

**Estimação intervalar para os parâmetros das
distribuições discretas usuais**

Chang Yu Fang

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Alberto de Bragança Pereira**

São Paulo, fevereiro de 2008

Dedicatória

a meus pais, meus avôs e minha irmã.

Agradecimientos

Resumo

Em inferência estatística, tem-se interesse na estimação de um parâmetro de interesse θ a partir de uma amostra discreta. O método mais comum é a construção de intervalos de estimação. Diferente de caso contínuo, não se pode atingir o exato nível de confiança nominal. Assim nosso objetivo é estudar os métodos de estimação intervalar para θ tal que a probabilidade de abrangência $P_{\theta}(\theta \in CI) \approx 1 - \alpha$ onde α é um valor específico entre 0 e 1. Neste contexto, estudamos três distribuições discretas, Binomial, Poisson e Binomial Negativa, para cada uma delas calculamos intervalo exato, intervalo de credibilidade, intervalo Wald e intervalo de bootstrap-percentil. Para cada distribuição, apresentamos um estudo de simulação com o objetivo de estudar o desempenho dos métodos em estudo.

Abstract

In statistical applications, the most common method to estimate a parameter from a discrete population, θ , is calculate a estimation interval. Unlike the case of continuous distribution, we can not achieve the exact level of confidence nominal. So our goal is to study the methods of estimation interval for θ such that $P_{\theta}(\theta \in CI) \approx 1 - \alpha$ where α is a value between 0 and 1. In this context, we study four methods of estimation interval for these three discrete distributions, Binomial, Poisson and negative binomial. For each distribution, we present the exact interval, credible interval, Wald intervalo and Bootstrap percentile inteval and simulation study to check the performance of each method.

Índice

1	Introdução	1
2	Intervalos de estimação para uma proporção binomial	5
2.1	Descrição de método de intervalos	5
2.1.1	Intervalo Exato	6
2.1.2	Intervalo Bayesiano	7
2.1.3	Intervalo Wald	8
2.1.4	Intervalo Bootstrap-percentil	8
2.2	Comparação dos métodos	9
3	Intervalos de estimação de uma média Poisson	20
3.1	Descrição dos métodos	20
3.1.1	Intervalo Exato	21
3.1.2	Intervalo Bayesiano	21
3.1.3	Intervalo Wald	22

<i>Índice</i>	7
3.1.4 Intervalo de Bootstrap-percentil	23
3.2 Comparação dos métodos	23
4 Intervalos de estimação da proporção Binomial Negativa	31
4.1 Descrição dos métodos	31
4.1.1 Intervalo Exato	32
4.1.2 Intervalo Bayesiano	32
4.1.3 Intervalo Wald	33
4.1.4 Intervalo Bootstrap-percentil	33
4.2 Comparação dos métodos	34
5 Conclusões	39

Introdução

Na aplicação de um processo de inferência estatística, uma estimativa pontual de um parâmetro θ de interesse pode não ser muito útil para fornecer evidências para obter as deduções. São necessárias também medidas de precisão desta estimativa, que possibilitem ao pesquisador obter conclusões baseadas nas observações. Os intervalos de estimação do parâmetro de interesse podem ser de grande utilidade.

Na maioria dos cursos de introdução da estatística, estudam-se muito pouco as variáveis aleatórias discretas, em geral, apresentam somente estimações pontuais e intervalares para variáveis aleatórias contínuas. Mas, obter um intervalo de estimação para um parâmetro de uma distribuição discreta sempre é um grande interesse na estatística. Existem vários autores que têm abordado este assunto: Blyth (1986); Vollset (1993); Böhning (1994); Wardell (1997); Agresti e Coull (1998); Newcombe (1998); Kabaila e Byrne (2001); Barker(2202) e outros. Nesse trabalho, apresentamos quatro métodos de estimação intervalar para as três distribuições discretas, Binomial, Poisson e Binomial Negativa e todos os métodos considerados são feitos da forma de intervalo central, ou seja, tomamos as duas caudas da distribuição iguais. Compararemos os quatro métodos para cada distribuição verificando o desempenho de cada um.

Seja X uma variável aleatória, x uma observação amostral de X , e $[L_I(x); L_S(x)]$ um in-

tervalo de estimação de parâmetro θ , onde $L_I(x)$ e $L_S(x)$ são chamados de limites inferiores e limites superiores, respectivamente.

Primeiro, estudamos o método exato. Esse intervalo foi apresentado por Clopper e Pearson (1934) no caso binomial. Podemos obter o intervalo exato mediante a seguinte expressão,

$$P(L_I(X) \leq \theta \leq L_S(X)) = 1 - \alpha, \quad (1.1)$$

em que $0 \leq \alpha \leq 1$. A expressão (1.1) é chamado de probabilidade de abrangência.

O segundo método que estudamos é o intervalo Bayesiano, também conhecido como intervalo de credibilidade. Estabelece-se a distribuição *a priori* de θ , logo, estima-se θ mediante a distribuição *a posteriori*.

Nem sempre é possível obter intervalos de estimação como o descrito em (1.1) pela complexidade analítica. Os métodos mais utilizados são os chamados aproximados que satisfazem,

$$P(L_I(X) \leq \theta \leq L_S(X)) \approx 1 - \alpha, \quad (1.2)$$

O intervalo Wald, recomendado em vários livros introdutórios de estatística, o qual utiliza o método de aproximação normal para estimar os parâmetros.

O quarto intervalo é o intervalo de Bootstrap-percentil. Para estimar um parâmetro desconhecido, o método Bootstrap utiliza uma distribuição empírica sobre a amostra observada, através dessa distribuição, vários métodos podem ser usados para obter um intervalo de estimação do parâmetro interessado. Um deles é o método percentil, o qual consiste em tomar os percentis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ da distribuição bootstrap de θ .

Seja $[L_I; L_S]$ um estimador de um certo parâmetro θ , seja $\eta \in (0;1)$. $[L_I; L_S]$ é um bom estimador de intervalos de θ com precisão η , se a probabilidade de abrangência é η e seu comprimento é pequeno.

Nos capítulos 2,3 e 4, apresentamos os quatro métodos de intervalo de estimação e um

estudo de simulação para distribuição binomial, Poisson e binomial negativa, respectivamente.

No capítulo 5, analisamos o desempenho dos quatro intervalos apresentados nos capítulos 2,3 e 4.

No capítulo 6, apresentamos a conclusão deste trabalho.

Intervalos de estimação para uma proporção binomial

Uma das análises mais comuns na inferência estatística é estabelecer um intervalo de estimação para um parâmetro binomial p . Neste capítulo, apresentamos quatro intervalos de estimação da probabilidade de sucesso numa distribuição binomial.

2.1 Descrição de método de intervalos

Uma amostra aleatória de tamanho n é observada de uma grande população. Seja X uma variável aleatória, representa o número de observações de certa categoria de interesse, ($0 \leq X \leq n$). Seja p uma proporção populacional desconhecida da categoria de interesse. Nas condições anteriores X tem uma distribuição Binomial(n, p). O objetivo é calcular intervalos de estimação de p . Para isso, definimos antecipadamente o nível de confiança (ou nível de credibilidade na estimação bayesiana), que é fixado para todos os intervalos como $100 \times (1 - \alpha)\%$, ou seja, a probabilidade de abrangência do intervalo aleatório $[L_I; L_S]$ é $1 - \alpha$. Neste caso, o nível de confiança (ou de credibilidade) é chamado nominal, diferente do nível de confiança (ou de credibilidade) real. Quando construímos um intervalo

de estimação, sempre queremos que a probabilidade de abrangência real seja próximo do nível de confiança (credibilidade) nominal. Pela natureza discreta da distribuição binomial nem sempre consegue-se atingir o nível de confiança (credibilidade) nominal. Assim, nosso objetivo é construir intervalos de estimação para p tal que a probabilidade de abrangência $P(p \in [L_I; L_S]) \approx 1 - \alpha$. As variáveis aleatórias L_I e L_S dependem de X , número de sucessos na amostra aleatória, de n e do método utilizado para construir intervalo de estimação. Quatro métodos são descritos nas seguintes subseções.

2.1.1 Intervalo Exato

Este intervalo foi introduzido por Clopper-Pearson(1934). É um intervalo que garante que, para todos os valores possíveis de p , a probabilidade de abrangência é pelo menos $1 - \alpha$. Podemos obter este intervalo através de encontrar a solução de

$$\sum_{j=X}^n \binom{n}{j} L_I^j (1 - L_I)^{n-j} = \alpha/2 \quad (2.1)$$

e

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_S^j (1 - L_S)^{n-j} = \alpha/2. \quad (2.2)$$

Para $X = 0$ e $X = n$, as soluções de (2.1) e (2.2) são explícitas:

$$L_I(0) = 0, L_S(0) = 1 - (\alpha/2)^{1/n}; L_I(n) = (\alpha/2)^{1/n}, L_S(n) = 1.$$

Para outros valores de X , para obter a solução de (2.1) e (2.2), utiliza-se a seguinte equação apresentada em Blyth (1986), Agresti e Coull (1998), Newcombe (1998), Brown, Cai e García-Pérez (2005),

$$\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} = \int_0^p f_B(t) dt,$$

em que f_B é a função densidade de probabilidade de Beta com parâmetros k e $n - k - 1$. Aplicando essa relação para (2.1) e (2.2), o limite inferior é o $\alpha/2$ quantil da distribuição beta com parâmetros x e $n - x - 1$, e o limite superior é o $1 - \alpha/2$ quantil da distribuição

beta com parâmetros $x + 1$ e $n - x$. Assim, podemos resolver (2.1) e (2.2) usando pacotes de programas estatísticos.

O intervalo exato Clopper-Pearson explicado acima, tem uma probabilidade de abrangência muito boa. No entanto, este procedimento é necessariamente conservadora, devido à característica discreta da distribuição binomial, assim como o correspondente teste exato é conservador. Para qualquer valor fixo do parâmetro, a probabilidade de abrangência real pode ser muito maior do que o nível de confiança nominal, ao menos que n é muito grande. A solução disso é construir um intervalo de confiança baseado na aproximação.

2.1.2 Intervalo Bayesiano

O intervalo Bayesiano é conhecido como intervalo de credibilidade na inferência bayesiana. Este intervalo utiliza o método exato, garante que, sob uma específica distribuição a priori de p , a média de probabilidade de abrangência é $1 - \alpha$. Se a priori tem distribuição Uniforme(0,1) ou Beta(1,1), o qual é não-informativo, obtém-se a posteriori de p , sendo uma distribuição Beta($X + 1, n - X + 1$). Neste trabalho, escolhemos a distribuição uniforme como a distribuição a priori de p .

