Apreçamento de títulos conversíveis

Dalton Santos Pinheiro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: **Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Vladimir Belitsky**

São Paulo, 27 de fevereiro de 2009.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a meus pais que me deram grande apoio para a conclusão deste trabalho.
Agradeço também ao pofessor Wladimir que me estimulou muito a compreensão de um assunto tão complexo que estou abordando neste trabalho inclusive este trabalho mudou a forma de pensar a respeito do mundo das finanças.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar e demonstrar o funcionamento de uma fórmula de apreçamento de títulos conversíveis básicamente a fórmula é realizada através do pricípio de neutralidade ao risco.

Abstract

We present a detailed analysis of the valuation of a convertible bond via the risk neutral valuation principle. We discuss the assumptions that are necessary for the application of this principle to the convertible bond case. We also warn about pitfalls stemming from an inadequate employment of these assumptions.

27 de fevereiro de 2009

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Os *Títulos Conversíveis* são títulos com características especiais que podem ser emitidos por governos ou empresas privadas. Neste texto vamos trabalhar apenas com títulos emitidos por empresas.
Quando uma empresa deseja obter dinheiro ela emite títulos que são papeis ou certificados que representam uma certa quantidade de capital, assim para a empresa que emitiu, este título consiste em um empréstimo realizado ao qual a empresa se compromete a devolver o montante emprestado acrescentado de uma certa taxa (como em um empréstimo tradicional). Entretanto, o título conversível dá a opção ao propropretário do título de ao final de um certo período de converter o montante da dívida em uma certa quantidade de ações da empresa determinado no contrato do título conversível.
Portanto, este título possui características de um empréstimo tradicional, mas que dá o direito de o portador deste título converter este em uma certa quantidade de ações.
Para o dono do título a vantagem é a possibilidade de ganhar mais caso a empresa que emitiu o título possua um forte crescimento e para o emissor do título a vantagem é a de poder obter dinheiro a um custo mais baixo que num empréstimo normal.
No mundo real os títulos conversíveis podem possuir um grande número de clausulas contratuais, por exemplo a callabilidade que consiste no fato do emissor possuir o direito de resgatar o título pagando um preço fixo caso o título suba acima de um certo valor estabelecido no contrato, tal cláusula torna o título conversível menos atraente para o investidor.
O objetivo deste trabalho é encontrar o preço justo deste título no momento em que este tipo de contrato é criado, ou seja, realizar o apreçamento do título conversível. Quanto ao método de apreçamento temos como pioneiro o trabalho de Merton [2] o qual apreçava um título de crédito simples(sem o direito de converter em ações da empresa) usando o valor da empresa ao

invés do valor de suas ações, neste modelo temos como única fonte de variabilidade o ativo do empresa.
Posteriormente veio os trabalhos de Ingersoll [3] e Brennan [4] para apreçar os títulos conversíveis, estes trabalhos usavam a mesma idéia que Merton usou para apreçar títulos de crédito. O trabalho desta dissertação mostra um método de apreçamento semelhante ao de Ingersoll, entretanto chegou-se a uma fórmula fechada para calcular o valor do título usando medida martingal de probabilidade ao invés de usar equações diferenciais como foi feito inicialmente por Ingersoll, na realidade este trabalho é um dos modelos propostos por T.Bielecki [5].
Este trabalho terá tabém um capítulo com os fundamentos do apreçamento de títulos de crédito no qual neste capítulo será inclusive abordado a metodologia que Merton [2] realizou para realizar o apreçamento deste título, metodologia esta que foi empregada no Capítulo 2 para o apreçamento do título conversível.
Para realizar o apreçamento do título conversível descrevemos inicialmente os resultados financeiros que este título pode ter em cada situação, em seguida realizamos o cálculo de seu valor inicial usando o princípio de neutralidade ao risco.
Entretanto, o valor inicial do título conversível resultante da aplicação deste princípio, é função de um conjunto de valores iniciais todas mensuráveis exceto o v valor inicial dos ativos bem como de sua volatilidade, estes valores não são diretamente observáveis para determinar estes valores são utilizados a metodologia que Merton [2] utilizou para apreçar títulos de crédito.
Deixamos este trabalho concluído com uma explicação clara e objetiva de como o leitor realiza o apreçamento de um título conversível, usando inclusive exemplos numéricos.

Capítulo 2

Título conversível, problema de apreçamento e sua solução

2.1 Modelo matemático para o título conversível

Vamos à definição do modelo que será usado para o cálculo do valor inicial do título conversível.

Lembramos que título conversível é um contrato assinado entre dois lados chamados de emissor e de credor ou titular do título conversível. O modelo a ser construído agora é o modelo para este contrato que além de formalizar matematicamente as cláusulas do contrato formaliza também as variáveis e parâmetros que entram neste contrato.

Nosso modelo será feito para o caso quando o emissor é uma empresa (a outra possibilidade é que seja governo de um país). Por isto usaremos o termo "empresa" no lugar de "emissor do título conversível" em todos os nossos argumentos abaixo. Notamos que ao tratar de empresas facilitamos o problema da modelagem de falência. As facilitades alcançadas revelar-se-ão no decorrer da apresentação.

No momento da assinatura do título conversível, a empresa recebe do titular uma quantia de dinheiro chamada *o valor inicial do título conversível* e denotada por TC_0. Observaremos que TC_0 é só a notação e que este valor não será determinado na presente seção. O cálculo deste valor é o problema principal abordado no nosso trabalho e uma das soluções a esta será dada na Seção 2.2. A presente seção destina-se à definição de todos os quisitos necesários para tal solução. Na verdade, tudo o que for necessário está vinculado aos direitos do titular dos quais ele pode usufruir num instante após a assinatura do contrato. Tal instante é definido no contrato no momento da assinatura. O tempo que decorre até esse chama-se *maturidade.* O momento de assinatura do contrato é o "tempo 0" no modelo (o que é compatível com o índice da notação TC_0), e a maturidade denota-se por T. O que acontecerá na realidade após o tempo T é irrelavante para nosso modelo e por isto que todos os processos que farão partes deste serão definidos no intervalo de tempo $[0, T]$. Avisamos porém que haverá a necesidade de definir e considerar alguns destes processos nos tempos anteriores a 0.

Vamos a descrição e a modelagem dos direitos do titular do título conversível. Estes diferem em dois casos: se a empresa falir e se não. No mundo real, a empresa emissora do título conversível pode falir em qualquer instante entre o de lançamento do título até a sua maturidade, mas nosso modelo "permite" que a empresa entre em falência somente no instante T.

Em primerio lugar, definimos os direitos do titular no caso a empresa não falir. Neste caso, o titular terá direito a escolher entre receber um certo valor, que tinha sido definido no momento da assinatura do contrato, ou receber q ações da empresa, sendo que q também era definido no momento da assinatura do contrato. O valor a receber – caso optar por receber – chama-se *o valor de face*; este denota-se no modelo por F. A quantidade q acima mencionada chama-se *a razão de conversão.* Sobre esta pressupomos que ela é igual a um (quer dizer, pressupomos que $q = 1$). O pressuposto facilitará nossas contas. Estas podem ser facilmente adaptadas para o caso $q \neq 1$.

Para que possamos formalizar os valores decorrentes dos direitos do título, é preciso assumir que investidores tomam decisões racionais e que, em particular, sempre escolhem aquilo que tem o maior valor entre duas ou mais alternativas. Portanto, para formalizar se o titular do título conversível opte por receber o valor da face ou q ações, precisamos introduzir a notação apropriada para *o preço de uma ação no tempo T da empresa emissora do título conversível*; este será denotado por S_T no nosso modelo. Então podemos resumir o que foi dito acima: o valor monetário do direito de titular é

$$\begin{array}{ll} F, & \text{se não há falência e } S_T < F, \\ S_T, & \text{se não há falência e } S_T \geq F. \end{array} \tag{2.1}$$

Os benefícios contemplados no caso de falência exigem a definição exata da falência. Recordando que neste modelo esta pode ocorrer somente no instante T, e definimos que este fato ocorre se e somente se:

o valor dos ativos da empresa no tempo $T <$ sua dívida total no tempo T,

ou, usando a notação V_T para o valor dos ativos de empresa no tempo T e a notação D para a dívida a ser honrada no tempo T, temos a seguinte expressão matemática da condição de falência:

$$V_T < D. \tag{2.2}$$

Notamos que para a conviniência assumimos que a empresa não contrai dívidas adicionais no intervalo de tempo correspondente a $[0, T]$ de nosso modelo.

No caso de falência, os ativos serão vendidos e o valor arrecadado será dividido entre os credores da empresa, quer dizer, entre os que emprestaram dinheiro para a empresa, entre os quais figuram-se os titulares dos títulos conversíveis. Cada um deles receberão sua parte da dívida; denotamos o valor a receber por R. Para que possamos expressar matematicamente este valor, é necessário definir a formação da dívida da empresa. Faremos isto a partir do parágrafo abaixo.

