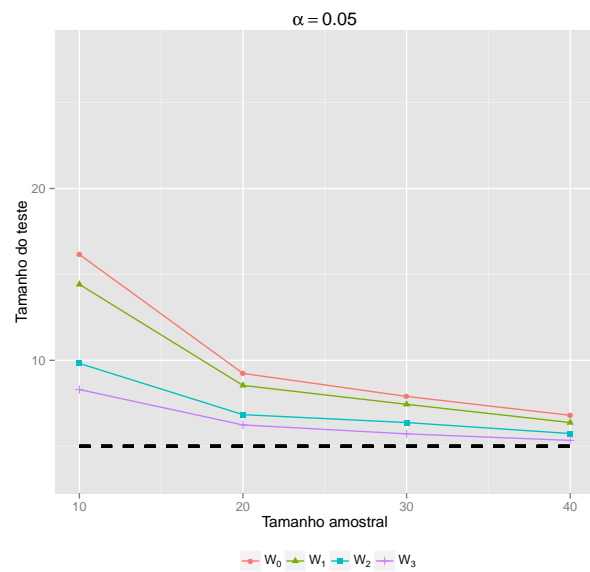
**Figura 4.44:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .



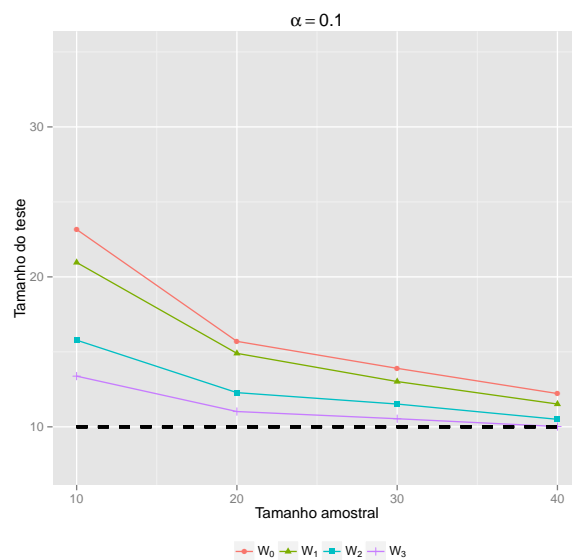
**Figura 4.45:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .



**Figura 4.46:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*



**Figura 4.47:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*



**Figura 4.48:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*

**Tabela 4.11:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MD-gama, com  $\lambda = \log \phi$ .*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
10	1,0	14,74	13,40	7,32	6,14
	5,0	25,94	23,62	14,56	12,62
	10,0	32,68	30,44	21,00	18,20
20	1,0	6,02	5,42	3,72	3,46
	5,0	13,48	12,74	9,24	8,46
	10,0	20,34	19,08	14,46	13,20
30	1,0	3,58	3,40	2,60	2,32
	5,0	10,12	9,52	7,26	6,78
	10,0	16,20	15,12	12,32	11,52
40	1,0	3,68	3,44	2,68	2,38
	5,0	9,52	9,12	7,86	7,26
	10,0	15,02	14,30	12,50	12,08
$\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
10	1,0	11,36	10,14	5,72	4,82
	5,0	20,90	19,10	12,38	10,52
	10,0	28,28	25,84	18,42	15,76
20	1,0	4,40	4,02	2,92	2,56
	5,0	11,24	10,24	8,00	7,02
	10,0	17,62	16,36	12,82	11,70
30	1,0	2,96	2,68	2,00	1,74
	5,0	9,08	8,32	6,84	6,36
	10,0	15,54	14,60	12,42	11,32
40	1,0	2,72	2,52	2,10	1,86
	5,0	8,26	7,72	7,00	6,34
	10,0	13,84	13,34	11,96	11,32
$\mathcal{H} : \beta_3 = 2$					
10	1,0	7,82	6,68	4,02	3,26
	5,0	16,16	14,42	9,82	8,30
	10,0	23,16	20,96	15,78	13,38
20	1,0	3,38	3,12	2,24	1,96
	5,0	9,24	8,54	6,84	6,24
	10,0	15,70	14,90	12,28	11,02
30	1,0	2,34	2,14	1,72	1,58
	5,0	7,90	7,44	6,38	5,72
	10,0	13,90	13,02	11,52	10,54
40	1,0	2,02	1,86	1,60	1,46
	5,0	6,80	6,38	5,74	5,34
	10,0	12,22	11,52	10,50	10,02

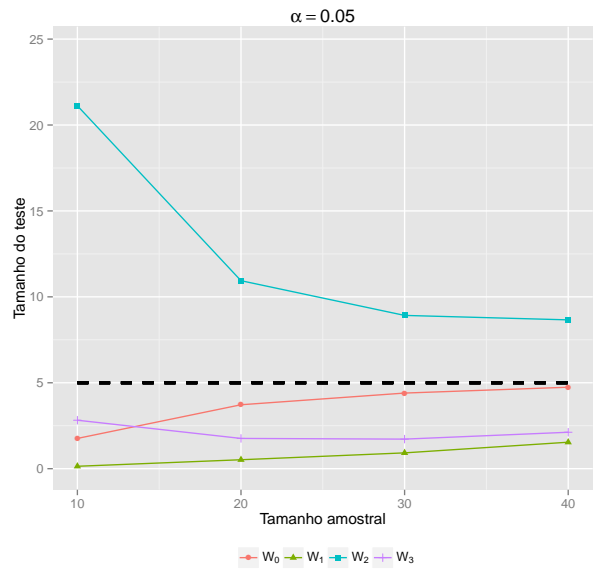
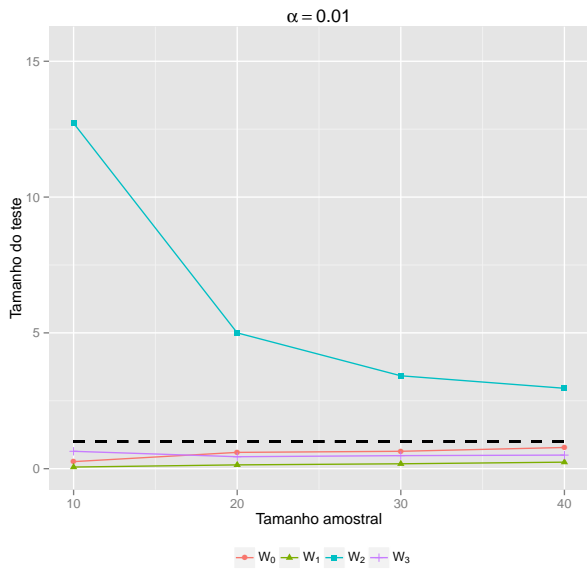


Figura 4.49: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama.

Figura 4.50: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama.

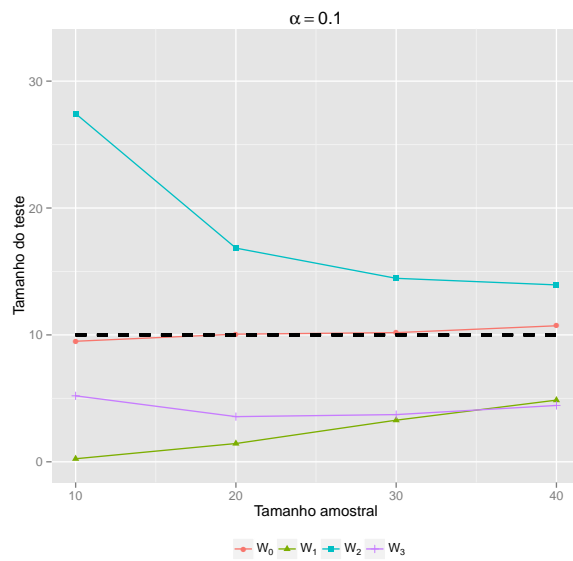
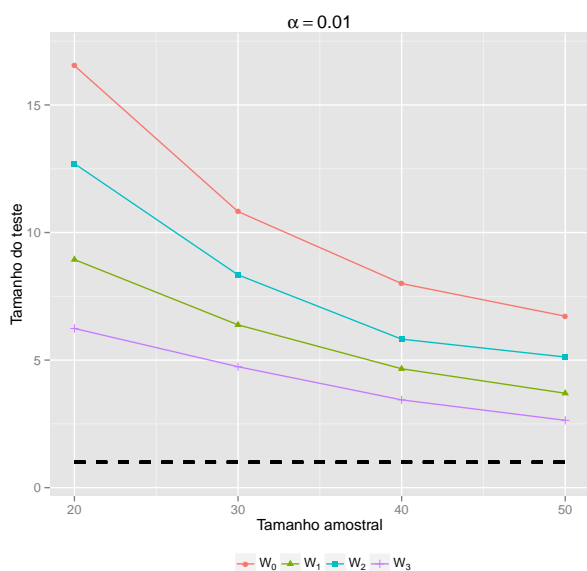
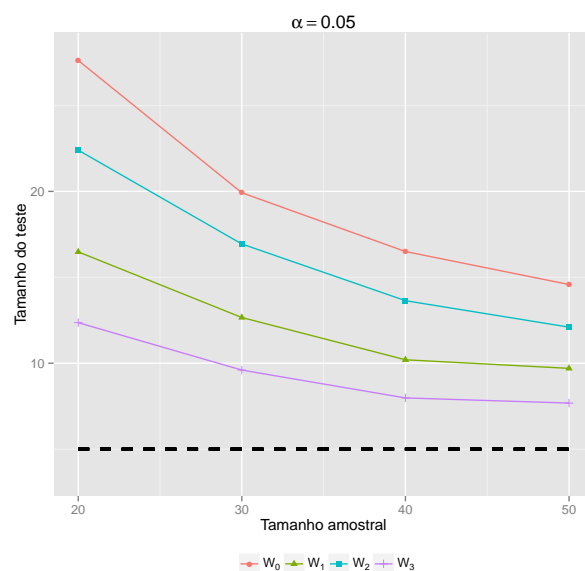


Figura 4.51: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama.

**Tabela 4.12:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \phi = 2$ , MD-gama.*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
10	1,0	0,26	0,06	12,72	0,64
	5,0	1,76	0,14	21,12	2,82
	10,0	9,50	0,24	27,44	5,20
20	1,0	0,60	0,14	5,00	0,44
	5,0	3,72	0,52	10,94	1,76
	10,0	10,06	1,44	16,84	3,56
30	1,0	0,64	0,18	3,42	0,48
	5,0	4,40	0,92	8,92	1,72
	10,0	10,18	3,28	14,46	3,72
40	1,0	0,78	0,24	2,96	0,50
	5,0	4,74	1,54	8,66	2,12
	10,0	10,72	4,86	13,94	4,44

**Figura 4.52:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama inversa.***Figura 4.53:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama inversa.*



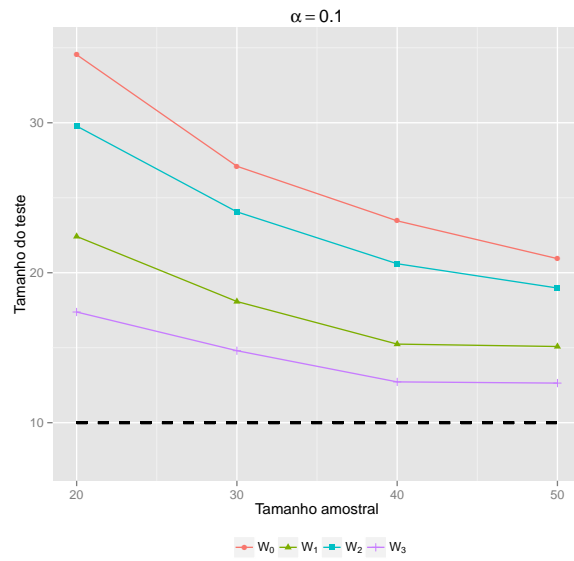


Figura 4.54: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama inversa.

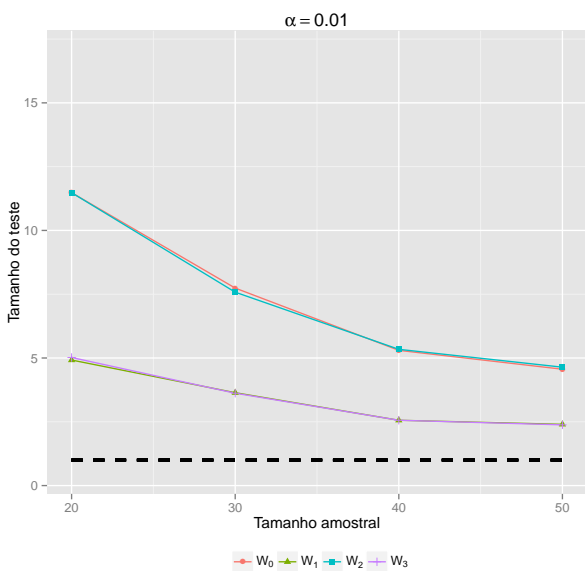


Figura 4.55: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama inversa.