Assim, para $X = 0$ e $X = n$,

$$L_I(0) = 0, L_S(0) = 1 - \alpha^{1/(n+1)}; L_I(n) = \alpha^{1/(n+1)}, L_S(n) = 1.$$

Para $X = 1, 2, \dots, n - 1$, o limite inferior (superior) é o $\alpha/2$ ($1-\alpha/2$) quantil da distribuição beta com parâmetros $x + 1$ e $n - x + 1$.

A similaridade entre esses resultados e os do intervalo Clopper-Pearson é a consequência da escolha da distribuição a priori Uniforme.

2.1.3 Intervalo Wald

A maioria dos livros estatísticos apresentam um intervalo de confiança para o parâmetro da distribuição binomial usando o método de aproximação normal, ou seja, a distribuição Binomial(n, p) é aproximada pela distribuição normal para $N(np, np(1-p))$. Assim, temos que,

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

e

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha, \quad (2.3)$$

em que $z_{1-\alpha/2}$ representa o $1 - \alpha/2$ percentil da distribuição $N(0, 1)$.

Consideramos uma segunda aproximação da expressão (2.3),

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{X}{n^2}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \cong 1 - \alpha. \quad (2.4)$$

A expressão (2.4) leva-nos ao intervalo Wald,

$$\hat{p} \pm z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},$$

em que $\hat{p} = X/n$.

2.1.4 Intervalo Bootstrap-percentil

Intervalos de confiança exatos, como foi dito, muitas vezes são construídos através de soluções analíticas, nem sempre simples, enquanto intervalos aproximados dependem de aproximações assintóticas nem sempre alcançadas. Uma ferramenta alternativa são os métodos computacionalmente intensivos, livre de complexidades analíticas, surge neste âmbito o método *bootstrap*.

O método *bootstrap* foi introduzido por Efron(1979) como uma ferramenta de estimação usando a distribuição empírica da amostra observada. Comparado com outras técnicas estatísticas, o método teve uma gênese um tanto tardia, devido à sua dependência do uso de computadores. Os progressos experimentais da informática nas últimas décadas do século XX possibilitaram a popularização do uso do computador e incrementaram o surgimento e acesso a *software* matemáticos e estatísticos. Conseqüentemente, aumentaram as aplicações do método bootstrap nas diversas áreas da estatística.

A amostra consiste em X sucessos e $n - X$ fracassos, logo, a função de distribuição empírica é dada por,

$$F_n(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - \frac{X}{n}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

isto é, a função distribuição de uma variável aleatória Bernoulli($\frac{X}{n}$). Considerando o estimador de p , $\hat{p} = X/n$ e a distribuição bootstrap de $n\hat{p}$ é a distribuição do número de sucessos numa amostra aleatória de tamanho n de uma população Bernoulli($\frac{X}{n}$), obtemos a distribuição bootstrap deste estimador, Binomial($n, \frac{X}{n}$).

Vários métodos podem ser usados para construir intervalo de confiança de parâmetro interessado, p , após a obtenção desta distribuição. O método percentil é um deles, o intervalo de confiança de probabilidade de abrangência $1 - \alpha$ estimado por este método é obtido pelos $\alpha/2$ -ésimo e $(1 - \alpha/2)$ -ésimo percentis da distribuição bootstrap de \hat{p} .

2.2 Comparação dos métodos

O objetivo de utilizar um estimador de intervalo ao em vez de um estimador pontual, é para ter uma certa garantia de capturar o parâmetro de interesse. Nesta seção, vamos comparar e avaliar o desempenho dos quatro métodos da estimação intervalar apresentados na seção 2.1. Para este objetivo, calcularemos a probabilidade de abrangência e o valor esperado do

comprimento dos intervalos.

Para um valor fixo de um parâmetro, a probabilidade de abrangência real de estimador de intervalo é a probabilidade de que o intervalo contém esse valor. No caso de distribuições discretas, ela varia de acordo com o valor do parâmetro. Para qualquer estimador de intervalo de confiança para p , a probabilidade de abrangência, em função de n e p , é dado por:

$$PA(p, n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} I_{[L_I(j), L_S(j)]}(p), \quad (2.5)$$

em que $I_{[a,b]}(p)$ é a função indicadora do intervalo $[a,b]$, isto é, $I_{[a,b]}(p) = 1$, se $p \in [a, b]$, e $I_{[a,b]}(p) = 0$, se $p \notin [a, b]$.

O valor esperado de comprimento também é muito importante na avaliação de um intervalo de confiança. Por definição, temos que,

$$EL(p, n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (L_I(j) - L_S(j)). \quad (2.6)$$

As soluções da equação (4.3) e (4.4) são calculadas e programadas em R.

Para obter uma boa avaliação dos quatro métodos, calculamos a probabilidade de abrangência dos 10000 valores de p , igualmente distribuí no intervalo de $[0,1]$, para $\alpha=0.05$. Das figuras 2.1, 2.2, a 2.16 mostram a probabilidade de abrangência dos quatro métodos de estimação intervalar utilizados para $\alpha=0,05$ e $n=10, 50, 100$ e 500 , respectivamente.

Observamos que mesmo para n pequeno, o intervalo exato mantém uma probabilidade de abrangência acima do nível de confiança nominal, em que todas as probabilidades estão mais alta que 95%, o nível de confiança. Já a probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade vacila em torno da probabilidade de abrangência nominal, e os outros dois métodos, em geral, têm probabilidade de abrangência mais baixa do que a probabilidade nominal.

Para n grande, observamos que o intervalo exato continua mantendo sua probabilidade

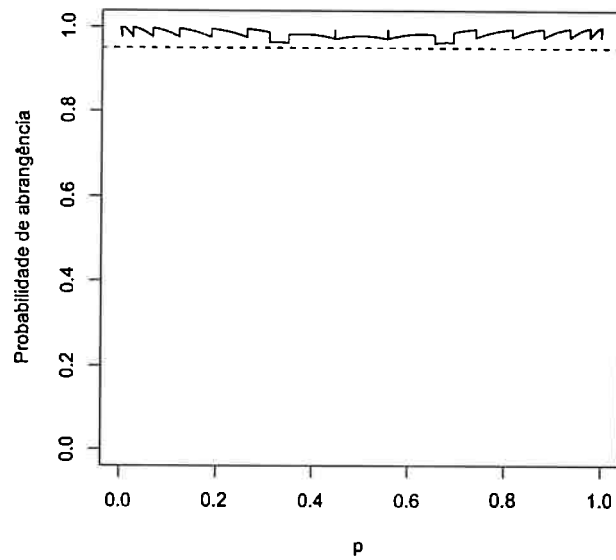


Figura 2.1: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $n=10$ e $\alpha=0,05$.

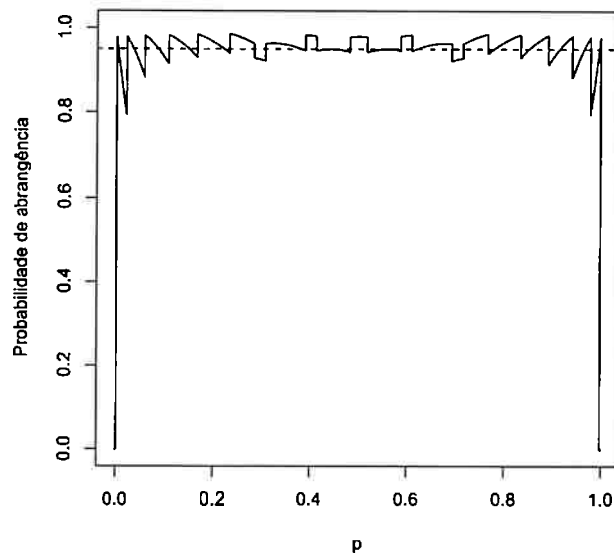


Figura 2.2: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $n=10$ e $\alpha=0,05$.

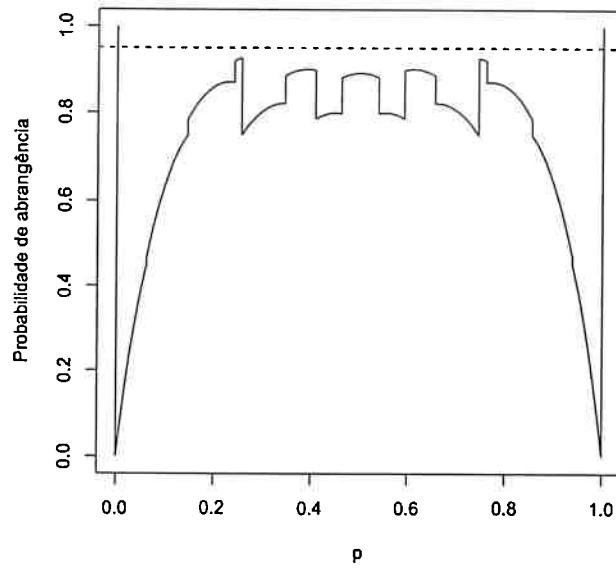


Figura 2.3: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $n=10$ e $\alpha=0,05$.

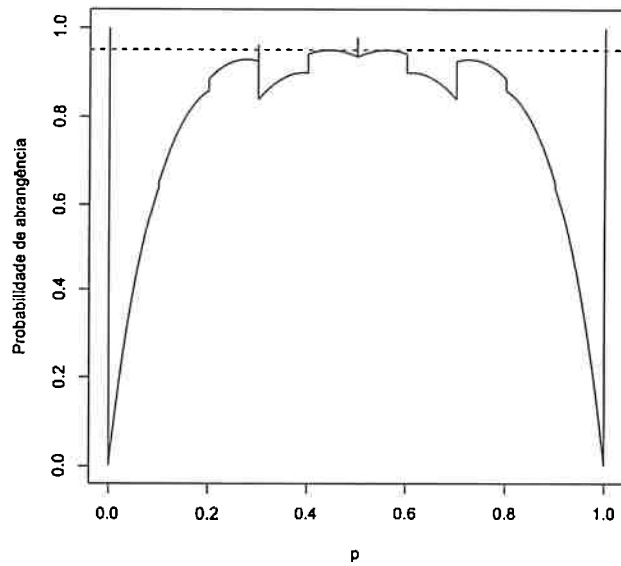


Figura 2.4: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $n=10$ e $\alpha=0,05$.

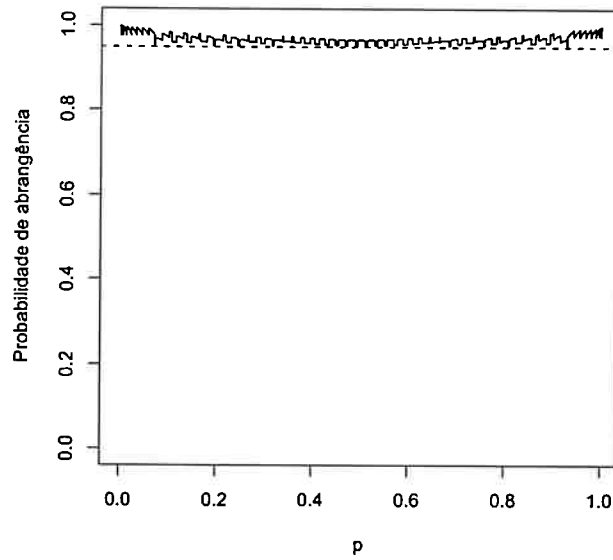


Figura 2.5: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $n=50$ e $\alpha=0,05$.

