

**Estimação da probabilidade de ruína em processos  
multivariados de risco com aplicações em Atuária**

João Vinícius de França Carvalho

TESE A SER APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientador: Profa. Dra. Chang Chiann

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu parcialmente auxílio financeiro da  
CAPES

São Paulo, 26 de abril de 2017

# **Estimação da probabilidade de ruína em processos multivariados de risco com aplicações em Atuária**

Esta é a versão original da tese elaborada pelo candidato João Vinícius de França Carvalho, tal como submetida à Comissão Julgadora.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Chang Chiann (orientadora) - IME-USP
- Profa. Dra. Airlane Pereira Alencar - IME-USP
- Prof. Dr. Luís Eduardo Afonso - FEA-USP
- Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes - IM-UFRGS
- Profa. Dra. Thelma Sáfyadi - DEX-UFLA

# Agradecimentos

O final de um ciclo é sempre um momento de reflexão e de reviver na lembrança toda a trajetória pregressa que nos fez chegar até o presente. Lembrar de todo esforço e dedicação para que determinadas metas fossem cumpridas, bem ou mal sucedidas. Afinal, a vida é assim e é preciso extrair aprendizados que nos tornam pessoas melhores qualquer que seja o resultado.

Mas é o momento de retribuir àqueles que, mais do que pela colaboração direta no trabalho, ajudaram a moldar o ser humano, em várias dimensões mutuamente dependentes, que vai tentar desbravar o futuro com a missão de tornar o mundo melhor do que ele é no presente.

Não poderia começar de outra maneira, agradecendo os meus pais, Neusa e João, que me inspiraram sempre a tentar ser uma pessoa melhor pelos grandes exemplos que são e sempre querendo o melhor para mim. Obrigado pela dedicação de toda uma vida para prover todo o amor e suporte emocional necessário para caminharmos com as próprias pernas. Agradeço também à minha irmã Ana Cláudia que, mesmo geograficamente distante, sempre está com o coração presente e disposta a dar uma mão amiga. Amo muito vocês!

À minha doce Tatiana Iwai: sempre forte ao meu lado, vivendo as aventuras do amor, do companheirismo, da cumplicidade, do respeito, da confiança, da ética, dos sonhos compartilhados, das noites viradas e fins de semana trabalhando, dos afazeres diários do nosso lar. Estou longe de ter o seu talento para escrever, mas saiba que você é o meu maior presente na vida! Aos nossos pais, Sylvia e Hiromassa, que com tanto carinho sempre estão com braços abertos para nos ajudar a tornar a vida mais leve e divertida.

Logicamente, à minha querida orientadora Profa. Dra. Chang Chiann por todo o carinho maternal com que me tratou desde que nos conhecemos e seu incentivo constante à minha auto-superação, além da liberdade concedida para que eu pudesse fazer as minhas escolhas, desde a graduação até a conclusão do doutorado. Sua sabedoria e paciência oriental foram fundamentais para me tranquilizar diante dos desafios mais complicados de todos os trabalhos que desenvolvemos (relatório do CEA, dissertação, tese). E não foram poucos! Muito obrigado por tudo!

"O todo sem a parte não é todo;  
A parte sem o todo não é parte;  
Mas se a parte o faz todo sendo parte,  
Não se diga que é parte, sendo todo".  
Gregório de Matos

"Since all models are wrong the scientist must be alert to what is importantly wrong.  
It is inappropriate to be concerned about mice when there are tigers abroad".  
Box, G. E. P. (1976), "Science and Statistics", *Journal of the American Statistical Association*, 71, 791-799.

# Resumo

Na teoria do risco coletivo, o estudo de processos de risco é fundamental para garantir a solvência financeira de uma firma ao longo do tempo e um dos principais interesses é a determinação da probabilidade de o processo entrar em ruína. A literatura vem buscando desenvolver soluções analíticas para a probabilidade de ruína adotando premissas específicas, tais como suposições de distribuições de probabilidades para o fluxo de sinistros, prêmios não adaptativos e avaliação do processo de risco em tempo contínuo. O objetivo deste trabalho é a estimação da probabilidade de ruína de processos de risco em tempo discreto, incorporando dois refinamentos: um tratamento estocástico e adaptativo ao fluxo de prêmios e a dissociação entre os valores financeiros e de quantidades de cada termo (prêmios e sinistros) do modelo clássico. Além do desenvolvimento teórico utilizando o modelo VAR(p), foi proposto um algoritmo de simulação computacional, a partir de observações históricas e da estrutura de dependência entre as variáveis, que revela quase certamente o verdadeiro valor da probabilidade de ruína. Para avaliar a assertividade da metodologia, foram realizadas simulações com distribuições paramétricas conhecidas, validando a capacidade do método proposto na detecção das soluções particulares. Na sequência, a metodologia foi avaliada em um experimento computacional controlado com dados simulados de um processo de risco cuja estrutura de dependência entre os termos foi previamente fixada, de modo a compreender de que maneira variações controladas nos parâmetros de dependência afetam a relação entre a probabilidade de ruína e o capital inicial. Finalmente, a metodologia foi aplicada em dados reais de uma carteira de seguros privados de automóveis, possibilitando identificar um capital mínimo de solvência, de acordo com os riscos assumidos no seu ciclo de subscrição. Como resultado, pôde-se verificar que uma estrutura de dependência multivariada afetam as estimativas na probabilidade de ruína, possibilitando uma redução superior a 50% do capital de solvência.

**Palavras-chave:** processos de risco, probabilidade de ruína, séries temporais multivariadas, martingais, capital de solvência.

# Abstract

In collective risk theory, the study of risk processes plays a key role in assessing how a firm's financial assets evolve over time and one of the primary issues is to determine the probability of the process get into ruin. The literature has been developing analytical solutions to the probability of ruin by adopting specific assumptions, such as specific probability distributions for the claim's cash flow, non-adaptive premiums and evaluation of the risk process in continuous time. The objective of this work is the estimation of the probability of ruin of risk processes incorporating two refinements: a stochastic and adaptive treatment to the premiums' flow and the dissociation between the financial values and amounts of each term (premiums and claims) of the classic model. In addition to the theoretical development using the VAR(p) model, in order to make possible the refinement of the model, a computational simulation algorithm was proposed, based on historical observations and the dependence structure among the variables, which almost certainly reveals the true value of the probability of ruin. To evaluate the assertiveness of the methodology, simulations were performed with known parametric distributions, validating the capacity of the proposed method in the detection of particular solutions. Afterwards, the methodology was evaluated in a controlled computational experiment with simulated data of a risk process which dependency structure between the terms was previously fixed, in order to understand how controlled variations in the dependence parameters affect the relationship between the probability of ruin and solvency capital. Finally, the methodology was applied in real data of a private automobiles' insurance portfolio, in order to identify a minimum solvency capital, according to the risks assumed in its subscription cycle. Results show that multivariate dependence structures affects the estimates in the probability of ruin, allowing a reduction of more than 50 % of the solvency capital.

**Keywords:** risk processes, probability of ruin, multivariate time series, martingales, solvency capital.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos Básicos e Revisão da Literatura</b>	<b>4</b>
2.1 A probabilidade de ruína como parâmetro dimensionador de quantidades de interesses em seguros . . . . .	4
2.2 O processo de <i>Cramér-Lundberg</i> . . . . .	7
2.3 Uma breve revisão das abordagens de estimação da probabilidade de ruína . . . . .	9
2.4 Modelos Lineares de Séries Temporais . . . . .	13
2.4.1 A estrutura univariada . . . . .	13
2.4.2 A estrutura multivariada . . . . .	13
2.4.3 Construção de modelos VAR . . . . .	14
2.4.4 Causalidade de Granger em modelos VAR . . . . .	16
2.5 Definições e Resultados importantes de Cálculo Estocástico . . . . .	17
<b>3 A metodologia de estimação da probabilidade de ruína para o processo estocástico de risco multivariado</b>	<b>21</b>
3.1 Introdução . . . . .	21
3.2 A probabilidade de ruína como um funcional . . . . .	21
3.3 As hipóteses a serem testadas . . . . .	23
3.4 A nova abordagem a ser adotada . . . . .	25
3.5 O processo de risco como um modelo multivariado de Séries Temporais . . . . .	27

3.5.1	Resultados gerais para o modelo VAR(p) . . . . .	27
3.5.2	Formas explícitas para um caso particular: o modelo VAR(1) . . . . .	30
3.6	A proposta de estimação do funcional via <i>bootstrap</i> e sua propriedade de consistência	38
<b>4</b>	<b>Simulações e Aplicações</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução . . . . .	45
4.2	Simulações para o processo de ruína com prêmios constantes e sinistros com distribuições conhecidas . . . . .	45
4.2.1	O caso Poisson-Exponencial . . . . .	46
4.2.2	O caso Poisson-Normal . . . . .	48
4.3	Uma aplicação a dados simulados de um modelo VAR(1) . . . . .	50
4.4	Uma aplicação a um conjunto de dados reais do mercado brasileiro de seguros . . .	61
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>83</b>
5.1	Considerações Finais . . . . .	83
5.2	Sugestões para Pesquisas Futuras . . . . .	84
<b>A</b>	<b>Simulação de múltiplas séries temporais com estrutura VAR</b>	<b>86</b>
<b>B</b>	<b>Tabelas originais dos dados simulados da com prêmios constantes e sinistros com distribuição conhecida</b>	<b>88</b>
<b>C</b>	<b>Tabelas originais dos dados simulados de um modelo VAR(1) com parâmetros controlados</b>	<b>93</b>
<b>D</b>	<b>Tabelas originais da aplicação do método ao conjunto de dados reais</b>	<b>100</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>106</b>

# Lista de Figuras

4.1	Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidas pelo algoritmo com os valores exatos para o caso Poisson-Exponencial, em função de $U_0$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	47
4.2	Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidas pelo algoritmo com os valores exatos para o caso Poisson-Normal, em função de $U_0$ e diferentes valores de $\theta$ . . . . .	49
4.3	Comparação dos limites máximos e mínimos das probabilidades de ruína em função de $U_0$ , em processos de risco submartingais e supermartingais. . . . .	52
4.4	Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial $U_0$ : variando $\phi_{ii} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de $\phi_{12}$ e $\phi_{43}$ . . . . .	55
4.5	Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial $U_0$ : variando $\phi_{12} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de $\phi_{ii}$ . . . . .	56
4.6	Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial $U_0$ : variando $\phi_{43} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de $\phi_{ii}$ . . . . .	57
4.7	Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial $U_0$ : variando $\phi_{12} = \phi_{43} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de $\phi_{ii}$ . . . . .	58
4.8	Evolução dos valores médios de prêmios e sinistros individuais entre 2007 e 2012, com as respectivas projeções em 12 meses pelo modelo VAR(3). . . . .	62
4.9	Evolução das unidades de riscos expostos e de sinistros ocorridos entre 2007 e 2012, com as respectivas projeções em 12 meses pelo modelo VAR(3). . . . .	62
4.10	Evolução do fluxo de caixa corrente entre 2007 e 2012, com as projeções em 12 meses de acordo com o modelo VAR(3). . . . .	64

4.11	10.000 trajetórias temporais simuladas para as reservas considerando $U_0 = 0$ , em função de $\theta$ . . . . .	65
4.12	<i>Gráfico das probabilidades de ruína para diferentes valores de reserva <math>U_0</math> e de carregamento <math>\theta</math>.</i> . . . . .	66
4.13	Análise de resíduos de cada série após o ajuste do modelo VAR(1) aos dados. . . . .	69
4.14	Análise de resíduos de cada série após o ajuste do modelo VAR(3) aos dados. . . . .	70
4.15	Função correlação cruzada entre os resíduos dos modelos estimados. . . . .	71
4.16	Densidades empíricas padronizadas do funcional $\psi(U_0, \theta, T)$ . . . . .	75
4.17	Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidos pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de $U_0$ , para diferentes valores de $\theta$ (intervalos de confiança de 95% nas linhas tracejadas). . . . .	78
4.18	Densidades empíricas padronizadas do funcional $\psi(U_0, \theta, T)$ , para diferentes valores de $U_0$ e $\theta$ . . . . .	78
4.19	Comparação dos p-valores estimados pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de $U_0$ , com diferentes valores de $\theta$ , para as hipóteses $H_0 : \psi(U_0, \theta, T) = \psi_0$ vs. $H_1 : \psi(U_0, \theta, T) < \psi_0$ , nas condições de Solvency II ( $\psi_0 = 0,5\%$ ) e AAA ( $\psi_0 = 0,03\%$ ). . . . .	79
4.20	Comparação dos tempos médios até a entrada em ruína, caso ocorra, estimado pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de $U_0$ , para diferentes valores de $\theta$ . . . . .	82

# Lista de Tabelas

4.1	<i>Estatísticas descritivas de cada série de dados reais.</i>	63
4.2	<i>Matriz de correlação da série observada de dados reais.</i>	63
4.3	<i>Critérios de seleção da ordem do modelo VAR ajustado ao conjunto de dados reais.</i>	67
4.4	<i>Autovalores calculados do modelo VAR(1) ajustado aos dados reais.</i>	67
4.5	<i>Autovalores calculados do modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.</i>	67
4.6	<i>Testes de verificação de premissas dos modelos VAR(1) e VAR(3) ajustado aos dados reais.</i>	68
4.7	<i>Matriz de correlação dos resíduos do modelo VAR(1) ajustado aos dados reais.</i>	68
4.8	<i>Matriz de correlação dos resíduos do modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.</i>	68
4.9	<i>Teste de Breusch-Godfrey nos resíduos de cada série temporal.</i>	72
4.10	<i>Estimativas dos parâmetros de um modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.</i>	73
4.11	<i>Probabilidades de ruína estimadas usando os dados gerados no cenário básico (1), para diferentes valores de carregamento <math>\theta</math> e de reserva inicial <math>U_0</math>.</i>	74
4.12	<i>Probabilidades de ruína estimadas usando os dados gerados no cenário básico (2), para diferentes valores de carregamento <math>\theta</math> e de reserva inicial <math>U_0</math>.</i>	74
4.13	<i>P-valores dos testes de verificação da condição "Solvency II" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e de taxas de carregamento <math>\theta</math>, usando os dados gerados no cenário básico (1).</i>	76
4.14	<i>P-valores dos testes de verificação da condição "Solvency II" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e taxas de carregamento <math>\theta</math>, usando os dados gerados no cenário básico (2).</i>	76
4.15	<i>P-valores dos testes de verificação da condição "AAA" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e de taxas de carregamento <math>\theta</math>, usando os dados gerados no cenário básico (1).</i>	76

4.16	<i>P-valores dos testes de verificação da condição "AAA" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e taxas de carregamento <math>\theta</math>, usando os dados gerados no cenário básico (2).</i>	76
4.17	<i>Capital de Solvência (em milhões de R\$) estimado pelo modelo VAR(3), por critério de requerimento de capital, para diferentes valores de carregamento <math>\theta</math>.</i>	80
B.1	<i>Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Exponencial, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\theta = 0,2</math>.</i>	89
B.2	<i>Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Exponencial, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\theta = 0,8</math>.</i>	90
B.3	<i>Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Normal, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\theta = 0,1</math> e <math>\gamma = 0,00019998</math>.</i>	91
B.4	<i>Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Normal, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\theta = 0,2</math> e <math>\gamma = 0,00039996</math>.</i>	92
C.1	<i>Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;1\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	93
C.2	<i>Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;0,3\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	94
C.3	<i>Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;0,6\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	94
C.4	<i>Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;0,9\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	95
C.5	<i>Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;1\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	95
C.6	<i>Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;0,3\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	96
C.7	<i>Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0;0,6\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	96

C.8	<i>Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial <math>U_0</math>, com <math>\phi_{ii} = \{0; 0,9\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math> do modelo VAR(1) simulado.</i>	97
C.9	<i>P-valores estimados para a probabilidade de ruína a partir de dados simulados de um modelo VAR(1), com <math>\phi_{ii} = \{0; 1\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math>, em função do capital inicial <math>U_0</math>.</i>	97
C.10	<i>P-valores estimados para a probabilidade de ruína a partir de dados simulados de um modelo VAR(1), com <math>\phi_{ii} = \{0; 0,3\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math>, em função do capital inicial <math>U_0</math>.</i>	98
C.11	<i>P-valores estimados para a probabilidade de ruína a partir de dados simulados de um modelo VAR(1), com <math>\phi_{ii} = \{0; 0,6\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math>, em função do capital inicial <math>U_0</math>.</i>	98
C.12	<i>P-valores estimados para a probabilidade de ruína a partir de dados simulados de um modelo VAR(1), com <math>\phi_{ii} = \{0; 0,9\}</math> e diferentes valores fixados de parâmetros <math>\phi_{12}</math> e <math>\phi_{43}</math>, em função do capital inicial <math>U_0</math>.</i>	99
D.1	<i>Probabilidades de ruína estimadas pelo modelo VAR(3) a partir da nova metodologia, em função de diferentes valores de carregamento <math>\theta</math> e de reserva inicial <math>U_0</math>.</i>	101
D.2	<i>Erros-padrões das probabilidades de ruína estimadas pelo VAR(3) a partir da nova metodologia, em função de diferentes valores de carregamento <math>\theta</math> e de reserva inicial <math>U_0</math>.</i>	102
D.3	<i>P-valores estimados pelo modelo VAR(3) a partir da nova metodologia, ao testar a condição de "Solvency II" da seguradora, em função de diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e taxas de carregamento <math>\theta</math>.</i>	103
D.4	<i>P-valores estimados pelo modelo VAR(3) a partir da nova metodologia, ao testar a condição de "AAA" da seguradora, em função de diferentes valores de reserva inicial <math>U_0</math> e taxas de carregamento <math>\theta</math>.</i>	104
D.5	<i>Tempo médio até a entrada em ruína, caso ocorra, estimado pelo modelo VAR(3) a partir da nova metodologia em função de diferentes valores de carregamento <math>\theta</math> e de reserva inicial <math>U_0</math>.</i>	105

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das atividades em que se é mais interessante projetar os cenários futuros é na área de seguros por tratar-se de um mecanismo que visa garantir o ressarcimento do valor financeiro de um ativo sujeito a eventos adversos aleatórios. Assim, a incerteza sobre a ocorrência de eventos indesejados faz com que indivíduos se disponham a investir em um fundo de reservas para se proteger financeiramente de eventos aleatórios danosos a seus respectivos patrimônios. Desta maneira, tem-se um processo de natureza intertemporal, em que cada indivíduo despense uma pequena quantia financeira certa no presente (denominado *prêmio*) para, eventualmente, ser ressarcido por eventos fortuitos, no futuro (denominado *sinistro*).

Esse fundo de reserva comum à coletividade de indivíduos é gerenciado por um agente (segurador) que deve garantir que o montante acumulado com a arrecadação de prêmios seja suficiente para pagar as despesas com sinistros no futuro, caso necessário. Neste contexto, é essencial o uso de medidas de probabilidade que possibilitem mensurar a adequação desse fluxo financeiro. A razão pela qual os gestores necessitam desta mensuração é que, além de influenciar a rentabilidade da empresa, ela também está relacionada à probabilidade de a organização entrar em processo de falência (denominada *ruína*), tendo consequências bastante severas: seja a descontinuidade do negócio e prejuízos aos capitalistas, seja ao falhar em prover proteção financeira entre mutuários que seriam beneficiados por aqueles recursos.

Para a avaliação da situação de ruína em processos de risco, o modelo considerado clássico pela literatura é o de *Cramér-Lundberg* (Lundberg [1903] e Cramér [1930]), em que o patrimônio (ou *reservas*) é considerado um processo estocástico que cresce com a receita de prêmios e diminui com o pagamento das indenizações de sinistros a cada instante de tempo. Entretanto, ainda que diversos refinamentos tenham sido feitos neste modelo, a grande maioria tanto das abordagens tradicionais (Asmussen [1985], Dufresne e Gerber [1989]) como dos tratamentos mais recentes (Baumgartner e Gatto [2010], Wat [2012]) consideram ainda apenas as parcelas de sinistros como variáveis aleatórias. Na prática, porém, é importante observar que o desenvolvimento das receitas de prêmios não são necessariamente estáveis no decorrer da história e são adaptativos a outras variáveis.

A relação entre as séries de prêmios e sinistros pode ser observada de algumas maneiras distintas. Uma possível estrutura de dependência pode ser verificada entre os valores passados indenizados e os prêmios futuros a serem vertidos pelos segurados. É bastante intuitivo pensar que a cada final de período haja uma reavaliação de experiências incorridas no passado e, caso seja verificada uma piora expressiva nos sinistros pagos (seja pelos valores individuais ou pela frequência de pagamentos), pode mostrar-se necessária a alteração de valores individuais de contribuição na forma de prêmios ou no tamanho da carteira. Por outro lado, se a despesa com sinistros diminuir,

é possível que os prêmios sejam reduzidos. De qualquer maneira, esses movimentos conjuntos, ainda que temporalmente defasados, podem reduzir a necessidade de aportes de recursos futuros, diminuindo também a necessidade de constituição adicional de reservas de capital para manter um mesmo nível de probabilidade de ruína.

Assim, compreende-se que pode haver uma cadeia sistêmica de interdependência temporal entre os termos do modelo de risco coletivo que não deve ser desprezada. Suposições fortes como a independência, que geralmente é adotada nos modelos teóricos, precisam ser relaxadas e é um dos objetivos deste trabalho.

Ainda são escassos os trabalhos que incorporaram alguma estrutura de dependência entre prêmios e sinistros. Se por um lado, autores como Vidmar [2016] ainda estão desenvolvendo a teoria matemática em tempo contínuo, na prática o que se verifica é a evolução do processo de risco em tempo discreto. Neste contexto, a modelagem de séries temporais multivariadas mostra-se adequada como método de investigação e autores como Chan e Yang [2006] iniciaram a sua utilização. Todavia, nenhum desses trabalhos avaliaram diretamente a maneira com que variações na estrutura de dependência podem estar relacionadas a mudanças nas estimativas da probabilidade de ruína.

E é esta a lacuna que se pretende explorar. O objetivo central deste trabalho é a estimação da probabilidade de ruína de processos de risco incorporando dois refinamentos no modelo clássico: (i) um tratamento estocástico em tempo discreto, utilizando uma forma bilinear entre os valores financeiros e de quantidades de cada termo (prêmios e sinistros), e; (ii) considerando todos os componentes do fluxo de prêmios adaptativos à dinâmica do fluxo de sinistros, inserindo uma estrutura de dependência intertemporal entre as séries temporais.

Diante do exposto, o trabalho visa fornecer as seguintes contribuições, tanto do ponto de vista estatístico quanto da prática atuarial. Primeiro, ao incluir o tratamento dos prêmios como variáveis aleatórias e tratar todas as componentes como dependentes, espera-se relaxar o uso de algumas premissas irrealistas, tornando o processo de risco mais próximo da realidade e, como consequência, a estimação da situação de ruína mais assertiva. Para a área atuarial, melhorias no processo de estimação são extremamente relevantes, pois será este valor que determinará todas as demais quantidades de interesse de um modelo atuarial de risco coletivo. Especialmente no caso de subestimação da verdadeira (e desconhecida) probabilidade de ruína, as alocações de capital - seja na tarifação de prêmios ou dimensionamento de provisões e reservas técnicas - poderão estar também subdimensionadas, e, como consequência, comprometer a continuidade futura do negócio.

Segundo, para viabilizar o refinamento do modelo, foi proposto um algoritmo de simulação computacional baseado em técnicas multivariadas de séries temporais, a partir de observações históricas e da estrutura de dependência entre as variáveis. A partir disso, foram realizadas simulações com distribuições paramétricas conhecidas, e seus resultados foram comparados com aqueles clássicos da literatura com a finalidade de verificar se o método proposto é capaz de cobrir os casos particulares já detectados em estudos anteriores. Na sequência, a metodologia foi aplicada em dados simulados com estrutura de dependência entre os termos do modelo fixada a priori, de modo a compreender como variações nos parâmetros de dependência afetam a probabilidade de ruína. Terceiro, mais do que usar simulações, a metodologia foi aplicada em dados reais de uma carteira de seguros privados de automóveis, possibilitando identificar um capital mínimo de solvência, de acordo com os riscos assumidos no seu ciclo de subscrição.

Finalmente, em vez de procurar soluções gerais e analíticas para a probabilidade de ruína (que, por vezes, estão sujeitas a várias suposições irrealistas), este trabalho pretende contribuir com um algoritmo que incorpora uma estrutura de dependência temporal entre os fluxos de prêmios e sinistros (tanto em quantidades como em valores monetários e suas inter-relações), e que pode

ser uma alternativa de análise para resolver diversos problemas práticos, como apuração de apólices de seguros e atendimento de demandas regulatórias relevantes como a determinação de dimensionamento de reservas técnicas.

Para além dessa introdução, o trabalho está dividido em mais quatro capítulos. No Capítulo 2 seguinte é feita uma breve revisão da literatura sobre o tema e são apresentadas as definições gerais dos processos de risco. No Capítulo seguinte é apresentada a proposta de abordagem por meio de técnicas de séries multivariadas para a realização dos procedimentos de estimação da probabilidade de ruína. Na sequência, no Capítulo 4 o algoritmo é avaliado em contextos simulados e também em uma aplicação a dados reais. Por fim, no último Capítulo, são discutidas as conclusões obtidas neste trabalho sobre as abordagens utilizadas e sugestões de pesquisas futuras.

## Capítulo 2

# Conceitos Básicos e Revisão da Literatura

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos e definições a serem utilizados no decorrer do trabalho, dando particular ênfase à Teoria do Risco Coletivo. Também é feita uma breve revisão da literatura sobre as abordagens de estimação de ruína em processos de risco. Em seguida, são apresentados argumentos técnicos para evidenciar o fato de que a estrutura de dependência é intrínseca à dinâmica do processo de subscrição de seguros e tal estrutura não pode ser ignorada pelos modelos teóricos. Por fim, é apresentada a evolução da literatura que incorporou essa estrutura de dependência por meio de modelos de séries temporais, que será a ferramenta básica do método proposto neste trabalho.

### 2.1 A probabilidade de ruína como parâmetro dimensionador de quantidades de interesses em seguros

No contexto da teoria da ruína, o processo estocástico do desenvolvimento das reservas de uma organização é fundamental para conhecer o fluxo financeiro de uma empresa ao longo do tempo. Adicionando as receitas financeiras do período corrente ao montante anterior acumulado e reduzindo as obrigações correntes do mesmo período, o processo deve fornecer a quantidade de capital disponível a cada ponto no tempo. A cada período, o fluxo deve ser avaliado de tal maneira que o nível de recursos não seja inferior a zero, pois, em caso contrário, a empresa não tem condições de arcar com as suas obrigações e tem-se uma situação de falência.

Deste modo, é importante avaliar o primeiro momento em que essa situação possa ocorrer para que a organização possa se precaver financeiramente *ex-ante* de modo que se evite a falência. Essa situação de ruína (ou o instante em que ela ocorre) é uma função direta da alocação inicial de capital e da receita de prêmios, assim como é negativamente afetada pelo processo estocástico das despesas com o pagamento de indenização de sinistros. Geralmente, tanto as ocorrências de sinistros, quanto os valores que eles assumem estão absolutamente fora de controle do segurador. Todavia, cabe aos gestores de risco monitorarem estas ocorrências no passado de forma a projetar as expectativas de como esses sinistros agregados podem se desenvolver para o futuro.

A análise dos sinistros agregados é relevante porque é a partir deles que, dado um nível predefinido de risco aceitável de falência a incorrer, a seguradora poderá estipular o montante de duas variáveis que ela precisa gerenciar para garantir sua sustentabilidade financeira: a *reserva de capital* (patrimônio líquido) e o apreamento da apólice de seguro (*receita de prêmios*).

Para operacionalizar a modelagem do processo de sinistro agregado ( $S_{Ag}$ ), pode-se utilizar uma

estrutura matemática sob as suposições de que o tamanho do portfólio (quantidade de segurados) é suficientemente grande ( $n \rightarrow \infty$ ), além de as ocorrências dos sinistros serem independentes entre si. Com isso, a distribuição dos sinistros (perdas) agregados é dada por:

$$S_{Ag} = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(\mathbb{E}[S_{Ag}], \text{Var}[S_{Ag}]), \quad (2.1)$$

em que  $n$  é o tamanho do portfólio e  $X_i, \forall i = 1, \dots, n$ , é o montante individual de sinistro, com  $\mathbb{P}[X_i > 0] = p$ .

Esta aproximação é particularmente útil quando não se conhece a distribuição de  $S_{Ag}$  ou quando a sua obtenção é analiticamente complicada.

Uma particular atenção deve ser dada: os requisitos do Teorema do Limite Central expostos acima - grande quantidade de elementos segurados e independência entre as ocorrências e os valores gerados a partir dos sinistros - não são suficientes. Não só o portfólio precisa ser grande, mas também é preciso ter massa crítica de sinistros também suficientemente grande. Ademais, é necessário que haja independência entre os valores de sinistros ( $X_i \perp X_j, X_i$  i.i.d.,  $i, j = 1, \dots, n$  e  $i \neq j$ ).

A partir disso, a expectativa de sinistro agregado  $\mathbb{E}[S_{Ag}]$  deve refletir a expectativa de indenização individual do segurado por parte da seguradora, e, portanto, é a base tarifária da operação à qual dá-se o nome de prêmio estatístico (*PE*). Contudo, este valor sozinho pode não capturar adequadamente as variações nas despesas da seguradora com sinistros, de maneira que é necessário agregar uma variável adicional que incorpore possíveis desvios adversos em relação à média das frequências e severidades. A esta medida (coeficiente  $\theta$ ) dá-se o nome de *margem de oscilação de risco* que é um carregamento de segurança cuja função principal é evitar que o patrimônio seja consumido por variações anormais de sinistros.

Para o coeficiente  $\theta$  possa ser dimensionado, considere  $U$  o capital social da entidade. Naturalmente, se  $U < 0$  a firma é decretada falida (ou em estado de *ruína*). Portanto, é desejável que, ao menos até o próximo período de operações, ela tenha capital suficiente para arcar com suas obrigações.

Ou seja, na análise para um período de tempo, define-se a seguinte relação:

$$U = U_0 + PP - S_{Ag}, \quad (2.2)$$

em que  $U_0$  seja o capital inicial (ou *reservas livres*, tipicamente não negativas) da empresa;  $PE = \mathbb{E}[S_{Ag}]$ , sendo  $S_{Ag}$  as indenizações agregadas incorridas pela entidade (pagamento de sinistros);  $PP = PE(1 + \theta)$ , representando as *receitas de prêmios*, ou *provisões técnicas*.

É preciso avaliar e garantir que a probabilidade de ruína ( $\psi$ ), a partir da distribuição do sinistro agregado seja mínima, ou seja:

$$\begin{aligned} F_{S_{Ag}}[U] = F_{S_{Ag}}[U_0 + PP - S_{Ag}] &\geq 1 - \psi \implies \\ \implies \mathbb{P}[U_0 + PP - S_{Ag} < 0] &\leq \psi \implies \\ \implies \mathbb{P}[U_0 + (PE(1 + \theta)) - S_{Ag} < 0] &\leq \psi \implies \\ \implies \mathbb{P}[U_0 + (\mathbb{E}[S_{Ag}](1 + \theta)) - S_{Ag} < 0] &\leq \psi. \end{aligned}$$

Do Teorema do Limite Central (garantidas as premissas) decorre que a variável aleatória:

$$Z = \frac{S_{Ag} - \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} \sim N(0, 1).$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \frac{U_0 + (\mathbb{E}[S_{Ag}](1 + \theta)) - S_{Ag} - \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} < \frac{-\mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} \right] &\leq \psi \implies \\ \implies \mathbb{P} \left[ \frac{S_{Ag} - \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} > \frac{U_0 + \theta \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} \right] &\leq \psi. \end{aligned}$$

Lembrando que se  $Z \sim N(0, 1)$ , então:

$$\mathbb{P}[Z \geq z_\psi] \leq \psi,$$

e portanto:

$$\mathbb{P} \left[ Z > \frac{U_0 + \theta \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} \right] \leq \psi,$$

e, deste modo, são equivalentes:

$$z_\psi = \frac{U_0 + \theta \mathbb{E}[S_{Ag}]}{\sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]}} \tag{2.3}$$

em que  $z_\psi$  é o mínimo quantil de ordem  $\psi$  à direita.

Da Equação (2.3), extraem-se duas importantes determinações:

1. O montante de capital a ser alocado no instante inicial:

$$U_0 = z_\psi \sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]} - \theta \mathbb{E}[S_{Ag}],$$

se  $\theta$  for conhecido, e;

2. O carregamento (margem) de oscilação de risco (de segurança):

$$\theta = \frac{z_\psi \sqrt{\text{Var}[S_{Ag}]} - U_0}{\mathbb{E}[S_{Ag}]},$$

se  $U_0$  for conhecido.

Desta maneira, é a partir do nível máximo de exposição à ruína ( $\psi$ ) que se deseja incorrer, que são determinadas duas quantidades fundamentais para o negócio segurador: tanto o montante  $U_0$  a ser alocado na forma de reserva de capital inicial a cada período, como a taxa de carregamento  $\theta$  sobre os prêmios, levando em consideração as expectativas pontuais e as incertezas associadas à materialização dos sinistros.

O modelo definido até aqui reflete a análise do processo de ruína de um período para outro (*one-step*). Entretanto, em termos gerenciais, é relevante que esta análise seja ampliada para múltiplos

períodos sequenciais. Para tanto, o modelo mais utilizado é o processo de Cramér-Lundberg, que será discutido na próxima seção.

## 2.2 O processo de *Cramér-Lundberg*

O processo de risco clássico de Cramér-Lundberg é um modelo estocástico que mede as variações do patrimônio de uma entidade seguradora ao longo do tempo. Trata-se, portanto, de uma extensão temporal do modelo apresentado na seção anterior e sua equação é dada por:

$$U_t = U_{t-1} + P_t - S_t, \quad (2.4)$$

para todo  $t \geq 0$  e de tal forma que  $U_0$  seja o capital inicial (não negativo) da empresa,  $P_t$  representem os prêmios (agregados) arrecadados no instante  $t$  e, finalmente,  $S_t$  sejam os sinistros (agregados) incorridos no instante  $t$ .

Quando se considera o processo de indenizações agregadas  $S_t$  como um processo de Poisson Composto homogêneo no tempo e também para algumas distribuições correlatas à Poisson e à Exponencial, o modelo possui vários resultados teóricos importantes (para uma revisão dos desenvolvimentos teóricos a respeito de parâmetros relevantes, ver [Asmussen \[2000\]](#)). No entanto, aqui serão apresentados apenas os elementos teóricos relevantes para fundamentar as argumentações posteriores deste trabalho.

Não é difícil provar que  $\mathbb{E}[S_{Ag}] = \mathbb{E}[X \star N] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N]$  e que  $\text{Var}[S_{Ag}] = \text{Var}[X \star N] = \mathbb{E}[N] \text{Var}[X] + [\mathbb{E}[X]]^2 \text{Var}[N]$ , desde que  $X_i \perp X_j$  e  $X \perp N$ ,  $i, j = 1, \dots, N = n$ .

Considerando como constante o crescimento do fluxo de prêmios (isto é,  $P_t = p$ ), então a média e a variância do processo de risco como Poisson Composto ( $N$  é uma variável aleatória Poisson e  $X$  é uma variável aleatória Exponencial, ambas de parâmetros fixos) são dados por:

$$\mathbb{E}[U_t] = \mathbb{E}[U_0 + pt - S_t] = \mathbb{E}\left[U_0 + \sum_{i=1}^t p_i - \sum_{i=1}^t S_{N_i}\right] = U_0 + pt - \lambda pt = U_0 + (p - \lambda \mu)t,$$

com  $S_{N_i}$  representando os sinistros agregados acumulados até o instante  $t$ , e

$$\text{Var}[U_t] = \text{Var}[U_0 + pt - S_t] = \text{Var}[S_t] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2),$$

em que  $\sigma^2$  e  $\mu$  representam a variância e a média, respectivamente, da distribuição do sinistro individual (no caso exponencial  $\mu = \sigma$ ).

A seguir, duas definições fundamentais para este trabalho.

**Definição 1** (Probabilidade de Ruína). *Diz-se que um processo de risco entrou em ruína se o processo de risco definido pela Equação 2.4 atingiu o valor 0 ou inferior. A probabilidade de ruína é uma medida deste evento, um valor tal que:*

$$\phi(U_0) = \mathbb{P}[U_t \leq 0 | U_0] \quad (2.5)$$

A partir do desenvolvimento temporal, define-se o *tempo até a ruína* como

$$T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0: U_t \leq 0\}, & \text{se este ínfimo existir,} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, trata-se do primeiro instante em que a seguradora é decretada falida. A probabilidade de ruína também pode ser expressa por  $\psi(U_0) = \mathbb{P}[T < \infty | U_0]$ . Em geral, assume-se que o prêmio arrecadado em um período seja necessariamente superior ao valor esperado do sinistro agregado (o que implica  $\theta \geq 0$ ) para que a ruína não ocorra com probabilidade 1. O teorema a seguir garante esse resultado.

**Teorema 2.1.** *No modelo de Crámer-Lundberg tradicional, se  $\mathbb{E}[P_t] = p < \mathbb{E}[S_t] = \lambda\mu$ , então  $\psi(U_0) = 1$ , quase certamente.*

*Demonstração.*

$$\frac{\mathbb{E}[U_t]}{t} = \frac{\mathbb{E}[U_0 + pt - S_t]}{t} = \frac{U_0 + pt - \mathbb{E}[S_t]}{t} = \frac{U_0 + pt - \lambda\mu t}{t} = \frac{U_0}{t} + (p - \lambda\mu).$$

Tomando o limite ao tempo infinito,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[U_t]}{t} \rightarrow p - \lambda\mu, q.c.$$

Portanto,

$$\frac{\mathbb{E}[U_t]}{t} < 0,$$

quase certamente quando  $t \rightarrow +\infty$ , implicando que  $\mathbb{P}[\exists t : U_t < 0] = 1$ . □

Em outras palavras, ainda que constante, o nível dos prêmios tem de ser no mínimo o valor esperado dos sinistros, para que a reserva de capital seja, em média, positiva, configurando esta condição como necessária (mas não suficiente) para a solvência da firma. Ademais, este fato implica que o carregamento sobre os prêmios (a já citada *margem de oscilação de risco*) seja um número não-negativo tal que:

$$\theta = \frac{p}{\lambda\mu} - 1 \Rightarrow \frac{\lambda\mu}{p} = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (2.6)$$

Esses resultados teóricos apresentados são centrais na teoria da ruína pois, uma vez que possuem soluções analíticas, eles permitem a comparação e validação dos resultados obtidos nos vários estudos que aplicam algum algoritmo de convolução no fluxo agregado de sinistros (geralmente entre distribuições correlatas à Poisson e à Exponencial).

Apesar desses benefícios, vale notar que várias das suposições deste modelo não são realistas. Nas abordagens tradicionais do modelo de Crámer-Lundberg, é comum supor que o perfil de risco dos mutuários seja estático, tanto na frequência das ocorrências como no valor da severidade do dano incorrido. Além disso, os prêmios são usualmente tratados como constantes, não sendo permitido que eles sejam adaptáveis às características evolutivas da carteira de segurados.

No entanto, em caso de alterações na quantidade de segurados, por qualquer motivo, não há garantias de que a proporção de ocorrências de sinistros permaneça estável, especialmente na presença de seleção adversa (ver Akerlof [1970]). E a lógica é um tanto simples: com prêmios

menores, atraem-se mais indivíduos com perfil indesejado para a carteira, o que aumentaria tanto a frequência relativa como o valor médio da indenização. Com isso, seria necessário aumentar o valor dos prêmios, uma vez que o prêmio estatístico deve refletir o perfil médio de indenizações, de modo a financiar os passivos oriundos dos sinistros. Todavia, em processos de expansão de carteira, espera-se que ocorra exatamente o inverso: o valor do prêmio individual tende a diminuir.

Tal situação implica ainda que, não sendo os prêmios constantes (e, portanto, independente de toda e qualquer variável), eles devem não apenas ser tratados como variáveis aleatórias no modelo, como também há de se investigar sua estrutura de dependência com outras características. Como os prêmios devem ser as contrapartidas para a entidade formar o fundo coletivo indenizatório de modo sustentável, eles deveriam, obrigatoriamente, seguir a tendência dos sinistros, ainda que o façam com defasagem temporal. Portanto, nesta situação, é de se esperar que a suposição de independência entre prêmios e sinistros não sejam observadas e exista uma função que descreva a dependência entre as duas séries.

Na seção seguinte, será feita uma breve revisão da literatura, trazendo os trabalhos mais importantes da área, com particular ênfase nas premissas e técnicas utilizadas para a modelagem de processos de riscos em seguros.

## 2.3 Uma breve revisão das abordagens de estimação da probabilidade de ruína

O desenvolvimento da teoria do risco coletivo, desde o pioneiro trabalho de [Lundberg \[1903\]](#), está ligado ao interesse de investigação de riscos incorridos pelas companhias de seguro, não apenas provenientes de apólices individuais, mas pelo conjunto de sinistros e arrecadações agregadas de todo o portfólio de segurados. Dentre os riscos, a literatura buscou resolver dois problemas principais: (1) encontrar funções distribuição do total de perdas (sinistro agregado), e (2) estimar a probabilidade de que a reserva contingente, montante de capital alocado em seu patrimônio para cobrir desvios adversos inesperados, seja suficiente para manter a sua existência. Essa segunda vertente, de diversas maneiras ligada à primeira, ficou conhecida como "teoria da ruína". Há vasta literatura em ambas as linhas, mas nesta breve revisão será dado o enfoque para os métodos de estimação da probabilidade de ruína, principal objetivo deste trabalho.

Admitindo algumas premissas a respeito da distribuição de probabilidades da frequência e também da severidade de sinistros individuais, bem como independência entre essas quantidades, o objetivo de muitos trabalhos foi buscar soluções analíticas para a probabilidade de ruína. [Kahn \[1962\]](#) e [Bowers et al. \[1997\]](#) fazem uma revisão abrangente a respeito dos primeiros desenvolvimentos teóricos sobre o assunto. Em meados da década de 1970, quando já se sabia que haveria soluções analíticas apenas em modelos compostos de Poisson com variantes da distribuição Exponencial e independentes, começaram os primeiros trabalhos a respeito de métodos de aproximação da verdadeira probabilidade de ruína ([DeVylder \[1977\]](#) e [Seal \[1978\]](#)).