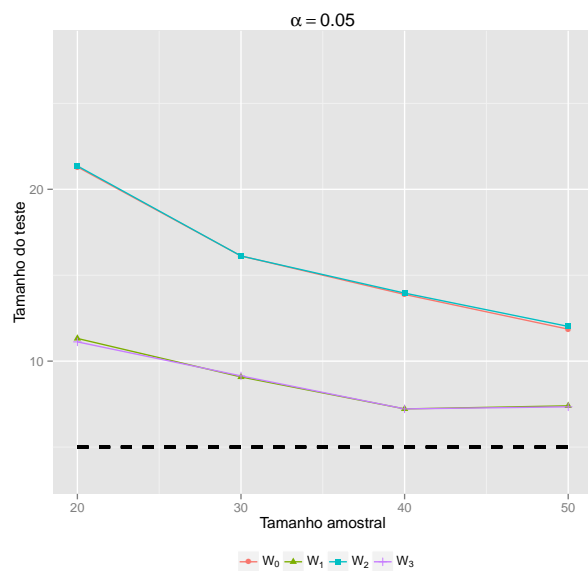
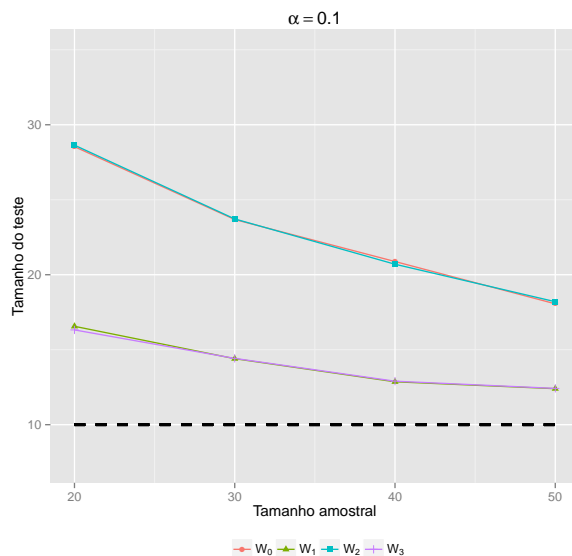
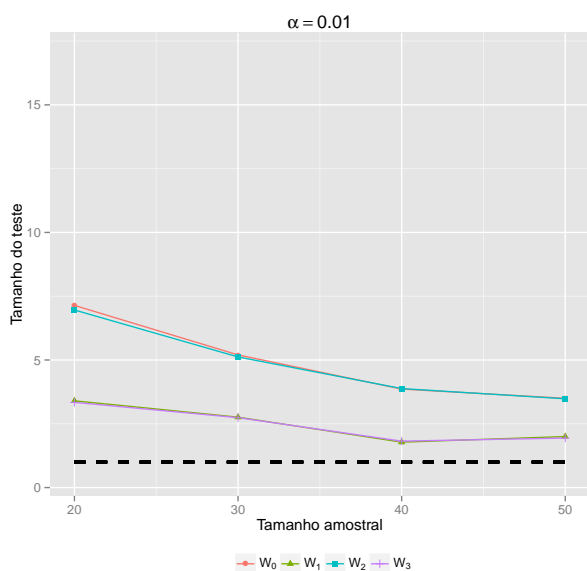


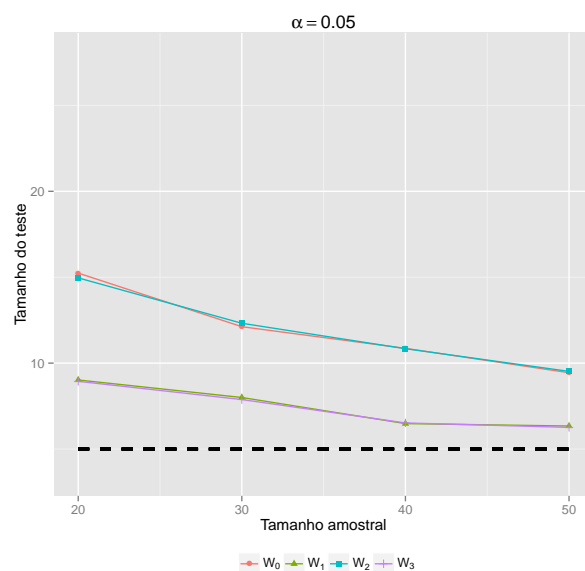
Figura 4.56: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama inversa.



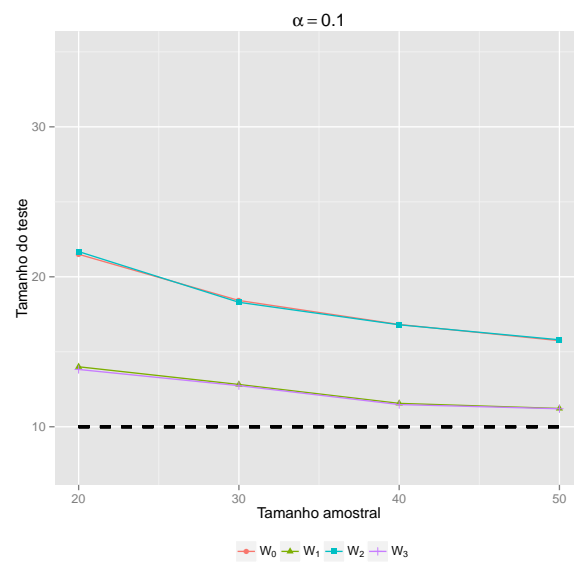
**Figura 4.57:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama inversa.



**Figura 4.58:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,01$ , MD-gama inversa.



**Figura 4.59:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,05$ , MD-gama inversa.



**Figura 4.60:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_3 = 2$ , com  $\alpha = 0,10$ , MD-gama inversa.*

**Tabela 4.13:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0, W_1, W_2$  e  $W_3$ , MD-gama inversa.*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1/2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
20	1,0	16,54	8,94	12,70	6,24
	5,0	27,62	16,48	22,40	12,36
	10,0	34,54	22,42	29,78	17,38
30	1,0	10,82	6,38	8,34	4,74
	5,0	19,92	12,66	16,94	9,60
	10,0	27,10	18,08	24,06	14,80
40	1,0	8,00	4,66	5,82	3,44
	5,0	16,50	10,20	13,64	7,98
	10,0	23,46	15,24	20,60	12,72
50	1,0	6,72	3,70	5,12	2,64
	5,0	14,58	9,70	12,10	7,68
	10,0	20,94	15,08	18,98	12,64
$\mathcal{H} : \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$					
20	1,0	11,48	4,92	11,48	5,02
	5,0	21,30	11,32	21,36	11,12
	10,0	28,54	16,56	28,64	16,32
30	1,0	7,74	3,64	7,58	3,62
	5,0	16,12	9,08	16,12	9,14
	10,0	23,68	14,40	23,72	14,42
40	1,0	5,30	2,56	5,34	2,56
	5,0	13,88	7,22	13,96	7,22
	10,0	20,88	12,86	20,70	12,90
50	1,0	4,56	2,40	4,64	2,38
	5,0	11,86	7,40	12,02	7,34
	10,0	18,06	12,40	18,20	12,42
$\mathcal{H} : \beta_3 = 2$					
20	1,0	7,14	3,40	6,96	3,34
	5,0	15,24	9,02	14,96	8,94
	10,0	21,50	14,00	21,68	13,82
30	1,0	5,20	2,76	5,12	2,74
	5,0	12,12	8,00	12,32	7,88
	10,0	18,42	12,82	18,30	12,74
40	1,0	3,86	1,78	3,88	1,82
	5,0	10,86	6,48	10,84	6,50
	10,0	16,82	11,56	16,80	11,48
50	1,0	3,50	2,00	3,48	1,94
	5,0	9,44	6,34	9,52	6,26
	10,0	15,74	11,22	15,80	11,20

### 4.3 Considerações

Os modelos de dispersão são bastante gerais e interessantes pois podem modelar os mais variados tipos de dados. Vimos que a utilização do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$  melhora o desempenho da estatística do teste de Wald e com a respectiva matriz de covariâncias de segunda ordem, esse desempenho é ainda melhor. Uma vez implementada essas expressões em *softwares* como R, a estatística do teste de Wald modificada deve ser sempre utilizada em testes de hipóteses envolvendo os parâmetros do vetor  $\beta$ .



## Capítulo 5

# Matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança no modelo de regressão beta linear homocedástico

Neste capítulo calculamos a expressão da matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do estimador de máxima verossimilhança corrigido ou não pelo viés até ordem  $n^{-1}$  para o modelo de regressão beta linear homocedástico. Assim como no capítulo anterior, avaliamos o resultado obtido por simulações de Monte Carlo e também propomos modificações no teste de Wald. Estas modificações também são avaliadas por estudos de Monte Carlo.

### 5.1 Modelo de regressão beta linear homocedástico

Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  variáveis aleatórias independentes cada uma com distribuição beta cuja função densidade de probabilidade é dada em (1.1), ou seja,

$$f(y_\ell; \mu_\ell, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu_\ell\phi)\Gamma((1-\mu_\ell)\phi)} y_\ell^{\mu_\ell\phi-1} (1-y_\ell)^{(1-\mu_\ell)\phi-1}, \quad 0 < y_\ell < 1,$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama,  $\mu_\ell \in (0, 1)$  e  $\phi > 0$ . A média e a variância de  $Y_\ell$  são dadas, respectivamente, por  $E(Y_\ell) = \mu_\ell$  e  $\text{Var}(Y_\ell) = \mu_\ell(1-\mu_\ell)/(1+\phi)$ . Assumimos que a média de  $Y_\ell$  pode ser escrita como

$$g(\mu_\ell) = \sum_{i=1}^p x_{\ell i} \beta_i = \eta_\ell,$$

em que  $\eta_\ell$  é o preditor linear,  $\beta^\top = (\beta_1, \dots, \beta_p)$  é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados,  $\beta \in \mathfrak{R}^p$ ,  $x_\ell^\top = (x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell n})$  são os valores das  $p$  ( $p < n$ ) covariáveis observadas e  $g(\cdot)$  é a função de ligação tal que  $g: (0, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$  é estritamente monótona e duplamente diferenciável.

Considere o vetor paramétrico  $\theta^\top = (\beta^\top, \phi)$ , o logaritmo da função de verossimilhança baseado em uma amostra aleatória de tamanho  $n$  é dado por

$$l(\beta, \phi) = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \log \Gamma(\phi) - \log \Gamma(\mu_\ell\phi) - \log \Gamma((1-\mu_\ell)\phi) \right. \\ \left. + (\mu_\ell\phi - 1) \log y_\ell + [(1-\mu_\ell)\phi - 1] \log(1-y_\ell) \right\}.$$

Definindo  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^\top$ , com  $y_\ell^* = \log[y_\ell/(1-y_\ell)]$  e  $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)^\top$  com  $\mu_\ell^* = \psi(\mu_\ell\phi) -$

$\psi((1-\mu_\ell)\phi)$ , sendo  $\psi(\cdot)$  a função digama ( $d\{\log \Gamma(x)\}/dx$ ), a função escore, obtida pela diferenciação do logaritmo da função de verossimilhança em relação aos parâmetros, é dada por

$$U_\theta = (U_\beta(\beta, \phi)^\top, U_\phi(\beta, \phi)^\top)^\top,$$

em que  $U_\beta(\theta)$  é um vetor de dimensão  $p$ , com

$$U_\beta(\beta, \phi) = \phi X^\top T(y^* - \mu^*),$$

$X$  é uma matriz  $n \times p$  com sua  $\ell$ -ésima linha igual a  $x_\ell^\top$ ,  $T = \text{diag}\{1/g'(\mu_1), \dots, 1/g'(\mu_n)\}$  e  $g'(\mu_\ell) = dg(\mu_\ell)/d\mu_\ell$  e

$$U_\phi(\beta, \phi) = \sum_{\ell=1}^n \{\mu_\ell(y_\ell^* - \mu_\ell^*) + \log(1 - y_\ell) - \psi((1 - \mu_\ell)\phi) + \psi(\phi)\}.$$

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$K_{\theta, \theta} = P^\top W P,$$

em que

$$P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } W = \begin{pmatrix} W_{\beta\beta} & W_{\beta\phi} \\ W_{\phi\beta} & W_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

sendo  $W_{\beta\beta} = \text{diag}((\phi\mu'_\ell)^2 w_\ell)$ ,  $W_{\beta\phi} = Tc$ ,  $W_{\phi\beta} = W_{\beta\phi}^\top$ ,  $W_{\phi\phi} = \text{tr}(\text{diag}(d_\ell))$ , com  $w_\ell = \phi\{\psi'(\mu_\ell\phi) - \psi'((1-\mu_\ell)\phi)\}[g'(\mu_\ell)]^{-2}$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)^\top$ ,  $c_\ell = \phi\{\psi'(\mu_\ell\phi)\mu_\ell - \psi'((1-\mu_\ell)\phi)(1-\mu_\ell)\}$ , em que  $\psi'(\cdot)$  é a função trigama e  $D = (d_1, \dots, d_n)^\top$ , com  $d_\ell = \psi'(\mu_\ell\phi)\mu_\ell^2 + \psi'((1-\mu_\ell)\phi)(1-\mu_\ell)^2 - \psi'(\phi)$  e  $\mu'_\ell = d\mu_\ell/d\eta_\ell$ .

## 5.2 Matriz de covariâncias de segunda ordem

Para obtermos a expressão da matriz de covariâncias de segunda ordem do estimador de máxima verossimilhança corrigido ou não pelo viés de primeira ordem no MBL, dada na expressão (3.33) a (3.36), precisamos de  $K_{\theta, \theta}$ , definida em (5.1), e da matriz  $\Delta$ , de dimensão  $(p+1) \times (p+1)$ , que particionamos da seguinte forma

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta} & \Delta_{\beta\phi} \\ \Delta_{\phi\beta} & \Delta_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

em que a submatriz  $\Delta_{\beta\beta}$  tem dimensão  $p \times p$ , a submatriz  $\Delta_{\beta\phi}$  tem dimensão  $p \times 1$ , a submatriz  $\Delta_{\phi\beta}$  tem dimensão  $1 \times p$  e  $\Delta_{\phi\phi}$  é um escalar. Adicionalmente, como fizemos no capítulo anterior, podemos reescrever  $\Delta$  da seguinte forma:

$$\Delta = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(1)} & \Delta_{\beta\phi}^{(1)} \\ \Delta_{\phi\beta}^{(1)} & \Delta_{\phi\phi}^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(2)} & \Delta_{\beta\phi}^{(2)} \\ \Delta_{\phi\beta}^{(2)} & \Delta_{\phi\phi}^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\tau_2}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{\beta\beta}^{(3)} & \Delta_{\beta\phi}^{(3)} \\ \Delta_{\phi\beta}^{(3)} & \Delta_{\phi\phi}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

### 5.2.1 Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\beta}$

No modelo de regressão beta, a matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(1)}$ , é escrita da seguinte forma:

$$\Delta_{\beta\beta}^{(1)} = X^\top \left( \zeta_{11}^{\beta\beta} + \zeta_{12}^{\beta\beta} + \zeta_{13}^{\beta\beta} + \zeta_{14}^{\beta\beta} \right) X, \quad (5.2)$$



em que

$$\begin{aligned}\zeta_{11}^{\beta\beta} &= \phi^2 [\tau_1 (2H_{11} - H_{21}) + H_{31}] Z_1^d, & \zeta_{12}^{\beta\beta} &= \phi [\tau_1 (2H_{12} - H_{23}) + H_{32}] Z_2^d, \\ \zeta_{13}^{\beta\beta} &= \phi [\tau_1 (2H_{14} - H_{23}) + H_{32}] Z_2^d, & \zeta_{14}^{\beta\beta} &= [\tau_1 (2H_{15} - H_{25}) + H_{33}] Z_3^d,\end{aligned}$$

sendo  $H_{rs}$  uma matriz diagonal, com a diagonal principal dada pelo vetor  $(h_{rs,1}, \dots, h_{rs,n})$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $Z_1 = XK_{\beta,\beta}^{-1}X^\top$ ,  $Z_1^d = \text{diag}(Z_1)$ ,  $Z_2 = XK_{\beta,\phi}^{-1}\mathbf{1}^\top$ ,  $\mathbf{1}^\top = (1, \dots, 1)_{1 \times n}$ ,  $Z_2^d = \text{diag}(Z_2)$ ,  $Z_3^d = \kappa^{\phi\phi} I_n$ .

A matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(2)}$  no modelo de regressão beta é dada por:

$$\Delta_{\beta\beta}^{(2)} = X^\top \left( \zeta_{21}^{\beta\beta} + \zeta_{22}^{\beta\beta} + \zeta_{23}^{\beta\beta} + \zeta_{24}^{\beta\beta} \right) X, \quad (5.3)$$

em que

$$\begin{aligned}\zeta_{21}^{\beta\beta} &= \phi^4 \left[ V_1 Z_1^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_1 Z_1^{(2)} 3W_1 \right] \\ &+ \phi^3 \left[ V_1 Z_2^{(2)} (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_1 Z_2^{(2)} 3W_3 \right] \\ &+ \phi^3 \left[ V_2 Z_3^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_2 Z_3^{(2)} 3W_1 \right] \\ &+ \phi^2 \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_1 (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_2 Z_1 3W_3 \right],\end{aligned}$$

sendo  $V_r$  e  $W_s$  matrizes diagonais com as respectivas diagonais principais dadas por  $(v_{r,1}, \dots, v_{r,n})$ ,  $r = 1, 2, 3$  e  $(w_{s,1}, \dots, w_{s,n})$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ ,  $Z_1^{(2)} = Z_1 \odot Z_1$ ,  $Z_2^{(2)} = Z_1 \odot Z_2$ ,  $Z_3^{(2)} = Z_1 \odot Z_2^\top$ ,

$$\begin{aligned}\zeta_{22}^{\beta\beta} &= \phi^3 \left[ V_1 Z_2^{(2)} (3V_2 + 10W_3) + 2W_1 Z_2^{(2)} (2W_3 + W_2) \right] \\ &+ \phi^2 \left[ V_1 Z_d^{(2)} J_n (3V_3 + 8W_4) + 2W_1 Z_d^{(2)} J_n W_4 \right] \\ &+ \phi^2 \left[ V_2 Z_4^{(2)} (3V_2 + 10W_3) + 2W_2 Z_4^{(2)} (2W_3 + W_2) \right] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_2 (3V_3 + 8W_4) + 2W_2 Z_2 W_4 \right],\end{aligned}$$

com  $Z_d^{(2)} = \text{diag}(Z_1 \odot Z_1)$ ,  $Z_4^{(2)} = Z_2 \odot Z_2^\top$ ,

$$\begin{aligned}\zeta_{23}^{\beta\beta} &= \phi^3 \left[ V_2 Z_3^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_3 Z_3^{(2)} 3W_1 \right] \\ &+ \phi^2 \left[ V_2 Z_4^{(2)} (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_3 Z_4^{(2)} 3W_3 \right] \\ &+ \phi^2 \left[ V_3 J_n Z_d^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_4 J_n Z_d^{(2)} 3W_1 \right] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2^\top (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_4 Z_2^\top 3W_3 \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{24}^{\beta\beta} &= \phi^2 \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_1 (3V_2 + 10W_3) + 2W_3 Z_1 (2W_3 + W_2) \right] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_2 (3V_3 + 8W_4) + 2W_3 Z_2 W_4 \right] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2^\top (3V_2 + 10W_3) + 2W_4 Z_2^\top (2W_3 + W_2) \right] \\ &+ (\kappa^{\phi\phi})^2 \left[ V_3 J_n (3V_3 + 8W_4) + 2W_4 J_n W_4 \right].\end{aligned}$$

E, no MBL, a matriz  $\Delta_{\beta\beta}^{(3)}$  é escrita como:

$$\Delta_{\beta\beta}^{(3)} = X^\top \left( \zeta_{31}^{\beta\beta} + \zeta_{32}^{\beta\beta} + \zeta_{33}^{\beta\beta} + \zeta_{34}^{\beta\beta} \right) X, \quad (5.4)$$

em que

$$\begin{aligned}\zeta_{31}^{\beta\beta} &= \phi^4 (V_1 + W_1) \text{diag}\{Z_1 (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^3 (V_1 + W_1) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^3 (V_2 + W_3) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \phi^2 \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{32}^{\beta\beta} &= \phi^3 (V_1 + W_1) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_1 + W_1) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_2 + W_3) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top V_3 Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{33}^{\beta\beta} &= \phi^3 (V_1 + W_1) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_1 + W_1) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_2 + W_3) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{34}^{\beta\beta} &= \phi^2 \kappa^{\phi\phi} (V_1 + W_1) \text{diag}\{Z_1 (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 \kappa^{\phi\phi} (V_1 + W_1) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\} \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\right\} \\ &+ \phi \left(\kappa^{\phi\phi}\right)^2 (V_2 + W_3) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

com  $\text{diag}\{M\}$ , quando  $M$  é um vetor, uma matriz diagonal, cujo a diagonal principal é dada pelo vetor  $(m_1, \dots, m_n)$  e, quando  $M$  é um escalar,  $\text{diag}\{M\} = MI_n$ .

### 5.2.2 Cálculo da matriz $\Delta_{\beta\phi}$

No MBL, escrevemos a matriz  $\Delta_{\beta\phi}^{(1)}$ , de dimensão  $p \times 1$ , escrita da seguinte forma

$$\Delta_{\beta\phi}^{(1)} = X^\top \left( \zeta_{11}^{\beta\phi} + \zeta_{12}^{\beta\phi} + \zeta_{13}^{\beta\phi} + \zeta_{14}^{\beta\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.5)$$

em que

$$\begin{aligned}\zeta_{11}^{\beta\phi} &= \phi [\tau_1 (2H_{14} - H_{23}) + H_{32}] Z_1^d, \quad \zeta_{12}^{\beta\phi} = \tau_1 (2H_{15} - H_{25}) Z_2^d, \\ \zeta_{13}^{\beta\phi} &= [\tau_1 (2H_{17} - H_{25}) + H_{33}] Z_2^d, \quad \zeta_{14}^{\beta\phi} = \tau_1 H_{18} Z_3^d.\end{aligned}$$

A matriz  $\Delta_{\beta\phi}^{(2)}$ , no modelo de regressão beta, é dada por

$$\Delta_{\beta\phi}^{(2)} = X^\top \left( \zeta_{21}^{\beta\phi} + \zeta_{22}^{\beta\phi} + \zeta_{23}^{\beta\phi} + \zeta_{24}^{\beta\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.6)$$

em que

$$\begin{aligned}
\zeta_{21}^{\beta\phi} &= \phi^3 \left[ V_1 Z_1^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_1 Z_1^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\
&\quad + \phi^2 \left[ V_1 Z_2^{(2)} (3V_3 + 10W_4) + 2W_1 Z_2^{(2)} 2W_4 \right] \\
&\quad + \phi^2 \left[ V_2 Z_3^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_2 Z_3^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_1 (3V_3 + 10W_4) + 2W_2 Z_1 2W_4 \right], \\
\zeta_{22}^{\beta\phi} &= \phi^2 \left[ V_1 Z_2^{(2)} (3V_3 + 2W_4) + 2W_1 Z_2^{(2)} 3W_4 \right] \\
&\quad + \phi^2 \left[ V_1 Z_d^{(2)} J_n 3E \right] \\
&\quad + \phi \left[ V_2 Z_4^{(2)} (3V_3 + 2W_4) + 2W_2 Z_4^{(2)} 3W_4 \right] \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_2 3E \right], \\
\zeta_{23}^{\beta\phi} &= \phi^2 \left[ V_2 Z_3^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_3 Z_3^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\
&\quad + \phi \left[ V_2 Z_4^{(2)} (3V_3 + 10W_4) + 2W_3 Z_4^{(2)} 2W_4 \right] \\
&\quad + \phi \left[ V_3 J_n Z_d^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_4 J_n Z_d^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2^\top (3V_3 + 10W_4) + 2W_4 Z_2^\top 2W_4 \right], \\
\zeta_{24}^{\beta\phi} &= \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_1 (3V_3 + 2W_4) + 2W_3 Z_1 3W_4 \right] \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_2 Z_2 3E \right] \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2^\top (3V_3 + 2W_4) + 2W_4 Z_2^\top 3W_4 \right] \\
&\quad + (\kappa^{\phi\phi})^2 \left[ V_3 J_n 3E \right].
\end{aligned}$$

No MBL, temos a seguinte expressão para  $\Delta_{\beta\phi}^{(3)}$ :

$$\Delta_{\beta\phi}^{(3)} = X^\top \left( \zeta_{31}^{\beta\phi} + \zeta_{32}^{\beta\phi} + \zeta_{33}^{\beta\phi} + \zeta_{34}^{\beta\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.7)$$

em que

$$\begin{aligned}
\zeta_{31}^{\beta\phi} &= \phi^3 (V_2 + W_3) \text{diag}\{Z_1 (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi^2 (V_2 + W_3) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi^2 (V_3) \text{diag}\left\{ \left( X K_{\beta,\phi}^{-1} \right)^\top (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1} \right\} \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} (V_3) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\}, \\
\zeta_{32}^{\beta\phi} &= \phi^2 (V_2 + W_3) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi (V_2 + W_3) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi V_3 \text{diag}\left\{ \left( X K_{\beta,\phi}^{-1} \right)^\top (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1} \right\} \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} V_3 \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3) Z_2^d \mathbf{1}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{33}^{\beta\phi} &= \phi^2 (V_2 + W_3) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi (V_2 + W_3) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi V_3 \text{diag}\left\{\left(X K_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} V_3 \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{34}^{\beta\phi} &= \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) \text{diag}\{Z_1 (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\} \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_3) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\} \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} V_3 \text{diag}\left\{\left(X K_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\right\} \\
&\quad + \left(\kappa^{\phi\phi}\right)^2 V_3 \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\}.
\end{aligned}$$

### 5.2.3 Cálculo da matriz $\Delta_{\phi\beta}$

No modelo de regressão beta, a matriz  $\Delta_{\phi\beta}^{(1)}$  é dada por

$$\Delta_{\phi\beta}^{(1)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{11}^{\phi\beta} + \zeta_{12}^{\phi\beta} + \zeta_{13}^{\phi\beta} + \zeta_{14}^{\phi\beta} \right) X, \quad (5.8)$$

em que

$$\begin{aligned}
\zeta_{11}^{\phi\beta} &= \phi [\tau_1 (2H_{12} - H_{22}) + H_{32}] Z_1^d, \quad \zeta_{12}^{\phi\beta} = [\tau_1 (2H_{13} - H_{24}) + H_{33}] Z_2^d, \\
\zeta_{13}^{\phi\beta} &= \tau_1 (2H_{15} - H_{24}) Z_2^d, \quad \zeta_{14}^{\phi\beta} = \tau_1 (2H_{16} - H_{26}) Z_3^d.
\end{aligned}$$

A matriz  $\Delta_{\phi\beta}^{(2)}$ , no modelo de regressão beta, é escrita como

$$\Delta_{\phi\beta}^{(2)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{21}^{\phi\beta} + \zeta_{22}^{\phi\beta} + \zeta_{23}^{\phi\beta} + \zeta_{24}^{\phi\beta} \right) X, \quad (5.9)$$

em que

$$\begin{aligned}
\zeta_{21}^{\phi\beta} &= \phi^3 \left[ V_2 Z_1^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_3 Z_1^{(2)} 3W_1 \right] \\
&\quad + \phi^2 \left[ V_2 Z_2^{(2)} (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_3 Z_2^{(2)} 3W_3 \right] \\
&\quad + \phi^2 \left[ V_3 Z_3^{(2)} (3V_1 + 10W_1) + 2W_4 Z_3^{(2)} 3W_1 \right] \\
&\quad + \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_1 (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) + 2W_4 Z_1 3W_3 \right], \\
\zeta_{22}^{\phi\beta} &= \phi^2 \left[ V_2 Z_2^{(2)} (3V_2 + 10W_3) + 2W_3 Z_2^{(2)} (2W_3 + W_2) \right] \\
&\quad + \phi \left[ V_2 Z_d^{(2)} J_n (3V_3 + 8W_4) + 2W_3 Z_d^{(2)} J_n W_4 \right] \\
&\quad + \phi \left[ V_3 Z_4^{(2)} (3V_2 + 10W_3) + 2W_4 Z_4^{(2)} (2W_3 + W_2) \right] \\
&\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2 (3V_3 + 8W_4) + 2W_4 Z_2 W_4 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{23}^{\phi\beta} &= \phi^2 \left[ V_3 Z_3^{(2)} (3V_1 + 10W_1) \right] \\ &+ \phi \left[ V_3 Z_4^{(2)} (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) \right] \\ &+ \phi^2 \left[ E J_n Z_d^{(2)} (3V_1 + 10W_1) \right] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ E Z_2^\top (3V_2 + 2W_3 + 8W_2) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{24}^{\phi\beta} &= \phi \kappa^{\phi\phi} [V_3 Z_1 (3V_2 + 10W_3)] \\ &+ \kappa^{\phi\phi} [V_3 Z_2 (3V_3 + 8W_4)] \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} \left[ E Z_2^\top (3V_2 + 10W_3) \right] \\ &+ (\kappa^{\phi\phi})^2 [E J_n (3V_3 + 8W_4)].\end{aligned}$$

No MBL, temos a seguinte expressão para a matriz  $\Delta_{\phi\beta}^{(3)}$ :

$$\Delta_{\phi\beta}^{(3)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{31}^{\phi\beta} + \zeta_{32}^{\phi\beta} + \zeta_{33}^{\phi\beta} + \zeta_{34}^{\phi\beta} \right) X, \quad (5.10)$$

em que

$$\begin{aligned}\zeta_{31}^{\phi\beta} &= \phi^3 (V_2 + W_2) \text{diag}\{Z_1 (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_2 + W_2) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi^2 (V_3 + W_4) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{32}^{\phi\beta} &= \phi^2 (V_2 + W_2) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi (V_2 + W_2) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top V_3 Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi (V_3 + W_4) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top V_3 Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{33}^{\phi\beta} &= \phi^2 (V_2 + W_2) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi (V_2 + W_2) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &+ \phi (V_3 + W_4) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &+ \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{34}^{\phi\beta} &= \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_2) \text{diag}\{Z_1 (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\} \\ &+ \phi \kappa^{\phi\phi} (V_2 + W_2) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\} \\ &+ \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\right\} \\ &+ \left(\kappa^{\phi\phi}\right)^2 (V_3 + W_4) \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\}.\end{aligned}$$

### 5.2.4 Cálculo da matriz $\Delta_{\phi\phi}$

No modelo de regressão beta, o escalar  $\Delta_{\phi\phi}^{(1)}$  pode ser escrito como

$$\Delta_{\phi\phi}^{(1)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{11}^{\phi\phi} + \zeta_{12}^{\phi\phi} + \zeta_{13}^{\phi\phi} + \zeta_{14}^{\phi\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.11)$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^{\phi\phi} &= [\tau_1 (2H_{15} - H_{24}) + H_{33}] Z_1^d, & \zeta_{12}^{\phi\phi} &= \tau_1 (2H_{16} - H_{26}) Z_2^d, \\ \zeta_{13}^{\phi\phi} &= \tau_1 (2H_{18} - H_{26}) Z_2^d, & \zeta_{14}^{\phi\phi} &= \tau_1 J Z_3^d, \end{aligned}$$

com  $J$  uma matriz diagonal, sendo a diagonal principal dada por  $(j_1, \dots, j_n)$ .