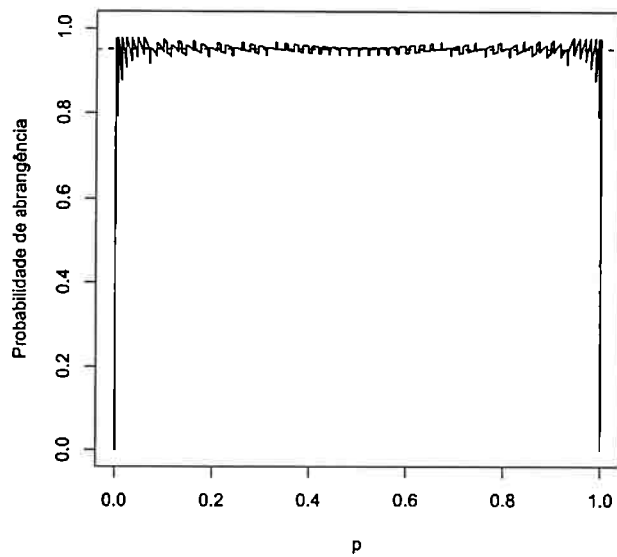


Figura 2.6: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $n=50$ e $\alpha=0,05$.

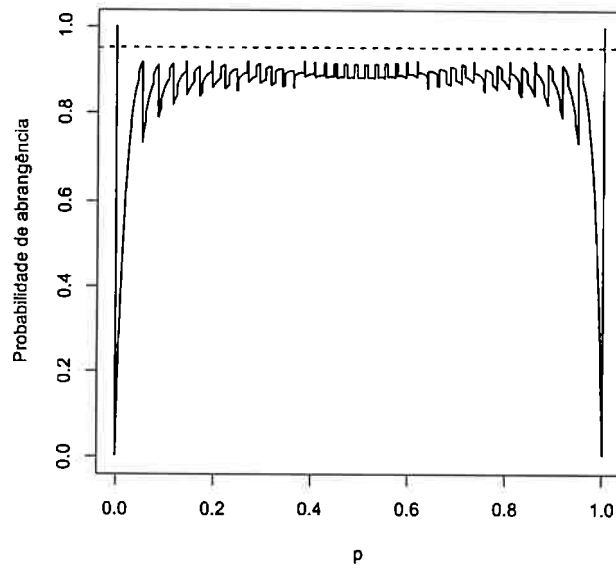


Figura 2.7: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $n=50$ e $\alpha=0,05$.

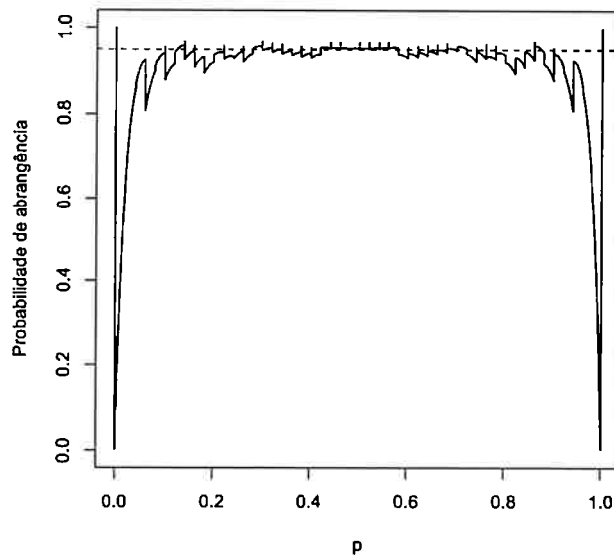


Figura 2.8: Probabilidade de abrangência do intervalo bootstrap-p para $n=50$ e $\alpha=0,05$.

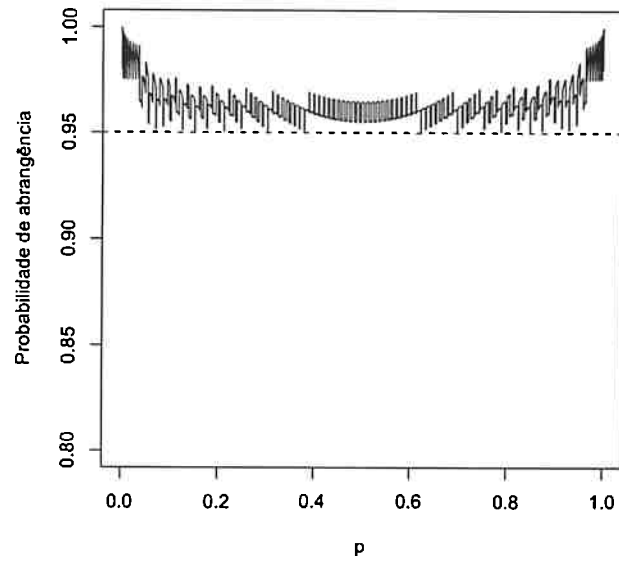


Figura 2.9: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $n=100$ e $\alpha=0,05$.

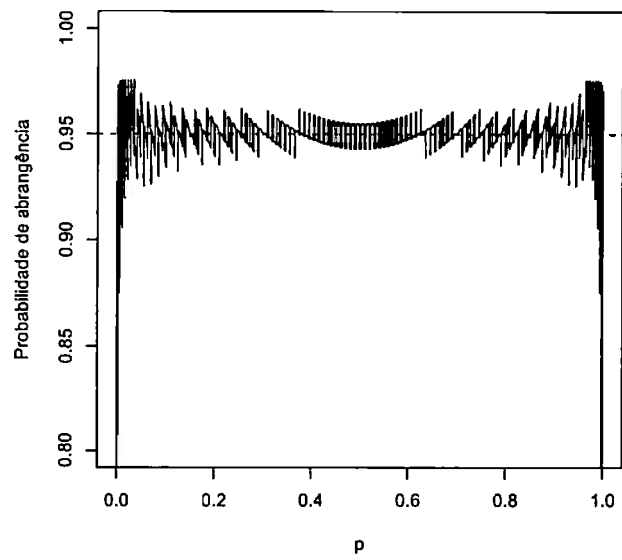


Figura 2.10: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $n=100$ e $\alpha=0,05$.

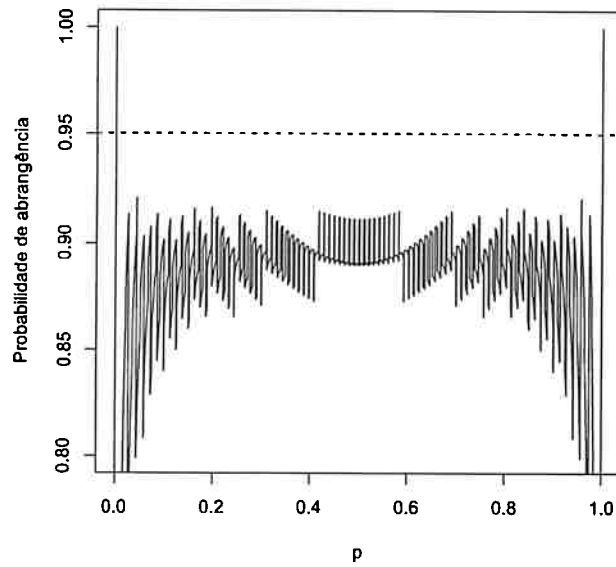


Figura 2.11: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $n=100$ e $\alpha=0,05$.

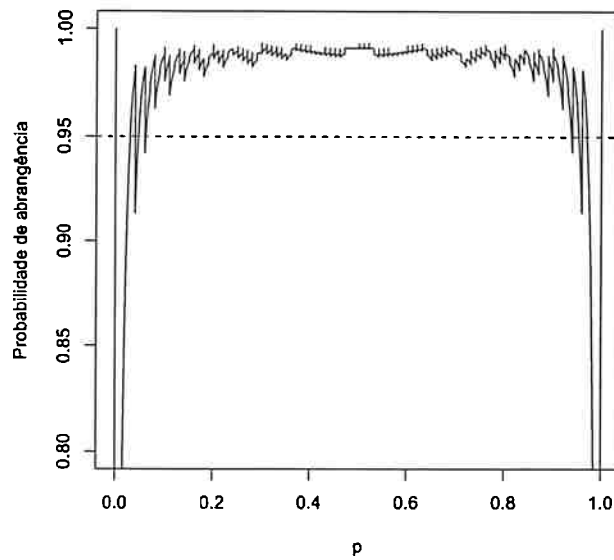


Figura 2.12: Probabilidade de abrangência do intervalo bootstrap-p para $n=100$ e $\alpha=0,05$.

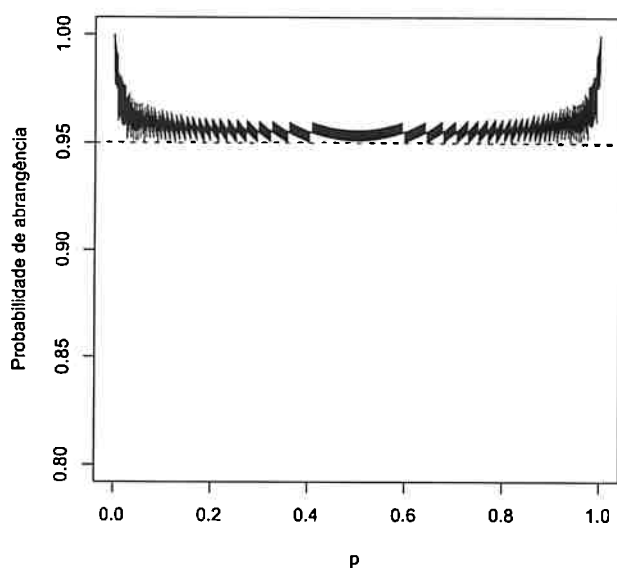


Figura 2.13: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $n=500$ e $\alpha=0,05$.