Para nossos argumentos é importante a composição da dívida a ser honrada no tempo T (lembramos, esta foi denotada por D). Agora daremos a atenção adequada a isso. Pressupomos que pode haver três casos:

Dívida-caso-1 a empresa tomou de, digamos, um banco, um empréstimo que a obriga a devolver $D^{emprestado}$ no tempo T.

Dívida-caso-2 a empresa emitiu títulos corporativos (tit. corpor.) com a maturidade em T e o valor de face que totaliza $D^{\text{tit.corpor.}}$.

Dívida-caso-1+2 ambos os casos anteriores, o que dá o valor total da dívida $D^{emprestado} + D^{\text{tit.corpor.}}$.

Designamos por D a dívida total:

$$D := D^{emprestado} + D^{\text{tit.corpor.}} + D^{\text{TC}}, \tag{2.3}$$

onde D^{TC} representa a dívida adquirida pela empresa devido à emissão de títulos conversíveis. Vale a pena esclarecer, antecipando-se um pouco, que não poderemos assumir que ambos $D^{emprestado}$ e $D^{tit.corpor.}$ podem ser nulos, pois se fossem então isto invalidaria a aplicação da idéia do Merton, conforme a qual, as observações dos valores das ações da empresa podem ser usadas para inferir nos parâmetros da dinâmica do valor da empresa. Mais diante daremos os detalhes desta idéia e exporemos a importância dela para o método de apreçamento usado por nós aquí. Aparentemente, estamos dando uma atenção demasiada à discussão da formação da dívida da empresa. Mas, como veremos adiante, esta é importante para o método de apreçamento como um todo.

Vamos agora à definição do benefício do titular do título conversível no caso da empresa falir. Neste caso, os ativos da empresa serão vendidos para honrar a dívida. Porém, os caminhos de como este dinheiro será dividido são diversos. Uma das opções é quando todos os credores da dívida podem dividir o valor da empresa caso esta falir. Para formalizar isto, suponhamos que D^{TC} apresenta a proporção α de toda a dívida:

$$\alpha := \frac{D^{TC}}{D}. \tag{2.4}$$

Então, um título conversível dará ao seu titular o valor:

$$R = \alpha \frac{\text{o valor da empresa}}{N^{TC}} = \alpha \frac{V_T}{N^{TC}}, \tag{2.5}$$

onde N^{TC} denota a quantidade dos títulos conversíveis emitidos. A segunda opção é quando os títulos conversíveis são os últimos a receber o que sobrar, caso a empresa for a falência. Isto levará expressão

$$R = \begin{cases} 0, & \text{Se } V_T < D^{emprestado} + D^{tit.corpor.} \\ \frac{V_T - D^{emprestado} + D^{tit.corpor.}}{N^{TC}}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Ou, ainda há a opção de receber uma quantia B fixa (tal valor é conhecido como rebate):

$$R = \begin{cases} 0, & \text{Se } V_T < BN^{TC} \\ B, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Todas as opções (e muito mais que poderiam ser feitas combinando as idéias por tráz destas três opções) podem existir no mundo real.

Nossa última notação da presente seção é TC_T que denota o benefício monetário do titular do título conversível no instante de sua maturidade, que é chamada tambem de *pay-off do título conversível.* Juntando todas as partes descritas na seção, temos a seguinte expressão matemática:

$$TC_T = \mathbf{1}_{\{V_T < D\}} R + \mathbf{1}_{\{V_T \geq D \text{ e } S_T \leq F\}} F + \mathbf{1}_{\{S_T \geq F\}} S_T. \tag{2.8}$$

2.2 Apreçando o título conversível no modelo

Lembramos que nosso objetivo principal era fornecer o valor inicial do título conversível. Notamos que existem inúmeras abordagens para a execução desta tarefa. No nosso trabalho, calcularemos o valor inicial do título conversível usando o modelo matemático construído na Seção 2.1. Ainda no âmbito deste modelo existem diversas maneiras de cálculo. Nós usaremos o método chamado *apreçamento pelo princípio de neutralidade ao risco*.

Daremos na observação abaixo uma descrição sucinta do princípio de neutralidade ao risco.

Observação 1 O princípio de neutralidade ao risco (PNR) aplica-se para modelos probabilísticos de mercados, quer dizer para modelos nos quais produtos de mercado são representados por processos estocásticos. Observaremos que um modelo não é obrigado a ser um espelho completo de mercado, mas quanto aos produtos de mercado refletidos nele, estes devem ser modelados por processos estocásticos. Isto significa, em particular, que o modelo possui um triplo probabilístico $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ no qual todos os processos estão definidos. Esclarecemos ainda que por "produto de mercado" entendemos qualquer produto que pode ser comprado e vendido (mesmo com restrições, quaisquer que sejam). Em geral, tais produtos são representados em modelos por seus preços. Esclarecemos ainda que dois ingredientes (quase sempre) indispensáveis de modelos de mercado são dinheiro e taxa de juros livre de risco. A taxa de juros livre de risco flutua no decorrer do tempo num mercado real. Por isto que esta taxa está modelada por um processo estocástico em modelos de mercado, mesmo que a taxa pode ser um produto não negociável (no mercado real e/ou no seu modelo). Mas a discussão da modelagem de taxa de juros não é o assunto para o presente trabalho, pois consideramos esta como fixa; a taxa de juros será denotada por r em nosso modelo.

Suponhamos então que há um modelo de mercado definido da maneira que atende as restrições colocadas acima. Suponhamos que neste modelo foi definido um novo produto. Notamos que ao dizer "produto" indicamos que este pode ser comprado e vendido no mercado e no seu modelo. Suponhamos que o preço do tal novo produto foi definido como função dos preços de todos os produtos (e talvez, outros parâmetros e processos) presentes no modelo. Geralmente, tal preço define-se para um certo instante do tempo; assumiremos que este é o caso e denotaremos tal istante por T. Então surge o problema natural: como determinar o preço deste novo produto nos instantes anteriores a T, e em particular, no instante 0. Este problema chama-se *problema de apreçamento*. Para formular o problema em termos matemáticos, pressupomos que no modelo há n processos estocásticos que representam a dinâmica dos preços de n produtos negociáveis; denotamos tais processos por $P_1(t), \cdots P_n(t)$, $t \in [0,T]$. Quanto ao novo produto introduzido no mercado, denotaremos seu preço no tempo t por TC_t. Conforme combinado acima, o preço foi definido só no tempo T e depende de todos os processos já existentes. A expressão matemática disto é:

$$TC_T = G\left(P_1(t), \cdots P_n(t);\ t \in [0,T]\right),$$

onde G denota uma função apropriada. Então, o problema de apreçamento é achar TC_t para $t \in [0, T)$.

A solução do problema de apreçamento pelo princípio de neutralidade ao risco constitui-se em duas etapas.

Na primeira etapa, é preciso achar uma medida, a ser denotada por $\mathbb{Q}$, que seja equivalente à medida $\mathbb{P}$ e que atenda a seguinte exigência: o processo de preço de cada produto presente no modelo, sendo descontado por taxa de juros livre de risco, deve ser martingal em relação da medida $\mathbb{Q}$. Matematicamente, isto expressa-se da seguinte maneira:

$$e^{-rs}\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[P_j(t+s) \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] = P_j(t) \qquad \mathbb{Q}\text{-quase certamente, para todo } t \text{ e } s > 0 \text{ e todo } j.$$

Acima, $\mathcal{F}(t)$ significa a σ-álgebra gerada por todos os processos do modelo no intervalo de tempo $[0, t]$. Não entraremos nos detalhes referente a este conceito, pois, como veremos diante, ele não é importante para o estabelecimento de TC_0. Isto ocorre devido ao fato de que $\mathcal{F}(0)$ é a σ-álgebra trivial, quer dizer, a σ-álgebra que contem somente dois elementos: Ω e $\emptyset$. (A trivialidade de $\mathcal{F}(0)$ segue-se da definição geral dada acima e do fato que todos os processos iniciam-se de valores constantes e não de variáveis aleatórias. Este fato é válido para nosso modelo, pois imaginamos que o momento $t = 0$ corresponde ao "presente" da situação real modelada. Já que no "presente" todos os valores são observáveis e, portanto, conhecidos, então estes devem ser representados no modelo por constantes e não por variáveis aleatórias.)

Na segunda etapa, define-se o processo de preço do novo produto via a seguinte fórmula:

$$TC_t := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\big[TC_T \,\big|\, \mathcal{F}(t)\big], \text{ para } t \in [0, T], \tag{2.9}$$

e, em particular,

$$TC_t := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\big[TC_T\big], \tag{2.10}$$

sendo a direta consequência de (2.9) e da trivialidade da σ-álgebra $\mathcal{F}(0)$.

