

Teoremas limite para um modelo
epidêmico no grafo completo

Alexandre Ribeiro Leichsenring

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Fábio Prates Machado

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES e CNPq

São Paulo, setembro de 2007

Resumo

Estudamos o seguinte sistema de passeios aleatórios a tempo contínuo no grafo completo: em cada vértice do grafo existem partículas ativas e inativas, e cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simétrico a tempo contínuo pelos vértices do grafo. Quando uma partícula ativa entra em contato com uma partícula inativa, esta é ativada e também passa a realizar um passeio aleatório independente pelo grafo. Cada partícula ativa morre no instante em que faz um número inteiro L de saltos (consecutivos ou não) sem ativar nenhuma partícula. O processo morre assim que não há mais partículas ativas. Provamos uma Lei dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite para a proporção de sítios visitados ao final do processo.

Palavras-chave: modelo dos sapos, processos estocásticos, passeios aleatórios, grafo completo.

Abstract

We study the following system of continuous time random walks on the complete graph: there are active and inactive particles living on the vertices of the complete graph, and each active particle performs a continuous time symmetric random walk through the vertices of the graph. When an active particle hits an inactive one the latter becomes active and starts an independent random walk through the graph. Each active particle dies at the moment it reaches an integer number L of jumps (consecutive or not) without activating any particle. The process dies out as soon as there are no more active particles. We prove a Law of Large Numbers and a Central Limit Theorem for the proportion of visited vertices at the end of the process.

Key-words: Frog Model, Stochastic Process, Random Walk, Complete Graph.

Índice

1	O Modelo	1
1.1	Introdução	1
1.2	Referências sobre o Modelo	2
1.3	Descrição do Modelo e Definições	4
2	Teoremas Limite para a Cobertura	9
2.1	Lei dos Grandes Números	9
2.2	Teorema Central do Limite	10
2.3	Número de Saltos do Processo	10
3	Demonstração dos Teoremas	13
3.1	Limite Determinístico da Trajetória	14
3.2	Mudança de Tempo	18
3.3	Redução da Dimensão	22
3.4	Tempo de Duração do Processo Reescalado	23
3.5	Convergência da Cobertura	25
3.6	Teorema Central do Limite	26
3.7	Número de Saltos do Processo	31
	Apêndice	34
	A Teoremas da Probabilidade	35
	Referências Bibliográficas	37

Lista de Figuras

2.1	Efeito da variação de L , ρ_0 e ρ em v_∞	12
2.2	20000 simulações de $\sqrt{n} (v_\infty - v^{(n)}(\gamma^{(n)}))$	12
3.1	Evolução simulada de $a^{(n)}$ e $\tilde{a}^{(n)}$	19
3.2	$\theta^{(n)}(t)$	20
3.3	Simulação Estocástica x Processo Limite (em tempo reescalado)	23
3.4	Ponto fixo de $f(t)$	24
3.5	Comportamento de $\tilde{y}(t)$: 4 situações em termos de ρ , ρ_0 e L	25
3.6	Comportamento de $\tilde{y}(\tilde{v})$: 4 situações em termos de ρ , ρ_0 e L	27

Capítulo 1

O Modelo

1.1 Introdução

Os sistemas de partículas interagentes são um ramo da teoria da probabilidade que reúne modelos suficientemente flexíveis para modelar sistemas reais e imaginários. Nestes modelos, partículas evoluem no espaço e no tempo, seguindo regras simples de interação local, levando em conta essencialmente o que ocorre dentro de uma vizinhança (finita ou não) da sua posição no espaço (os livros de Liggett [17] e [18] e o de Durrett [14] são importantes referências teóricas). Parte do atrativo teórico destes modelos está no fato de combinarem uma dinâmica local bastante simples com um comportamento global espacial e temporal bastante rico. Do ponto de vista das aplicações, chama a atenção uma rica conexão com outras áreas da ciência. Inicialmente desenvolveu-se uma interface bastante ampla com a Física, mas à medida que seu estudo foi evoluindo, descobriu-se atraentes possibilidades de aplicações na Biologia, Ciências Sociais e Economia, para citar algumas áreas. Entre várias possibilidades, os sistemas de partículas interagentes - que são tipos de processos estocásticos - podem ser usados para modelar magnetismo, competição entre organismos por espaço físico, crescimento de tumores, espalhamento de infecções ou mesmo sistemas econômicos.

Neste trabalho estudamos questões assintóticas qualitativas de um sistema de

passeios aleatórios em grafos, conhecido como *modelo dos sapos*. Este modelo tem recebido boa dose de atenção recentemente em função de sua simplicidade e flexibilidade, aliados à possibilidade de uma ampla diversidade de tratamento teórico que pode receber. Para citar alguns exemplos mencionamos teorema da forma, transição de fase, limite hidrodinâmico e densidade assintótica.

A dinâmica do sistema estudado neste trabalho pode ser descrita de modo geral da seguinte maneira. Em cada sítio do grafo completo encontra-se um número fixo de partículas. Inicialmente apenas uma proporção de partículas está ativa, enquanto todas as outras encontram-se dormentes. Cada partícula ativa então começa a realizar um passeio aleatório a tempo contínuo com taxa 1 pelos vértices do grafo completo, e toda vez que uma partícula ativa salta para um sítio não visitado, ela ativa a partícula que ali se encontra. A partir do momento em que uma partícula inativa é ativada ela passa a realizar um passeio aleatório independente pelo grafo, ativando todas as partículas inativas que encontra pelo caminho, até o momento em que ela morre. Na versão que estudamos, para um inteiro fixo $L \geq 1$, cada partícula ativa desaparece no instante em que faz L saltos (consecutivos ou não) sem ativar nenhuma partícula. Podemos pensar que cada partícula ativa começa com L vidas e perde uma vida toda vez que salta para um sítio que já foi visitado pelo processo. A partícula ativa morre quando perde sua última vida. A dinâmica prossegue até que não haja mais partículas ativas.

A idéia é examinar a evolução do processo quando o tamanho do grafo tende a infinito, abordando questões assintóticas relacionadas à proporção de vértices visitados e de partículas ativas.

1.2 Referências sobre o Modelo

O modelo dos sapos é uma variação de um modelo para difusão de informação proposto por R. Durrett e K. Ravishankar em 1996. Nesse modelo a idéia é que cada

partícula ativa possui uma certa informação que é transmitida às partículas inativas no momento em que a primeira salta sobre estas últimas. No modelo usual cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simples a tempo discreto e a cada instante de tempo pode morrer independentemente com probabilidade $1 - p$. O primeiro resultado publicado sobre esse modelo é devido a Telcs e Wormald [20], no qual foi referido como *egg model*. Eles provaram que no modelo sem mortes em \mathbb{Z}^d , partindo da configuração inicial com 1 partícula por vértice, a origem é visitada infinitas vezes quase certamente. Popov [19] provou o mesmo para dimensão $d \geq 3$ para a configuração inicial construída da seguinte maneira: uma partícula é colocada em cada vértice $x \neq 0$ com probabilidade $\alpha / \|x\|^2$, onde α é uma constante positiva grande. Em Alves *et al.* [3] foi provado para o modelo dos sapos em \mathbb{Z}^d sem mortes com configuração inicial de 1 partícula por vértice, que o conjunto das posições originais de todas as partículas ativas, reescalado pelo tempo transcorrido, converge para um conjunto não aleatório compacto convexo não vazio, resultado conhecido como *teorema da forma*. Em Alves *et al.* [1] foi demonstrado o teorema da forma para o caso de configuração inicial aleatória, e em Alves *et al.* [4] foram apresentados para \mathbb{Z}^d e para árvores regulares resultados sobre transição de fase e valores assintóticos para parâmetros críticos. Fontes *et al.* [7] discutem a monotonicidade do parâmetro crítico do modelo como uma função do grafo, o que também foi tema da dissertação de mestrado de Leichsenring [9]. Em Lebensztayn *et al.* [8], Lebensztayn *et al.* [5] e Lebensztayn [6] são apresentados resultados sobre transição de fase dos modelos na árvore homogênea. Resultados sobre o modelo a tempo discreto no grafo completo são apresentados em Alves *et al.*[2], em que provam transição de fase sobre o parâmetro relacionado à proporção de vértices visitados pelo processo. Nesse artigo também tratam do processo em que o tempo de vida das partículas depende do passado de todo o processo, apresentando resultados obtidos via análise computacional, simulações e análise de campo médio. O nosso trabalho aborda o processo semelhante, a tempo contínuo, no qual o tempo de vida das partículas está relacionado à evolução do número de vértices visitados e do número de partículas ativas.

Este modelo pode ser visto como um modelo epidêmico descrevendo a evolução de uma infecção/vírus com L estágios numa população de tamanho n . Nessa interpretação, em instantes de tempo dados por um processo de Poisson homogêneo de taxa 1, um indivíduo infectado escolhe aleatoriamente um entre os vértices do sistema. Se no vértice escolhido houver um indivíduo ainda susceptível, este indivíduo então contrai a doença no estágio L e nada acontece ao indivíduo transmissor (que obteve sucesso na propagação do vírus). Por outro lado, se o vértice escolhido não houver um indivíduo susceptível, então o estágio da doença do indivíduo transmissor decresce em uma unidade, matando-o se seu estágio atual é 1. O caso particular em que $L = 1$ é bastante semelhante ao modelo conhecido como modelo epidêmico estocástico geral (SIR Markoviano), que teve sua origem em Bartlett [12]. As letras S, I, R indicam respectivamente os termos “susceptível”, “infectado” e “removido”. Nesse modelo, ao invés de se movimentarem por um grafo, os pontos de um processo de Poisson marcam encontros entre dois indivíduos do sistema, e o tempo de vida de cada indivíduo segue uma variável aleatória com distribuição exponencial. Aqui está a diferença fundamental entre o nosso sistema e o modelo usualmente estudado: no nosso modelo há dependência entre a trajetória de um indivíduo e seu tempo de vida. Para mais detalhes sobre modelos epidêmicos, ver Andersson e Britton [10].