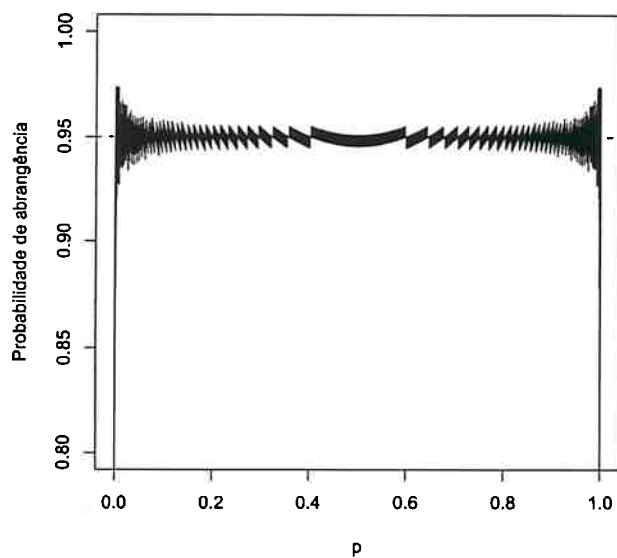


Figura 2.14: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $n=500$ e $\alpha=0,05$.

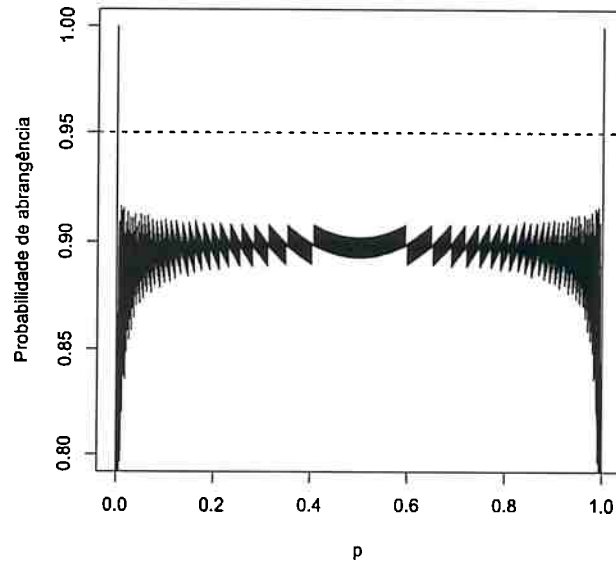


Figura 2.15: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $n=500$ e $\alpha=0,05$.

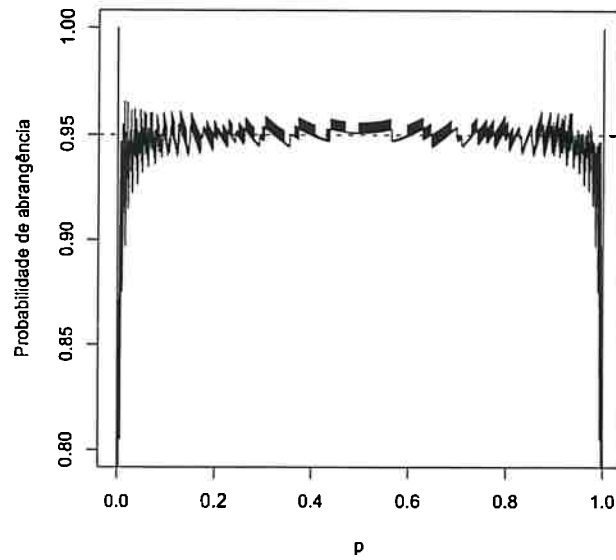


Figura 2.16: Probabilidade de abrangência do intervalo bootstrap-p para $n=500$ e $\alpha=0,05$.

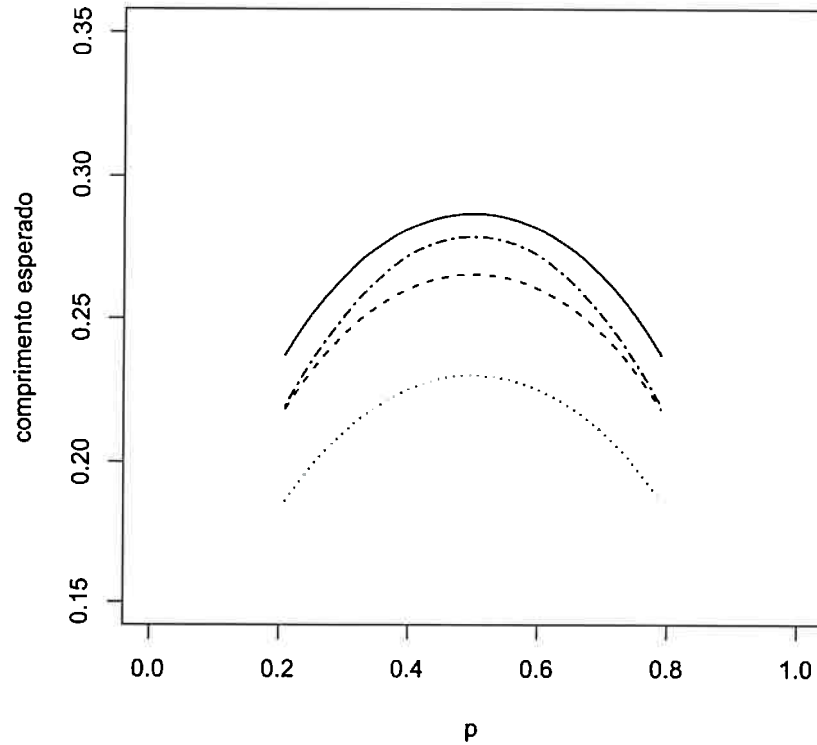


Figura 2.17: Comprimento esperado dos intervalos exato (linha sólida), Wald (pontilhada), de credibilidade (-) e de bootstrap-p (-) para $n=50$ e $\alpha=0,05$

de abrangência acima do nível de confiança nominal; as probabilidades de abrangência dos intervalos de credibilidade e de bootstrap-p convergem para a probabilidade nominal, mas o intervalo de credibilidade têm uma convergência melhor que o bootstrap-p. Já o intervalo Wald, tem uma probabilidade de abrangência bem baixa da probabilidade nominal.

A figura 2.17 mostra o comprimento esperado de cada intervalo de estimação com $0,210 \leq p \leq 0,790$. O intervalo Wald apresenta o menor comprimento esperado enquanto o intervalo exato tem a maior comprimento esperado. Os intervalos de credibilidade e de bootstrap-p ficam em meio desses dois intervalos, mas o intervalo de credibilidade, em geral, tem comprimento esperado menor do que o intervalo bootstrap-p.

Intervalos de estimação de uma média Poisson

A distribuição Poisson tem muitas aplicações em várias áreas científicas e tem-se requerido uma boa estimação da média da Poisson. A epidemiologia é uma delas, os pesquisadores usam a distribuição para simular a incidência das doenças (ex. Gail and Benichou, 2000; Rothman and Greenland, 1998; Selvin, 1996), considerando a taxa de incidência como a média de Poisson, calculando os intervalos de confiança para esse parâmetro. Neste capítulo, apresentaremos os quatro intervalos de estimação de uma média da distribuição Poisson.

3.1 Descrição dos métodos

Seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ uma amostra aleatória de uma população Poisson com média $\theta \in (0, \infty)$ e definimos $Y = \sum X_i$. Y é suficiente para θ e Y tem a função de distribuição Poisson($n\theta$). Nosso objetivo é construir intervalos de confiança para o parâmetro θ . O nível de confiança nominal é fixado para todos os intervalos como $100 \times (1 - \alpha)\%$, significa que a probabilidade de abrangência do intervalo $[L_I; L_S]$ deveria ser $1 - \alpha$. As variáveis aleatórias L_I e L_S dependem de Y . A seguir descrevemos os quatro métodos de estimação dos intervalos.

3.1.1 Intervalo Exato

O procedimento do cálculo de intervalo exato para o parâmetro θ foi introduzido por Garwood (1936), derivado do intervalo fiducial. O método que o Garwood usou é similar ao de Clopper e Pearson (1934), dado α , o limite inferior do intervalo de confiança com $1 - \alpha\%$ é o menor valor de λ tal que,

$$\sum_{i=0}^Y e^{-n\lambda} (n\lambda)^i / (i!) = \alpha/2, \text{ se } \lambda \text{ existe,} \quad (3.1)$$

e é igual a 0, caso contrário. O limite superior do intervalo de confiança com $1 - \alpha\%$ é o maior valor de λ tal que:

$$\sum_{i=Y}^{\infty} e^{-n\lambda} (n\lambda)^i / (i!) = \alpha/2. \quad (3.2)$$

Usando a relação entre as distribuições Poisson e Quiquadrado, resolvendo as equações (3.1) e (3.2) temos que,

$$L_I = \frac{\chi_{2y, \alpha/2}^2}{2n},$$

e

$$L_S = \frac{\chi_{2(y+1), 1-\alpha/2}^2}{2n},$$

em que y é a soma dos números observados do evento, e $\chi_{a,c}^2$ é o c quantil da distribuição χ^2 com o grau de liberdade a .

3.1.2 Intervalo Bayesiano

Antes de calcular o intervalo, definimos a distribuição a priori para o parâmetro de interesse, θ . Escolhemos a distribuição a priori *Gama*(a, b). Calcularemos a distribuição a posteriori de θ considerando que X tem distribuição Poisson(θ).

Segundo o teorema de Bayes,

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{P(x)} = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{\int_0^{\infty} P(x, \theta)d\theta} = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{\int_0^{\infty} P(x|\theta)P(\theta)d\theta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 P(\theta|x) &= \frac{ce^{-(b+1)\theta} \theta^{(a+x-1)}}{c \int_0^\infty e^{-(b+1)\theta} \frac{\theta^{(a+x-1)}}{i!} d\theta} \\
 &= \frac{e^{-(b+1)\theta} \theta^{(a+x-1)}}{\int_0^\infty e^{-(b+1)\theta} \theta^{(a+x-1)} d\theta} \\
 &= \frac{e^{-(b+1)\theta} \theta^{(a+x-1)}}{\frac{(a+x-1)!}{(b+1)^{a+x}}} \\
 &= \frac{(b+1)^{a+x}}{(a+x-1)!} e^{-(b+1)\theta} \theta^{a+x-1},
 \end{aligned}$$

onde c é um constante que não depende de θ . Portanto, a distribuição a *posteriori* de θ tem uma distribuição gama com parâmetros $(a+x, b+1)$.

Em nosso caso, temos uma amostra aleatória $\{X_i\}_{i=1}^n$, logo a *posteriori* de θ tem uma distribuição Gama($a + \sum x, [n + (1/b)]^{-1}$). Depois de obter a distribuição a *posteriori* de θ , os limites inferiores e superiores são obtidos por:

$$L_I = \frac{\chi_{2(\sum x+1), \alpha/2}^2}{2(n+1)},$$

e

$$L_S = \frac{\chi_{2(\sum x+1), 1-\alpha/2}^2}{2(n+1)},$$

os limite inferior e superior são os $\alpha/2$ e $(1-\alpha/2)$ quantil da distribuição gamma com parâmetros $a+x$ e $b+1$, respectivamente.