O solução descrita acima tem por trás o seguinte fato: se um modelo permite a existência da medida $\mathbb{Q}$ que atenda as requisições acima descritas, então no mercado modelado não há como fazer arbitragem, o que significa, que é impossível montar uma estratégia (dinâmica) de compras e vendas que teria custo zero, que não poderia dar prejuízo no final, e que em algumas das possíveis relizações de Ω daria no final um lucro. É óbvio que o preço de novos produtos devem ser introduzidos para que o mercado não adquira a possibilidade de arbitragem. Esta propriedade está assegurada por definição (2.9) pois assim definido, o processo $e^{-rt}TC_t, t \in [0,T]$ é martingal em relação da medida $\mathbb{Q}$. É óbvio também, que só vale definir este martingal desde que os outros processos podem ser "martingalizados" pela mesma medida. Isto justifica a primeira etapa do procedimento acima descrito. Vale notar que pode existir mais que uma medida $\mathbb{Q}$ que atenda as requisições exigidas. Caso isto for o caso, não está claro qual destas devem ser utilizadas na segunda etapa. Mas nós não tocaremos neste assunto, pois no nosso problema tal medida será unica. Para maiores detalhes sobre PNR consulte [1]

Fim da Observação 1.

Vamos então à execução do método de apreçamento pelo princípio de neutralidade ao risco para nosso problema. Recordamos, que o nosso problema é apreçar o produto título conversível cujo valor no tempo T foi determinado pela fórmula (2.8), a qual será repetida abaixo para a comodidade da exposição:

$$TC_T = \mathbf{1}_{\{V_T<D\}}R + \mathbf{1}_{\{V_T\geq D \text{ e } S_T\leq F\}}F + \mathbf{1}_{\{S_T\geq F\}}S_T. \qquad (2.11)$$

Ao analisar a fórmula (2.11) vê-se facilmente que ela envolve preços de dois produtos, a saber: o do ativo da empresa, aquele denotado por V_T, e o de sua ação, aquele denotado por S_T. Antes de continuarmos, vale levantar a pergunta: "Será que o ativo da empresa e suas ações são produtos negociáveis?" A pergunta refere-se a estes produtos no mercado real. É óbvio que as ações são negociáveis. Quanto à negociavidade do ativo, esta depende de se considerarmos que a empresa pode ser comprada ou não. No nosso tratamento do problema de apreçamento de título conversível, assumimos que a empresa emissora do título conversível pode ser comprada. Com isto o ativo pode ser considerado como produto negociável.

As conclusões do parágrafo anterior têm a seguinte repercussão para nosso modelo: neste modelo, o preço da empresa e o preço de sua ação devem ser representados por processos estocásticos. Notamos que tal representação não foi feita na Seção 2.1.

Observação 2. A necessidade de representar produtos negociáveis por processos estocásticos desencadeia uma série de perguntas. A primeira pergunta é: "Na fórmula (2.11) para o valor do título conversível no tempo T aparecem o valor da empresa no tempo T e o valor da ação no tempo T. São dois valores, ou melhor dizendo, duas variáveis aleatórias. Por que então é preciso considerar o valor de empresa e o valor de sua ação como processos estocásticos que desenvolvem no período $[0,T]$?" Para responder a esta pergunta, é só voltar a descrição do princípio de neutralidade ao risco feita por nós acima. Lembramos que para apreçar o título conversível no nosso modelo, será empregado este princípio e que ele exige que todos os produtos negociáveis sejam representados por processos estocásticos. O porquê da exigência foi explicado junto a descrição do princípio.

A segunda pergunta seria assim: "Se por virtude de descuido ou por razões naturais, um dos produtos negociáveis não for um processo estocástico apropriadamente dito, isto teria consequências graves?" Antes de responder a pergunta, completamos esta: dizer que uma quantidade não é um processo estocástico apropriadamente dito, significa que esta quantidade é ou uma constante ou uma variável aleatória que não muda com o tempo. Por exemplo, um processo $X_t, t \in [0,T]$, definido via $X_t = X$, $\forall t$ (onde X é uma variável aleatória) é um exemplo de um processo estocástico "degenerado". Agora podemos passar para a resposta na pergunta. Nesta resposta, usaremos a notação X_t definida duas sentenças atrás. Suponhamos que há um produto negociável representado num modelo por este processo degenerado $X_t, t \in [0,T]$. Tal processo entrará em nossas considerações no momento em que procuraremos pela medida martingal equivalente, aquela medida denotada por $\mathbb{Q}$. Mas a definição do processo $X_\cdot$ nos garante que

$$X_t = X_0 \text{ para todo } t, \text{ e portanto } X_{t+s} \,\big|\, X_t = X_t \ \mathbb{P}\text{-quase certamente.}$$

Portanto, para qualquer que seja a medida $\mathbb{Q}$ (desde que seja equivalente à medida $\mathbb{P}$), vai valer a relação $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_{t+s} \,\middle|\, X_t\right] = X_t$ $\mathbb{Q}$-quase certamente, o que comprova que o processo $X_\cdot$ é um martingal em relação a $\mathbb{Q}$. Voltando à execução do método de apreçamento baseado no princípio de neutralidade ao risco, concluímos que um produto negociável cujo preço desenvolve-se pela regra

$$Y_t = e^{rt}Y, t \in [0,T]$$

não apresenta dificuldade para a execução do método (na equação acima, r é a taxa de juros livre de risco, que foi assumida constante em modelos a serem discutidos por nós no presente trabalho, e Y é uma variável aleatória qualquer a qual pode ser tambem uma constante).

Os processos estocásticos legítimos (quer dizer, com a estrutura mais sofisticada de que a da equação acima) são os quem criam as dificuldades na execução do método de apreçamento baseado no princípio de neutralidade ao risco.

Fim da Observação 2.

Voltaremos agora ao eixo do nosso raciocínio principal interrompido por observação acima. Foi constatado que no nosso modelo há dois produtos negociáveis e que precisamos definir os processos estocásticos que descrevem a evolução de seus preços, sendo que a necessidade veio de nosso desejo de empregar o método de apreçamento pelo princípio de neutralidade ao risco. Faremos isto abaixo.

Antes de começarmos construir os processos de preços dos produtos negociáveis refletidos em nosso modelo, vamos estabelecer a notação para estes:

V_t denota o valor da empresa no tempo t,
S_t denota o valor de uma ação desta empresa no tempo t,
para $t \in (-\infty, T]$.

Observe que os dois processos serão considerados no intervalo de tempo $(-\infty, T]$. Isto ocorre pois precisaremos de seus valores nos instantes anterior ao instante da assinatura do contrato do título conversível. Na verdade, seria suficiente para nós que o intervalo de tempo, no qual estes são definidos, seria pouco maior que $[0, T]$. Mas para evitar a desnecessária discussão de quanto maior este deve estar, dizemos $(-\infty, T]$.

É óbvio que um dos problemas na definição dos processos $V_.$ e $S_.$ está na identificação da dependência entre eles. Pois que não são independentes – é óbvio. A dependência, que será refletida no nosso modelo, baséia-se em idéias de Merton. Para que possamos aplicar as idéias é preciso pressupor que a empresa abriu totalmente seu capital e que este foi pulverizado em N ações. Seguindo a definição de ações, o possuidor de uma ação possui o valor da empresa dividida por N caso a empresa não faliu, e não possui nada, caso faliu. Juntando isto com a condição da falência $V_T < D$ (imposto em (2.2)) temos a seguinte relação:

$$S_T = \max\left\{0, \frac{V_T - D}{N}\right\}. \tag{2.12}$$

Acontece que esta fórmula deve ser detalhada para que possamos usa-la. O detalhamento vem do fato de que no caso de conversão do título conversível, o proprietário do título conversível torna-se acionista da empresa e não credor assim o valor de D^{TC} deixa de ser descontado dos ativos da companhia portanto:

$$S_T = \frac{V_T - D + D^{TC}}{N + N^{TC}} \tag{2.13}$$

Assim, substituindo as expressões para S_T em (2.11) e aproveitando da fórmula para o valor de R envolvido em (2.11), chegamos a seguinte expressão para TC_T:

$$\begin{aligned} TC_T &= \mathbf{I}_{\{V_T<D\}}\frac{FV_T}{D} + \mathbf{I}_{\{D\leq V_T<F(N+N^{TC})+D'\}}F \\ &\quad + \mathbf{I}_{\{V_T\geq F(N+N^{TC})+D'\}}\frac{V_T - D'}{N + N^{TC}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

com

$$D' = D - D^{TC}.$$

Na fórmula (2.14) está figurando V_T – o ativo da empresa no tempo T. Passaremos então para a construção do processo que descreve a dinâmica deste ativo em nosso modelo. Esta é muito simples: assumiremos que

$$\begin{array}{l} V_t = V_0 \exp\{\mu_V t + \sigma_V W_t\}, t \in [0,T], \\ \text{onde } W_{\cdot} \text{ designa o movimento browniano padrão} \end{array} \tag{2.15}$$

Devemos ser mais precisos em relação desta definição. Devemos especificar que que no nosso modelo há um triplo probabilístico $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ e que o processo $W_{\cdot}$ está definido neste triplo da maneira tal que este é o movimento browniano padrão. Notamos, que a fórmula em (2.15) implica em que o triplo probabilístico por trás do processo $V_{\cdot}$ também é $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$.