1.3 Descrição do Modelo e Definições

Nesta seção apresentamos algumas definições formais relacionadas ao modelo.

Para $n \geq 3$ seja \mathcal{K}_n o “grafo n -completo com loop”, isto é, o grafo com conjunto de vértices $\mathcal{V} = 1, 2, \dots, n$ e cada par de vértices $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ ligados por um elo. Seja também $L \geq 1$ um inteiro fixo. Na configuração básica do sistema há no instante zero uma partícula em cada vértice de \mathcal{K}_n , e apenas uma delas está ativa, estando as outras inativas.

1 uniformemente por \mathcal{K}_n , ativando as partículas inativas que encontra pelo caminho. Uma partícula inativa é acordada sempre que uma partícula ativa salta para um vértice que ainda não foi visitado pelo processo. Cada partícula ativa, a partir do momento em que é ativada, passa também a se movimentar por \mathcal{K}_n de acordo um passeio aleatório a tempo contínuo de taxa 1 independente. Isso significa que os tempos entre saltos de cada partícula ativa têm distribuição exponencial de parâmetro 1 e a probabilidade de que ela faça um salto para qualquer vértice v em \mathcal{V} é $1/n$. Entretanto, ela é excluída do sistema no instante em que faz L saltos (consecutivos ou não) sem ativar nenhuma partícula. Podemos pensar que cada partícula começa com L vidas e perde uma vida sempre que salta para um vértice que já tenha sido visitado pelo processo. Observe que para todo n o processo acaba quase certamente em algum instante finito.

Para uma realização do processo, considere $V^{(n)}(t)$, o número de vértices visitados até o tempo t , e $A_i^{(n)}(t)$, $i = 1, \dots, L$, o número de partículas ativas com i vidas no tempo t . A evolução do processo pode ser representada pelo vetor

$$Z^{(n)}(t) = (V^{(n)}(t), A_1^{(n)}(t), A_2^{(n)}(t), \dots, A_L^{(n)}(t)) \in \mathbb{Z}^{L+1}.$$

Daqui em diante consideraremos condições iniciais mais gerais para o processo, a saber:

$$V^{(n)}(0) = \rho_0^{(n)} n, \text{ com } \rho_0^{(n)} n \text{ inteiro e tal que } 0 < \rho_0^{(n)} < 1, \quad (1.1)$$

$$A_i^{(n)}(0) = \rho_i^{(n)} n, \text{ com } \rho_i^{(n)} n \text{ inteiro e tal que } \rho_i^{(n)} \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\text{para } i = 1, \dots, L, \text{ e } \sum_{i=1}^L \rho_i^{(n)} > 0.$$

Para qualquer configuração inicial existe uma e apenas uma partícula inativa em cada vértice não visitado.

Observe que o processo morre em algum momento, sendo absorvido no estado $Z^{(n)}(\gamma^{(n)}) = (V, 0, 0, \dots, 0)$ para algum $V \in \{1, \dots, n\}$. As definições 3.13 e 1.2 se referem a quantidades importantes do trabalho.

A seguir definimos duas quantidades importantes do trabalho.

Definição 1.1. Denominamos

$$\gamma^{(n)} = \inf \left\{ t : \sum_{i=1}^L A_i^{(n)}(t) = 0 \right\},$$

o primeiro instante em que não há mais partículas ativas.

Desta maneira, $V^{(n)}(\gamma^{(n)})$ é o número total de vértices visitados ao final do processo. Nosso principal objetivo é estabelecer teoremas limite para a para a proporção $\frac{V^{(n)}(\gamma^{(n)})}{n}$ de vértices visitados ao final do processo.

Definição 1.2. Denominamos

$$v^{(n)}(\gamma^{(n)}) = \frac{V^{(n)}(\gamma^{(n)})}{n}$$

a cobertura do processo em \mathcal{K}_n .

No que segue, assumimos que

$$\rho_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_i^{(n)} \text{ existe para todo } i = 0, \dots, L, \quad (1.3)$$

e definimos

$$\rho = \sum_{i=1}^L i \rho_i,$$

a proporção limite de vidas ativas no tempo zero. Observe que $\rho_0 = \rho = 0$ para a configuração inicial de uma partícula por vértice e uma única ativa no tempo zero.

No próximo capítulo enunciamos os resultados principais do trabalho. O primeiro resultado estabelece a convergência da cobertura do processo quando o número de vértices vai para infinito. No segundo, derivamos um Teorema Central do Limite

para a cobertura. Finalmente, mostramos que a esperança do número de saltos do processo em \mathcal{K}_n reescalado por n converge para uma constante, dada pelo limite de uma função da trajetória do processo. O capítulo 3 é dedicado às provas dos teoremas.

Capítulo 2

Teoremas Limite para a Cobertura

2.1 Lei dos Grandes Números

Lembrando que estamos assumindo 1.3 e que $\rho = \sum_{i=1}^L i \rho_i$, enunciamos uma Lei dos Grandes Números para a cobertura do processo.

Teorema 2.1. $v^{(n)}(\gamma^{(n)})$ converge quase certamente quando $n \rightarrow \infty$, e a quantidade limite, v_∞ , é dada pela solução da equação:

$$v_\infty = v_\infty(\rho_0, \rho, L) = (1 - \rho_0) \exp \{-(L + 1)v_\infty - \rho + (L + 1)\rho_0\}.$$

Observação 2.1. v_∞ pode ser dada explicitamente:

$$v_\infty = 1 - (1 - \rho_0) \exp \{-LambertW(-c_{\rho_0, L} \exp\{-c_{\rho_0, L} - \rho\}) - c_{\rho_0, L} - \rho\},$$

com $c_{\rho_0, L} = (1 - \rho_0)(L + 1)$. A função LambertW é a inversa da função $x \rightarrow xe^x$. Seu ramo principal (que é considerado aqui) assume valores reais no intervalo $[-e^{-1}, \infty]$ e satisfaz $LambertW(x) \geq -1$ para todo $x \geq -e^{-1}$. Mais detalhes podem ser encontrados em Corless *et al.* [13]

Observação 2.2. Para a configuração inicial de uma partícula por vértice,

$$v_\infty = 1 - \exp\{-\text{Lambert}W(-ce^{-c}) - c\}, \quad (2.1)$$

onde $c = L + 1$. Fórmula semelhante aparece no estudo do tamanho final de modelos epidêmicos e o tamanho relativo do componente gigante em certos grafos aleatórios. Sobre isso ver respectivamente Anderson e Britton [10] e Bollobás [11].

2.2 Teorema Central do Limite

A seguir apresentamos o Teorema Central do Limite para a cobertura.

Teorema 2.2. *Suponha que $\rho > 0$ ou que $\rho = 0$ e $\rho_0 < \frac{L}{L+1}$ e seja*

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\rho_0, \rho, L) = \rho + (L + 1)(v_\infty - \rho_0).$$

Então,

$$\sqrt{n} (v^{(n)}(\gamma^{(n)}) - v_\infty) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ indica convergência em distribuição, e $N(0, \sigma^2)$ é a distribuição Gaussiana com média zero e variância dada por

$$\sigma^2 = \sigma^2(\rho_0, \rho, L) = \frac{(1 - v_\infty)(v_\infty - \rho_0 - \tilde{\gamma}(1 - \rho_0)(1 - v_\infty))}{(1 - \rho_0)(L - (L + 1)v_\infty)^2}. \quad (2.2)$$

2.3 Número de Saltos do Processo

Finalmente, provamos:

Teorema 2.3. *Seja $N^{(n)}$ o número de saltos que o processo faz até a absorção. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(N^{(n)})}{n} = \tilde{\gamma}.$$

Ao longo da demonstração dos teoremas será constatado que $\tilde{\gamma}$ é o limite em n de uma função da trajetória do processo em \mathcal{K}_n .

A título de ilustração mostramos na a tabela 2.1 valores aproximados de v_∞ , σ^2 e $\tilde{\gamma}$ para os casos $L = 1, 2, \dots, 6$ na configuração básica $\rho_0 = \rho = 0$.

A figura 2.1 mostra, nos gráficos da linha superior, o efeito da variação de ρ para valores fixos de ρ_0 e L , e nos dá linha inferior, o efeito da variação de ρ_0 para valores fixos de ρ e L .

$L =$	1	2	3	4	5	6
v_∞	0.7968	0.9405	0.9802	0.9930	0.9975	0.9991
σ^2	0.2727	0.0681	0.0211	0.0072	0.0025	0.0009
$\tilde{\gamma}$	1.5936	2.8214	3.9207	4.9651	5.9849	6.9936

Tabela 2.1: Configuração básica ($\rho_0 = \rho = 0$)

Um fato interessante é que para toda condição inicial com ρ e L finitos e $\rho_0 < 1$ a cobertura limite é estritamente menor do que 1.