3.1.3 Intervalo Wald

Como foi dito, o intervalo Wald utiliza o método de aproximação normal padrão, então o intervalo de confiança com $(1-\alpha)\%$ para θ , derivado de $(\bar{X} - \theta)/(\bar{X}/n)^{1/2}$, é dado por:

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} (\bar{X}/n)^{1/2},$$

em que $\bar{X} = T/n$, $T = \sum_{i=1}^n X_i$, e $Z_{\alpha/2}$ é o $(1-\alpha/2)100$ -ésimo percentil. O intervalo Wald fornece assintoticamente $(1-\alpha)\%$ de abrangência para θ . A estatística T , a qual é uma estatística completa e suficiente para θ , tem uma distribuição Poisson com parâmetro $n\theta$.

3.1.4 Intervalo de Bootstrap-percentil

Neste caso, a amostra consiste em número de ocorrências, a função de distribuição empírica é dada por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \sum_{j=1}^x \frac{e^{-\hat{\theta}} \hat{\theta}^j}{j!} & , x \geq 0. \end{cases}$$

sendo $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Logo, intervalo de confiança de probabilidade de abrangência $1 - \alpha$ estimado por método bootstrap percentil é obtido pelos $\alpha/2$ -ésimo e $(1-\alpha/2)$ -ésimo percentis da distribuição bootstrap de $\hat{\theta}$.

3.2 Comparação dos métodos

Utilizamos também os dois critérios apresentados no capítulo 2 a fim de avaliar o desempenho dos métodos de estimação intervalar apresentados na seção anterior. Calculamos a probabilidade de abrangência,

$$PA(\theta, n) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-n\theta} (n\theta)^j I_{[L_I(j), L_S(j)]}(\theta) / (j!), \quad (3.3)$$

em que $I_{[a,b]}(\theta)$ é a função indicadora do intervalo $[a,b]$, isto é, $I_{[a,b]}(\theta) = 1$, se $\theta \in [a,b]$, e $I_{[a,b]}(\theta) = 0$, se $\theta \notin [a,b]$. E o valor esperado de comprimento,

$$EL(\theta, n) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-n\theta} (n\theta)^j (L_I(j) - L_S(j)) / (j!). \quad (3.4)$$

As soluções de equação 3.3 e 3.4 também são calculadas no programa R.

As figuras 3.1, 3.2, a 3.8 mostram a probabilidade de abrangência de cada método com $\alpha=0,05$ e θ de 0,001 a 2 e de 0,001 a 5. Observamos que para θ próximo ao extremo, as probabilidades de abrangência dos intervalos de Wald e de bootstrap convergem mais rápido para a probabilidade de abrangência nominal do que os intervalos exato e de credibilidade. No entanto, em geral, os quatro métodos têm uma probabilidade de abrangência baixa comparando com a probabilidade de abrangência real.

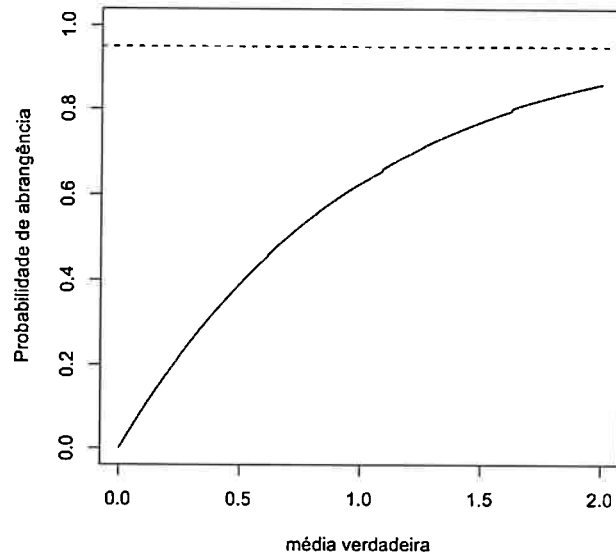


Figura 3.1: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $\alpha=0,05$.

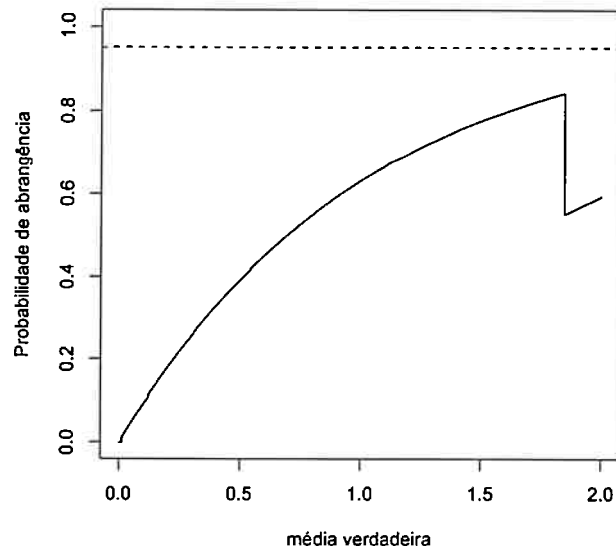


Figura 3.2: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $\alpha=0,05$.

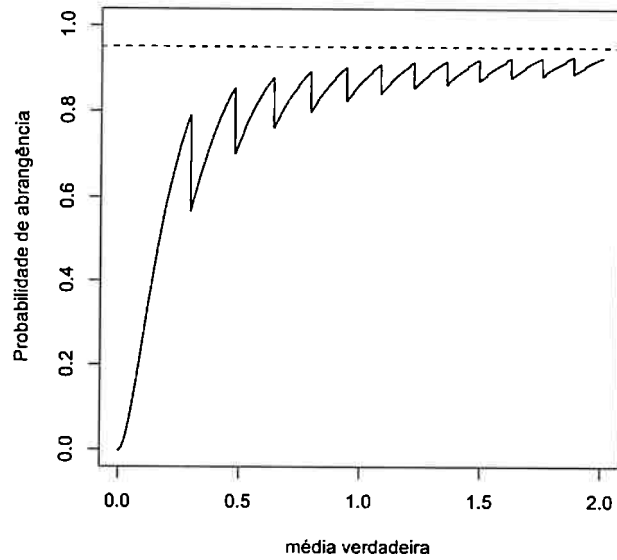


Figura 3.3: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $\alpha=0,05$.

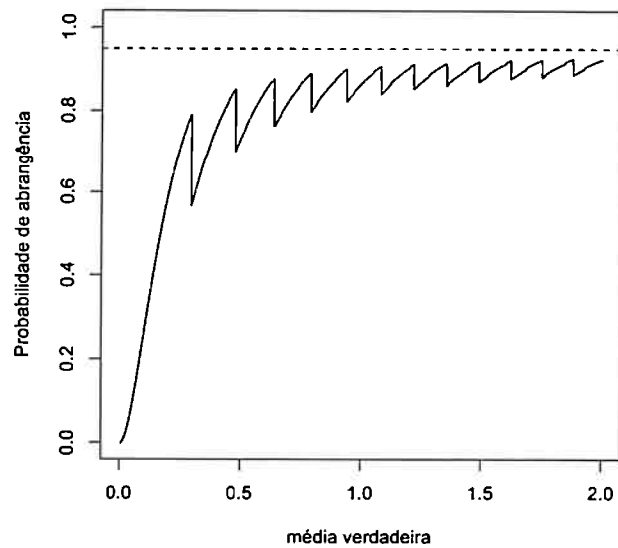
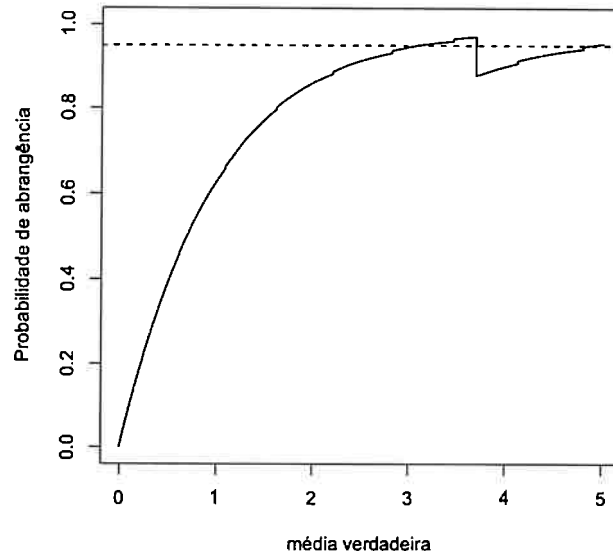
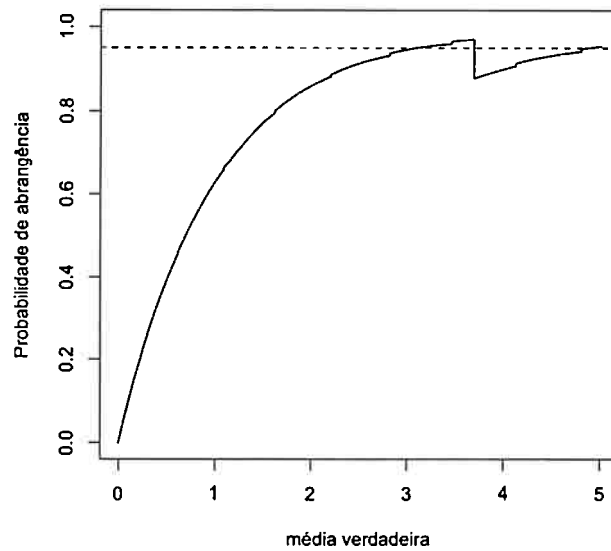
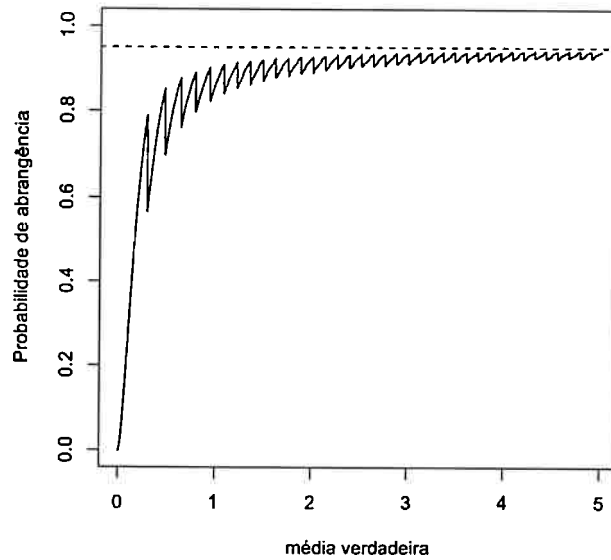
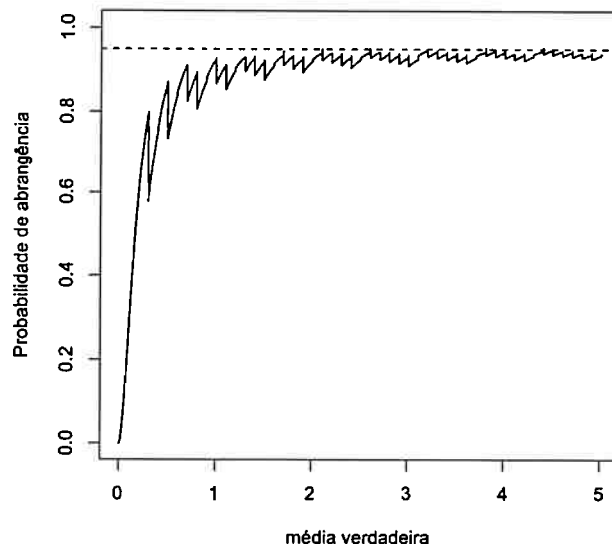


Figura 3.4: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $\alpha=0,05$.