Vale a pena destacar o fato de que a medida $\mathbb{P}$ corresponde no nosso modelo à probabilidade real ou estatísticamente observada. Com isto queremos dizer que o desenvolvimento estatístico do processo $V_{\cdot}$ no modelo é idêntico ao desenvolvimento estatístico do valor dos ativos da empresa. Aqui, a palavra "idêntico" indica que o modelo foi construído para que os referidos desenvolvimentos sejam idênticos. Se isto foi alcançado não é a preocupação do presente trabalho: nossos futuros argumentos baséiam-se na crença de que foi. Ainda mais, podemos expressar esta identidade da seguinte maneira: se formos observar valores do processo do valor da empresa, veremos que seus log-retornos comportam-se como um movimento browniano padrão multiplicado por uma constante (a denotada por σ_V) e acrescentado um incremento (*drift*) μ_V.

Agora vamos resolver o problema de apreçamento do título conversível. Conforme explicado no texto até agora, o problema é achar TC_0. Nossa abordagem é via princípio de neutralidade ao risco. Para executar a abordagem, devemos executar as duas etapas descritas na Observação 1. Na primeira etapa temos que achar a medida martingal equivalente. Para executar esta etapa, aproveitamos do fato bem conhecido: existe medida $\mathbb{Q}$ que é equivalente a $\mathbb{P}$ e que sendo visto por esta medida o processo $\log V_t$ é o movimento browniano com drift $(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)$ e a volatilidade σ_V. Deste fato segue-se via um cálculo simples, que o processo $e^{-rt}V_t, t \in [0,T]$, é martingal do ponto de vista da medida $\mathbb{Q}$. Em outras palavras, $\mathbb{Q}$ é a medida martingal equivalente pela qual procuramos. Assim, o movimento de V_t em relação a medida $\mathbb{Q}$ fica:

$$V_t = V_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)t + \sigma_V W_t^*\right\}, t \in [0,T] \tag{2.16}$$

onde $W_t^*, t \in [0,T]$, é o movimento browniano padrão do ponto de vista da medida $\mathbb{Q}$. (2.17)

O argumento do parágrafo acima não termina a execução da primeira etapa de apreçamento via princípio de neutralidade ao risco. Isto porquê não provamos que $e^{-rt}S_t, t \in [0,T]$, também é martingal do ponto de vista da medida $\mathbb{Q}$. Surge então a pergunta: "Como provar este fato?" Eis a resposta. O processo $S_.$ representa o preço de uma ação da empresa. No texto acima argumentamos que tal preço relaciona-se com o ativo da empresa via a mesma relação que há entre uma opção europeia de compra e o seu ativo subjacente. Isto significa que $S_.$ não tem componente independente do processo $V_.$, e que os valores de $S_.$ foram introduzidos no mercado da maneira tal que o mercado não permita arbitragem. Seja que for esta maneira, ela deve dar o mesmo resultado que o método baseado no princípio de neutralidade ao risco. Se este tinha sido aplicado, então foi feito o seguinte procedimento: foi achada a medida martingal equivalente em relação a qual $e^{-rt}V_t, t \in [0,T]$, é martingal, e depois foram atribuidos valores a $S_.$ de maneira tal que $e^{-rt}S_t, t \in [0,T]$, seja martingal em relação a mesma medida. Mas a medida martingal equivalente mencionada na sentença acima é a medida $\mathbb{Q}$ construída no parágrafo anterior. Portanto, $e^{-rt}S_t, t \in [0,T]$, é martingal em relação de $\mathbb{Q}$. (Em resumo, podemos dizer que ao achar a medida equivalente em relação a qual $e^{-rt}V_t, t \in [0,T]$, é martingal, garantimos automaticamente que $e^{-rt}S_t, t \in [0,T]$, também seja martingal em relação a esta medida.)

Agora podemos executar a segunda etapa. Conforme explicado, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
TC_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[TC_T] \qquad (2.18)\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{I}_{\{V_T<D\}}\frac{FV_T}{D} + \mathbf{I}_{\{D\le V_T<F(N+N^{TC})+D'\}}F\right.\\
&\left. +\mathbf{I}_{\{V_T\ge F(N+N^{TC})+D'\}}\frac{V_T-D'}{N+N^{TC}}\right]
\end{aligned}
$$

Felizmente, a conta que a fórmula (2.18) manda a fazer é executável, pois V_T – a única variável aleatória da conta – tem distribuição Normal em relação à medida $\mathbb{Q}$. Assim, fazendo contas simples chegamos ao valor inicial do título conversível:

$$
\begin{aligned}
TC_0 &= \frac{FV_0}{D}\Phi(d_1) + Fe^{-rT}\left[\Phi(d_2)-\Phi(d_3)\right]\\
&+e^{-rT}\left(\frac{FN^{TC}-D}{N+N^{TC}}\right)\Phi(d_4) + \frac{V_0}{N+N^{TC}}\Phi(d_5) \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{ln\frac{D}{V_0} - \left(r+\frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\\
d_2 &= \frac{ln\frac{FN+D}{V_0} - \left(r-\frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\\
d_3 &= \frac{ln\frac{D}{V_0} - \left(r-\frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\\
d_4 &= d_2\\
d_5 &= \frac{ln\frac{V_0}{FN+D} + \left(r+\frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

Então, para aplicar esta fórmula (2.19) na prática, nos falta saber σ_V e V_0. Estes serão determinados seguindo as idéias de Merton que já foram mencionadas e usadas acima. Recordaremos: seguindo a definição de ações, o possuidor de uma ação possui o valor da empresa dividida por N caso a empresa não faliu, e não possui nada, caso faliu. Isto significa que:

$$S_T = \max\left\{0, \frac{V_T-D}{N}\right\} = \frac{1}{N}\max\{0, V_T-D\} \qquad (2.20)$$

ou, em outras palavras, uma ação pode ser vista como uma opção de compra europeia, cujo ativo subjacente é o valor da empresa dividido pelo número de ações e cujo preço de exercício é a dívida dividida por número de ações. Este fato nos permite expressar S_0 em forma analítica. Esta forma é nada mais que a fórmula de Black-Scholes para o preço de opção de compra européia, cujos parâmetros foram ajustados ao presente modelo conforme indicado acima. Tem-se que:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{V_0}{N}\Phi(d_6) - \frac{D}{N}e^{-rT}\Phi(d_7), \\ \text{onde} \quad d_6 &= \frac{\ln(V_0/D) + T(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V\sqrt{T}}, \\ d_7 &= \frac{\ln(V_0/D) + T(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V\sqrt{T}} \\ \text{e} \quad \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \quad x \in I\!R. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Portanto, ao pegar o valor de S_0 praticado no mercado, temos uma fonte adicional para a extração dos valores de σ_V e de V_0 da equação (2.21). Precisamos de mais uma fonte, pois o número de incógnitas é maior do que o de equações. No capítulo a seguir (fórmula 3.13) mostraremos como chegamos a fórmula abaixo.

$$\Phi\left(d_6\right) V_0\sigma_V = S_0\sigma_S. \tag{2.22}$$

Então, temos o sistema composto das seguintes equações :

a 1-a equação: vem da equação (2.19) na qual a esperança em relação a medida $\mathbb{Q}$ expressa-se por integrais em relação a densidade normal, já que V_T tem a distribuição normal conforme segue-se de (2.16) e (2.17). Esta equação daria o valor de TC_0 – o objetivo de nossa procura – se V_0 e σ_V fossem conhecidos. Infelizmente, eles não são; seus valores serão determinadas das equações 2 e 3 a serem descritas abaixo.

a 2-a equação: vem da equação (2.21). Vale notar que esta envolve duas incógnitas: V_0 e σ_V. Os valores de todas as outras variáveis (incluindo a S_0) são obervadas no mercado ou determinados por contrato do título conversível.

a 3-a equação: é a equação (2.22). Assim como no fizemos para a 2-a equação, chamaremos a atenção de nosso leitor que na 3-a equação as incógnitas são V_0 e σ_V; todas as outras variáveis envolvidas têm seus valores conhecidos e estes vieram ou de observações do mercado (como, por exemplo, o valor de σ_S - o da volatilidade do log-retorno de uma ação da empresa), ou são determinados por contrato do título conversível.