Na figura 2.2 apresentamos como exemplo o histograma de 20000 simulações de $\sqrt{n} (v^{(n)}(\gamma^{(n)}) - v_\infty)$, para a seguinte configuração: $n = 1000$, $L = 2$, $\rho_0^{(n)} = 0,1$ e $\rho^{(n)} = 0,2$. Sobreposta ao histograma está desenhada a curva da distribuição limite teórica, ou seja, Normal com média 0 e variância dada pela fórmula 2.2.

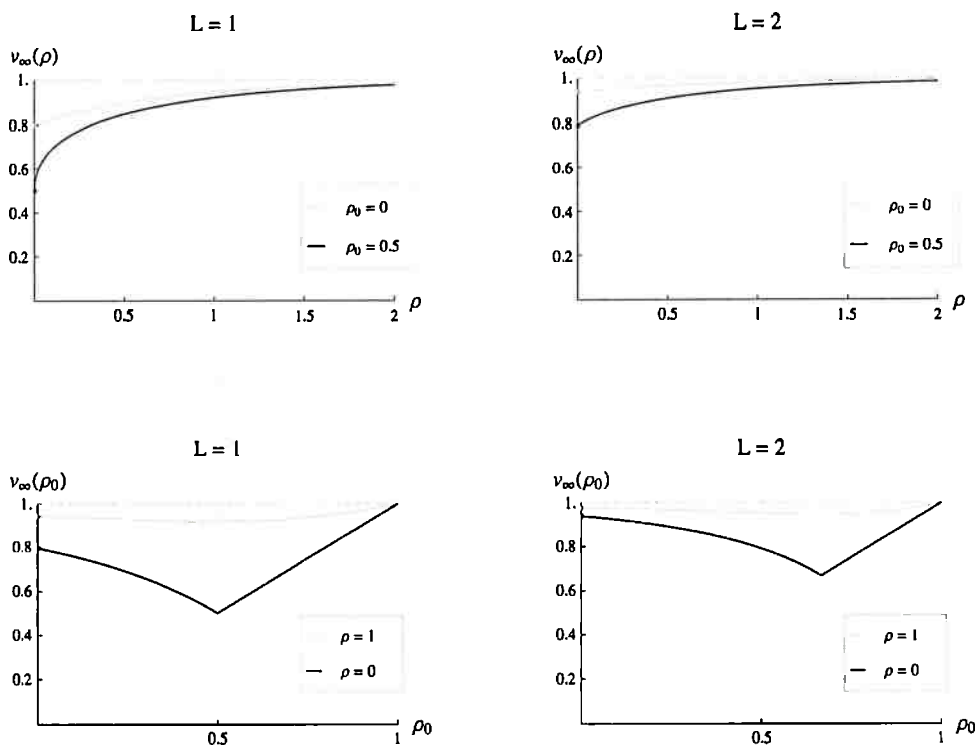
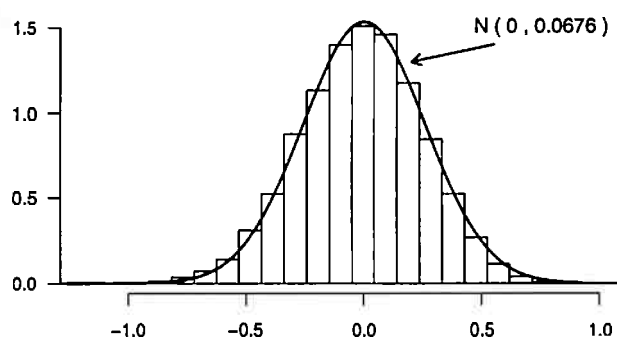


Figura 2.1: Efeito da variação de L , ρ_0 e ρ em v_∞



Capítulo 3

Demonstração dos Teoremas

Este capítulo é dedicado às provas dos teoremas enunciados no capítulo 2. As provas estão fortemente baseadas na teoria das *Density Dependent Markov Chains*, apresentada no capítulo 11 de Ethier e Kurtz [15]. Nas linhas a seguir traçamos um esboço do roteiro das provas.

Primeiramente verificamos que em todo intervalo de tempo limitado o processo estocástico $z^{(n)}(t) = \frac{Z^{(n)}(t)}{n}$ converge quase certamente para um processo determinístico quando $n \rightarrow \infty$. Queremos obter informações sobre o estado do processo nos instantes $\gamma^{(n)}$, porém não temos muito controle sobre o comportamento da seqüência $\{\gamma^{(n)}\}$. Fazendo uso de uma mudança na escala do tempo nós “aceleramos” o processo sem afetar o estado em que ele é absorvido. Dessa maneira, observamos nosso processo num tempo reescalado de tal modo a garantir que os tempo de duração $\tilde{\gamma}^{(n)}$ do processo reescalado convergem para $\tilde{\gamma}$, finito. O teorema 2.1 é obtido ao comprovarmos que o estado final do processo reescalado, isto é, o estado do processo reescalado no momento em que é absorvido, converge para o estado do processo reescalado limite no tempo $\tilde{\gamma}$. O teorema 2.2 resulta da aplicação de um teorema de Ethier e Kurtz [15] para o processo reescalado com dimensão reduzida, ou seja, ao invés de examinar o processo $Z^{(n)}$ em \mathbb{Z}^{L+1} observamos um processo em \mathbb{Z}^2 que resume o comportamento de $Z^{(n)}$ a respeito da evolução do número de vértices visitados. O teorema 2.3 aparece como um

corolário da convergência dos tempos de duração do processo reescalado.

3.1 Limite Determinístico da Trajetória

Nesta seção vamos mostrar que em todo intervalo de tempo limitado a trajetória de $z^{(n)}(t)$ apresenta um limite determinístico quando $n \rightarrow \infty$. Usando uma abordagem construtiva e aplicando a teoria das *Density Dependent Markov Chains*, vamos demonstrar que para todo t finito, a seqüência de processos estocásticos $\{z^{(n)}\}$ converge quase certamente uniformemente em $[0, t]$ para um processo determinístico.

Começamos por observar que $Z^{(n)}(t) = (V^{(n)}(t), A_1^{(n)}(t), \dots, A_L^{(n)}(t))$ é uma cadeia de Markov no reticulado \mathbb{Z}^{L+1} governada por intensidades $q_l^{(n)}(Z)$, $Z, l \in \mathbb{Z}^{L+1}$ representando as taxas de transição do estado Z para o estado $Z + l$. chamando de Λ o conjunto das possíveis transições, então Λ tem $L + 1$ elementos, l_0, l_1, \dots, l_L , onde

$$\begin{aligned} l_0 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 1), \\ l_1 &= (0, -1, 0, \dots, 0, 0), \\ l_i &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{A_{i-1}^{(n)}}, \underbrace{-1}_{A_i^{(n)}}, \dots, 0), \quad i = 2, \dots, L. \end{aligned}$$

Em palavras, l_0 indica a transição do processo quando uma partícula ativa salta para um vértice ainda não visitado, caso em que o número de vértices visitados é acrescido de uma unidade. Além disso, a partícula que originalmente se encontra nesse vértice não visitado torna-se ativa, o que faz aumentar em uma unidade o número de partículas ativas com L vidas. Por outro lado, l_1 indica a morte de uma partícula ativa e para $2 \leq i \leq L$ os l_i apontam o evento em que uma partícula ativa com i vidas perde uma vida. Então, se o processo está no estado $Z = (V, A_1, \dots, A_L) \in \mathbb{Z}^{L+1}$, as taxas $q_l^{(n)}(Z)$, $l \in \Lambda$, são da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
q_{i_0}^{(n)}(Z) &= \left(1 - \frac{V}{n}\right) \sum_{i=1}^L A_i \\
q_{i_i}^{(n)}(Z) &= \frac{V}{n} A_i, \quad i = 1, \dots, L,
\end{aligned}$$

e $q_l^{(n)}(Z) = 0$ para l fora de Λ .

Logo, a distribuição de $Z^{(n)}(t)$ é determinada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z^{(n)}(t+h) = Z + l | Z^{(n)}(t) = Z) &= h q_l^{(n)}(Z) + o(h), \quad Z \in \mathbb{Z}^{L+1}, \quad l \in \Lambda, \\
\mathbf{P}(Z^{(n)}(t+h) = Z | Z^{(n)}(t) = Z) &= 1 - \sum_{l \in \Lambda} h q_l^{(n)}(Z) + o(h). \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Uma maneira de caracterizar esse processo é através de processos de Poisson. Para isso, sejam $\{Y_l(t) : t \geq 0\}$ processos de Poisson padrão (com taxa 1) independentes definidos para cada transição l de Λ . Então, $Z^{(n)}(t)$ pode ser escrito como

$$Z^{(n)}(t) = Z^{(n)}(0) + \sum_{l \in \Lambda} l Y_l \left(\int_0^t q_l^{(n)}(Z^{(n)}(s)) ds \right). \tag{3.2}$$

Para comprovar que 3.2 satisfaz 3.1 lembramos que a probabilidade de uma marca em um processo de Poisson em um curto intervalo é proporcional ao comprimento do intervalo. Dado $Z^{(n)}(t) = Z$, a probabilidade de que haja um salto em $Y_l(\int_0^t q_l^{(n)}(Z^{(n)}(s)) ds)$ durante $(t, t+h)$, ou mais precisamente, durante o intervalo $(\int_0^t q_l^{(n)}(Z^{(n)}(s)) ds, \int_0^{t+h} q_l^{(n)}(Z^{(n)}(s)) ds)$, é $h q_l^{(n)}(Z) + o(h)$, uma vez que o integrando é igual a $q_l^{(n)}(Z)$ até o instante do primeiro salto depois de $\int_0^t q_l^{(n)}(Z^{(n)}(s)) ds$.