Com o advento de microcomputadores, foi possível desenvolver algoritmos eficientes de estimação usando métodos numéricos para a mensuração pontual de seus valores, uma vez que para a grande maioria das distribuições sua obtenção é complicada ou não se tem soluções analíticas. [Asmussen \[1985\]](#) sugeriu o uso de simulação estocástica baseada no método de amostragem por importância. [Beekman \[1985\]](#) demonstrou uma maneira de se calcular analiticamente a probabilidade de solvência como função da distribuição geométrica composta. Baseando-se neste trabalho, [Dufresne e Gerber \[1989\]](#) propuseram um algoritmo recursivo que se baseia no mesmo processo

de perda agregada. Entretanto, [Bowers et al. \[1997\]](#) argumentam que esta metodologia é eficiente para estimar a probabilidade de ruína apenas quando a distribuição dos sinistros é uma combinação de distribuições exponenciais (deslocadas ou não).

[Embrechts e Veraverbeke \[1982\]](#) e [Asmussen e Rolski \[1991\]](#) apresentaram outras maneiras de calcular essa probabilidade, considerando a distribuição do montante financeiro do sinistro individual com caudas pesadas. Na mesma linha, autores como [Frees \[1986\]](#), [Asmussen e Binswanger \[1997\]](#), [Pitts \[1994\]](#) e [Mikosch e Samorodnitsky \[2000\]](#) propuseram algoritmos baseados em métodos de Monte Carlo para se fazer a estimação. Todos apontam que os processos de chegada de sinistros podem ter quaisquer distribuições discretas com segundo momento finito para os algoritmos funcionarem. Porém, todas essas metodologias incluem suposições baseadas em misturas de distribuições Exponencial, Gama, Pareto ou Lognormais para os sinistros individuais, além de fazerem o tratamento em tempo contínuo.

Visando validar as estimativas da probabilidade de ruína, [Baumgartner e Gatto \[2010\]](#) propuseram um método baseado no *Bootstrap* para efetuarem a validação das estimativas utilizando testes de hipóteses via a abordagem do *p-valor*. Os autores aplicaram o método em estudos com dados simulados a fim de realizar o teste unilateral de hipóteses e os resultados mostram bastante precisão, tanto estimando a probabilidade de ruína em casos nos quais se conhece as distribuições (e seu resultado exato), como ao utilizar de modo empírico a função de perda agregada.

As abordagens mais recentes para avaliação de risco em seguros em tempo contínuo utilizam processos Sparre-Andersen ([Malinovskii e Kosova \[2014\]](#)) ou de Lévy para generalizar o modelo tradicional de Cramér-Lundberg. Processos do primeiro tipo, também chamados de *processos de risco com renovação* permitem a inclusão de distribuições arbitrárias para modelar o tempo decorrido entre dois instantes de tempo que não sejam Exponenciais. Em processos de Lévy, [Griffin et al. \[2012\]](#), por exemplo, justificam essas extensões por considerarem que contemplam uma estrutura mais geral de sinistros, especialmente relacionada com processos de saltos (negativos) anormais, como desastres naturais. Outros trabalhos têm feito abordagens similares, tais como: [Avram et al. \[2011\]](#), [Zhang e Yang \[2014\]](#).

Em um trabalho bastante recente, [Vidmar \[2016\]](#) apresenta uma adaptação do modelo de Cramér-Lundberg com dependência estocástica entre os prêmios e os sinistros, para o caso de ambas as séries serem supostos Processos de Poisson homogêneos no tempo. Além disso, o autor desenvolve uma complexa expressão analítica para a probabilidade de ruína no caso particular de tanto os prêmios quanto os sinistros seguirem distribuições exponenciais. Todavia, esse trabalho carece de avaliação numérica a respeito de sua validade prática.

Geralmente, todos os modelos que tentam considerar as situações mais gerais possíveis incluem métodos matemáticos extremamente sofisticados e, justamente por serem tão complexos, acabam por perder proximidade com a realidade. Um dos motivos para este distanciamento é o fato de que todos os modelos analíticos são sempre dependentes de suposições prévias a respeito da distribuição do processo gerador dos dados a serem observados e também da premissa de independência. Essa premissa de independência costuma dar-se em duas condições: entre a severidade e a frequência de sinistros (a convolução de ambas compõe o fluxo de sinistros) e também entre os fluxos de prêmios e sinistros (sendo muito comum na literatura tratar os prêmios como constantes).

A respeito das técnicas utilizadas para a modelagem de alguma estrutura de dependência, de forma a relaxar alguma das suposições indicadas no parágrafo anterior, é importante avaliar que há diferentes tipos de dependência a serem considerados. [Albrecher e Kantor \[2002\]](#) incorporam uma estrutura Markoviana entre sinistros sucessivos. Já [Valdez e Mo \[2002\]](#) utilizaram procedimentos de simulação por meio de cópulas para obter a distribuição estatística do tempo até a ocorrência de ruína quando as ocorrências de sinistros são dependentes. Como resultado, os autores concluem

que as entidades tendem a entrar em falência mais rapidamente quanto mais forte for a dependência. Em comum é o tratamento em tempo contínuo, como também são [Albrecher e Boxma \[2004\]](#), [Kwan e Yang \[2010\]](#) e [Albrecher et al. \[2011\]](#).

Todavia, apesar de a maioria dos trabalhos teóricos se utilizarem da suposição de tempo contínuo, a realidade é baseada em tempo discreto, como argumentam [Li et al. \[2009\]](#). Neste trabalho, os autores fazem uma revisão bastante abrangente da evolução da literatura e os principais resultados obtidos para diversos casos, com o objetivo de simplificar a compreensão dos modelos de tempo contínuo, bem como obter aproximações ou limites para as quantidades de interesse.

A utilização de modelos de séries temporais na teoria matemática do risco não é recente. Os trabalhos seminais são devido a [Gerber \[1981\]](#) e [Gerber \[1982\]](#). No primeiro, o autor examina a probabilidade de ruína em estruturas autorregressivas (AR) no processo de ganhos (por *ganhos* deve-se entender a subtração entre receita de prêmios e despesas com sinistros). No segundo, o autor expande o trabalho anterior ao impor uma estrutura autorregressiva e de médias móveis (ARMA), além de mostrar que um determinado modelo de tarifação de prêmios de credibilidade pode ser entendida como um modelo ARMA(1,1).

[Promislow \[1991\]](#) generalizou a premissa de restrição de delimitação sobre a severidade de sinistros, deixada em aberto pelos trabalhos anteriores. O autor argumenta que [Gerber \[1982\]](#) utilizou essa premissa implicitamente em seu resultado principal e que o relaxamento desta premissa é justificada pelo fato de que, frequentemente, é utilizada a distribuição exponencial (por sua simplicidade matemática) para esta modelagem.

Nota-se que os trabalhos anteriores não dissociam os termos de prêmios e sinistros agregados: fazem a modelagem da subtração entre eles. Nem mesmo [Ramsey \[1991\]](#), que estuda a teoria assintótica da mesma classe de modelos, obtendo limites para a probabilidade de solvência. Neste trabalho, o autor demonstra que caso a esperança da diferença entre receitas e despesas seja estritamente positiva, a probabilidade de a entidade não entrar em falência é estritamente positiva, mesmo em um horizonte de tempo infinito. Na mesma linha, [Christ e Steinebach \[1995\]](#) consideram um modelo geral ARMA(p,q) para os ganhos anuais de sorte que seja possível estimar uma medida de risco de descasamento entre os fluxos de prêmios e sinistros para o processo de risco. A esta medida dá-se o nome de *coeficiente de ajuste* e será objeto de análise posterior.

[Bowers et al. \[1997\]](#) utilizam um modelo AR(1) para modelar a dependência entre os sinistros em dois sucessivos instantes de tempo. Os autores justificam que tal modelo linear também pode ser utilizado para os fluxos temporais de prêmios e sinistros, sendo os primeiros a dissociarem as séries em duas parcelas. Já [Yang e Zhang \[2003\]](#) atribuem modelos AR(p) para ambos os fluxos, ainda que não considerem uma estrutura de dependência que pudessem relacionar prêmios e sinistros.

Modelos multivariados de séries temporais começaram a ser usados não para modelar a estrutura de dependência que eventualmente as séries de prêmios e sinistros possuíam, mas sim de modo a agregar diversas carteiras de seguros como insumos para a composição dos fluxos de receitas e despesas. O trabalho pioneiro neste sentido, embora sem utilizar séries temporais, foi o de [Cossette e Marceau \[2000\]](#), em que os autores deduzem o efeito da estrutura de correlação entre as ocorrências de sinistros de diferentes carteiras, sem defasagem temporal entre elas, na probabilidade de ruína. Já [Wan et al. \[2005\]](#) introduziu uma defasagem de ordem 1 no modelo autorregressivo vetorial para agregar os sinistros provenientes de diferentes ramos de seguros. A grande vantagem dessa inclusão, argumentam os autores, é que essa abordagem não apenas captura a dependência entre sinistros sucessivos, como também relaciona (por meio de uma combinação linear de variáveis) as diversas linhas de negócios.

Zhang et al. [2007] expandem esta literatura ao considerar que, além dos sinistros totais possuírem estrutura temporal e serem provenientes de uma agregação de diversas linhas de negócios, também o fluxo agregado de prêmios são dados da mesma maneira, porém independentes dos sinistros. Para relacionar cada linha de negócio, os autores utilizam um modelo VAR(1) e concluem, por meio de simulações, que a estrutura de dependência imposta entre as diferentes classes de negócios possuem um grande impacto sobre a probabilidade de ruína estimada.

O primeiro trabalho a utilizar a idéia de causalidade de Granger entre prêmios e sinistros agregados foi Chan e Yang [2006]. Porém, os autores não evidenciam como a probabilidade de ruína é afetada pela força da dependência do modelo VAR, uma vez que obtêm apenas o limitante superior para esta probabilidade e, ao apresentar exemplo de aplicação, apresenta o modelo de Yang e Zhang [2003] como caso particular, mas que não apresenta qualquer causalidade de Granger. Ademais, a abordagem dos autores difere fundamentalmente à proposta neste trabalho: eles consideram um processo bivariado para o VAR(1) e aqui o tratamento dado será uma convolução entre quantidades e montantes em dimensão 4.

Wat [2012] generaliza um pouco mais a proposta de Zhang et al. [2007] ao incorporar a estrutura de dependência de duas maneiras. A primeira é analisando a probabilidade de ruína de um processo de ruína utilizando um modelo vetorial autorregressivo e de médias móveis apenas para sinistros e para diferentes (e dependentes) classes de negócios. A outra maneira que Wat [2012] expande é investigando os ciclos de sazonalidade da indústria de seguros, utilizando modelos periódicos de séries temporais para a estrutura de sinistros, mas sem, entretanto, modelar a estrutura de dependência entre as séries de prêmios e de sinistros. Será esta estrutura multivariada (entre as componentes das parcelas de prêmios e sinistros) o principal objeto de análise no próximo capítulo.

Avaliação da probabilidade de ruína em processos de risco em tempo discreto continua sendo um assunto bastante abordado e em expansão. Entre alguns trabalhos recentes, pode-se destacar Huang et al. [2014], Yang e Konstantinides [2015], Liu e Wang [2016] e Chen et al. [2016]. Em comum, a tentativa de encontrar aproximações analíticas para a probabilidade de ruína em processos que relacionam riscos securitários de subscrição e também com investimentos financeiros.

Nota-se, portanto, que há uma lacuna a respeito da avaliação numérica de como a estrutura de dependência entre os termos estocásticos do processo de risco segregados em parcelas afeta a probabilidade de ruína. Isto é, como a estimativa da probabilidade de ruína sofre a influência de variações (positivas ou negativas) no termo de despesas agregadas (seja em valores individuais de indenização ou na frequência de ocorrência de sinistros), associadas com os termos de receitas agregadas (também em valores de prêmios individuais ou tamanho da carteira de clientes). Garrido et al. [2016], por exemplo, avaliaram a dependência entre frequências de sinistros e suas severidades (ignorando seus efeitos sobre o fluxo de prêmios e seus componentes) utilizando modelos lineares generalizados. Contudo, não avaliam a estrutura de dependência temporal.

Nas duas próximas seções serão apresentadas as bases matemáticas conceituais que embasam o algoritmo proposto para resolver o problema de estimação da probabilidade de ruína em processo de risco multivariado com dependência entre os termos. Na primeira, será mostrado brevemente o modelo multivariado de séries temporais (o vetor autorregressivo, VAR) que expressará a estrutura de dependência entre as séries. Finalizando o Capítulo 2, serão apresentados os conceitos relevantes de cálculo estocástico que fundamenta o estudo das características do processo de risco aqui avaliado

## 2.4 Modelos Lineares de Séries Temporais

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos e metodologias para a modelagem das séries temporais que regem o desenvolvimento temporal de cada quantidade aleatória do modelo estocástico de ruína. Serão apresentados, além da estrutura do modelo econométrico, alguns métodos de identificação da estabilidade do modelo e de projeções.

Todas as notações e terminologias deste capítulo seguem de perto aquelas apresentadas em [McNeil et al. \[2005\]](#) e [Morettin \[2008\]](#).

### 2.4.1 A estrutura univariada

Seja  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ruído branco padrão (de média zero e variância constante). O processo  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito um processo AR( $p$ ) se é estacionário em covariância e satisfaz a equação:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i (X_{t-i} - \mu) + Z_t, \quad (2.7)$$

O processo autorregressivo univariado será importante para realizar a modelagem, uma vez que o interesse reside nas projeções futuras de cada uma das séries, baseados nos comportamentos passados univariados, que poderiam, eventualmente, ocultar relações multivariadas relevantes.

Essa classe de modelos é amplamente difundida. Todos os detalhes a respeito das propriedades dos modelos AR podem ser consultados em [Morettin \[2008\]](#) e [Lütkepohl \[2005\]](#).

### 2.4.2 A estrutura multivariada

Um modelo autorregressivo vetorial (VAR) de ordem  $p$  para o processo multivariado  $\underline{X}_t$ , composto por  $n$  séries temporais, possui a seguinte estrutura:

$$\underline{X}_t = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_1 \underline{X}_{t-1} + \dots + \underline{\Phi}_p \underline{X}_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.8)$$

em que  $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \Sigma)$ ,  $\underline{\Phi}_0 = (\phi_{10}, \dots, \phi_{n0})'$  é um vetor  $n \times 1$  de entradas reais constantes e  $\underline{\Phi}_k$  são matrizes  $n \times n$  constantes, com elementos  $(\phi_{ij}^{(k)}, i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p)$ . Denotando por  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ , a Equação 2.8 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\underline{\Phi}(B) \underline{X}_t = \underline{\Phi}_0 + \varepsilon_t, \quad (2.9)$$

de modo que  $\underline{\Phi}(B) = I_n - \underline{\Phi}_1 B - \dots - \underline{\Phi}_p B^p$  representa o operador autorregressivo vetorial de ordem  $p$ . O elemento genérico de  $\underline{\Phi}(B)$  é dado por  $[\delta_{ij} - \phi_{ij}^{(1)} B - \dots - \phi_{ij}^{(p)} B^p]$ , para  $i, j = 1, \dots, n$  e  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e zero em caso contrário.

É importante ressaltar que na Equação 2.8 não fica explicitada a relação de dependência contemporânea entre as séries temporais envolvidas no processo de estimação. Este modo de estabelecer as relações é preferível por sua simplicidade de estimação e obtenção de projeções interdependentes, como é o objetivo deste trabalho.

Para um modelo VAR(p), tem-se os seguintes resultados:

1. O processo  $\underline{X}_t$  será estacionário se as soluções de

$$|I_n - \underline{\Phi}_1 z - \dots - \underline{\Phi}_p z^p| = 0$$

estiverem fora do círculo unitário.

2. Se  $\underline{X}_t$  for estacionário,

$$\underline{\mu} = \mathbb{E}[\underline{X}_t] = (I_n - \underline{\Phi}_1 z - \dots - \underline{\Phi}_p z^p)^{-1} \underline{\Phi}_0.$$

3. Reescrevendo a Equação 2.8 como:

$$\underline{Z}_t = \underline{\Phi}_1 \underline{Z}_{t-1} + \dots + \underline{\Phi}_p \underline{Z}_{t-p} + \underline{\varepsilon}_t,$$

com  $\underline{Z}_t = \underline{X}_t - \underline{\mu}$  e efetuando o produto desta estrutura por  $\underline{Z}'_{t-\tau}$ , chega-se a:

$$\underline{\Gamma}(\tau) = \underline{\Phi}_1 \underline{\Gamma}(\tau - 1) + \dots + \underline{\Phi}_p \underline{\Gamma}(\tau - p), \quad \tau > 0,$$

que são as equações de Yule-Walker no caso de um VAR(p).

As demonstrações dessa proposição encontram-se em [Morettin \[2008\]](#), [Lütkepohl \[2005\]](#) e [McNeil et al. \[2005\]](#), bem como as definições a seguir. Essas equações e definições são importantes para se estimar as estruturas de dependência de valores presentes de cada série em relação a seus respectivos passados, bem como dos passados das demais séries.

**Definição 2** (Filtração). *Uma coleção de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$  em  $\Omega$  é denominada uma filtração se, para todo  $0 \leq s \leq t$ , tem-se  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ .*

Isto significa que em uma filtração cada  $\sigma$ -álgebras subsequente abrange a anterior em conteúdo de informação. Sendo  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra, qualquer subconjunto de  $\mathcal{F}$  é mensurável (uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\mathcal{F}$ -mensurável se  $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ ). Assim, a informação gerada por  $X$  está contida em  $\mathcal{F}$  e a informação contida em  $\mathcal{F}$  é suficiente para descrever o processo  $X$ .

**Definição 3** (Processo Adaptado). *Um processo estocástico  $X_t$  é adaptado à filtração  $\mathcal{F}_t$  se a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $X$  estiver contida em  $\mathcal{F}_t$ , isto é:  $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$ . Todo processo estocástico  $X_t$  é sempre adaptado à sua filtração natural, ou seja,  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s)$ , para  $s \leq t$ . Um processo estocástico  $X_t$  é adaptado a  $\mathcal{F}_t$  se, para todo  $t$ ,  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.*

Esta definição diz que o valor atual do processo estocástico contém em si toda a informação gerada pela história da trajetória progressa. Há mais duas definições fundamentais de cálculo estocástico (serão apresentadas posteriormente, na Seção 2.5) que ajudarão a determinar as características teóricas do processo de risco e, por consequência, as medidas de interesse: sua probabilidade de ruína e o nível de capital mínimo para manter as operações da seguradora.

### 2.4.3 Construção de modelos VAR

A obtenção do modelo multivariado que melhor se ajusta a um conjunto de dados segue o mesmo rito de identificação, estimação e diagnóstico a que se submete a versão univariada. A

identificação consiste em ajustes sucessivos de modelos VAR(k),  $k \geq 1$ . Cada modelo é estimado pelo método dos mínimos quadrados ordinários, de modo a extrair estimadores consistentes e eficientes. Em seguida, testa-se a hipótese de nulidade de cada matriz  $\Phi_i^{(k)}$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Outra maneira de se identificar a ordem ideal de um modelo VAR é utilizando algum critério de informação. Há vários deles amplamente difundidos, tais como o de Akaike (AIC), Schwarz (BIC), mas todos seguem a mesma lógica: penalizar a escolha de sobreidentificação.

O diagnóstico de ajuste serve para avaliar se o modelo selecionado é ou não adequado para representar a lei geradora de um determinado fenômeno. Essa avaliação é feita utilizando os resíduos para construir uma versão multivariada da estatística de Ljung-Box-Pierce, dada pela Equação 2.10:

$$Q(m) = T^2 \sum_{\tau=1}^m \frac{1}{T-\tau} \text{tr}[\hat{\Gamma}(\tau)' \hat{\Gamma}(0)^{-1} \hat{\Gamma}(\tau) \hat{\Gamma}(0)^{-1}], \quad (2.10)$$

em que  $n$  é a quantidade de séries temporais envolvidas,  $T$  representa o tamanho do histórico disponível de todas as séries,  $p$  é a memória estimada do processo multivariado e  $m$  é uma janela de dependência do processo sob avaliação pela estatística de Ljung-Box-Pierce. Sob  $H_0$ , o vetor de choques  $\underline{\varepsilon}_t$  é ruído branco (isto é, não possui mais memória a ser capturada) e  $Q(m)$  possui distribuição  $\chi_{n^2(m-p)}^2$ . Deve-se atentar ao fato de que  $m > p$  para ser possível estimar uma distribuição assintótica válida.

Uma vez escolhida a ordem  $p$  do modelo VAR(p), com seus parâmetros supostamente conhecidos, com  $\underline{\varepsilon}_t$  um vetor aleatório, independente e identicamente distribuída e  $\mathcal{F}_t = \underline{X}_s : s \leq t$  a informação contida até o instante  $t$ , é possível obter a equação de projeções da seguinte maneira:

$$\mathbb{E}(\underline{X}_{t+h} | \mathcal{F}_t) = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbb{E}(\underline{X}_{t+h-1} | \mathcal{F}_t) + \dots + \mathbb{E}(\underline{X}_{t+h-p} | \mathcal{F}_t),$$

uma vez que  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_{t+h} | \mathcal{F}_t) = 0$ ,  $\forall h > 0$ .

Para  $h = 1$ , tem-se:

$$\hat{\underline{X}}_{t+1} = \hat{\underline{X}}_t(1) = \Phi_0 + \Phi_1 \underline{X}_t + \dots + \Phi_p \underline{X}_{t-p+1}.$$

Para  $h = 2$ :

$$\hat{\underline{X}}_{t+2} = \hat{\underline{X}}_t(2) = \Phi_0 + \Phi_1 \hat{\underline{X}}_t(1) + \Phi_2 \underline{X}_t + \dots + \Phi_p \underline{X}_{t-p+2},$$

e todas as demais projeções podem ser obtidas recursivamente.

A respeito dos erros de previsão de horizonte  $h$  passos a frente é dado por:

$$e_T(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \underline{\varepsilon}_{T+h-j},$$

com as matrizes  $\Psi_j$  obtidas recursivamente por:

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^{p-1} \Psi_{j-k} \Phi_k,$$

em que  $\Psi_0 = I_n$  e  $\Phi_j = 0$ ,  $j > p$ . Portanto, o erro quadrático médio de previsão fica dado por:

$$\underline{\Sigma}(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \underline{\Sigma} \Psi_j'$$

No caso prático da aplicação a dados reais, em que os parâmetros do modelo VAR(p) são estimados, o melhor preditor de  $X_{T+h}$  é dado por:

$$\tilde{X}_T(h) = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 \tilde{X}_T(h-1) + \dots + \hat{\Phi}_p \tilde{X}_T(h-p), \quad h > 1.$$

Diante desta situação, a matriz de erro quadrático médio (EQM) de previsão torna-se:

$$\hat{\underline{\Sigma}}(h) = \underline{\Sigma}(h) + EQM(X_{T+h} - \tilde{X}_T(h)).$$

Computacionalmente, o segundo termo desta equação é ignorado e o lado esquerdo da igualdade é obtido da seguinte maneira:

$$\hat{\underline{\Sigma}}(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \hat{\Psi}_j \hat{\underline{\Sigma}} \hat{\Psi}_j'$$

em que  $\hat{\Psi}_j = \sum_{k=1}^{p-1} \hat{\Psi}_{j-k} \hat{\Phi}_k$ .

#### 2.4.4 Causalidade de Granger em modelos VAR

O trabalho de Granger [1969] foi fundamental para definir um conceito de *causalidade* por meio da melhoria da previsibilidade de um dado fenômeno por outro, cuja lógica baseia-se na impossibilidade de uma causa ser posterior a um efeito. No contexto de séries de tempo, isto significa que os valores passados de uma série temporal ajudam a prever o futuro de uma segunda, ao reduzir a incerteza dos resultados medida pela variância (ou erro quadrático médio de previsão).

Formalmente, considere a sigma-álgebra  $\mathcal{F}_t$  que contém todas as informações relevantes a respeito de uma variável aleatória  $X_t$  até o instante  $t$  e  $\bar{Y}_t = \{Y_s : s < t\}$  o conjunto de informação relevante de  $Y_t$  até o instante imediatamente anterior a  $t$ . Dados  $\hat{X}_t(h|\mathcal{F}_t)$  (o preditor ótimo de horizonte  $h$  do processo  $X_t$ ) e  $EQM(h|\mathcal{F}_t)$  (o erro quadrático médio de previsão de horizonte  $h$  do processo  $X_t$ ), ambos contendo as informações contidas em  $\mathcal{F}_t$ , define-se a *causalidade de Granger* da seguinte maneira:

**Definição 4.** . Um processo estocástico  $Y_t$  causa (no sentido de Granger)  $X_t$  se  $EQM(h|\mathcal{F}_t) < EQM(h|\mathcal{F}_t - \bar{Y}_t)$ . Essa relação de causalidade é indicada por  $Y_t \rightarrow X_t$ .

Ou seja,  $X_t$  pode ser mais bem prevista usando toda a informação disponível, incluindo o passado de  $X_t$  e  $Y_t$ . Também se denota que  $Y_t$  é exógena ou antecedente a  $X_t$ . Vale reparar que a definição formulada não requer a suposição de linearidade do sistema. Porém, se assim o for, as projeções são ditas lineares.

Ademais, há distintas formas de se avaliar a causalidade de Granger, mesmo tendo o sistema apenas duas variáveis: não é conhecida previamente a antecedência de alguma variável sobre a outra e, por esta razão, é fundamental estudar o sentido (direcionalidade) desta relação. É possível dissociar a estrutura de dependência em três tipos:

1. **Autodependência.** Esta situação ocorre quando uma série temporal causa (no sentido de

Granger) a si própria. Isso acontece quando o passado de uma determinada série traz informações importantes que ajudam a explicar o seu futuro.

2. **Causalidade unidirecional.** Uma série temporal causa (no sentido de Granger) uma segunda série, mas a segunda não causa (no sentido de Granger) a primeira. Trata-se de uma propriedade de fluxo único de informações.
3. **Causalidade bidirecional** (*feedback*). Neste caso, há reciprocidade na causalidade (no sentido de Granger) entre duas séries, de modo que isso implica a existência de uma relação de equilíbrio entre elas, uma vez que o passado de uma delas fornece informações sobre o futuro da segunda e vice-versa.

Cumprir notar que tal definição de causalidade é baseada na defasagem temporal entre variáveis aleatórias. Porém, a chamada **causalidade instantânea** (no sentido de Granger) pode ser verificada pela não-diagonalidade da matriz de variâncias e covariâncias entre os termos de erros aleatórios das duas variáveis. Nesta situação, não é possível determinar a direção da causalidade, sendo implícita a relação de *feedback* entre elas.

Neste trabalho será utilizado o conceito de causalidade de Granger pela representação VAR da série multivariada  $\underline{X}_t$ , considerando a proposição a seguir:

**Proposição 2.1.** (*Lütkepohl [2005]*). *Seja  $\underline{X}_t$  um processo estocástico VAR(p) que satisfaz a condição de estabilidade do sistema e  $\phi_{ij}^l$  é o elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna da matriz de coeficientes autorregressivos  $\Phi_l$  de ordem l descritos na Equação 2.8. Então a série  $X_{jt}$  causa (no sentido de Granger) a série  $X_{it}$  se, e somente se,  $\phi_{ij}^l \neq 0$ , para algum l.*

Assim é possível testar (ou definir, no caso de uma simulação) a ausência ou não da causalidade apenas verificando se os coeficientes de interesse (ou um conjunto deles) são estatisticamente iguais a zero. Há diversas maneiras de se realizar este teste, sendo o teste de Wald (por matriz de contrastes) e da razão de verossimilhanças os mais difundidos.

## 2.5 Definições e Resultados importantes de Cálculo Estocástico

Antes de desenvolver o processo de risco e sua estrutura de dependência, serão apresentadas mais algumas definições relevantes. Todas as definições e demonstrações desta seção podem ser encontradas em [Steele \[2000\]](#).

**Definição 5** (Processo Martingal). *Um processo estocástico  $X_t$ ,  $t \geq 0$  é denominado martingal com respeito à filtração  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \geq 0$  se:*

1.  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ , para  $t \geq 0$ ;
2.  $X_t$  é adaptado a  $\mathcal{F}_t$ , e;
3.  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ , para  $0 \leq s < t$ .

A propriedade martingal está relacionada ao conceito de jogo justo, em que os ganhos incrementais esperados em qualquer instante de tempo, dadas as informações passadas, é zero. Especialmente a condição 3 estabelece que a previsão do valor do processo de risco  $U_t$ , dadas as informações em  $t - 1$ , é o seu próprio valor em  $t - 1$ , ou seja,  $U_{t-1}$ . Portanto, quando a melhor previsão que se pode fazer sobre o valor futuro de uma variável aleatória é o valor atual da própria variável, trata-se de um *processo martingal*.

**Definição 6** (Processos Submartingal e Supermartingal). *Sob as mesmas condições apresentadas na definição anterior, diz-se que:*

1.  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ , para  $0 \leq s < t$ , então o processo estocástico  $X_t$  é submartingal.
2.  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ , para  $0 \leq s < t$ , então o processo estocástico  $X_t$  é supermartingal.

Supondo que  $X_t$  é um processo martingal, a previsão das variações de  $X_t$  em um intervalo de tempo  $\Delta t > 0$  é escrito como  $\mathbb{E}[X_{t+\Delta t} - X_t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_t]$ . Como  $X_t$  é martingal,  $\mathbb{E}[X_{t+\Delta t} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_t] = X_t$ , logo  $\mathbb{E}[X_{t+\Delta t} - X_t | \mathcal{F}_t] = 0$ . Isso significaria que a melhor previsão para as variações de  $X_t$  seria zero. Em outras palavras, que as direções de futuros movimentos são impossíveis de prever. Portanto, se as trajetórias do processo de risco exibirem tendência, o processo não é martingal e estará classificado em uma das duas categorias definidas: se a tendência for *positiva*, então o processo é dito *submartingal*; se a tendência for *negativa*, então o processo estocástico é dito *supermartingal*.

Será apresentada agora uma definição importante para a demonstração posterior da existência de um limitante da probabilidade de ruína para processos de risco multivariados com dependência temporal.

**Definição 7** (Tempo de Parada). *Um mapa  $T : \Omega \rightarrow 1, 2, \dots, t_+$  é chamado de **tempo de parada** se:*

$$\{T = t_+\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) = t_+ \in \mathcal{F}_{t_+}\}, \quad (2.11)$$

para todo  $t_+ < \infty$ . Também denota-se  $t_+ = T \wedge t_+$ . Por fim, diz-se que  $T$  é **quase certamente finito** se  $\mathbb{P}[T = t_+] = 0$ .

A intuição desta definição reside no fato de que  $T$  é uma variável aleatória que assume valores positivos (eventualmente  $\infty$ ) de modo que fornece uma regra de parada para o processo aleatório de risco. A Equação 2.11 deixa claro que a decisão de parar ou não o processo no instante  $t_+$  depende exclusivamente da informação disponível no instante  $t_+$  (isto é, em toda a história pregressa, incluindo o valor do processo no instante  $t_+$ ). Nenhuma projeção do futuro, portanto, é necessária, desde que as projeções resultem em um jogo desonesto.

**Teorema 2.2** (Tempo de Parada Opcional de Doob). *Seja  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  um martingal. São válidas as seguintes condições:*

1. se  $T$  é um tempo de parada, então  $X_T$  também é um martingal. Em particular,  $\mathbb{E}[X_{T \wedge t_+}] = \mathbb{E}[X_0]$ , para todo  $t_+$ ;
2. se  $S \leq T$  são tempos limitados de parada, então  $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ , quase certamente;
3. se  $S \leq T$  são tempos limitados de parada, então  $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_S]$ ;
4. se existir uma variável integrável  $Y$  tal que  $|X_{t_+}| \leq Y$ , para todo  $t_+$ , e  $T$  for um tempo de parada que seja quase certamente finito, então  $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ , e;
5. se  $X$  possuir incrementos limitados, isto é,  $\exists K > 0 : \forall t_+ \geq 0, |X_{t_++1} - X_{t_+}| \leq M$  quase certamente, e se  $T$  for um tempo de parada com  $\mathbb{E}[X_T] < \infty$ , então  $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ .

*Demonstração.* Serão apresentadas as demonstrações de cada item, com sua respectiva numeração.

1. A propriedade das expectativas condicionais iteradas é o bastante para verificar que  $\mathbb{E}[X_{T \wedge t_+} | \mathcal{F}_{t_+ - 1}] = X_{T \wedge (t_+ - 1)}$  quase certamente. Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{T \wedge t_+} | \mathcal{F}_{t_+ - 1}] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{s=0}^{t_+ - 1} X_s \mathbb{1}_{(T=s)} | \mathcal{F}_{t_+ - 1} \right] + \mathbb{E} [X_t \mathbb{1}_{(T > t_+ - 1)} | \mathcal{F}_{t_+ - 1}] = \\ &= X_T \mathbb{1}_{(T \leq t_+ - 1)} + X_{t_+ - 1} \mathbb{1}_{(T > t_+ - 1)}, \end{aligned}$$

uma vez que  $T > t_+ - 1 \in \mathcal{F}_{t_+ - 1}$  e  $\mathbb{E}[X_{t_+} | \mathcal{F}_{t_+ - 1}] = X_{t_+ - 1}$  quase certamente pela propriedade martingal.

2. Suponha que  $T \leq t_+$  quase certamente. Uma vez que  $S \leq T$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} X_T &= (X_T - X_{T-1}) + (X_{T-1} - X_{T-2}) + \dots + (X_{S+1} - X_S) + X_S \\ &= X_S + \sum_{k=0}^{t_+} (X_{k+1} - X_k) \mathbb{1}_{(S \leq k < T)}. \end{aligned}$$

Tome  $A \in \mathcal{F}_S$ . Então:

$$\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{(A)}] = \mathbb{E}[X_S \mathbb{1}_{(A)}] + \sum_{k=0}^{t_+} \mathbb{E}[(X_{k+1} - X_k) \mathbb{1}_{(S \leq k < T)} \mathbb{1}_{(A)}] = \mathbb{E}[X_S \mathbb{1}_{(A)}],$$

pois  $S \leq k < T \cap A \in \mathcal{F}_k$ , para todo  $k$  e  $X$  é um martingal.

3. O resultado segue imediatamente do item anterior, tomando as esperanças dos dois lados da igualdade.
4. Nessa condição, o processo  $X$  é limitado e, portanto, pelo Teorema da Convergência de Martingais de Doob, converge quase certamente para uma variável aleatória  $Y$ . Note que  $T \wedge t_+ \leq t_+$ . isto implica que  $\mathcal{F}_{T \wedge t_+} \subseteq \mathcal{F}_{t_+}$ . Das propriedades de esperança condicional,

$$\mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_{T \wedge t_+}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_{t_+}] | \mathcal{F}_{T \wedge t_+}] = \mathbb{E}[X_{t_+} | \mathcal{F}_{T \wedge t_+}] = X_{t_+} = X_0 = \mathbb{E}[X_0],$$

quase certamente, em que as últimas três igualdades decorrem da propriedade martingal. A prova é completada tomando  $t_+ \rightarrow \infty$ .

5. Por fim, supondo que o processo limite do item anterior é  $X_T \leq Y \leq K$ ,  $\forall t_+ \in \mathbb{N}$ , é preciso escrever o processo limite (em  $K$ , uma constante) em função do tempo de parada  $t_+$  como

$$X_{t_+} := X_0 + \sum_{k=0}^{T \wedge t_+ - 1} (X_{k+1} - X_k),$$

em que, para todo  $t_+ \in \mathbb{N}$ ,  $|X_T| \leq K$ . Assim:

$$Y := |X_0| + \sum_{k=0}^{T-1} |X_{k+1} - X_k| = |X_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |X_{k+1} - X_k| \mathbb{1}_{(T > k)}.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\mathbb{E}[Y] := \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_{k+1} - X_k| \mathbb{1}_{(T > k)}].$$

Pela lei das expectativas iteradas,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[|X_0|] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} [\mathbb{E}[|X_{k+1} - X_k| | \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_{(T>k)}] \quad (2.12)$$

$$\leq \mathbb{E}[|X_0|] + K \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[T > k] \quad (2.13)$$

$$= \mathbb{E}[|X_0|] + K\mathbb{E}[T] < \infty. \quad (2.14)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada e pela propriedade martingal do processo, tem-se que o processo  $X_T$  no momento da parada converge quase certamente para  $X_{t+}$ , o que implica que

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{t+}].$$

□

O Teorema 2.2 é válido se o processo  $X_T$  for um supermartingal ou submartingal, apenas substituindo as igualdades de cada item pelas devidas desigualdades.

Um dos objetivos centrais desta tese é a avaliação das variações causadas na estimativa da probabilidade de ruína em função da influência de variações (positivas ou negativas) no termo de despesas agregadas (seja em valores individuais de indenização ou na frequência de ocorrência de sinistros), associadas com os termos de receitas agregadas (também em valores de prêmios individuais ou tamanho da carteira de clientes). Para tanto, faz-se necessário o desenvolvimento de argumentos técnicos que possam evidenciar o fato de que a estrutura temporal de dependência entre prêmios e sinistros (incluindo frequências e severidades) é intrínseca à dinâmica do processo de subscrição de seguros. O desenvolvimento teórico desse processo multivariado de risco será feito no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## A metodologia de estimação da probabilidade de ruína para o processo estocástico de risco multivariado

### 3.1 Introdução

O objetivo principal deste capítulo é desenvolver os aspectos teóricos do processo de risco multivariado, propondo uma modificação no processo clássico de Cramér-Lundberg de modo que seja possível incorporar uma estrutura de dependência autorregressiva multivariada, capturando eventuais inter-relações entre as componentes. Inicialmente, serão apresentados o funcional de interesse que representa a probabilidade de ruína sobre o qual serão realizados os testes de validação de hipóteses. Em seguida, algumas relevantes definições das ferramentas matemáticas necessárias para o processo de estimação, como a estrutura multivariada de séries temporais e conceitos importantes de cálculo estocástico a respeito de martingais.

O desenvolvimento analítico das expectativas e incertezas do processo de risco para o caso geral VAR(p) é fundamental para a compreensão dos efeitos sobre o funcional causado pela força da dependência entre os termos. Esta investigação será realizada nas seções subsequentes, bem como são explicitadas as fórmulas para o caso particular VAR(1), que será objeto de simulação no próximo capítulo para melhor compreensão dessas relações.

Por fim, será proposto o método de simulação computacional que será executado para se obter as estimativas pontuais e medidas de incerteza do estimador do funcional e avaliadas as propriedades de ausência de viés, consistência e convergência do estimador do funcional.

### 3.2 A probabilidade de ruína como um funcional

Bowers et al. [1997] demonstram uma fórmula analítica genérica de se encontrar a probabilidade de ruína, a partir da convolução entre frequências e severidades, evidenciada pela Equação 3.1 a seguir.

$$\psi(U_0, T) = \frac{e^{-\gamma U_0}}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_t} | T < \infty]}, \quad (3.1)$$

em que  $\gamma$  representa um *coeficiente de ajuste* dado pela menor raiz de  $z$  na Equação 3.1, dada por:

$$1 + (1 + \theta)\mu z = M_X(z),$$

com  $M_X(z)$  denotando a função geradora de momentos da variável aleatória  $X$  (sinistro individual), assumindo que esta função exista. O problema reside exatamente na necessidade de se fazer suposições para  $M_X(z)$ : a Equação 3.1 não costuma ser analiticamente tratável, porque para diversas distribuições paramétricas não há soluções analíticas para  $\psi(U_0)$ , ainda que o processo seja fracamente estacionário. Diversos autores tentaram encontrar tais soluções, mas necessitam fazer uma série de suposições (geralmente fortes) para consegui-las. É o caso de [Bladt et al. \[2015\]](#), que adotam distribuições de Pareto e hiper-exponenciais para os sinistros.

Uma alternativa é trabalhar com aproximações, como será feito nas próximas seções. Aqui, a probabilidade de ruína será expressa como um funcional, de maneira análoga à sugerida por [Pitts \[1994\]](#):

$$\psi(U_0, \theta, T) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1], F \mapsto \mathbb{P}_F(T < \infty), \quad (3.2)$$

em que  $\mathcal{F}$  é o espaço infinito-dimensional das funções de distribuição em  $\mathbb{R}_+$  com esperança finita, que representa as funções que descrevem o processo estocástico de risco  $U_T, T \in [0, \infty[$ , em função do seu estado inicial  $U_0$  e de uma taxa de carregamento  $\theta$  sobre os prêmios. Por sua vez,  $\mathbb{P}_F$  denota a medida de probabilidade que atribui uma função de distribuição  $F$  ao valor assumido pelo processo de risco  $U_T$  em qualquer instante.

Como na literatura apenas o fluxo de sinistros é considerado variável aleatória, o espaço  $\mathcal{F}$  representa as funções distribuição da convolução entre a severidade individual e a quantidade de sinistros ocorridos. Já  $\mathbb{P}_F$  denota a medida de probabilidade que atribui uma função distribuição  $F$  ao montante financeiro de indenizações de cada indivíduo. Uma nova versão do funcional análoga é proposta neste trabalho para que a função distribuição  $F$  remeta diretamente à incerteza das situações futuras de falência.

Essa adaptação faz-se necessária por dois motivos: o primeiro é que, na literatura, o funcional depende apenas do fluxo aleatório de indenizações, porque os prêmios são usualmente tratados como constantes. Além disso, o funcional precisa descrever um mapa que relaciona dois espaços de funções: o espaço (domínio), que contém todas as possibilidades de valores monetários futuros a que o patrimônio da entidade está sujeito, associado ao espaço (contra-domínio) de probabilidade de ruína da seguradora. Estatisticamente, o problema consiste em estimar o funcional desconhecido  $\psi(\cdot)$  quando a distribuição de probabilidade das trajetórias futuras  $F$  também é desconhecida, preservando a sua relação inversa de dependência da dotação inicial da reserva patrimonial  $U_0$  e da taxa de carregamento  $\theta$ , uma vez que maiores montantes iniciais tendem a implicar menor probabilidade de ruína da seguradora.

Adiante, ainda neste capítulo, será proposto um algoritmo de simulação das situações patrimoniais futuras a partir do conhecimento de observações passadas do processo de risco, o que possibilitará estimar o funcional da probabilidade de ruína. E, com o mesmo intuito de [Dufresne e Gerber \[1989\]](#), que propuseram um método numérico para estimar uma banda de confiança que pudesse compreender o verdadeiro valor do funcional (com a suposição básica de que somente os sinistros são variáveis aleatórias), neste trabalho também será obtida uma expressão para um limitante superior do funcional descrito pela Equação 3.2.