Escreveremos as equações (2.19), (2.21) e (2.22) como um sistema só:

$$\left\{\begin{array}{rcl} TC_0 & = & \frac{FV_0}{D}\Phi(d_1) + Fe^{-rT}\left[\Phi(d_2) - \Phi(d_3)\right] \\ & & +e^{-rT}\left(\frac{FN^{TC}-D}{N+N^{TC}}\right)\Phi(d_4) + \frac{V_0}{N+N^{TC}}\Phi(d_5) \\ S_0 & = & \frac{V_0}{N}\Phi(d_6) - \frac{D}{N}e^{-rT}\Phi(d_7), \\ \sigma_S & = & \frac{\Phi(d_6)V_0\sigma_V}{S_0} \end{array}\right. \tag{2.23}$$

A solução destas equações são os valores de (TC_0, σ_V, V_0), e o que procuramos desta solução é TC_0 - o preço inicial do título conversível . Com as equações (2.21) e (2.22) obtemos os valores de σ_V e V_0 uma vez determinados estes valores temos todos os valores de entrada para a equação (2.19) e desta forma o valor de TC_0 torna-se conhecido. O parâmetro r é conhecido no mercado. O valor de S_0 – o preço de uma ação da empresa no momento de emissão de títulos conversíveis – tomamos do mercado. Os parâmetros D^{TC},$D^{tit.corpor.}$,$D^{emprestado}$ e T são respectivamente determinados pelos contratos de título conversível ,títulos corporativos e títulos de empréstimo que a empresa emitiu; o número deles a serem emitidos, N^{TC} também é conhecido. Além disso, tomamos os valores de S_τ em instantes imediatamente anteriores ao tempo 0 (denotamos estes por $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\ell < 0$), e a partir dos valores de $S_{\tau_1}, S_{\tau_2}, \ldots, S_{\tau_\ell}$ calculamos σ_S – a volatilidade de log-retornos de uma ação de empresa. As observações de $S_{\tau_1}, S_{\tau_2}, \ldots, S_{\tau_\ell}$ são tomadas no mundo real, isto é, no mundo regido pela probabilidade $\mathbb{P}$. Esta não é a probabilidade hipotética $\mathbb{Q}$, a qual usamos para apreçamento. Mas conforme conhecido, as volatilidades em relação das medidas $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são idênticas.

2.3 Exemplo numérico do apreçamento

Uma empresa fictícia que possui todo seu capital aberto em 1 milhão de ações negociadas em bolsa, atualmente o preço de cada ação é de 10 unidades monetárias.
A empresa atualmente opera sem dívidas, entretanto para ela realizar um projeto de expansão a empresa necessita de uma certa quantia que para captar a empresa lançará 50 mil títulos conversíveis cada título pode ser convertido em uma ação da empresa na maturidade do título, ou o proprietário do título pode optar pelo valor de face do título que é 19,7605 sendo que este título tem um ano de duração.
A taxa livre de risco é de 5% ao ano e a volatilidade desta ação projetada para 1 ano é 80% ao ano.
Ou seja, temos que S_0=10;σ_S=0,8;T=1;(taxa livre de risco) r=0,05; N=1.000.000; N^{TC}=50.000 e F=19,7605.
Como o valor de face do título conversível F=19,7605 e N^{TC}=50.000 e a

empresa não possui dívidas a única dívida que a empresa teria que honrar seria com os títulos conversíveis assim $D^{TC} = D = N^{TC}F = 988.025$.
Para descobrir o valor do título conversível temos que primeiramente encontrar os valores de σ_V e V_0, isto pode ser feito resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \frac{V_0}{N}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{V_0}{D})+T(r+\frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) - \frac{D}{N}e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{V_0}{D})+T(r-\frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) - S_0 = F_1(\sigma_V, V_0) = 0, (2.21) \\ \Phi\left(\frac{\ln(\frac{V_0}{D})+T(r+\frac{1}{2}\sigma_V^2)}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) V_0\sigma_V - S_0\sigma_S = F_2(\sigma_V, V_0) = 0, (2.22) \end{cases}$$

Uma maneira equivalente de encontrar a solução deste sistema consiste em encontrar valores para σ_V e V_0 que minimiza $G(\sigma_V, V_0)$ em que a função G vale:

$$G(\sigma_V, V_0) = F_1^2(\sigma_V, V_0) + F_2^2(\sigma_V, V_0)$$

Usando métodos númericos de otimização temos que $V_0 = 10.941.830$ e $\sigma_V = 0,731212$.
De posse dos valores de V_0 e σ_V e dos valores que já foram fornecidos, encontramos o valor inicial do título conversível usando a equação (2.19).

$$TC_0 = \frac{FV_0}{D}\Phi(d_1) + Fe^{-rT}\left[\Phi(d_2) - \Phi(d_3)\right] + e^{-rT}\left(\frac{FN^{TC} - D}{N + N^{TC}}\right)\Phi(d_4) + \frac{V_0}{N + N^{TC}}\Phi(d_5) \quad (2.24)$$

Temos que o valor justo para a empresa emitir os títulos conversíveis é $TC_0 = 20$ desta forma a empresa fará uma captação de 20X50.000, ou seja, 1 milhão.
Como o valor de V_0 é 10.941.830 temos que $D_0 = V_0 - NS_0 = 941.830$ esta seria portanto a quantia que a empresa conseguiria se o título que a empresa emitiu, não permitisse a conversão em ações da empresa. Desta forma este direito de conversão da um incremento de 58.170 na captação de recursos o que se verifica na prática que o título conversível é uma forma de obter empréstimo a um custo menor.

2.4 Título conversível pode ser visto como título corporativo mais opcao de compra?

Na seção anterior, foi proposto um método de apreçamento usando apenas as informações em contrato do título conversível e o valor de suas ações junto com sua volatilidade.
Se pensarmos no título conversível do ponto de vista de seus direitos sabendo que o valor de uma ação no tempo T é os ativos da companhia menos valor de suas dívidas dividido pelo número de ações e que a falência indica que os ativos da companhia em T é inferior ao valor de suas dívidas, ou seja, temos

uma correspondência biunívoca entre os valores de V_T e valores de S_T desde que $S_T > 0$, assim podemos construir uma tabela de resultado financeiro olhando o valor das ações ao invés de olhar o valor da empresa.
Considere que neste mercado existem além das ações da companhia, tenhamos os seguintes produtos.

- O primeiro deles é o título conversível em questão, isto é, o título conversível, cujo valor inicial queremos achar.
- O segundo é o título corporativo com os mesmos parâmetros que o título conversível(com a única diferença de que onde o título conversível paga uma ação, o título corporativo pagará, em contrapartida, o valor da face, quer dizer, F).

- O terceiro é a opção européia de compra com o início no tempo 0, com a maturidade em T, e com o preço de exercício igual ao de face; o subjacente desta opção é a ação – aquela mesma que foi usada acima para o apreçamento do título conversível.

Com base nestes produtos podemos construir uma tabela com o resultado financeiro de cada produto em cada cenário de preço para as ações.

produto financeiro	cenário		
	caso $S_T = 0$	caso $0 < S_T < F$	caso $S_T \geq F$
título conversível	R	F	S_T
título corporativo	R	F	F
opção	0	0	$S_T - F$

A tabela deixa claro que

possuir um título conversível equivale,
do ponto de vista de direitos, (2.25)
a ter um título corporativo mais uma opção europeia de compra.

O fato (2.25) desencadeia a seguinte

Conclusão 1. Caso o mercado disponibiliza as opções cujo subjacente é a ação da empresa que emite títulos conversíveis, então o apreçamento destes títulos conversíveis não apresenta dificuldades significativas sendo comparada com o apreçamento de título corporativo já estudado por Merton em 1974, pois o preço do título conversível é a soma dos do título corporativo e do da opção.

A Conclusão 1 aparente de invalidar todo nosso esforço na elaboração de apreçamento de títulos conversíveis. De fato, quando o mercado pratica opções, então a igualdade (2.25) dá o preço procurado como a soma dos preços conhecidos (a da opção é conhecida no mercado, e a de título corporativo é calculada pelo método de Merton). Já caso contrário, quer dizer, quando a opção envolvida não é praticada pelo mercado, parece que não teríamos dificuldades induzidas por isto, pois poderíamos calcular o preço desta opção pela fórmula de Black-Scholes. Acontece que isto está errado, pois a fórmula de Black-Scholes aplica-se no caso quando o os log-retornos da ação segue movimento Browniano. No presente modelo (o nosso e o do Merton, que usou para apreçar o título corporativo) o movimento browniano é para o valor da empresa. Já a ação da empresa é vista como opção com o valor da empresa como seu subjacente, o que implica que os log-retornos da ação não seguem o movimento browniano ver na parte (3.2.1) desta dissertação.
Um outro fato que traria desvantagem em utilizar o método de Black-Scholes para calcular o preço da opção é que neste modelo não existe a possibilidade do preço da ação custar zero na maturidade do contrato possibilidade que pode ser bastante provável em casos de empresas com dificuldades financeiras. Outra desvantagem esta no fato de que quando um título conversível é convertido a empresa fica com uma maior quantidade de ações que possuem como lastro o mesmo patrimônio, assim a conversão de títulos conversíveis em ações inflacionaria o mercado de ações tal fato não pode ser mensurado se você usar a fórmula de Black-Scholes para calcular a opção junto com a fórmula de Merton para o cálculo do título corporativo.
Entretanto, apreçar um título corporativo usando os ativos da companhia apresenta uma desvantagem que esta no fato de a empresa no mundo real poder falir a qualquer momento e no modelo a falência só pode ocorrer na maturidade do contrato. Este método é um caso particular de fórmulas de apreçamento apresentadas na Seção 2.2 do trabalho "Modeling and Valuation of Credit Risk" da autoria de T. Bielecki, M. Jeanblanc e M. Rutkowski publicado em coletânea [5].