Observamos que os processos estão definidos no mesmo espaço de probabilidade para diferentes valores de n , já que os mesmos processos de Poisson são utilizados na construção. Além disso, é importante reparar que embora os processos de Poisson sejam construídos de maneira independente, os termos da soma em 3.2 são dependentes, já que os intervalos de observação dos pontos do processo são dependentes.

Para $Z = (V, A_1, \dots, A_L) \in \mathbb{Z}^{L+1}$ e $l \in \Lambda$, podemos escrever $q_l^{(n)}(Z) = n f_l\left(\frac{Z}{n}\right)$

com

$$\begin{aligned} f_{l_0}\left(\frac{Z}{n}\right) &= \left(1 - \frac{V}{n}\right) \sum_{i=1}^L \frac{A_i}{n} \\ f_{l_i}\left(\frac{Z}{n}\right) &= \frac{V A_i}{n} \quad i = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Se $z^{(n)}(t) = \frac{Z^{(n)}(t)}{n} = (v^{(n)}(t), a_1^{(n)}(t), \dots, a_L^{(n)}(t))$, então $z^{(n)}(t)$ é uma cadeia de Markov com estado de espaços $\{\frac{1}{n}Z : Z \in \mathbb{Z}^{L+1}\}$, e sua distribuição é dada por:

$$z^{(n)}(t) = z^{(n)}(0) + \sum_{l \in \Lambda} \frac{l}{n} Y_l \left(n \int_0^t f_l(z^{(n)}(s)) ds \right). \quad (3.3)$$

Olhando para cada componente, temos

$$\begin{aligned} v^{(n)}(t) &= \rho_0^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - v^{(n)}(s)) a^{(n)}(s) ds \right), \\ a_i^{(n)}(t) &= \rho_i^{(n)} + \frac{1}{n} Y_{i+1} \left(n \int_0^t v^{(n)}(s) a_{i+1}^{(n)}(s) ds \right) - \frac{1}{n} Y_i \left(n \int_0^t v^{(n)}(s) a_i^{(n)}(s) ds \right), \\ &\quad i = 1, \dots, L-1, \\ a_L^{(n)}(t) &= \rho_L^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - v^{(n)}(s)) a^{(n)}(s) ds \right) - \frac{1}{n} Y_L \left(n \int_0^t v^{(n)}(s) a_i^{(n)}(s) ds \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $a^{(n)}(s) = \sum_{i=1}^L a_i^{(n)}(s)$ e Y_i é o processo de Poisson associado ao vetor l_i .

A seguir apresentamos um teorema de convergência para a seqüência de processos $\{z^{(n)}\}$. Refere-se ao teorema 11.2.1 de Ethier e Kurtz [15], onde se pode encontrar a prova. Ele estabelece que em todo intervalo de tempo finito o processo estocástico $z^{(n)}$ converge quase certamente para um processo determinístico dado por um sistema de equações diferenciais.

Teorema 3.1. *Seja $F(x) = \sum_{l \in \Lambda} l f_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^{L+1}$, a função drift, e suponha que $z^{(n)}$ é um processo com espaço de estados E satisfazendo 3.3 e que para cada compacto $\mathcal{K} \subset E$,*

$$\sum_l |l| \sup_{x \in \mathcal{K}} f_l(x) < \infty$$

e que existe uma constante $M_{\mathcal{K}} > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq M_{\mathcal{K}}|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Além disso, suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(0) = z_0$ e que z satisfaz

$$z(t) = z_0 + \int_0^t F(z(s)) ds, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Então para todo $t \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |z^{(n)}(s) - z(s)| = 0 \quad q.c.$$

Sua prova usa basicamente um resultado fundamental sobre processos de Poisson, qual seja, se $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ é um processo de Poisson padrão então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |n^{-1}Y(ns) - s| = 0$ quase certamente para todo $t \geq 0$.

Supondo então que as condições iniciais do nosso processo satisfazem 1.1, 1.2 e 1.3, resulta que $z^{(n)}(t)$ converge para o modelo determinístico $z(t) = (v(t), a_1(t), \dots, a_L(t))$ governado por

$$\begin{aligned} v(t) &= \rho_0 + \int_0^t (1 - v(s))a(s)ds, \\ a_i(t) &= \rho_i + \int_0^t v(s)(a_{i+1}(s) - a_i(s))ds, \quad i = 1, \dots, L-1, \\ a_L(t) &= \rho_L + \int_0^t (1 - v(s))a(s) - v(s)a_L(s)ds, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $a(s) = \sum_{i=1}^L a_i(s)$.

No momento $\gamma^{(n)}$ o processo estocástico é absorvido no estado

$$z^{(n)}(\gamma^{(n)}) = (v^{(n)}(\gamma^{(n)}), 0, 0, \dots, 0).$$

Queremos obter resultados assintóticos sobre a proporção de vértices visitados no momento da absorção, porém não temos muito controle sobre a sequência $\{\gamma^{(n)}\}$. Para obter informações sobre o estado em que o processo é absorvido, podemos alterar a escala de tempo do processo sem afetar onde ele atinge a fronteira. Faremos então uma modificação na escala de tempo de uma maneira que vai nos permitir um controle maior sobre os tempos de duração do processo.

3.2 Mudança de Tempo

Vamos efetuar a mudança de tempo definida por

$$\int_0^{\tau^{(n)}(t)} a^{(n)}(s) ds = t, \quad 0 \leq t \leq \int_0^\infty a^{(n)}(s) ds. \quad (3.7)$$

Mais precisamente, seja

$$\theta^{(n)}(s) = \int_0^s a^{(n)}(t) dt, \quad (3.8)$$

então

$$\tau^{(n)}(t) = \inf\{s : \theta^{(n)}(s) = t\}.$$

Definimos $\tilde{z}^{(n)}(t) = z^{(n)}(\tau^{(n)}(t))$ e passamos a observar o processo no tempo $\tau^{(n)}(t)$.

Observe que $\theta^{(n)}$ é uma função estritamente crescente, linear por partes (linear em cada intervalo entre dois saltos sucessivos de $z^{(n)}$). Sendo $\tau^{(n)}$ a inversa de $\theta^{(n)}$, aquela também tem as mesmas propriedades desta. Decorre que o processo transformado $\tilde{z}^{(n)}(t)$ faz as mesmas transições do processo original, porém em outra escala de tempo. Vejamos como essa transformação afeta a escala de tempo.

Sejam $[t_1, t_2]$ um intervalo de tempo qualquer em $[0, \gamma^{(n)}]$ e $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ o intervalo correspondente no processo modificado. Isto é, \tilde{t}_1 e \tilde{t}_2 são respectivamente os tempos tais que $\tau^{(n)}(\tilde{t}_1) = t_1$ e $\tau^{(n)}(\tilde{t}_2) = t_2$. Logo,

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \int_{t_1}^{t_2} a^{(n)}(s) ds.$$

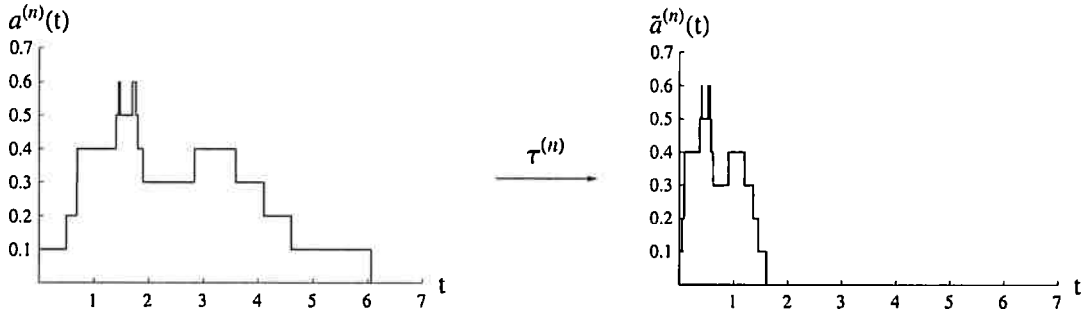


Figura 3.1: Evolução simulada de $a^{(n)}$ e $\tilde{a}^{(n)}$.

Resulta que nos intervalos $[t_1, t_2]$ em que o número de partículas ativas é menor do que n , temos $\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 < t_2 - t_1$ e o processo modificado corre mais rápido do que o original. Nos intervalos em que o número de ativas é maior do que n ocorre o inverso, e finalmente os dois processos correm em tempos iguais nos intervalos em que o número de partículas ativas é igual a n . A proposição a seguir esclarece esse efeito da mudança de tempo. A figura 3.1 mostra a evolução de $a^{(n)}$ antes e depois da mudança de tempo induzida por $\tau^{(n)}$ numa simulação do processo em \mathcal{K}_{10} para $L = 1$ com 1 partícula ativa no tempo 0.

Proposição 3.1. *Os tempos entre saltos do processo $\tilde{z}^{(n)}(t)$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de taxa n .*

Prova.