### 3.3 As hipóteses a serem testadas

Entidades que sinalizam ter alta capacidade de honrar os seus compromissos tendem a gerar maior credibilidade perante o mercado, tanto com a adesão de novos segurados como pela maior possibilidade de atraírem capital de investidores, podendo aumentar a capacidade operacional da firma, minimizando o custo de alocação de capital próprio. Embora gerem bastante controvérsias, as agências de *rating*<sup>1</sup> usualmente atribuem conceitos às empresas tão mais positivos quanto menores forem seus níveis de probabilidade de ruína. Como exemplo, é usual atribuírem conceito máximo (denominado "AAA") para aquelas entidades que possuem probabilidade máxima de insolvência igual a 0,03%. Isto significaria que a entidade declararia falência em, no máximo, 3 dentre 10.000 períodos de análise, o que é considerado de baixíssimo risco de não conseguir honrar seus compromissos junto aos segurados.

Por sua vez, o acordo *Solvency II*<sup>2</sup> estipula que os órgãos reguladores nacionais devem supervisionar todas as entidades, com base em um estudo prospectivo (isto é, realizar projeções das situações futuras das seguradoras), de modo que todas as entidades aloquem em seus patrimônios líquidos uma reserva de capital suficiente para arcar com seus compromissos e o patamar é calculado por meio dessas projeções. Este nível de reserva é o resultado da soma de um *capital mínimo regulatório* (CMR) a um *capital de solvência* (CS) também conhecido como *capital adicional baseado em risco* (CABR), que é adicional ao mínimo exigido legalmente pelo Acordo organismos internacionais e é obtido diretamente de metodologias estatístico-atuariais que devem ser recalculadas trimestralmente.

Segundo o documento oficial, foi definido de modo *ad-hoc* que o CMR para seguros gerais deve ser de 2,5 milhões de euros e o item 64 do Acordo *Solvency II* estabelece como requisito obrigatório o dimensionamento do CS para garantir que não ocorra ruína mais do que uma vez a cada 200 cenários, isto é, que a probabilidade máxima de insolvência seja igual a 0,5%. O trabalho de *Asimit et al.* [2016] faz uma revisão abrangente das metodologias mais atualmente empregadas para dimensionar o CS dentro de um grupo de seguros que atua em diversos ramos simultaneamente.

O Conselho Nacional de Seguros Privados (CNSP), órgão que normatiza as operações de seguros no Brasil, na Resolução 321/2015 também decreta de modo *ad-hoc* que o capital base (mínimo requerido, CMR, ou, na notação do trabalho,  $U_0$ ) para uma sociedade seguradora poder operar em todo o Brasil corresponde a R\$ 15.000.000,00 (quinze milhões de reais). No mesmo normativo, seguindo as instruções do acordo Solvência II, estipula-se que todas as entidades devem mensurar capitais adicionais baseados em riscos de *subscrição* (de cada um dos ramos em que a entidade atua: vida, não-vida e saúde), *crédito*, *operacional* e *mercado*, cada qual com a sua finalidade.

Porém, neste trabalho, será considerado apenas o critério de subscrição ( $CS_{subsc}$ ), uma vez que o processo de risco que será apresentado na próxima seção descreve apenas o processo direto de contratação de seguro (por parte do segurado) e de indenização, por parte da seguradora. O resultado da soma entre CMR e  $CS_{subsc}$  deve ser alocado como patrimônio líquido da entidade, na forma de reserva de capital para contingências futuras, de modo a ser suficiente para cobrir eventuais desvios adversos na operação de seguros (redução no valor dos prêmios e/ou diminuição na quantidade de segurados e/ou aumento no valor individual de indenização e/ou expansão na quantidade de sinistros ocorridos).

<sup>1</sup>Um dos mais conhecidos e utilizados no mercado de seguros é o S&P, cujo relatório anual pode ser consultado em <http://www.spratings.com/documents/20184/774196/2015+Annual+Global+Corporate+Default+Study+And+Rating+Transitions>.

<sup>2</sup>A íntegra do documento oficial pode ser obtido em diversas línguas pelo endereço <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:02009L0138-20140523>.

É importante evidenciar que a determinação do capital de solvência guarda uma relação muito próxima com o conceito de Valor em Risco (VaR), tradicional na literatura de Finanças, cuja definição formal para a linguagem atuarial é:

$$\begin{aligned} VaR_{\psi(U_0, \theta, T)} &= \inf \{CS_{subsc} \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[U_t > CS_{subsc}] \leq 1 - \psi(U_0, \theta, T)\} \\ &= \inf \{CS_{subsc} \in \mathbb{R} : F_{U_t}[CS_{subsc}] \geq \psi(U_0, \theta, T)\}. \end{aligned}$$

Em linguagem probabilística, o VaR é um quantil da distribuição do resultado líquido do processo de risco, tal que seja esperado um resultado líquido de insuficiência de recursos com probabilidade  $\psi(U_0, \theta, T)$ , em condições normais. Usualmente na literatura, costuma-se avaliar apenas para a distribuição dos sinistros agregados, porque o fluxo de prêmios é considerado constante e, além disso, a distribuição de sinistro só é conhecida em certos casos particulares, como já comentado. Deste modo, a variável  $U_t$  é aleatória porque os sinistros agregados são aleatórios.

A medida VaR possui boas propriedades<sup>3</sup>, tais como invariância por translação (adicionar ou subtrair uma quantidade determinista a uma variável aleatória  $U_t$ , altera-se o requerimento de capital pela mesma quantidade) e monotonicidade (economicamente, assumir posições de risco mais elevadas conduz a maiores necessidades de capital).

Contudo, a determinação do VaR neste trabalho não é imediata por dois motivos principais. O primeiro motivo é pelo tratamento estocástico dos prêmios e sua estrutura de dependência com os sinistros. Como consequência, a distribuição de probabilidades do resultado líquido da operação é desconhecida e, portanto, tanto o funcional  $\psi(U_0, \theta, T)$  como o quantil  $U_0$  são variáveis aleatórias. Já o segundo motivo é uma decorrência do primeiro: pelo fato de o funcional possuir intrinsecamente uma incerteza associada, a mera aplicação da função inversa na estimativa da probabilidade de ruína pode não refletir adequadamente o risco incorrido pela estimação do funcional. Logo, é necessário recorrer a um teste de hipóteses para garantir que o risco de subestimação está controlado.

Neste trabalho, será realizado o mesmo teste de hipóteses para o funcional apresentado na Equação 3.2. Assim, as hipóteses de teste para o parâmetro de interesse  $\psi(U_0, \theta, T)$  são:

$$\begin{cases} H_0 : \psi(U_0, \theta, T) = \psi_0, \\ H_1 : \psi(U_0, \theta, T) < \psi_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Caso a probabilidade de ruína seja subestimada, a seguradora pode adotar medidas inadequadas, como, por exemplo, uma redução excessiva do capital. Do ponto de vista gerencial, esta decisão pode ser bastante perigosa para a seguradora, uma vez que ela poderá estar mais exposta a uma insuficiência de recursos. Por outro lado, superestimar a probabilidade também pode não ser uma boa decisão, pois a entidade pode incorrer em altos custos de oportunidade, inibindo os lucros e, portanto, reduzir a atratividade do negócio. Desta forma, a estimação precisa desta probabilidade, bem como a obtenção de seu erro-padrão, são fundamentais neste contexto.

Formulando as hipóteses como em (3.3) é possível, de alguma maneira, gerenciar o risco de subestimação da probabilidade de ruína usando o erro do tipo I, considerado pelos órgãos reguladores e fiscalizadores como os mais graves, devido à quebra contratual entre seguradora e segurado, prejudicando todo um setor que se baseia, fundamentalmente, em confiança entre os agentes. Ademais, o teste das hipóteses em (3.3) é um aspecto complementar ao processo de estimação

<sup>3</sup>Para mais detalhes a respeito das propriedades requeridas para coerência de medidas de risco, ver Artzner et al. [1997] e Artzner et al. [2007].

da probabilidade de ruína, uma vez que outras informações como a incerteza sobre  $\psi(U_0, \theta, T)$  (captada pela sua variância) são fundamentais para a determinação da margem de segurança e do capital de solvência, como explicitado anteriormente.

### 3.4 A nova abordagem a ser adotada

Neste trabalho, analogamente ao descrito pela Equação 2.2, o processo estocástico a ser estudado possui a seguinte forma:

$$U_t = U_{t-1} + (1 + \theta)P_t - S_t, \quad (3.4)$$

para todo  $t \geq 0$  e de tal forma que  $U_0$  seja o capital inicial (não negativo) da empresa,  $P_t$  represente os prêmios (agregados) arrecadados no instante  $t$ ,  $\theta$  é a taxa de carregamento sobre os prêmios, e, finalmente,  $S_t$  seja os sinistros (agregados) incorridos no instante  $t$ .

No modelo tradicional assume-se algumas premissas, a saber:

1.  $P_t = c$ , um processo determinístico para a arrecadação agregada de prêmios;
2.  $\{S_t; t \geq 0\}$ , o processo estocástico do sinistro agregado;
3.  $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ ;
4.  $X_i \sim F_X(x)$ , invariante no tempo e com mesma média  $\mu > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, N_t$ ;
5.  $\{N_t; t \geq 0\}$ : processo estocástico de Poisson homogêneo da frequência de sinistro, de intensidade  $\lambda > 0$ ;
6.  $X_i \perp N_t \implies \mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t] \times \mathbb{E}[X_i] = \lambda\mu$ , e;
7.  $P_t = c = (1 + \theta)\mathbb{E}[S_t] = (1 + \theta)\lambda\mu$ , em que  $\theta \leq 0$  é denominado o *margem de oscilação de risco* ou *carregamento de segurança* e definido pela Equação 2.6. Isto é, os prêmios arrecadados são considerados constantes ao longo do tempo e suficientes para indenizar o valor esperado dos sinistros agregados.

Baseado nesta descrição, a abordagem tradicional para o modelo de Cramér-Lundberg possui o fluxo de prêmios estacionário. Ademais, mesmo as características consideradas aleatórias (quantidade de sinistros e severidades individuais) são tratadas como estacionárias. Ambos os tratamentos podem não representar adequadamente casos reais e conduzir os analistas a tomarem decisões erradas diante das hipóteses de ruína da firma.

Desta maneira, a proposta deste trabalho é estender algumas premissas de modo a aproximar o modelo a diversas situações mais reais. Para tanto, algumas modificações serão feitas, descritas a seguir:

1.  $\{P_t; t \geq 0\}$ , o processo estocástico para a arrecadação agregada de prêmios;
2.  $P_t = Q_t C_t$ ;

3.  $\{Q_t; t \geq 0\}$ : a série temporal que descreve a quantidade média de participantes do arranjo securitário, de média  $\mu_t^Q > 0$ ;
4.  $C_t$ : a série temporal da contribuição individual média dos participantes do arranjo securitário, de média  $\mu_t^C > 0, \forall i = 1, \dots, Q_t$ ;
5.  $\{S_t; t \geq 0\}$ , o processo estocástico para o pagamento agregado das indenizações devido aos sinistros;
6.  $S_t = N_t B_t$ ;
7.  $\{N_t; t \geq 0\}$ : a série temporal da frequência de ocorrências individuais de sinistros, de média  $\mu_t^N > 0$ ;
8.  $B_t$ : a série temporal da severidade média dos sinistros ocorridos, de média  $\mu_t^B > 0, \forall i = 1, \dots, N_t$ ;
9. No geral, todas as variáveis poderão ser mutuamente dependentes, inclusive de seu próprio passado.

Como é possível perceber, diferentemente da abordagem tradicional, todas as quantidades desconhecidas serão tratadas como estocásticas e com alguma estrutura de dependência (contemporânea ou com defasagem temporal) entre elas. Além disso, é importante destacar algumas diferenças dessa nova abordagem, especialmente a respeito do domínio no tempo: o único conjunto de observações do processo de risco é o conjunto  $\mathbb{Z}_+$ . Isso implica a adoção da suposição básica de que não há volatilidade entre dois instantes consecutivos.

Ademais, na abordagem em tempo contínuo (tradicional na literatura), além da ocorrência do sinistro e da sua severidade, a distância temporal entre dois sinistros também é um variável aleatória e, deste modo, a parcela referente aos sinistros possui como limitante superior no somatório uma variável aleatória, o que torna a parcela de sinistro um processo de convolução (tipicamente um Processo de Poisson Composto). Já pela nova abordagem, a característica aleatória do tempo decorrido entre dois sinistros consecutivos não é relevante como na abordagem tradicional. Como implicação, a quantidade de sinistros ocorridos (e também o tamanho do portfólio, uma inovação do trabalho e que o torna diferente de [Chan e Yang \[2006\]](#)) pode ser tratada como uma quantidade fixa a cada instante de observação, embora neste trabalho ela será modelada como série temporal, de modo que esses valores podem não ser constantes ao longo do tempo. No Capítulo 4 será realizada a comparação entre as duas abordagens para verificar se há ou não perda de informação na estimação da ruína de Processos de Poisson Composto em tempo contínuo.

Nas próximas duas seções, o processo dado pela Equação 3.4 será desenvolvido na forma matricial e dele serão deduzidas as suas medidas principais (esperança e variância), de modo que a possibilitar a compreensão do comportamento do processo de risco em função da estrutura de dependência temporal. Ademais, serão obtidos limitantes inferiores e superiores para o funcional que representa a relação entre a probabilidade de ruína e a reserva de capital da seguradora, de acordo com as suas propriedades martingais. Em seguida, a última seção explica como funciona o *bootstrap* e o algoritmo, mostrando as propriedades estatísticas do estimador do funcional de interesse.

### 3.5 O processo de risco como um modelo multivariado de Séries Temporais

O processo de risco para avaliação da situação de solvência será definido - no contexto de séries temporais multivariadas - da seguinte maneira: seja o vetor temporal  $\underline{M}_t = [C_t, B_t, Q_t, N_t]$  composto, respectivamente, pelo (i) prêmio individual médio, (ii) severidade individual média, (iii) tamanho total da carteira e (iv) frequência de sinistros incorridos, todos no instante  $t$ , sendo  $\underline{M}'_t$  a notação usual para a sua transposta. Desta maneira, é possível escrever a Equação 3.4 (já incluso o carregamento de oscilação de risco  $\theta$ ) na forma matricial:

$$U_t = U_{t-1} + \underline{M}_t \underline{L} \underline{M}'_t, \quad (3.5)$$

para todo  $t \geq 0$  e de tal forma que  $U_0$  seja o capital inicial (não negativo) da empresa e a matriz  $\underline{L}$  seja escrita da seguinte maneira:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Desenvolvendo a Equação 3.5, chega-se a:

$$U_t = U_{t-1} + [C_t B_t Q_t N_t] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ B_t \\ Q_t \\ N_t \end{bmatrix} = U_{t-1} + (1 + \theta) Q_t C_t - N_t B_t,$$

que é uma forma modificada do processo clássico de Cramér-Lundberg, em que o processo de risco é formado pela coletivização de apólices homogêneas quanto aos riscos incorridos e contribuições realizadas. Durante o procedimento de simulação computacional, serão criadas diversas realizações dessas variáveis baseadas em seus históricos e na estrutura de dependência multivariada, incorporando as variabilidades de todas as quantidades aleatórias.

Já a respeito das informações geradas pelo processo de risco, para cada instante  $t_k \in [0, t]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , considerando a filtração  $\mathcal{F}_{t_k}$ ,  $U_t$  formam a evolução dos valores possíveis que o patrimônio líquido da entidade pode assumir. Assim, para  $t_{k+1}$  as informações são tão ou mais abrangentes e contêm aquelas relativas ao instante  $t_k$ , ou seja,  $\mathcal{F}_{t_k} \subseteq \mathcal{F}_{t_{k+1}}$ . Consequentemente, para cada  $t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}$ , pode-se escrever:

$$\mathcal{F}_{t_0} \subseteq \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{t_k} \subseteq \mathcal{F}_{t_{k+1}} \subseteq \dots$$

#### 3.5.1 Resultados gerais para o modelo VAR(p)

Admita uma estrutura autorregressiva vetorial de ordem  $p$  para o processo estocástico  $\underline{M}_t$ . Isso significa poder escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\underline{M}'_t = \underline{\Phi}_1 \underline{M}'_{t-1} + \underline{\Phi}_2 \underline{M}'_{t-2} + \dots + \underline{\Phi}_p \underline{M}'_{t-p} + \underline{\varepsilon}'_t, \quad t \geq 1, \quad (3.7)$$

com  $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{4t})$  um processo de inovação (ruído branco) com  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_t) = \underline{\Sigma}$  e  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_s) = 0$ ,  $\forall t \neq s$ .

Substituindo a Equação 3.7 na Equação 3.5:

$$\begin{aligned}
U_t &= U_{t-1} + M_t L M'_t \\
&= U_{t-1} + ((\Phi_1 M'_{t-1} + \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + \Phi_p M'_{t-p} + \xi_t)' L (\Phi_1 M'_{t-1} + \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + \Phi_p M'_{t-p} + \xi_t)) \\
&= U_{t-1} + (M_{t-1} \Phi'_1 L + \dots + M_{t-p} \Phi'_p L + \xi_t L) (\Phi_1 M'_{t-1} + \dots + \Phi_p M'_{t-p} + \xi_t) = \\
&= U_{t-1} + \\
&+ M_{t-1} \Phi'_1 L \Phi_1 M'_{t-1} + M_{t-1} \Phi'_1 L \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + M_{t-1} \Phi'_1 L \Phi_p M'_{t-p} + M_{t-1} \Phi'_1 L \xi_t + \\
&+ M_{t-2} \Phi'_2 L \Phi_1 M'_{t-1} + M_{t-2} \Phi'_2 L \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + M_{t-2} \Phi'_2 L \Phi_p M'_{t-p} + M_{t-2} \Phi'_2 L \xi_t + \\
&+ \vdots \vdots \\
&+ M_{t-p} \Phi'_p L \Phi_1 M'_{t-1} + M_{t-p} \Phi'_p L \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + M_{t-p} \Phi'_p L \Phi_p M'_{t-p} + M_{t-p} \Phi'_p L \xi_t + \\
&+ \xi_t L \Phi_1 M'_{t-1} + \xi_t L \Phi_2 M'_{t-2} + \dots + \xi_t L \Phi_p M'_{t-p} + \xi_t L \xi_t \\
&= U_{t-1} + \sum_{i=1}^p M_{t-i} \Phi'_i L \Phi_j M'_{t-j} + \sum_{i=1}^p M_{t-i} \Phi'_i L \xi_t + \sum_{j=1}^p \xi_t L \Phi_j M'_{t-j} + \xi_t L \xi_t. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

O valor esperado condicional relativo a um conjunto de informações pode ser alterado caso se tome uma nova filtração. Suponha que seja de interesse calcular a previsão do processo  $U_t$  segundo um conjunto de informações  $\mathcal{F}_t$ , isto é  $\mathbb{E}(U_t | \mathcal{F}_t)$ . Se  $U_t$  e  $\mathcal{F}_t$  não forem relacionados, a projeção de  $U_t$  envolverá muito mais incerteza. Naturalmente, é desejável que os dois elementos estejam associados, especialmente se  $\mathcal{F}_t$  carregar informação relevante acerca do passado de  $U_t$ , pois essa história ajuda a prever os resultados futuros de  $U_t$ , reduzindo a sua incerteza.

A esperança condicional do processo de risco dado pela Equação 3.8, assumindo que  $\mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$  e que os erros aleatórios de cada componente são independentes aos pares, a variação esperada no processo de ruína no caso geral é dada pela Equação 3.9.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_t - U_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p M_{t-i} \Phi'_i L \Phi_j M'_{t-j} + \sum_{i=1}^p M_{t-i} \Phi'_i L \mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \sum_{i=1}^p \mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] L \Phi_i M'_{t-i} + \\
&+ (1 + \theta) \mathbb{E}[\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}] \mathbb{E}[\xi_{3t} | \mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}[\xi_{2t} | \mathcal{F}_{t-1}] \mathbb{E}[\xi_{4t} | \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p M_{t-i} \Phi'_i L \Phi_j M'_{t-j}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

É importante frisar que será a Equação 3.9 o mais importante parâmetro a respeito da tendência de variação para o processo multivariado de risco. Afinal, caso o resultado da Equação 3.9 resulte em zero, o processo pode ser considerado martingal. Caso seu resultado seja positivo, o nível de reserva de capital ao longo do tempo resultante do processo de risco possuirá tendência de média crescente, o que torna o processo um submartingal. Finalmente, a outra situação é de tendência negativa no nível de capital e, portanto, nesta situação o processo de risco será classificado como supermartingal.

Considerando que  $\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \underline{0}$  e  $Cov[\varepsilon_{it}^2, \varepsilon_{jt}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = Cov[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \forall i, j$ , pela suposição de independência dos termos estocásticos do modelo, a variância do processo de risco dado pela Equação 3.8 é obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 Var[U_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= Var[U_{t-1} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} + \sum_{i=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\varepsilon}'_t + \sum_{j=1}^p \underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} + \underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\varepsilon}'_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\
 &= \sum_{i=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} Var[\underline{\varepsilon}'_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underline{L}' \underline{\Phi}_i \underline{M}'_{t-i} + \\
 &+ \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-j} \underline{\Phi}'_j \underline{L}' Var[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} + Var[\underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\varepsilon}'_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\
 &= \sum_{i=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Sigma} \underline{L}' \underline{\Phi}_i \underline{M}'_{t-i} + \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-j} \underline{\Phi}'_j \underline{L}' \underline{\Sigma} \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} + \\
 &+ Var[(1 + \theta) \varepsilon_{1t} \varepsilon_{3t} - \varepsilon_{2t} \varepsilon_{4t} | \mathcal{F}_{t-1}]. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Ressalta-se que, dado  $\mathcal{F}_{t-1}$ , o processo  $U_{t-1}$  é adaptado e, portanto, não é mais uma variável aleatória, implicando  $Var[U_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ .

### 3.5.2 Formas explícitas para um caso particular: o modelo VAR(1)

Considerando que o processo estocástico  $\underline{M}_t$  possui uma estrutura autorregressiva vetorial de ordem 1, é possível escrevê-lo como:

$$\underline{M}'_t = \underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{\varepsilon}'_t, \quad t \geq 1, \tag{3.11}$$

com  $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{4t})$  um processo de inovação (ruído branco) com  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t) = \underline{0}$ ,  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_t) = \underline{\Sigma}$  e  $\mathbb{E}(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_s) = \underline{0}, \forall t \neq s$ .

Substituindo a Equação 3.11 na Equação 3.5:

$$\begin{aligned}
 U_t &= U_{t-1} + \underline{M}'_t \underline{L} \underline{M}'_t \\
 &= U_{t-1} + ((\underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1}) + \underline{\varepsilon}'_t)' \underline{L} (\underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{\varepsilon}'_t) \\
 &= U_{t-1} + ((\underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1})' \underline{L} + \underline{\varepsilon}'_t \underline{L}) (\underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{\varepsilon}'_t) \\
 &= U_{t-1} + (\underline{M}'_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} + \underline{\varepsilon}'_t \underline{L}) (\underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{\varepsilon}'_t) \\
 &= U_{t-1} + \underline{M}'_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{M}'_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\varepsilon}'_t + \underline{\varepsilon}'_t \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{\varepsilon}'_t \underline{L} \underline{\varepsilon}'_t
 \end{aligned}$$

Como já discutido no Capítulo 2, é preciso fazer a avaliação quanto a estimativa da probabilidade de ruína sofre a influência de variações (positivas ou negativas) no termo de despesas agregadas (seja em valores individuais de indenização ou na frequência de ocorrência de sinistros), associadas com os termos de receitas agregadas (seja em valores de prêmios individuais ou tamanho da carteira de clientes).

No caso mais geral, a matriz do sistema autorregressivo é estruturada da seguinte maneira:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Multiplicando as matrizes dadas pelas Equações 3.12 e 3.6, tem-se alguns resultados importantes para as componentes:

$$\Phi' \underline{L} = \begin{bmatrix} (1+\theta)\phi_{31} & -\phi_{41} & 0 & 0 \\ (1+\theta)\phi_{32} & -\phi_{42} & 0 & 0 \\ (1+\theta)\phi_{33} & -\phi_{43} & 0 & 0 \\ (1+\theta)\phi_{34} & -\phi_{44} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\underline{L}\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+\theta)\phi_{11} & (1+\theta)\phi_{12} & (1+\theta)\phi_{13} & (1+\theta)\phi_{14} \\ -\phi_{21} & -\phi_{22} & -\phi_{23} & -\phi_{24} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

$$\Phi' \underline{L}\Phi = \begin{bmatrix} (1+\theta)\phi_{11}\phi_{31} - \phi_{21}\phi_{41} & (1+\theta)\phi_{12}\phi_{31} - \phi_{22}\phi_{41} & (1+\theta)\phi_{13}\phi_{31} - \phi_{23}\phi_{41} & (1+\theta)\phi_{14}\phi_{31} - \phi_{24}\phi_{41} \\ (1+\theta)\phi_{11}\phi_{32} - \phi_{21}\phi_{42} & (1+\theta)\phi_{12}\phi_{32} - \phi_{22}\phi_{42} & (1+\theta)\phi_{13}\phi_{32} - \phi_{23}\phi_{42} & (1+\theta)\phi_{14}\phi_{32} - \phi_{24}\phi_{42} \\ (1+\theta)\phi_{11}\phi_{33} - \phi_{21}\phi_{43} & (1+\theta)\phi_{12}\phi_{33} - \phi_{22}\phi_{43} & (1+\theta)\phi_{13}\phi_{33} - \phi_{23}\phi_{43} & (1+\theta)\phi_{14}\phi_{33} - \phi_{24}\phi_{43} \\ (1+\theta)\phi_{11}\phi_{34} - \phi_{21}\phi_{44} & (1+\theta)\phi_{12}\phi_{34} - \phi_{22}\phi_{44} & (1+\theta)\phi_{13}\phi_{34} - \phi_{23}\phi_{44} & (1+\theta)\phi_{14}\phi_{34} - \phi_{24}\phi_{44} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Uma vez que a  $\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \underline{0}$  e os erros aleatórios de cada componente são independentes aos pares, a variação esperada no processo de ruína no caso geral é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_t - U_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= M_{t-1} \Phi' \underline{L} \Phi M'_{t-1} + M_{t-1} \Phi' \underline{L} \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underline{L} \Phi M'_{t-1} + (1 + \theta) \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= C_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{31} - \phi_{21} \phi_{41}] C_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{32} - \phi_{21} \phi_{42}] B_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{33} - \phi_{21} \phi_{43}] Q_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{34} - \phi_{21} \phi_{44}] N_{t-1}\} + \\
&+ B_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{31} - \phi_{22} \phi_{41}] C_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{32} - \phi_{22} \phi_{42}] B_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{33} - \phi_{22} \phi_{43}] Q_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{34} - \phi_{22} \phi_{44}] N_{t-1}\} + \\
&+ Q_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{31} - \phi_{23} \phi_{41}] C_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{32} - \phi_{23} \phi_{42}] B_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{33} - \phi_{23} \phi_{43}] Q_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{34} - \phi_{23} \phi_{44}] N_{t-1}\} + \\
&+ N_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{31} - \phi_{24} \phi_{41}] C_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{32} - \phi_{24} \phi_{42}] B_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{33} - \phi_{24} \phi_{43}] Q_{t-1} + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{34} - \phi_{24} \phi_{44}] N_{t-1}\}.
\end{aligned}$$

Ainda é possível reorganizar os termos desta igualdade em forma algébrica quadrática, como segue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_t - U_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= M_t \Phi' \underline{L} \Phi M'_t = \\
&= C_{t-1}^2 [(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{31} - \phi_{21} \phi_{41}] + B_{t-1}^2 [(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{32} - \phi_{22} \phi_{42}] + \\
&+ Q_{t-1}^2 [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{33} - \phi_{23} \phi_{43}] + N_{t-1}^2 [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{34} - \phi_{24} \phi_{44}] + \\
&+ C_{t-1} B_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{32} - \phi_{21} \phi_{42}] + [(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{31} - \phi_{22} \phi_{41}]\} + \\
&+ C_{t-1} Q_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{33} - \phi_{21} \phi_{43}] + [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{31} - \phi_{23} \phi_{41}]\} + \\
&+ C_{t-1} N_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{11} \phi_{34} - \phi_{21} \phi_{44}] + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{31} - \phi_{24} \phi_{41}]\} + \\
&+ B_{t-1} Q_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{33} - \phi_{22} \phi_{43}] + [(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{32} - \phi_{23} \phi_{42}]\} + \\
&+ B_{t-1} N_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{12} \phi_{34} - \phi_{22} \phi_{44}] + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{32} - \phi_{24} \phi_{42}]\} + \\
&+ Q_{t-1} N_{t-1} \{[(1 + \theta) \phi_{13} \phi_{34} - \phi_{23} \phi_{44}] + [(1 + \theta) \phi_{14} \phi_{33} - \phi_{24} \phi_{43}]\}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, o processo só será martigal se, e somente se,  $\underline{M}_t \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_t'$  resultar em um valor nulo. Isso só acontecerá em duas situações: 1) se o vetor  $\underline{M}_t = \underline{0}$  (situação que acontece apenas em firmas iniciantes), ou 2) se  $\underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Phi}$  resultar em uma matriz nula. Esta segunda situação ocorrerá quando a)  $\underline{\Phi} = \underline{0}$ , isto é: o sistema não tiver qualquer memória do passado (e apenas e tão somente de choques aleatórios do presente), ou b) se a matriz  $\underline{\Phi}$  for nilpotente, ou c) se a relação  $(1 + \theta)\phi_{1j}\phi_{3k} - \phi_{2j}\phi_{4k} = 0, \forall j, k = 1, \dots, 4$ .

Repare que a forma quadrática apresentada pela Equação 3.16 guarda analogia com as formas clássicas de convolução, uma vez que o resultado expressa inter-relações cruzadas entre as dimensões do sistema.

Ademais, considerando que  $\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \underline{0}$  e  $Cov[\varepsilon_{it}^2, \varepsilon_{jt}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = Cov[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \forall i, j$ , pela independência, a variância do processo é dada por:

$$\begin{aligned} Var[U_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= Var[U_{t-1} + \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\varepsilon}_t + \underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + \underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\varepsilon}_t' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} Var[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + \\ &+ \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' Var[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + Var[\underline{\varepsilon}_t \underline{L} \underline{\varepsilon}_t' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Sigma} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{\Sigma} \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}' + \\ &+ Var[(1 + \theta)\varepsilon_{1t}\varepsilon_{3t} - \varepsilon_{2t}\varepsilon_{4t} | \mathcal{F}_{t-1}], \end{aligned}$$

que será estável (não diverge) se o processo VAR for estável (isto é, se o maior autovalor da matriz  $\underline{\Phi}$  for, em módulo, inferior a 1). Além disso, a variância só será constante se, e somente se,  $\underline{M}_t \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_t'$  e  $\underline{M}_t \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_t'$  resultarem em valores nulos. Uma vez mais, isso só acontecerá em duas situações: 1) se o vetor  $\underline{M}_t = \underline{0}$  (situação que acontece apenas em firmas iniciantes), ou 2) se  $\underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} = \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} = \underline{0}$ . Esta segunda situação ocorrerá quando  $\underline{\Phi} = \underline{0}$ , isto é, caso o sistema não tenha qualquer memória do passado e depender somente de choques aleatórios do presente.

Caso as variáveis aleatórias possuam mesma variância, então  $Var[\underline{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma^2 \underline{I}$  e, de modo simplificado, a variância do processo dá-se por:

$$\begin{aligned} Var[U_t] &= \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + Var[(1 + \theta)\varepsilon_{1t}\varepsilon_{3t} - \varepsilon_{2t}\varepsilon_{4t} | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2]. \end{aligned}$$

Após alguma álgebra matricial, a variância é dada explicitamente por:

$$\begin{aligned} Var[U_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + \sigma^2 [\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}_{t-1}'] + \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2] = \\ &= (1 + \theta)^2 (\phi_{11}C_{t-1} + \phi_{12}B_{t-1} + \phi_{13}Q_{t-1} + \phi_{14}N_{t-1})^2 \sigma^2 + \\ &+ (1 + \theta)^2 (\phi_{31}C_{t-1} + \phi_{32}B_{t-1} + \phi_{33}Q_{t-1} + \phi_{34}N_{t-1})^2 \sigma^2 + \\ &+ (\phi_{21}C_{t-1} + \phi_{22}B_{t-1} + \phi_{23}Q_{t-1} + \phi_{24}N_{t-1})^2 \sigma^2 + \\ &+ (\phi_{41}C_{t-1} + \phi_{42}B_{t-1} + \phi_{43}Q_{t-1} + \phi_{44}N_{t-1})^2 \sigma^2 + \\ &+ \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2]. \end{aligned}$$

Caso não seja verificada nenhuma causalidade de Granger no problema, implicando que  $\phi_{ij} =$

0,  $\forall i \neq j$ , tem-se o problema na forma padrão do processo clássico de Cramér-Lundberg. Ademais, nota-se que as relações de causalidade inter-relacionam as quantidades aleatórias na forma de convolução das séries temporais, isto é: cada termo será tão mais afetado por outro quanto mais associados eles estiverem.

Um termo importante para se medir riscos de ruína e que está diretamente ligado à mensuração da probabilidade de ruína é o coeficiente de ajuste  $\gamma$ . Considerando a estrutura multivariada de dependência entre prêmios e sinistros (tanto em valores quanto em frequências), o novo coeficiente de ajuste do processo modificado (análogo à Equação 3.1) é definido a seguir.

**Definição 8** (Coeficiente de Ajuste). *O coeficiente de ajuste ( $\gamma$ ) é a menor solução positiva da equação*

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\gamma Z_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = 1, \quad (3.17)$$

que pode ser resolvida pela igualdade  $\ln[M_{Z_t}(\gamma)] = 0$ , em que  $M_{Z_t}(t) = \mathbb{E} \left[ e^{t(Z_t)} | \mathcal{F}_{t-1} \right]$ , se a variável aleatória

$$Z_t = \sum_{i=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\xi}'_t + \sum_{j=1}^p \underline{\xi}_t \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} + \underline{\xi}_t \underline{L} \underline{\xi}'_t$$

que representa todos os termos estocásticos da Equação 3.8, possuir distribuição conhecida.

Esse coeficiente  $\gamma$  é uma função de variáveis aleatórias, mas também de uma constante  $\theta$  (carregamento) e servirá para atribuir um limitante superior à probabilidade de ruína do processo de risco. Deve-se interpretá-lo como um valor que mede o risco de descasamento entre os fluxos de caixa futuros, de modo que, quanto mais fortemente a parcela de sinistros superar a parcela de prêmios, mais negativo o termo entre parênteses do expoente ficará. Portanto, com o sinal negativo, o expoente fica positivo, só que de magnitude grande. Desta forma, o razoável não é buscar o seu valor em zero (até porque, o zero é sempre raiz e tornará a igualdade verdadeira), mas sim a menor raiz positiva de  $\gamma$  para poder encontrar a igualdade. Do que se conclui que dentre dois processos de risco, aquele com menor valor de  $\gamma$  tem uma probabilidade mais alta de incorrer em falência e, portanto, precisará aumentar o carregamento  $\theta$  sobre os prêmios e/ou o capital inicial  $U_0$ .

A seguir, será mostrado que a probabilidade de ruína do processo da maneira que foi proposto é limitado por uma função do coeficiente de ajuste e do capital inicial, a depender de suas características martingais. Além disso, também possui a propriedade de decaimento exponencial da relação entre a probabilidade de ruína e o capital inicial.

**Teorema 3.1.** *Com o processo de risco definido pela Equação 3.5, com dependência multivariada entre os seus termos, a probabilidade de ruína satisfaz uma das seguintes condições:*

$$\begin{cases} \psi(U_0, \theta, \underline{M}_0 \underline{L} \underline{M}'_0) \leq \frac{e^{-\gamma U_0}}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]}, & \text{se o processo de risco for submartingal,} \\ \psi(U_0, \theta, \underline{M}_0 \underline{L} \underline{M}'_0) \geq \frac{e^{-\gamma U_0} - \mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T \geq \infty] \mathbb{P}[T \geq \infty]}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]}, & \text{se o processo de risco for supermartingal.} \end{cases} \quad (3.18)$$

em que  $U_0$  é o capital inicial,  $\theta$  o carregamento definido ex-ante,  $\underline{M}_0 \underline{L} \underline{M}'_0$  determina as condições iniciais da empresa,  $\gamma$  é o coeficiente de ajuste, e  $U_T$  é o capital da entidade no momento da ruína.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{F}_t$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelo processo estocástico  $\{U_T, T \leq t\}$ ,  $t \geq 1$  resultante da convolução  $\underline{M}_t \underline{L} \underline{M}'_t$ , em que  $M_t$  segue um modelo multivariado de séries temporais.

Como

$$U_t = U_{t-1} + \underline{M}_t \underline{L} \underline{M}'_t,$$

então para  $t \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] &= \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma(U_{t-1} + \underline{M}_t \underline{L} \underline{M}'_t)} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma(U_{t-1})} e^{-\gamma(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j})} e^{-\gamma Z_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= e^{-\gamma(U_{t-1})} e^{-\gamma(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j})} \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma Z_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= e^{-\gamma(U_{t-1})} e^{-\gamma(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j})}, \end{aligned}$$

pois a última esperança da penúltima passagem dará 1, conforme a Equação 3.17, em que  $Z_t$  representa todos os termos estocásticos da Equação 3.8. É importante ressaltar que, dada a filtração  $\mathcal{F}_{t-1}$ , tanto  $U_{t-1}$  como a parcela determinística do processo multivariado dado pela Equação 3.8 são conhecidos. Desta maneira, a sequência  $e^{-\gamma U_t}$  pode ser um dos três casos a seguir, para  $t \geq 1$ :

1. **martingal**, se o resultado da Equação 3.9, dado por  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} = 0$ . Isto é: se  $\underline{\Phi}_i = \underline{\Phi}_j = \underline{0}, \forall i, j = 1, \dots, p$ , ou se, ainda que não sejam matrizes nulas, os coeficientes autorregressivos que impõem *drifts* ao processo de risco anularem-se mutuamente;
2. **submartingal**, se o resultado da Equação 3.9, dado por  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} \leq 0$ . Isto é: se os coeficientes autorregressivos combinados implicarem a presença de *drift* não positivo ao processo de risco (ou seja, se o processo  $U_t$  for supermartingal), ou;
3. **supermartingal**, se o resultado da Equação 3.9, dado por  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \underline{M}_{t-i} \underline{\Phi}'_i \underline{L} \underline{\Phi}_j \underline{M}'_{t-j} \geq 0$ . Isto é: se os coeficientes autorregressivos combinados implicarem a presença de *drift* não-negativo ao processo de risco (ou seja, se o processo  $U_t$  for submartingal).

Como a situação 1 é um caso particular dos itens 2 e 3, serão analisados apenas os dois últimos.

Para o caso 3, em que a sequência  $e^{-\gamma U_T}, T \geq 0$ , dada uma filtração  $\mathcal{F}_t$  em algum tempo de parada  $t$ , é supermartingal, decorre do Teorema 2.2 (especialmente, itens 4 e 5) que:

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_0} | \mathcal{F}_t \right] \geq \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_T} | \mathcal{F}_t \right].$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_0} | \mathcal{F}_t \right] &\geq \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_T} | T < t \right] \mathbb{P} [T < t] + \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_t} | T \geq t \right] \mathbb{P} [T \geq t]. \end{aligned}$$

Mas como dada a filtração  $\mathcal{F}_t$ , o capital inicial  $U_0$  é conhecido, então  $e^{-\gamma U_0}$  não é variável aleatória. Além disso,  $\mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_t} | T \geq t \right] \mathbb{P} [T \geq t] \geq 0$ , implicando que:

$$e^{-\gamma U_0} \geq \mathbb{E} \left[ e^{-\gamma U_T} | T < t \right] \mathbb{P} [T < t].$$

No horizonte infinito, isto é, fazendo  $t \rightarrow \infty$ :

$$e^{-\gamma U_0} \geq \mathbb{E} [e^{-\gamma U_T} | T < \infty] \mathbb{P} [T < \infty].$$

Como, por definição, a probabilidade de ruína de um processo de risco é  $\psi(\cdot) = \mathbb{P}[T < \infty]$ , conclui-se que:

$$\psi(U_0, \theta, \underline{M}_0, \underline{LM}'_0) \leq \frac{e^{-\gamma U_0}}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]},$$

completando a demonstração para o caso 3.

Já para o caso 2, para que a sequência  $e^{-\gamma U_T}$  seja um submartingal, é preciso que o processo  $U_T$ , na média, decresça. Isto significa que o processo tem uma tendência agravada de incorrer em ruína. Assim, considerando a filtração  $\mathcal{F}_t$  em um tempo de parada  $t$ , o Teorema 2.2 garante que:

$$\mathbb{E} [e^{-\gamma U_0} | \mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E} [e^{-\gamma U_T} | \mathcal{F}_t].$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\gamma U_0} | \mathcal{F}_t] &\leq \mathbb{E} [e^{-\gamma U_T} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [e^{-\gamma U_T} | T \leq t] \mathbb{P} [T \leq t] + \mathbb{E} [e^{-\gamma U_t} | T > t] \mathbb{P} [T > t] \end{aligned}$$

Isolando o termo  $\mathbb{P} [T \leq t]$  (sem inverter o sinal, pois  $\mathbb{E} [e^{-\gamma U_t} | T < t] \geq 0$ ), e tomando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$\psi(U_0, \theta, \underline{M}_0, \underline{LM}'_0) \geq \frac{e^{-\gamma U_0} - \mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T \geq \infty] \mathbb{P} [T \geq \infty]}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]},$$

completando a demonstração. □

**Corolário 3.1.** *Nas mesmas condições do Teorema 3.1, com dependência multivariada entre os seus termos, a probabilidade de ruína satisfaz uma das seguintes desigualdades:*

$$\begin{cases} \psi(U_0, \theta, \underline{M}_0, \underline{LM}'_0) \leq e^{-\gamma U_0}, & \text{se o processo de risco for submartingal,} \\ \psi(U_0, \theta, \underline{M}_0, \underline{LM}'_0) \geq e^{-\gamma U_0} - K, & \text{se o processo de risco for supermartingal,} \end{cases} \quad (3.19)$$

em que  $K$  é uma constante menor que 1, dada por  $\frac{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T \geq \infty] \mathbb{P}[T \geq \infty]}{\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]}$ .