O escalar  $\Delta_{\phi\phi}^{(2)}$ , no modelo de regressão beta, é dado por

$$\Delta_{\phi\phi}^{(2)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{21}^{\phi\phi} + \zeta_{22}^{\phi\phi} + \zeta_{23}^{\phi\phi} + \zeta_{24}^{\phi\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.12)$$

em que

$$\begin{aligned} \zeta_{21}^{\phi\phi} &= \phi^2 \left[ V_2 Z_1^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_3 Z_1^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\ &\quad + \phi \left[ V_2 Z_2^{(2)} (3V_3 + 10W_4) + 2W_3 Z_2^{(2)} 2W_4 \right] \\ &\quad + \phi \left[ V_3 Z_3^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) + 2W_4 Z_3^{(2)} (2W_2 + W_3) \right] \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_1 (3V_3 + 10W_4) + 2W_4 Z_1 2W_4 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{22}^{\phi\phi} &= \phi \left[ V_2 Z_2^{(2)} (3V_3 + 2W_4) + 2W_3 Z_2^{(2)} 3W_4 \right] \\ &\quad + \phi \left[ V_2 Z_d^{(2)} J_n 3E \right] \\ &\quad + \left[ V_3 Z_4^{(2)} (3V_3 + 2W_4) + 2W_4 Z_4^{(2)} 3W_4 \right] \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2 3E \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{23}^{\phi\phi} &= \phi \left[ V_3 Z_3^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) \right] \\ &\quad + \left[ V_3 Z_4^{(2)} (3V_3 + 10W_4) \right] \\ &\quad + \phi \left[ E J_n Z_d^{(2)} (3V_2 + 2W_2 + 8W_3) \right] \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ E Z_2^\top (3V_3 + 10W_4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{24}^{\phi\phi} &= \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_1 (3V_3 + 2W_4) \right] \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ V_3 Z_2 3E \right] \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} \left[ E Z_2^\top (3V_3 + 2W_4) \right] \\ &\quad + (\kappa^{\phi\phi})^2 \left[ E J_n 3E \right]. \end{aligned}$$

E, por fim, o escalar  $\Delta_{\phi\phi}^{(3)}$ , no MBL, é dado por

$$\Delta_{\phi\phi}^{(3)} = \mathbf{1}^\top \left( \zeta_{31}^{\phi\phi} + \zeta_{32}^{\phi\phi} + \zeta_{33}^{\phi\phi} + \zeta_{34}^{\phi\phi} \right) \mathbf{1}, \quad (5.13)$$

em que

$$\begin{aligned}\zeta_{31}^{\phi\phi} &= \phi^2 (V_3 + W_4) \text{diag}\{Z_1 (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + \phi (V_3 + W_4) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + \phi^2 E \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_1 + 2W_1) Z_1^d \mathbf{1}\right\} \\ &\quad + \phi\kappa^{\phi\phi} E \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_2 + 2W_3) Z_1^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{32}^{\phi\phi} &= \phi (V_3 + W_4) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + (V_3 + W_4) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top V_3 Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + \phi E \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_3) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} E \text{diag}\{\mathbf{1}^\top V_3 Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{33}^{\phi\phi} &= \phi (V_3 + W_4) \text{diag}\{Z_1 (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + (V_3 + W_4) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\} \\ &\quad + \phi E \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_2 + 2W_2) Z_2^d \mathbf{1}\right\} \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} E \text{diag}\{\mathbf{1}^\top (V_3 + 2W_4) Z_2^d \mathbf{1}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{34}^{\phi\phi} &= \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) \text{diag}\{Z_1 (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\} \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} (V_3 + W_4) Z_2^d \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\} \\ &\quad + \kappa^{\phi\phi} E \text{diag}\left\{\left(XK_{\beta,\phi}^{-1}\right)^\top (V_3 + 2W_4) \mathbf{1}\right\} \\ &\quad + \left(\kappa^{\phi\phi}\right)^2 E \text{diag}\{\mathbf{1}^\top E \mathbf{1}\}.\end{aligned}$$

### 5.3 Resultados numéricos

Realizamos, nesta seção, dois estudos de simulação. Em ambos, consideramos um modelo de regressão beta homocedástico, com  $\eta_\ell = \log\{\mu_\ell/(1 - \mu_\ell)\} = \beta_1 + \beta_2 x_{2\ell} + \beta_3 x_{3\ell}$ , em que  $\beta_1 = 1, 0$ ,  $\beta_2 = 1, 5$ ,  $\beta_3 = 2, 0$ ,  $\phi = 20$  e  $\phi = 50$ , sendo que as covariáveis  $x_{2\ell}$  e  $x_{3\ell}$  foram obtidas de uma distribuição uniforme no intervalo  $(0, 1)$ . Para cada  $n$  ( $n = 10, 20, 30, 40$ ), os valores das covariáveis foram mantidos constantes em todas as 5000 réplicas geradas.

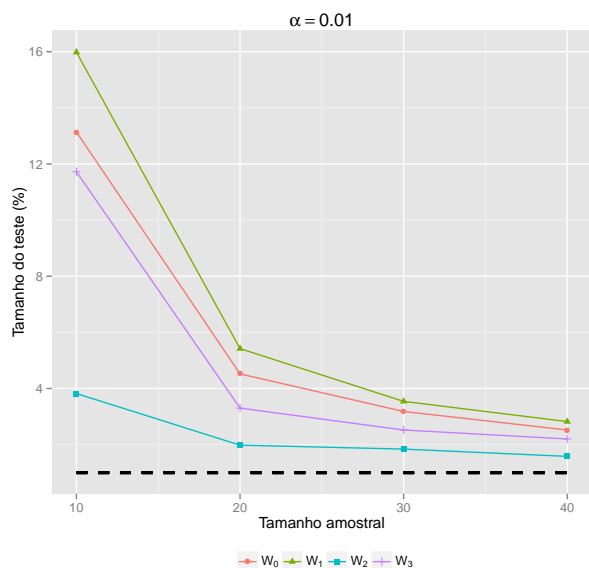
No primeiro estudo de simulação comparamos a matriz de covariâncias até ordem  $n^{-2}$  do EMV corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$  e a matriz de informação de Fisher avaliada na estimativa  $\tilde{\theta}$  do parâmetro  $\theta$  com a matriz de covariâncias amostral de  $\tilde{\theta}$ . Os resultados encontram-se nas Tabelas 5.1 e 5.2, em que as primeiras duas entradas são  $\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1} = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} [\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1}]_i$ ,  $\tilde{\text{Cov}}_2(\tilde{\theta}) = \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} [\tilde{\text{Cov}}_2(\tilde{\theta})]_i$  e a terceira entrada é a matriz de covariâncias amostral de  $\tilde{\theta}^{(1)}, \dots, \tilde{\theta}^{(5000)}$ .

No segundo estudo, comparamos o tamanho empírico dos testes baseados nas estatísticas (4.62) a (4.67) para as seguintes hipóteses nulas  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0, \beta_2 = 1, 5, \beta_3 = 2, 0$ ,  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0, \beta_2 = 1, 5$  e  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0$ . Os resultados estão apresentados nas Figuras 5.1 a 5.9 e na Tabela 5.3 e nas Figuras 5.10 a 5.18 e na Tabela 5.4 para  $\phi = 20$  e  $\phi = 50$ , respectivamente.

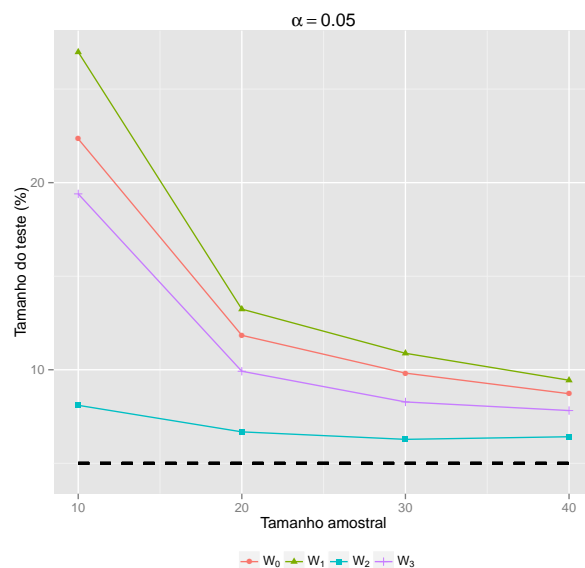
Pela Tabela 5.1, para  $\phi = 20$  vemos que, em geral, os valores das covariâncias de segunda ordem estão mais distantes dos valores das covariâncias amostrais do que os valores das covariâncias de

primeira ordem. Apenas as variâncias de segunda ordem de  $\tilde{\beta}_1$  e as covariâncias de segunda ordem relacionadas com  $\tilde{\beta}_1$  estiveram mais próximas dos valores das covariâncias amostrais. A mesma observação pode ser feita quando  $\phi = 50$ , Tabela 5.2. Comparando os resultados das Tabelas 5.1 e 5.2, observamos que, enquanto as covariâncias de  $\tilde{\beta}$  são menores para  $\phi = 50$ , a variância de  $\tilde{\phi}$  é maior para esse valor de  $\phi$ .

Pela Tabela 5.3 e Figuras 5.1 a 5.9, isto é, para  $\phi = 20$ , podemos perceber que, para as três hipóteses nulas, a estatística  $W_3$  apresentou tamanho empírico menor em comparação com a estatística utilizada no teste de Wald tradicional. Porém, os tamanhos empíricos dos testes baseados na estatística  $W_2$  são ainda mais próximos de  $\alpha$ , isto é, apenas a utilização dos estimadores corrigidos pelo viés melhora o desempenho do teste. Para  $\phi = 50$ , Tabela 5.4 e Figuras 5.10 a 5.18, o comportamento das estatísticas foram os mesmos apresentados para  $\phi = 20$ , mas, de maneira geral, os tamanhos empíricos estão mais próximos dos correspondentes níveis nominais. Observa-se também que quando o número de parâmetros testados em  $\mathcal{H}$  diminui, além dos tamanhos empíricos das quatro estatísticas se tornarem mais próximos dos níveis nominais adotados, a diferença entre os desempenhos das estatísticas  $W_3$  e  $W_2$  diminui.



**Figura 5.1:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 20$ .



**Figura 5.2:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 20$ .

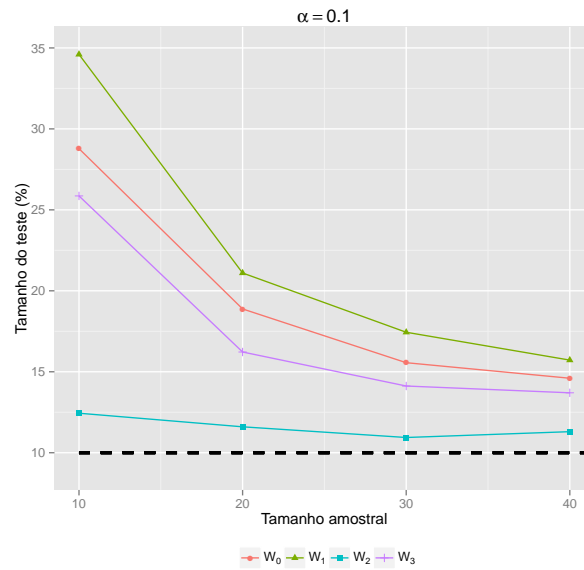


**Tabela 5.1:**  $\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e as covariâncias amostrais no MBL, com  $\phi = 20$ .