Figura 3.5: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $\alpha=0,05$.Figura 3.6: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $\alpha=0,05$.

Figura 3.7: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $\alpha=0,05$.Figura 3.8: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $\alpha=0,05$.

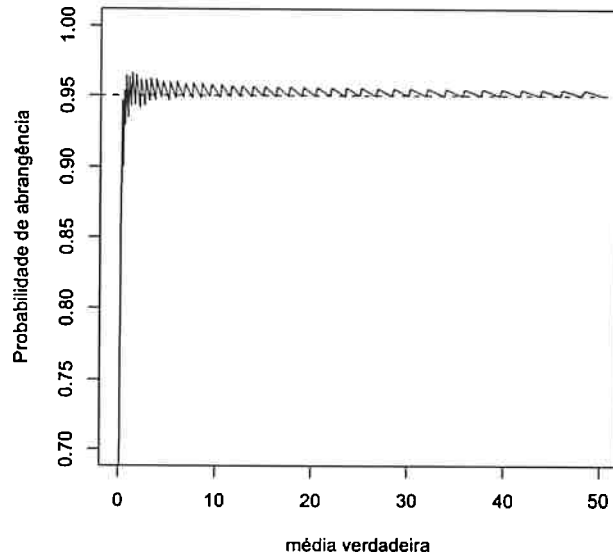


Figura 3.9: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $\alpha=0,05$.

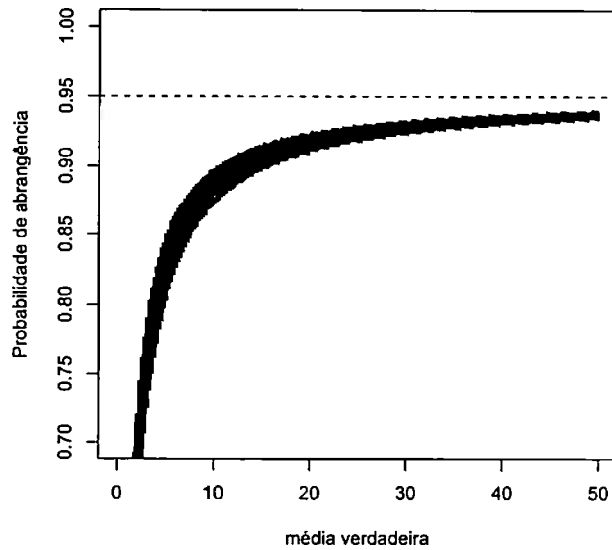


Figura 3.10: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $\alpha=0,05$

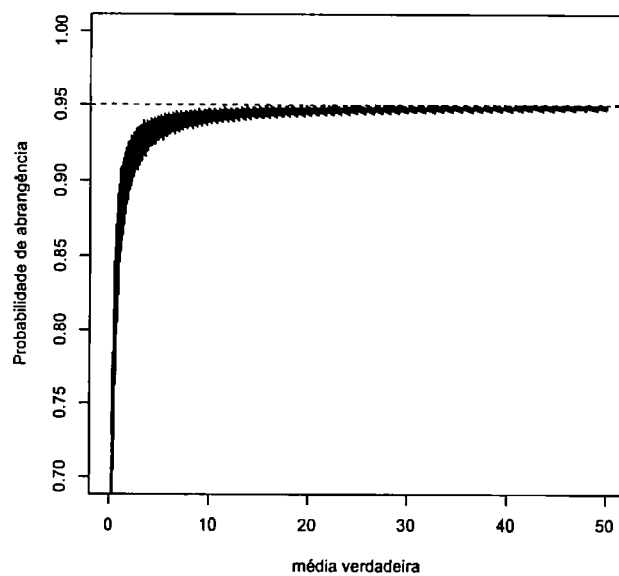


Figura 3.11: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $\alpha=0,05$.

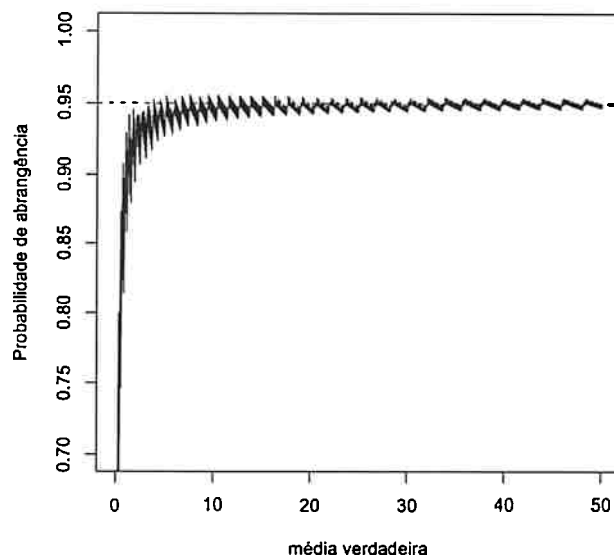


Figura 3.12: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $\alpha=0,05$.

As figuras 3.9, 3.11, 3.10 e 3.12 mostram a probabilidade de abrangência de cada método. Quando a média, θ é grande, todos os intervalos convergem para a probabilidade de abrangência nominal.

Intervalos de estimação da proporção Binomial Negativa

Neste capítulo, apresentaremos os quatro métodos de estimação intervalar citados para a estimação da proporção Binomial Negativa.

4.1 Descrição dos métodos

Se a proporção da população que possuem uma certa característica é p , extraímos uma amostra de uma população até extraímos r indivíduos com tal característica. Então, o número de indivíduos extraídos é uma variável aleatória com distribuição binomial negativa com parâmetros r e p .

Seja Y uma variável aleatória com distribuição binomial negativa com parâmetros r e p . Segue-se a função distribuição da Y :

$$P(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{(y-r)}, y = r, r+1, r+2, \dots, 0 < p < 1, \quad (4.1)$$

em que Y representa o número de ensaios antes do r -ésimo sucesso na seqüência de experimentos de Bernoulli independentes.

A distribuição binomial negativa, as vezes, é definida em termo de uma outra variável X , em que $X =$ o número de fracassos antes de r -ésimo sucesso. Usando a relação de $X = Y - r$, a expressão alternativa da distribuição binomial negativa é:

$$P(X = x) = \binom{x + r - 1}{x} p^x (1 - p)^r, x = 0, 1, 2, \dots, 0 < p < 1, \quad (4.2)$$

onde X representa o número de fracassos até o r -ésimo sucesso na seqüência de experimentos de Bernoulli independentes.

Neste trabalho, consideramos que r é conhecido e gostaríamos de estimar o intervalo de confiança para o parâmetro de interesse p .

4.1.1 Intervalo Exato

A função de distribuição de probabilidade da Binomial Negativa é similar com a distribuição de probabilidade da binomial, como foi mostrado na (4.2). Podemos usar as informações obtidas no capítulo 2 para calcular os intervalos de confiança para p . Segundo Casella e Berger (2002), o intervalo exato para o parâmetro de interesse, p , da distribuição binomial negativa é dado por:

$$(L_I(x); L_S(x)) = (Beta(r, x + 1; \alpha/2), Beta(r, x; 1 - \alpha/2)),$$

em que $Beta(a, b; c)$ representa o c quantil da distribuição beta com os parâmetros a e b . Este intervalo é baseado no método de Clopper-Pearson(1934).

4.1.2 Intervalo Bayesiano

Utilizamos a mesma distribuição *a priori* para p definida no capítulo 2, Uniforme(0,1), logo a distribuição *a posteriori* de p é uma distribuição beta com os parâmetros $r + 1$ e $X + 1$. Assim, o intervalo de credibilidade de p é dado por,

$$(L_I(x); L_S(x)) = (Beta(r + 1, x + 1; \alpha/2), Beta(r + 1, x + 1; 1 - \alpha/2)),$$

em que $Beta(a, b; c)$ representa o c quantil da distribuição beta com os parâmetros a e b . Como visto no caso de binomial, este intervalo é similar ao intervalo exato.

4.1.3 Intervalo Wald

Baseando na expressão (4.2), o estimador de máxima verossimilhança de p é dado por:

$$\hat{p} = \frac{r}{r+x}.$$

E a variância de \hat{p} é dada por:

$$Var(\hat{p}) = \frac{p^2(1-p)}{r}.$$

Assim, obtemos o intervalo Wald de p ,

$$\hat{p} \pm z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\hat{p}^2(1-\hat{p})/r},$$

4.1.4 Intervalo Bootstrap-percentil

Neste caso, a função de distribuição empírica é dada por:

$$F_n(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \frac{r}{r+X}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

ou seja, a função distribuição de uma variável aleatória Bernoulli($\frac{r}{r+X}$). Considerando o estimador de p , $\hat{p} = \frac{r}{r+X}$, a distribuição bootstrap deste estimador é Binomial Negativa($r, \frac{r}{r+X}$). Logo, o intervalo de confiança de probabilidade de abrangência $1 - \alpha$ estimado por método bootstrap percentil é obtido pelos $\alpha/2$ -ésimo e $(1 - \alpha/2)$ -ésimo percentis da distribuição bootstrap de \hat{p} .

4.2 Comparação dos métodos

Utilizamos também os dois critérios apresentados nos capítulos 2 e 3 a fim de avaliar o desempenho dos métodos de estimação intervalar apresentados na seção anterior. Calculamos a probabilidade de abrangência,

$$PA(p, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r} p^r (1-p)^j I_{[L_I(j), L_S(j)]}(p), \quad (4.3)$$

em que $I_{[a,b]}(p)$ é a função indicadora do intervalo $[a,b]$, isto é, $I_{[a,b]}(p) = 1$, se $p \in [a,b]$, e $I_{[a,b]}(p) = 0$, se $p \notin [a,b]$. E valor esperado de comprimento, temos que

$$EL(p, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+r-1}{r} p^r (1-p)^j (L_I(j) - L_S(j)). \quad (4.4)$$

As figuras 4.1, 4.2, a 4.8 mostram a probabilidade de cada método citados na seção anterior para $\alpha=0,05$ e $r=5$ e 20 , com p variando de 0.001 a 0.5 . Observamos que o intervalo de exato na estimação do parâmetro da distribuição binomial negativa mantém sua probabilidade de abrangência em cima da probabilidade de abrangência nominal. Os intervalos de credibilidade e bootstrap-p, como no caso binomial, convergem para a probabilidade nominal. E a probabilidade de convergência do intervalo Wald é baixa do que a probabilidade de abrangência nominal quando r é pequeno. Além disso, quando o valor de r é grande, a probabilidade de abrangência dos quatro métodos tendem a aproximar a probabilidade de abrangência nominal.