*Demonstração.* Decorrencia imediata do Teorema 3.1. Note que, no instante em que a entidade entra em ruína,  $U_T \leq 0$ , necessariamente. Isso implica que  $\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty] \geq 1$ , para ambos os casos.

No caso de o processo ser um supermartingal,  $\mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T \geq \infty] < \mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty]$ , pois, dada uma situação de ruína,  $U_T \leq 0$ , necessariamente. E, em caso de não-ruína,  $U_T > 0$ . □

Em palavras, o que o Teorema 3.1 garante é que, dado um montante de capital inicial, a probabilidade de ruína de um processo de risco com tendência de decrescimento sempre estará limitada inferiormente no longo prazo por uma função exponencial do coeficiente de ajuste  $\gamma$  e dessa reserva. Por outro lado, se o processo de risco tiver tendência de crescimento, a probabilidade de risco estará limitada superiormente pela mesma forma funcional de uma exponencial.

É importante destacar que, conforme comentários anteriores, o coeficiente de ajuste  $\gamma$  indica o nível de risco de descasamento entre os fluxos de prêmios e sinistros. Geralmente, a literatura trata esse coeficiente de ajuste para processos submartingais, em que os prêmios cobrados são pelo menos o montante que representa a expectativa estacionária do sinistro agregado, por instante de tempo, adicionado de um carregamento, ou seja  $P_t = (1 + \theta)\mathbb{E}[S_{Ag}]$ . Vale reparar que  $S_{Ag}$  não costuma possuir tendências, ou seja, são tratados como estacionários na média.

Exemplos disso são os casos clássicos trazidos em Bowers et al. [1997], artigos clássicos como Embrechts e Mikosch [1991], mais recentes como Trufin et al. [2011] e também em trabalhos envolvendo séries temporais, como Wan et al. [2005], Chan e Yang [2006], Zhang et al. [2007] e Wat [2012]. Em comum a todos eles, o fato de apenas encontrarem uma fórmula para o limite superior para as respectivas probabilidades de ruína, em função do capital alocado no momento inicial, uma vez que em todos estes trabalhos os processos eram supostos submartingais.

Como se nota, este trabalho inova ao encontrar condições - diferentemente dos outros autores - para que o processo de risco apresente um limite inferior para a probabilidade de ruína, não apenas um limite superior. E isso é importante na medida em que é possível que, na prática, ocorra a indesejável situação de que os sinistros excedam - ainda que por algum período de tempo - os prêmios cobrados, causados por uma geralmente complexa estrutura de dependência intertemporal das operações securitárias. A implicação prática imediata é que esse reconhecimento possibilita redimensionar instantaneamente o volume de reservas de capital ou o carregamento sobre os prêmios, sendo necessário apenas compreender de que maneira as alterações na nova matriz estimada de coeficientes do modelo VAR(p) afeta a curvatura da relação entre o capital de solvência e a probabilidade de ruína.

Pelo fato de  $\gamma$  ser uma constante (geralmente desconhecida), assim como a estrutura de dependência, a possibilidade de o gestor de risco arbitrar algum parâmetro reside única e exclusivamente sobre  $\theta$  e  $U_0$ . Ou seja, como decorrência lógica, quanto maior for o volume de capital de uma entidade, ela estará mais protegida da ruína, com velocidade de decaimento exponencial. Esse resultado é absolutamente consistente com a literatura para distribuições paramétricas que respeitem a condição de que os prêmios, ainda que constantes, sejam o valor esperado da variável aleatória do sinistro agregado, ainda que nem todas possuam soluções analíticas (e apenas há no caso Gama-Poisson e suas correlatas).

Contudo, exatamente pelo fato de não haver soluções gerais, neste trabalho é proposta uma metodologia de estimação do funcional oriundo do processo de risco com dependência multivariada por meio de simulações computacionais. Na próxima seção será apresentado o algoritmo e demonstrada a convergência teórica do estimador da probabilidade de ruína, evidenciando que o procedimento de simulação revela o verdadeiro valor, ainda que não se tenha uma solução analítica geral.

### 3.6 A proposta de estimação do funcional via *bootstrap* e sua propriedade de consistência

A técnica de *bootstrap* é um procedimento computacional iterativo extremamente útil como método de estimação da distribuição probabilística de estimadores ou estatísticas de teste quando não se dispõe da verdadeira forma funcional do modelo teórico. Assumindo que os dados observados formam um conjunto populacional, sob certas condições de regularidade, o *bootstrap* conduz a uma aproximação da distribuição que é pelo menos tão precisa quanto a aproximação da mesma distribuição obtida a partir da teoria assintótica. Ademais, para fins de avaliação de resultados práticos, trata-se de uma técnica que pode, computacionalmente, substituir a análise matemática da distribuição assintótica, que, em geral, é de difícil tratamento ou obtenção.

Apesar de não ensejar grande complexidade algébrica, o método *bootstrap* geralmente é mais preciso em amostras pequenas do que as aproximações assintóticas e há diversos trabalhos que demonstram essas propriedades. Mas a principal propriedade deste método aplicável a este trabalho é a capacidade do *bootstrap* reduzir o viés e, por consequência, o erro quadrático médio de um estimador. Por esta razão, é uma técnica importante para realizar procedimentos de estimação (objetivo principal deste trabalho), além de testar hipóteses, uma vez que a probabilidade fixada *ex-ante* de que um teste baseado em um valor crítico assintótico rejeite uma hipótese nula verdadeira pode ser muito diferente da verdadeira probabilidade de rejeição. Mais detalhes sobre esta técnica podem ser obtidas em [Efron e Tibshirani \[1993\]](#).

Aplicada em contextos de séries temporais, a técnica envolve a criação de histórias (trajetórias) artificiais para cada variável aleatória envolvida no problema, de sorte que se utilize essas histórias no mesmo procedimento de estimação do funcional como se fossem realizações verdadeiras. As histórias artificiais são criadas efetuando-se a estimação dos parâmetros do modelo, extraindo-se os seus resíduos, cujos momentos (até segunda ordem) empíricos são determinados pela matriz de variâncias e covariâncias para, então, obter valores pontuais para as variáveis endógenas ao sistema. Como as trajetórias geradas artificialmente tipicamente constituem uma possível amostra (dentro uma infinidade de possibilidades), os valores pontuais gerados por meio dos resíduos podem não coincidem exatamente com os dados originais. Porém, ao se criar um número suficientemente grande de trajetórias, é possível realizar uma aproximação da trajetória esperada com bastante precisão.

Para o contexto deste trabalho, o procedimento completo de simulação consiste dos seis passos descritos no Algoritmo 1, a seguir.

**Algoritmo 1.** *Procedimento de modelagem das séries e simulação de trajetórias futuras para a estimação do funcional da probabilidade de ruína.*

1. **Definição das séries de entrada.** Inicialmente é preciso especificar o tipo de série:
  - (a) Em aplicação a dados reais, com  $t$  observações disponíveis, passe diretamente para o passo 2;
  - (b) Em estudos de simulação, é necessário que dados sejam gerados<sup>4</sup> da seguinte forma: estipula-se uma estrutura de dependência temporal de ordem  $p$  (expressa por matrizes  $\hat{\Phi}_j, j = 1, \dots, p$  de parâmetros fixos) e, com ela, geram-se  $t$  dados artificiais de dimensão 4 com a estrutura imposta. Passe para o passo 2;
2. **Estimação dos parâmetros de um modelo VAR( $p$ ).** Com o sistema multivariado de séries temporais oriundo do passo 1, estimam-se as matrizes  $\hat{\Phi}_j, j = 1, \dots, p$  de parâmetros do modelo VAR( $p$ ) cujos resíduos sejam ruídos-brancos, e extraem-se essa matriz de resíduos  $\underline{\xi}_t$  de dimensão  $t \times 4$  para a utilização no passo 4;
3. **Inicialização de parâmetros (capital inicial  $U_0$  e taxa de carregamento  $\theta$ ).** O objetivo é fazer o mapeamento matricial cujas entradas são os parâmetros necessários para manter solvência financeira da entidade. Enquanto  $U_0 \leq K$  e  $\theta \leq C$ , em que  $K$  e  $C$  são duas constantes reais, execute os passos 4 e 5;
4. **Criando  $N$  réplicas de  $B$  trajetórias futuras de horizonte  $h$ .** Com o intuito de se obter uma quantidade suficientemente grande de possibilidades de ocorrências futuras, para cada réplica  $n \in \{1, \dots, N\}$ , faça:
  - (a) **Criação das  $B$  histórias artificiais de cada variável de horizonte  $H$  passos a frente.** De posse da matriz de resíduos  $\underline{\xi}_t$ , para cada  $h = 1, \dots, H = 1.200$ , amostra-se - com reposição - uma linha da matriz de resíduos  $\underline{\xi}_t$  para compor o vetor  $\hat{\underline{\xi}}_t$  que formará, recursivamente, usando o método de projeção do modelo VAR( $p$ ) ajustado, a  $b$ -ésima trajetória ( $b = 1, \dots, B = 10.000$ ) do processo de risco:

$$\hat{U}_{t+h}^b = \hat{U}_{t+h-1}^b + (1 + \theta)\hat{C}_{t+h}^b\hat{Q}_{t+h}^b - \hat{B}_{t+h}^b\hat{N}_{t+h}^b, \quad h = 1, \dots, H, \quad (3.20)$$

com as projeções do vetor  $\hat{M}_{t+h}^b = [\hat{C}_{t+h}^b, \hat{B}_{t+h}^b, \hat{Q}_{t+h}^b, \hat{N}_{t+h}^b]$  obtidas recursivamente da seguinte maneira:

$$\hat{M}_{t+h}^b = \sum_{j=1}^p \hat{\Phi}_j \hat{M}_{t+h-j}^b + \underline{\xi}_{t+h}, \quad h = 1, \dots, H,$$

em que  $\underline{\xi}_{t+h}$  é uma linha sorteada (com reposição) da matriz de resíduos  $\underline{\xi}_t$  pelo método bootstrap. Vá para o passo 4.b.

- (b) **Estimação dos funcionais de interesse.** Para cada  $n = 1, \dots, N = 1.000$  e de posse das  $B$  trajetórias futuras de horizonte  $H$  do processo de risco, calculam-se os dois funcionais de interesse: a frequência relativa  $\hat{\psi}_n(U_0, T)$  (segundo a Equação 3.22) em que o processo de risco entrou em ruína e uma expectativa para a finitude do tempo de parada  $T$  (o tempo médio  $t_+$  até a ocorrência da ruína).
- (c) Repita os passos 4.a e 4.b até completar  $N$  réplicas.

<sup>4</sup>Um método de simulação de séries temporais multivariadas é trazido no Apêndice A.

5. **Teste das hipóteses de interesse.** Com as  $N$  estimativas da probabilidade de ruína ( $\hat{\psi}_B^n(U_0, H)$ ,  $n = 1, \dots, N = 1.000$ ) para uma combinação de  $U_0$  e  $\theta$ , calculam-se a média  $\hat{\psi}_B^N(U_0, H)$  (segundo a Equação 3.23) e o desvio-padrão  $\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_B^N(U_0, H)}$  (segundo a Equação 3.26) do funcional para, finalmente, testar as hipóteses dadas pelo conjunto (3.3). Volte ao passo 3.

Alguns comentários sobre o Algoritmo 1 precisam ser feitos. A respeito do segundo passo do algoritmo, é fundamental que a série ajustada torne os resíduos de cada série ruídos brancos, isto é: média e variância constantes e, especialmente, que não haja estrutura de autocorrelação dentro de cada série que possa invalidar o processo de reamostragem aleatória no procedimento. Isso decorrer do fato de que, em caso contrário, uma estrutura temporal precisaria ser incorporada com o intuito de representar adequadamente a relação de dependência observada no passado. Todavia, como os resíduos são provenientes de um sistema multivariado, a estrutura de dependência contemporânea pode (e deve) ser preservada.

O quarto passo do Algoritmo 1 é o principal processo de simulação computacional que será realizado neste trabalho, de maneira que é nele que são estimadas as duas quantidades de interesse: 1) as probabilidades de ruína e 2) os tempos decorridos até a entrada em ruína, caso aconteça. Nota-se que, pela grande quantidade de termos aleatórios deste problema, torna-se intratável a avaliação analítica dos resultados, uma vez que as fórmulas são fechadas apenas e tão somente para o caso dos sinistros (frequência e severidade) serem variáveis aleatórias (e, mesmo assim, para os casos estacionários da família das distribuições Poisson e Gama, respectivamente). Por este motivo, serão simuladas um número suficientemente grande de trajetórias futuras de um processo definido pela Equação 3.4, inicializando a reserva inicial como  $U_0$  e gerando as futuras variáveis aleatórias das quantidades e dos valores dos sinistros, assim como as futuras e aleatórias quantidades de apólices expostas ao risco e seus valores individuais de prêmios.

É razoável supor que algumas das trajetórias simuladas pelo Algoritmo 1 jamais conduzirão o processo à ruína, o que faz necessário o truncamento do processo em algum instante finito, o qual será denotado pelo tempo de parada  $H$ . A ruína, portanto, ocorrerá quando a trajetória atingir o nível zero (ou inferior) no máximo até o instante  $H$ . Para a análise dos dados reais, a unidade de tempo considerada será mensal, em um horizonte de 100 anos (o que equivale a 1200 meses).

Contudo, a questão fundamental é: será que o Algoritmo 1 é capaz de revelar o verdadeiro valor do funcional dado pela Equação 3.2, que representa a probabilidade de ruína? Porque, se a resposta for negativa, todo o procedimento mostra-se vão. A seguir será desenvolvida a resposta para este que é o aspecto central do trabalho.

A cada rodada do passo 4, isto é, para cada  $n = 1, \dots, N$ , define-se por  $\mathbb{1}_b(\cdot)$  a função indicadora da ruína na  $b$ -ésima trajetória do processo multivariado de risco dado pela Equação 3.20,  $b = 1, \dots, B$  e  $T$  uma variável aleatória que representa o tempo de parada até a ruína acontecer,  $T = 1 \leq h \leq H$ , em que  $H$  é um horizonte, da seguinte forma:

$$\mathbb{1}_b(T < H) = \begin{cases} 1, & \text{se } \hat{U}_{t+h}^b \leq 0, \text{ para algum } h \leq H, \text{ com probabilidade } \psi_B^n(U_0, \theta, H), \\ 0, & \text{se } \hat{U}_{t+h}^b > 0, \text{ para todo } h \leq H, \text{ com probabilidade } 1 - \psi_B^n(U_0, \theta, H). \end{cases} \quad (3.21)$$

Adotando o procedimento de reamostragem uniforme (isto é, cada elemento da amostra é selecionado com reposição e todos com probabilidade de seleção igual a  $t^{-1}$ ), condicionais à filtração  $\mathcal{F}_t$ , sorteia-se  $B$  reamostras independentes  $\mathcal{F}_1^*, \dots, \mathcal{F}_B^*$  e seja  $\mathbb{1}_b(T < H)$  a indicação de ruína da

b-ésima trajetória, representada pela filtração  $\mathcal{F}_b^*$  em vez de  $\mathcal{F}_t$ . Assim:

$$\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{1}_b(T < H), \quad (3.22)$$

é uma aproximação de Monte Carlo para  $\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H)$ , que é utilizada em cada passo 4b do Algoritmo 1. Já o estimador do passo 5 é dado por:

$$\hat{\psi}_B^N(U_0, \theta, H) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H). \quad (3.23)$$

**Teorema 3.2.** *Com a condição de que  $B \rightarrow \infty$ ,  $H \rightarrow \infty$  e válidas as Equações 3.22 e 3.21, então, para todo  $T = 1 \leq h \leq H$ ,*

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) \xrightarrow{\mathbb{P}} \psi_B^n(U_0, \theta, H), e \quad (3.24)$$

$$\lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ H \rightarrow +\infty}} \hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) \xrightarrow{\mathbb{P}} \psi(U_0, \theta, T). \quad (3.25)$$

*Demonstração.* O valor esperado de  $\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H)$ , condicional à filtração  $\mathcal{F}_B^*$ , que representa todas as trajetórias geradas, é:

$$\mathbb{E}[\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) | \mathcal{F}_B^*] = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \mathbb{E}[\mathbb{1}_b(T < H) | \mathcal{F}_B^*] = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi_B^n(U_0, \theta, H) = \psi_B^n(U_0, \theta, H).$$

Portanto,  $\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H)$  é uma aproximação não-enviesada para  $\psi_B^n(U_0, \theta, H)$  e o desempenho de  $\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H)$  pode ser descrito pela sua variância condicional. Como as trajetórias são construídas por meio de amostras aleatórias com reposição (supostas independentes aos pares) e  $\mathbb{1}_b(T < H)$  é uma função indicadora de ocorrência de ruína (e, por ser função indicadora,  $[\mathbb{1}_b(T < H)]^2 = \mathbb{1}_b(T < H)$ ), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) | \mathcal{F}_B^*] &= \text{Var}\left[\frac{\sum_{b=1}^B \mathbb{1}_b(T < H)}{B} \middle| \mathcal{F}_B^*\right] \\
 &= \frac{1}{B^2} \text{Var}\left[\sum_{b=1}^B \mathbb{1}_b(T < H) \middle| \mathcal{F}_B^*\right] \\
 &= \frac{1}{B^2} \sum_{b=1}^B \text{Var}[\mathbb{1}_b(T < H) | \mathcal{F}_B^*] \\
 &= \frac{1}{B^2} \sum_{b=1}^B \left[ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_b(T < H)^2 \middle| \mathcal{F}_B^*\right] - \left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_b(T < H) | \mathcal{F}_B^*]\right]^2 \right] \\
 &= \frac{1}{B^2} \sum_{b=1}^B \left[ \mathbb{E}[\mathbb{1}_b(T < H) | \mathcal{F}_B^*] - [\psi_B^n(U_0, \theta, H)]^2 \right] \\
 &= \frac{1}{B^2} \sum_{b=1}^B \left[ \psi_B^n(U_0, \theta, H) - [\psi_B^n(U_0, \theta, H)]^2 \right] \\
 &= \frac{1}{B^2} \sum_{b=1}^B [\psi_B^n(U_0, \theta, H) [1 - \psi_B^n(U_0, \theta, H)]] \\
 &= \frac{B}{B^2} \psi_B^n(U_0, \theta, H) [1 - \psi_B^n(U_0, \theta, H)] \\
 &= \frac{1}{B} \psi_B^n(U_0, \theta, H) [1 - \psi_B^n(U_0, \theta, H)].
 \end{aligned}$$

Assim, por tratar-se de uma função envolvendo indicadores,  $\text{Var}[\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) | \mathcal{F}_B^*]$  converge assintoticamente para uma constante ou para uma constante múltipla de  $B^{-1}$ , tornando-se  $O(B^{-1})$  a cada replicata. Especificamente, essa constante é inferior a 0,25 quando  $\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) = 0,5$ , sendo, portanto, limitada superiormente.

Finalmente, pela Lei Fraca dos Grandes Números, a desigualdade de Chebyshev garante que, para um  $\varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[|\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) - \psi_B^n(U_0, \theta, H)| \geq \varepsilon | \mathcal{F}_B^*] &\leq \frac{\text{Var}[\hat{\psi}_B^n(U_0, \theta, H) | \mathcal{F}_B^*]}{\varepsilon^2} \\
 &= \frac{\psi_B^n(U_0, \theta, H) [1 - \psi_B^n(U_0, \theta, H)]}{B\varepsilon^2} \\
 &\leq \frac{1}{4B\varepsilon^2} \xrightarrow{B \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

garantindo que a Equação 3.24 é válida.

Pelo fato de a variância do estimador bootstrap ser limitada superiormente, o estabelecimento da Equação 3.25 é uma decorrência do Teorema 3.8 apresentado em Shao e Tu [1995], que envolve a aplicação da Lei Forte dos Grandes Números de Marcinkiewicz, e cujos argumentos serão omitidos.

□

O Teorema 3.2 garante que o estimador de cada replicata é não-enviesado e possui a propriedade de consistência, desde que as quantidades  $B$  seja suficientemente grande. Diversos trabalhos teóricos e empíricos preocuparam-se em encontrar o valor ideal de  $B$  que garanta boa quali-

dade de aproximação. Hall [1992], Shao e Tu [1995], Hastie et al. [2008], Kreiss e Lahiri [2012] e Jentsch e Politis [2015] fazem uma extensa revisão sobre esses trabalhos, inclusive no contexto de séries temporais.

O intuito deste trabalho não é avaliar a quantidade de trajetórias simuladas necessária para garantir convergência. O objetivo da aplicação do Algoritmo 1 é ter revelado o verdadeiro valor da probabilidade de ruína de um processo de risco, ainda que não se conheça exatamente o seu verdadeiro valor, por não se dispor de uma solução analítica geral para a sua obtenção. Assim, os resultados obtidos serão bastante precisos, próximos dos valores teóricos exatos.

Uma vez dotados das  $N$  replicações, (cujo objetivo é a criação de variância entre as estimativas pontuais  $\psi_B^n(U_0, \theta, H)$  obtidas), obter-se-ia estimativas consistentes do erro-padrão do funcional descrito pela Equação 3.2 e representado pela Equação 3.23, possibilitando testar as hipóteses dadas por (3.3). Portanto, por padrão,  $N = 1.000$  e  $B = 10.000$  serão considerados valores suficientemente grandes, gerando um total de 10 milhões de trajetórias simuladas para cada combinação de reserva e taxa de carregamento.

Para a estimação do erro padrão deste estimador da probabilidade de ruína  $\hat{\psi}_B^N(U_0, \theta, H)$  (considerando todas as  $B$  trajetórias de todas as  $N$  replicatas), será utilizado o método *jackknife*, que é uma eficiente técnica não-paramétrica que permite estimar vários tipos de quantidades e que partilha de algumas semelhanças com o *bootstrap* (ver Quenouille [1949], Tukey [1958], Efron [1979] e Efron [1982]). Dentre as típicas aplicações é possível citar avaliação de vieses de estimadores e estimação de variância, que é o interesse específico desta seção. Aqui, o objetivo é obter um erro-padrão mais consistente para o estimador apresentado na Equação 3.23 via *jackknife* (que, pela Lei dos Grandes Números, convergirá para o verdadeiro valor), e é dado pela Equação 3.26:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sigma[\hat{\psi}_B^N(U_0, \theta, H)] \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{N-1}{N} \left( \hat{\psi}_B^i(U_0, \theta, H) - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \hat{\psi}_B^j(U_0, \theta, H) \right)^2}. \quad (3.26)$$

Como as trajetórias serão realizadas para cada subpartição do tempo, é possível fazer a avaliação das  $B$  observações para cada instante  $t \in T$ , inclusive a estimativa pontual e intervalar para o funcional, assim como realizar o teste de hipóteses. A medida de evidência contra a hipótese nula definida em (3.3) será dada por:

$$\alpha^* = \mathbb{P} \left[ \sqrt{N} \frac{\hat{\psi}_B^N(U_0, \theta, H) - \psi_0}{\sigma[\hat{\psi}_B^N(U_0, \theta, H)]} \leq z \right], \quad (3.27)$$

com  $z \in \mathbb{R}$ . O cômputo do p-valor possui duas complicações: a primeira é o desconhecimento da distribuição verdadeira do funcional sob  $H_0$  e a segunda envolve o valor testado para  $\psi_0$  como o verdadeiro valor da probabilidade de ruína. Ambos os efeitos são minimizados pela convergência do estimador à Normal. A convergência assintótica da distribuição do funcional à normalidade foi demonstrada por Pitts [1994] e, assim, ao realizar o procedimento um número suficientemente grande de vezes, a aproximação normal pode ser verificada empiricamente a partir das soluções gerada pela aplicação do método.

No próximo capítulo, serão realizadas inicialmente simulações dos casos paramétricos de distribuições supostas conhecidas com o intuito de validar os resultados obtidos pela aplicação do algoritmo, especialmente nos casos em que se conhece teoricamente os resultados. Na sequência serão simulados dados com estruturas de dependência temporal controladas, com o objetivo de compreender de que maneira a inclusão de *drifts* (positivos ou negativos) incidem sobre a relação entre a alocação de capital inicial e o nível de probabilidade de ruína. Finalizando o trabalho, o procedimento será aplicado a um conjunto de dados reais, em que é verificada a presença de dependência temporal.

# Capítulo 4

## Simulações e Aplicações

### 4.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à aplicação do método proposto em algumas situações. Na primeira seção, os resultados da aplicação da nova abordagem serão comparados com as metodologias usuais de estimação difundidas na literatura, baseadas em convoluções de distribuições paramétricas, particularmente quando são supostas conhecidas as distribuições que compõem a parcela de sinistros, considerando a série de prêmios como constante. O principal objetivo desta seção é avaliar a qualidade das estimativas obtidas pela aplicação do Algoritmo 1, de modo a verificar se o método é capaz de revelar os verdadeiros valores da probabilidade de ruína, oriundos de processos clássicos na literatura. Além disso, também será verificada a aproximação assintótica da distribuição de probabilidade empírica do funcional à distribuição Normal, com o intuito de possibilitar a realização posterior de testes de hipóteses.

Em seguida, na segunda seção, a metodologia será aplicada a dados simulados provenientes de um modelo VAR(1) de dimensão 4, em um experimento computacional controlado atribuindo diferentes estruturas de dependência na matriz 3.12. O objetivo principal desta seção é compreender como se dão os efeitos da incorporação da estrutura de dependência temporal entre as séries sobre a relação entre capital de solvência e a probabilidade de ruína de um processo de risco.

Na terceira e derradeira seção, a metodologia será aplicada a um conjunto de dados reais do mercado de seguros de automóveis e os resultados comparados com a metodologia considerada clássica na literatura, em que o tamanho da carteira é estático, os prêmios são constantes e apenas o fluxo de sinistros é tratado como variável aleatória. Aqui, são dois os objetivos: estimar, a partir de dados observados, a probabilidade de ruína e dimensionar o capital de solvência da carteira mais adequado à realidade da seguradora para atendimento de requisitos operacionais mínimos, em concordância com critérios regulatórios internacionais estabelecidos.

### 4.2 Simulações para o processo de ruína com prêmios constantes e sinistros com distribuições conhecidas

Nessa primeira seção o objetivo é verificar se o Algoritmo 1 proposto é capaz de estimar com precisão o verdadeiro valor da probabilidade de ruína para um caso de distribuição de severidade conhecida cuja solução é exata.

### 4.2.1 O caso Poisson-Exponencial

Suponha o caso especial em que a distribuição da severidade individual  $X$  seja uma exponencial de parâmetro  $\beta > 0$  em um processo estocástico  $U_t$  como dado pela Equação 3.4. A ruína, se ocorrer, ocorrerá no instante  $T = \min\{t : U_t \leq 0\}$  (ou  $\infty$  se este mínimo não existir), e  $\hat{U}_t$  representará o montante de capital disponível no instante imediatamente anterior a  $t$ , com uma filtração natural  $\mathcal{F}_t$ . O evento em que  $U_t \leq -y$ , com  $y \geq 0$ , pode ser reescrito como o evento em que um evento  $X$  (o tamanho do sinistro causador da ruína) exceda  $\hat{U}_t + y$  dado que excedeu  $\hat{U}_t$ . A probabilidade condicional, para cada  $\mathcal{F}_t$ ,  $\hat{U}_t$ ,  $y$  e  $T$ , deste evento é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[U_T \leq -y | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{P}[-U_T > y | \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[X > \hat{U}_t + y | X > \hat{U}_t] \\ &= \frac{\beta \int_{\hat{U}_t + y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{\hat{U}_t}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y}, \end{aligned}$$

de modo que a função densidade de probabilidade de  $-U_t$ , dado  $T < \infty$ , é

$$\frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\gamma U_T} | T < \infty] &= \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} e^{\gamma y} dy \\ &= \frac{\beta}{\beta - \gamma}. \end{aligned}$$

O coeficiente de ajuste  $\gamma$ , para este caso, pode ser obtido exatamente como:

$$1 + \frac{(1 + \theta)\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - \gamma}. \quad (4.1)$$

Desenvolvendo, tem-se uma igualdade quadrática em  $\gamma$ , como segue:

$$(1 + \theta)\gamma^2 - \theta\beta\gamma = 0.$$

Apesar de  $\gamma = 0$  ser uma solução trivial, valor do coeficiente de ajuste a ser adotado para  $\gamma$  é a menor raiz positiva desta equação, cuja fórmula é:

$$\gamma = \frac{\theta\beta}{1 + \theta}. \quad (4.2)$$

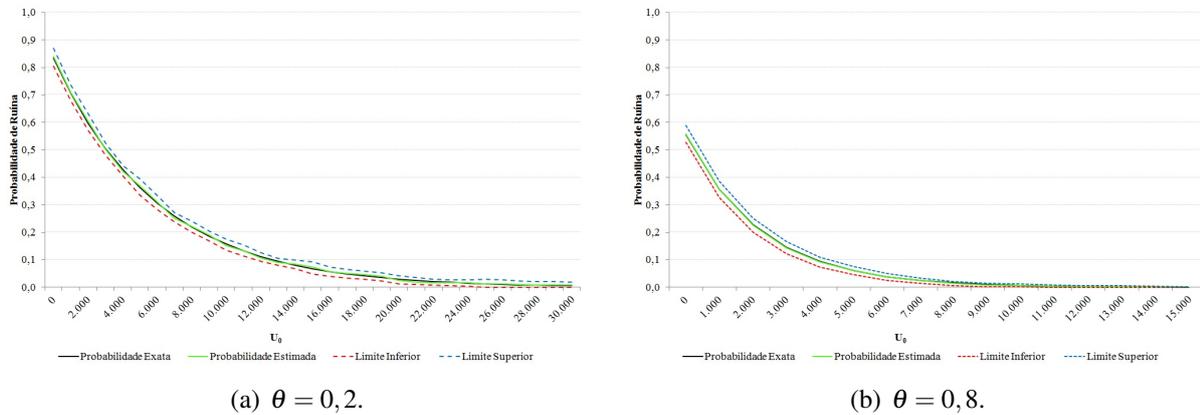
Combinando as duas expressões dadas pelas Equações 4.1 e 4.2, tem-se que

$$\begin{aligned}\psi(U_0, \theta) &= \frac{(\beta - \gamma)e^{-\gamma U_0}}{\beta} \\ &= \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{\frac{-\theta \beta U_0}{1 + \theta}\right\}.\end{aligned}$$

Particularmente, se  $U_0 = \theta = 0$ , então a probabilidade de ruína é 1. Especificamente para este estudo de simulação, para construir a série aleatória de sinistro para o processo de risco, foram geradas 10.000 amostras independentes de uma distribuição Poisson com parâmetro  $\lambda = 250$  e, condicionalmente, gerados severidades individuais com uma distribuição exponencial de média  $\mu = 1000$ .

Tendo em vista o objetivo de verificar se o Algoritmo 1 captura os verdadeiros valores conhecidos, sobre esses microdados gerados artificialmente foi construída uma história de série temporal para o processo de risco, estimados os modelos VAR(1), todos com parâmetros insignificantes, de modo que fosse possível aplicar o Algoritmo 1 e projetar 10.000 trajetórias futuras independentes via *bootstrap*. Deste modo, se fixados como parâmetros iniciais  $U_0 = 0$  e  $\theta = 0,2$ , os prêmios são constantes e iguais a 300.000, além de a probabilidade exata de ruína ser  $\psi(U_0 = 0) = 10/12$ .

As Figuras 4.1(a) e 4.1(b) a seguir trazem as comparações das estimativas obtidas por meio da aplicação do algoritmo com os valores exatos da probabilidade de ruína para o caso Exponencial, em função de  $U_0$  e para dois diferentes valores de  $\theta \in \{0,2; 0,8\}$ . No Apêndice B, as Tabelas B.1 e B.2 trazem as informações exatas a respeito do viés e do erro quadrático médio do estimador proposto.



**Figura 4.1:** Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidas pelo algoritmo com os valores exatos para o caso Poisson-Exponencial, em função de  $U_0$  e diferentes valores de  $\theta$ .

A partir da observação das Figuras 4.1(a) e 4.1(b) percebe-se que o algoritmo é bastante preciso ao prever os verdadeiros valores do funcional da probabilidade de ruína, especialmente ao observar que, além de as estimativas estarem bastante próximas, os intervalos de confiança empíricos contêm o verdadeiro valor para todos os casos de capital inicial e também nos casos de diferentes taxas de carregamento.

Uma vez verificado que a aplicação do Algoritmo 1 provê estimativas muito próximas da verdadeira probabilidade de ruína para o caso em que é possível calcular seu valor com exatidão por se conhecer a solução analítica, será feita, a seguir, a análise para outra situação em que as distri-

buições são conhecidas, mas cujos valores exatos já não são mais possíveis de se obter. Contudo, é possível obter exatamente o valor do limitante superior para a sua probabilidade.

## 4.2.2 O caso Poisson-Normal

Suponha agora outra situação particular em que a distribuição da severidade individual  $X$  seja uma Normal de parâmetros  $(\mu, \sigma^2) > 0$  em um processo estocástico  $U_t$ , com prêmios  $p$  constantes, como dado pela Equação 3.4. Neste caso já não é possível estabelecer uma fórmula exata para a probabilidade de ruína, mas com essa premissa de normalidade para  $X$ , é possível estabelecer uma aproximação para o limitante superior para o funcional, uma vez que o coeficiente de ajuste  $\gamma$  possui uma solução analítica.

Para obtê-lo, é preciso reescrever o processo de risco como:

$$U_{t_+} = U_0 + (p - W_1) + \dots + (p - W_{t_+}),$$

em que  $t_+ = \min \{t : U_t \leq 0\}$  (ou  $\infty$  se este valor não existir) e  $W_i$  é a severidade agregada dos sinistros no  $i$ -ésimo período, assumidas i.i.d. Assim, o coeficiente de ajuste é a solução positiva da igualdade:

$$M_{W-p}(\gamma) = \mathbb{E} \left[ e^{\gamma(W-p)} \right] = e^{-\gamma p} M_W(\gamma) = 1,$$

ou, de modo equivalente,

$$\ln [M_W(\gamma)] = \gamma p,$$

com  $W$  representando a variável aleatória das severidades. No caso Normal, a formulação é dada por:

$$\ln [M_W(\gamma)] = \mu \gamma + \frac{\sigma^2 \gamma^2}{2} = \gamma p,$$

que possui solução positiva igual a:

$$\gamma = \frac{2(p - \mu)}{\sigma^2}.$$

Mas como  $W$  possui uma distribuição Poisson Composta com  $X$  (isto é,  $N$  é uma variável aleatória Poisson que representa a quantidade de sinistros em um período), e os prêmios puros são constantes, considerando a taxa de carregamento  $\theta$  fixa, e de valor  $p = (1 + \theta)\mu$ , então:

$$\gamma = \frac{2\theta \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N]}{\text{Var}[X] \mathbb{E}[N] + [\mathbb{E}(X)]^2 \text{Var}[N]}.$$

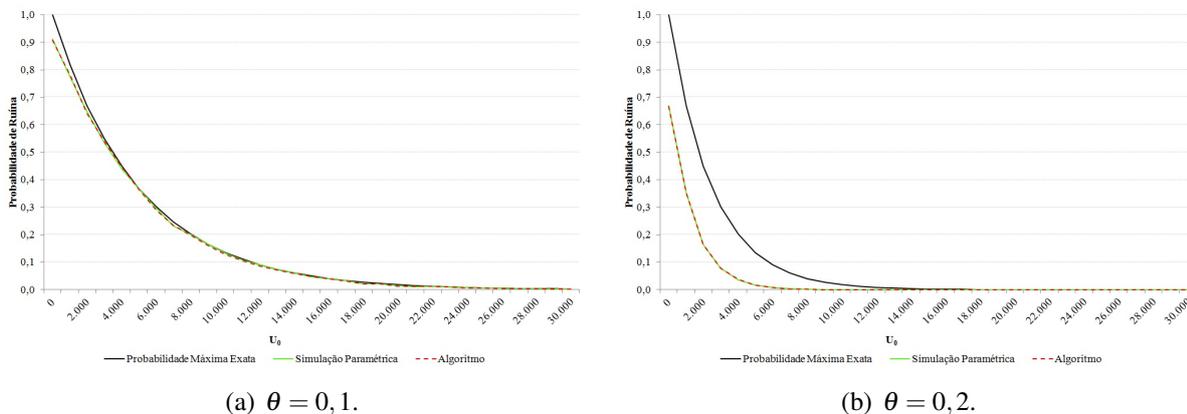
Infelizmente já nesta convolução clássica entre Poisson e Normal não é possível estabelecer exatamente o valor para o funcional, pois não há solução analítica que estabeleça diretamente o valor da probabilidade por meio do capital. Desta maneira, será verificado se o algoritmo encontra valores que respeitam a aproximação para seu limitante superior, dado por  $\psi(U_0) \leq e^{-\gamma U_0}$ . Se  $\theta = 0$ , então a aproximação sempre vale 1 e, portanto, ainda que possua comportamento exponen-

cialmente decrescente à medida que se aumente o valor do capital inicial, não é mais uma medida informativa. Além disso, a relação do funcional é também monotônica e exponencialmente decrescente em relação a aumentos na taxa de carregamento  $\theta$ , de modo que é possível, portanto, comparar os comportamentos informativos (com valores menores de 1) das curvas adotando duas atribuições positivas distintos para este parâmetro.

Assim, para este estudo de simulação, fixou-se a taxa de carregamento em dois distintos valores  $\theta \in \{0,1; 0,2\}$ , além de suposto que  $N$  siga uma Poisson de parâmetro  $\lambda = 100$ , constante e  $X$  seja uma  $N(1000, 10^2)$ , independentes entre si, e com prêmios  $p = 100.000$  constantes. Com esses parâmetros, dois procedimentos foram executados:

1. supostas conhecidas as distribuições paramétricas e seus respectivos parâmetros, foram geradas 1.000 amostras independentes de horizonte 1.200 e estimadas as probabilidades de ruína, para cada nível de capital, e;
2. a partir dos dados gerados na simulação anterior, para cada amostra foi estimado um modelo VAR(1) bivariado<sup>1</sup> para os sinistros para que fosse aplicado o Algoritmo 1, com cada modelo gerando 1.000 trajetórias independentes como séries temporais para o processo de risco, também de horizonte 1.200.

Desta forma, tem-se os resultados nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b) a seguir.



**Figura 4.2:** Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidas pelo algoritmo com os valores exatos para o caso Poisson-Normal, em função de  $U_0$  e diferentes valores de  $\theta$ .

Para este estudo de simulação, em que a distribuição Poisson é convoluta com a Normal, é possível observar que os valores aferidos para o funcional a partir do algoritmo estão sempre dentro dos limites máximos estabelecidos pela aproximação teórica. Pela Figura 4.2(a) vê-se que a aproximação pela máxima probabilidade é bastante próxima dos valores obtidos pela aplicação do algoritmo. Já pela Figura 4.2(b), a curva que define o máximo valor possível da verdadeira probabilidade de ruína, embora informativa, fornece estimativas sempre muito mais conservadoras do que o algoritmo sugere, para todos os valores de capital inicial  $U_0$ , inclusive quando este montante é elevado (cauda à direita).

Assim, fica evidente a motivação de se escolher uma taxa de carregamento pequena (mas não zero): como o valor do coeficiente de ajuste  $\gamma$  é diretamente proporcional ao valor de  $\theta$ , maior seria

<sup>1</sup> como esperado pela ausência de estrutura de dependência entre os termos, todos os parâmetros do modelo foram estimados insignificantes, de modo que suas apresentações foram omitidas.

a probabilidade de incorrer em falência em caso de maiores valores de  $\theta$  e, por consequência, mais elevado ficaria o limitante superior, relativamente ao valor que seria exato. A implicação imediata é que tal limitante deixaria de ser uma medida informativa quanto maiores fossem as escolhas de  $\theta$ .

Finalmente, em ambas as situações, os resultados da aplicação do algoritmo foram muito aderentes aos valores da simulação paramétrica. Desta maneira, parece ser possível afirmar que a aproximação de séries temporais à agregação de microdados é adequada para a modelagem do fluxo de caixa agregado das entidades.

Na próxima seção, será analisado o comportamento das estimativas da probabilidade de ruína ao incorporar estrutura de dependência nas séries temporais, tanto para cada série em seu passado como entre as séries e seus passados.

### 4.3 Uma aplicação a dados simulados de um modelo VAR(1)

O objetivo desta seção é aplicar o método a dados simulados, gerados a partir de estruturas de dependência temporal controladas, com o objetivo de compreender de que maneira a inclusão de *drifts* (positivos ou negativos) incidem sobre a relação entre a alocação de capital inicial e o nível de probabilidade de ruína. Antes de proceder com a aplicação do métodos, serão retomadas algumas argumentações da Subseção 7.2 do Capítulo 3.

Relembrando, no contexto de séries temporais multivariadas, o processo de risco para avaliação da situação de solvência é definido como o vetor temporal  $\underline{M}_t = [C_t, B_t, Q_t, N_t]$  composto, respectivamente, pelo (i) prêmio individual médio, (ii) severidade individual média, (iii) tamanho total da carteira e (iv) frequência de sinistros incorridos, todos no instante  $t$ .

Neste procedimento de simulação, serão adotadas, especificamente, duas possíveis estruturas de dependências, que remetem às contribuições originais propostas por este trabalho (prêmios futuros adaptativos aos valores passados de sinistros e quantidades de apólices sinistradas dependentes do tamanho total da carteira de agentes segurados). Desta maneira, em função dos parâmetros matriciais, a primeira estrutura é  $B_{t-1} \rightarrow C_t \Leftrightarrow \phi_{12} \neq 0$ , representando a adaptação dos prêmios individuais no presente às variações passadas nas severidades individuais. A segunda, denota a variação do tamanho do portfólio de segurados sobre a quantidade de sinistros ocorridos, que em função dos parâmetros,  $Q_{t-1} \rightarrow N_t \Leftrightarrow \phi_{43} \neq 0$ .