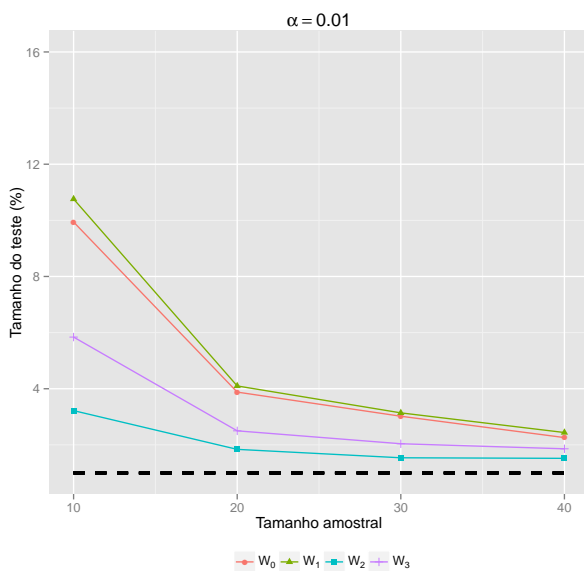
	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$
$\beta_1$	0,260	-0,286	-0,214	0,158	0,088	-0,081	-0,087	0,032
	0,221	-0,234	-0,194	0,149	0,084	-0,075	-0,081	0,051
	0,206	-0,242	-0,179	-0,054	0,081	-0,078	-0,082	-0,010
$\beta_2$		0,651	0,083	1,127		0,258	-0,028	0,592
		0,457	0,077	0,632		0,223	-0,024	0,437
		0,592	0,053	2,234		0,256	-0,030	0,703
$\beta_3$			0,659	1,834			0,303	0,845
			0,315	0,134			0,254	0,586
			0,622	2,613			0,301	1,035
$\phi$				168,122				47,497
				151,234				44,271
				372,295				60,186
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$
$\beta_1$	0,069	-0,070	-0,059	0,012	0,071	-0,063	-0,077	-0,021
	0,066	-0,066	-0,056	0,028	0,068	-0,060	-0,072	-0,003
	0,063	-0,068	-0,055	-0,019	0,069	-0,062	-0,077	-0,046
$\beta_2$		0,223	-0,024	0,455		0,149	0,017	0,363
		0,202	-0,025	0,362		0,139	0,014	0,302
		0,222	-0,024	0,558		0,151	0,017	0,400
$\beta_3$			0,198	0,639			0,185	0,494
			0,176	0,490			0,170	0,411
			0,193	0,729			0,190	0,589
$\phi$				34,078				24,621
				32,148				23,646
				41,439				27,832

**Tabela 5.2:**  $\tilde{K}_{\theta,\theta}^{-1}$ ,  $\tilde{Cov}_2(\tilde{\theta})$  e as covariâncias amostrais no MBL, com  $\phi = 50$ .

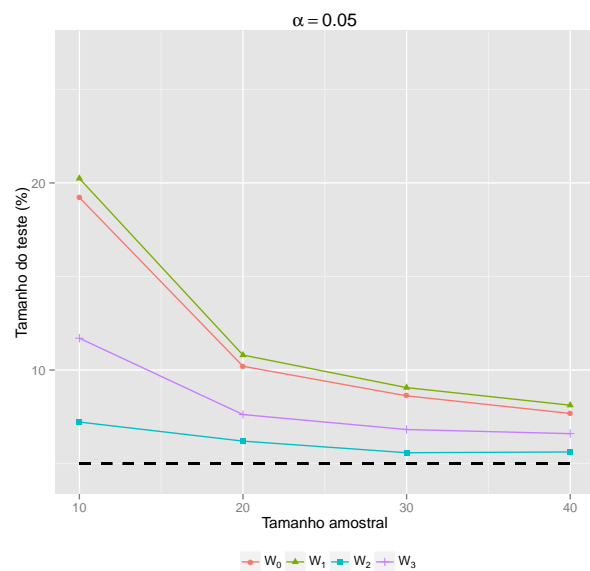
	$n = 10$				$n = 20$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$
$\beta_1$	0,115	-0,136	-0,099	0,055	0,039	-0,038	-0,040	-0,027
	0,108	-0,124	-0,093	0,076	0,038	-0,037	-0,039	-0,015
	0,086	-0,104	-0,077	-0,324	0,035	-0,035	-0,037	-0,013
$\beta_2$		0,327	0,017	1,172		0,128	-0,019	0,678
		0,283	0,029	1,065		0,120	-0,017	0,618
		0,259	0,009	1,904		0,122	-0,020	0,739
$\beta_3$			0,351	2,148			0,151	0,984
			0,254	1,309			0,140	0,873
			0,291	2,930			0,141	1,122
$\phi$				831,544				273,576
				817,854				270,685
				1638,426				352,371
	$n = 30$				$n = 40$			
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\phi$
$\beta_1$	0,031	-0,034	-0,028	-0,046	0,033	-0,031	-0,038	-0,080
	0,031	-0,033	-0,028	-0,037	0,033	-0,030	-0,037	-0,071
	0,030	-0,033	-0,028	-0,004	0,031	-0,029	-0,037	-0,085
$\beta_2$		0,112	-0,014	0,537		0,074	0,009	0,433
		0,107	-0,013	0,502		0,072	0,008	0,408
		0,106	-0,014	0,432		0,070	0,007	0,481
$\beta_3$			0,098	0,757			0,094	0,600
			0,094	0,695			0,091	0,565
			0,097	0,848			0,093	0,668
$\phi$				189,556				138,738
				187,834				137,844
				223,084				157,075



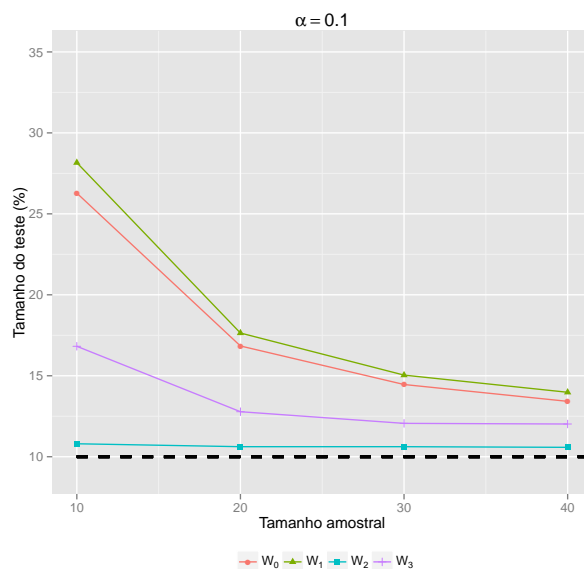
**Figura 5.3:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,10$ , MBL, com  $\phi = 20$ .*



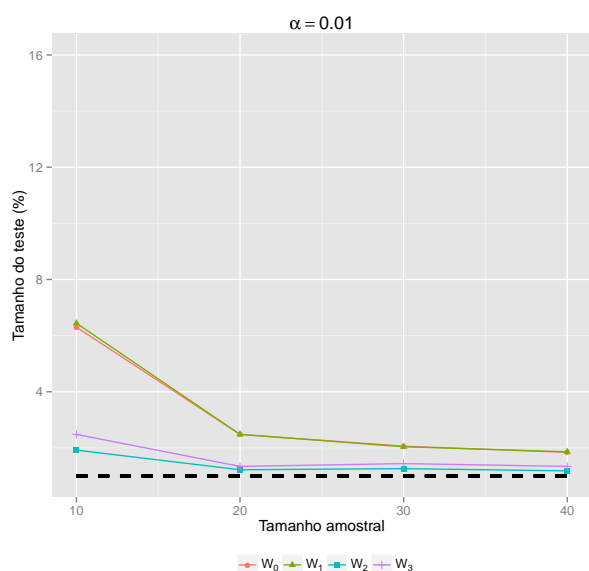
**Figura 5.4:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 20$ .*



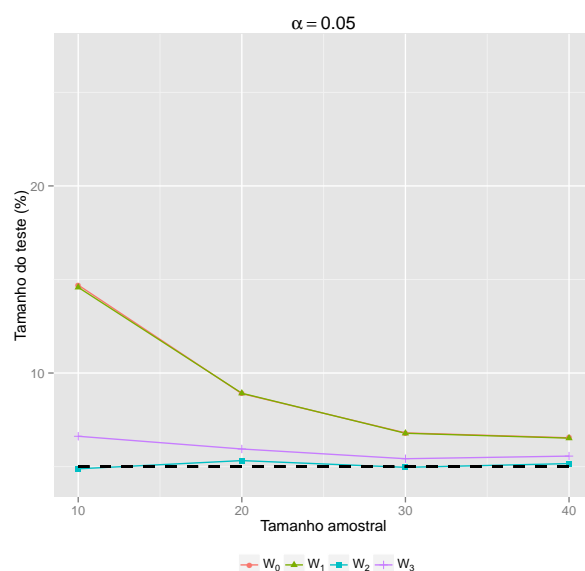
**Figura 5.5:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 20$ .*



**Figura 5.6:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,10$ , MBL, com  $\phi = 20$ .



**Figura 5.7:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 20$ .



**Figura 5.8:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 20$ .

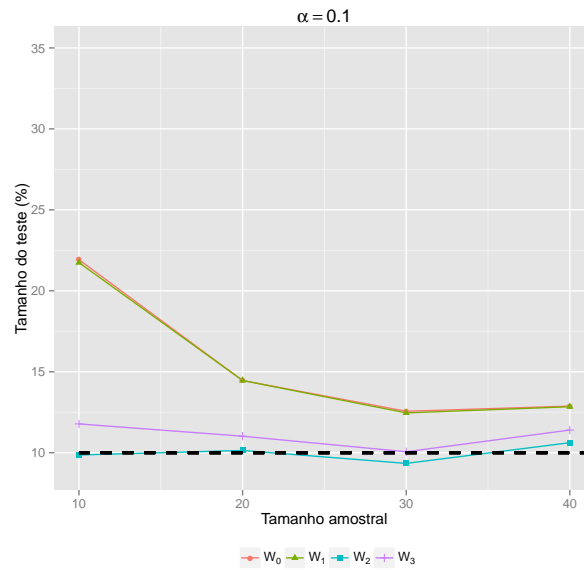


Figura 5.9: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$ , com  $\alpha = 0,10$ , MBL, com  $\phi = 20$ .

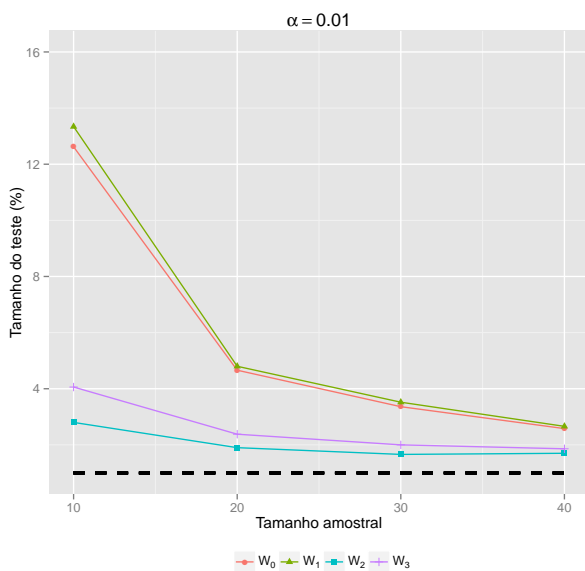


Figura 5.10: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 50$ .

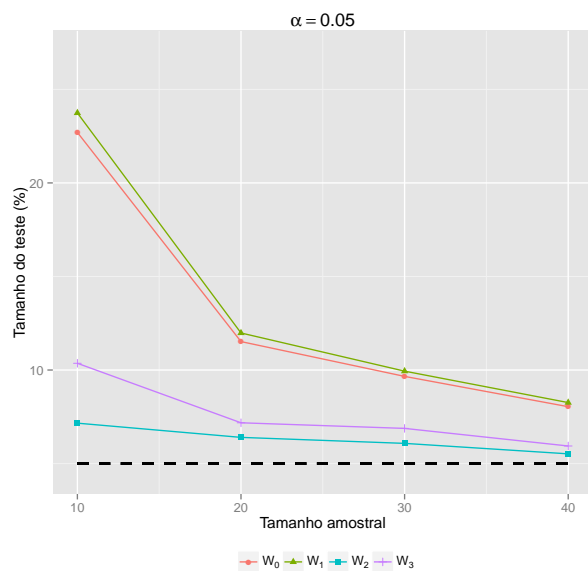
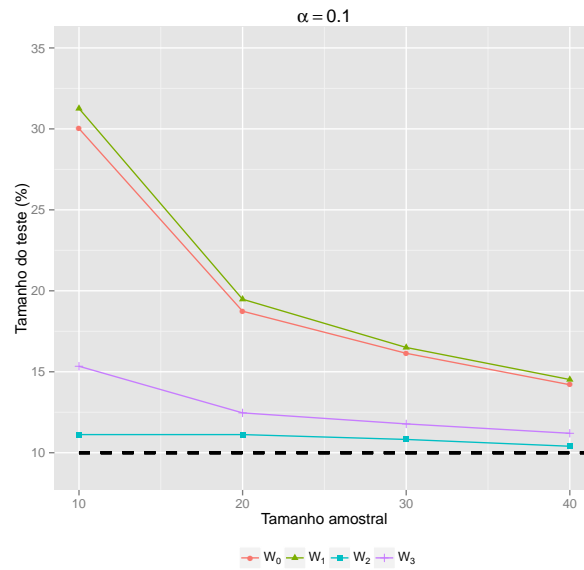


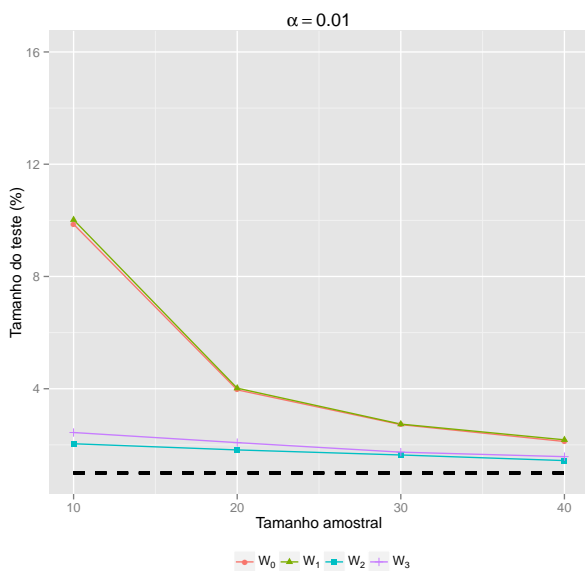
Figura 5.11: Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 50$ .