Sejam $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N$ os instantes de salto do processo original. Seja $\{\tilde{T}_i\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$ uma seqüência tal que $\tilde{T}_i = \theta^{(n)}(T_i)$. Então $\tau^{(n)}(\tilde{T}_i) = T_i$, ou seja,

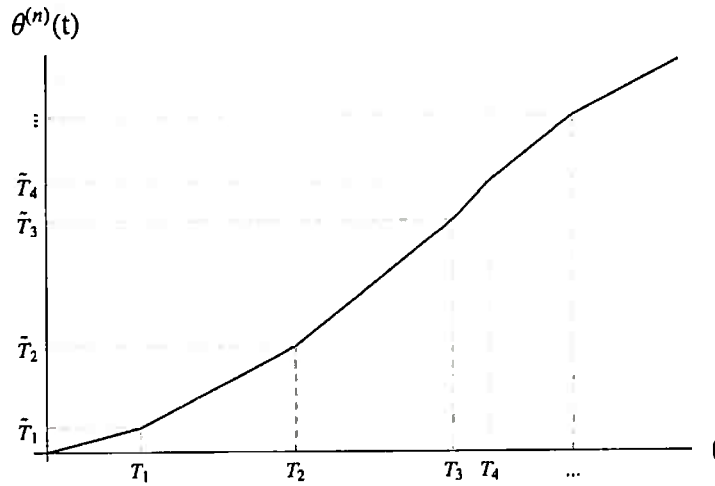


Figura 3.2: $\theta^{(n)}(t)$.

$\{\tilde{T}_i\}_{i \geq 0}$ são os instantes de salto do processo modificado. Se \tilde{t}_i é o tempo entre os saltos $i - 1$ e i do processo modificado, então

$$\tilde{t}_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} a^{(n)}(s) ds.$$

Durante o intervalo $[T_{i-1}, T_i)$, $a^{(n)}(s)$ vale $a^{(n)}(T_{i-1})$, e temos

$$\tilde{t}_i = a^{(n)}(T_{i-1}) \cdot (T_i - T_{i-1}).$$

Como $t_i = T_i - T_{i-1}$ tem distribuição exponencial de taxa $A^{(n)}(T_{i-1})$ segue que

$$\mathbf{P}(\tilde{t}_i > t) = \mathbf{P}\left(t_i > \frac{t}{a^{(n)}(T_{i-1})}\right) = e^{-nt}.$$

□

Vejamos outro efeito da mudança de tempo. Como visto no sistema 3.5,

$$v^{(n)}(t) = \rho_0^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - v^{(n)}(s)) a^{(n)}(s) ds \right). \quad (3.9)$$

Lembrando que $\tau^{(n)}(\theta^{(n)}(t)) = t$, temos $\tilde{z}^{(n)}(\theta^{(n)}(t)) = z^{(n)}(t)$. Assim, fazendo a mudança de variável definida por $\theta^{(n)}(s) = \int_0^s a^{(n)}(u) du$ na integral em 3.9, vem

$$v^{(n)}(t) = \tilde{v}^{(n)}(\theta^{(n)}(t)) = \rho_0^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^{\theta^{(n)}(t)} (1 - \tilde{v}^{(n)}(\theta^{(n)}(s))) d\theta^{(n)}(s) \right),$$

e logo, para $t < \int_0^{\gamma^{(n)}} a^{(n)}(s) ds$, obtemos

$$\tilde{v}^{(n)}(t) = \rho_0^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - \tilde{v}^{(n)}(s)) ds \right).$$

Dessa forma, no sistema reescalado, $\tilde{v}^{(n)}$ não depende de $\tilde{a}^{(n)}$ a não ser pelo fato de que o tempo de duração do processo depende de $\tilde{a}^{(n)}$.

De maneira análoga obtemos as equações para $\tilde{a}_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, L$:

$$\tilde{a}_i^{(n)}(t) = \rho_i^{(n)} + \frac{1}{n} Y_{i+1} \left(n \int_0^t \tilde{v}^{(n)}(s) \frac{\tilde{a}_{i+1}^{(n)}(s)}{\tilde{a}^{(n)}(s)} ds \right) - \frac{1}{n} Y_i \left(n \int_0^t \tilde{v}^{(n)}(s) \frac{\tilde{a}_i^{(n)}(s)}{\tilde{a}^{(n)}(s)} ds \right),$$

$i = 1, \dots, L-1,$ (3.10)

$$\tilde{a}_L^{(n)}(t) = \rho_L^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - \tilde{v}^{(n)}(s)) ds \right) - \frac{1}{n} Y_L \left(n \int_0^t \tilde{v}^{(n)}(s) \frac{\tilde{a}_L^{(n)}(s)}{\tilde{a}^{(n)}(s)} ds \right),$$

$$\tilde{a}^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^L \rho_i^{(n)} + \frac{1}{n} Y_0 \left(n \int_0^t (1 - \tilde{v}^{(n)}(s)) ds \right) - \frac{1}{n} Y_1 \left(n \int_0^t \tilde{v}^{(n)}(s) \frac{\tilde{a}_1^{(n)}(s)}{\tilde{a}^{(n)}(s)} ds \right).$$

O teorema 3.1 implica que o sistema tem limite não trivial,

$$\tilde{v}(t) = \rho_0 + \int_0^t (1 - \tilde{v}(s)) ds, \tag{3.11}$$

$$\tilde{a}_i(t) = \rho_i + \int_0^t \tilde{v}(s) \frac{\tilde{a}_{i+1}(s)}{\tilde{a}(s)} ds - \int_0^t \tilde{v}(s) \frac{\tilde{a}_i(s)}{\tilde{a}(s)} ds, \quad i = 1, \dots, L-1,$$

$$\tilde{a}_L(t) = \rho_L + \int_0^t (1 - \tilde{v}(s)) ds - \int_0^t \tilde{v}(s) \frac{\tilde{a}_L(s)}{\tilde{a}(s)} ds,$$

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=1}^L \rho_i + \int_0^t (1 - \tilde{v}(s)) ds - \int_0^t \tilde{v}(s) \frac{\tilde{a}_1(s)}{\tilde{a}(s)} ds,$$

definido até $\tilde{\gamma} = \inf\{t : \tilde{a}(t) = 0\}$.

Seja $\tilde{\gamma}^{(n)} = \inf\{t : \tilde{a}^{(n)}(t) = 0\}$, então observe que $v^{(n)}(\gamma^{(n)}) = \tilde{v}^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)})$.

Nosso objetivo agora é demonstrar a convergência dos tempos de duração do processo reescalado, e para isso vamos examinar o processo de um outro ponto de vista, reduzindo o processo à dimensão 2. A redução da dimensão, além de facilitar a obtenção de uma solução explícita para o sistema de equações diferenciais do processo limite, vai viabilizar a aplicação do teorema 11.4.1 de Ethier e Kurtz [15] para a obtenção do teorema central do limite para a cobertura.

3.3 Redução da Dimensão

Considere $Y^{(n)}(t) := \sum_{i=1}^L iA_i^{(n)}(t)$, a quantidade total de vidas ativas no tempo t (do modelo original). Se $y^{(n)}(t) := \frac{Y^{(n)}(t)}{n}$ e $\tilde{y}^{(n)}(t)$ é a quantidade correspondente no modelo transformado, então o tempo de duração de processo pode ser dado como função de $\tilde{y}^{(n)}(t)$, isto é, $\tilde{\gamma}^{(n)} = \inf\{t : \tilde{y}^{(n)}(t) = 0\}$. Assim, para efeito da análise da cobertura do processo basta acompanhar a trajetória do vetor $(\tilde{v}^{(n)}(t), \tilde{y}^{(n)}(t))$.

O par $(V^{(n)}(t), Y^{(n)}(t))$ é markoviano e pode ser descrito por um passeio aleatório em \mathbb{Z}^2 com estado inicial $(n\rho_0^{(n)}, n\sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)})$ e transições dadas por saltos representados pelos vetores $(0, -1)$ e $(1, L)$. O primeiro tipo de salto ocorre quando uma partícula ativa perde uma vida, e o segundo, quando uma nova partícula é ativada. Se associamos à transição $(1, L)$ um processo de Poisson Y_1^* independente de Y_0 , então $\tilde{y}^{(n)}(t)$ admite a seguinte representação:

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} + \frac{L}{n}Y_0 \left(n \int_0^t 1 - \tilde{v}^{(n)}(s)ds \right) - \frac{1}{n}Y_1^* \left(n \int_0^t \tilde{v}^{(n)}(s)ds \right),$$

e converge para

$$\tilde{y}(t) = \rho + (L + 1) \int_0^t 1 - \tilde{v}(s) ds - t, \quad (3.12)$$

definido até

$$\tilde{\gamma} = \inf\{t : \tilde{y}(t) = 0\}. \quad (3.13)$$

Resumindo, 3.11 e 3.12 implicam nas seguintes expressões para \tilde{v} e \tilde{y} :

$$\tilde{v}(t) = 1 - (1 - \rho_0)e^{-t}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{y}(t) = \rho + (L + 1)(1 - \rho_0)(1 - e^{-t}) - t. \quad (3.15)$$

A figura 3.3 apresenta duas simulações estocásticas do processo reescalado, com os gráficos do processo limite ao fundo (em cinza). O gráfico da esquerda representa a evolução do processo em \mathcal{K}_{100} e o da direita, a evolução do processo em \mathcal{K}_{1000} . Em ambas as simulações a configuração utilizada foi $L = 2$, $\rho_0^{(n)} = 0,1$ e $\rho^{(n)} = 0,2$.