Desta maneira, a nova matriz  $\Phi$  (explicitada pela Equação 3.12) fica dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

Nesta situação, atribuindo as matrizes das Equações 4.3 e 3.6 ao processo de risco 3.5, a variação esperada no processo de risco é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[U_t - U_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= \underline{M}_t \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}'_t = \\
 &= (1 + \theta) \phi_{11} \phi_{33} C_{t-1} Q_{t-1} + \\
 &+ B_{t-1} \{ Q_{t-1} [(1 + \theta) \phi_{33} \phi_{12} - \phi_{22} \phi_{43}] - \phi_{22} \phi_{44} N_{t-1} \}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Cumpra-se notar que a alteração de inclinação esperada deste processo de risco está expresso diretamente pelo termo  $Q_{t-1} [(1 + \theta) \phi_{33} \phi_{12} - \phi_{22} \phi_{43}]$ , cujo sinal dependerá diretamente dos termos entre colchetes. Se  $(1 + \theta) \phi_{33} \phi_{12} > \phi_{22} \phi_{43}$ , o efeito resultante sobre o processo de risco é positivo, sugerindo que as trajetórias terão um *drift* positivo, o que implica uma tendência **menor** de o processo entrar em ruína. Caso contrário, haverá um agravamento da probabilidade de ruína. Ambas as situações decorrem do fato de que todas as quantidades aleatórias são não negativas.

Já a variância será:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \sigma^2 (\underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L} \underline{L}' \underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1} + \underline{M}_{t-1} \underline{\Phi}' \underline{L}' \underline{L} \underline{\Phi} \underline{M}'_{t-1}) + \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2] = \\
 &= \sigma^2 (1 + \theta)^2 [(\phi_{11} C_{t-1} + \phi_{12} B_{t-1})^2] + \sigma^2 (1 + \theta)^2 (\phi_{33} Q_{t-1})^2 + \\
 &+ \sigma^2 [(\phi_{43} Q_{t-1} + \phi_{44} N_{t-1})^2] + \sigma^2 (\phi_{22} B_{t-1})^2 + \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2] = \\
 &= \sigma^2 (1 + \theta)^2 [(\phi_{11} C_{t-1} + \phi_{12} B_{t-1})^2 + (\phi_{33} Q_{t-1})^2] + \\
 &+ \sigma^2 [(\phi_{43} Q_{t-1} + \phi_{44} N_{t-1})^2 + (\phi_{22} B_{t-1})^2] + \sigma^4 [\theta^2 + 2\theta + 2].
 \end{aligned}$$

Note que o efeito das causalidades de Granger na variância do processo de ruína é quadrático, amplificando os valores exatamente nas componentes em que se observa as estruturas de dependência. No caso de  $\phi_{12}$ , é o valor individual do sinistro ( $B_t$ ) que aumenta o valor resultante do termo de variância associado ao prêmio individual ( $C_t$ ), o que confere credibilidade ao resultado uma vez que de fato foi imposto o reajuste de prêmios em função dos valores observados de sinistros. Portanto, é bastante intuitivo que aumentos nas severidades estejam associados a aumentos das amplitudes das trajetórias.

Algo similar pode ser conferido ao parâmetro  $\phi_{43}$ , que expressa a dependência entre o tamanho do portfólio ( $Q_t$ ) e a frequência com que ocorrem os sinistros ( $N_t$ ): caso haja dependência entre essas duas variáveis, variações na quantidade de segurados farão com que as trajetórias do processo de ruína possam incorrer em maiores possibilidades de valores.

Todavia, deste fato há duas questões a serem avaliadas: sinais e magnitudes. Tome-se, por exemplo, a relação entre os prêmios (o outro caso, das quantidades, é análogo). No termo  $(\phi_{11} C_{t-1} + \phi_{12} B_{t-1})^2$ , por ser uma função quadrática e a firma não ser iniciante (o que implica que tanto  $C_{t-1}$  quanto  $B_{t-1}$  são estritamente positivos), o ponto de menor valor é atingido zero quando ambos os parâmetros  $\phi_{11} = \phi_{12} = 0$ . Em todo outro qualquer caso, os termos não se anulariam, podendo aumentar a variância do processo de risco.

Porém, é importante ressaltar que dificilmente em casos práticos ter-se-ia valores negativos para esses parâmetros autorregressivos, por não terem embasamento teórico para eles. Ou seriam estimados como zero ou em suas proximidades.

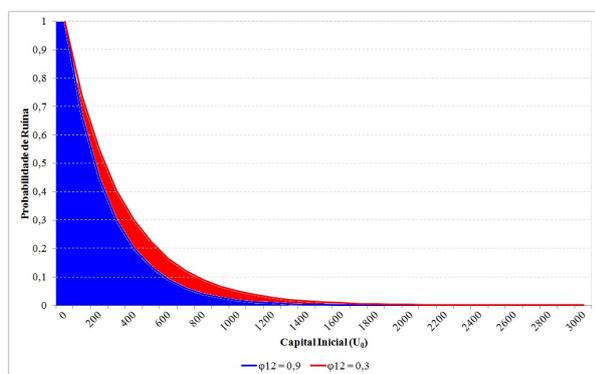
Como foi demonstrado pelo Teorema 3.1, são as características martingais que definem se haverá limite superior ou inferior das curvas exponenciais que relacionam o capital de solvência e a probabilidade de ruína. E, pelo fato de ambas possuírem forma funcional  $e^{-\gamma U_0}$ , elas possuirão delimitação por um decaimento mais ou menos acentuado, a depender do valor do coeficiente de

ajuste. E que se note que o coeficiente de ajuste  $\gamma$  é diferente para cada situação.

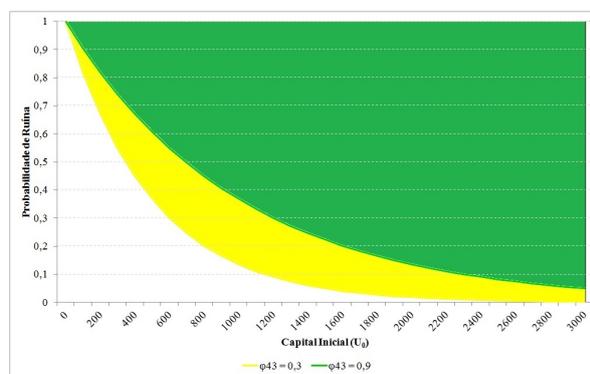
Algo similar acontecerá com um processo de risco com dependência temporal como este avaliado nesta seção. Tome-se como exemplo processo de risco sujeito a uma estrutura de dependência multivariada VAR(1), conforme descrito pela Equação 4.3. Nesta estrutura do processo, o sinal do termo  $(1 + \theta)\phi_{33}\phi_{12} - \phi_{22}\phi_{43}$  definirá se o processo será submartingal (se positivo) ou supermartingal (caso seja negativo). Particularmente, suponha que  $\phi_{33} = \phi_{22} \neq 0$ , de modo que a comparação seja direta nos termos de causalidade de Granger.

Assim, considere dois processos submartingais (que apresentarão, segundo o Teorema 3.1, limites inferiores para a probabilidade de ruína, em função do capital inicial), ambos com tendência positiva de crescimento do processo original. Admita que o primeiro possua uma tendência de crescimento menos forte ( $\phi_{12} = 0,3$ , com  $\phi_{43} = 0$  e coeficiente de ajuste  $\gamma_1$ ) e outro, possua uma tendência de crescimento mais forte ( $\phi_{12} = 0,9$ , com  $\phi_{43} = 0$  e coeficiente de ajuste  $\gamma_2$ ). Assim, necessariamente  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Por outro lado, considere dois processos supermartingais (que apresentarão, segundo o Teorema 3.1, limites superiores para a probabilidade de ruína, em função do capital inicial), ambos com tendência de diminuição da reserva no processo original. Admita que o primeiro possua uma tendência menos forte ( $\phi_{43} = 0,3$ , com  $\phi_{12} = 0$  e coeficiente de ajuste  $\gamma_3$ ) e outro, possua uma tendência mais forte ( $\phi_{43} = 0,9$ , com  $\phi_{12} = 0$  e coeficiente de ajuste  $\gamma_4$ ). Também, necessariamente,  $\gamma_3 > \gamma_4$ .

Pelo fato de todo processo de risco submartingal possuir menor tendência de incorrer em ruína, tem-se que  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \gamma_4$ . Desta maneira, também a título de ilustração, admita uma sequência que respeite esta condição:  $\gamma_1 = 0,004$ ,  $\gamma_2 = 0,003$ ,  $\gamma_3 = 0,002$  e  $\gamma_4 = 0,001$ . As Figuras 4.3(a) e 4.3(b) a seguir apresentam os efeitos das características martingais do processo de risco multivariado nos limites da relação entre a probabilidade de ruína e o nível inicial de reserva.



(a) Processos de risco submartingais.



(b) Processos de risco supermartingais.

**Figura 4.3:** Comparação dos limites máximos e mínimos da probabilidades de ruína em função de  $U_0$ , em processos de risco submartingais e supermartingais.

Como é possível notar pelo Figura 4.3(a), processos de risco submartingais com tendências de crescimento de capital mais fortes podem ter redução na probabilidade de ruína quando comparados àqueles com tendências menores, para um mesmo nível de capital inicial  $U_0$  (a redução do limite inferior denota uma restrição na região de possibilidades de abrangência de novas curvas, e está representada pela área vermelha). Compreende-se haver uma rotação no sentido horário do limite inferior da relação entre a probabilidade de ruína e o nível inicial de reserva quanto mais forte for a tendência no processo original.

Já pela Figura 4.3(b), percebe-se que processos com características supermartingais com ten-

dências mais fortes de redução de capital ao longo do tempo podem ter aumentos na probabilidade de ruína quando comparados àqueles com tendências menores, para um mesmo nível de capital inicial  $U_0$  (este aumento do limite superior denota uma restrição na região de possibilidades de abrangência de novas curvas, e está representada pela área amarela). Neste caso, é possível afirmar que ocorre uma rotação no sentido anti-horário do limite superior da relação entre a probabilidade de ruína e o nível inicial de reserva quanto mais forte for a tendência no processo original.

É importante verificar que os limites máximos e mínimos da probabilidade de ruína costumam ser não informativos para níveis baixos de capital inicial, pois sempre estão próximos do máximo. Porém, trata-se de uma informação relevante para níveis mais altos de capital.

Para o estudo principal de simulação desta seção, que visa avaliar os efeitos das variações da estrutura temporal nas estimativas da probabilidade de ruína, são estipuladas as condições  $C_0 = N_0 = 100$  e  $B_0 = Q_0 = 1000$ , para que o valor esperado das variações futuras, dado o instante inicial, fosse zero em todas as simulações. Após essa definição, foram geradas 10.000 séries a partir de um VAR(1), cujas entradas da matriz  $\Phi$  de parâmetros fixos foram controladas como  $\phi_{ii} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ ,  $\phi_{12} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$  e  $\phi_{43} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , variando um por vez, mas avaliando os resultados dos processos gerados a partir de todas essas combinações de valores para os parâmetros  $\phi_{ii}$ ,  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$ .

Já os erros aleatórios foram supostos normalmente distribuídos, de média zero e matriz de covariâncias  $\text{diag}(10)$ , de modo que a variância de cada série fosse igual a 10 e todas as séries fossem independentes duas a duas, para que os efeitos da estrutura de dependência não sofressem eventuais distúrbios de correlações contemporâneas entre as séries.

Particularmente quando  $\phi_{ii} = \phi_{12} = \phi_{43} = 0$ , tem-se a situação em que se verifica ausência de estrutura de dependência, tanto com o próprio passado como das defasagens das demais séries. Esta situação representa o caso da independência, tradicional na literatura sobre o tema. A taxa de carregamento foi fixada  $\theta = 0$ , para que ela seja um fator irrelevante nos resultados gerados pelas simulações do modelo VAR. Por fim, foram estimadas também as probabilidades de ruína para o caso em que  $\phi_{ii} = 1$  e  $\phi_{12} = \phi_{43} = 0$  desempenham o caso da raiz unitária multivariada (sistema instável), de modo que seja possível a comparação de seus resultados extremos com os demais modelos de sistemas estáveis.

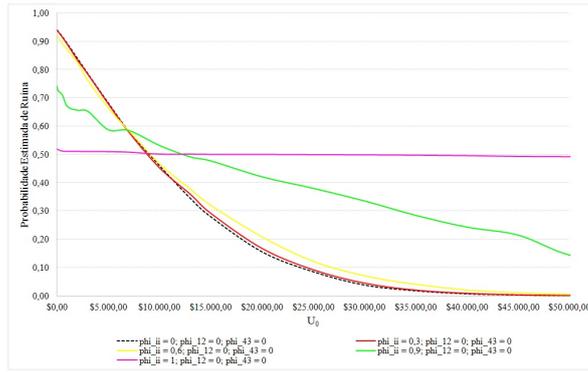
O procedimento do experimento controlado foi realizado nesta ordem:

1. inicialmente, o parâmetro que sofre variação é a diagonal principal  $\phi_{ii}$  (a memória de cada série), tendo os demais fixos (Figuras 4.4(a) a 4.4(g));
2. o parâmetro que sofre variação é a força de adaptação dos prêmios individuais pelas severidades  $\phi_{12}$ , em função da memória autorregressiva de cada série ( $\phi_{ii}$ ), ignorando a dependência entre as quantidades de sinistros ocorridos e tamanho do portfólio, isto é:  $\phi_{43} = 0$  (Figuras 4.5(a) a 4.5(d));
3. o contrário do anterior: agora o parâmetro que sofre variação é a dependência entre as quantidades de sinistros ocorridos e tamanho do portfólio  $\phi_{43}$ , em função da memória autorregressiva de cada série ( $\phi_{ii}$ ), ignorando a força de adaptação dos prêmios individuais pelas severidades, isto é:  $\phi_{12} = 0$  (Figuras 4.6(a) a 4.6(d)), e;
4. finalmente: controlando simultaneamente as variações dos parâmetros fora da diagonal principal ( $\phi_{12} = \phi_{43}$ ), em função da memória autorregressiva de cada série ( $\phi_{ii}$ ), de modo que o processo seja martingal (variações esperadas do processo de risco iguais a zero), mas com variância crescente (Figuras 4.7(a) a 4.7(d)).

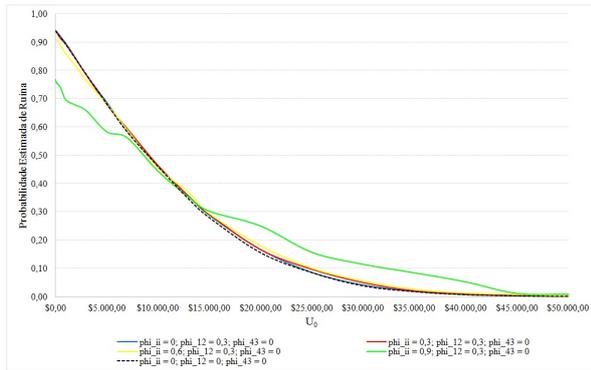
A seguir, os resultados obtidos por meio das simulações são apresentados graficamente<sup>2</sup>, de sorte que a comparação do efeito da variação na estrutura de dependência sobre a relação entre o capital inicial e a probabilidade de ruína seja facilitada.

---

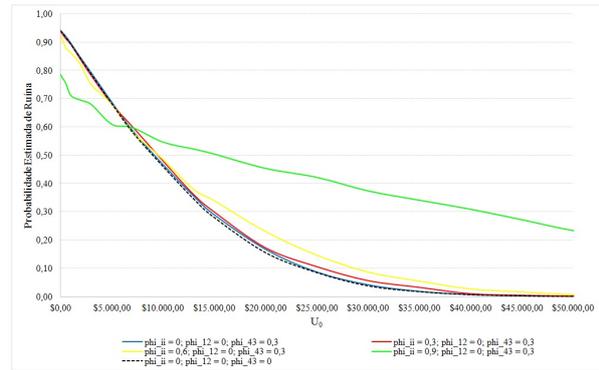
<sup>2</sup>Todos os valores exatos estimados para o funcional, bem como os seus erros-padrões associados, de todas as combinações paramétricas apresentadas constam nas tabelas do Apêndice C.



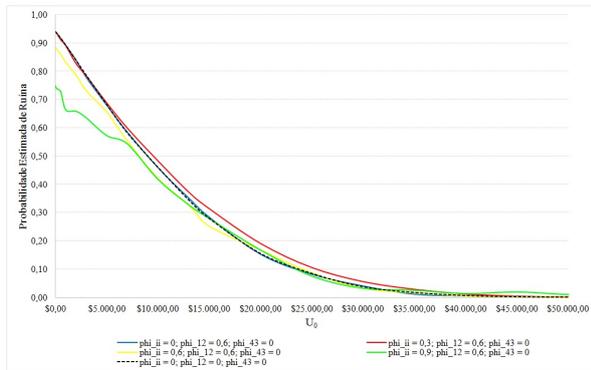
(a) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{12} = \phi_{43} = 0$ .



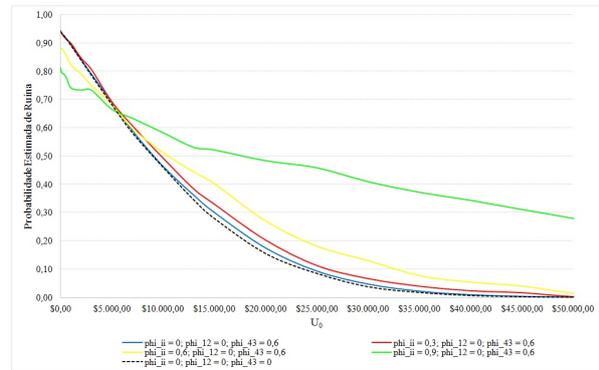
(b) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{12} = 0,3$  e  $\phi_{43} = 0$ .



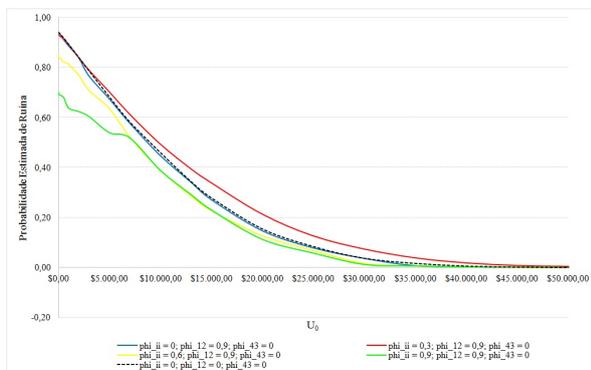
(c) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{43} = 0,3$  e  $\phi_{12} = 0$ .



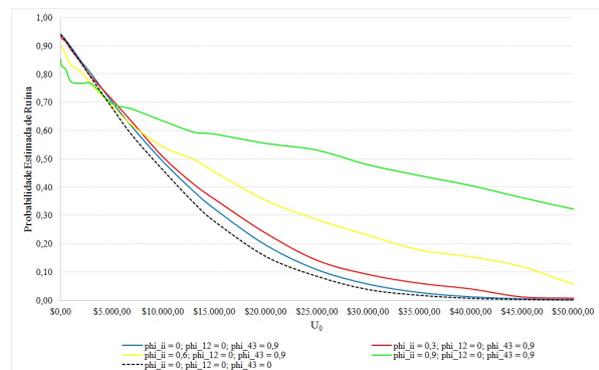
(d) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{12} = 0,6$  e  $\phi_{43} = 0$ .



(e) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{43} = 0,6$  e  $\phi_{12} = 0$ .

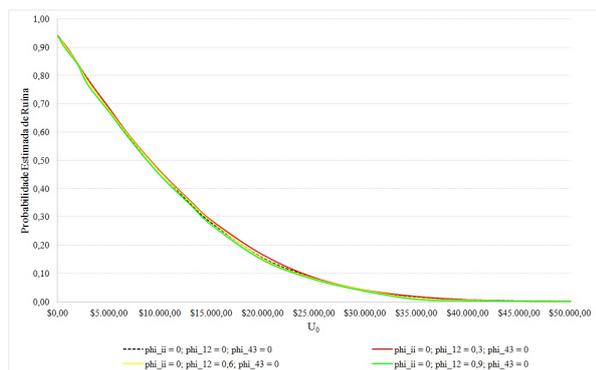


(f) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{12} = 0,9$  e  $\phi_{43} = 0$ .

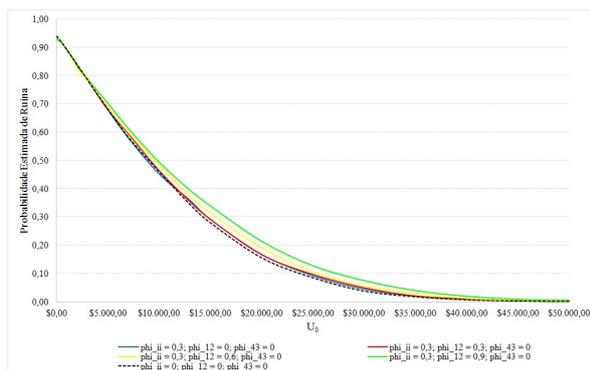


(g) Variando  $\phi_{ii}$ , fixando  $\phi_{43} = 0,9$  e  $\phi_{12} = 0$ .

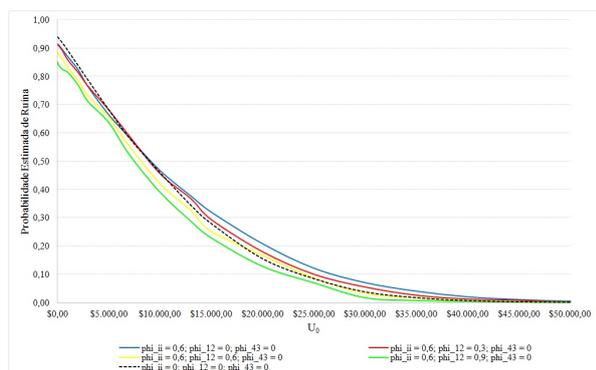
**Figura 4.4:** Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial  $U_0$ : variando  $\phi_{ii} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$ .



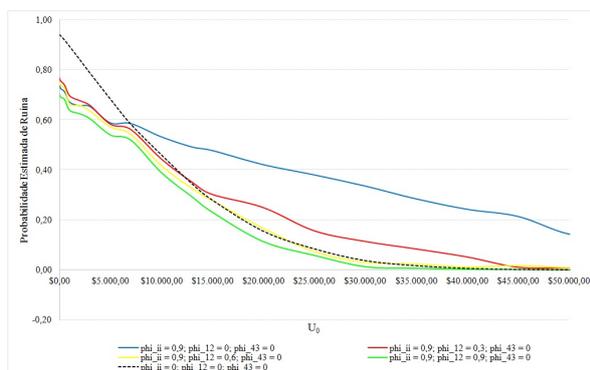
(a) Variando  $\phi_{12}$ , fixando  $\phi_{ii} = \phi_{43} = 0$ .



(b) Variando  $\phi_{12}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,3$  e  $\phi_{43} = 0$ .

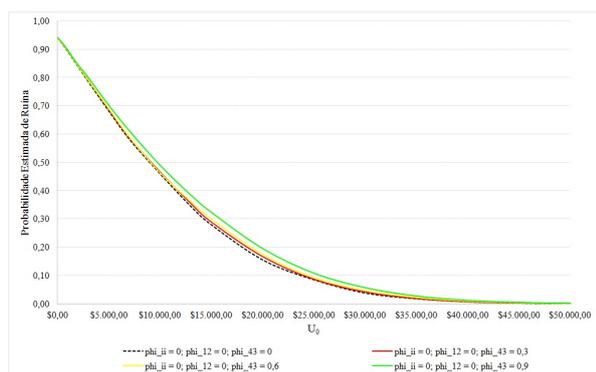


(c) Variando  $\phi_{12}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,6$  e  $\phi_{43} = 0$ .

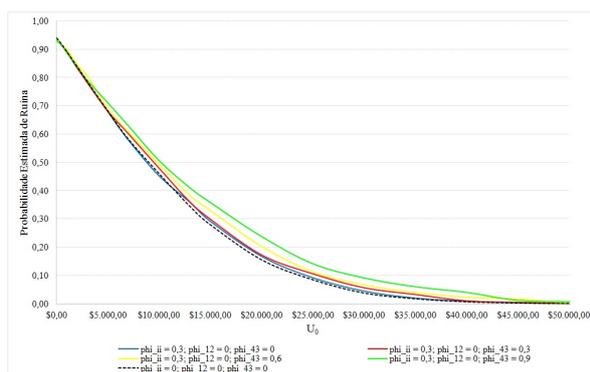


(d) Variando  $\phi_{12}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,9$  e  $\phi_{43} = 0$ .

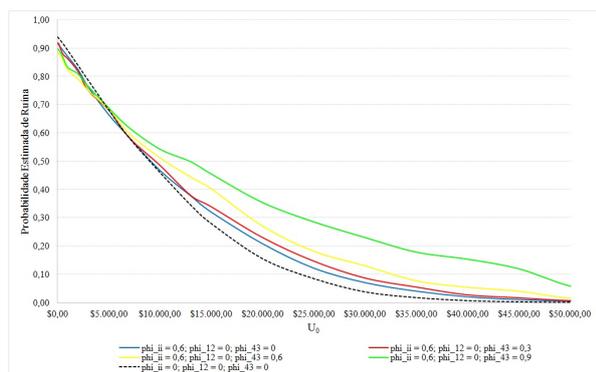
**Figura 4.5:** Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial  $U_0$ : variando  $\phi_{12} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de  $\phi_{ii}$ .



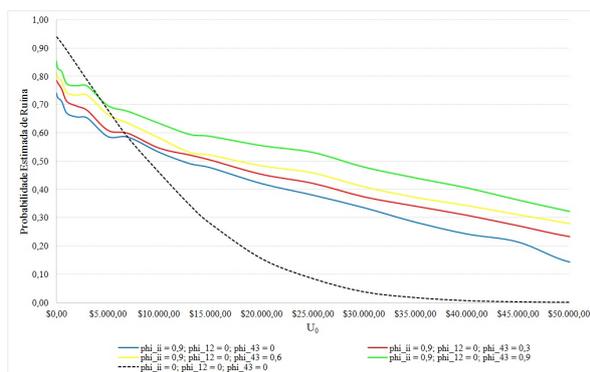
(a) Variando  $\phi_{43}$ , fixando  $\phi_{ii} = \phi_{12} = 0$ .



(b) Variando  $\phi_{43}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,3$  e  $\phi_{12} = 0$ .

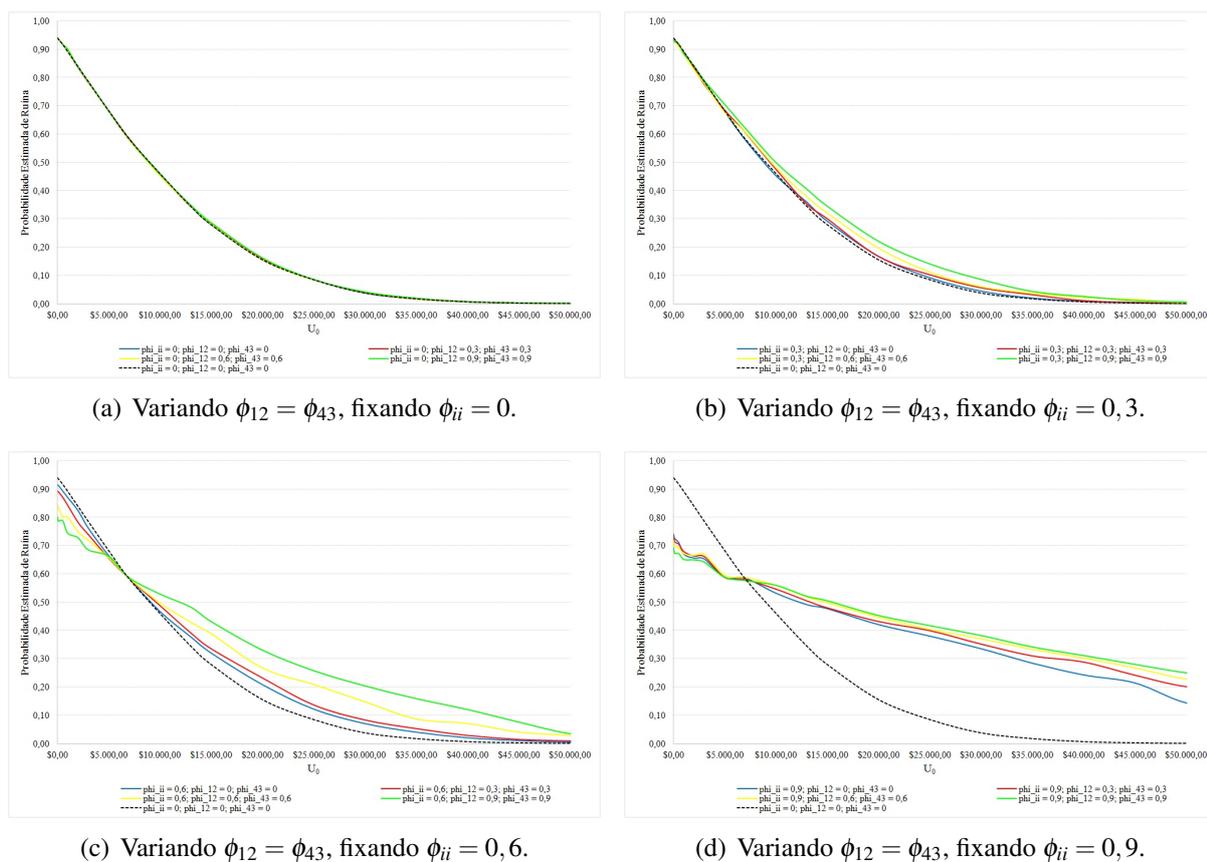


(c) Variando  $\phi_{43}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,6$  e  $\phi_{12} = 0$ .



(d) Variando  $\phi_{43}$ , fixando  $\phi_{ii} = 0,9$  e  $\phi_{12} = 0$ .

**Figura 4.6:** Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial  $U_0$ : variando  $\phi_{43} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de  $\phi_{ii}$ .



**Figura 4.7:** Comparação entre as curvas de probabilidade de ruína estimadas, em função do capital inicial  $U_0$ : variando  $\phi_{12} = \phi_{43} \in \{0, 0,3, 0,6, 0,9\}$ , em função de diferentes valores fixos de  $\phi_{ii}$ .

Faz-se, inicialmente, uma ressalva: pelo fato de não se ter solução analítica para o funcional da probabilidade de ruína, não é possível estabelecer seu verdadeiro valor, ainda que se trate da suposição de independência mútua entre as séries. Todavia, como o Algoritmo 1 possui boas propriedades de convergência do estimador para o verdadeiro valor (isto é, o procedimento de simulação computacional é capaz de revelar qual o verdadeiro valor, sem a necessidade de recorrer à formulação analítica) do funcional, pode-se considerar o resultado da simulação em que  $\Phi = \underline{0}$  como padrão comparativo dos demais experimentos.

Desta maneira, em todas as situações apresentadas nas Figuras 4.4(a) a 4.7(d) foi colocada a curva tracejada representando os resultados das simulações com a matriz  $\Phi = \underline{0}$ . Quando a matriz autorregressiva é nula, tem-se um processo puramente aleatório e sem qualquer estrutura de causalidade no sentido de Granger entre as séries. Essa situação é a única dentre todas as outras possíveis considerações, uma vez que se trata de um processo martingal por definição. Além disso, como  $\phi_{ii} = 0$ , isto é, nenhuma série possui memória autorregressiva, tem-se um processo puramente aleatório com a menor variância possível. Isso significa serem raras as vezes em que o processo consegue livrar-se da ruína com baixo volume de capital  $U_0$ . Além disso, uma vez que o montante de capital inicial é grande, pela baixa variância do processo, também serão raras as vezes em que o processo atingirá a ruína, sendo muito provável ficar oscilando em torno de  $U_0$ .

Já no outro extremo (isto é, a matriz  $\Phi = \underline{I}$ ), tem-se um processo derivado de séries com raízes unitárias, indicando um sistema instável, e, portanto, de "diferença martingal". Esta situação está representada na Figura 4.4(a). Uma vez que se supôs equilíbrio inicial entre receitas e despesas, o processo é similar a uma moeda honesta que, independentemente do nível de capital inicial, com probabilidade 0,5 a entidade irá à falência. Este resultado é razoável, uma vez que a variância do

processo torna-se elevada e, ainda que se verifique crescimento de capital, a magnitude de uma eventual redução também é elevada.

Em linhas gerais, variações no parâmetro  $\phi_{ii}$  combinados com altos valores de  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  são as que mais afetam o comportamento exponencialmente decrescente esperado da relação entre capital inicial e probabilidade de ruína. Este fato é esperado porque, como mostra a Equação 4.4, os parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  possuem efeitos multiplicativos com  $\phi_{ii}$ .

Por meio das Figuras 4.4(a) a 4.7(d) é possível verificar em todas as situações, ocorre o esperado: quanto maior for a reserva de capital alocada pela firma, menor a probabilidade de ruína, com decaimento exponencial. Este resultado é esperado de acordo com o Teorema 3.1 e com os resultados de vários trabalhos aplicados já citados. Entretanto, os efeitos começam ficar difusos quando se analisa a variação dos parâmetros  $\phi_{ii}$ ,  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$ . O motivo é que, de acordo com as derivações obtidas para as expectativas de variação, caso  $\phi_{12} > \phi_{43}$ , tem-se um "drift" positivo para o processo de risco (porque o processo de risco é submartingal), o que tenderia a gerar menor probabilidade de ruína. Claro que se  $\phi_{12} < \phi_{43}$ , então o processo é supermartingal, agravando a probabilidade de ruína.

Contudo, tais resultados não são necessariamente monotônicos porque essas variações na tendência do processo de risco estão sempre associadas a aumentos de sua variância, que sempre aumenta conforme se aumentam os parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$ . Desta maneira, é possível que processos supermartingais tendam a incorrerem em mais ruínas. Por outro lado, trajetórias submartingais tenderiam a subir ainda mais e se afastar da possibilidade de ruína. O contrário também poderia acontecer: algumas trajetórias supermartingais poderiam livrar-se da situação de ruína, bem como algumas trajetórias submartingais serem atraídas para a falência. As evidências empíricas para este comentário podem ser verificadas pelos maiores valores nos erros-padrões das estimativas obtidas quando se compara os resultados em que os parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  assumem valores positivos com a situação em que ambos são iguais a zero. Essas Tabelas C.5 a C.8 estão no Apêndice C.

Não deixa de ser interessante reparar que esses efeitos funcionam da mesma maneira que fora evidenciado pelas Figuras 4.3(a) e 4.3(b).

A partir das Figuras 4.5(a) a 4.5(d), é possível ver que as probabilidades de ruína são mais sensíveis às variações de  $\phi_{12}$  são quanto mais se aumentar os valores de  $\phi_{ii}$ . E essa variação é um pouco difusa, causada pelo aumento da variância do processo de risco: para valores pequenos de  $\phi_{ii}$ , há agravamentos na probabilidade de ruína para todos os "drifts" positivos no processo. Já em valores mais elevados de  $\phi_{ii}$ , se  $\phi_{12}$  for alto (forte "drift" positivo no processo), então a probabilidade de ruína fica mais baixa que no caso martingal; se  $\phi_{12}$  for baixo (leve "drift" positivo no processo), então a probabilidade de ruína fica mais alta que no caso martingal.

Por outro lado, observa-se pelas Figuras 4.6(a) a 4.6(d) um efeito bastante claro na curva que descreve a relação entre a probabilidade de ruína de um processo de risco multivariado e o seu capital inicial: aumentos no parâmetro  $\phi_{43}$  (com  $\phi_{12} = 0$ ), indicando "drifts" cada vez mais negativos, causam rotação na curva em sentido anti-horário mais fortes quanto maiores forem os parâmetros  $\phi_{ii}$ , se comparado ao caso martingal.

Cabe lembrar que, desde que  $\phi_{12} = \phi_{43}$  e escolhas de  $\phi_{ii}$  iguais para todo  $i$ , também tornam o processo martingal. Assim, a Figura 4.7(a) evidencia o cancelamento de qualquer efeito de "drift" na probabilidade de ruína. A grande diferença entre os processos está em suas variâncias, que são tão maiores quanto mais elevados forem os valores dos parâmetros e isso agrava sensivelmente a probabilidade de ruína quanto maiores forem os valores atribuídos para  $\phi_{ii}$ . Particularmente quando se adota  $\phi_{ii} = 0,9$ , são verificadas as maiores disparidades entre os comportamentos das curvas e o processo martingal (Figuras 4.7(b), 4.7(c) e 4.7(d)).

Este efeito de agravamento na probabilidade de ruína em maiores níveis de capital (gerado por uma rotação da curva de relação entre a probabilidade de ruína e capital inicial em sentido anti-horário) é causado pela estrutura de dependência entre os autovetores da matriz  $\Phi$ : quando a diagonal principal é nula ( $\phi_{ii} = 0$ ), todos os autovalores são igualmente nulos. Destaca-se que, pela construção do exemplo, os autovalores assumem um (e apenas um) valor dentro do conjunto  $\{0; 0, 3; 0, 6; 0, 9; 1\}$  e sempre com multiplicidade algébrica 4. Quando os elementos fora da diagonal principal  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  são iguais a zero, a multiplicidade geométrica também é 4, ao passo que se exatamente um deles for diferente de zero, tem-se multiplicidade geométrica igual a 3. Finalmente, se ambos forem diferentes de zero, a multiplicidade geométrica é 2. Nesses casos em que a multiplicidade geométrica é menor que a multiplicidade algébrica, não é possível encontrar autovetores linearmente independentes, o que implica dependência entre as dimensões.

Deste modo, quanto mais longe de zero estiverem os elementos autorregressivos  $\phi_{ii}$ , maiores serão os autovalores e, portanto,  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  causam maiores os efeitos na estrutura de dependência entre as dimensões do modelo e, como decorrência, mais afetam as probabilidades de ruína, cada um a seu modo ( $\phi_{12}$  tende a reduzi-la pelo *drift* positivo e  $\phi_{43}$  tende a agravá-la pelo seu *drift* negativo). Trata-se de uma verificação atípica, mas interessante, para funcionais derivados de processos com dependência, uma vez que geralmente em aplicações matemáticas de Álgebra Linear, as matrizes de rotação e cisalhamento<sup>3</sup> são aplicadas diretamente sobre os objetos a serem modelados. Resumidamente, neste contexto tem-se uma evidência do efeito causado no funcional pela inclusão de uma estrutura dependência entre as dimensões formadoras do processo de risco.

Como decorrência, é possível dimensionar um limite de corte na cauda à direita, a partir da realização de testes das hipóteses dadas pela Equação 3.3, que considera tanto as estimativas obtidas para a probabilidade de ruína como também seus erros-padrões associados. A título do exemplo para avaliar o efeito sobre a cauda à direita da relação do funcional da probabilidade de ruína com o capital inicial, fixou-se um nível de probabilidade arbitrária de 10%, apenas para que fosse possível observar diferenças nos níveis de  $U_0$  decorrentes de diferentes valores na estrutura de dependência das séries. Tal nível foi escolhido porque a maioria das curvas (exceção feita aos casos mais graves de *drifts* negativos) atinge este patamar para níveis moderados de capital inicial. Embora qualquer outro valor pudesse ter sido utilizado do boreliano  $[0, 1]$ , a grande quantidade de dimensões envolvidas no problema inviabilizaria qualquer análise, inclusive gráfica.

Para apresentar o efeito do dimensionamento de capital no particular exemplo de teste de hipóteses definido no parágrafo anterior, as Tabelas C.9 a C.12, constantes no Apêndice C, apresentam os resultados dos testes  $H_0 : \psi(U_0, t_+) = 0, 10$  contra  $H_1 : \psi(U_0, t_+) < 0, 10$ . Com elas, é possível notar que a decisão de aceitação e rejeição difere bastante, a depender do grau de dependência entre os termos. Se  $\phi_{ii} = \phi_{12} = \phi_{43} = 0$  (o cenário básico), o valor de capital  $U_0$  deveria ser igual a R\$ 25.000,00. Tomando por base o cenário em que  $\phi_{ii} = 0, 6$  (Tabela C.11, sendo todos os demais análogos), o nível  $U_0$  aumenta para R\$ 30.000,00 com leve *drift* positivo de  $\phi_{12} = 0, 3$  e  $\phi_{43} = 0$  (o aumento é causado pela maior variância do processo de risco, ainda que o processo seja submartingal), mas o mesmo o nível  $U_0$  aumenta para R\$ 35.000,00 com leve *drift* negativo de  $\phi_{12} = 0$  e  $\phi_{43} = 0, 3$ . Quando o *drift* positivo é mais forte  $\phi_{12} = 0, 9$  ( $\phi_{43} = 0$ ),  $U_0$  é reduzido para R\$ 20.000, ao passo que verificando um expressivo *drift* negativo  $\phi_{43} = 0, 9$  ( $\phi_{12} = 0$ ), tem-se uma ampliação de  $U_0$  para R\$ 50.000,00.