**Tabela 5.3:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MBL, com  $\phi = 20$ .*

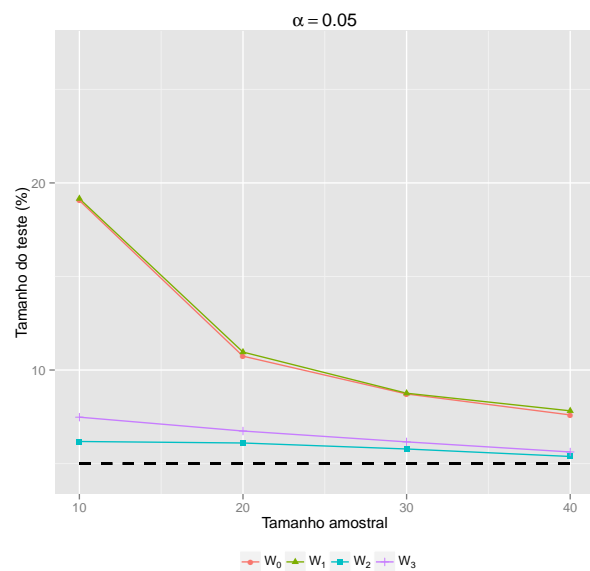
$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0, \beta_2 = 1, 5 \text{ e } \beta_2 = 2, 0$					
10	1,0	13,14	15,98	3,82	11,72
	5,0	22,34	26,98	8,10	19,40
	10,0	28,78	34,60	12,44	25,86
20	1,0	4,52	5,42	1,98	3,30
	5,0	11,84	13,24	6,68	9,92
	10,0	18,88	21,10	11,60	16,22
30	1,0	3,18	3,54	1,84	2,52
	5,0	9,82	10,88	6,28	8,28
	10,0	15,56	17,44	10,94	14,12
40	1,0	2,52	2,82	1,58	2,20
	5,0	8,72	9,44	6,42	7,82
	10,0	14,60	15,72	11,30	13,70
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0 \text{ e } \beta_2 = 1, 5$					
10	1,0	9,94	10,76	3,22	5,84
	5,0	19,22	20,24	7,22	11,70
	10,0	26,28	28,16	10,80	16,82
20	1,0	3,88	4,10	1,84	2,50
	5,0	10,20	10,80	6,20	7,62
	10,0	16,84	17,64	10,62	12,78
30	1,0	3,02	3,14	1,54	2,04
	5,0	8,62	9,06	5,58	6,82
	10,0	14,46	15,04	10,62	12,06
40	1,0	2,26	2,44	1,52	1,86
	5,0	7,68	8,12	5,62	6,60
	10,0	13,42	13,98	10,58	12,02
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0$					
10	1,0	6,30	6,44	1,92	2,48
	5,0	14,70	14,58	4,88	6,62
	10,0	21,92	21,74	9,86	11,78
20	1,0	2,48	2,48	1,22	1,34
	5,0	8,90	8,92	5,32	5,94
	10,0	14,46	14,46	10,14	11,02
30	1,0	2,06	2,04	1,26	1,44
	5,0	6,80	6,78	4,96	5,42
	10,0	12,56	12,46	9,34	10,06
40	1,0	1,84	1,86	1,18	1,34
	5,0	6,54	6,52	5,16	5,56
	10,0	12,88	12,84	10,62	11,40



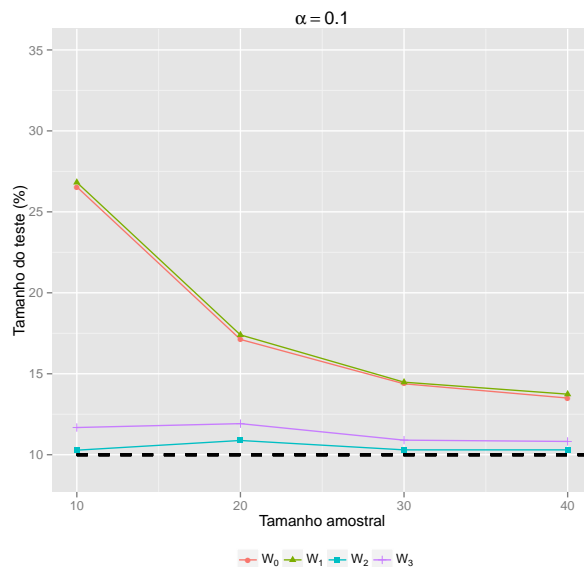
**Figura 5.12:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0, \beta_2 = 1,5$  e  $\beta_3 = 2,0$ , com  $\alpha = 0,10$ , MBL, com  $\phi = 50$ .



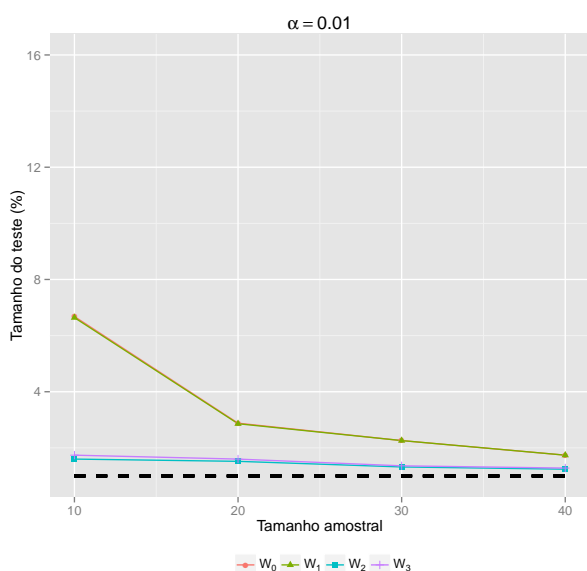
**Figura 5.13:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 50$ .



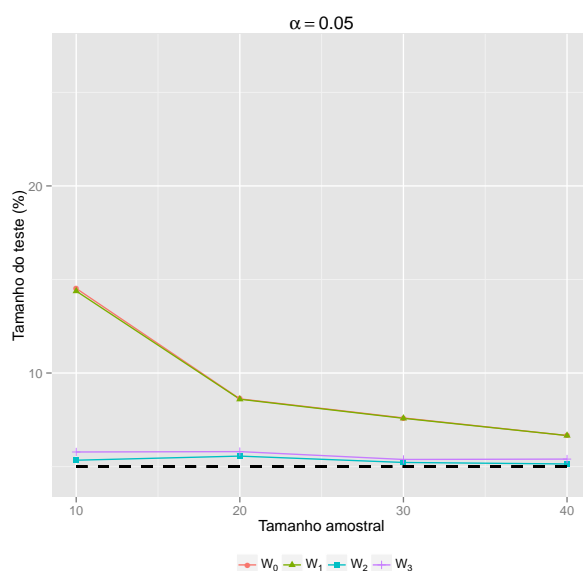
**Figura 5.14:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 50$ .



**Figura 5.15:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$  e  $\beta_2 = 1,5$ , com  $\alpha = 0,10$ , MBL, com  $\phi = 50$ .

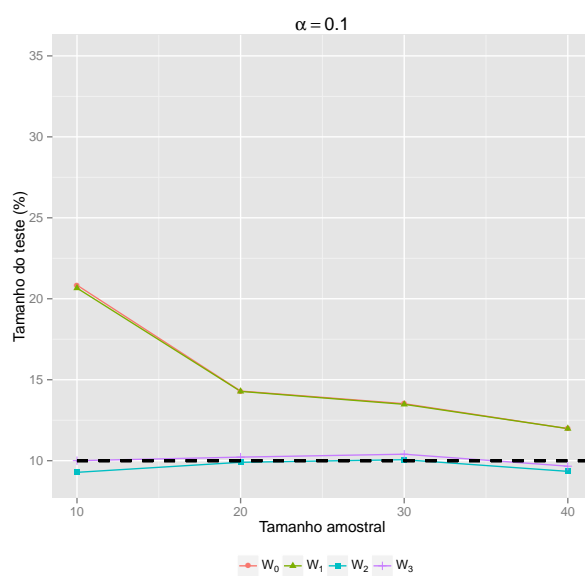


**Figura 5.16:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$ , com  $\alpha = 0,01$ , MBL, com  $\phi = 50$ .



**Figura 5.17:** Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1,0$ , com  $\alpha = 0,05$ , MBL, com  $\phi = 50$ .





**Figura 5.18:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$  de  $\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0$ , com  $\alpha = 0, 10$ , MBL, com  $\phi = 50$ .*

**Tabela 5.4:** *Tamanho empírico dos testes baseados em  $W_0$  a  $W_3$ , MBL, com  $\phi = 50$ .*

$n$	$\alpha(\%)$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0, \beta_2 = 1, 5 \text{ e } \beta_2 = 2, 0$					
10	1,0	12,62	13,34	2,80	4,06
	5,0	22,70	23,74	7,16	10,36
	10,0	30,02	31,26	11,12	15,34
20	1,0	4,66	4,80	1,90	2,38
	5,0	11,52	11,98	6,40	7,18
	10,0	18,74	19,48	11,12	12,46
30	1,0	3,36	3,52	1,66	2,00
	5,0	9,66	9,94	6,08	6,88
	10,0	16,14	16,50	10,82	11,78
40	1,0	2,58	2,66	1,70	1,86
	5,0	8,04	8,26	5,52	5,94
	10,0	14,20	14,52	10,40	11,20
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0 \text{ e } \beta_2 = 1, 5$					
10	1,0	9,86	10,02	2,04	2,44
	5,0	19,06	19,16	6,18	7,48
	10,0	26,54	26,82	10,28	11,68
20	1,0	3,96	4,02	1,82	2,08
	5,0	10,74	10,96	6,10	6,74
	10,0	17,12	17,40	10,88	11,92
30	1,0	2,72	2,74	1,64	1,74
	5,0	8,72	8,76	5,78	6,16
	10,0	14,38	14,48	10,30	10,90
40	1,0	2,12	2,18	1,44	1,58
	5,0	7,60	7,82	5,38	5,62
	10,0	13,50	13,74	10,30	10,82
$\mathcal{H} : \beta_1 = 1, 0$					
10	1,0	6,68	6,64	1,60	1,74
	5,0	14,52	14,38	5,34	5,78
	10,0	20,84	20,66	9,28	10,00
20	1,0	2,88	2,86	1,52	1,60
	5,0	8,62	8,60	5,56	5,80
	10,0	14,30	14,28	9,90	10,22
30	1,0	2,26	2,26	1,32	1,36
	5,0	7,60	7,58	5,22	5,38
	10,0	13,52	13,48	10,06	10,40
40	1,0	1,74	1,74	1,24	1,28
	5,0	6,66	6,66	5,14	5,40
	10,0	11,98	11,98	9,34	9,66

## 5.4 Considerações

Assim como nos modelos de dispersão, com a utilização do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de ordem  $n^{-1}$ ,  $\tilde{\theta}$ , e de sua respectiva matriz de covariâncias de segunda ordem, definimos nos modelos de regressão beta um teste de Wald que apresenta melhores resultados em comparação com o teste de Wald original. Porém, ao contrário dos MD, o teste cujo tamanho empírico está mais próximo do nível nominal é o construído com  $\tilde{\theta}$  e a matriz de informação de Fisher avaliada em  $\tilde{\theta}$ .



## Capítulo 6

# Considerações finais

As expansões assintóticas são bastante úteis quando aplicadas na modelagem estatística. No Capítulo 2 obtivemos o coeficiente de assimetria de ordem  $n^{-1/2}$  da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros no modelo de regressão beta, que pode ser utilizado como um critério de avaliação do ajuste do modelo. Vimos que a distribuição dos EMV nos modelos de regressão beta é levemente assimétrica. Assim, um estudo interessante seria estudar o comportamento da distribuição do EMV no modelo simplex, que pertence à classe dos MD.

A obtenção da matriz de covariâncias de segunda ordem do EMV no modelo de dispersão, Capítulo 4, foi interessante pois seus elementos estão mais próximos dos da matriz de covariâncias amostrais em comparação com a matriz de covariâncias de primeira ordem. Este resultado é mais significativo quando usado para modificar o teste de Wald, com respeito aos parâmetros da regressão. No modelo de regressão beta, o teste de Wald utilizando a matriz de covariâncias de segunda ordem não foi tão vantajoso. Uma justificativa para este resultado poderia ser o fato de que nesse modelo os parâmetros  $\beta$  e  $\phi$  não são ortogonais. Um modelo em que a ortogonalidade também não acontece é o que foi proposto por Barreto-Souza e Vasconcellos (2011). Estudar as modificações no teste de Wald neste modelo também seria interessante.

O próximo passo é implementar os resultados desta tese no *software* R para que eles fiquem acessíveis e, de fato, aplicáveis.