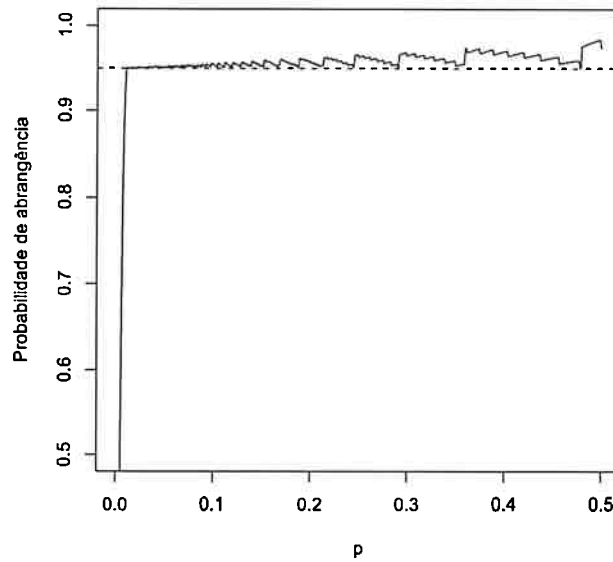


Figura 4.1: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $r=5$ e $\alpha=0,05$.

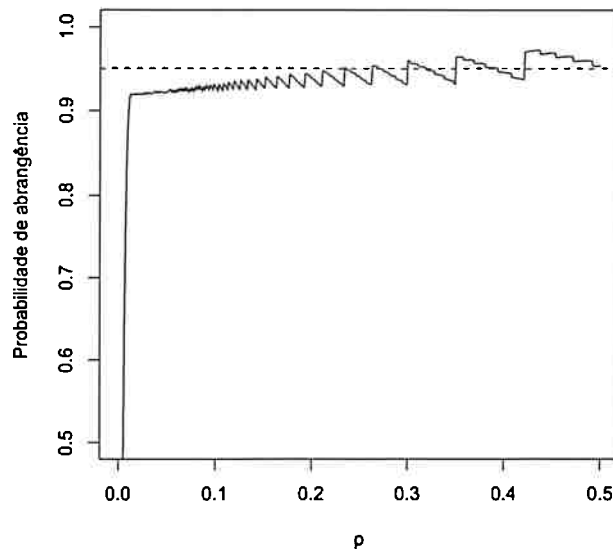


Figura 4.2: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $r=5$ e $\alpha=0,05$.

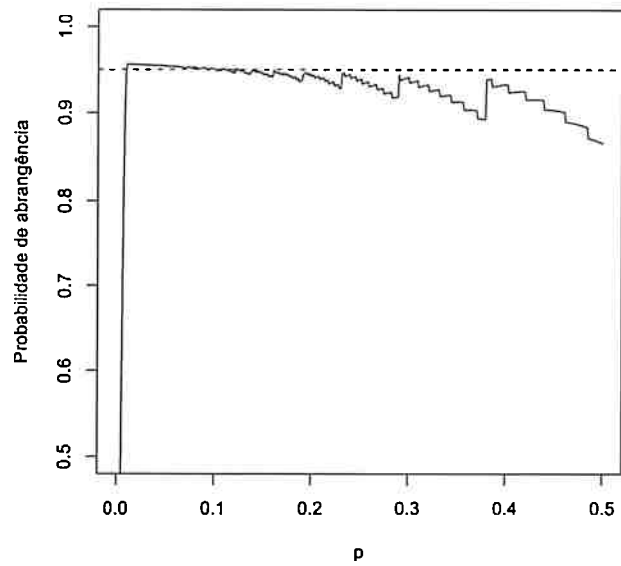


Figura 4.3: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $r=5$ e $\alpha=0,05$.

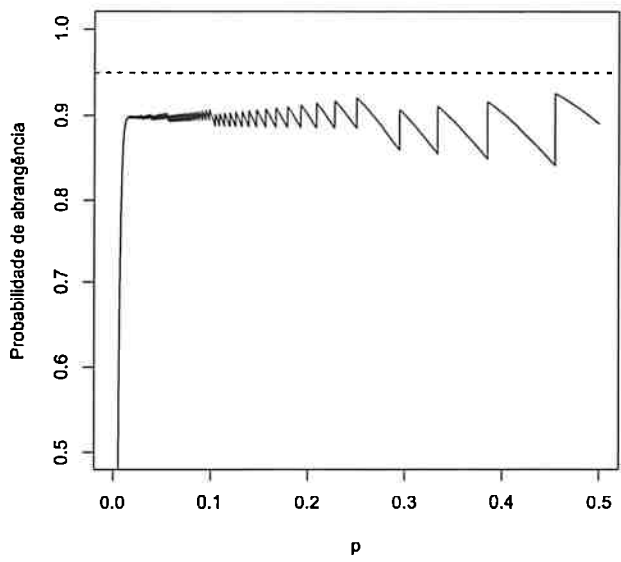


Figura 4.4: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $r=5$ e $\alpha=0,05$.

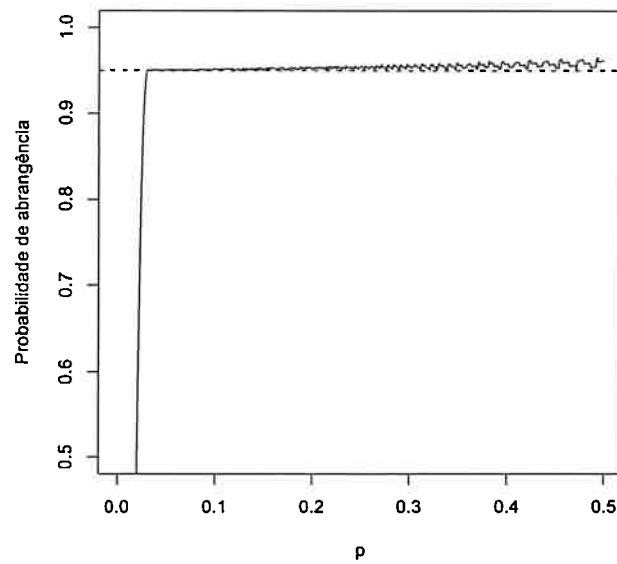


Figura 4.5: Probabilidade de abrangência do intervalo exato para $r=20$ e $\alpha=0,05$.

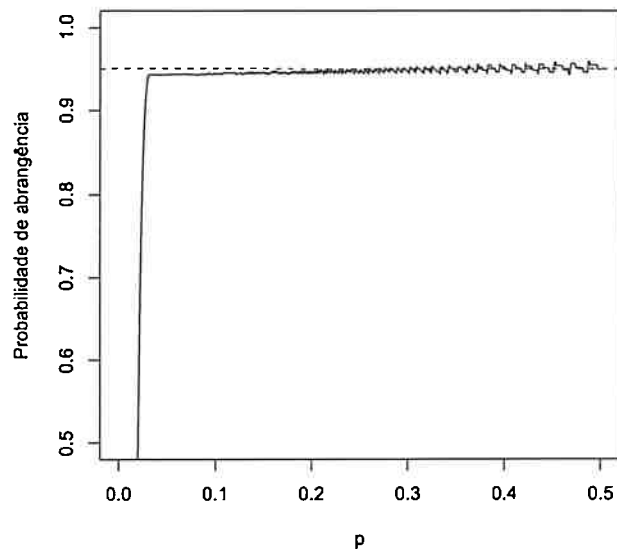


Figura 4.6: Probabilidade de abrangência do intervalo de credibilidade para $r=20$ e $\alpha=0,05$.

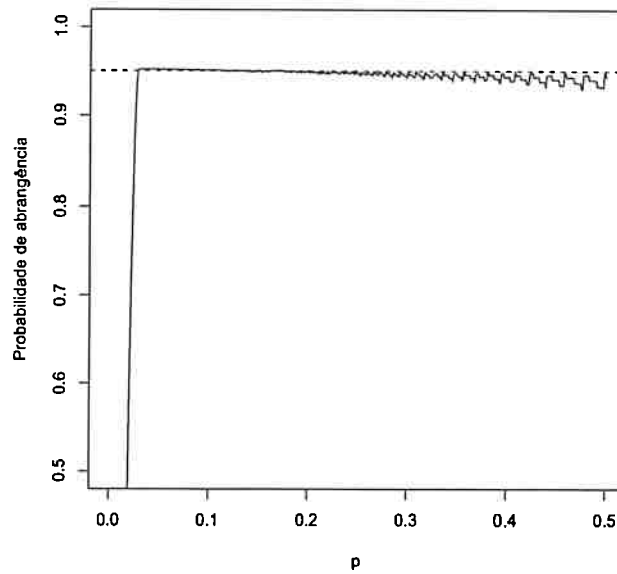


Figura 4.7: Probabilidade de abrangência do intervalo Wald para $r=20$ e $\alpha=0,05$.

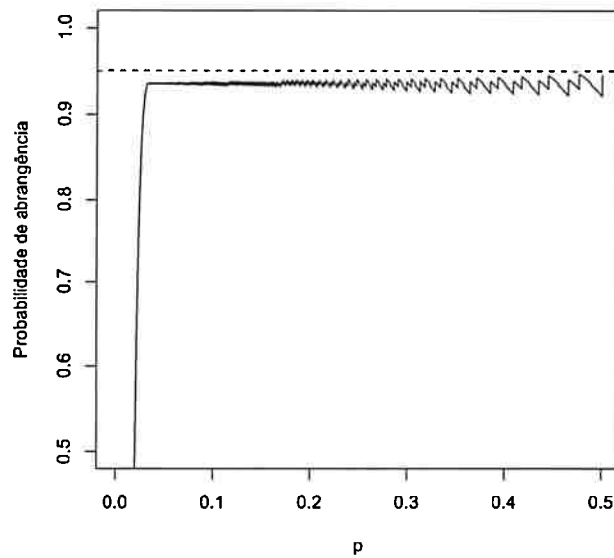


Figura 4.8: Probabilidade de abrangência do intervalo de bootstrap-p para $r=20$ e $\alpha=0,05$.