Capítulo 3

Apreçamento de títulos de crédito

Neste capítulo da dissertação será abordado o funcionamento dos títulos de crédito. A compreensão do funcionamento deste título ajuda no entendimento do título conversível que foi bastante abordado no capítulo anterior. Título de crédito é basicamente um contrato entre o credor (o que concedeu o empréstimo) e o beneficiário, o credor entrega ao beneficiário uma quantia em dinheiro e este se compromete a entregar a quantia acrescida de juros após um período T de tempo.
A necessidade deste capítulo na dissertação reside no fato de que a idéia usada no apreçamento dos títulos de crédito antecedeu ao dos títulos conversíveis e existem muitos aspectos em comum na fórmula de apreçamento dos dois tipos de títulos. Neste capítulo revelaremos com detalhes o mecanismo de apreçamento de tais títulos que na realidade é um caso particular de um título conversível sem direito a conversão e vamos também mostrar a demonstração da fórmula (2.22) que foi utilizada para apreçar o título conversível .

3.1 Título de crédito sem risco

Uma característica muito importante no estudo dos títulos de créditos é quanto ao risco que eles possuem quando o beneficiário do título é o governo dizemos que o título é praticamente sem risco. Quando o beneficiário do título é uma empresa privada neste caso dizemos que o título apresenta certo grau de risco.
Nesta seção vamos abordar os títulos sem risco emitidos por governos apenas para ilustrar, uma coisa que já podemos adiantar é que este título apesar de ser chamado de livre de risco o credor possui certo risco quando adquire estes

títulos caso a taxa de juros paga por este título mudar.

A fórmula utilizada para o apreçamento de um título sem risco é:

$$V_0 = \frac{V_T}{(1+r)^T} \sum_{i=1}^{T-1} \frac{C_i}{(1+r)^i} \tag{3.1}$$

Onde:

V_0: valor atual do título;

V_T: valor de face do título, é o quanto ele vale no período T;

r: taxa de juros;

T: número de períodos;

C_i: valor dos cupons pagos em cada unidade de tempo;

Os valores dos cupons e o valor de face do título são geralmente fixados no momento da emissão do título e permanecem até o término do contrato, entretanto a taxa de juros pode variar de acordo com a necessidade do governo.
Agora vamos mostrar um exemplo de como utilizar a fórmula (3.1) para apreçar um título sem risco. Neste exemplo será destacado o fato de apesar destes títulos não possuírem risco, existe a possibilidade daquele que adquiriu o título perder parte do capital dependendo do momento que o título é comprado.

Exemplo. Um título de 10 anos é emitido com valor de face igual à R$1.000,00 e cupom de R$50,00 ao ano supondo que a taxa de juros seja de 12% ao ano o valor do título fica:

$$V_0 = \frac{1000}{(1+0,12)^{10}} \sum_{i=1}^{9} \frac{50}{(1+0,12)^i} \cong 583,39$$

Agora suponha que passou um ano e que a taxa de juros do país mudou repentinamente para 12,5% ao ano.
Antes da mudança da taxa o título valia:

$$V_0 = \frac{1000}{(1+0,12)^{9}} \sum_{i=1}^{8} \frac{50}{(1+0,12)^i} \cong 608,99$$

E após o reajuste o valor do título fica:

$$V_0 = \frac{1000}{(1+0,125)^9} \sum_{i=1}^{8} \frac{50}{(1+0,125)^i} \cong 590,54$$

Verifique que o valor do título caiu de valor, portanto se uma pessoa adquiriu o título ao valor de R\$608,99 e a taxa de juros aumenta instantes após esta pessoa adquirir o título se esta pessoa precisar se desfazer do título terá que se contentar com R\$590,54. Este tipo de operação resultaria em prejuízo de R\$18,45 (R\$608,99-R\$590,54).
Por outro lado se a taxa de juros cair o valor do título aumenta.

3.2 Títulos com risco

Para títulos com risco de inadimplência que geralmente são os títulos emitidos por empresas privadas, o valor do prêmio é maior que dos títulos livre de risco. Nestes tipos de títulos o valor aumenta à medida que aumenta o risco da empresa se tornar inadimplente.
Nos títulos livre de risco o fluxo de pagamentos do beneficiário para o credor ocorre de maneira determinística sem risco. Os títulos com risco o fluxo de pagamentos não é determinístico, entretanto o valor esperado deste título num mundo sem arbitragem deve ser igual ao do título livre de risco nas mesmas condições de pagamento.

Supondo que o mercado não admita possibilidade de arbitragem, ou seja, existe uma medida $\mathbb{Q}$ de probabilidade tal que (ver Observação1), o valor esperado do título em relação a esta medida descontado a taxa livre de risco r é o valor inicial do investimento.
Assim:

$$X_0 = \mathrm{e}^{-rT}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T/\mathcal{F}_0) \tag{3.2}$$

Sendo:

X_0 : preço inicial do título;

X_T : valor do título no vencimento;

O resultado financeiro do título no instante T é dado por:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & 1 \\
X_0 \arrow[ur, "1-q"] \arrow[dr, "q"'] & \\
 & K
\end{tikzcd}$$

$t=0 \qquad t=T$

Em que K é a fração de X_0, isto ocorre pois muitos empréstimos podem possuir uma garantia em caso da empresa se tornar insolvente.
Caso a empresa honrar seu compromisso ela vai pagar uma unidade monetária, chamamos este de valor de face do título.
O valor q é a probabilidade da empresa se tornar inadimplente, ou seja, do título pagar K unidades monetárias, portanto o título pagará uma unidade com probabilidade $(1-q)$.
Aceitanto que o valor de X_0 pode ser escrito como e^{-RT} em que R é a taxa desconto do título.
Agora fazendo todas as substituições possíveis na equação (3.2) temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-RT} &= \mathrm{e}^{-rT}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T/\mathcal{F}_0) \Rightarrow \\
\mathrm{e}^{T(r-R)} &= 1.(1-q) + K.q \Rightarrow \\
q &= \frac{1-\mathrm{e}^{T(r-R)}}{1-K}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Conhecendo o valor de mercado de um título de crédito e de um título livre de risco, aplicando a equação (3.3) podemos determinar a probabilidade martingal de inadimplência do título. Esta metodologia é eficiente para se calcular risco de falência de uma empresa sobre o ponto de vista da medida $\mathbb{Q}$ de probabilidade, mas este cálculo pode ser impraticável quando os títulos da empresa não são negociados no mercado.
Na prática existe no mercado as chamadas agências de rating que são empresas cuja função é dar classificação de risco e estabelecer spreads (quantidade de juros de acréscimo em relação a taxa livre de risco) para cada empresa que as agências de rating analizam. No mundo as agências mais conhecidas são S&P (Standart Poor's) e a Moody's.
Usando o sistema da Moody's temos que as empresas com melhor rating são empresas cuja a probabilidade de falir é quase nula estas empresas são

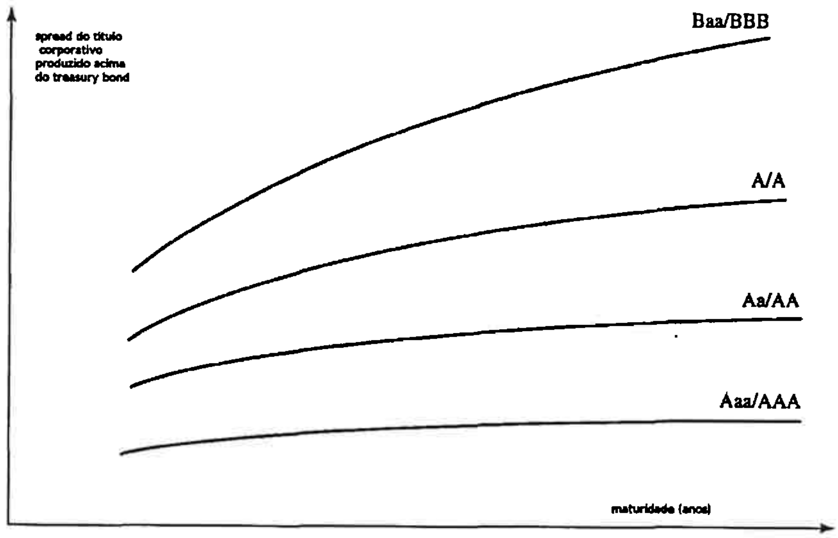


Figura 3.1: Curvas de spread em função do rating e do tempo de um título (fonte Hull)

classificadas com o rating Aa e depois vem A,Baa,Ba,B e Caa como o pior rating. Somente ratings maior ou igual a Baa são pertencentes a empresas consideradas "investiment grade". Já os ratings correspondentes para a S&P são respectivamente Aaa,Aa,A,Baa,Ba,B.