## Apêndice A

# Cumulantes dos modelos de dispersão

Nos modelos de dispersão, os cumulantes de quarta ordem são dados por

$$\begin{aligned} \kappa_{rs}^{(tu)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ g_{1\ell}(r, s, t, u)_\ell - (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) [(r, s, tu)_\ell + (r, su, t)_\ell + (ru, s, u)_\ell] \right. \\ &\quad - (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) [(r, st, u)_\ell + (rt, s, u)_\ell] \\ &\quad \left. - w_\ell [(rt, su)_\ell + (ru, st)_\ell + (r, stu)_\ell + (rtu, s)_\ell] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\kappa_{rs}^{(t\lambda)} = -\phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell [(r, st)_\ell + (rt, s)_\ell] \right\}, \quad (\text{A.2})$$

$$\kappa_{rs}^{(\lambda\lambda)} = -\phi'' \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, s)_\ell, \quad (\text{A.3})$$

$$\kappa_{r\lambda}^{(tu)} = \kappa_{r\lambda}^{(t\lambda)} = \kappa_{r\lambda}^{(\lambda\lambda)} = \kappa_{\lambda\lambda}^{(tu)} = \kappa_{\lambda\lambda}^{(t\lambda)} = 0,$$

$$\kappa_{\lambda\lambda}^{(\lambda\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \alpha_{2\ell}'' \phi'^4 + 5\alpha_{2\ell}' \phi'^2 \phi'' + 2\alpha_{2\ell} \phi' \phi''' + 2\alpha_{2\ell} \phi''^2 \right\}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rst}^{(u)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ g_{3\ell}(r, s, t, u)_\ell - (f_{2\ell} + 2f_{3\ell}) [(r, s, tu)_\ell + (r, su, t)_\ell + (ru, s, t)_\ell] \right. \\ &\quad - (f_{1\ell} + 2f_{3\ell}) [(r, st, u)_\ell + (rt, s, u)_\ell + (rs, t, u)_\ell] \\ &\quad \left. - w_\ell [(rs, tu)_\ell + (rt, su)_\ell + (ru, st)_\ell + (r, stu)_\ell + (rtu, s)_\ell + (rsu, t)_\ell] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\kappa_{rst}^{(\lambda)} = -\phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{2\ell} + 2f_{3\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell [(r, st)_\ell + (rt, s)_\ell + (rs, t)_\ell] \right\}, \quad (\text{A.6})$$

$$\kappa_{rs\lambda}^{(u)} = -\phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})(r, s, u)_\ell + w_\ell [(r, su)_\ell + (ru, s)_\ell] \right\}, \quad (\text{A.7})$$

$$\kappa_{rs\lambda}^{(\lambda)} = -\phi'' \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, s)_\ell, \quad (\text{A.8})$$

$$\kappa_{r\lambda\lambda}^{(u)} = \kappa_{r\lambda\lambda}^{(\lambda)} = \kappa_{\lambda\lambda\lambda}^{(u)} = 0,$$

$$\kappa_{\lambda\lambda\lambda}^{(\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \alpha'_{3\ell} \phi'^4 + 3(\alpha_{3\ell} + \alpha'_{2\ell}) \phi'^2 \phi'' + 3\alpha_{2\ell} \phi' \phi''' + 3\alpha_{2\ell} \phi''^2 \right\}, \quad (\text{A.9})$$

$$\kappa_{rs,tu} = \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ g_{2\ell}(r, s, t, u)_\ell + (f_{2\ell} - f_{1\ell}) [(r, s, tu)_\ell + (rs, t, u)_\ell] + w_\ell(rs, tu)_\ell \right\}, \quad (\text{A.10})$$

$$\kappa_{rs,t\lambda} = \phi' \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{2\ell} - f_{1\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell(rs, t)_\ell \right\}, \quad (\text{A.11})$$

$$\kappa_{rs,\lambda\lambda} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\kappa_{r\lambda,t\lambda} = \phi^{-1} \phi'^2 \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, t)_\ell, \quad (\text{A.13})$$

$$\kappa_{r\lambda,\lambda\lambda} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\kappa_{\lambda\lambda,\lambda\lambda} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ (\alpha_{2\ell}^{(2)} - \alpha_{2\ell}^2) \phi'^4 - \alpha_{2\ell} \phi''^2 \right\}. \quad (\text{A.15})$$

E, nos modelos de dispersão, os cumulantes de terceira ordem são dados por

$$\kappa_{rst} = -\phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{2\ell} + 2f_{3\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell [(r, st)_\ell + (rt, s)_\ell + (rs, t)_\ell] \right\}, \quad (\text{A.16})$$

$$\kappa_{rs\lambda} = -\phi' \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, s)_\ell, \quad (\text{A.17})$$

$$\kappa_{r\lambda\lambda} = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\kappa_{\lambda\lambda\lambda} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \alpha_{3\ell} \phi'^3 + 3\alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right\}. \quad (\text{A.19})$$

$$\kappa_{rs}^{(t)} = -\phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{1\ell} + 2f_{3\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell [(r, st)_\ell + (rt, s)_\ell] \right\}, \quad (\text{A.20})$$

$$\kappa_{rs}^{(\lambda)} = -\phi' \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, s)_\ell, \quad (\text{A.21})$$



$$\kappa_{r\lambda}^{(t)} = \kappa_{r\lambda}^{(\lambda)} = \kappa_{\lambda\lambda}^{(t)} = 0,$$

$$\kappa_{\lambda\lambda}^{(\lambda)} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \alpha'_{2\ell} \phi'^3 + 2\alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right\}. \quad (\text{A.22})$$

$$\kappa_{rs,t} = \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ (f_{2\ell} - f_{1\ell})(r, s, t)_\ell + w_\ell(rs, t)_\ell \right\}, \quad (\text{A.23})$$

$$\kappa_{rs,\lambda} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\kappa_{r\lambda,t} = \phi' \sum_{\ell=1}^n w_\ell(r, t)_\ell, \quad (\text{A.25})$$

$$\kappa_{r\lambda,\lambda} = \kappa_{\lambda\lambda,t} = 0,$$

$$\kappa_{\lambda\lambda,\lambda} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ (\alpha'_{2\ell} - \alpha_{3\ell}) \phi'^3 - \alpha_{2\ell} \phi' \phi'' \right\}, \quad (\text{A.26})$$

em que

$$f_1 = - \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^3 d'_2, \quad f_2 = - \frac{d\mu}{d\eta} \frac{d^2\mu}{d\eta^2} d_2 - \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^3 d_3, \quad (\text{A.27})$$

$$f_3 = - \frac{d\mu}{d\eta} \frac{d^2\mu}{d\eta^2} d_2, \quad w = - \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^2 d_2, \quad (\text{A.28})$$

$$g_1 = \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^4 d''_2 + 5 \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} d'_2 + 2 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{d^3\mu}{d\eta^3} d_2 + 2 \left( \frac{d^2\mu}{d\eta^2} \right)^2 d_2, \quad (\text{A.29})$$

$$g_2 = \phi \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^4 d_2^{(2)} + 2 \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} (d'_2 - d_3) - \left( \frac{d^2\mu}{d\eta^2} \right)^2 d_2 - \phi \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^4 d_2^2, \quad (\text{A.30})$$

$$g_3 = 3 \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} d'_2 + 3 \frac{d\mu}{d\eta} \frac{d^3\mu}{d\eta^3} d_2 + 3 \left( \frac{d^2\mu}{d\eta^2} \right)^2 d_2 + \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^4 d_3 + 3 \left( \frac{d\mu}{d\eta} \right)^2 \frac{d^2\mu}{d\eta^2} d_3. \quad (\text{A.31})$$

em que  $d_{r\ell} = \mathbb{E} [\partial^r t(Y_\ell, \mu) / \partial \mu^r]$ ,  $\alpha_{r\ell} = \mathbb{E} [\partial^r a(Y_\ell, \phi) / \partial \phi^r]$ , as primeiras e segundas derivadas parciais de  $d_{r\ell}$  em relação à  $\mu_\ell$  e de  $\alpha_{r\ell}$  em relação à  $\phi_\ell$  são, respectivamente,  $d'_{r\ell}$  e  $d''_{r\ell}$ ,  $\alpha'_{r\ell}$  and  $\alpha''_{r\ell}$ ,  $d_{2\ell}^{(2)} = \mathbb{E} [\{\partial^2 t(Y_\ell, \mu) / \partial \mu^2\}^2]$  e  $\alpha_{2\ell}^{(2)} = \mathbb{E} [\{\partial^2 a(Y_\ell, \phi) / \partial \phi^2\}^2]$ .



## Apêndice B

# Cumulantes do modelo de regressão beta

Na distribuição beta, os cumulantes de quarta ordem são dados por

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(ad)} = & \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ -\phi^2 f_{\ell} \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^4 + 5\phi c_{\ell} \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^2 \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right. \\ & \left. - 2a_{\ell} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^3\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^3} - 2a_{\ell} \left( \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right)^2 \right\} (a, b, c, d)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(a\phi)} = & \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ 2 [\phi\mu_{\ell}c_{\ell} - \phi\psi''((1-\mu_{\ell})\phi) - 2a_{\ell}] \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right. \\ & \left. + \phi (\phi g_{\ell} + 3c_{\ell}) \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^3 \right\} (a, b, c)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(\phi\phi)} = & \sum_{\ell=1}^n \left\{ \phi^2 [\mu_{\ell}g_{\ell} - (1-\mu_{\ell})\psi'''((1-\mu_{\ell})\phi)] \right. \\ & \left. + 4\phi\mu_{\ell}c_{\ell} - 4\phi\psi''((1-\mu_{\ell})\phi) - 2a_{\ell} \right\} \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^2 (b, c)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{b\phi}^{(ad)} = & \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ \phi [-\phi\mu_{\ell}f_{\ell} + \phi\psi'''((1-\mu_{\ell})\phi) + 2c_{\ell}] \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^3 \right. \\ & + 3 [\mu_{\ell}c_{\ell} - \phi\psi''((1-\mu_{\ell})\phi) - a_{\ell}] \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \\ & \left. + [-\mu_{\ell}a_{\ell} - \psi'((1-\mu_{\ell})\phi)] \frac{d^3\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^3} \right\} (a, b, d)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{b\phi}^{(a\phi)} = & \sum_{\ell=1}^n \left\{ [-\phi^2 h_{\ell} - 3\phi (-\mu_{\ell}c_{\ell} + \psi''((1-\mu_{\ell})\phi)) - a_{\ell}] \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^2 \right. \\ & \left. + [-\mu_{\ell}a_{\ell} + \phi d_{\ell} + \psi'((1-\mu_{\ell})\phi)] \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right\} (a, b)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\kappa_{b\phi}^{(\phi\phi)} = \sum_{\ell=1}^n \left\{ -\mu_{\ell} [-\mu_{\ell}c_{\ell} + 2\psi''((1-\mu_{\ell})\phi)] + \phi i_{\ell} + d_{\ell} + \psi''((1-\mu_{\ell})\phi) \right\} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} (b)_{\ell},$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\phi\phi}^{(ad)} &= \sum_{\ell=1}^n \left\{ [-\phi^2 h_\ell - 4\phi(-\mu_\ell c_\ell + \psi''((1-\mu_\ell)\phi)) - 2a_\ell] \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + [-2\mu_\ell a_\ell + \phi d_\ell + 2\psi'((1-\mu_\ell)\phi)] \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right\} (a, d)_\ell, \end{aligned}$$

$$\kappa_{\phi\phi}^{(a\phi)} = \sum_{\ell=1}^n \{\phi i_\ell + 3d_\ell\} \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} (a)_\ell,$$

$$\kappa_{\phi\phi}^{(\phi\phi)} = \sum_{\ell=1}^n j_\ell,$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bcd}^{(a)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \phi \left[ -\phi f_\ell \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^4 + 6c_\ell \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^2 \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - 3a_\ell \left[ \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \frac{d^3\mu_\ell}{d\eta_\ell^3} + \left( \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right)^2 \right] \right\} (a, b, c, d)_\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bcd}^{(\phi)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ 3 [\phi \mu_\ell c_\ell - \phi \psi''((1-\mu_\ell)\phi) - 2a_\ell] \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right. \\ &\quad \left. + \phi (\phi g_\ell + 3c_\ell) \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^3 \right\} (b, c, d)_\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bc\phi}^{(a)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ \phi [-\phi \mu_\ell f_\ell + \phi \psi'''((1-\mu_\ell)\phi) + 3c_\ell] \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + [\phi \mu_\ell c_\ell - 3\phi \psi''((1-\mu_\ell)\phi) - 5a_\ell] \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right. \\ &\quad \left. + [-\mu_\ell a_\ell + \psi'((1-\mu_\ell)\phi)] \frac{d^3\mu_\ell}{d\eta_\ell^3} \right\} (a, b, c)_\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bc\phi}^{(\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n \left\{ [\phi (\mu_\ell (\phi g_\ell + 4c_\ell) - \phi (1-\mu_\ell) \psi'''((1-\mu_\ell)\phi)) - 4\psi''((1-\mu_\ell)\phi)) \right. \\ &\quad \left. - 2a_\ell] \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^2 + [-\mu_\ell a_\ell + \phi (-\mu_\ell^2 c_\ell + (1-2\mu_\ell) \psi''((1-\mu_\ell)\phi)) \right. \\ &\quad \left. + \psi'((1-\mu_\ell)\phi)] \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right\} (b, c)_\ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{b\phi\phi}^{(a)} &= \sum_{\ell=1}^n \left\{ [\phi^2 h_\ell + 4\phi (\mu_\ell c_\ell - \psi''((1-\mu_\ell)\phi)) - 2a_\ell] \left( \frac{d\mu_\ell}{d\eta_\ell} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + [-2\mu_\ell a_\ell + \phi d_\ell + 2\psi'((1-\mu_\ell)\phi)] \frac{d^2\mu_\ell}{d\eta_\ell^2} \right\} (a, b)_\ell, \end{aligned}$$

$$\kappa_{b\phi\phi}^{(\phi)} = \sum_{\ell=1}^n \{2\mu_{\ell} [\mu_{\ell}c_{\ell} - \psi''((1 - \mu_{\ell})\phi)] + \phi i_{\ell} + d_{\ell}\} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}}(b)_{\ell},$$

$$\kappa_{\phi\phi\phi}^{(a)} = \sum_{\ell=1}^n \{\phi i_{\ell} + 3d_{\ell}\} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}}(a)_{\ell},$$

$$\kappa_{\phi\phi\phi}^{(\phi)} = \sum_{\ell=1}^n j_{\ell},$$

$$\kappa_{ac,bd} = \phi^2 \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} \left( \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right)^2 (a, b, c, d)_{\ell},$$

$$\kappa_{ac,b\phi} = \phi \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} (a, b, c)_{\ell},$$

$$\kappa_{a\phi,b\phi} = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^2 (a, b)_{\ell},$$

$$\kappa_{ac,\phi\phi} = \kappa_{a\phi,\phi\phi} = \kappa_{\phi\phi,\phi\phi} = 0.$$