Conclusões

Nos capítulos 2, 3 e 4, mostramos quatro métodos de estimação intervalar para os parâmetros das três distribuições discretas, binomial, Poisson e binomial negativa. Pelo estudo de simulação, observamos que para ter uma boa estimação intervalar, os quatro métodos apresentados requerem o número da amostra grande.

O intervalo exato, pela sua característica exata, sempre tem uma probabilidade de abrangência acima de probabilidade de abrangência nominal, em compensação, tem o valor esperado de comprimento maior. O intervalo Wald, como outros artigos (por exemplo, Brown, Cai e DasGupta (2001)) também citados, tem o pior desempenho na avaliação de probabilidade de abrangência, em compensação, tem o valor esperado de comprimento menor. Os intervalos de credibilidade e bootstrap-p têm sua probabilidade de abrangência e o valor esperado de comprimento intervalar entre os valores desses dois intervalos.

Na prática, o intervalo exato requer o uso forte para cálculos computacionais. A escolha de intervalo utilizado para estimação depende do critério de cada um. Se o experimento requer uma probabilidade de abrangência alta, então pode-se escolher o intervalo exato, caso contrário, o intervalo de credibilidade é uma boa escolha pois em média, tem uma probabilidade de abrangência próximo da probabilidade nominal, e tem comprimento esperado não tão largo como o intervalo exato.

Apêndice 1.

Neste apêndice, apresentamos alguns programas desenvolvidos no R para as simulações deste trabalho. Apresentamos os programas do caso binomial.

Programa para calcular os limites do intervalo exato.

```
# funcao que calcula LI, LS de intervalo exato

limab<-function(n,x,p,alpha){
  if (x==0) {LI=0}
  if (x==n) {LI=(alpha/2)^(1/n)}
  if(x!=0|x!=n) {LI<-qbeta(alpha/2,x,n-x+1)}

  if (x==0) {LS=1-(alpha/2)^(1/n)}
  if (x==n) {LS=1}
  if(x!=0|x!=n) {LS<-qbeta(1-alpha/2,x+1,n-x)}
  list(LI=LI,LS=LS)
}
```

Programa para calcular a probabilidade de abrangência do intervalo exato.

```
#Probabilidade de abrangencia
Li<-vector()
Ls<-vector()
pab<-vector()
result<-limab(n,x,p,alpha)
prob<-function(n,p,alpha){
  m=n+1
```

```
for (k in 1:m){
  x=k-1
  result<-limab(n,x,p,alpha)
  Li[k]<-result$LI
  Ls[k]<-result$LS
  if (Li[k]<=p & p<=Ls[k]){
    pab[k]<-dbinom(x,n,p)
  }
  else {pab[k]<-0}
}
pt=sum(pab)
list(pt=pt)
}
```

Programa para calcular a probabilidade de abrangência do intervalo exato n variando.

```
#variando n 25-100

n<-vector()
n<-10:500
ln<-length(n)
alpha=0.05
mpb<-vector()
for (j in 1:ln){
  p<-seq(0,1,0.0001)
  lp<-length(p)
  for (i in 1:lp){
```



```
result2<-prob(n[j],p[i],alpha)
pabp[i]<-result2$pt
}
mpb[j]<-mean(pabp)
}
```

Programa para calcular a probabilidade de abrangência do intervalo exato p variando.

```
# variando p
pabp<-vector()
p<-vector()
result<-limab(n,x,p,alpha)
result2<-prob(n,p,alpha)

p<-seq(0,1,0.0001)
lp<-length(p)
n=10
alpha=0.05
for (i in 1:lp){
result2<-prob(n,p[i],alpha)
pabp[i]<-result2$pt
}

#Gráfico de probabilidade de abrangência em função de p

plot(p,pabp,type="l",ylab="Probabilidade de abrangência",c(0,1),c(0,1))
abline(h=0.95,lty=2)
```

função que calcula os limites do intervalo de credibilidade

funcao que calcula LI, LS de intervalo bayesiano

```
blimab<-function(n,x,p,alpha){

#calculo de limite inferior
if (x==0) {LI=0}
if (x==n) {LI=(alpha/2)^(1/(n+1))}
if(x!=0|x!=n) {LI<-qbeta(alpha/2,x+1,n-x+1)}

#calculo de limite inferior
if (x==0) {LS=1-(alpha/2)^(1/(n+1))}
if (x==n) {LS=1}
if(x!=0|x!=n) {LS<-qbeta(1-alpha/2,x+1,n-x+1)}
list(LI=LI,LS=LS)
}
```

função que calcula os limites do intervalo Wald

funcao que calcula LI, LS de intervalo bayesiano

```
wlimab<-function(n,x,p,alpha){
LI<-max(0,x/n-qnorm(1-alpha)*sqrt(x/n^2*(1-x/n)))

LS<-min(1,x/n+qnorm(1-alpha)*sqrt(x/n^2*(1-x/n)))

list(LI=LI,LS=LS)
}
```

função que calcula os limites do intervalo de bootstrap-p

```

Bplimab<-function(n,x,p,alpha){
  if (x==0) {LI=0}
  if (x==n) {LI=(alpha/2)^(1/n)}
  if(x!=0|x!=n) {LI<-(qbinom(alpha/2,n,x/n))/n}

  if (x==0) {LS=1-(alpha/2)^(1/n)}
  if (x==n) {LS=1}
  if(x!=0|x!=n) {LS<-(qbinom(1-alpha/2,n,x/n))/n}

  list(LI=LI,LS=LS)
}

```

calcular o comprimento esperado de cada intervalo e seu gráfico

```

som=0
n=25
p<-seq(0.210,0.790,0.001)
lp<-length(p)
ec<-vector()
EL<-function(n,p,alpha){
  for (j in 1:lp){
    m=n+1
    for (k in 1:m){
      x=k-1
      result<-limab(n,x,p[j],alpha)
      Li[k]<-result$LI
      Ls[k]<-result$LS
      som[k]<-dbinom(x,n,p[j])*(Ls[k]-Li[k])
    }
  }
}

```

```
ec[j]=sum(som)
list(ec=ec)
}
}
plot(p,ec,type="l", ylab="comprimento esperado",c(0,1),c(0.15,0.40))
```

```
bec<-vector()
for (j in 1:lp){
m=n+1
for (k in 1:m){
x=k-1
bresult<-blimab(n,x,p[j],alpha)
Li[k]<-bresult$LI
Ls[k]<-bresult$LS
som[k]<-dbinom(x,n,p[j])*(Ls[k]-Li[k])
}
bec[j]=sum(som)
list(bec=bec)
}
```

```
lines(p,bec,lty=2)
```

```
wec<-vector()
for (j in 1:lp){
m=n+1
for (k in 1:m){
x=k-1
wresult<-wlimab(n,x,p[j],alpha)
Li[k]<-wresult$LI
```

```
Ls[k]<-wresult$LS
som[k]<-dbinom(x,n,p[j])*(Ls[k]-Li[k])
}
wec[j]=sum(som)
list(wec=wec)
}
lines(p,wec,lty=15)
```

```
Bpec<-vector()
for (j in 1:lp){
m=n+1
for (k in 1:m){
x=k-1
Bpresult<-Bplimab(n,x,p[j],alpha)
Li[k]<-Bpresult$LI
Ls[k]<-Bpresult$LS
som[k]<-dbinom(x,n,p[j])*(Ls[k]-Li[k])
}
Bpec[j]=sum(som)
list(Bpec=Bpec)
}
lines(p,Bpec,lty=18)
```

Referências Bibliográficas

Referências bibliográficas

Agresti, A. and Caff, B. (2000). Simple and effective confidence intervals for proportions and differences of proportions result from adding two successes and two failures. *The American Statistician*, 54: 280-288.

Agresti, A. and Coull, B. (1998). Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportion. *The American Statistician*, 52: 119-126.

Anscombe, F. J. (1948). Transformations of Poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, 35: 246-254.

Barker, L. (2002). A comparison of nine confidence intervals for a Poisson parameter when the expected number of events is ≤ 5 . *The American Statistician*, 56: 85-89.

Blaker, H. (2000). Confidence curves and improved exact confidence intervals for discrete distributions. *The Canadian Journal of Statistics*, 28: 783-798.

Blyth, C. R. (1986). Approximate binomial confidence limits. *Journal of the American*

Statistical Association, 81: 843-845.

Böhning, D. (1994). Better approximate confidence intervals for a binomial parameter. *The Canadian Journal of Statistics*, 22: 207-218.

Brown, L. D.; Cai, T.T. and DasGupta, A. (2001). Interval estimation for a binomial proportion. *Statistical Science*, 16: 101-117

Brown, L. D.; Cai, T.T. and DasGupta, A. (2002). Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *The Annals of Statistics*, 30: 160-201

Carter, M. C. and Williford (1975). Estimation in a modified binomial distribution. *Applied Statistics*, Vol. 24, No. 3: 319-328.

Casella, G. (1986). Refining binomial confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 14: 113-126.

Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*. (2nd ed.). Duxbury Press.

Casella, G. and Robert, C. (1989). Refining Poisson confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 17: 45-57.

Clopper, C. J. and Pearson, E.S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case binomial. *Biometrika*, 26: 404-313.

Copas, J. B. (1992). Exact confidence limits for binomial proportions - Brenner and Quan revisited. *The Statiscian*, 41: 569-572.

Crow, E. L. and Gardner, R. S. (1959). Confidence intervals for the expectation of a Poisson variable. *Biometrika*, 46: 441-453.

- DiCiccio, T. J. and Efron, B. (1996). Bootstrap confidence intervals. *Statistical Science*, 11: 189-212.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7: 1-26.
- Gail, M. H. and Benichou, J. (2000). Encyclopedia of epidemiologic methods. Chichester: John Wiley Sons.
- Garwood, F. (1936). Fiducial limits for Poisson distribution. *Biometrika*, 28: 437-442.
- Jowett, G. H. (1963). The relationship between the binomial and F Distributions. *The Statistician*, 13: 55-57.
- Kabaila, P. and Byrne, J. (2001). Exact short Poisson confidence intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 29: 99-106.
- Newcombe, R. G. (1998). Two-sided confidence intervals for the single proportion: comparison of seven methods. *Statistics in Medicine*, 17: 857-872.
- Raftery, A. E. (1987). Inference and prediction for a general order statistic model with unknown population size. *Journal of American Statistical Association*, 82: 1163-1168.
- Rothman, K. J. and Greenland, S. (1998) Modern epidemiology (2nd edition). Philadelphia: Lippincott-Raven.
- Selvin, S. (1996). Statistical analysis of epidemiologic data (2nd edition). Oxford: Oxford University Press.

Vollset, S. E. (1993). Confidence intervals for a binomial proportion. *Statistics in Medicine*, 12: 809-827.

Wardell, D. G. (1997). Small-sample interval estimation of Bernoulli and Poisson parameters. *The American Statistician*, 51: 321-325.

Referências Bibliográficas