Todos esses efeitos são consequências imediatas das mudanças nas curvaturas da relação entre

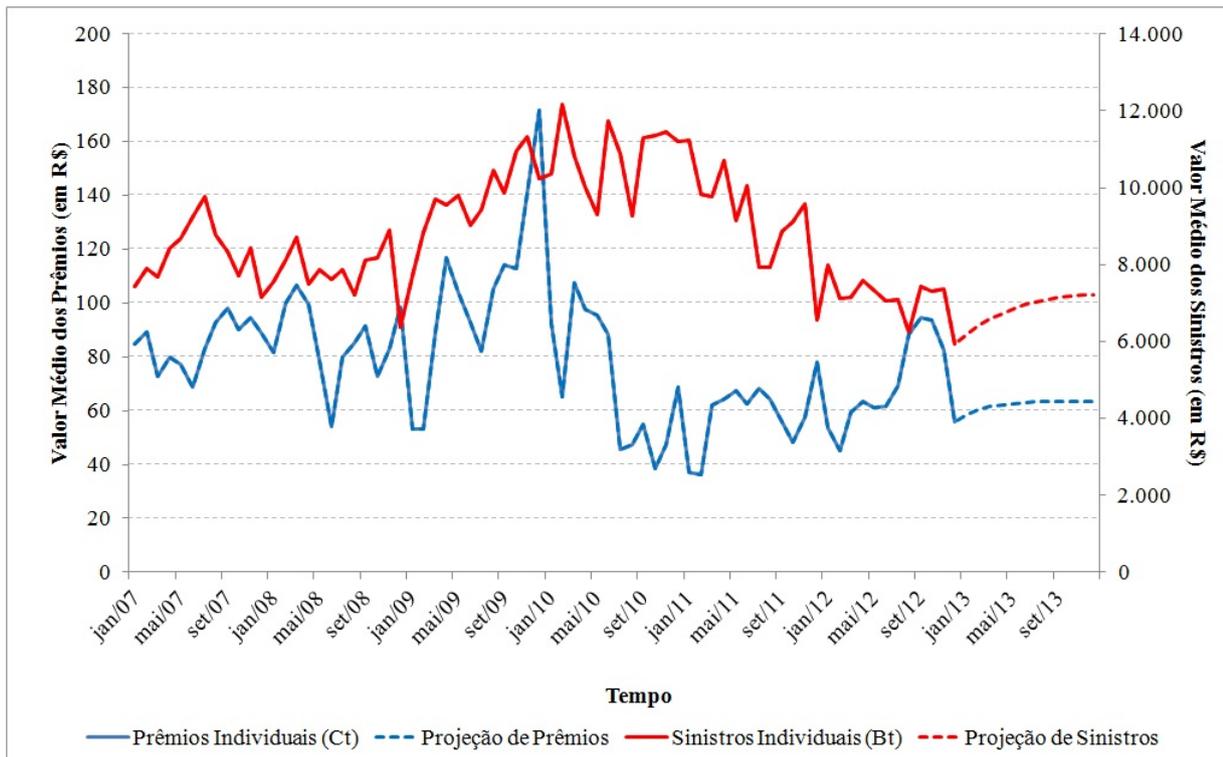
<sup>3</sup>Dá-se o nome de *cisalhamento* ao efeito de uma transformação linear, associada a uma matriz, sobre um vetor qualquer que produza o efeito de se projetar imagens similares sobrepostas em camadas, adicionando múltiplos de uma linha ou coluna para outra. Tal efeito ocorre quando há autovalores repetidos, isto é: quando se trata de matrizes diagonais, com um ou mais elementos fora da diagonal principal diferentes de zero.

capital inicial e probabilidade de ruína, causadas pela mudança na estrutura de dependência entre as séries que compõem o processo de risco e serão observados qualquer que seja a escolha do nível de probabilidade de solvência de uma entidade. Assim, a depender da força da dependência entre os termos do modelo de risco, a alocação de capital de solvência poderia ser muito distinta, para qualquer que fosse a probabilidade de ruína desejada e previamente definida. Na próxima seção, será aplicada a metodologia a uma base de dados verdadeira, comparando os efeitos à legislação vigente de requerimento de capital legal e de solvência, baseado em risco de subscrição.

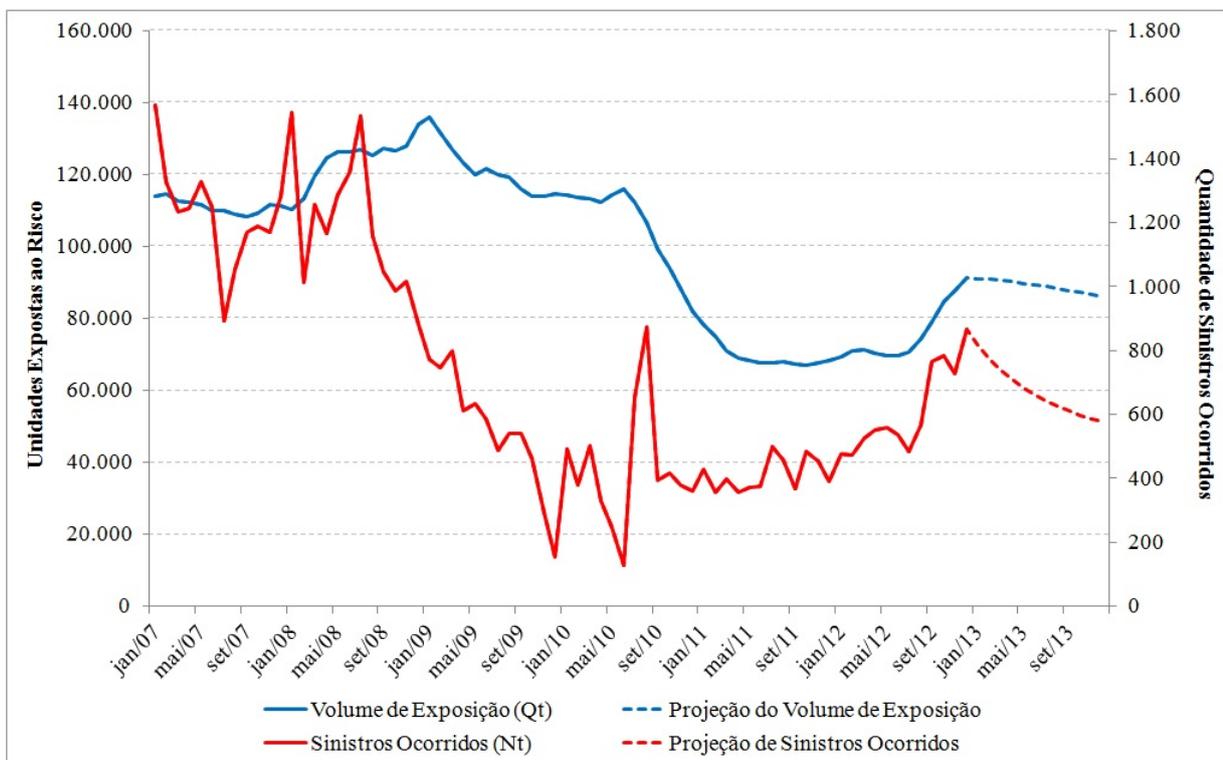
#### **4.4 Uma aplicação a um conjunto de dados reais do mercado brasileiro de seguros**

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos de uma companhia seguradora multinacional que opera no ramo de automóveis no Brasil, nas bases de dados de seguros da SUSEP (autarquia vinculada ao Ministério da Fazenda do Brasil, responsável por fiscalizar todo o mercado segurador). Desta base, foi possível extrair algumas variáveis endógenas relevantes para o estudo de simulação, medidas mensalmente entre os anos de 2007 e 2012, a saber: - Prêmios Individuais Retidos: montante médio de prêmios diretos pagos individualmente, extraídas as despesas com corretagem e repasses a congêneres ou resseguradoras; - Sinistros Individuais Retidos: volume financeiro individual que representa o efetivo dispêndio médio da seguradora com cada sinistro ocorrido. - Volume de Exposição: quantidade total de riscos individuais no período de análise; - Sinistros Ocorridos: quantidade de sinistros que geraram indenizações.

As séries temporais de cada variável são apresentadas pelas Figuras 4.8 e 4.9, a seguir. As linhas tracejadas em cada gráfico denotam as respectivas projeções de cada série em 12 meses futuros a partir do último instante de tempo com informação disponível, utilizando o modelo VAR(3) ajustado, cujos valores atribuídos aos parâmetros serão apresentados posteriormente. Primeiro será feita a análise descritiva das séries (com as projeções) e, em seguida, apresentados os modelos e os diagnósticos da qualidade dos ajustes.



**Figura 4.8:** Evolução dos valores médios de prêmios e sinistros individuais entre 2007 e 2012, com as respectivas projeções em 12 meses pelo modelo VAR(3).



**Figura 4.9:** Evolução das unidades de riscos expostas e de sinistros ocorridos entre 2007 e 2012, com as respectivas projeções em 12 meses pelo modelo VAR(3).

**Tabela 4.1:** Estatísticas descritivas de cada série de dados reais.

	$C_t$	$B_t$	$Q_t$	$N_t$
Média	78,72	8.842,57	101.263,58	736,00
Erro padrão	2,85	177,84	2.644,49	44,52
Mediana	79,96	8.733,51	111.433,50	575,50
Desvio padrão	24,21	1.509,01	22.439,21	377,79
Curtose	2,01	-0,81	-1,39	-0,86
Assimetria	0,82	0,30	-0,41	0,58
Mínimo	36,41	5.941,93	67.056	128
Máximo	171,65	12.175,78	135.896	1.568
Contagem	72	72	72	72

**Tabela 4.2:** Matriz de correlação da série observada de dados reais.

	$C_t$	$B_t$	$Q_t$	$N_t$
Prêmios Individuais ( $C_t$ )	1,0000	0,0425	0,4781	0,0939
Sinistros Individuais ( $B_t$ )	0,0425	1,0000	0,1007	-0,5013
Volume de Exposição ( $Q_t$ )	0,4781	0,1007	1,0000	0,5019
Sinistros Ocorridos ( $N_t$ )	0,0939	-0,5013	0,5019	1,0000

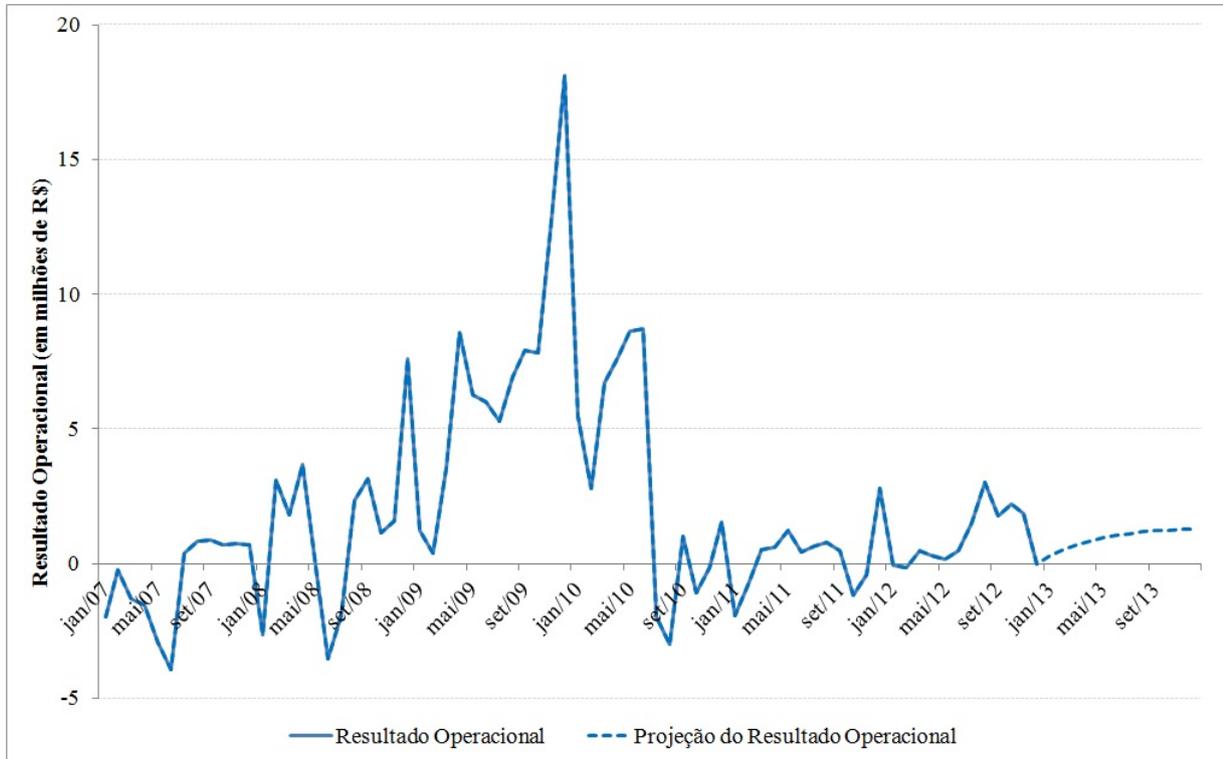
É possível observar, a partir das Figuras 4.8 e 4.9, que todas as características não são estacionárias, pois há claras e diferentes tendências de decrescimento conjunta na arrecadação de prêmios e na severidade de sinistros indenizados, motivados pela queda da quantidade de clientes na carteira e pela queda de sinistros ocorridos, especialmente entre os anos de 2008 e 2011. Em diferentes momentos é possível observar crescimento consistente nas séries (particularmente em prêmios e sinistros individuais, entre 2007 e 2008, além do final de 2012). Também há diversos momentos de aumento de variabilidade em determinados períodos, notadamente no ano de 2009. A partir do início de 2012, todas as variáveis em questão parecem experimentar nova tendência de crescimento, incluindo a quantidade de sinistros ocorridos.

Tudo isso fica evidente quando se compara com os resumos descritivos apresentados na Tabela 4.1, em que se verifica diferentes graus de assimetria e curtose, além de todas as séries apresentarem médias distantes das medianas, bem como apresentarem grande amplitude em seus valores.

As quantidades de unidades seguradas e de sinistros ocorridos possuem tendência geral de decrescimento, apesar de terem mudado a tendência nos últimos meses de 2012. Por isso, é esperado que haja, para os meses subsequentes, diminuição no nível de ambas as séries.

A respeito dos movimentos conjuntos das séries, a Tabela 4.2 evidencia numericamente que há variações coordenadas entre as observações. À exceção dos valores de prêmios e sinistros individuais, todas as demais possuem alguma conjunção importante, de modo que a estrutura de dependência deve ser levada em consideração quando se fizer as projeções das trajetórias subsequentes.

A Figura 4.10, a seguir, apresenta o resultado operacional do fluxo de caixa corrente, tanto o observado como o projetado, da seguradora neste ramo. Essa evolução foi obtida efetuando-se o cálculo do termo  $C_t Q_t - B_t N_t$ , de acordo com a Equação 3.5.



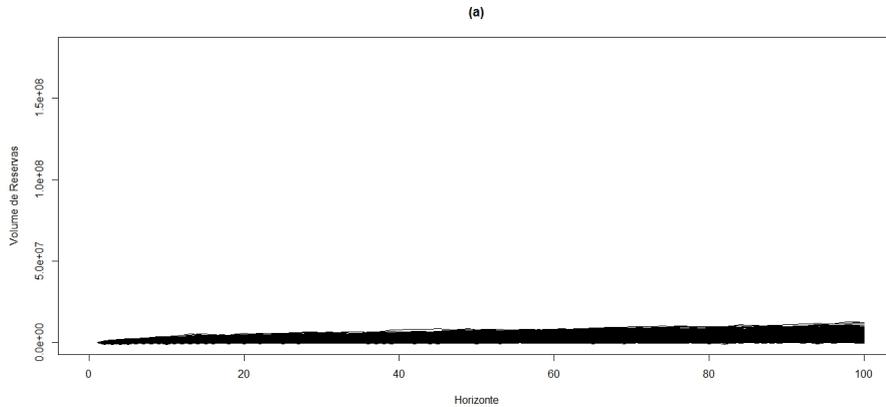
**Figura 4.10:** Evolução do fluxo de caixa corrente entre 2007 e 2012, com as projeções em 12 meses de acordo com o modelo VAR(3).

O fato mais importante a se destacar, particularmente com as informações da Figura 4.10, é que em diversos momentos (no começo de 2007 e em alguns meses de 2008, 2010, 2011 e 2012), o volume total de sinistros pagos excedeu o montante de arrecadações, o que poderia conduzir a entidade à falência caso não houvesse reservas suficientes para efetuar as indenizações. Ademais, no último instante da série observada, os valores de prêmios e sinistros praticamente coincidem, o que gera incerteza sobre o comportamento futuro das duas séries, inclusive a respeito da (in)solvência da firma e da probabilidade desse evento ocorrer. Como é possível perceber pela Figura 4.10, as projeções pontuais para a evolução do fluxo de caixa da entidade sugerem crescimento das reservas patrimoniais. Logo, trata-se de um processo multivariado de risco com características submartingais, isto é, com tendência de crescimento.

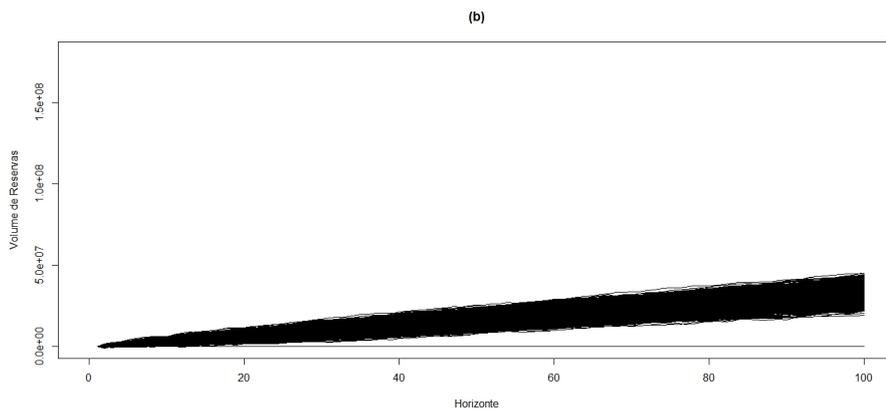
Contudo, é preciso avaliar a medida de variabilidade a respeito de seu futuro.

Para isto, foi realizado um primeiro estudo com esse conjunto de dados simulando 10.000 trajetórias de horizonte 100 para cada uma das séries temporais envolvidas, seguindo o procedimento descrito pela Equação 3.4, com o intuito de se observar apenas o efeito de crescimento causado pela taxa de carregamento. Todas as séries foram tratadas como estacionárias (isto é, livre de tendências) e sem qualquer memória, considerando a janela de tempo fixa do primeiro até o último dado disponível. Desta maneira, os valores que foram sorteados de cada variável aleatória são mutuamente independentes, supostos normais e seguem o padrão médio e de dispersão de todos os dados constantes na Tabela 4.1.

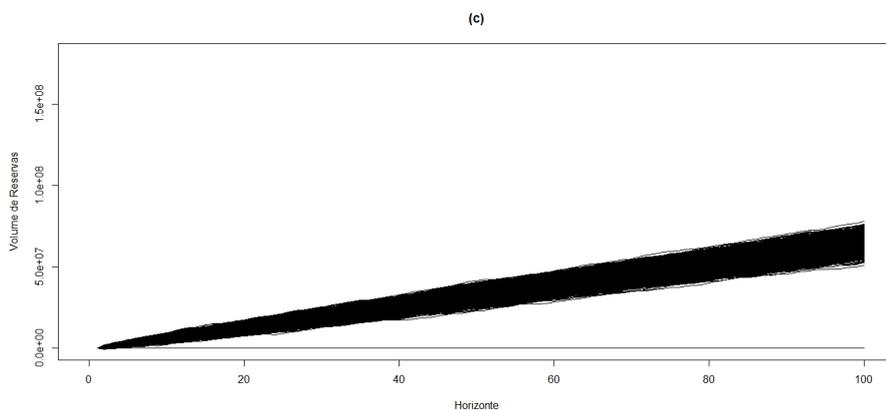
A seguir, na Figura 4.11 são apresentadas as trajetórias simuladas para três situações, todas com valores iniciais de reserva  $U_0 = 0$ : em (a) não há carregamentos sobre os prêmios; em (b) o carregamento  $\theta = 5\%$  e, em (c)  $\theta = 10\%$ .



(a)  $\theta = 0\%$ .



(b)  $\theta = 5\%$ .



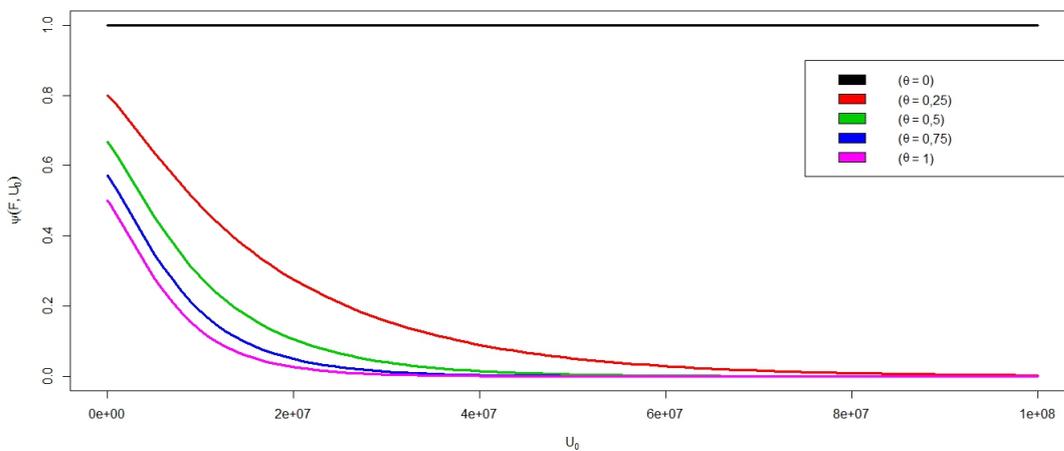
(c)  $\theta = 10\%$ .

**Figura 4.11:** 10.000 trajetórias temporais simuladas para as reservas considerando  $U_0 = 0$ , em função de  $\theta$ .

A partir da Figura 4.11, nota-se um comportamento cada vez mais crescente das reservas, quanto maior for o carregamento sobre o prêmio. Trata-se de um resultado esperado, uma vez que

acrescida a margem de oscilação de risco  $\theta$  sobre o prêmio, há mais recursos para arcar com eventuais desvios adversos dos sinistros. Assim como é possível observar que maiores carregamentos produzem um efeito de aumento das variâncias dos resultados futuros, para qualquer horizonte, uma vez que se observa mais trajetórias que não entraram em ruína. Para essas simulações, as probabilidades de ruína foram estimadas em 98% (tempo médio até a ruína:  $h = 1,2$ ), 91,4% (tempo médio até a ruína:  $h = 1,8$ ) e 87,71% (tempo médio até a ruína:  $h = 2,3$ ), respectivamente.

Considerando o mesmo conjunto de simulações, ainda seguindo o padrão médio e de dispersão de todas as séries apresentados na Tabela 4.1, o próximo passo é avaliar a sensibilidade da probabilidade de ruína ao se efetuar variações sobre os valores iniciais de reserva e também com diferentes níveis de carregamento. Os resultados são apresentados na Figura 4.12 a seguir.



**Figura 4.12:** Gráfico das probabilidades de ruína para diferentes valores de reserva  $U_0$  e de carregamento  $\theta$ .

A probabilidade de ruína, como já visto anteriormente, depende de  $U_0$  e  $\theta$ . Desta maneira, é natural que seja verificado o fato de que, sendo maior a reserva inicial, seja menor a necessidade de se atribuir altos carregamentos sobre o prêmio. A Figura 4.12 evidencia o comportamento exponencialmente decrescente da probabilidade de ruína em função da taxa de carregamento sobre os prêmios. Quando  $\theta = 0$ , é observada a ruína da seguradora com probabilidade 1 independente da reserva inicial, adotando um horizonte de tempo infinito. Este resultado é esperado, uma vez que sem o carregamento de oscilação de risco, a grande exposição da entidade é de insuficiência de arrecadação de recursos necessários para cobrir as indenizações.

É importante averiguar a ordem de memória do modelo VAR(p) a ser utilizado. O objetivo de qualquer critério de informação é minimizar o erro quadrático médio, utilizando o modelo mais parcimonioso possível, isto é, com a menor quantidade de parâmetros. Há diversas versões distintas desta métrica, sendo os mais comuns o AIC, HQ e BIC, conforme mostrado por Lütkepohl [2005]. O autor, na Proposição 4.3, argumenta que as ordens  $p$  de memória do processo multivariado sugeridas por estes diferentes critérios podem diferir, prova a consistência dos critérios HQ e BIC e mostra que o AIC assintoticamente tende a superestimar a verdadeira ordem com probabilidade positiva e mostra que:

$$\hat{p}(BIC) \leq \hat{p}(HQ) \leq \hat{p}(AIC),$$

para  $T \geq 16$ . Para este conjunto de dados, a Tabela 4.3 traz os valores estimados para cada critério.

**Tabela 4.3:** Critérios de seleção da ordem do modelo VAR ajustado ao conjunto de dados reais.

Critério	Ordem de defasagem				Escolha
	1	2	3	4	
AIC(n)	44,970	44,606	44,188	44,419	3
HQ(n)	45,289	45,138	44,932	45,375	3
BIC(n)	45,780	45,956	46,077	46,847	1

De acordo com a Tabela 4.3, percebe-se que há divergência entre as escolhas da ordem do modelo VAR a depender do critério utilizado. Segundo o critério HQ, a ordem deveria ser 3 e pelo critério BIC deveria ser adotada a ordem 1. O teste menos parcimonioso, como demonstra Lütkepohl [2005], é o AIC, que sugere a adoção da ordem 3. Desta maneira, optou-se por estimar as probabilidades de ruína tanto para o modelo com a ordem 1 como também para a ordem 3, de modo que seja possível comparar as diferenças de resultados oriundas da escolha da ordem de memória temporal dos modelos.

**Tabela 4.4:** Autovalores calculados do modelo VAR(1) ajustado aos dados reais.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0,9933	0,8598	0,8598	0,6253

**Tabela 4.5:** Autovalores calculados do modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0,9968	0,9302	0,9302	0,9062
$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
0,6690	0,6690	0,6018	0,6018
$\lambda_9$	$\lambda_{10}$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$
0,5133	0,5133	0,3358	$1,98 \times 10^{-16}$

De acordo com as Tabelas 4.4 e 4.5, os maiores autovalores estimados tanto para o sistema VAR(1) como do VAR(3) foram inferiores a um, indicando ambos os sistemas multivariados são estáveis no tempo.

Ajustados os modelos, serão avaliados os resíduos de cada um deles, de modo que se verifique a adequação do conjunto de premissas (Tabela 4.6) e também a estrutura de dependência dos resíduos (Tabela 4.7), além da qualidade do ajuste (Figuras 4.13(a)-4.13(d)). Isso será feito a seguir.

**Tabela 4.6:** Testes de verificação de premissas dos modelos VAR(1) e VAR(3) ajustado aos dados reais.

	VAR(1)		VAR(3)	
	Estatística de teste	p-valor	Estatística de teste	p-valor
Jarque-Bera	4,036	0,8539	4,998	0,7578
Assimetria	0,7976	0,9388	1,1813	0,8812
Curtose	3,2384	0,5187	5,3514	0,2531
Teste ARCH-LM	548,35	0,0664*	502,53	0,4598

\* Significante a 10%, \*\* Significante a 5%, \*\*\* Significante a 1%.

**Tabela 4.7:** Matriz de correlação dos resíduos do modelo VAR(1) ajustado aos dados reais.

	$C_t$	$B_t$	$Q_t$	$N_t$
$C_t$	1,0000	-0,1069	0,2577	-0,2582
$B_t$	-0,1069	1,0000	-0,2170	-0,1999
$Q_t$	0,2577	-0,2170	1,0000	0,0908
$N_t$	-0,2582	-0,1999	0,0908	1,0000

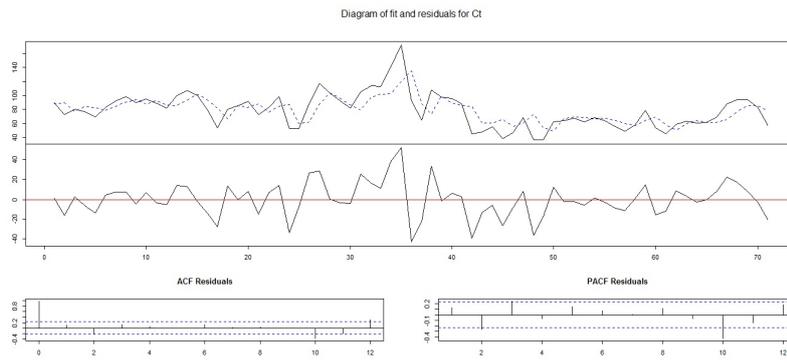
**Tabela 4.8:** Matriz de correlação dos resíduos do modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.

	$C_t$	$B_t$	$Q_t$	$N_t$
$C_t$	1,0000	-0,0385	0,4241	-0,2553
$B_t$	-0,0385	1,0000	-0,1547	-0,0914
$Q_t$	0,4241	-0,1547	1,0000	-0,1245
$N_t$	-0,2553	-0,0914	-0,1245	1,0000

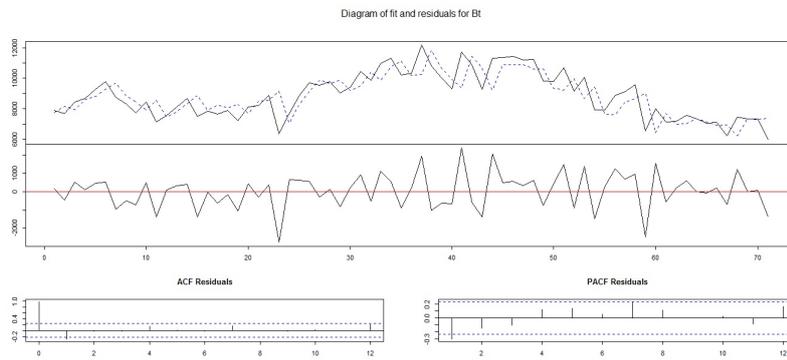
Pela Tabela 4.6 é possível afirmar que, com um nível de significância de 1%, os resíduos seguem uma distribuição Normal multivariada de média zero e matriz de covariâncias constante, tanto pelo modelo VAR(1) quanto pelo modelo VAR(3). Embora a um nível de 10% a variância dos resíduos do modelo VAR(1) possuam estrutura autorregressiva ao longo do tempo, ela será desprezada para o propósito da aplicação de maneira a permitir a comparação com os resultados obtidos com o modelo VAR(3), no qual tal estrutura não pôde ser detectada.

Já sobre as estruturas de correlação entre os resíduos do modelo apresentadas nas Tabelas 4.7 e 4.8, nota-se que houve uma redução da magnitude entre as dependências contemporâneas (exceção feita à relação entre  $C_t$  e  $Q_t$ ), mas os sinais permaneceram (à exceção da relação entre  $N_t$  e  $Q_t$ ). Isso ocorre pelo maior  $R^2$  quando da inclusão de mais parâmetros autorregressivos do modelo VAR(3).

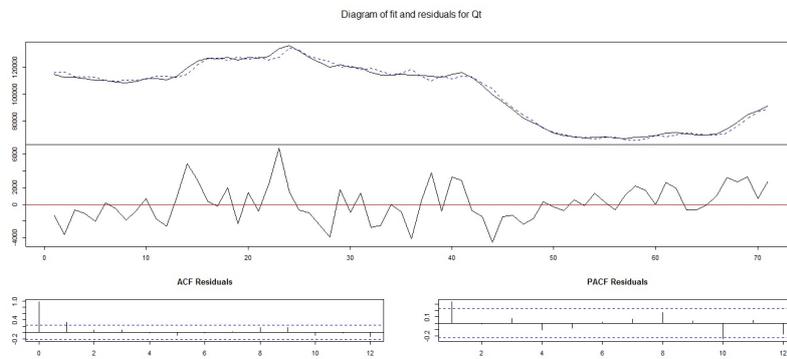
Deve-se ressaltar o fato de que o procedimento *bootstrap* pressupõe independência entre as trajetórias, mas respeita a estrutura de dependência contemporânea entre as observações multivariadas.



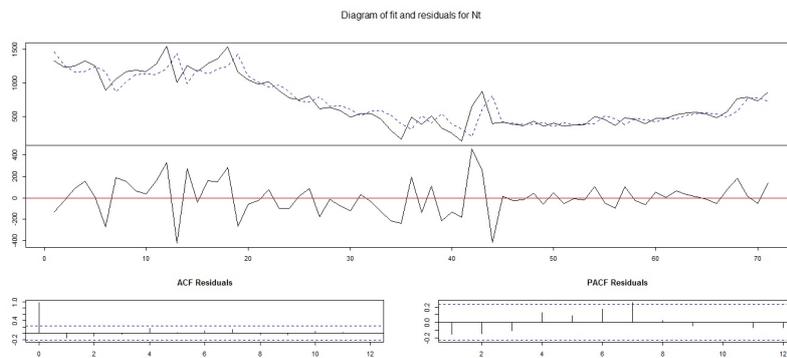
(a) Resíduos da série de prêmios individuais  $C_t$ .



(b) Resíduos da série de sinistros individuais  $B_t$ .

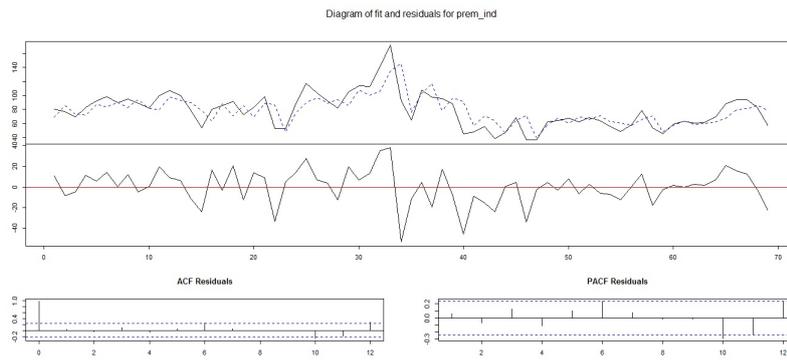


(c) Resíduos da série do tamanho total do portfólio  $Q_t$ .

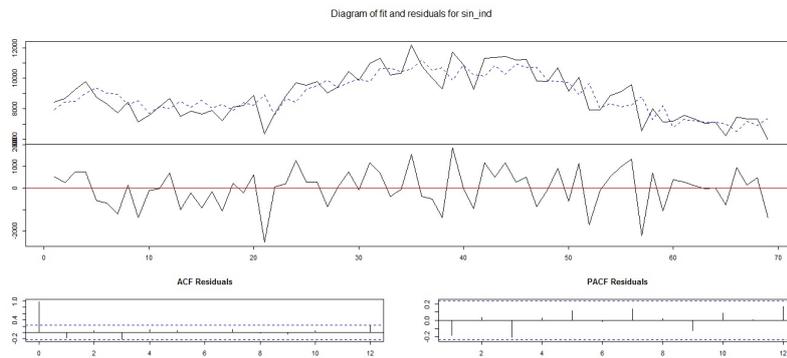


(d) Resíduos da série da quantidade de sinistros ocorridos  $N_t$ .

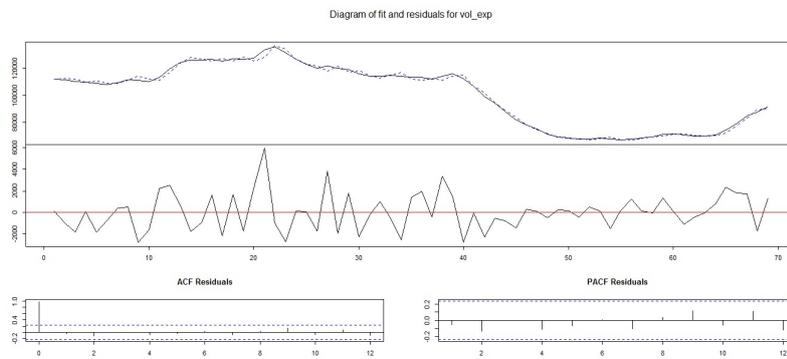
**Figura 4.13:** Análise de resíduos de cada série após o ajuste do modelo VAR(1) aos dados.



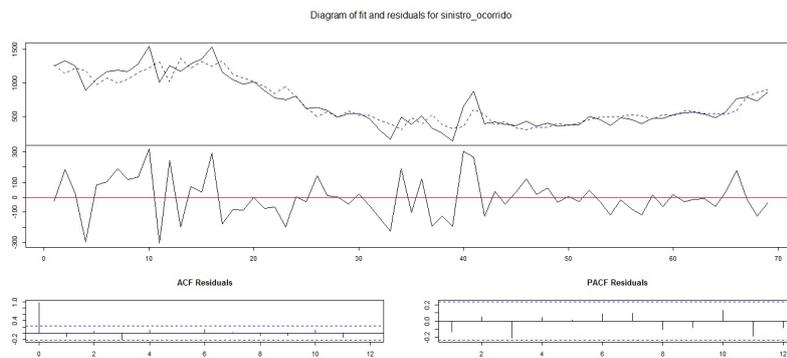
(a) Resíduos da série de prêmios individuais  $C_t$ .



(b) Resíduos da série de sinistros individuais  $B_t$ .

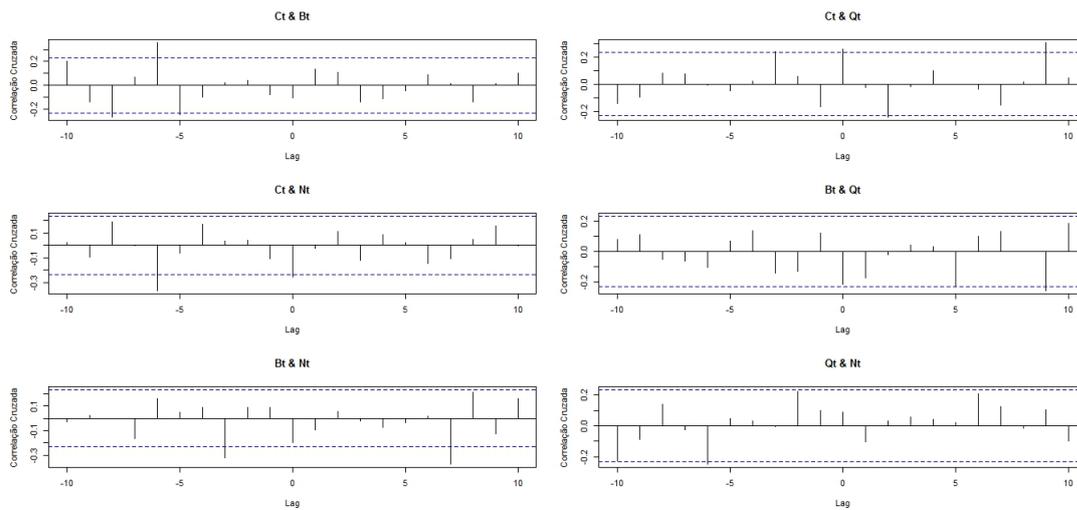


(c) Resíduos da série do tamanho total do portfólio  $Q_t$ .

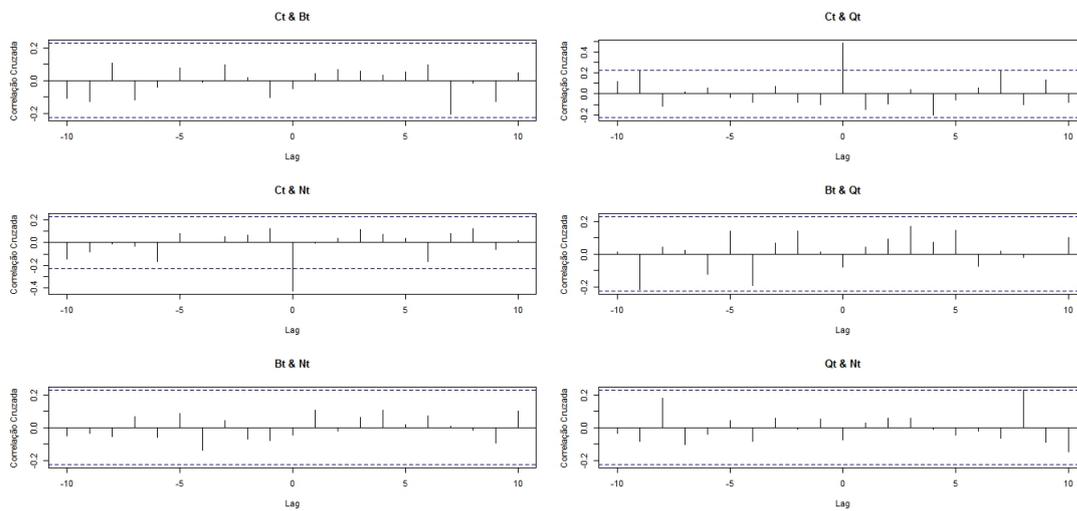


(d) Resíduos da série da quantidade de sinistros ocorridos  $N_t$ .

**Figura 4.14:** Análise de resíduos de cada série após o ajuste do modelo VAR(3) aos dados.



(a) Resíduos do modelo VAR(1).



(b) Resíduos do modelo VAR(3).

**Figura 4.15:** Função correlação cruzada entre os resíduos dos modelos estimados.

Analisando os *backtests* apresentados nas Figuras 4.13(a) a 4.14(d), é possível perceber que os ajustes de todas as séries (linhas pontilhadas) foram bastante próximos dos respectivos valores observados (linhas contínuas), com todas as séries tendo os seus comportamentos de curto e longo prazo capturados pela modelagem do sistema, apesar de haver indícios de heterocedasticidade condicional, fato já apontado em comentário e teste anterior. Entretanto, é preciso avaliar se há presença de autocorrelação serial nos resíduos, pois caso seja detectada a estrutura de dependência, não será possível a aplicação do Algoritmo 1.

**Tabela 4.9:** *Teste de Breusch-Godfrey nos resíduos de cada série temporal.*

	VAR(1)		VAR(3)	
	Estatística	p-valor	Estatística	p-valor
Prêmios Individuais (Ct)	27,09***	0,0025	28,01	0,5698
Sinistros Individuais (Bt)	17,545*	0,0631	31,98	0,3687
Volume de Exposição (Qt)	17,313*	0,0677	20,10	0,9139
Sinistros Ocorridos (Nt)	13,37	0,2036	22,41	0,8389

A hipótese nula testada é  $H_0 : \{\rho_i = 0, \forall i = 1, \dots, 10\}$

\* Significante a 10%, \*\* Significante a 5%, \*\*\* Significante a 1%.

De acordo com a Tabela 4.9 e com as Figuras 4.15(a) e 4.15(b), é possível afirmar que os resíduos do modelo VAR(1) possuem alguma estrutura de dependência autorregressiva, pois nem todos os coeficientes de correlação entre o presente e o passado (até a ordem 10) são iguais a zero, assim como os resíduos de cada série após o ajuste dos modelos possuem dependência com o passado de diversas ordens das demais séries. Apesar de o VAR(1) ser um modelo parcimonioso na quantidade de parâmetros estimados, não é adequada a aplicação do Algoritmo 1 aos resíduos estimados pelo fato de que o procedimento pressupõe seleção aleatória dos resíduos, de maneira que a ordem da amostragem não importe e isso só é possível caso não haja memória a ser capturada.

Já os resíduos gerados pelo ajuste do modelo VAR(3) não possuem estrutura de dependência a qualquer nível de significância dos resíduos de cada série, tampouco entre as séries, fazendo com que seja o melhor modelo possível para proceder com a estimação da probabilidade de ruína deste processo de risco.

Desta maneira, optou-se apenas por apresentar as estimativas dos parâmetros daquele modelo que torna os resíduos ruídos brancos. A Tabela 4.10, a seguir, apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo VAR(3).