Uma outra abordagem para o apreçamento dos títulos de crédito com risco de inadimplência foi proposta por Merton [2] em 1974 que relaciona valor patrimonial líquido de uma empresa com o valor de todas suas ações com os valor dos ativos e sua dívida. Se uma empresa for liquidada esta terá que pagar todas suas dívidas cuja fonte de pagamento vem dos ativos da companhia assim o que sobra é o valor patrimonial líquido. No caso de falência da empresa quando as dívidas desta ser superior aos seus ativos, os investidores que possuem parte do patrimônio (ações) tem responsabilidade limitada, ou seja, neste caso eles só perdem o capital investido na companhia. Assim o valor das ações de uma companhia é visto como uma opção de compra sobre os ativos da companhia (ativo significa tudo que a empresa tem, imóveis,máquinas,mercadoria,etc sem descontar nenhum débito) com o valor da dívida como preço de exercício desta opção.

Portanto:

$$E_T = (V_T - D_T)^+ \tag{3.4}$$

Onde:

E_T: valor do patrimônio líquido da empresa em T;

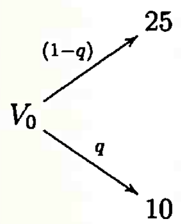
V_T: ativo da companhia em T;

D_T: dívida da empresa a ser paga no instante T;

A contribuição de Merton consiste em relacionar as 3 variáveis da equação (3.4) com o valor de mercado da empresa, isto é, o valor de todas as ações da companhia. A relação é que o valor de mercado da empresa hoje (chamamos de E_0) num mundo sem arbitragem é o valor esperado do patrimônio líquido em relação a medida $\mathbb{Q}$ de probabilidade.

$$E_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(V_T - D_T)^+\right] \tag{3.5}$$

Exemplo. Este exemplo tem por objetivo mostrar o funcionamento da fórmula 3.5 no mundo discreto faremos isto antes de extrapolarmos para o mundo contínuo.
Uma empresa em dificuldades adquire uma dívida e pagará 15 milhões para financiar um projeto que em caso de sucesso os ativos passam a valer 25 milhões e caso contrário os ativos valerão 10 milhões.
O valor atual de mercado da companhia, isto é, o valor de todas suas ações é de 8 milhões (E_0), a taxa livre de risco é 10% ao período. Qual o valor presente da dívida?
Temos a árvore de possibilidades do preço do ativo da companhia dada por:



$t = 0$ $\quad$ $t = 1$

Para determinarmos o valor presente da dívida da empresa que é o valor que esta consegue captar de um banco ou do mercado com a emissão de títulos, precisamos primeiro determinar o valor inicial do ativo da companhia

(valor de V_0), entretanto devemos saber a probabilidade q.
O valor de probabilidade q pode ser calculado usando a equação (3.4) permite determinarmos o valor patrimonial líquido(VPL) da companhia no final do período. Assim construímos uma árvore para o ativo da empresa temos tabém uma árvore para o valor patrimonial líquido da empresa.

$$\begin{tikzcd} & 10 = (25-15)^+ \\ 8 \arrow[ur, "(1-q)"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & 0 = (10-15)^+ \end{tikzcd}$$

$t = 0$ $t = 1$

Na observação 1 temos que a medida martingal de probabilidade do ativo e da opção devem ser as mesmas para que não exista arbitragem, da mesma maneira aqui temos que a medida martingal de probabilidade do VPL deve ser igual ao dos ativos da companhia. Assim o valor de q é:

$$10 * (1-q) + 0 * q = 1,1 * 8 \Rightarrow q = 0,1200$$

Agora podemos calcular o valor de V_0 que fica:

$$1,1 * V_0 = (1-q) * 25 + q * 12 \Rightarrow V_0 \cong 21,209389$$

Como $V_0 - D_0 = E_0$ temos que $D_0 = V_0 - E_0$ portanto:

$$D_0 \cong 13,209389$$

Este é portanto o valor que a empresa consegue captar de um banco ou obter com a emissão de títulos de crédito. Se o valor do título estiver superestimado e a empresa pode realizar uma arbitragem lançando títulos da dívida e com o dinheiro comprando ações da companhia em caso contrário (título subestimado) ela poderia lançar ações no mercado e com o dinheiro recomprar os títulos da dívida.
Como o valor do compromisso a ser pago é de 15 milhões e o valor presente da dívida é de 13,209389 milhões a taxa de desconto do título será de:

$$E_1(1+R) = E_0 \Rightarrow R = 13,555556\%$$

Na realidade a proposta de apreçamento dos títulos de crédito realizada por Merton no tempo contínuo, suponha-se que os ativos da empresa mudam continuamente segundo um processo:

$$V_T = V_0 \, e^x, x \sim \mathrm{N}(\mu_V T, \sigma_V^2 T) \tag{3.6}$$

Da mesma maneira que no caso da opção européia o valor inicial das ações da companhia é o valor esperado do VPL em relação a medida $\mathbb{Q}$ para evitar que o mercado possua arbitragem assim:

$$E_0 = e^{rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((V_T - D)^+) = e^{rT}\mathbb{E}((V_T^* - D)^+) \tag{3.7}$$

Onde V^* é um processo martingal no qual $\mu_V = r - \sigma_V^2/2$ e a volatilidade do processo é σ_V^2.

Assim:

$$E_0 = V_0 \Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r + \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V \sqrt{T}} \right) - De^{-rT}\Phi \left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r - \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V \sqrt{T}} \right) \tag{3.8}$$

Na equação (3.8) o valor de E_0 é o valor de mercado da empresa (valor de todas suas ações que estão no mercado), D é a dívida a ser paga no instante T, r a taxa livre de risco, σ_V é a volatilidade do log-retorno do ativo.
Nesta equação todos os valores são conhecidos exceto os valores de V_0 e o valor de σ_V.
Estamos diante de um problema em que temos 1 equação e duas incógnitas.
Suponha que a equação diferencial estocástica do ativo seja dada por:

$$dV = V_0 \mu_V dt + V_0 \sigma_V dB_t \tag{3.9}$$

Como o preço das ações é função do preço do ativo da companhia e do tempo, ou seja, $E_t = E(V_t, t)$ aplicando o lema de Itô conseguimos encontrar a equação diferencial estocástica das ações.

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V} V_0 \mu_V + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2} V_0^2 \sigma_V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right) dt + \frac{\partial E}{\partial V} V_0 \sigma_V dB_t \tag{3.10}$$

Usando a suposição que o modelo de apreçamento de opções de Black-Scholes fez a repeito da equação diferencial estocástica do preço da ação temos:

$$dE = E_0 \mu_E dt + E_0 \sigma_E dB_t \tag{3.11}$$

Assim igualando as equações (3.10) e (3.11) temos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial V}V_0\mu_V + \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{2}V_0^2\sigma_V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} = E_0\mu_E \\ \frac{\partial E}{\partial V}V_0\sigma_V = E_0\sigma_E \end{cases} \quad (3.12)$$

A primeira equação do sistema (3.12) que surgiu quando igualamos a parte que multiplicava o dt foi descartada só vamos trabalhar com a segunda equação deste sistema pois esta equação não depende do drift do processo.
O valor de $\frac{\partial E}{\partial V}$ é o valor da derivada parcial da fórmula 3.8 em relação a V este valor pode ser calculado e temos como resultado:

$$\frac{\partial E}{\partial V} = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r + \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right)$$

Por explicação mais exata temos uma nova equação que relaciona σ_V e V_0 com os demais valores observados no mercado, esta equação é dada por:

$$\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r + \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) V_0\sigma_V = E_0\sigma_E \quad (3.13)$$

O valor de mercado da empresa (E_0) e sua volatilidade (σ_E) são mensuráveis se a empresa tiver ações negociadas em bolsa, correspondem respectivamente ao preço unitário de uma ação vezes o número total de ações e σ_E é a voltatilidade do log-retorno da ação.
Assim devemos resolver o sistema com as equações (3.8) e a equação (3.13) para encontrar os valores de V_0 e σ_V.[1]
Conhecendo o valor de V_0 temos que $D_0 = V_0 - E_0$, ou seja, encontramos o valor presente da dívida desta forma é realizado o apreçamento do título de crédito. A taxa desconto do título é:

$$R = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{D}{D_0}\right) \quad (3.14)$$

Uma outra possibilidade que temos com modelo de apreçamento do título de crédito proposto por Merton esta na possibilidade de podermos calcular a probabilidade de falência da companhia que significa encontrar a probabilidade dos ativos da companhia no instante T ser menor que o valor de sua dívida. Supondo que o mercado não possua possibilidade de arbitragem temos que:

$$V_T = V_0 e^{X_T}, X \sim \text{N}((r - \sigma_A^2/2)T, \sigma_A^2 T)$$

[1]Para resolver o sistema não linear F(x,y)=0 e G(x,y)=0, nós podemos usar a rotina Solver do Excel para encontrar os valores de x e y que minimizam $F(x,y)^2 + G(x,y)^2$.