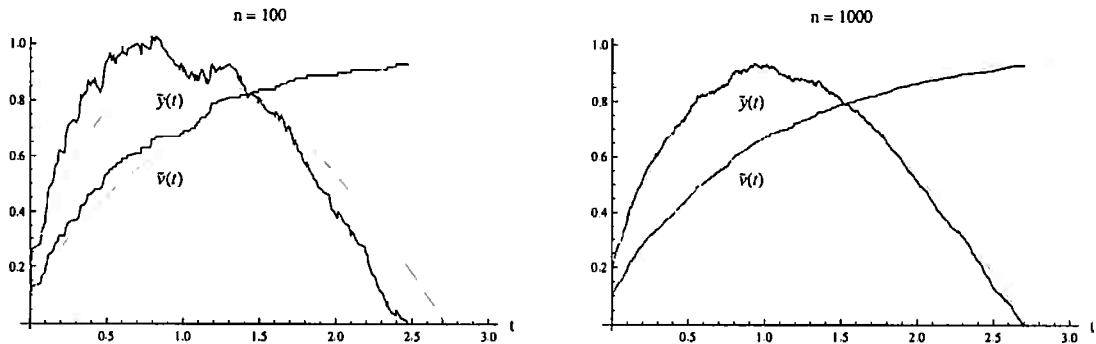


Figura 3.3: Simulação Estocástica x Processo Limite (em tempo reescalado)

3.4 Tempo de Duração do Processo Reescalado

O teorema a seguir enuncia a convergência dos tempos de duração do processo reescalado.

Teorema 3.2. $\tilde{\gamma}^{(n)}$ converge quase certamente para $\tilde{\gamma}$.

Prova.

Observe que no tempo $\tilde{\gamma}$, 3.15 se reduz a

$$\tilde{\gamma} = \rho + (L + 1)(1 - \rho_0)(1 - e^{-\tilde{\gamma}}). \quad (3.16)$$

É fácil ver que o ponto fixo de $f(t) = \rho + (L + 1)(1 - \rho_0)(1 - e^{-t})$ em \mathbb{R}_+ existe e é único sempre que $\rho > 0$ (ver figura 3.4). Quando $\rho = 0$, se $\rho_0 < \frac{L}{L+1}$ então f tem dois pontos fixos e a definição 3.13 indica que $\tilde{\gamma}$ é o maior deles. Observamos que $\tilde{\gamma}$ poderia ser alternativamente definida como a única solução de $\tilde{y}(t) = 0$ com $\tilde{y}'(t) < 0$. Vale notar que $\tilde{\gamma}$ é finito para qualquer configuração ρ_0 , ρ e L com $L < \infty$.

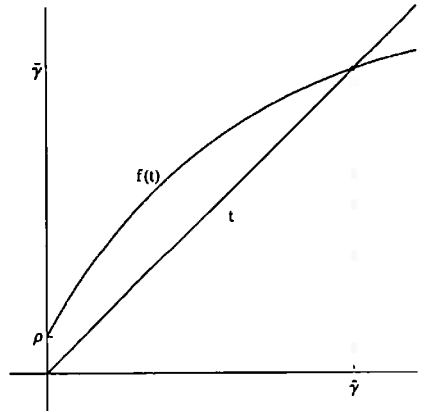


Figura 3.4: Ponto fixo de $f(t)$.

Agora seja $\{\tilde{\gamma}^{(n_k)}\}$ uma subsequência de $\{\tilde{\gamma}^{(n)}\}$ que converge para $\bar{\gamma} = \limsup\{\tilde{\gamma}^{(n)}\}$.

Então, da convergência uniforme de $\tilde{y}^{(n)}$ para \tilde{y} em intervalos limitados vem que

$$0 = \tilde{y}^{(n_k)}(\tilde{\gamma}^{(n_k)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{y}(\bar{\gamma}) \quad \text{q.c.}$$

Analogamente, para uma subsequência $\{\tilde{\gamma}^{(n_{k'})}\}$ que converge para $\underline{\gamma} = \liminf\{\tilde{\gamma}^{(n)}\}$,

temos

$$0 = \tilde{y}^{(n_k')}(\tilde{\gamma}^{(n_k')}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{y}(\underline{\gamma}) \quad \text{q.c.}$$

Como $\tilde{y}(\bar{\gamma}) = \tilde{y}(\underline{\gamma}) = 0$, resulta que $\bar{\gamma} = \underline{\gamma} = \tilde{\gamma}$.

□

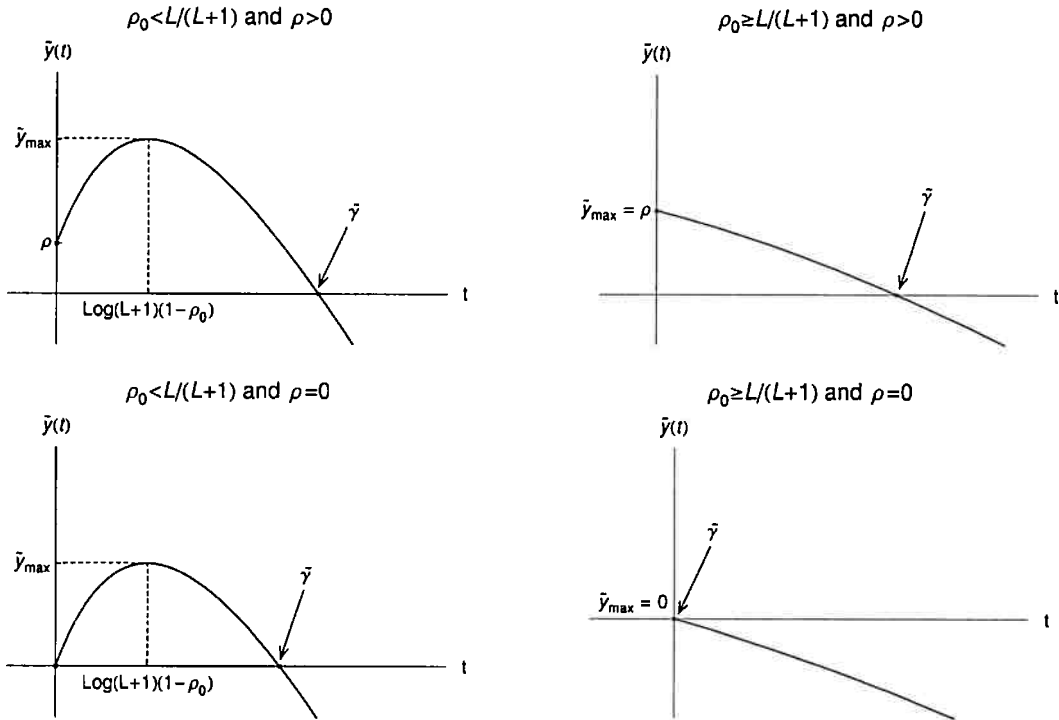


Figura 3.5: Comportamento de $\tilde{y}(t)$: 4 situações em termos de ρ , ρ_0 e L .

Por fim, observamos que se $\rho = 0$ e $\rho_0 \geq \frac{L}{L+1}$, então $\tilde{y}(t) < 0$ para todo $t > 0$, e o teorema 3.2 fornece $\tilde{\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}^{(n)} = 0$ quase certamente. A figura 3.5 ilustra o comportamento de \tilde{y} em termos de ρ , ρ_0 e L .

3.5 Convergência da Cobertura

Dada a convergência uniforme de $\tilde{v}^{(n)}$ para \tilde{v} em intervalos limitados, a convergência de $\tilde{\gamma}^{(n)}$ para $\tilde{\gamma}$ garante a convergência da cobertura. Isto é,

$$\tilde{v}^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)}) \rightarrow \tilde{v}(\tilde{\gamma}) = v_\infty.$$

De 3.14 e 3.16 vem que v_∞ é dada pela solução da equação

$$1 - v_\infty = (1 - \rho_0) \exp \{-(L + 1)v_\infty - \rho + (L + 1)\rho_0\}.$$

Isso encerra a demonstração do Teorema 2.1.

□

Observação 3.1. As equações 3.14 e 3.15 estabelecem uma correspondência um a um entre os valores de $\tilde{v}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, de modo que podemos escrever \tilde{y} em função de \tilde{v} . Através de uma manipulação simples dessas equações obtemos

$$\tilde{y}(\tilde{v}) = \rho + (L + 1)(\tilde{v} - \rho_0) + \log \left(\frac{1 - \tilde{v}}{1 - \rho_0} \right). \quad (3.17)$$

A figura 3.6 ilustra o comportamento de $\tilde{y}(\tilde{v})$ em termos de ρ , ρ_0 e L .

Observação 3.2. Fazendo $t = \tilde{\gamma}$ em 3.14 é possível reescrever 3.16 em função de v_∞ da seguinte maneira:

$$\tilde{\gamma} = \rho + (L + 1)(v_\infty - \rho_0).$$

3.6 Teorema Central do Limite

Aqui derivamos um teorema central para a proporção de vértices visitados. Ele é obtido da aplicação do teorema 3.3 (apresentado a seguir) para o processo reescalado em dimensão reduzida. O teorema 3.3 é o teorema 11.4.1 de Ethier e Kurtz [15], onde sua prova pode ser encontrada.