**Tabela 4.10:** Estimativas dos parâmetros de um modelo VAR(3) ajustado aos dados reais.

		$\Phi_1$				
	$C_{t-1}$	$B_{t-1}$	$Q_{t-1}$	$N_{t-1}$		
$C_t$	0,8428*** (0,1126)	0,0017* (0,0008)				
$B_t$		0,5255*** (0,1052)				
$Q_t$	40,2401*** (10,3718)		1,5025*** (0,0887)			
$N_t$		0,0237* (0,0094)		0,6263*** 0,0899		
		$\Phi_2$				
	$C_{t-2}$	$B_{t-2}$	$Q_{t-2}$	$N_{t-2}$		
$C_t$	-0,4272** (0,1447)					
$B_t$			0,0122** (0,0043)			
$Q_t$			-0,5540*** (0,0831)	2,6482*** (0,7192)		
$N_t$			0,0282*** (0,0067)			
		$\Phi_3$				
	$C_{t-3}$	$B_{t-3}$	$Q_{t-3}$	$N_{t-3}$		$R^2$
$C_t$	0,3885** (0,1163)					0,9573
$B_t$		0,3320** (0,0964)				0,9899
$Q_t$						0,9997
$N_t$			-0,0298*** (0,0069)	0,2993 (0,0883)		0,9695

Erro-Padrão entre parênteses. \* Significante a 10%, \*\* Significante a 5%, \*\*\* Significante a 1%.

Nota-se que as estimativas da Tabela 4.10 apontam diversas relações significantes entre todas as variáveis ao longo do tempo. Contudo, a interpretação econômica dos coeficientes não é direta, pelo fato de ser necessário pressupor diversos movimentos conjuntos consecutivos para que as relações ou elasticidades façam sentido, inviabilizando análises práticas *caeteris paribus*. Entretanto, a evidência relevante dos resultados é a presença de diversas causalidades no sentido de Granger, sugerindo que todas as variáveis são de alguma forma adaptativas quanto a seu próprio passado e dependentes também dos valores passados das demais variáveis.

O processo de estimação será realizado em três etapas. Inicialmente, as duas primeiras serão obtidas estimativas para o funcional como usualmente se encontra literatura (cuja referência no restante do texto será *cenário básico* ou dada pela sua abreviatura *CB*): o tamanho da carteira é estático (constantemente igual a 101.263,58), os prêmios cobrados dos segurados são tratados como constantes (fixado em R\$ 78,72) e apenas o fluxo de sinistros é tratado como variável aleatória. Neste particular, o fluxo de sinistros será estimado 1.000 vezes de cada uma das

duas maneiras, com a finalidade de validar o método proposto: (CB1) como se  $S_t$  (da Equação 3.4) fosse um processo de Poisson Composto, com  $N_t \sim Po(\lambda = 736)$  e  $B_t \sim$  Exponencial de média igual a R\$ 8.842,57, ambas marginalmente estacionárias, e; (CB2)  $N_t \sim N(736; 44, 52^2)$  e  $B_t \sim N(8.842, 57; 177, 84^2)$  com estrutura Normal bivariada e coeficiente de correlação igual a 0 (independentes). Todas as atribuições numéricas foram obtidas a partir das estatísticas descritivas dadas pelas Tabelas 4.1 e 4.2.

A terceira etapa (que será realizada adiante), consistem em utilizar a estrutura de dependência multivariada para as séries temporais dos fluxos utilizando o modelo VAR(3) (o melhor modelo possível, atendendo a todos os critérios), aplicando o algoritmo 1 aos mesmos dados reais.

Em todas as simulações, a quantidade de replicatas foi de 1.000 vezes de 10.000 trajetórias futuras em cada réplica.

A Tabela 4.11 mostra a sensibilidade das estimativas, em função da variação do volume de reservas iniciais e de diferentes taxas de carregamento, utilizando a premissa de estacionariedade, descritos anteriormente como (CB1) e (CB2).

**Tabela 4.11:** Probabilidades de ruína estimadas usando os dados gerados no cenário básico (1), para diferentes valores de carregamento  $\theta$  e de reserva inicial  $U_0$ .

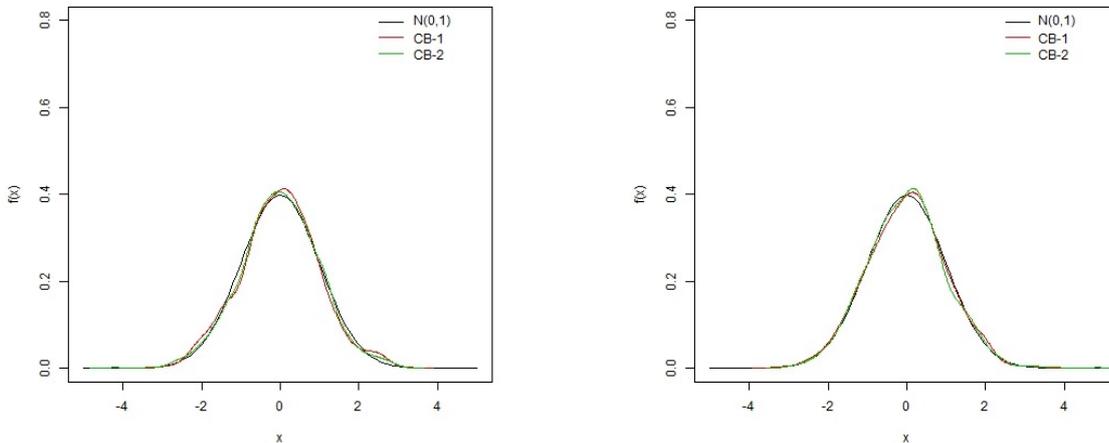
Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	0,0214386	0,0044041	0,0010702	0,0002986
100	0,0084882	0,0011911	0,0002059	0,0000423
120	0,0033611	0,0003222	0,0000396	0,0000060
140	0,0013311	0,0000872	0,0000076	0,0000008

**Tabela 4.12:** Probabilidades de ruína estimadas usando os dados gerados no cenário básico (2), para diferentes valores de carregamento  $\theta$  e de reserva inicial  $U_0$ .

Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	0,0217259	0,0045873	0,0011048	0,0002993
100	0,0085013	0,0012076	0,0002103	0,0000446
120	0,0034081	0,0003352	0,0000414	0,0000081
140	0,0014023	0,0000946	0,0000082	0,0000012

De acordo com as Tabelas 4.11 e 4.12 é possível observar uma diferença entre os valores pontuais estimados, causado pela diferença entre as suposições utilizadas nos métodos de simulação de cada cenário-base. Enquanto no primeiro cenário foi suposto um processo de Poisson Composto de parâmetros constantes para o fluxo de sinistros, no segundo cenário foi atribuída uma aproximação Normal (de parâmetros também constantes) para cada componente. Pela propriedade de consistência do estimador pelo método bootstrap proposto, nota-se que a aproximação pela normal mostrou-se bastante adequada para aproximar os resultados do funcional, pois apesar de haver diferenças, elas não são grandes. Para efeito de comparação, as Figuras 4.16(a) e 4.16(b) trazem

as densidades padronizadas do funcional nos casos extremos das Tabelas 4.11 e 4.12 (todos os intermediários são análogos). Nelas, é possível verificar empiricamente o resultado teórico obtido por Pitts [1994]: que a densidade padronizada do funcional converge a uma distribuição normal padrão.



(a)  $U_0 = \text{R\$ } 80 \text{ milhões e } \theta = 0,2.$

(b)  $U_0 = \text{R\$ } 140 \text{ milhões e } \theta = 0,5.$

**Figura 4.16:** Densidades empíricas padronizadas do funcional  $\psi(U_0, \theta, T)$ .

Todos os governos fazem uma exigência legal de capital mínimo requerido para que as entidades securitárias possam operar com segurança. Isso significa que os reguladores não estão interessados no comportamento da probabilidade de ruína para valores pequenos e moderados de capital, isto porque o órgão regulador estipula um determinado patamar de corte (mais à esquerda) para fiscalização. Assim, o ato discricionário do gestor da entidade recai apenas sobre o montante alocado em reserva patrimonial além do capital mínimo regulatório (trata-se do capital de solvência, ou capital adicional baseado em risco de subscrição, recursos que devem arcar com desvios adversos inesperados pela companhia), valores estes que estão mais à direita na curva. Estes recursos são fundamentalmente dependentes da estimativa que se faz da probabilidade de ruína, que, por sua vez, é dependente do grau de relação que os termos do processo de risco possuem.

Uma vez obtidas as estimativas da probabilidade de ruína para diferentes combinações de valores iniciais da reserva e de taxas de carregamento sobre o prêmio, testou-se as hipóteses de esta entidade ser considerada ultra-segura, segundo os dois critérios mencionados na Seção 3.3: (a) pelo acordo *Solvency II*, a probabilidade máxima de ruína admissível para a seguradora deve ser de 0,5% (nível de solvência de 99,5%). (b) Já para a entidade ser considerada "AAA", a melhor classificação creditícia possível, pelas agências de *rating*, a entidade deve manter um montante de capital em seu patrimônio líquido de modo a estar solvente em 99,97% dos cenários possíveis para o seu futuro. O que implica ter uma probabilidade máxima de ruína de 0,03%.

Portanto, são dois os testes que precisam ser feitos em cada cenário (CB1 e CB2): para a condição *Solvency II* descrita em (a) as hipóteses são da forma  $H_0 : \psi(U_0, t_+) = 0,05\%$  contra  $H_1 : \psi(U_0, t_+) < 0,05\%$ . Por sua vez, a condição "AAA", as hipóteses a serem testadas são  $H_0 : \psi(U_0, t_+) = 0,03\%$  contra  $H_1 : \psi(U_0, t_+) < 0,03\%$ . Os resultados (na forma de p-valores) são apresentados nas Tabelas 4.13 a 4.16, a seguir.

**Tabela 4.13:** *P*-valores dos testes de verificação da condição "Solvency II" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial  $U_0$  e de taxas de carregamento  $\theta$ , usando os dados gerados no cenário básico (1).

Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	0,9999	0,2612	<0,0001	<0,0001
100	0,9739	<0,0001	<0,0001	<0,0001
120	0,0106	<0,0001	<0,0001	<0,0001
140	<0,0001	<0,0001	<0,0001	<0,0001

**Tabela 4.14:** *P*-valores dos testes de verificação da condição "Solvency II" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial  $U_0$  e taxas de carregamento  $\theta$ , usando os dados gerados no cenário básico (2).

Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	0,9998	0,3332	<0,0001	<0,0001
100	0,9757	<0,0001	<0,0001	<0,0001
120	0,0122	<0,0001	<0,0001	<0,0001
140	<0,0001	<0,0001	<0,0001	<0,0001

**Tabela 4.15:** *P*-valores dos testes de verificação da condição "AAA" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial  $U_0$  e de taxas de carregamento  $\theta$ , usando os dados gerados no cenário básico (1).

Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	1,0000	0,9999	0,9902	0,4948
100	1,0000	0,9924	0,1156	<0,0001
120	0,9997	0,5743	<0,0001	<0,0001
140	0,9940	<0,0001	<0,0001	<0,0001

**Tabela 4.16:** *P*-valores dos testes de verificação da condição "AAA" da seguradora, para diferentes valores de reserva inicial  $U_0$  e taxas de carregamento  $\theta$ , usando os dados gerados no cenário básico (2).

Reserva Inicial (em milhões de R\$)	Carregamento			
	0,2	0,3	0,4	0,5
80	1,0000	1,0000	1,0000	0,5132
100	1,0000	1,0000	0,1481	<0,0001
120	1,0000	0,5915	<0,0001	<0,0001
140	0,9996	<0,0001	<0,0001	<0,0001

Comparando as Tabelas 4.13 e 4.14, nota-se que há proximidade entre os p-valores estimados de cada cenário-base, assim como há similaridade na avaliação das Tabelas 4.15 e 4.16. Isso ocorre porque só foi alterada a hipótese nula representada pelo valor da cauda à direita, permanecendo fixos tanto a estimativa do funcional como seu erro-padrão estimado.

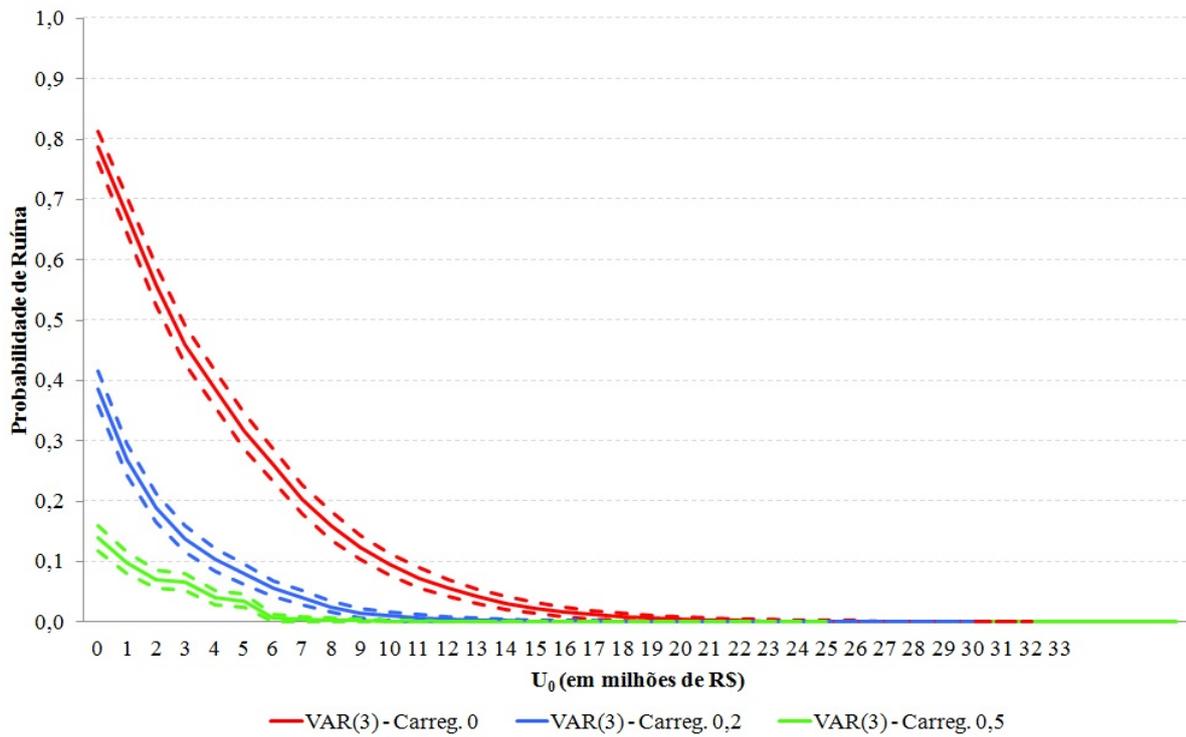
Em qualquer um dos cenários e para qualquer teste é possível estabelecer pelo menos uma combinação entre reservas e carregamentos, para que a estimativa do funcional seja bem pequena. Destacam-se os *p-valores* no triângulo inferior à direita das Tabelas 4.15 e 4.16, em que é possível estimar uma probabilidade baixa de ruína, rejeitando a hipótese de que  $\psi_0 = 0,03\%$  em favor de  $\psi_0 < 0,03\%$  com *p-valor* abaixo de 0,0001. Outrossim, pelas margens das referidas Tabelas, o intervalo de variação do capital mínimo está entre R\$ 100 e 140 milhões, ainda que seja estabelecida uma taxa de carregamento de pelo menos 0,2.

Na condição de tornar a entidade segura pelo critério do Acordo *Solvency II*, o capital pode ser menor: a depender da escolha prévia que se faça para controlar o erro do tipo I (por exemplo, adotando um nível de significância de 5%), o capital de solvência poderá variar entre R\$ 80 e 120 milhões, também considerando uma taxa de carregamento superior a 0,2. Note que, no caso de se considerar taxas de carregamento menores, o capital deveria ser ainda maior.

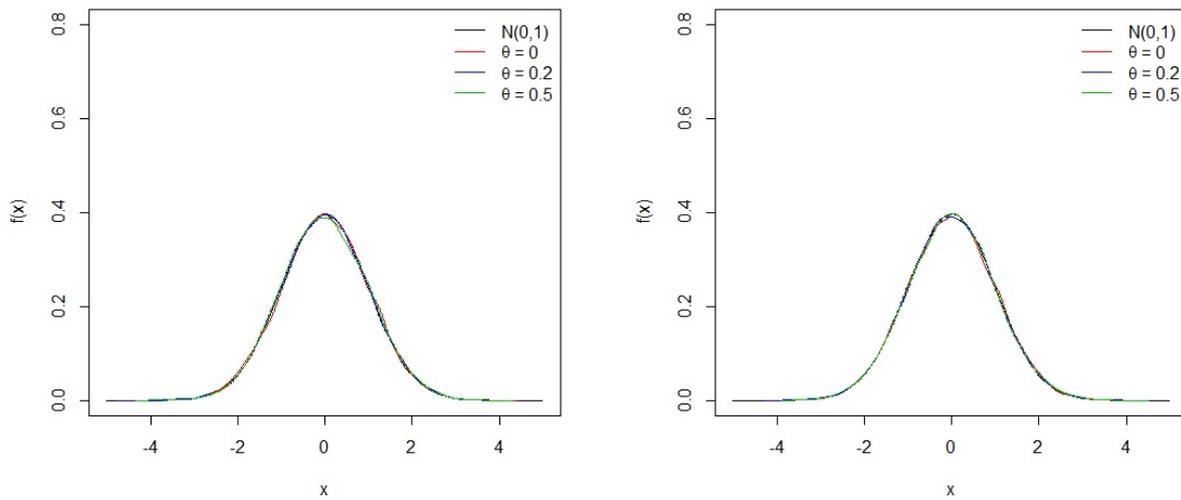
Para se ter uma idéia de quão irreal estes valores são para representar a realidade econômica desta seguradora, o menor destes valores (R\$ 80 milhões) é a receita operacional equivalente à média de 9,72 meses de operação e à média de 12,85 meses de despesas incorridas com sinistros. Posto que a entidade exige a contrapartida prêmios para lastrear as despesas com sinistros, este valor não precisa ser tão elevado para arcar com o custeio dos eventos indenizáveis. Além disso, o acionista dessa entidade incorreria em um custo de oportunidade muito elevado, inviabilizando o negócio segurador. Ou seja: trata-se claramente de uma evidência de que a abordagem matemática clássica é pouco adequada para modelar a realidade das entidades ao superdimensionar o capital das entidades.

Depois da aplicação das duas primeiras etapas, em que foram estimados os funcionais tratando como aleatória apenas a parcela do processo de risco referente aos sinistros, os próximos passos consistem em utilizar a estrutura de dependência multivariada para as séries temporais dos fluxos utilizando o modelo VAR(3), aplicando o Algoritmo 1 aos mesmos dados reais. A seguir, as Figuras 4.17 e 4.19 trazem os resultados obtidos a partir da metodologia aqui proposta, considerando os fluxos estocásticos e com estrutura de dependência entre as séries.

Todos os valores estimados que geraram os gráficos - inclusive resultados de simulações com outros valores de  $\theta$  - constam nas Tabelas D.1 a D.4 do Apêndice D. Em todas as combinações de capital e carregamento, a quantidade de replicatas foi de 1.000 vezes de 10.000 prognósticos das trajetórias futuras em cada réplica.



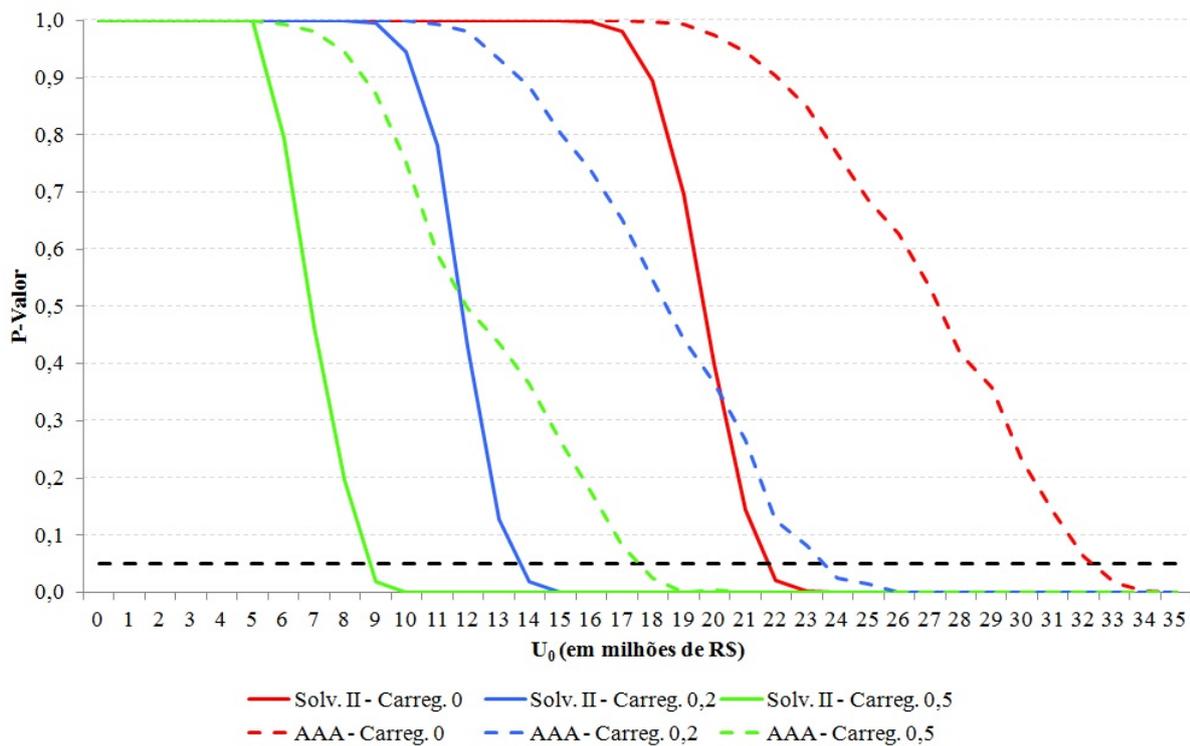
**Figura 4.17:** Comparação das estimativas de probabilidade de ruína obtidos pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de  $U_0$ , para diferentes valores de  $\theta$  (intervalos de confiança de 95% nas linhas tracejadas).



(a)  $U_0 = \text{R\$ } 15$  milhões.

(b)  $U_0 = \text{R\$ } 20$  milhões.

**Figura 4.18:** Densidades empíricas padronizadas do funcional  $\psi(U_0, \theta, T)$ , para diferentes valores de  $U_0$  e  $\theta$ .



**Figura 4.19:** Comparação dos p-valores estimados pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de  $U_0$ , com diferentes valores de  $\theta$ , para as hipóteses  $H_0 : \psi(U_0, \theta, T) = \psi_0$  vs.  $H_1 : \psi(U_0, \theta, T) < \psi_0$ , nas condições de Solvency II ( $\psi_0 = 0,5\%$ ) e AAA ( $\psi_0 = 0,03\%$ ).

Na Figura 4.17 tem-se a relação do capital inicial da seguradora e a probabilidade de ruína estimada e nela nota-se o comportamento exponencialmente decrescente das estimativas do funcional para níveis mais altos de capital e para todas as taxas de carregamento consideradas, estando de acordo com o resultado previsto pelo Teorema 3.1. Já as Figuras 4.18(a) e 4.18(b) mostram convergência da distribuição empírica do funcional para a distribuição Normal padrão, como sugerido por Pitts [1994]. Desta maneira, é possível assumir válida tal distribuição para a realização dos testes de hipóteses de interesse.

A leitura conjunta das Figuras 4.17 e 4.19 deve ser feita da seguinte maneira: admita que não haja carregamentos sobre os prêmios individuais (isto é,  $\theta = 0$ ); apenas com o capital mínimo requerido para o Brasil de  $U_0 = R\$15$  milhões, a entidade está exposta a uma probabilidade  $\hat{\psi}(U_0, t_+) = 2,2921\%$ . Apesar de bastante baixa, esta probabilidade não pode ser considerada equivalente à de uma seguradora considerada ultra-segura ("AAA") pelo fato de o p-valor associado a essa estimativa ser próximo de 1,00. Ainda que a entidade decidisse dobrar o capital alocado (isto é, fazer um aporte adicional de  $CS_{subsc} = R\$15$  milhões), atingindo um patrimônio líquido de  $U_0 = R\$30$  milhões, a probabilidade estimada de ruína desta entidade seria de aproximadamente  $\hat{\psi}(U_0, t_+) = 0,0085\%$ . Na condição "AAA" (p-valor = 0,0041). Deste modo, ao nível de significância de 1%, ela poderia não poder ser considerada "AAA" com o modelo VAR(3).

Adotando um incremento de  $\theta = 20\%$  como taxa de carregamento sobre o valor individual de prêmios, a entidade pode ser considerada "AAA" ajustando-se qualquer um dos modelos com um capital mais baixo. Este resultado é esperado sobretudo pela criação de *drifts* positivos nas trajetórias com a adoção de  $\theta > 0$ , além de aderente às evidências apresentadas pelas Figuras 4.11. Ainda observando a Figura 4.19 (mostrada com detalhes na Tabela D.4), chega-se à conclusão de que o montante necessário para operação diminui gradativamente, conforme se aumenta a taxa de carregamento, até o menor valor estimado possível para o patrimônio líquido, que é de  $U_0 = R\$10$

milhões (menor, portanto, que o capital mínimo requerido no Brasil). Ainda assim, essa situação ocorreria apenas dobrando o valor da participação dos segurados via prêmios, o que poderia inviabilizar a operação em mercado, diminuindo, por exemplo, a competitividade da entidade ao reduzir a sua base de exposição.

Especificamente sobre os resultados apresentados na Figura 4.19, que compara os p-valores para as hipóteses de atendimento do Acordo *Solvency II* e da condição de "AAA", nota-se uma diferença entre as curvas. No teste de atendimento do Acordo *Solvency II*, o decaimento das curvas das diferentes taxas de carregamento é mais acentuada, enquanto que no teste da condição de "AAA", o decaimento é mais suave. Isto ocorre pelo fato de as estimativas no caso da hipótese da condição de "AAA" estarem em um lugar mais extremo na cauda das estimativas de probabilidade do que o outro teste, que se localizam em um nível mais inferior.

Posto que o tratamento do processo de risco é aleatório ao conferir estrutura estocástica e de dependência multivariada entre os fluxos de prêmios e sinistros (e também entre as componentes), a curva que descreve a relação entre a probabilidade de ruína e a alocação de capital de solvência é aleatória. Tal fato implica que a mera extração inversa do capital a partir da curva estimada pode não refletir adequadamente o risco incorrido da seguradora devido à incerteza que o estimador da probabilidade de ruína possui.

Assim, a Tabela 4.17, a seguir, resume a informação contida nas Figuras 4.17 e 4.19 e apresenta o dimensionamento do capital de solvência em função do tipo de requerimento de capital (ao atender o acordo *Solvency II* ou se estiver de acordo com o critério "AAA") e de uma escolha subjetiva de gerenciamento o risco de subestimação da probabilidade de ruína usando o erro do tipo I, considerado o mais grave pelos reguladores.

**Tabela 4.17:** Capital de Solvência (em milhões de R\$) estimado pelo modelo VAR(3), por critério de requerimento de capital, para diferentes valores de carregamento  $\theta$ .

Requerimento de Capital	Critério	Taxa de Carregamento		
		$\theta = 0$	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,5$
Solvency II	VaR	20	12	7
	p-valor (5%)	22	14	9
	p-valor (1%)	23	15	10
	p-valor (0,01%)	24	16	11
AAA	VaR	28	19	12
	p-valor (5%)	33	24	18
	p-valor (1%)	34	26	19
	p-valor (0,01%)	35	27	21

Nota: o nível de significância está entre parênteses.

Como é possível observar na Tabela 4.17, a extração inversa da curva sempre fornece um nível de capital inferior quando comparado a escolhas usuais de níveis de significância. Tomando como exemplo os capitais de solvência para a taxa de carregamento  $\theta = 0$  para o atendimento do Acordo *Solvency II* (e ocorreria algo análogo na situação de atendimento à condição "AAA"): o capital de solvência via VaR (a extração inversa) deveria ser de R\$ 20 milhões, ao passo que este capital seria insuficiente caso o critério do p-valor com o nível de significância de 5% fosse adotado pelo regulador. Nesta situação, haveria um aumento de 10%, para R\$ 22 milhões. Esta diferença é causada pela consideração do desvio-padrão do estimador e pode ser interpretada como o custo adicional de capital em decorrência do desconhecimento da verdadeira probabilidade de ruína.

Vale notar ainda que, de acordo com os resultados da Tabela 4.17, comparados com aqueles

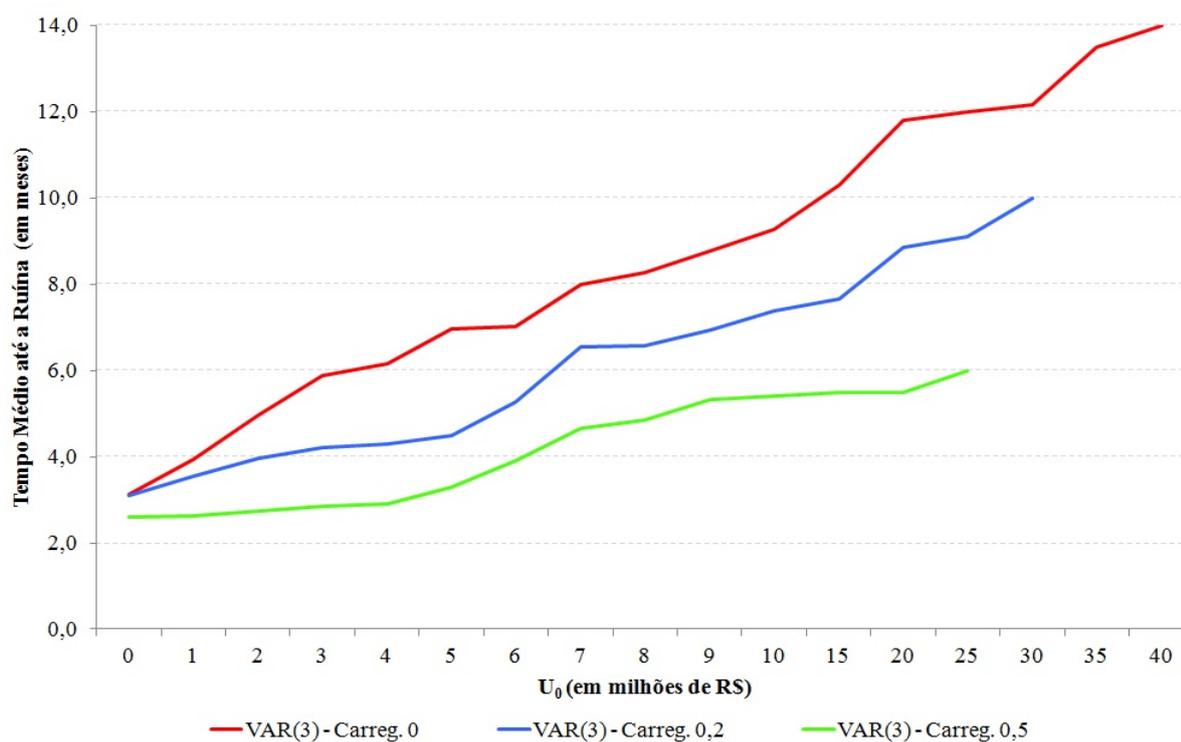
apresentados nas Tabelas 4.11 a 4.16, há uma necessidade muito menor de aporte de capital inicial  $U_0$  quando se considera todos as quantidades de interesse como estocásticas e com dependência intertemporal. Pela metodologia tradicional da literatura de tratar o fluxo de prêmios como constante, a decisão a respeito da rejeição da hipótese para o funcional é crítica apenas para  $U_0$  entre R\$ 80 milhões a R\$ 140 milhões, enquanto pela abordagem proposta, o processo de risco é um submartingal, o que causou uma redução expressiva de necessidade de capital:  $U_0$  não ultrapassa R\$ 40 milhões (menos da metade do mínimo do intervalo do caso de prêmios independentes dos sinistros, portanto). Esta redução é bastante natural visto que a tendência é de que as séries combinadas de prêmios e sinistros evoluam conjuntamente, isto é: aumentos de sinistralidade em um dado instante de tempo podem ser financiados por aumentos de prêmios no futuro, sem a necessidade de aportes adicionais de capital no momento inicial.

De modo complementar, mesmo que o processo de risco fosse supermartingal, o gestor poderia, ao detectar essa característica, tentar reverter essa tendência escolhendo um novo valor de  $\theta$ , sem necessariamente fazer aportes instantâneos de capital de solvência  $U_0$ . Lembrando que haveria vantagens e desvantagens em cada escolha: aumentar o valor da taxa de carregamento  $\theta$  sobre os prêmios poderia trazer mais receitas para a companhia, mas tornaria o seguro mais caro e poderia diminuir a quantidade de agentes segurados. Por outro lado, aumentar o capital de solvência tornaria a entidade menos propensa a incorrer em ruína, mas aumentaria o custo de oportunidade da operação. De qualquer forma, esta metodologia fornece uma possibilidade de escolha intermediária entre aumentar  $U_0$  ou  $\theta$ , compartilhando os riscos os sócios e os segurados sem onerar nenhuma das partes em demasia.

Ademais, devido à relação de *feedback* entre as variáveis ao longo do tempo, caso houvesse expansão indesejada da quantidade de sinistros ocorridos, poder-se-ia adotar algum critério mais rigoroso de aceitação de segurado ou na renovação do contrato, por meio de algum sistema de incentivos, como o *bonus-malus*. Há diversas formas de a entidade tentar fazer algum tipo de ajuste futuro que eventualmente corrija a tendência da trajetória do processo. De qualquer maneira, nenhuma destas opções seriam permitidas caso a série de prêmios fosse tratada como constante ou, mesmo dando o tratamento estocástico aos prêmios, se uma estrutura multivariada entre todas as componentes (tamanho de portfólio, prêmios, severidades e quantidade de sinistros ocorridos) não for incorporada, conforme as metodologias tradicionais na literatura.

Contudo, ainda que haja diferença entre os capitais de solvência para diferentes taxas de carregamento, em todos os casos esses montantes mostram-se substancialmente inferiores ao caso em que o fluxo de prêmios são não-adaptativos à dinâmica dos sinistros. Cumpre notar que o Teorema 3.2 garante que o Algoritmo 1 possui boas propriedades de convergência do estimador para os reais valores do funcional, de modo que todas as soluções encontradas pela aplicação do procedimento proposto são válidas.

Por fim, serão avaliadas as estimativas para o tempo de parada  $t_+$ , que representam o tempo médio até a entrada em falência da entidade, caso ela venha a ocorrer. A Tabela 4.20, a seguir, mostra essas informações.



**Figura 4.20:** Comparação dos tempos médios até a entrada em ruína, caso ocorra, estimado pela aplicação da nova metodologia a partir do modelo VAR(3) ajustado, em função de  $U_0$ , para diferentes valores de  $\theta$ .

A partir das informações constantes na Figura 4.20 (cujos valores exatos constam na Tabela D.5 do Apêndice D; os traços na referida tabela denota ausência de estimativas, visto que não foram detectadas situações de falências), percebe-se um fato bastante interessante: de uma maneira geral, nos cenários em que a entidade entrou em falência, a ruína ocorreu logo nos primeiros meses de operação (entre 2 e 5 meses). Entretanto, à medida que se aumenta a reserva de capital da entidade ou a taxa de carregamento, o tempo médio de ruína também avança para um prazo mais alongado, chegando a quase um 1,5 ano.

É interessante notar o fato de que tanto o Acordo *Solvency II* como as agências de classificação de risco determinam um horizonte de 12 meses para as suas avaliações da probabilidade de insolvência. Embora este prazo venha a abranger boa parte das situações de ruína, seria importante adotar um prazo mais longo (guardando a analogia com a avaliação em horizonte infinito da teoria em tempo contínuo) para melhor prever a situação das entidades, uma vez que a ruína pode ocorrer bem além desta média.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

### 5.1 Considerações Finais

Neste trabalho buscou-se desenvolver uma metodologia de estimação da probabilidade de ruína em um processo de risco, considerando as séries futuras tanto de prêmios quanto de sinistros como processos estocásticos multivariados com interdependência com o passado de todas as séries, inclusive delas próprias. Na literatura atuarial, apenas o processo de desenvolvimento de sinistros costuma ser considerado como processo aleatório e, do ponto de vista teórico, só é possível obter soluções analíticas em tempo contínuo e, mesmo assim, apenas para alguns casos paramétricos conhecidos.

Não obstante, os trabalhos que se propuseram a avaliar a condição de falência de entidades em tempo discreto costumam apenas se utilizar de aproximações ou limitantes superiores para a probabilidade de ruína. Este trabalho inova ao encontrar condições - a depender das características martingais - para que o processo de risco apresente um limite inferior para a probabilidade de ruína, não apenas um limite superior.

Para ser possível obter as estimativas, a metodologia aqui desenvolvida foi baseada em métodos computacionais baseado em *bootstrap*, de modo a não depender de suposições que costumam ser fortes (tempo contínuo ou distribuições específicas) a tal ponto de não serem reais ou de tornar a obtenção numérica impraticável. A grande vantagem deste procedimento, demonstrada analiticamente, é que as estimativas obtidas são consistentes e convergem para o verdadeiro valor do funcional após um número suficientemente grande de replicações de trajetórias futuras.

A aplicação do método foi feita em três etapas: inicialmente buscou-se validar a metodologia proposta verificando se, sob determinadas suposições cujos resultados são conhecidos e exatos, o procedimento era capaz de encontrar tais resultados, com resultados bem-sucedidos. Na sequência, foi testada a aplicação do método ao se impor uma estrutura multivariada conhecida e fixa de séries temporais a cada fluxo aleatório. Os resultados apontaram que a relação da probabilidade de ruína com o nível de capital inicial era diferente quanto mais se aumentava a força de memória no processo de risco, a depender das características martingais do processo de risco.

Por fim, o método proposto foi aplicado a um conjunto de dados reais, em que tanto a estrutura de dependência multivariada como a memória do processo precisou ser estimada. Os resultados mostraram que a utilização da metodologia usual da literatura é muito mais conservadora do que a proposta neste trabalho, pelo fato de que uma eventual estrutura de dependência entre os fluxos de prêmios e sinistros podem compensar-se mutuamente, gerando uma menor necessidade de aportes de capital no momento da análise. Desta maneira, verificou-se que as estruturas de dependência

multivariadas provocam alterações importantes na relação entre a probabilidade de ruína e o nível de capital inicial necessário para manter a suficiência operacional da entidade. Conclui-se que metodologia proposta é capaz de detectar essas variações, possibilitando dimensionar o capital de solvência instantaneamente e de modo mais realista, de acordo com as suas características martingais.

A principal contribuição prática da metodologia é possibilitar alterações nos parâmetros controláveis pela seguradora que definirão suas tendências futuras, compartilhando as responsabilidades dos segurados ou dos sócios ao escolher entre, respectivamente, redimensionar as taxas de carregamento ou realizar aportes instantâneos de capital de solvência. Em cada escolha há vantagens e desvantagens: aumentar o valor da taxa de carregamento sobre os prêmios poderia trazer mais receitas para a companhia, mas tornaria o seguro mais caro e poderia diminuir a quantidade de agentes segurados. Por outro lado, aumentar o capital de solvência torná-la-ia menos propensa a incorrer em ruína, mas aumentaria o custo de oportunidade de sua operação.

Para garantir um mínimo de responsabilidades das entidades, o acordo Solvência II fornece um arcabouço regulamentar para uma gestão prudencial de entidades securitárias na União Europeia e cuja abordagem está sendo adotada pelo Estado brasileiro, nas figuras do CNSP e da SUSEP, respectivamente os órgãos normatizados e fiscalizador. Em seu Pilar de número 1, o objetivo principal é definir os níveis de capital a empresa terá de alocar em seu patrimônio líquido contábil de modo a conseguir arcar com diversos compromissos assumidos com os riscos inerentes ao negócio, em especial o de *subscrição*.

Neste trabalho, dois requerimentos de capital foram considerados: para o atendimento do Acordo *Solvency II* e para a melhor classificação de risco ("AAA"), segundo as agências de *rating*, que são relevantes agentes de mercado que fornecem alguma credibilidade à saúde financeira de empresas. Os resultados mostraram que utilizar uma estrutura multivariada via modelo VAR possibilita reduzir o nível do capital de solvência quando comparado ao tratamento não-adaptativo do fluxo de prêmios ao dos sinistros. Além desta contribuição, evidenciou-se que a mera extração inversa do capital a partir da curva estimada (como se faz usualmente pela medida VaR) pode não refletir adequadamente o risco incorrido da seguradora devido à incerteza que o estimador da probabilidade de ruína possui. Assim, foi possível dimensionar o custo adicional pelo desconhecimento do verdadeiro valor da probabilidade de ruína, por meio de um teste de hipóteses, que se mostra uma maneira mais completa por levar em consideração tanto as estimativas do funcional como o seu desvio-padrão.

Destaca-se a impossibilidade de modelar situações de catástrofes exógenas em qualquer quantidade considerada aleatória neste trabalho, uma vez que são inúmeras as razões que podem alterar de modo repentido o comportamento observado na trajetória observada pelo analista, sejam elas objetivas, como a ocorrência de catástrofes naturais ou mesmo cancelamentos de apólices (ou quaisquer outras quebras contratuais) e mudança no perfil de sinistralidade, ou subjetivas, como mudanças de políticas implementadas na companhia (como expansão da carteira). Qualquer que seja a causa, esta poderia considerada uma característica oculta para o tomador de decisão e, portanto, é preciso ter cautela ao realizar inferências e tomadas de decisão sobre a validade *ad eternum* dos resultados obtidos, sendo estas as principais limitações deste trabalho.

## 5.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como sugestão para pesquisas futuras está o tratamento da estrutura de dependência entre as séries de prêmios e sinistros, atualmente consideradas lineares. Este tratamento poderá propor-

cionar a inclusão de estruturas não lineares por meio de cópulas multivariadas e, especialmente, incluir coeficientes do modelo VAR (ou mesmo das cópulas) variando no tempo, a fim de capturar o efeito de mudanças de regime, o que pode tornar a metodologia ainda mais próxima da realidade. Os resultados deste trabalho também sugerem que a incorporação de uma estrutura GARCH (inclusive a sua versão multivariada) pode refinar os resultados de modo a tornar mais precisa a estimação da volatilidade do processo.

Tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado, a abordagem metodológica de Vidmar [2016], que propõe uma estrutura de dependência estocástica entre os processos de Poisson Compostos, parece ser o caminho futuro dessa teoria em tempo contínuo. Embora ainda seja um trabalho preliminar de estimação pontual da probabilidade de ruína, os resultados ali contidos podem ser expandidos no contexto da teoria estatística de testes de hipóteses. Outra vertente que está se consolidando é a conjunção entre o processo atuarial com a teoria de finanças estocásticas (Yang e Konstantinides [2015] e Liu e Wang [2016]).

Ademais, convém para o futuro estudos incorporando outros desenhos de gerenciamento de risco para seguradoras, como o resseguro, pois trata-se de um recurso que também possui a finalidade de minimizar a probabilidade da seguradora de entrar em estado de insolvência. Deste modo, é interessante para uma entidade que possua um grande excedente de recursos ser capaz de determinar qual é o nível ótimo de retenção de riscos que minimize este parâmetro, de sorte que seja possível redimensionar a menor o capital de solvência, gerando menores custos de oportunidade. Por outro lado, caso o segurador detenha uma pequena disponibilidade de recursos (em geral, são aquelas entidades mais expostas à ruína), o resseguro ótimo pode garantir melhor a distribuição de riscos que a companhia pode assumir, reduzindo sua probabilidade de ruína no futuro.

Finalmente, também é possível pensar em diferentes abordagens para a execução do teste de hipóteses: um tratamento bayesiano pode ser adotado, incorporando opiniões de gestores experientes a respeito das condições da realidade econômico-financeira do mercado, bem como percepções acerca de fenômenos geradores de sinistros e seus agravantes. E também na inclusão de um conjunto mais amplo de premissas que possam aproximar ainda mais o modelo da realidade, tais como a marcação a valores justos dos ativos garantidores das provisões e reservas técnicas, além do efeito de choques nas premissas para medir a sensibilidade dos resultados.

# Apêndice A

## Simulação de múltiplas séries temporais com estrutura VAR

Para simular múltiplas séries temporais de dimensão  $K$  e tamanho  $T$ , [Lütkepohl \[2005\]](#) sugere que primeiro é preciso gerar uma série de vetores de ruídos aleatórios  $u_{-s}, \dots, u_0, u_1, \dots, u_T$ . Caso esses ruídos possuam distribuição Normal, isto é,  $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$ , pode-se escolher  $K$  variáveis univariadas independentes de distribuição  $N(0,1)$   $v_1, \dots, v_k$  e multiplicar por uma matriz  $P_{K \times K}$ , de modo que  $PP' = \Sigma_u$ , de modo que:

$$u_t = P \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_K \end{bmatrix}.$$

Esse processo é repetido  $T + s + 1$  vezes até que se tenha a séries de ruídos aleatórios. A maioria dos *softwares* estatísticos e planilhas eletrônicas possuem métodos de geração de variáveis (pseudo) aleatórias normais, incluindo outras distribuições, que podem ser usados de modo similar para obter outros tipos de processos.

Para um dado conjunto de parâmetros  $v, A_1, \dots, A_p$ , em que  $v$  é uma matriz ( $K \times 1$ ) e  $A_i$  são matrizes ( $K \times K$ ), e um dado conjunto de valores iniciais  $y_{-p+1}, \dots, y_0$ , o vetor de ruídos  $u_t$  pode ser utilizado para simular um sistema multivariado de séries temporais  $y_1, \dots, y_T$  com uma estrutura VAR( $p$ ) recursivamente da seguinte maneira:

$$y_t = v + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

iniciando em  $t = 1, t = 2$ , e assim por diante, até  $t = T$ . Há diferentes maneiras de se obter os valores iniciais. Admitindo que o sistema é estável, pode ser ajustado a zero ou à média do processo  $\mu = (I_k - A_1 - \dots - A_p)^{-1}v$ . Pelo fato de a escolha dos valores iniciais terem algum impacto na geração das séries temporais, uma quantidade de valores pré-amostrados  $y_t, t = -s, \dots, 0$  é geralmente gerada e descartada nas análises subsequentes.

Uma maneira possível de garantir a mesma estrutura de dependência para os valores iniciais e para todos os demais períodos é determinar a matriz de covariâncias  $\Sigma_Y$  de  $p$  consecutivos vetores  $y_t$ . Esta matriz  $\Sigma_Y$  pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\text{vec}(\Sigma_Y) = (I_{(Kp)^2} - A \otimes A)^{-1} \text{vec}(\Sigma_U),$$

em que:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_K & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_K & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_K & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_U = \begin{bmatrix} \Sigma_u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que tanto  $A$  como  $\Sigma_U$  sejam matrizes de ordem  $(Kp \times Kp)$ . Assim, uma matriz  $Q$ , também de dimensão  $(Kp \times Kp)$ , é escolhida tal que  $QQ' = \Sigma_Y$  e os  $p$  valores iniciais são obtidos por:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{-p+1} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{Kp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{bmatrix},$$

em que os valores  $v_i$  são variáveis independentes com média zero e variância 1.



## Apêndice B

# Tabelas originais dos dados simulados da com prêmios constantes e sinistros com distribuição conhecida

**Tabela B.1:** Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Exponencial, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\theta = 0,2$ .

$U_0$	Probabilidade Exata	Viés	EQM
0	0,83333	0,00062	0,00023
1000	0,70540	0,00017	0,00021
2000	0,59711	0,00096	0,00017
3000	0,50544	- 0,00027	0,00015
4000	0,42785	- 0,00059	0,00013
5000	0,36217	0,00074	0,00018
6000	0,30657	0,00043	0,00014
7000	0,25950	- 0,00083	0,00013
8000	0,21966	0,00019	0,00010
9000	0,18594	0,00030	0,00007
10000	0,15740	- 0,00053	0,00014
11000	0,13323	0,00001	0,00010
12000	0,11278	- 0,00044	0,00009
13000	0,09547	- 0,00052	0,00006
14000	0,08081	0,00044	0,00005
15000	0,06840	0,00044	0,00011
16000	0,05790	- 0,00013	0,00008
17000	0,04901	0,00013	0,00006
18000	0,04149	0,00046	0,00004
19000	0,03512	0,00046	0,00004
20000	0,02973	- 0,00047	0,00008
21000	0,02516	- 0,00058	0,00006
22000	0,02130	- 0,00050	0,00004
23000	0,01803	- 0,00019	0,00004
24000	0,01526	0,00005	0,00003
25000	0,01292	0,00002	0,00006
26000	0,01094	0,00011	0,00005
27000	0,00926	0,00016	0,00004
28000	0,00784	0,00009	0,00003
29000	0,00663	0,00022	0,00003
30000	0,00561	0,00018	0,00004

**Tabela B.2:** Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Exponencial, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\theta = 0,8$ .

$U_0$	Probabilidade Exata	Viés	EQM
0	0,55556	0,00028	0,000247
1000	0,35621	0,00012	0,000229
2000	0,22840	- 0,00028	0,000176
3000	0,14644	- 0,00025	0,000125
4000	0,09390	- 0,00018	0,000085
5000	0,06020	0,00016	0,000057
6000	0,03860	- 0,00004	0,000037
7000	0,02475	0,00001	0,000024
8000	0,01587	- 0,00019	0,000016
9000	0,01018	- 0,00019	0,000010
10000	0,00652	0,00001	0,000006
11000	0,00418	- 0,00001	0,000004
12000	0,00268	- 0,00006	0,000003
13000	0,00172	0,00011	0,000002
14000	0,00110	0,00002	0,000001
15000	0,00071	0,00004	0,000001

**Tabela B.3:** Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Normal, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\theta = 0,1$  e  $\gamma = 0,00019998$ .

$U_0$	Limite Superior	Probabilidade via caso Paramétrico	Viés	EQM
0	1,00000	0,91146	- 0,00268	0,00023
1000	0,81875	0,77450	0,00636	0,00021
2000	0,67035	0,64888	- 0,00779	0,00017
3000	0,54884	0,53422	0,00334	0,00015
4000	0,44936	0,43890	0,00561	0,00013
5000	0,36792	0,36768	- 0,00205	0,00018
6000	0,30123	0,29528	- 0,00585	0,00014
7000	0,24663	0,23154	0,00348	0,00013
8000	0,20193	0,20040	- 0,00308	0,00010
9000	0,16533	0,16404	- 0,00418	0,00007
10000	0,13536	0,13232	- 0,00334	0,00014
11000	0,11083	0,10820	- 0,00217	0,00010
12000	0,09074	0,09044	- 0,00357	0,00009
13000	0,07429	0,07386	- 0,00209	0,00006
14000	0,06083	0,06076	- 0,00100	0,00005
15000	0,04980	0,04658	0,00171	0,00011
16000	0,04078	0,04074	- 0,00021	0,00008
17000	0,03338	0,03329	- 0,00126	0,00006
18000	0,02733	0,02100	0,00014	0,00004
19000	0,02238	0,02206	0,00018	0,00004
20000	0,01832	0,01140	- 0,00131	0,00008
21000	0,01500	0,01420	0,00090	0,00006
22000	0,01228	0,01150	0,00042	0,00004
23000	0,01006	0,01000	0,00000	0,00004
24000	0,00823	0,00802	- 0,00084	0,00003
25000	0,00674	0,00642	- 0,00042	0,00006
26000	0,00552	0,00536	- 0,00073	0,00005
27000	0,00452	0,00449	- 0,00097	0,00004
28000	0,00370	0,00368	- 0,00057	0,00003
29000	0,00303	0,00301	- 0,00090	0,00003
30000	0,00248	0,00238	- 0,00044	0,00004

**Tabela B.4:** Estatísticas do estimador proposto das probabilidades de ruína para o caso Poisson-Normal, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\theta = 0,2$  e  $\gamma = 0,00039996$ .

$U_0$	Limite Superior	Probabilidade via caso Paramétrico	Viés	EQM
0	1,00000	0,66998	- 0,002607	0,00643
1000	0,67035	0,35264	- 0,000970	0,00203
2000	0,44936	0,16488	0,000033	0,00535
3000	0,30123	0,07796	0,000424	0,00284
4000	0,20193	0,03644	0,000537	0,00330
5000	0,13536	0,01728	- 0,001231	0,00165
6000	0,09074	0,00806	0,000244	0,00090
7000	0,06083	0,00324	- 0,000417	0,00072
8000	0,04078	0,00198	- 0,000094	0,00051
9000	0,02733	0,00066	0,000070	0,00027
10000	0,01832	0,00025	- 0,000076	0,00389
11000	0,01228	0,00014	- 0,000057	0,00011
12000	0,00823	0,00010	0,000040	0,00012
13000	0,00552	0,00008	- 0,000038	0,00006
14000	0,00370	0,00002	- 0,000003	0,00004
15000	0,00248	-	-	-
16000	0,00166	-	-	-
17000	0,00111	-	-	-
18000	0,00075	-	-	-
19000	0,00050	-	-	-
20000	0,00034	-	-	-
21000	0,00023	-	-	-
22000	0,00015	-	-	-
23000	0,00010	-	-	-
24000	0,00007	-	-	-
25000	0,00005	-	-	-
26000	0,00003	-	-	-
27000	0,00002	-	-	-
28000	0,00001	-	-	-
29000	0,00001	-	-	-
30000	0,00001	-	-	-

# Apêndice C

## Tabelas originais dos dados simulados de um modelo VAR(1) com parâmetros controlados

**Tabela C.1:** Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 1\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\phi_{12}$	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9	0
$\phi_{43}$	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9	0
R\$ -	0,9406	0,9416	0,9413	0,9403	0,9412	0,9409	0,9414	0,9411	0,9415	0,9418	0,5193
R\$ 100	0,9362	0,9378	0,9367	0,9368	0,9373	0,9361	0,9367	0,9379	0,9373	0,9345	0,5169
R\$ 500	0,9182	0,9189	0,9203	0,9189	0,9182	0,9198	0,9168	0,9115	0,9202	0,9176	0,5118
R\$ 1.000	0,8925	0,8957	0,8956	0,8925	0,8932	0,8950	0,8921	0,8861	0,8958	0,8998	0,5110
R\$ 2.000	0,8396	0,8408	0,8419	0,8354	0,8406	0,8424	0,8364	0,8379	0,8451	0,8367	0,5106
R\$ 3.000	0,7863	0,7840	0,7905	0,7830	0,7791	0,7911	0,7837	0,7658	0,7998	0,7861	0,5104
R\$ 5.000	0,6823	0,6868	0,6870	0,6827	0,6807	0,6908	0,6801	0,6742	0,7019	0,6811	0,5100
R\$ 7.000	0,5825	0,5875	0,5877	0,5841	0,5858	0,5906	0,5788	0,5773	0,6118	0,5811	0,5080
R\$ 10.000	0,4601	0,4622	0,4662	0,4552	0,4594	0,4640	0,4521	0,4480	0,4899	0,4577	0,5011
R\$ 13.000	0,3447	0,3544	0,3546	0,3443	0,3516	0,3616	0,3457	0,3417	0,3847	0,3485	0,5009
R\$ 15.000	0,2794	0,2877	0,2889	0,2851	0,2841	0,3007	0,2812	0,2721	0,3237	0,2864	0,5001
R\$ 20.000	0,1552	0,1663	0,1669	0,1598	0,1528	0,1751	0,1551	0,1477	0,1956	0,1619	0,5000
R\$ 25.000	0,0847	0,0856	0,0867	0,0845	0,0819	0,0932	0,0836	0,0792	0,1085	0,0856	0,4991
R\$ 30.000	0,0376	0,0412	0,0418	0,0389	0,0405	0,0471	0,0410	0,0374	0,0572	0,0419	0,4984
R\$ 35.000	0,0174	0,0183	0,0185	0,0165	0,0113	0,0223	0,0170	0,0081	0,0276	0,0197	0,4975
R\$ 40.000	0,0066	0,0069	0,0070	0,0066	0,0052	0,0094	0,0071	0,0031	0,0124	0,0075	0,4956
R\$ 45.000	0,0025	0,0025	0,0026	0,0024	0,0024	0,0037	0,0026	0,0020	0,0053	0,0028	0,4928
R\$ 50.000	0,0008	0,0010	0,0011	0,0008	0,0009	0,0012	0,0008	0,0008	0,0021	0,0010	0,4918
R\$ 55.000	0,0002	0,0003	0,0004	0,0002	0,0002	0,0004	0,0002	0,0001	0,0007	0,0003	0,4904

**Tabela C.2:** Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 0, 3\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	0,9406	0,9374	0,9379	0,9376	0,9359	0,9378	0,9435	0,9313	0,9366	0,9431	0,9316
R\$ 100	0,9362	0,9338	0,9346	0,9321	0,9300	0,9346	0,9329	0,9274	0,9273	0,9280	0,9264
R\$ 500	0,9182	0,9148	0,9124	0,9122	0,9142	0,9119	0,9143	0,9091	0,9156	0,9161	0,9195
R\$ 1.000	0,8925	0,8887	0,8927	0,8920	0,8890	0,8902	0,8990	0,8823	0,8919	0,8880	0,8826
R\$ 2.000	0,8396	0,8330	0,8393	0,8350	0,8359	0,8273	0,8461	0,8271	0,8398	0,8409	0,8412
R\$ 3.000	0,7863	0,7831	0,7842	0,7809	0,7755	0,7834	0,8057	0,7781	0,7895	0,7911	0,7891
R\$ 5.000	0,6823	0,6782	0,6793	0,6807	0,6845	0,6880	0,6915	0,6758	0,7024	0,7114	0,7040
R\$ 7.000	0,5825	0,5785	0,5938	0,6011	0,6052	0,5991	0,6071	0,6055	0,6129	0,6298	0,6201
R\$ 10.000	0,4601	0,4517	0,4638	0,4791	0,4748	0,4827	0,4921	0,4804	0,4937	0,5065	0,4984
R\$ 13.000	0,3447	0,3589	0,3542	0,3600	0,3521	0,3726	0,3827	0,3776	0,3950	0,4104	0,4047
R\$ 15.000	0,2794	0,2915	0,2915	0,2990	0,3005	0,3142	0,3293	0,3199	0,3390	0,3581	0,3442
R\$ 20.000	0,1552	0,1672	0,1663	0,1725	0,1670	0,1910	0,2021	0,1960	0,2136	0,2373	0,2201
R\$ 25.000	0,0847	0,0918	0,0968	0,1058	0,1024	0,1061	0,1120	0,1114	0,1266	0,1410	0,1399
R\$ 30.000	0,0376	0,0446	0,0496	0,0565	0,0563	0,0563	0,0659	0,0597	0,0740	0,0906	0,0851
R\$ 35.000	0,0174	0,0199	0,0205	0,0328	0,0318	0,0291	0,0390	0,0368	0,0388	0,0595	0,0428
R\$ 40.000	0,0066	0,0086	0,0092	0,0101	0,0109	0,0123	0,0228	0,0215	0,0185	0,0395	0,0249
R\$ 45.000	0,0025	0,0032	0,0037	0,0046	0,0045	0,0051	0,0160	0,0149	0,0079	0,0110	0,0106
R\$ 50.000	0,0008	0,0010	0,0014	0,0015	0,0015	0,0021	0,0022	0,0022	0,0042	0,0067	0,0053
R\$ 55.000	0,0002	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0007	0,0008	0,0007	0,0016	0,0017	0,0017

**Tabela C.3:** Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 0, 6\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	0,9406	0,9159	0,9107	0,9198	0,8930	0,8843	0,8824	0,8441	0,8519	0,8964	0,8000
R\$ 100	0,9362	0,9131	0,9088	0,9169	0,8901	0,8780	0,8811	0,8348	0,8408	0,8944	0,7864
R\$ 500	0,9182	0,8940	0,8891	0,8805	0,8715	0,8596	0,8591	0,8036	0,8240	0,8691	0,7880
R\$ 1.000	0,8925	0,8706	0,8580	0,8627	0,8427	0,8311	0,8223	0,8011	0,8146	0,8313	0,7435
R\$ 2.000	0,8396	0,8246	0,8140	0,8178	0,7827	0,7870	0,7906	0,7501	0,7699	0,8084	0,7277
R\$ 3.000	0,7863	0,7626	0,7637	0,7499	0,7395	0,7308	0,7500	0,7193	0,7099	0,7641	0,6849
R\$ 5.000	0,6823	0,6645	0,6814	0,6802	0,6556	0,6555	0,6832	0,6576	0,6370	0,6876	0,6620
R\$ 7.000	0,5825	0,5839	0,5896	0,5826	0,5834	0,5534	0,5981	0,5849	0,5233	0,6177	0,5860
R\$ 10.000	0,4601	0,4668	0,4556	0,4848	0,4875	0,4204	0,5122	0,4972	0,3901	0,5422	0,5284
R\$ 13.000	0,3447	0,3770	0,3679	0,3782	0,3910	0,3262	0,4436	0,4290	0,2880	0,4980	0,4822
R\$ 15.000	0,2794	0,3196	0,2937	0,3382	0,3348	0,2517	0,4023	0,3885	0,2286	0,4545	0,4309
R\$ 20.000	0,1552	0,2076	0,1802	0,2293	0,2315	0,1680	0,2706	0,2670	0,1281	0,3535	0,3298
R\$ 25.000	0,0847	0,1210	0,1008	0,1458	0,1360	0,0873	0,1816	0,2087	0,0698	0,2853	0,2573
R\$ 30.000	0,0376	0,0697	0,0556	0,0859	0,0828	0,0327	0,1304	0,1474	0,0170	0,2299	0,2035
R\$ 35.000	0,0174	0,0394	0,0264	0,0539	0,0522	0,0165	0,0771	0,0868	0,0071	0,1782	0,1586
R\$ 40.000	0,0066	0,0196	0,0129	0,0262	0,0281	0,0050	0,0543	0,0706	0,0039	0,1534	0,1201
R\$ 45.000	0,0025	0,0096	0,0084	0,0158	0,0140	0,0031	0,0403	0,0405	0,0016	0,1195	0,0757
R\$ 50.000	0,0008	0,0039	0,0025	0,0057	0,0085	0,0009	0,0152	0,0285	0,0005	0,0584	0,0347
R\$ 55.000	0,0002	0,0015	0,0009	0,0035	0,0038	0,0007	0,0087	0,0184	0,0003	0,0311	0,0226

**Tabela C.4:** Estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 0,9\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	0,9406	0,7416	0,7675	0,7873	0,7353	0,7487	0,8129	0,7176	0,7018	0,8546	0,6935
R\$ 100	0,9362	0,7260	0,7563	0,7787	0,7147	0,7386	0,7964	0,6969	0,6907	0,8300	0,6729
R\$ 500	0,9182	0,7117	0,7386	0,7559	0,7057	0,7277	0,7822	0,6923	0,6804	0,8175	0,6716
R\$ 1.000	0,8925	0,6701	0,6960	0,7124	0,6794	0,6627	0,7416	0,6710	0,6375	0,7746	0,6508
R\$ 2.000	0,8396	0,6570	0,6768	0,6957	0,6637	0,6582	0,7340	0,6652	0,6238	0,7678	0,6494
R\$ 3.000	0,7863	0,6532	0,6575	0,6804	0,6615	0,6347	0,7333	0,6685	0,6038	0,7665	0,6411
R\$ 5.000	0,6823	0,5877	0,5826	0,6103	0,5883	0,5719	0,6656	0,5944	0,5392	0,6974	0,5879
R\$ 7.000	0,5825	0,5854	0,5612	0,5990	0,5804	0,5427	0,6339	0,5871	0,5187	0,6765	0,5760
R\$ 10.000	0,4601	0,5321	0,4431	0,5471	0,5464	0,4167	0,5826	0,5591	0,3887	0,6345	0,5593
R\$ 13.000	0,3447	0,4918	0,3510	0,5226	0,5050	0,3267	0,5308	0,5182	0,2923	0,5951	0,5203
R\$ 15.000	0,2794	0,4776	0,3016	0,5048	0,4801	0,2779	0,5216	0,4977	0,2306	0,5884	0,5045
R\$ 20.000	0,1552	0,4212	0,2492	0,4541	0,4318	0,1669	0,4839	0,4468	0,1132	0,5554	0,4524
R\$ 25.000	0,0847	0,3804	0,1562	0,4223	0,3995	0,0746	0,4586	0,4042	0,0585	0,5313	0,4165
R\$ 30.000	0,0376	0,3358	0,1137	0,3744	0,3518	0,0312	0,4095	0,3706	0,0129	0,4793	0,3814
R\$ 35.000	0,0174	0,2845	0,0834	0,3414	0,3100	0,0245	0,3721	0,3336	0,0071	0,4413	0,3409
R\$ 40.000	0,0066	0,2430	0,0515	0,3093	0,2882	0,0123	0,3435	0,3027	0,0024	0,4060	0,3106
R\$ 45.000	0,0025	0,2146	0,0104	0,2722	0,2417	0,0185	0,3112	0,2681	0,0020	0,3630	0,2794
R\$ 50.000	0,0008	0,1440	0,0073	0,2338	0,2011	0,0093	0,2798	0,2288	0,0001	0,3227	0,2493
R\$ 55.000	0,0002	0,1256	0,0016	0,2118	0,1930	0,0079	0,2445	0,2144	0,0001	0,2874	0,2313

**Tabela C.5:** Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 1\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\phi_{12}$	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9	0
$\phi_{43}$	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9	0
R\$ -	0,0075	0,0074	0,0074	0,0075	0,0074	0,0075	0,0074	0,0074	0,0074	0,0075	0,0158
R\$ 100	0,0077	0,0076	0,0077	0,0077	0,0077	0,0077	0,0077	0,0077	0,0077	0,0078	0,0158
R\$ 500	0,0087	0,0086	0,0086	0,0086	0,0086	0,0086	0,0087	0,0085	0,0086	0,0087	0,0158
R\$ 1.000	0,0098	0,0097	0,0097	0,0098	0,0098	0,0097	0,0098	0,0097	0,0097	0,0099	0,0158
R\$ 2.000	0,0116	0,0116	0,0115	0,0117	0,0115	0,0115	0,0117	0,0114	0,0114	0,0117	0,0158
R\$ 3.000	0,0130	0,0130	0,0129	0,0130	0,0129	0,0129	0,0130	0,0127	0,0127	0,0130	0,0158
R\$ 5.000	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147	0,0146	0,0146	0,0147	0,0144	0,0145	0,0147	0,0158
R\$ 7.000	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0155	0,0155	0,0156	0,0154	0,0154	0,0156	0,0158
R\$ 10.000	0,0158	0,0158	0,0158	0,0157	0,0158	0,0158	0,0157	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158
R\$ 13.000	0,0150	0,0151	0,0150	0,0150	0,0152	0,0152	0,0150	0,0154	0,0154	0,0151	0,0158
R\$ 15.000	0,0142	0,0143	0,0143	0,0143	0,0145	0,0145	0,0142	0,0148	0,0148	0,0143	0,0158
R\$ 20.000	0,0115	0,0118	0,0117	0,0116	0,0120	0,0120	0,0114	0,0126	0,0125	0,0116	0,0158
R\$ 25.000	0,0088	0,0088	0,0088	0,0088	0,0091	0,0092	0,0088	0,0099	0,0098	0,0088	0,0158
R\$ 30.000	0,0060	0,0063	0,0063	0,0061	0,0068	0,0067	0,0063	0,0074	0,0073	0,0063	0,0158
R\$ 35.000	0,0041	0,0042	0,0040	0,0040	0,0046	0,0047	0,0041	0,0052	0,0052	0,0044	0,0158
R\$ 40.000	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0030	0,0030	0,0027	0,0036	0,0035	0,0027	0,0158
R\$ 45.000	0,0016	0,0016	0,0016	0,0015	0,0018	0,0019	0,0016	0,0022	0,0023	0,0017	0,0158
R\$ 50.000	0,0009	0,0010	0,0009	0,0009	0,0011	0,0011	0,0009	0,0014	0,0014	0,0010	0,0158
R\$ 55.000	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0005	0,0009	0,0008	0,0005	0,0158

**Tabela C.6:** Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 0,3\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	0,0075	0,0077	0,0076	0,0075	0,0077	0,0076	0,0077	0,0080	0,0078	0,0079	0,0085
R\$ 100	0,0077	0,0079	0,0078	0,0078	0,0081	0,0078	0,0079	0,0082	0,0082	0,0082	0,0088
R\$ 500	0,0087	0,0088	0,0089	0,0089	0,0089	0,0090	0,0089	0,0091	0,0088	0,0090	0,0095
R\$ 1.000	0,0098	0,0099	0,0098	0,0098	0,0099	0,0099	0,0099	0,0102	0,0098	0,0100	0,0105
R\$ 2.000	0,0116	0,0118	0,0116	0,0117	0,0117	0,0117	0,0117	0,0120	0,0116	0,0116	0,0121
R\$ 3.000	0,0130	0,0130	0,0130	0,0131	0,0132	0,0128	0,0130	0,0131	0,0129	0,0129	0,0133
R\$ 5.000	0,0147	0,0148	0,0148	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147	0,0148	0,0145	0,0145	0,0148
R\$ 7.000	0,0156	0,0156	0,0155	0,0155	0,0156	0,0155	0,0155	0,0156	0,0154	0,0154	0,0156
R\$ 10.000	0,0158	0,0157	0,0158	0,0158	0,0157	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158
R\$ 13.000	0,0150	0,0152	0,0151	0,0152	0,0151	0,0153	0,0153	0,0152	0,0155	0,0155	0,0152
R\$ 15.000	0,0142	0,0144	0,0144	0,0143	0,0144	0,0147	0,0146	0,0145	0,0150	0,0150	0,0145
R\$ 20.000	0,0115	0,0118	0,0118	0,0119	0,0118	0,0124	0,0125	0,0120	0,0130	0,0130	0,0124
R\$ 25.000	0,0088	0,0091	0,0093	0,0093	0,0092	0,0097	0,0100	0,0095	0,0105	0,0107	0,0099
R\$ 30.000	0,0060	0,0065	0,0069	0,0067	0,0066	0,0073	0,0073	0,0069	0,0083	0,0081	0,0078
R\$ 35.000	0,0041	0,0044	0,0045	0,0047	0,0046	0,0053	0,0053	0,0051	0,0061	0,0062	0,0056
R\$ 40.000	0,0026	0,0029	0,0030	0,0030	0,0030	0,0035	0,0036	0,0034	0,0043	0,0044	0,0038
R\$ 45.000	0,0016	0,0018	0,0019	0,0019	0,0019	0,0022	0,0024	0,0022	0,0028	0,0031	0,0027
R\$ 50.000	0,0009	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0014	0,0014	0,0013	0,0020	0,0019	0,0018
R\$ 55.000	0,0004	0,0006	0,0007	0,0006	0,0006	0,0008	0,0009	0,0008	0,0013	0,0012	0,0012

**Tabela C.7:** Erros-padrões estimados para as estimativas das probabilidades de ruína, em função do capital inicial  $U_0$ , com  $\phi_{ii} = \{0; 0,6\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$  do modelo VAR(1) simulado.

$\phi_{ii}$	0	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	0,0075	0,0088	0,0090	0,0091	0,0098	0,0101	0,0102	0,0115	0,0112	0,0114	0,0126
R\$ 100	0,0077	0,0089	0,0091	0,0092	0,0099	0,0104	0,0102	0,0117	0,0116	0,0115	0,0130
R\$ 500	0,0087	0,0097	0,0099	0,0103	0,0106	0,0110	0,0110	0,0126	0,0120	0,0122	0,0129
R\$ 1.000	0,0098	0,0106	0,0110	0,0109	0,0115	0,0118	0,0121	0,0126	0,0123	0,0124	0,0138
R\$ 2.000	0,0116	0,0120	0,0123	0,0122	0,0130	0,0129	0,0129	0,0137	0,0133	0,0131	0,0141
R\$ 3.000	0,0130	0,0135	0,0134	0,0137	0,0139	0,0135	0,0137	0,0142	0,0139	0,0141	0,0147
R\$ 5.000	0,0147	0,0149	0,0147	0,0147	0,0150	0,0150	0,0147	0,0150	0,0148	0,0149	0,0150
R\$ 7.000	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0155	0,0155	0,0156	0,0153	0,0154	0,0156
R\$ 10.000	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158	0,0158
R\$ 13.000	0,0150	0,0153	0,0153	0,0153	0,0154	0,0155	0,0156	0,0157	0,0158	0,0158	0,0158
R\$ 15.000	0,0142	0,0147	0,0149	0,0148	0,0149	0,0152	0,0152	0,0154	0,0155	0,0156	0,0157
R\$ 20.000	0,0115	0,0128	0,0131	0,0131	0,0133	0,0137	0,0137	0,0140	0,0146	0,0147	0,0149
R\$ 25.000	0,0088	0,0103	0,0107	0,0112	0,0108	0,0121	0,0122	0,0129	0,0131	0,0136	0,0138
R\$ 30.000	0,0060	0,0081	0,0084	0,0089	0,0087	0,0104	0,0103	0,0112	0,0119	0,0119	0,0127
R\$ 35.000	0,0041	0,0062	0,0067	0,0065	0,0070	0,0084	0,0083	0,0089	0,0099	0,0106	0,0116
R\$ 40.000	0,0026	0,0044	0,0047	0,0051	0,0052	0,0069	0,0065	0,0081	0,0091	0,0092	0,0103
R\$ 45.000	0,0016	0,0031	0,0038	0,0036	0,0037	0,0054	0,0054	0,0062	0,0075	0,0075	0,0084
R\$ 50.000	0,0009	0,0020	0,0023	0,0024	0,0029	0,0038	0,0039	0,0053	0,0065	0,0061	0,0078
R\$ 55.000	0,0004	0,0012	0,0018	0,0019	0,0019	0,0030	0,0028	0,0043	0,0050	0,0045	0,0068





**Tabela C.12:** *P*-valores estimados para a probabilidade de ruína a partir de dados simulados de um modelo VAR(1), com  $\phi_{ii} = \{0; 0,9\}$  e diferentes valores fixados de parâmetros  $\phi_{12}$  e  $\phi_{43}$ , em função do capital inicial  $U_0$ .

$\phi_{ii}$	0	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
$\phi_{12}$	0	0	0,3	0	0,3	0,6	0	0,6	0,9	0	0,9
$\phi_{43}$	0	0	0	0,3	0,3	0	0,6	0,6	0	0,9	0,9
R\$ -	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 100	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 1.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 2.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 3.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 5.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 7.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 10.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 13.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 15.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
R\$ 20.000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,8030	1,0000	1,0000
R\$ 25.000	<0,0001	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	0,0506	1,0000	1,0000	0,0038	1,0000	1,0000
R\$ 30.000	<0,0001	1,0000	0,8163	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000
R\$ 35.000	<0,0001	1,0000	0,1387	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000
R\$ 40.000	<0,0001	1,0000	0,0007	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000
R\$ 45.000	<0,0001	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000
R\$ 50.000	<0,0001	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000
R\$ 55.000	<0,0001	0,9928	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000	<0,0001	1,0000	1,0000

## **Apêndice D**

### **Tabelas originais da aplicação do método ao conjunto de dados reais**











# Referências Bibliográficas

- Akerlof, G. A. (1970), “The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism,” *The Quarterly Journal of Economics*, 3, 488–500. [8](#)
- Albrecher, H. e Boxma, O. (2004), “A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 245–254. [11](#)
- Albrecher, H., Constantinescu, C., e Loisel, S. (2011), “Explicit ruin formulas for models with dependence among risks,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 265–270. [11](#)
- Albrecher, H. e Kantor, J. (2002), “Simulation of Ruin Probabilities for Risk Process of Markovian Type,” *Monte Carlo Methods and Applications*, 8, 111–127. [10](#)
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, M., e Heath, D. (1997), “Think Coherently,” *Risk*, 11, 68–71. [24](#)
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, M., Heath, D., e Ku, H. (2007), “Coherent multiperiod risk-adjusted values and Bellman’s principle,” *Annals of Operations Research*, 5–22. [24](#)
- Asimit, A., Badescu, A. M., Haberman, S., e Kim, E. S. (2016), “Efficient risk allocation within a non-life insurance group under Solvency II Regime,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 66, 69–76. [23](#)
- Asmussen, S. (1985), “Conjugate processes and the simulation of ruin problems,” *Stochastic Processes and their Applications*, 20, 213–229. [1](#), [9](#)
- (2000), *Ruin Probabilities*, Singapore: World Scientific. [7](#)
- Asmussen, S. e Binswanger, T. (1997), “Simulation of Ruin Probabilities for Subexponential Claims,” *ASTIN Bulletin*, 27, 297–318. [10](#)
- Asmussen, S. e Rolski, T. (1991), “Computational methods in risk theory: A matrix-algorithmic approach,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 10, 259–274. [10](#)
- Avram, F., Chedom, D. F., e Horváth, A. (2011), “On moments based Padé approximations of ruin probabilities,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 3215–3228. [10](#)
- Baumgartner, B. e Gatto, R. (2010), “A bootstrap test for the probability of ruin in the compound poisson risk process,” *ASTIN Bulletin*, 40, 241–255. [1](#), [10](#)
- Beekman, J. A. (1985), “A Series for Infinite Time Ruin Probabilities,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 4, 129–134. [9](#)
- Bladt, M., Nielsen, B. F., e Samorodnitsky, G. (2015), “Calculation of ruin probabilities for a dense class of heavy tailed distributions,” *Scandinavian Actuarial Journal*, 573–591. [22](#)

- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., e Nesbitt, C. J. (1997), *Actuarial Mathematics*, Schaumburg, Illinois: Society of Actuaries. 9, 10, 11, 21, 37
- Chan, G. K. C. e Yang, H. (2006), “Upper bounds for ruin probability under time series models,” *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 529–542. 2, 12, 26, 37
- Chen, J., Xu, H., e Cheng, F. (2016), “The product of dependent random variables with applications to a discrete-time risk model,” *Working Paper*, 1–13. 12
- Christ, R. e Steinebach, J. (1995), “Estimating the adjustment coefficient in an ARMA(p,q) risk model,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 149–161. 11
- Cossette, H. e Marceau, E. (2000), “The discrete-time risk model with correlated classes of business,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2-3, 133–149. 11
- Cramér, H. (1930), “On the Mathematical Theory of Risk,” *Skandia Jubilee Volume, Stockholm*. 1
- DeVylder, F. (1977), “Martingales and Ruin in a Dynamic Risk Process,” *Scandinavian Actuarial Journal*, 217–225. 9
- Dufresne, F. e Gerber, H. (1989), “Three methods to calculate the probability of ruin,” *ASTIN Bulletin*, 19, 71–90. 1, 9, 22
- Efron, B. (1979), “Bootstrap methods: Another look at the jackknife,” *The Annals of Statistics*, 7, 1–26. 43
- (1982), “The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans,” *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia*, 38. 43
- Efron, B. e Tibshirani, R. (1993), *Introduction to the bootstrap*, New York: Chapman & Hall: Monographs on statistics and applied probability. 38
- Embrechts, P. e Mikosch, T. (1991), “A bootstrap procedure for estimating the adjustment coefficient,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 10, 181–190. 37
- Embrechts, P. e Veraverbeke, N. (1982), “Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 1, 55–72. 10
- Frees, E. W. (1986), “Nonparametric estimation of the probability of ruin,” *ASTIN Bulletin*, 16, S81–S90. 10
- Garrido, J., Genest, C., e Schulz, J. (2016), “Generalized linear models for dependent frequency and severity of insurance claims,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 70, 205–215. 12
- Gerber, H. U. (1981), “On the probability of ruin in an autoregressive model,” *Bulletin of the Association of Swiss Actuaries*, 131–141. 11
- (1982), “Ruin theory in the linear model,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 3, 177–184. 11
- Granger, C. W. J. (1969), “Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods,” *Econometrica*, 424–438. 16

- Griffin, P. S., Maller, R. A., e Van Schaik, K. (2012), “Asymptotic distributions of the overshoot and undershoots for the Lévy insurance risk process in the Cramér and convolution equivalent cases,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 51, 382–392. 10
- Hall, P. (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, New York: Springer-Verlag. 43
- Hastie, T., Tibshirani, R., e Friedman, J. (2008), *The Elements of Statistical Learning*, New York: Springer-Verlag. 43
- Huang, W., Weng, C., e Zhang, Y. (2014), “Multivariate risk models under heavy-tailed risks,” *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 341–360. 12
- Jentsch, C. e Politis, D. N. (2015), “Covariance Matrix Estimation and Linear Process Bootstrap for Multivariate Time Series of Possibly Increasing Dimension,” *The Annals of Statistics*, 43, 1117–1140. 43
- Kahn, P. M. (1962), “An introduction to collective risk theory and its application to stop-loss reinsurance (with discussion),” *Transactions of Society of Actuaries*, 14, 400–449. 9
- Kreiss, J. P. e Lahiri, S. N. (2012), “Bootstrap Methods for Time Series,” *Time Series Analysis: Methods and Applications*, 30, 3–26. 43
- Kwan, I. e Yang, H. (2010), “Dependent insurance risk model: deterministic threshold,” *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 5, 765–776. 11
- Li, S., Lu, Y., e Garrido, J. (2009), “A review of discrete-time risk models,” *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2, 321–337. 11
- Liu, R. e Wang, D. (2016), “The ruin probabilities of a discrete-time risk model with dependent insurance and financial risks,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80–94. 12, 85
- Lütkepohl, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin: Springer-Verlag. 13, 14, 17, 66, 67, 86
- Lundberg, F. O. (1903), “Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks,” *Almqvist and Wiksell*. 1, 9
- Malinovskii, V. K. e Kosova, K. O. (2014), “Simulation analysis of ruin capital in Sparre Andersen’s model of risk,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 59, 184–193. 10
- McNeil, A. J., Frey, R., e Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management: concepts, techniques and tools*, New Jersey: Princeton University Press. 13, 14
- Mikosch, T. e Samorodnitsky, G. (2000), “Ruin probability with claims modeled by a stationary ergodic stable process,” *The Annals of Probability*, 28, 1814–1851. 10
- Morettin, P. A. (2008), *Econometria Financeira*, São Paulo: Edgard Blücher. 13, 14
- Pitts, S. (1994), “Non-parametric estimation of compound distributions with applications in insurance,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46, 537–555. 10, 22, 43, 75, 79
- Promislow, S. D. (1991), “The probability of ruin in a process with dependent increments,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 99–107. 11

- Quenouille, M. (1949), “Approximate tests of correlation in time-series,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 11, 68–84. 43
- Ramsey, C. M. (1991), “The linear model revisited,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 2, 137–143. 11
- Seal, H. L. (1978), “From Aggregate Claims Distribution to Probability of Ruin,” *ASTIN Bulletin*, 10, 47–53. 9
- Shao, J. e Tu, D. (1995), *The Jackknife and Bootstrap*, New York: Springer-Verlag. 42, 43
- Steele, J. M. (2000), *Stochastic Calculus and Financial Applications*, New York: Springer-Verlag. 17
- Trufin, J., Albrecher, H., e Denuit, M. (2011), “Ruin problems under IBNR dynamics,” *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27, 619–632. 37
- Tukey, J. (1958), “Bias and confidence in not quite large samples (abstract),” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 29, 614. 43
- Valdez, E. A. e Mo, K. (2002), “Ruin probabilities with dependent claims,” in *Proceedings of the 2nd Conference in Actuarial Science and Finance*. 10
- Vidmar, M. (2016), “Ruin under stochastic dependence between premium and claim arrivals,” *Working Paper*. 2, 10, 85
- Wan, L. M., Yuen, K. C., e Li, W. C. (2005), “Ultimate ruin probability for a time-series risk model with dependent classes of insurance business,” *Journal of Actuarial Practice*, 193–214. 11, 37
- Wat, K. P. (2012), “Discrete-time Insurance Risk Models with Dependence Structures,” Ph.D. thesis, The University of Hong Kong, Hong Kong. 1, 12, 37
- Yang, H. e Zhang, L. (2003), “Martingale method for ruin probability in an autorregressive model with constant rate,” *Probability in the Engeneering and Informational Sciences*, 183–198. 11, 12
- Yang, Y. e Konstantinides, D. G. (2015), “Asymptotics for ruin probabilities in a discrete-time risk model with dependent financial and insurance risks,” *Scandinavian Actuarial Journal*, 641–659. 12, 85
- Zhang, Z. e Yang, H. (2014), “Nonparametric estimation for the ruin probability in a Lévy risk model under low-frequency observation,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 59, 168–177. 10
- Zhang, Z., Yuen, K. C., e Li, W. K. (2007), “A time-series risk model with constant interest for dependent classes of business,” *Insurance: Mathematics and Economics*, 1, 32–40. 11, 12, 37