Assim devemos calcular a probabilidade:

$$
\begin{aligned}
P(V_T < D) &= P(V_0 e^{X_T} < D) \Rightarrow \\
P\left[X < ln\left(\frac{D}{V_0}\right)\right] &= P\left[Z < \frac{ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - (r - \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right] \Rightarrow \\
&= \Phi\left(\frac{ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Exemplo (Hull) Vamos apreçar um título de crédito usando o método de Merton.

O valor de mercado de uma companhia é 3 milhões (número de ações vezes o valor por ação),a volatilidade do log-retorno das ações é 80% ao ano.

A empresa vai contrair um débito que será pago em um ano sendo que o valor pago será de 10 milhões, a taxa livre de risco é de 5% ao ano.

Pelo enunciado deste exemplo temos que $E_0 = 3$;$\sigma_E = 0,8$;$T = 1$;$r = 0,05$;D=10.

Usando o sistema das equações (3.8) e (3.13) temos que $V_0 = 12,40$ e $\sigma_V = 0,2123$ assim o valor presente da dívida será $D_0 = V_0 - E_0 = 12,40 - 3 = 9,40$ usando a equação (3.14) temos que a taxa de desconto do título será 6,19%. Usando a equação (3.15) verifica-se que a probabilidade de inadimplência será 12,7%.

3.2.1 Diferenças entre volatilidades

Nesta seção iremos relatar a diferença entre a volatilidade das ações e dos ativos da empresa.

Sabemos que a relação entre as volatilidades em um instante t é dada por:

$$
\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r + \frac{\sigma_{V_t}^2}{2})(T-t)}{\sigma_{V_t}\sqrt{T-t}}\right) V_t \sigma_{V_t} = E_t \sigma_{E_t} \tag{3.16}
$$

Suponha que seja feita uma simulação que as volatilidades da ação seja constante, ou seja, temos

$$
\sigma_{E_t} = \sigma_{E_{t_1}} = \sigma_{E_{t_2}} = \cdots = \sigma_{E_T}
$$

A esta igualdade acima aplicando a relação (3.16) temos por corolário:

$$
\sigma_{E_t} = \Phi\left(V_{t_1}, t_1, \sigma_{V_{t_1}}\right) \frac{V_{t_1}\sigma_{V_{t_1}}}{E_{t_1}} = \Phi\left(V_{t_2}, t_2, \sigma_{V_{t_2}}\right) \frac{V_{t_2}\sigma_{V_{t_2}}}{E_{t_2}} = \cdots \tag{3.17}
$$

Suponha agora que $t_2 > t_1$, ou seja, t_2 é instante posterior a t_1 e $V_{t_2} < V_{t_1}$ como consequência temos:

$$\begin{cases} E_{t_2} < E_{t_1} \\ \Phi(V_{t_2}, t_2, \sigma_{V_{t_2}}) < \Phi(V_{t_1}, t_1, \sigma_{V_{t_1}}) \end{cases}$$

Desta forma temos que no instante posterior t_2, o valor dos ativos da companhia decresceu como consequência o mesmo ocorreu com suas ações e o mesmo ocorrendo com a função Φ, pois esta função é monotamente crescente. Com as suposições que foram feitas para que a igualdade (3.17) continue sendo válida teremos que

$$\sigma_{V_{t_2}} > \sigma_{V_{t_2}}$$

Desta forma fica evidente que a suposição de que σ_E é constante com o tempo se e somente se o valor de σ_V não ser como consequência só podemos fazer a suposição de que a volatilidade é constante dos ativos da companhia ou de suas ações.

Ou seja, se o log dos ativos segue um movimento Browniano geométrico com volatilidade constante o preço de suas ações não pode ser um movimento Browniano geométrico com volatilidade constante, entretanto seria possível que o log das ações descrevessem um movimento de volatilidade constante mas neste caso os ativos deixaria de ter volatilidade constante.

Apêndice A

Código em R para apreçar título conversível

O código mostrado aqui foi utilizado para calcular o preço do título conversível e os dados que estão, são do exemplo (2.3).

```
#definindo as funções que serão usadas no estudo
#calcula o valor da opcao de compra por black-scholes
bs<-function(a,d,r,t,vol){
r<-log(1+r)
d1<-(log(a/d)+(r+vol^2/2)*t)/vol/sqrt(t)
d2<-d1- vol*sqrt(t)
bs=a*pnorm(d1)-d*exp(-r*t)*pnorm(d2)
bs
}

#derivada parcial da equacao de BS em relacao o valor da acao
delta<-function(a,d,r,t,vol){
r<-log(1+r)
d1<-(log(a/d)+(r+vol^2/2)*t)/vol/sqrt(t)
delta<-pnorm(d1)
delta
}

#funcao objetivo a ser minimizada para o calculo do ativo e sua volatilidade
objetivo<-function(x){
a<-x[1]
va<-x[2]
f1<-s-bs(a,d,r,t,va)
f2<-s*vol-delta(a,d,r,t,va)*a*va
objetivo<-f1^2+f2^2
objetivo
}

ativo<-function(s,d,r,t,vol){
x<-c(s+d,vol)
valor<-optim(c(s+d,va=vol),objetivo,control=list(maxit=300,reltol=1e-15))
x1<-valor$par[1]
x2<-valor$par[2]
names(x1)<-"Ativo"
names(x2)<-"volatilidade do Ativo"
structure(list(a=x1,va=x2))
```

```
}

    #calculando o valor do título conversível usando os dados do ativo
tit_conv<-function(f,N,n,s,d,r,t,vol){
A<-ativo(s,d,r,t,vol)
r<-log(1+r)
d1<-(log(d/A$a)-(r+A$va^2/2)*t)/sqrt(t)/A$va
d2<-(log((f*N+d)/A$a)-(r-A$va^2/2)*t)/sqrt(t)/A$va
d3<-(log(d/A$a)-(r-A$va^2/2)*t)/sqrt(t)/A$va
d4<-d2
d5<-(log(A$a/(f*N+d))+(r+A$va^2/2)*t)/sqrt(t)/A$va
tit_conv<-f*A$a/d*pnorm(d1)+f*exp(-r*t)*(pnorm(d2)-pnorm(d3))+
exp(-r*t)*(f*n-d)/(N+n)*pnorm(d4)+A$a/(n+N)*pnorm(d5)
names(tit_conv)<-"título conversível"
return(tit_conv)
}

#Dados do problema
s<-10 #é o valor de mercado da empresa em milhoes, valor da ação X numero de acoes
t<-1 # tempo em anos
d<-0.988025 #valor da dívida em milhoes
r<- 0.04879016#retorno livre de risco em um ano, nao é taxa!
vol<-.8 #volatilidade anual do log-ret das açoes da empresa
N<-1000000 #qtde de açoes da empresa
n<-50000 #qtde de ações convertidas no CB
f<-d/n
tit_conv(f,N,n,s,d,r,t,vol)*n
x<-as.vector(ativo(s,d,r,t,vol)$a-s)
x
(tit_conv(f,N,n,s,d,r,t,vol)*n-x)*10^6
ativo(s,d,r,t,vol)
```

Referências Bibliográficas

[1] Bingham, N. H. *Risk-neutral valuation:pricing and hedging of financial derivatives.*-2nd Springer 2000 (pag 141,142).

[2] Merton, R. C.,*"On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates"*, Journal of Finance, 2(1974), 449-470.

[3] Ingersoll, Jr., J. (1977). *A Contingent-clains valuation of convertible securities subject to credit risk.* Journal of Finance , 789-819.

[4] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1980). *Analizing convertible bonds.* Journal of Finance and Quantitative Analysis, 907-929.

[5] K. Back, T.R. Bielecki, C. Hipp, S. Peng, W. Schachermayer, *Stochastic Methods in Finance.* Springer 2004 (Lecture Notes in Mathematics Vol. 1856).