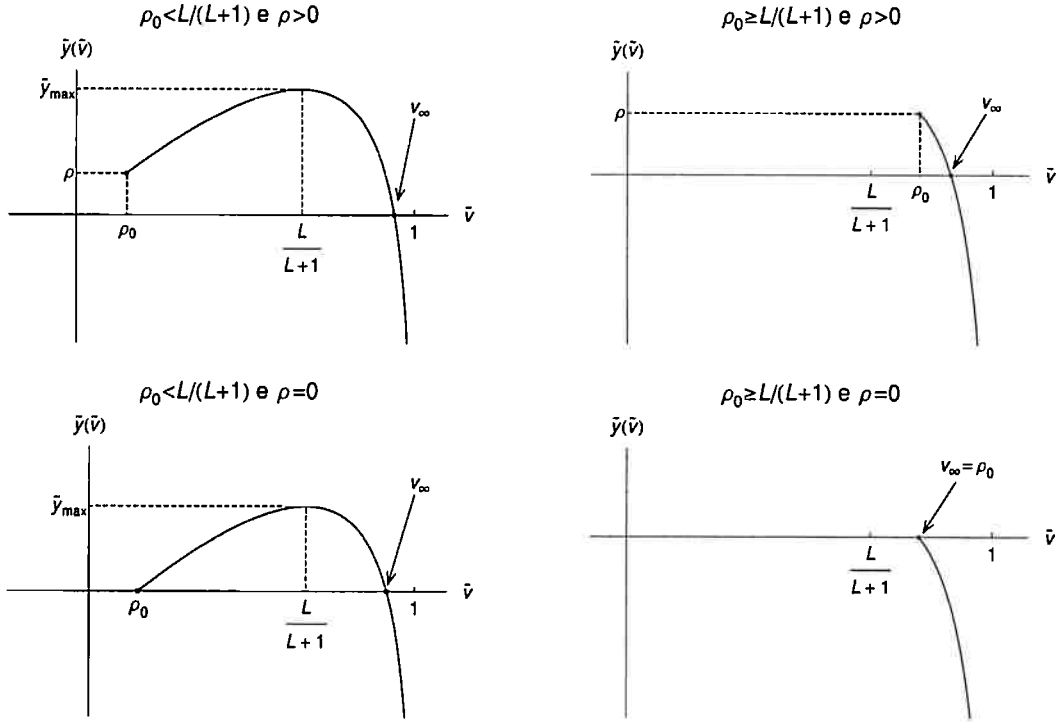


Figura 3.6: Comportamento de $\tilde{y}(\tilde{v})$: 4 situações em termos de ρ , ρ_0 e L .

Teorema 3.3. *Seja $Z^{(n)}$ uma seqüência de processos em $\{\frac{1}{n}Z : Z \in \mathbb{Z}^{L+1}\}$ satisfazendo 3.3, e z satisfazendo 3.5. Suponha que para cada compacto $K \subset E$,*

$$\sum_l |l|^2 \sup_{x \in K} f_l(x) < \infty,$$

e que f_l e ∂F são contínuos. Seja também

$$U(t) = U(0) + \sum_l l W_l \left(\int_0^t f_l(z(s)) ds \right) + \int_0^t \partial F(z(s)) U(s) ds,$$

onde W_l são movimentos Brownianos padrão independentes, e

$$U(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(z^{(n)}(0) - z(0)),$$

com $U(0)$ uma constante.

Seja φ uma função continuamente diferenciável em \mathbb{R}^d com $\varphi(z(0)) > 0$, e

sejam

$$\begin{aligned}\tau^{(n)} &= \inf\{t : \varphi(z^{(n)}(t)) \leq 0\}, \text{ e} \\ \tau &= \inf\{t : \varphi(z(t)) \leq 0\}.\end{aligned}$$

Suponha $\tau < \infty$ e

$$\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau)) < 0. \quad (3.18)$$

Então,

$$\sqrt{n}(z^{(n)}(\tau^{(n)}) - z(\tau)) \Rightarrow U(\tau) - \frac{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot U(\tau)}{\nabla\varphi(z(\tau)) \cdot F(z(\tau))} F(z(\tau)), \quad (3.19)$$

onde U é Gaussiano com média $\Phi(t, 0)U(0)$ e matriz de covariância

$$\text{Cov}(U(t), U(r)) = \int_0^{t \wedge r} \Phi(t, s) G(z(s)) [\Phi(r, s)]^T ds,$$

Φ é a solução da equação matricial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = \partial F(z(t)) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I, \quad (3.20)$$

e

$$G(x) = \sum_l l l^T f_l(x).$$

Consideremos o nosso processo reescalado $\tilde{x}^{(n)}(t) = (\tilde{v}^{(n)}(t), \tilde{y}^{(n)}(t))$, e o processo limite $\tilde{x}(t) = (\tilde{v}(t), \tilde{y}(t))$. Para $x = (v, y) \in \mathbb{R}^2$, seja $\varphi(x) = y$. Então,

$$\begin{aligned}\inf\{t : \varphi(\tilde{x}^{(n)}(t)) \leq 0\} &= \tilde{\gamma}^{(n)}, \quad \text{e} \\ \inf\{t : \varphi(\tilde{x}(t)) \leq 0\} &= \tilde{\gamma}.\end{aligned}$$

Vimos na prova do teorema 3.2 que $\tilde{\gamma} < \infty$. Temos $f_{(1,L)}(x) = (1 - v)$ e $f_{(0,-1)}(x) = v$, e assim, $F(x) = (1 - v, L - (L + 1)v)$. $\tilde{x}(\tilde{\gamma}) = (v_\infty, 0)$, e logo,

$$\nabla\varphi(\tilde{x}(\tilde{\gamma})) \cdot F(\tilde{x}(\tilde{\gamma})) = (0, 1) \cdot (1 - v_\infty, L - (L + 1)v_\infty) = L - (L + 1)v_\infty,$$

que é a derivada de \tilde{y} em $\tilde{\gamma}$. Assim, para o caso $\rho > 0$ e para o caso em que $\rho = 0$ e $\rho_0 < \frac{L}{L+1}$ podemos aplicar o teorema 3.3 para obter estimativas para $v^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)}) = \tilde{v}^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)})$. Observamos que quando $\rho = 0$ e $\rho_0 \geq \frac{L}{L+1}$ temos $\tilde{\gamma} = 0$, e a derivada de \tilde{y} em $t = 0$ é zero. Dessa maneira, a hipótese 3.18 não é satisfeita, o que não se verifica nos outros casos, para os quais as hipóteses estão todas satisfeitas.

Então, de acordo com o teorema 3.3, para estes vale

$$\sqrt{n}(\tilde{x}^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)}) - \tilde{x}(\tilde{\gamma})) \Rightarrow U(\tilde{\gamma}) - \frac{\nabla\varphi(\tilde{x}(\tilde{\gamma})) \cdot U(\tilde{\gamma})}{\nabla\varphi(\tilde{x}(\tilde{\gamma})) \cdot F(\tilde{x}(\tilde{\gamma}))} F(\tilde{x}(\tilde{\gamma})). \quad (3.21)$$

Observando que U tem duas componentes, digamos (U_v, U_y) , chegamos a

$$\sqrt{n}(\tilde{v}^{(n)}(\tilde{\gamma}^{(n)}) - v_\infty) \Rightarrow U_v(\tilde{\gamma}) - \frac{1 - v_\infty}{L - (L + 1)v_\infty} U_y(\tilde{\gamma}). \quad (3.22)$$

Supondo $U(0) = (0, 0)$, a distribuição limite em 3.22 é normal com média 0. Nas linhas a seguir apresentamos os cálculos para a obtenção da matriz de covariâncias de U .

$$\partial F(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & \partial_2 F_1(x) \\ \partial_1 F_2(x) & \partial_2 F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -(L + 1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi'_{11}(t, s) & \phi'_{12}(t, s) \\ \phi'_{21}(t, s) & \phi'_{22}(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -(L+1) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11}(t, s) & \phi_{12}(t, s) \\ \phi_{21}(t, s) & \phi_{22}(t, s) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

As derivadas do sistema acima são com relação a t , e sua solução é

$$\begin{pmatrix} \phi_{11}(t, s) & \phi_{12}(t, s) \\ \phi_{21}(t, s) & \phi_{22}(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ (L+1)(e^{-(t-s)} - 1) & 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \end{pmatrix} (1-v) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1-v & L(1-v) \\ L(1-v) & v + L^2(1-v) \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$G(\tilde{x}(s)) = \begin{pmatrix} (1-\rho_0)e^{-s} & L(1-\rho_0)e^{-s} \\ L(1-\rho_0)e^{-s} & 1 - (1-\rho_0)(1-L^2)e^{-s} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U(t), U(t)) &= \int_0^t \Phi(t, s) G(\tilde{x}(s)) [\Phi(t, s)]^T ds = \\ &\begin{pmatrix} (1-\rho_0)e^{-t}(1-e^{-t}) & (1-\rho_0)e^{-t}((L+1)(1-e^{-t})-t) \\ (1-\rho_0)e^{-t}((L+1)(1-e^{-t})-t) & (L+1)^2(1-\rho_0)e^{-t}(1-e^{-t}) + t(1-2(L+1)(1-\rho_0)e^{-t}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Precisamos encontrar $\text{Cov}(U(\tilde{\gamma}), U(\tilde{\gamma}))$. Como

$$\begin{aligned} (1-\rho_0)e^{-\tilde{\gamma}} &= 1 - v_\infty \quad e \\ (1-\rho_0)(1-e^{-\tilde{\gamma}}) &= v_\infty - \rho_0, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Var}(U_v(\tilde{\gamma})) &= \frac{(1 - v_\infty)(v_\infty - \rho_0)}{1 - \rho_0}, \\ \text{Var}(U_y(\tilde{\gamma})) &= \frac{(L + 1)^2(1 - v_\infty)(v_\infty - \rho_0)}{1 - \rho_0} + (1 - 2(L + 1)(1 - v_\infty))\tilde{\gamma}, \\ \text{Cov}(U_v(\tilde{\gamma}), U_y(\tilde{\gamma})) &= \frac{(L + 1)(1 - v_\infty)(v_\infty - \rho_0)}{1 - \rho_0} - (1 - v_\infty)\tilde{\gamma}.\end{aligned}$$