E os cumulantes de terceira ordem, na distribuição beta são dados por

$$\kappa_{abc} = \phi^2 \sum_{\ell=1}^n \left\{ \phi c_{\ell} \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^3 - 3a_{\ell} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right\} (a, b, c)_{\ell},$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ab\phi} = & \phi \sum_{\ell=1}^n \left\{ [\phi\mu_{\ell}c_{\ell} - \phi\psi''((1 - \mu_{\ell})\phi) - 2a_{\ell}] \left( \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \right)^2 \right. \\ & \left. - [\mu_{\ell}a_{\ell} - \psi'((1 - \mu_{\ell})\phi)] \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} \right\} (a, b)_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\kappa_{a\phi\phi} = \sum_{\ell=1}^n \{2[-\mu_{\ell}a_{\ell} + \psi'((1 - \mu_{\ell})\phi)] + \phi d_{\ell}\} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}}(a)_{\ell},$$

$$\kappa_{\phi\phi\phi} = \sum_{\ell=1}^n e_{\ell},$$

$$\kappa_{ab,c} = \phi^2 \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} \frac{d^2\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} (a, b, c)_{\ell},$$

$$\kappa_{ab,\phi} = \phi \sum_{\ell=1}^n \{ \mu_{\ell} a_{\ell} - \psi'((1 - \mu_{\ell})\phi) \} \frac{d^2 \mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}^2} (a, b)_{\ell},$$

$$\kappa_{a\phi,c} = \phi \sum_{\ell=1}^n a_{\ell} (a, c)_{\ell},$$

$$\kappa_{\phi b,\phi} = \sum_{\ell=1}^n \{ \mu_{\ell} a_{\ell} - \psi'((1 - \mu_{\ell})\phi) \} \frac{d\mu_{\ell}}{d\eta_{\ell}} (b)_{\ell},$$

$$\kappa_{\phi\phi,c} = \kappa_{\phi\phi,\phi} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} a &= \psi'((1 - \mu)\phi) + \psi'(\mu\phi), \\ b &= (1 - \mu)^2 \psi'((1 - \mu)\phi) + \mu^2 \psi'(\mu\phi) - \psi'(\phi), \\ c &= \psi''((1 - \mu)\phi) - \psi''(\mu\phi), \\ d &= (1 - \mu)^2 \psi''((1 - \mu)\phi) - \mu^2 \psi''(\mu\phi), \\ e &= \psi''(\phi) - (1 - \mu)^3 \psi''((1 - \mu)\phi) - \mu^3 \psi''(\mu\phi), \\ f &= \psi'''((1 - \mu)\phi) + \psi'''(\mu\phi), \\ h &= (1 - \mu)^2 \psi'''((1 - \mu)\phi) + \mu^2 \psi'''(\mu\phi), \\ i &= (1 - \mu)^3 \psi'''((1 - \mu)\phi) - \mu^3 \psi'''(\mu\phi), \\ j &= \psi'''(\phi) - (1 - \mu)^4 \psi'''((1 - \mu)\phi) - \mu^4 \psi'''(\mu\phi). \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos podem reescrever os cumulantes de terceira e quarta ordem da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(ad)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n h_{11\ell}(a, b, c, d)_{\ell}, & \kappa_{bc}^{(a\phi)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n h_{12\ell}(a, b, c)_{\ell}, & \kappa_{bc}^{(\phi\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{13\ell}(b, c)_{\ell}, \\ \kappa_{b\phi}^{(ad)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n h_{14\ell}(a, b, d)_{\ell}, & \kappa_{b\phi}^{(a\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{15\ell}(a, b)_{\ell}, & \kappa_{b\phi}^{(\phi\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{16\ell}(b)_{\ell}, \\ \kappa_{\phi\phi}^{(ad)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{17\ell}(a, d)_{\ell}, & \kappa_{\phi\phi}^{(a\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{18\ell}(a)_{\ell}, & \kappa_{\phi\phi}^{(\phi\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n j_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bcd}^{(a)} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n h_{21\ell}(a, b, c, d)_{\ell}, & \kappa_{bcd}^{(\phi)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n h_{22\ell}(b, c, d)_{\ell}, \\ \kappa_{bc\phi}^{(a)} &= \phi \sum_{\ell=1}^n h_{23\ell}(a, b, c)_{\ell}, & \kappa_{bc\phi}^{(\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{24\ell}(b, c)_{\ell}, \\ \kappa_{b\phi\phi}^{(a)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{25\ell}(a, b)_{\ell}, & \kappa_{b\phi\phi}^{(\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{26\ell}(b)_{\ell}, \\ \kappa_{\phi\phi\phi}^{(a)} &= \sum_{\ell=1}^n h_{18\ell}(a)_{\ell}, & \kappa_{\phi\phi\phi}^{(\phi)} &= \sum_{\ell=1}^n j_{\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ac,bd} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n h_{31\ell}(a, b, c, d)_\ell, & \kappa_{ac,b\phi} &= \phi \sum_{\ell=1}^n h_{32\ell}(a, b, c)_\ell, & \kappa_{ac,\phi\phi} &= 0, \\ \kappa_{a\phi,b\phi} &= \sum_{\ell=1}^n h_{33\ell}(a, b)_\ell, & \kappa_{a\phi,\phi\phi} &= 0, \\ \kappa_{\phi\phi,\phi\phi} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{abc} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n v_{1\ell}(a, b, c)_\ell, & \kappa_{ab\phi} &= \phi \sum_{\ell=1}^n v_{2\ell}(a, b)_\ell, \\ \kappa_{a\phi\phi} &= \sum_{\ell=1}^n v_{3\ell}(a)_\ell, & \kappa_{\phi\phi\phi} &= \sum_{\ell=1}^n e_\ell, \\ \kappa_{ab,c} &= \phi^2 \sum_{\ell=1}^n w_{1\ell}(a, b, c)_\ell, & \kappa_{ab,\phi} &= \phi \sum_{\ell=1}^n w_{2\ell}(b, c)_\ell, \\ \kappa_{a\phi,c} &= \phi \sum_{\ell=1}^n w_{3\ell}(a, b)_\ell, & \kappa_{\phi b,\phi} &= \sum_{\ell=1}^n w_{4\ell}(b)_\ell, \\ \kappa_{\phi\phi,c} &= 0, & \kappa_{\phi\phi,\phi} &= 0. \end{aligned}$$





# Referências Bibliográficas

- Barreto-Souza e Vasconcellos (2011)** Wagner Barreto-Souza e Klaus L. P. Vasconcellos. Bias and skewness in general extreme-value regression model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:1379–1393. Citado na pág. 2, 97
- Barroso et al. (2013)** Lúcia P. Barroso, Denise A. Botter e Gauss M. Cordeiro. Second-order covariance matrix formula for heteroskedastic generalized linear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42:1618–1627. Citado na pág. 2, 22
- Botter e Cordeiro (1998)** Denise A. Botter e Gauss M. Cordeiro. Improved estimators for generalized linear models with dispersion covariates. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 62:91–104. Citado na pág. 2
- Bowman e Shenton (1998)** Kimiko O. Bowman e L. R. Shenton. Asymptotic skewness and the distribution of maximum likelihood estimators. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27:2743–2760. Citado na pág. 2, 9, 10
- Brownlee (1965)** K. A. Brownlee. *Statistical theory and methodology in science and engineering*. John Wiley & Sons, London, 2 ed. Citado na pág. 17, 18
- Cavalcanti et al. (2009)** Alexsandro B. Cavalcanti, Gauss M. Cordeiro, Denise A. Botter e Lúcia P. Barroso. Asymptotic skewness in exponential family nonlinear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 38:2275–2287. Citado na pág. 2
- Cordeiro (2004)** Gauss M. Cordeiro. Second-order covariance matrix of maximum likelihood estimates in generalized linear models. *Statistics and Probability Letters*, 66:153–160. Citado na pág. 2, 22
- Cordeiro e Klein (1994)** Gauss M. Cordeiro e Ruben Klein. Bias correction in arma models. *Statistics & Probability Letters*, 30(3):1317–1334. Citado na pág. 23
- Cordeiro e McCullagh (1991)** Gauss M. Cordeiro e Peter McCullagh. Bias correction in generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 19:169–176. Citado na pág. 2
- Cordeiro e Paula (1989)** Gauss M. Cordeiro e Gilberto A. Paula. Improved likelihood ratio statistics for exponential family nonlinear models. *Biometrika*, 76:93–100. Citado na pág. 1
- Cordeiro e Santana (2008)** Gauss M. Cordeiro e Rosangela G. Santana. Covariance matrix formula for exponential nonlinear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 37:2724–2734. Citado na pág. 2, 22
- Cordeiro e Vasconcellos (1999)** Gauss M. Cordeiro e Klaus L. P. Vasconcellos. Second-order biases of the maximum likelihood estimates in von mises regression models. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 41:189–198. Citado na pág. 2
- Cordeiro et al. (2006)** Gauss M. Cordeiro, Lúcia P. Barroso e Denise A. Botter. Covariance matrix formula for generalized linear models with unknown dispersion. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 35:113–120. Citado na pág. 2, 22

- Cordeiro et al. (2014)** Gauss M. Cordeiro, Denise A. Botter, Aleksandro B. Cavalcanti e Lúcia P. Barroso. Covariance matrix of the bias-corrected maximum likelihood estimator in generalized linear models. *Statistical Papers*, 55:643–652. Citado na pág. 2, 19
- Cordeiro e Cordeiro (2001)** Hérbetes H. Cordeiro e Gauss M. Cordeiro. Skewness for parameters in generalized linear models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30:1317–1334. Citado na pág. 2
- Cox e Snell (1968)** David R. Cox e E. J. Snell. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 30:248–275. Citado na pág. 1, 2
- Doornik (2006)** Jurgen A. Doornik. *Ox: An Object-Oriented Matrix Language*. Timberlake Consultants Press, London. Citado na pág. 14
- Ferrari e Cribari-Neto (2004)** Silvia L. P. Ferrari e Francisco Cribari-Neto. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31:799–815. Citado na pág. 1, 3, 5, 16
- Jarque e Bera (1987)** Carlos M. Jarque e Anil K. Bera. A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, 55:163–172. Citado na pág. 9
- Jørgensen (1997a)** Bent Jørgensen. *The Theory of Dispersion Models*. Chapman & Hall, London. Citado na pág. 5
- Jørgensen (1987a)** Bent Jørgensen. Exponential dispersion models (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, 49:127–162. Citado na pág. 1, 5
- Jørgensen (1997b)** Bent Jørgensen. Proper dispersion models (with discussion). *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 11:89–140. Citado na pág. 1, 5
- Jørgensen (1987b)** Bent Jørgensen. Small dispersion asymptotics. *REBRAPE: Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, 1:59–90. Citado na pág. 1, 5
- Jørgensen (1983)** Bent Jørgensen. Maximum likelihood estimation and large-sample inference for generalized linear and nonlinear regression models. *Biometrika*, 70:19–28. Citado na pág. 1
- Kendall e Stuart (1977)** Maurice G. Kendall e Alan Stuart. *The Advanced Theory of Statistic. 4th Edition*. Griffin, London. Citado na pág. 9
- Lawley (1956)** D. N. Lawley. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, 43:295–303. Citado na pág. 10, 19
- Lemonte (2011)** Artur J. Lemonte. Covariance matrix formula for birnbaum-saunders regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81:899–908. Citado na pág. 2
- Lemonte e Cordeiro (2010)** Artur J. Lemonte e Gauss M. Cordeiro. Asymptotic skewness in birnbaum-saunders nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, 80:892–898. Citado na pág. 2
- Lemonte et al. (2007)** Artur J. Lemonte, Francisco Cribari-Neto e Klaus L. P. Vasconcellos. Improved statistical inference for the two-parameter birnbaum-saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51:4656–4681. Citado na pág. 2
- Magalhães et al. (2013)** Tiago M. Magalhães, Denise A. Botter e Mônica C. Sandoval. Asymptotic skewness for the beta regression model. *Statistics and Probability Letters*, 83:2236–2241. Citado na pág. 14
- McCullagh e Nelder (1989)** Peter McCullagh e John A. Nelder. *Generalized Linear Models*. Chapman & Hall, London. Citado na pág. 4

- Nelder e Wedderburn (1972)** John A. Nelder e Robert W. M. Wedderburn. Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 135:370–384. Citado na pág. 1
- Nocedal e Wright (2006)** Jorge Nocedal e Stephen J. Wright. *Numerical Optimization, 2nd Edition*. Springer, New York. Citado na pág. 4
- Ospina et al. (2006)** Raydonal Ospina, Francisco Cribari-Neto e Klaus L. P. Vasconcellos. Improved point and interval estimation for a beta regression model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(2):960–981. Citado na pág. 2
- Pace e Salvan (1997)** Luigi Pace e Alessandra Salvan. *Principles of Statistical Inference from a Neo-Fisherian Perspective*. World Scientific. Citado na pág. 19, 20, 21
- Patriota e Cordeiro (2011)** Alexandre G. Patriota e Gauss M. Cordeiro. A matrix formula for the skewness of maximum likelihood estimators. *Statistics and Probability Letters*, 81:529–537. Citado na pág. 9, 10, 23
- Paula (1992)** Gilberto A. Paula. Bias correction for exponential family nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 40:43–54. Citado na pág. 2
- Peers e Iqbal (1985)** H. W. Peers e Mohammad Iqbal. Asymptotic expansions for confidence limits in the presence of nuisance parameters, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 47:547–554. Citado na pág. 2, 7, 22, 23
- Prater (1956)** N. H. Prater. Estimate gasoline yields from crudes. *Petroleum Refiner*, 35:236–238. Citado na pág. 16, 17
- R Core Team (2012)** R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012. URL <http://www.R-project.org/>. ISBN 3-900051-07-0. Citado na pág. 18
- Rocha et al. (2010)** Andréa V. Rocha, Alexandre B. Simas e Gauss M. Cordeiro. Second-order asymptotic expressions for the covariance matrix of maximum likelihood estimators in dispersion models. *Statistical and Probability Letters*, 80:718–725. Citado na pág. 22
- Sen et al. (2010)** Pranab K. Sen, Júlio M. Singer e Antônio C. Pedroso Lima. *From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*. Cambridge University Press, New York. Citado na pág. 4
- Shenton e Bowman (1977)** L. R. Shenton e Kimiko O. Bowman. *Maximum Likelihood Estimation in Small Samples*. Griffin, London. Citado na pág. 2, 22, 23
- Simas et al. (2010a)** Alexandre B. Simas, Wagner Barreto-Souza e Andréa V. Rocha. Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54:348–366. Citado na pág. 2, 3, 4, 11, 16
- Simas et al. (2010b)** Alexandre B. Simas, Andréa V. Rocha e Gauss M. Cordeiro. Skewness of maximum likelihood estimators in dispersion models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140:2111–2121. Citado na pág. 2
- Simas et al. (2011)** Alexandre B. Simas, Andréa V. Rocha e Wagner Barreto-Souza. Bias-corrected estimators for dispersion models with dispersion covariates. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141:3063–3074. Citado na pág. 2