Finalmente, usando as conhecidas propriedades da variância e simplificando adequadamente, obtemos a variância σ^2 da distribuição limite em 3.22:

$$\sigma^2 = \frac{(1 - v_\infty)(v_\infty - \rho_0 - \tilde{\gamma}(1 - \rho_0)(1 - v_\infty))}{(1 - \rho_0)(L - (L + 1)v_\infty)^2}. \quad (3.24)$$

Isso encerra a demonstração do teorema 2.2. Vale ressaltar que a redução da dimensão do processo viabilizou o cálculo da variância do processo limite, dada a dificuldade de se calcular as quantidades envolvidas, como por exemplo a solução da equação matricial 3.20.

□

3.7 Número de Saltos do Processo

O teorema 2.3 é um corolário do teorema 3.2. Lembramos que $N^{(n)}$ é o número de transições que o processo faz até a absorção. Antes da prova do teorema vamos provar o seguinte lema:

Lema 3.1. $N^{(n)} \leq n \left((L + 1)(1 - \rho_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^L i \rho_i^{(n)} \right)$.

Prova.

Basta contar o número de saltos do processo $(V^{(n)}, Y^{(n)})$. Como já foi dito, $(V^{(n)}, Y^{(n)})$ é um passeio aleatório em \mathbb{Z}^2 com transições $(0, -1)$ e $(1, L)$, e estado

inicial $\left(n\rho_0^{(n)}, n \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} \right)$. O evento $\{V^{(n)}(\gamma^{(n)}) = k\}$ é equivalente à absorção desse passeio aleatório no estado $(k, 0)$. Para que esse evento ocorra, o passeio tem que fazer $k - n\rho_0^{(n)}$ saltos $(1, L)$, e $n \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} + L(k - n\rho_0^{(n)})$ saltos $(0, -1)$. O número total de saltos, $k(L + 1) - n\rho_0^{(n)}(L + 1) + n \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)}$, é máximo quando $k = n$.

□

Prova do Teorema 2.3.

Com a intenção de não dificultar a leitura, alguns resultados da Teoria da Probabilidade usados na prova do teorema 2.3 foram citados aqui e apresentados no Apêndice.

Podemos escrever $\tilde{\gamma}^{(n)} = \sum_{i=1}^{N^{(n)}} R_i$, onde $\{R_i\}_{i \geq 1}$ são variáveis aleatórias com distribuição exponencial de parâmetro n independentes. Além disso, $N^{(n)}$ é independente de $\{R_i\}_{i \geq 1}$. Pela identidade de Wald,

$$\mathbf{E}(\tilde{\gamma}^{(n)}) = \frac{\mathbf{E}(N^{(n)})}{n}.$$

Portanto, tendo em vista o teorema 3.2, o resultado desejado fica estabelecido se provarmos que a seqüência $\{\mathbf{E}(\tilde{\gamma}^{(n)})\}$ converge para $\tilde{\gamma}$.

O teorema A.1, apresentado no apêndice, indica que a convergência vale se $\{\tilde{\gamma}^{(n)}\}$ é uniformemente integrável.

Considere $\bar{N}^{(n)} = n \left((L + 1)(1 - \rho_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} \right)$. Do lema 3.1 temos $N^{(n)} \leq \bar{N}^{(n)}$, e podemos escrever

$$\tilde{\gamma}^{(n)} \leq \Gamma^{(n)} \sim \text{Gama}(\bar{N}^{(n)}, n).$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [(\Gamma^{(n)})^2] &= \text{Var}(\Gamma^{(n)}) + \mathbf{E} [(\Gamma^{(n)})]^2 = \frac{\bar{N}^{(n)}}{n^2} + \left(\frac{\bar{N}^{(n)}}{n}\right)^2 \\ &\leq \left((L+1)(1 - \rho_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} \right) \left((L+1)(1 - \rho_0^{(n)}) + \sum_{i=1}^L i\rho_i^{(n)} + 1 \right). \end{aligned}$$

Como $\sup_n \mathbf{E}|\Gamma^{(n)}|^2 < \infty$ então $\{\Gamma^{(n)}\}$ é uniformemente integrável (teorema A.2), o que implica que $\{\tilde{\gamma}^{(n)}\}$ também o é (teorema A.3). Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (\tilde{\gamma}^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} (N^{(n)})}{n} = \tilde{\gamma}.$$

□

Apêndice A

Teoremas da Probabilidade

Aqui apresentamos alguns resultados da Probabilidade que foram usados em algumas passagens da tese. São teoremas conhecidos cujas demonstrações podem ser encontrados na literatura, como por exemplo no livro de Gut [16]. Assim, serão apresentados sem demonstração.

Definição A.1. Uma seqüência X_1, X_2, \dots é chamada **uniformemente integrável** se e somente se

$$\int_{|x|>a} |x| dF_{X_n}(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ uniformemente em } n.$$

Teorema A.1. *Sejam X e X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias, e suponha que $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, se $r \geq 1$ e $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ é uniformemente integrável então $E(X_n) \rightarrow E(X)$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Teorema A.2. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias, e suponha que $\sup_n E|X_n|^p < \infty$ para algum $p > 1$. Então $\{X_n, n \geq 1\}$ é uniformemente integrável.*

Teorema A.3. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias tais que $|X_n| \leq Y_n$ q.c. para todo n , onde Y_1, Y_2, \dots são variáveis aleatórias positivas integráveis. Se $\{Y_n, n \geq 1\}$ é uniformemente integrável, então $\{X_n, n \geq 1\}$ também o é.*

Referências Bibliográficas

- [1] O.S.M. ALVES, F.P. MACHADO, S.YU. POPOV The shape theorem for the frog model with random initial configuration. *Markov Processes and Related Fields* **7**, no 4, 525-539 (2001).
- [2] O.S.M. ALVES, E. LEBENSZTAYN, F.P. MACHADO, M.Z. MARTINEZ Random walk systems on complete graphs. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, no 4, vol 37, 571-580 (2006).
- [3] O.S.M ALVES, F.P. MACHADO, S.YU. POPOV The shape theorem for the frog model. *The Annals of Applied Probability*, **12**, no 2, 534-547 (2002).
- [4] O.S.M. ALVES, F.P. MACHADO, S.YU. POPOV Phase transition for the frog model. *Electron. J. Probab.* <<http://www.math.washington.edu/7Eejpecp>> **7**, paper No. 16 (2002).
- [5] E. LEBENSZTAYN, F.P. MACHADO, M.Z. MARTINEZ Self avoid random walks on homogeneous trees *Markov Processes and Related Fields* , v. 12, n. 4, 735-745 (2006).
- [6] E. LEBENSZTAYN *Um estudo sobre condições para transição de fase no modelo de percolação em grafos* Tese (Doutorado em Estatística) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo (2005)

- [7] L. R. FONTES, F.P. MACHADO, A. SARKAR The critical probability for the frog model is not a monotonic function of the graph. *J. Appl. Probab.* **41**, no. 1, 292–298 (2004).
- [8] E. LEBENSZTAYN, F.P. MACHADO, S. POPOV An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees. *J. Stat. Phys.*, **119** no. 1-2, 331–345 (2005).
- [9] A.R. LEICHSENRING *Não-monotonicidade do parâmetro crítico no modelo dos sapos*. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, (2003).
- [10] H. ANSRESON, T. BRITTON *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*. Springer, New York (2000).
- [11] B. BOLLOBÁS *Modern graph theory*. Springer-Verlag, New York (2000).
- [12] M. S. BARTLETT Some evolutionary stochastic processes *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **11** (2) 211–229 (1949).
- [13] R. M. CORLESS, G. H. CONNET, D. E. G. HARE, D. J. JEFFREY, AND D. E. KNUTHY On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math*, **5** (4), 329–359 (2005).
- [14] R. DURRETT *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*. Wadsworth (1988).
- [15] S.N. ETHIER E T.G. KURTZ *Markov processes : characterization and convergence* Wiley, N. York, (1986).
- [16] A. GUT *Probability: A Graduate Course*. Springer, New York (2005).
- [17] T.M. LIGGETT *Interacting Particle Systems*. Springer, New York (1985).

- [18] T.M. LIGGETT *Stochastic interacting systems; contact, voter and exclusion processes*. Springer, New York (1999).
- [19] S.YU. POPOV Frogs in random environment. *J. Statist. Phys.* **102** (1/2), 191–201 (2001).
- [20] A. TELCS, N.C. WORMALD Branching and tree indexed random walks on fractals *J. Appl. Probability* **36**, no 4, p. 999-1011 (1999).

